第1次作业

危国锐 120034910021

（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘要：给出了关于移动控制体的雷诺输运定理，它是含参变量定积分的Leibniz定理在高维情形下的推广. 由此统一了对描述流体运动的两种方法——Lagrangian描述和Eulerian描述的理解.

关键词：关键词1，关键词2.

Title

Guorui Wei 120034910021

(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

**Abstract**：Abstract.

**Keywords**：keyword1, keyword2.

**目 录**

[摘要 I](#_Toc96813594)

[Abstract I](#_Toc96813595)

[1 流体运动学基础 1](#_Toc96813596)

[2 第1题 2](#_Toc96813597)

[2.1 问题描述 2](#_Toc96813598)

[2.2 解决方案 3](#_Toc96813599)

[3 第2题 3](#_Toc96813600)

[3.1 问题描述 3](#_Toc96813601)

[3.2 解决方案 4](#_Toc96813602)

[4 第3题 4](#_Toc96813603)

[4.1 问题描述 4](#_Toc96813604)

[4.2 解决方案 4](#_Toc96813605)

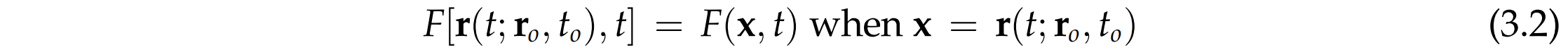
[References 4](#_Toc96813606)

[附录1 4](#_Toc96813607)

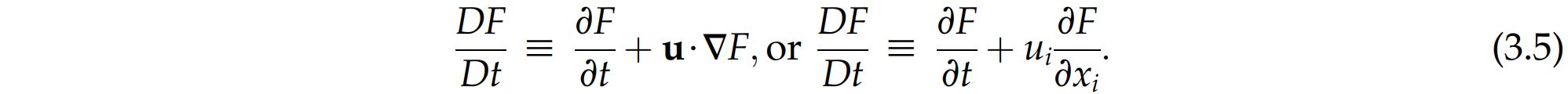
# 流体运动学基础

本节简要回顾流体运动学中一些基本且重要的结果.

描述流体运动的两种方法——Lagrangian描述（流体质点的观点）和Eulerian描述（场的观点）的联系被定义为 ([Kundu et al., 2016, p. 82](#_ENREF_1))



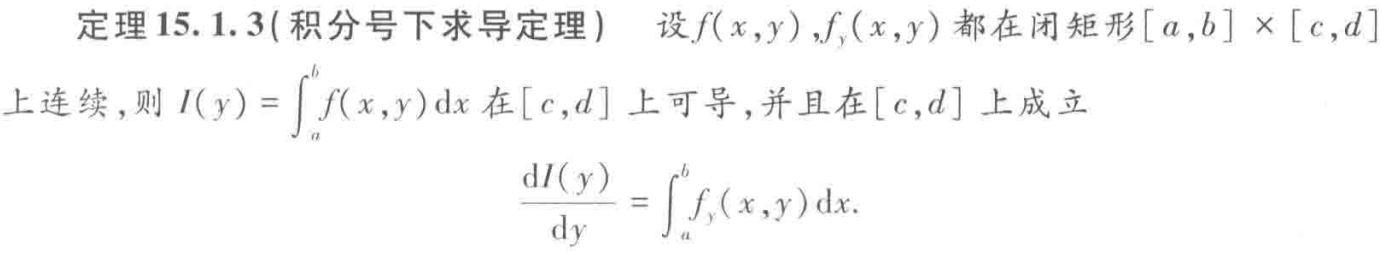
其中是任意标量，向量或张量. 由此定义随体导数 (*material*, *substantial*, or *particle* *derivative*)，它是Lagrangian描述下对时间的全导数，并可导出其Eulerian描述下的表达式 ([p. 83](#_ENREF_1))：



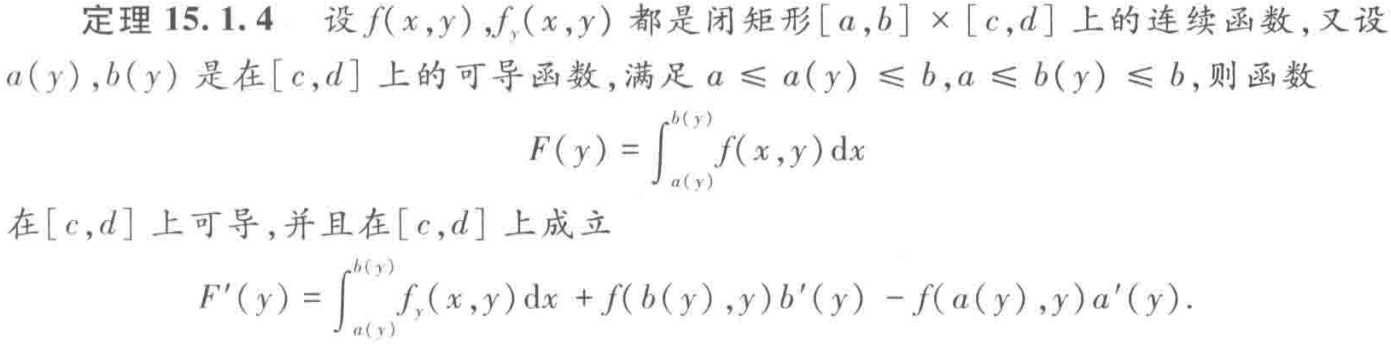
上式给出了两种描述方法的联系.

[Kundu et al. (2016)](#_ENREF_1) 引入移动控制体 (Control Volume, CV) 的概念，推导了雷诺输运定理 (Reynolds transport theorem, RTT). 由此可建立对两种描述方法的统一的理解.

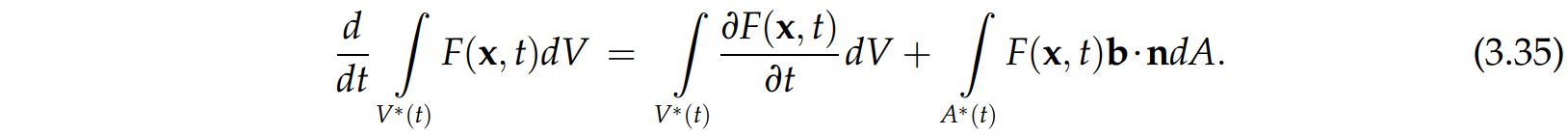
RTT描述的是移动控制体（不必追随流体质点）所包含的物理量对时间的变化率. 从数学上，就是建立了被积函数和积分区域都含参变量的积分对这参变量的导数. 事实上，我们在数学分析课程 ([陈纪修 et al., 2019, p. 315](#_ENREF_3)) 中已证过一维RTT，那就是下面的积分号下求导定理



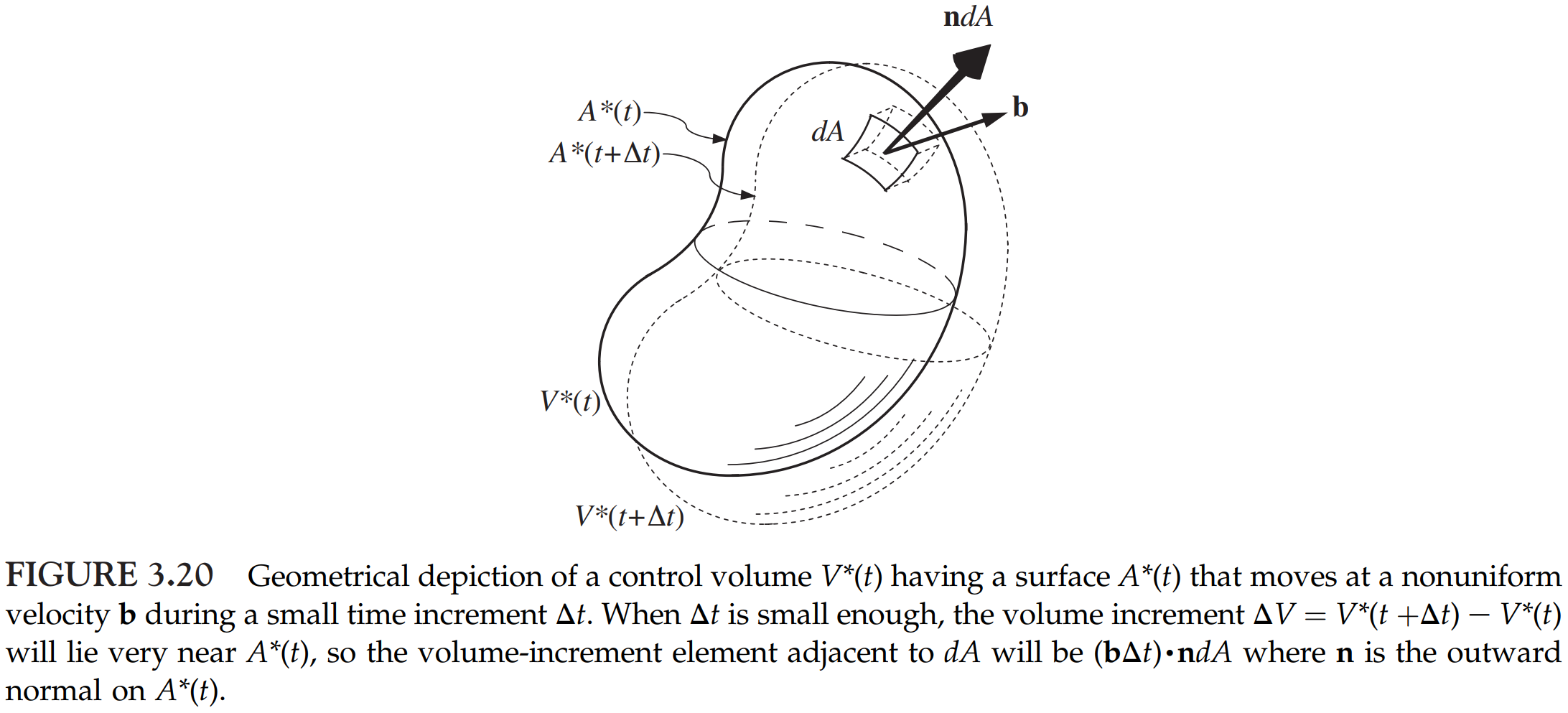
和Leibniz定理



[Leibniz定理](#Thm_15_1_4)在二维、三维情形下的推广，便是著名的雷诺输运定理 (Reynolds transport theorem, RTT). [Kundu et al. (2016)](#_ENREF_1) 从数学上不很严格地给出了推导 ([pp. 99-103](#_ENREF_1))，其结果是



式中各字母的含义示于下图 ([Fig 3.20](#_ENREF_1)). 这样，Lagrangian描述和Eulerian描述，就分别对应于（[3.35](#Eq_3_35)）中的情形. 如此，两种描述方法既是联系的，更是统一的.



从RTT ([3.35](#Eq_3_35)) 出发，可获得一些重要推论. 例如，在 ([3.35](#Eq_3_35)) 中取就得到

利用（1），在（[3.35](#Eq_3_35)）中取就得到RTT的微分形式：

在（1）中取便得到人们熟悉的速度散度的物理意义（相对体积膨胀率）. 在（2）中取便得到随体导数公式，它是“the *Eulerian representation of the Lagrangian derivative as applied to a field*.”([Vallis, 2017, p. 5](#_ENREF_2))

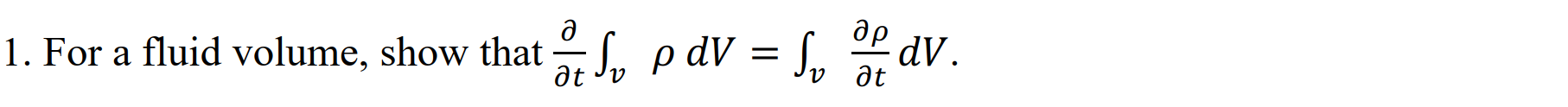
另外，吴望一从定义出发，推导了线、面、体元的随体导数 ([1982a, pp. 135-138](#_ENREF_4)) 和体、面、线积分的随体导数 ([1982b, pp. 479-484](#_ENREF_5)). 这些结果可视为RTT（[3.35](#Eq_3_35)）及其微分形式（2）在曲线曲面情形下的推广.

关于RTT ([3.35](#Eq_3_35))，受[Vallis (2017, pp. 3-7)](#_ENREF_2) 和[吴望一 (1982a, pp. 135-138)](#_ENREF_4) 的启发，现重新推导如下. 这种推导方法在数学上不严格，然而物理意义较清晰，便于记忆. 应该指出，这种方法不是我的原创.

在推导中利用了（1）（2）.

# 第1题

## 问题描述



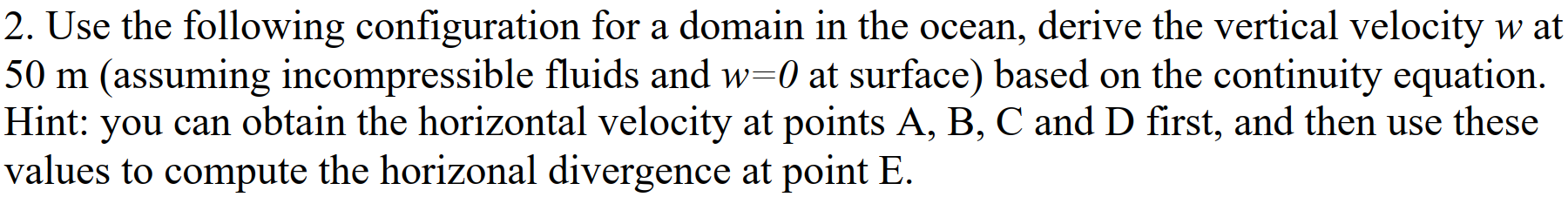
## 解决方案

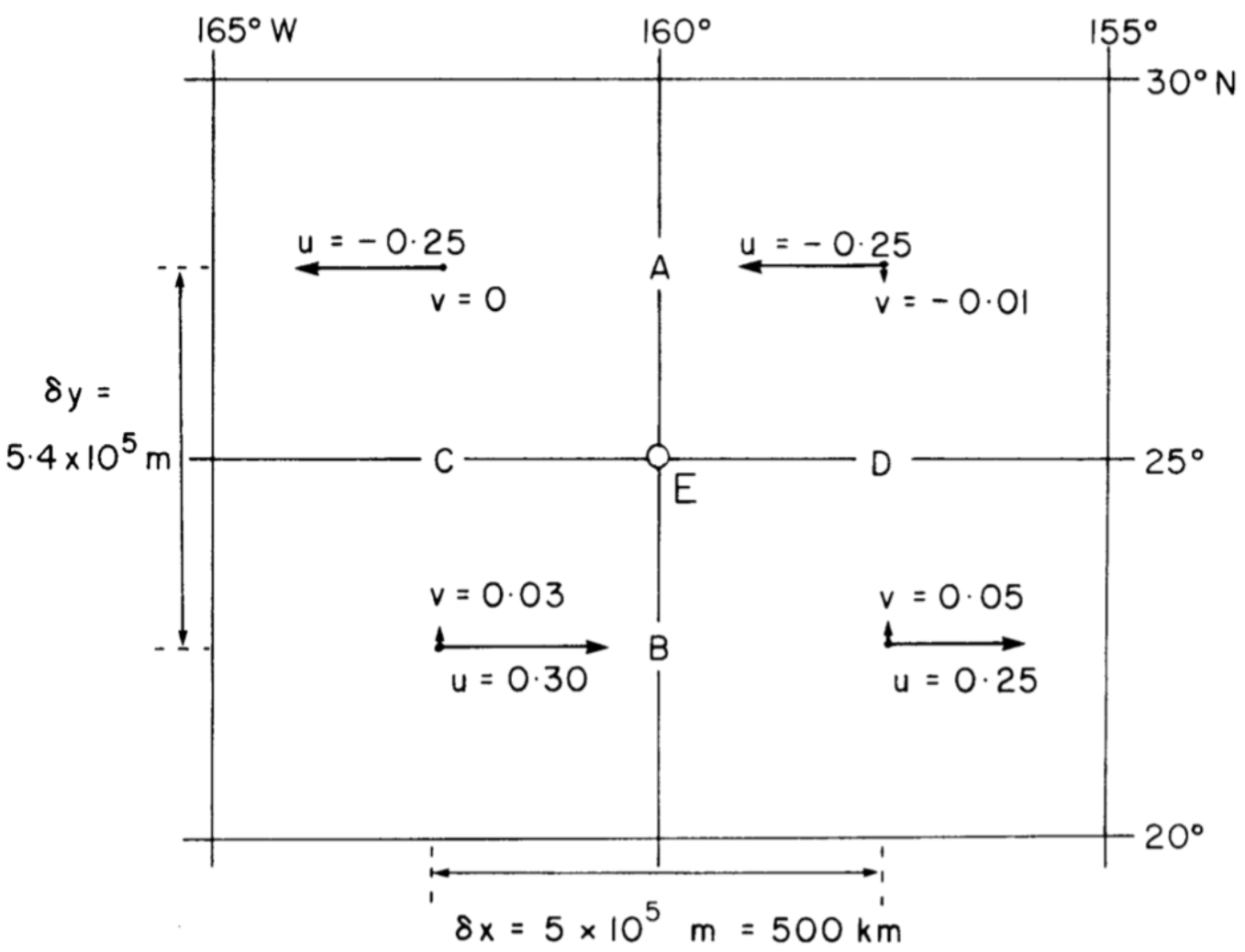
在RTT（[3.35](#Eq_3_35)）中取 立得

此时，积分区域是空间位置固定的控制体 (Control Volume, CV). 事实上，上式就是[积分号下求导定理](#Thm_15_1_3)在三维情形下的推广.

# 第2题

## 问题描述

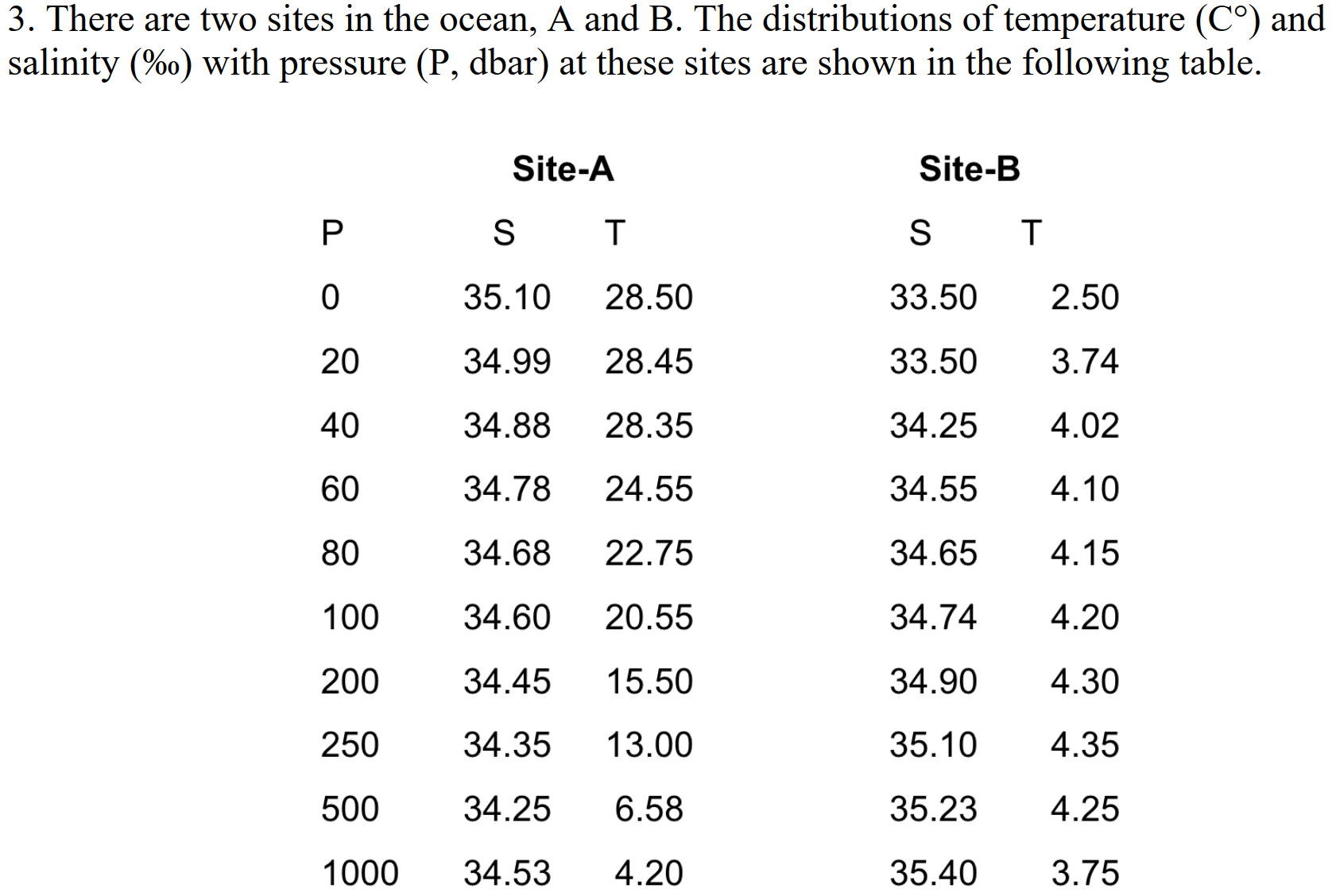


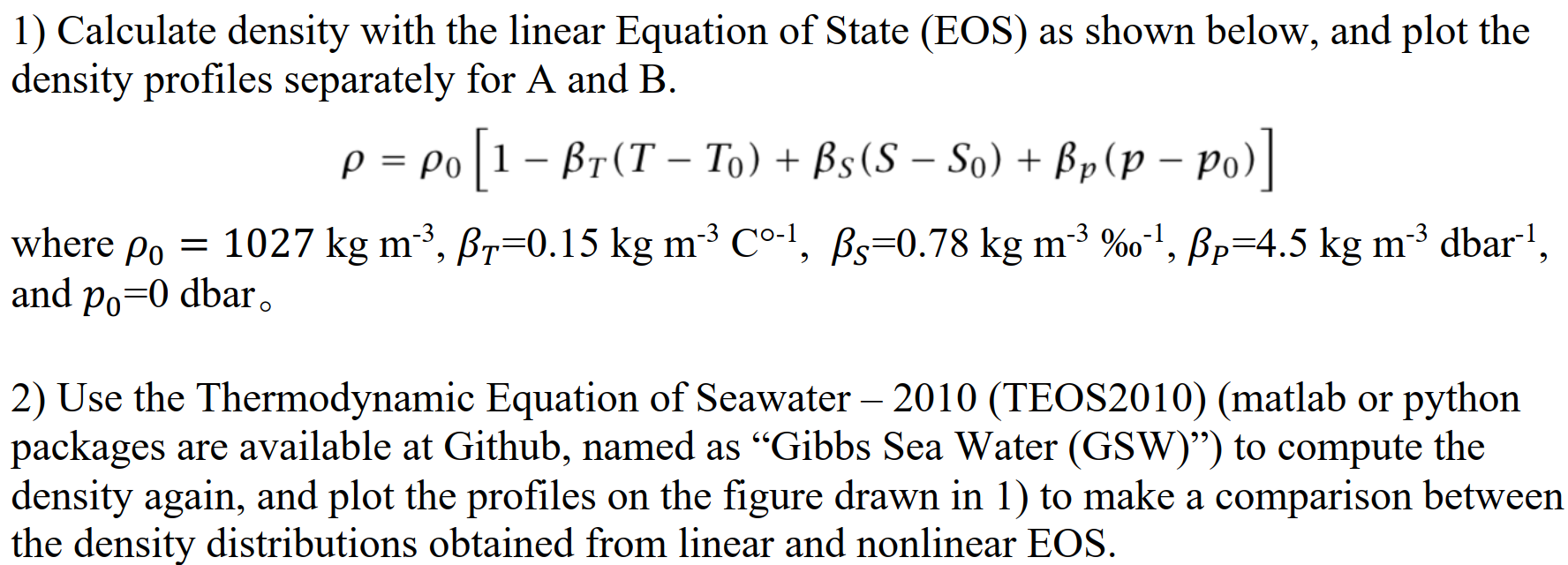


## 解决方案

# 第3题

## 问题描述





## 解决方案

References

# 附录1

Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2016). Chapter 3 - Kinematics. In P. K. Kundu, I. M. Cohen, & D. R. Dowling (Eds.), *Fluid Mechanics (Sixth Edition)* (pp. 77-108). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-405935-1.00003-4>

Vallis, G. K. (2017). *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* (2 ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781107588417>

陈纪修, 於崇华, & 金路. (2019). *数学分析(下册)* (3 ed.). 高等教育出版社.

吴望一. (1982a). *流体力学(上册)*. 北京大学出版社.

吴望一. (1982b). *流体力学(下册)*. 北京大学出版社.