Date.

题目:

T_1 令 $t_n=n\tau$. 求 $u'(t_n)$ 和 $u''(t_n)$ 处的有限差分公式(使用 t_{n-2}, t_{n-1} 和 t_n 处的数据来近似).
并求这两个公式的截断误差。

① 使用待定系数法 $u(t_n)\approx a_1 u(t_n)+a_2 u(t_{n-1})+a_3 u(t_{n-2})$

由于使用三点公式, 希望误差可达到 $O(\tau^2)$, 使用待定系数法可得 $c_1=\frac{3}{2\tau}$ $c_2=-\frac{2}{\tau}$, $c_3=\frac{1}{2\tau}$

求 truncation errors

$$\left.\begin{aligned} u(t_{n-1}) &= u(t_n)-u'(t_n)\tau+\frac{1}{2}u''(t_n)\tau^2-\frac{1}{6}u'''(t_n)\tau^3+o(\tau^3) \\ u(t_{n-2}) &= u(t_n)-2u'(t_n)\tau+2u''(t_n)\tau^2-\frac{4}{3}u'''(t_n)\tau^3+o(\tau^3) \end{aligned}\right\} (1)$$

$\mathrm{Error1}=\frac{1}{2\tau}[u(t_{n-2})-4u(t_{n-1})+3u(t_n)]-u'(t_n)=\frac{1}{2\tau}[u(t_n)-2u'(t_n)\tau+2u''(t_n)\tau^2-\frac{4}{3}u'''(t_n)\tau^3$
$-4u(t_n)+4u'(t_n)\tau-2u''(t_n)\tau^2+\frac{2}{3}u'''(t_n)\tau^3+o(\tau^3)+3u(t_n)]-u'(t_n).$

$=\frac{1}{2\tau}[2u'(t_n)\tau-\frac{2}{3}u'''(t_n)\tau^3+o(\tau^3)]-u'(t_n)=-\frac{1}{3}u'''(t_n)\tau^2+o(\tau^2)$

待定系数法步骤: $a_1u(t_n)+a_2u(t_{n-1})+a_3u(t_{n-2})=\left.\left(a_1+a_2e^{-\tau\frac{d}{dt}}+a_3e^{-2\tau\frac{d}{dt}}\right)u\right|_{t=t_n}$

$=[c_1+c_2+c_3]u(t_n)+[c_2(-\tau)+c_3(-2\tau)]u'(t_n)+[c_2(\frac{\tau}{2})^2+c_3(2\tau^2)]u''(t_n)+[c_2(-\frac{\tau^3}{6})+c_3(-\frac{4}{3}\tau^3)]u'''(t_n)$
$+o(\tau^3)$

令 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-\tau&-2\tau\\0&\frac{\tau^2}{2}&2\tau^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\frac{3}{2\tau}\\c_2=-\frac{2}{\tau}\\c_3=\frac{1}{2\tau}\end{cases}$

② 同理 $u''(t_n)\approx\frac{1}{\tau}\left[\frac{u(t_n)-u(t_{n-1})}{\tau}-\frac{u(t_{n-1})-u(t_{n-2})}{\tau}\right]=\frac{1}{\tau^2}[u(t_n)-2u(t_{n-1})+u(t_{n-2})]$.

同样用(1)可求 truncation errors

$\mathrm{Errors2}=\frac{1}{\tau^2}[u(t_n)-2u(t_{n-1})+u(t_{n-2})]-u''(t_n)$

$=\frac{1}{\tau^2}[u(t_n)-2u(t_n)+2u'(t_n)\tau-u''(t_n)\tau^2+\frac{1}{3}u'''(t_n)\tau^3+u(t_n)-2u'(t_n)\tau+2u''(t_n)\tau^2-\frac{4}{3}u'''(t_n)\tau^3+o(\tau^3)]-u''(t_n)$

$=\frac{1}{\tau^2}[u''(t_n)\tau^2-u'''(t_n)\tau^3+o(\tau^3)]-u''(t_n)=-u'''(t_n)\tau+o(\tau)$

T_2. 求解对流方程 $u_t+u_x=e^t$, $u(x,0)=e^{-x^2}$

若我们在 $[0,1]$ 上改变 $u(x,0)$, $u(x,1)$ 的哪部分受影响?

特征线: $\frac{dt}{d\tau}=1$, $\frac{dx}{d\tau}=1$ 即 $x=t+c$ (c 为常数)

直接从表达式看

$u(x,0)=\begin{cases}e^{-x} & x\notin[0,1]\\ e^{-x}+\varepsilon, & x\in[0,1]\end{cases}$

求解 u: $\begin{cases}\frac{dt}{d\tau}=1,\ \frac{dx}{d\tau}=1,\ \frac{du}{d\tau}=e^t\\ (x,t,u)|_0=(s,0,e^{-s^2})\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\tau+s\\t=\tau\end{cases}$

且 $u(t,s)=e^t+c=e^t+e^{-(x-t)^2}-1$

由在特征线上 u 的值不变知

改变 $t=0$ 时区间 $[0,1]$ 上的 u, 则 $t=1$ 时区间 $[1,2]$ 上的 u 会受影响

特征线不变, 解变为(只有 c 变)

$u=e^t+e^{-(x-t)^2}-1+\varepsilon\,\{(x-t)\in[0,1]\}$

令 $t=1$ 则受影响区域为 $x\in[1,2]$

deli得力

Date. /

3. 求解扩散问题 (初值) $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{-x^2}$

若我们在 $[0,1]$ 上改变 $u(x,0)$, $u(x,1)$ 的哪部分会受影响?

解 $f(x) = e^{-x^2}$ 在 R 上有界, 故解存在

用Fourier变换可推 $u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\Phi(x-y,t)\,dy$

(Φ为基本解) $= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\Phi(x-y,t)\,dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-y^2}\,dy$

配方 $= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,y - \frac{1}{\sqrt{4t(4t+1)}}\,x\right)^2} dy \cdot e^{-\left(\frac{1}{4t+1}\right)x^2}$

$= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4t}{4t+1}}\sqrt{\pi}\, e^{-\left(\frac{1}{4t+1}\right)x^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$

令影响若 $f(y) = e^{-x^2} + \varepsilon 1[x \in (0,1)]$

则 $\hat{u}(x,t)$

$= u(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \cdot 1[y \in (0,1)]\Phi(x-y,t)\,dy$

$= u(x,t) + \varepsilon\int_0^1 \Phi(x-y,t)\,dy$

$= \varepsilon\, \underline{\mathrm{erf}(1) * \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ 的分布

∴ 对整个区域有影响

4. 求解初边值方程 (在 $x \in [0,1]$ 上)

$u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{-x}$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

通过使用 Fourier 基 $\{\sin(anx)\}$ 展开解 (确定 a). 讨论不同mode的 behavior.

解: 解写成 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 形式的解

由方程 $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$

当 $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$ 时, 可求得非平凡解

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x$$

由初始条件 $C = 0$ 或 $D\sin\lambda = 0$

仅当 $\sin\lambda = 0$ 时 解非平凡, 这里 $\lambda = n\pi$ (这里 $n = \pm1, \pm2, \cdots$)

$X_n(x) = D_n\sin(n\pi x)$ 这里 $n = 1, 2, \cdots$

下面求 $T_n(t)$

$T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n\exp(-(n\pi)^2 t)$

故 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\exp(-n^2\pi^2 t)\sin(n\pi x)$

代入初值 $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(n\pi x) = e^{-x}$

由 Fourier 级数理论

$C_n = 2\int_0^1 e^{-x}\sin(n\pi x)\,dx$

$= \frac{2n\pi[1-(-1)^n e^{-1}]}{n^2\pi^2+1}$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi[1-(-1)^n e^{-1}]}{n^2\pi^2+1}\sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t}$

$u(x,t)$ 模态为 x 的正弦函数, 幅值随时间指数衰减

C_n 的求解

$C_n = 2\int_0^1 e^{-x}\sin(n\pi x)\,dx$

$= -2\int_0^1 \sin n\pi x\, de^{-x}$

$= -2[\sin(n\pi x)\cdot e^{-x}|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} d\sin(n\pi x)]$

$= 2n\pi\int_0^1 e^{-x}\cos n\pi x\,dx$

$= -2n\pi\int_0^1 \cos n\pi x\, de^{-x}$

$= -2n\pi[\cos n\pi x\cdot e^{-x}|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} d\cos n\pi x]$

$= -2n\pi[(-1)^n e^{-1} - 1] + 2n^2\pi^2(-\int_0^1 e^{-x}\sin n\pi x\,dx)$

$= 2n\pi[1-(-1)^n e^{-1}] - 2n^2\pi^2\int_0^1 e^{-x}\sin n\pi x\,dx$

$= 2n\pi[1-(-1)^n e^{-1}] - 2n^2\pi^2 C_n$