REVIEW

仅供参考

Part1: Signal&System

- 信号
  - 信号的定义、描述和分类
  - 信号的基本运算
  - 常见信号
- 系统
  - 系统的概念、描述和分类
  - 系统的基本性质

✓ Transformations of Function

- 时移
- 反折
- 尺度变换

注：离散时间信号的尺度变换

$$x(t) \rightarrow x(\alpha t + \beta)$$

注：信号的波形和解析式描述

其它基本运算：

- 加减和乘除运算
- 连续时间信号的微分与积分
  - 微分

$$x^{'}(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

  - 积分

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

- 离散时间信号的差分与求和
  - 一阶前向差分

$$\Delta x[n]=x[n+1]-x[n]$$

一阶后向差分

$$\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$$

  - 求和

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

✓ TYPICAL FUNCTIONS

- 复指数信号

$$x(t) = C \cdot e^{\alpha t} \qquad x[n] = C \cdot \alpha^n$$

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
对于任何ω_0关于t呈周期性	仅对特定的ω_0关于n呈周期性
不同的ω_0对应于不同的振荡频率	ω_0关于2π呈周期性

注：连续时间信号的频谱是连续的，离散时间信号的频谱是周期的！

- 冲激和阶跃信号

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

注：关于冲激函数/冲激脉冲序列

1. 定义

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] = 1$$

2. 奇偶特性

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$\delta[-n] = \delta[n]$$

3. 微积分特性

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

4. 相乘

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

5. 卷积

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$x[n]*\delta[n-m]=x[n-m]$$

6. 筛选性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]=x[n]$$

7. 尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta[an]=\delta[n]$$

✓ BASIC SYSTEM PROPERTIES

- 线性
- 时不变性

本课程研究线性时不变系统！

叠加性质：信号的线性组合的输出，等于各信号输出的线性组合！

- 因果性
- 稳定性

（1）根据定义判定

（2）根据h(t)/h(n)判定

（3）根据H(s)/H(z)的零极点判定

- 微分/差分特性

Part2: LTI系统的时域分析

系统描述	系统分析
常系数微分方程/差分方程	经典法解方程 ✓ 零输入响应+零状态响应 ✓ 自由响应+强迫响应
冲激响应h(t)/h(n)	卷积积分/卷积和 ✓ 零状态响应

■ 经典法解方程

注：

1. 解的一般形式
2. 边界条件
3. **零输入线性和零状态线性**

Linear Time-Invariant System !

根据LTI系统的叠加性，将输入信号表示成一组基本信号的线性组合，则输出等于这组基本信号输出的线性组合！

基本信号应满足：

① 能构成相当广泛的一类有用信号 /相当广泛的一类有用信号可用该基本信号的“线性组合”表示

② LTI系统对该基本信号的响应应十分简单，且系统对任意输入 信号的响应可用该基本信号的响应很方便的表示

时域分析的基本信号为：$\delta(t) / \delta(n)$

■ 卷积积分

- 定义

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

注：卷积积分求解的是系统的零状态响应！

- 计算：

1. 图解法
2. 借助卷积的性质
3. 变换域相乘

注：在卷积运算中，图解法是基本的方法，
其它方法是否采用要因题而议！

■ 卷积和

- 定义

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\cdot h[n-k]=x[n]*h[n]$$

- 计算

1. 图解法
2. 有限长序列的卷积
3. 变换域相乘

注：等比级数求和公式

系统性质

• 因果性	$h(t)=0, t<0$	$h[n]=0, n<0$
• 稳定性	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert h(t)\rvert dt<\infty$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert h[k]\rvert<\infty$
• 微积分特性	$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$	$h[n]=g[n]-g[n-1]$

$$g(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

$$g[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

Part3: LTI系统的频域分析

——连续时间系统

■ 周期信号傅里叶级数展开和傅里叶变换

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

(1) 周期信号$x(t)$可用一组成谐波关系的复指数信号的线性组合表示；
(2) a_k表示其所含第k次谐波的幅度和相位，a_k通常为复数。

$$a_k=\frac{1}{T}X_0(j\omega)\big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$x(t)\leftrightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0),\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

■ （非周期信号的）傅里叶变换的定义

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

注：

(1) $x(t)$可以表示成基本信号$e^{j\omega t}$的“线性组合”，组合的权值为$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)d\omega$;

(2) $X(j\omega)$表示$x(t)$所含各频率分量的幅度和相位，称为$x(t)$的频谱，$X(j\omega)$一般为复数。

■ 基本信号的傅里叶变换

$\delta(t)$

$u(t)$

直流信号

$e^{-\alpha t}u(t)$

矩形脉冲

$\sin Wt/\pi t$

$\cos\omega t$

$\sin\omega t$

$\operatorname{sgn}(\cdot)$

■ 傅里叶变换的性质

$$X(j\omega)=\frac{X_1(j\omega)}{j\omega}+\pi X_1(0)\delta(\omega)+2\pi x(-\infty)\delta(\omega)$$

$$\boxed{X(t)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)}$$

$$tx(t)\leftrightarrow j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

注：利用“基本信号”+“性质”求解傅里叶变换！

■ 频域分析

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- 滤波
- 调制
- 采样

注：

1、$H(j\omega)$ 的物理含义！

2、画频谱图！

Part3: LTI系统的频域分析

——离散时间系统

■ 傅里叶变换的定义

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$ **is periodic with priod** 2π

■ 基本信号的傅里叶变换

$\delta(n)$

$u(n)$

直流信号

$(\alpha)^n u(n)$

~~矩形脉冲~~

$\cancel{\sin Wn / \pi n}$

■ 傅里叶变换的性质

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k], & \text{当}n\text{为}k\text{的整数倍}\\ 0, & \text{当}n\text{不为}k\text{的整数倍}\end{cases}$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega})=X(e^{jk\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

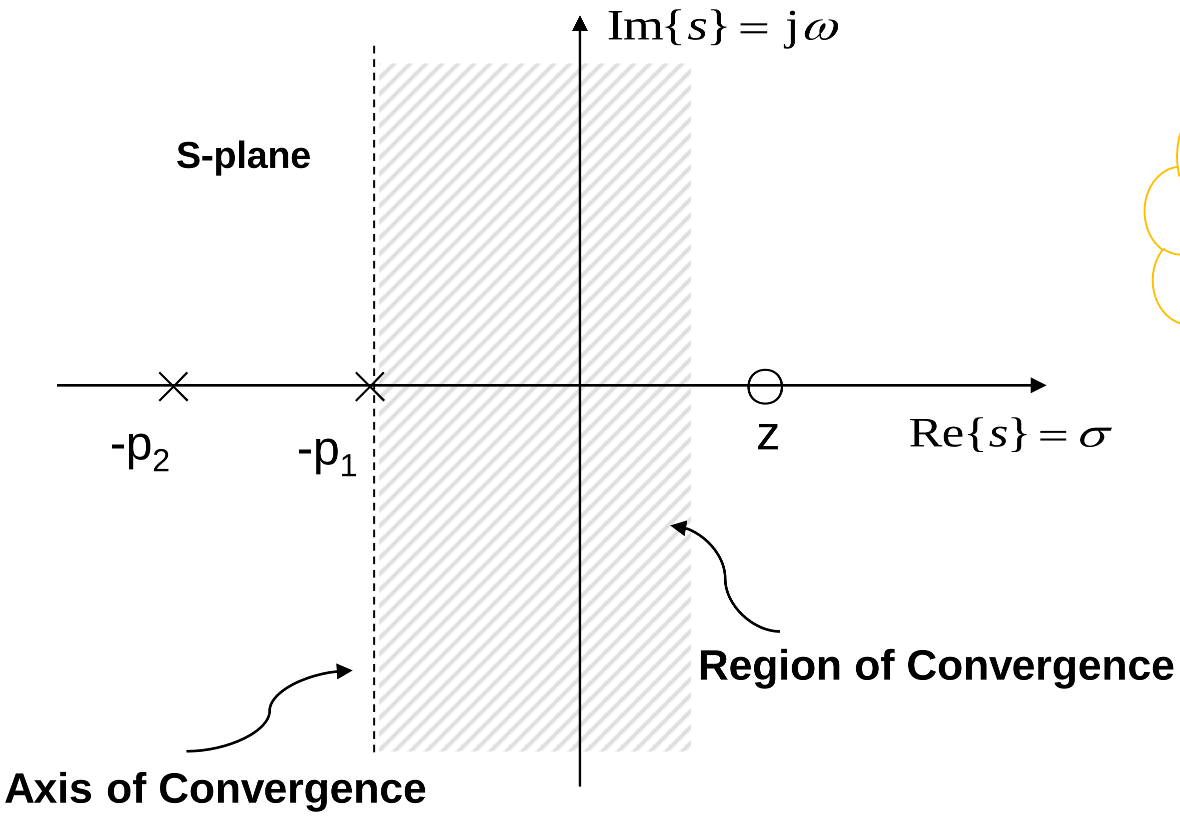
Part4: LTI系统的S分析

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

ROC:使X(s)
收敛的s的取
值范围

■ Laplace 变换及其ROC



关于收敛域的特性！

pole-zero plot of X(s)

- **Laplace 正变换**

$\delta(t)$

$u(t)$

$e^{-\alpha t}u(t)$

$-e^{-\alpha t}u(-t)$

$\sin\omega_0 t\cdot u(t)$

$\cos\omega_0 t\cdot u(t)$

$tu(t)$

$te^{-\alpha t}u(t)$

$$tx(t)\leftrightarrow -\frac{dX(s)}{ds}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0_+} x(t)=x(0_+)=\lim_{s\to\infty} s\cdot X(s)}$$

代入初值定理的X(s)须为真分式！

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x_0(t - nT_1) \leftrightarrow \frac{X_0(s)}{1 - e^{-sT_1}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT_1) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_1)e^{-snT_1}$$

■ Laplace 反变换

- 单极点
- 重极点
- 共轭复极点

$$\frac{k_i}{s-p_i} \leftrightarrow \begin{cases} k_i e^{p_i t} u(t) & \Re_e(s) > p_i \\ -k_i e^{p_i t} u(-t) & \Re_e(s) < p_i \end{cases}$$

$$\frac{k_{1i}}{(s-p_i)^n} \leftrightarrow k_{1i} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t} u(t), \Re e[s] > p_i$$

$$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0{}^2} \leftrightarrow e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \cdot u(t), \Re e[s] > -\alpha$$

$$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0{}^2} \leftrightarrow e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \cdot u(t), \Re e[s] > -\alpha$$

注：结合Laplace变换的性质求解反变换

■ 单边Laplace 变换

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-m-1} x^{(m)}(0\_)$$

$$= s^n X(s) - s^{n-1} x(0\_) - s^{n-2} x^{(1)}(0\_) - x^{(n-1)}(0\_)$$

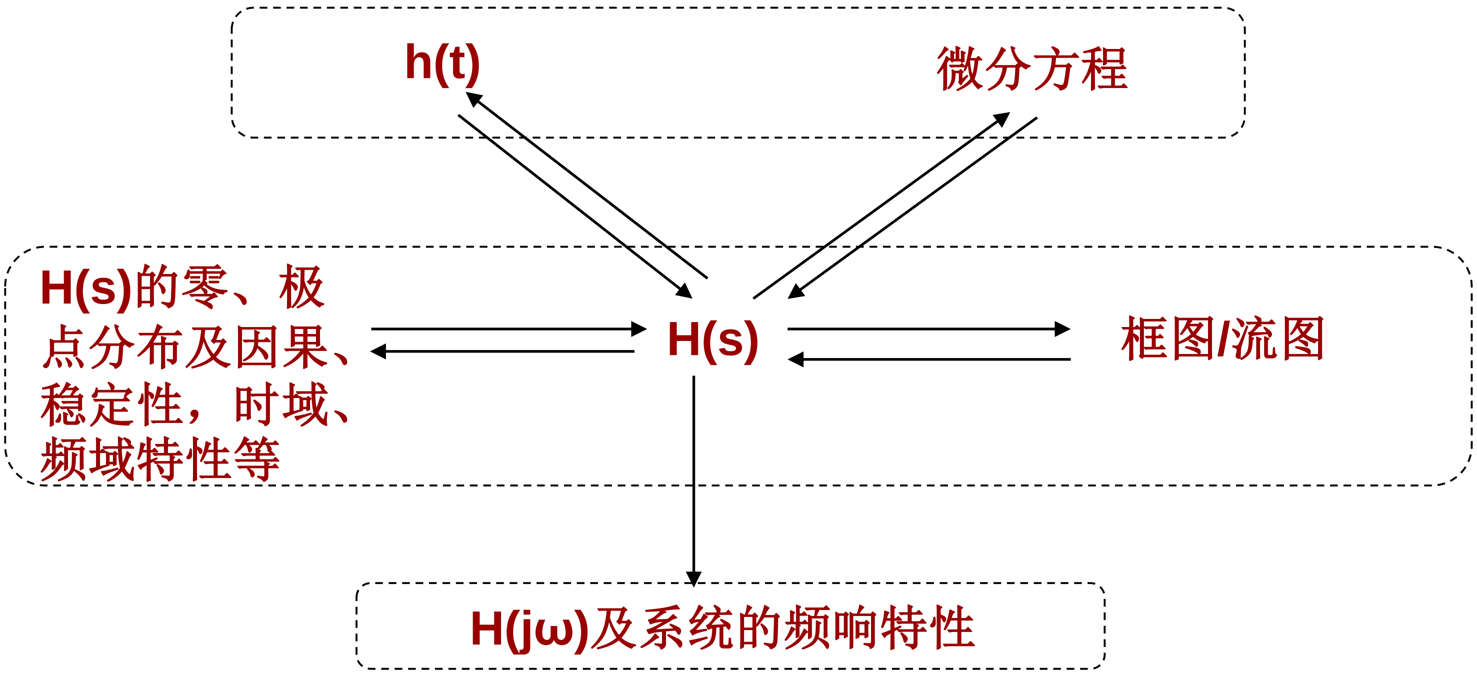
求解具有非零初始条件的线性常系数微分方程，可同时求出零输入响应和零状态响应，并判别自由响应、强迫响应

注：零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应的波形性质与X(s)和H(s)极点的关系

- **S域分析**

$$e^{st} \rightarrow H(s)\cdot e^{st}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int X(s)\underline{e^{st}}\,ds \longrightarrow \boxed{h(t) \leftrightarrow H(s)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int X(s)\underline{H(s)e^{st}}\,ds$$


h(t)
微分方程
H(s)的零、极点分布及因果、稳定性，时域、频域特性等
H(s)
框图/流图
H(jω)及系统的频响特性

Part5: LTI系统的Z分析

■ Z变换及其ROC

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z) z^{n-1} dz$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

- Z正变换

$\delta(n)$

$u(n)$

$(\alpha)^n u(n)$

$-(\alpha)^n u(-n-1)$

$\cancel{\sin\omega_0 n \cdot u(n)}$

$\cancel{\cos\omega_0 n \cdot u(n)}$

$nu(n)$

$n(\alpha)^n u(n)$

$$\sum_{j=0}^{n} x[j] \leftrightarrow X(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

$x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1})$ $x_k[n] \leftrightarrow X(z^k)$	$x(-t) \leftrightarrow X(-s)$ $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X(\frac{s}{a})$
$z_0{}^n x[n] \leftrightarrow X(\frac{z}{z_0})$ $(-1)^n x[n] \leftrightarrow X(-z)$	$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0)$
$nx[n] \leftrightarrow -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$	$tx(t) \leftrightarrow -\frac{dX(s)}{ds}$

Z反变换

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{C_j z^j}{(z-z_i)^j}=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-z_m z^{-1}}+\sum_{j=1}^{s}\frac{C_j}{(1-z_i z^{-1})^j}$$

其中

$$A_0=[X(z)]_{z=0}$$

$$A_m=[(\frac{z-z_m}{z})\cdot X(z)]_{z=z_m}=(1-z_m z^{-1})X(z)\Big|_{z=z_m}$$

$$C_s=[(\frac{z-z_i}{z})^s X(z)]_{z=z_i}=(1-z_i z^{-1})^s X(z)\Big|_{z=z_i}$$

其余的C_j用待定系数法求

注：$$\frac{z^{m+1}}{(z-\alpha)^{m+1}}\leftrightarrow\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m!}\alpha^n u[n]$$

- 单边Z变换

$$x[n-m]u[n] \leftrightarrow z^{-m}X(z)+x[-1]z^{-m+1}+x[-2]z^{-m+2}+\ldots+x[-m]$$

- Z域分析

$$(z)^n \to H(z)\cdot(z)^n$$

注：参考S域，对照学习！

$$X_s(s)\Big|_{z=e^{sT}} = X(z)$$