Chapter4 The Continuous-Time Fourier Transform

连续时间系统的频域分析：

- 周期信号的傅里叶级数表示
- 非周期信号（及周期信号）的傅里叶变换
- 系统的频域分析（包括滤波、调制和采样）

根据LTI系统的叠加性，将输入信号表示成一组基本信号的线性组合，则输出等于这组基本信号输出的线性组合！

例如，连续时间系统的时域分析：

① $$x(t)=\int_{\tau} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\delta(t)$$

——（连续时间）系统时域分析的基本信号

② $$\delta(t)\rightarrow h(t)$$

$$x(t)\rightarrow y(t)=\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=x(t)*h(t)$$

基本信号应满足：

① 能构成相当广泛的一类有用信号 /相当广泛的一类有用信号可用该基本信号的“线性组合”表示

② LTI系统对该基本信号的响应应十分简单，且系统对任意输入信号的响应可用该基本信号的响应很方便的表示

$$e^{j\omega t}$$

——（连续时间）系统频域分析的基本信号

Fourier Transform

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Leftrightarrow X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

(1) $x(t)$可以表示成基本信号$e^{j\omega t}$的“线性组合”，组合的权值为$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)d\omega$

$$e^{j\omega t}\rightarrow e^{j\omega t}*h(t)=\int h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau=e^{j\omega t}\int h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

设 $\int h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=H(j\omega)$ 则

$$\boxed{e^{j\omega t}\rightarrow H(j\omega)\cdot e^{j\omega t}}$$

$$x(t)\rightarrow y(t)=\frac{1}{2\pi}\int X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

(2) 已知基本信号$e^{j\omega t}$的输出，$x(t)$的输出$y(t)$可用基本信号输出的“线性组合”表示

当$x(t)$是周期为T的信号，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$为基波频率

$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Fourier Series Representation

if $$e^{jk\omega_0 t} \rightarrow H(jk\omega_0)\cdot e^{jk\omega_0 t}$$

then $$y(t)=\sum_k a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

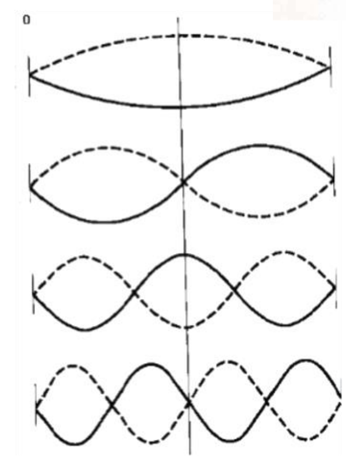
周期信号的傅里叶级数表示——

将周期信号用一组成谐波关系的复制数信号$\{e^{jk\omega_0 t}\}$或正余弦信号$\{\sin k\omega_0 t,\cos k\omega_0 t\}$的线性组合表示。

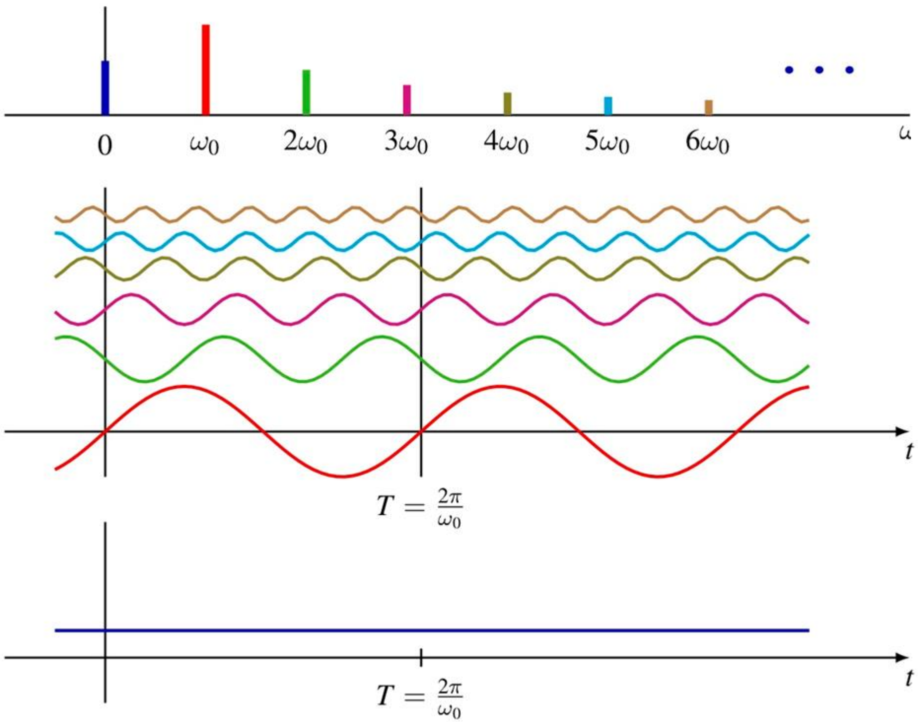
Chapter4 The Continuous-Time Fourier Transform

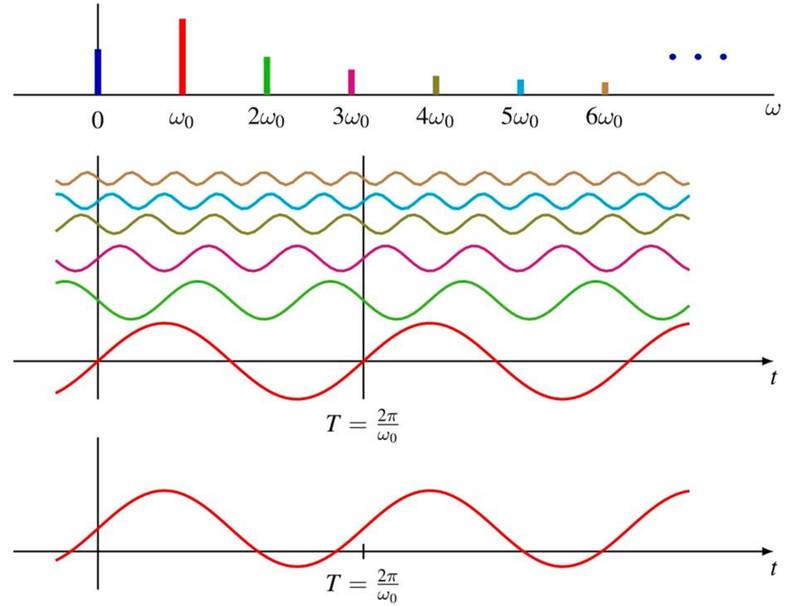
- 1748，欧拉(L.Euler)
  - 振荡弦的形状总可以用标准振荡模式的线性组合表示
  - 给出线性组合中的加权系数的求解
- 1807，傅里叶(J.B.J Fourier)
  - 任何周期信号都可以用成谐波关系的正弦函数级数表示
  - 推广到非周期信号的表示！
- 1829，狄里赫利(P.L.Dirchilet)
  - 什么样的周期信号可以用傅里叶级数表示
- 1965，库里(Cooley)和图基(Tukey)
  - 离散时间信号的快速傅里叶变换(FFT)

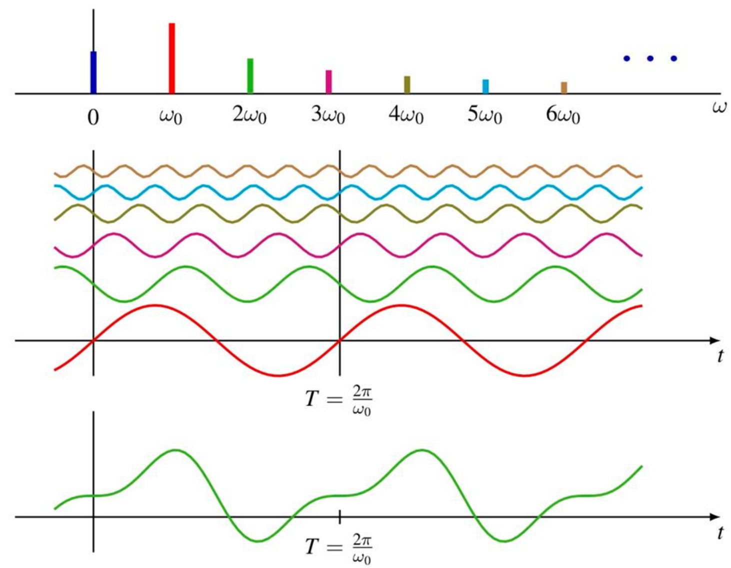
……

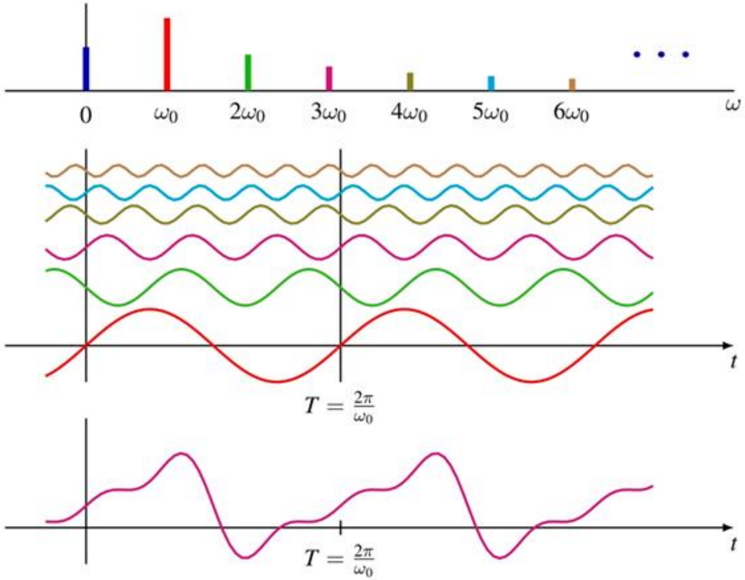


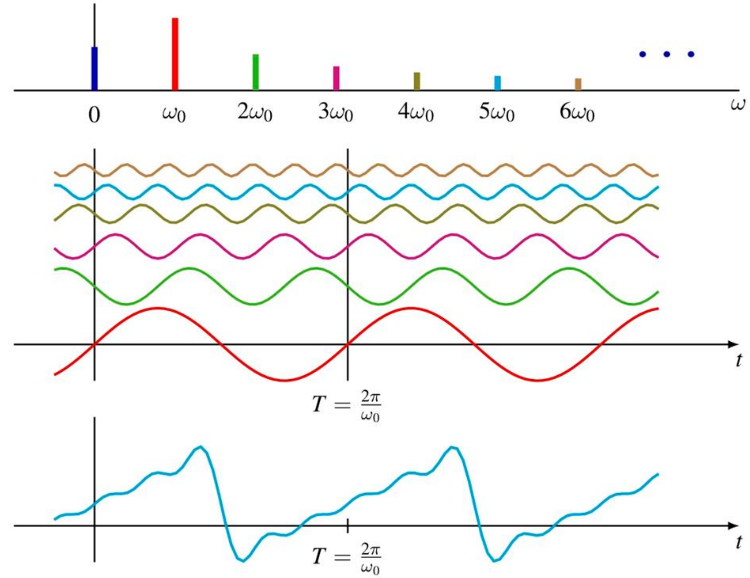
例：周期锯齿波信号用成谐波关系的正弦函数的级数表示

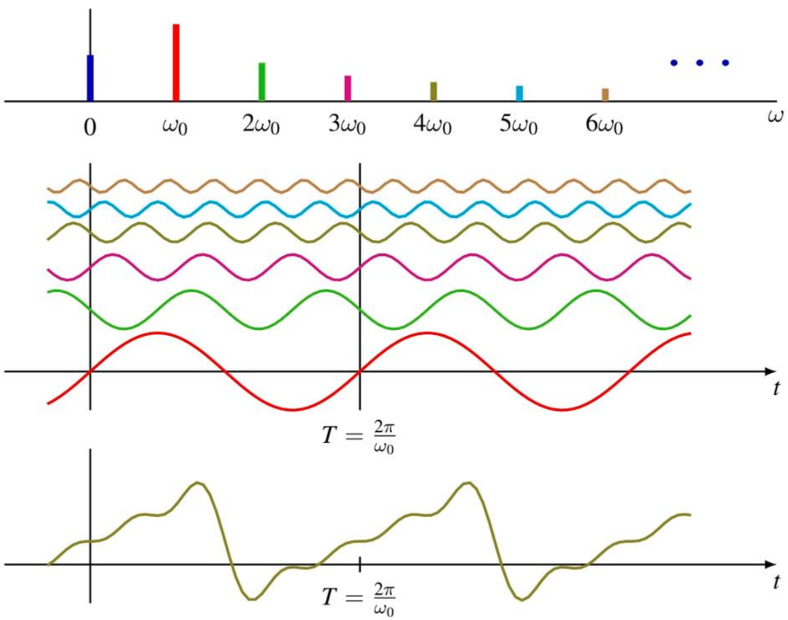


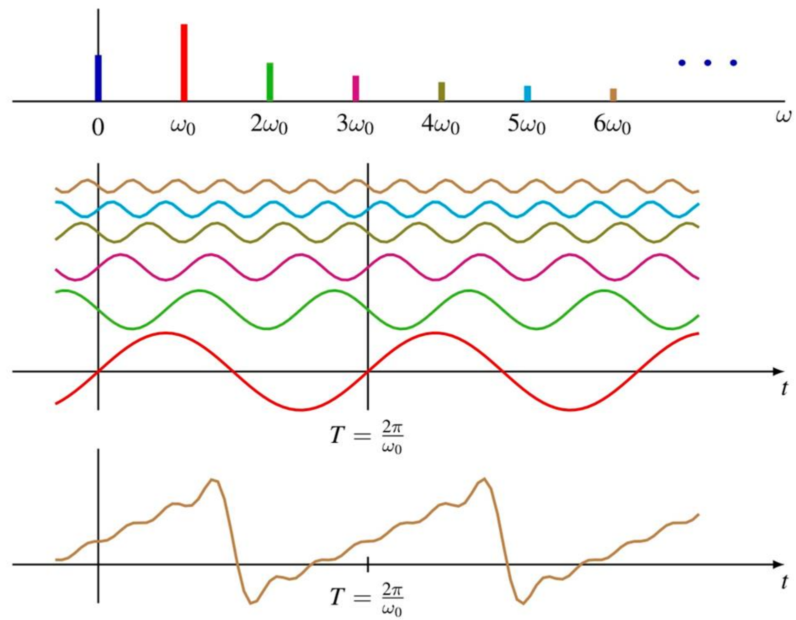





0
ω_0
$2\omega_0$
$3\omega_0$
$4\omega_0$
$5\omega_0$
$6\omega_0$
ω
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$


0
ω_0
$2\omega_0$
$3\omega_0$
$4\omega_0$
$5\omega_0$
$6\omega_0$
ω
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$


0
ω_0
$2\omega_0$
$3\omega_0$
$4\omega_0$
$5\omega_0$
$6\omega_0$
ω
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$


0
ω_0
$2\omega_0$
$3\omega_0$
$4\omega_0$
$5\omega_0$
$6\omega_0$
ω
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
t
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

4.1 Fourier Series Representation of Periodic Signals

- **Fourier Series Representation of Continues-Time Periodical Signals**
- **Convergence of the Fourier series**
- **Properties of Continues-Time Fourier Series**

连续时间周期信号的傅立叶级数表示，就是将周期信号用一组成谐波关系的复制数信号$\{e^{jk\omega_0 t}\}$或正余弦信号$\{\sin k\omega_0 t, \cos k\omega_0 t\}$的线性组合表示

在数学上，它们是一组完备的正交函数集！

正交函数集：

（1）对$\{\varphi_i(t)\}$ $i=1,2\ldots n$ 若满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0 & i\neq j\\ K_i & i=j\end{cases}$$ 其中K_i不为零

则称$\{\varphi_i(t)\}$为一组正交函数集

（2）若信号$f(t)$在(t_1, t_2)用此正交函数的线性组合$\sum_i c_i\varphi_i(t)$表示

设其均方误差为

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_i c_i\varphi_i(t)]^2 dt$$

选择系数c_i，使$\overline{\varepsilon^2}$最小，即使$\dfrac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial c_i} = 0$，得

$$\boxed{c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_i^*(t)dt} = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)dt}$$

此时 $\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_i c_i^2 K_i]$

其中 $K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_i^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi_i(t)|^2 \, dt$ 信号$\varphi_i(t)$的能量

若$\overline{\varepsilon^2} = 0$，则$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt = \sum_i c_i^2 K_i$，说明$f(t)$与$\sum_i c_i \varphi_i$没有能量上的差别。

此时，正交函数集$\{\varphi_i(t)\}$是完备的

即在$\{\varphi_i(t)\}\quad i=1,2\ldots n$ 之外，不存在函数$\varphi\,(t)$，满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi\,(t)\varphi_i^*(t)dt=0,$$

则称$\{\varphi_i(t)\}$为一组完备的正交函数集

(Complete Orthogonal Function System)

可以证明:$\{e^{jk\omega_0 t}\}$及$\{\sin k\omega_0 t, \cos k\omega_0 t\}$均为正交函数集，且完备

$$Example:\{e^{jk\omega_0 t}\}$$

$$\because \int_T e^{j(m-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T, & m = n \end{cases}$$

$$\therefore c_i = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$f(t) = \sum_i c_i e^{jk\omega_0 t}$$

周期信号的傅里叶级数表示:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

—synthesis equation

（综合公式）

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

—analysis equation

（分析公式）

- x(t)为周期为T的信号，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$为基波频率；
- a_k为傅里叶级数的系数（Fourier series coefficients）或频谱系数（Spectral Coefficient）；
- 积分区间T通常取（0，T）或（-$\frac{T}{2}$,$\frac{T}{2}$）

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\cdots+a_{-2}e^{-j2\omega_0 t}+a_{-1}e^{-j\omega_0 t}+a_0+a_1e^{j\omega_0 t}+a_2e^{j2\omega_0 t}+\cdots$$

a_0 ——直流分量

$a_1e^{j\omega_0 t}+a_{-1}e^{-j\omega_0 t}$ ——基波分量或一次谐波分量

$a_2e^{j2\omega_0 t}+a_{-2}e^{-j2\omega_0 t}$ ——二次谐波分量

$\cdots$

$a_k e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}$ ——k次谐波分量

周期信号的傅里叶级数表示：

（1）将周期信号用一组成谐波关系的复制数信号的线性组合构成；

（2）a_k可表示相应复指数信号的模值和相位（a_k通常为复数）。

Example：

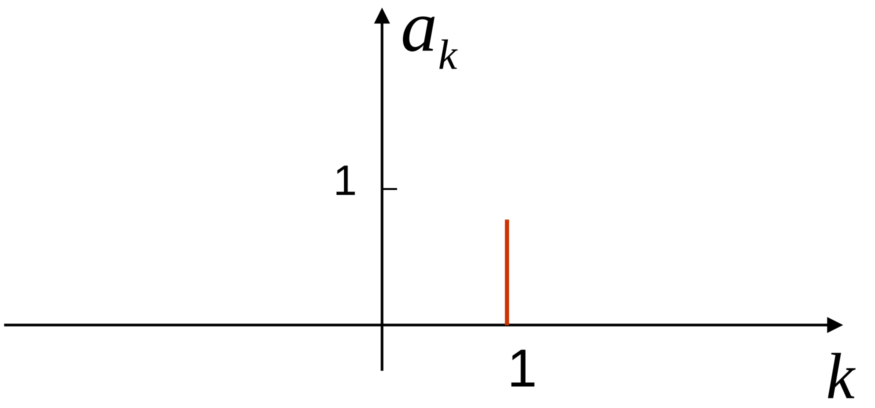
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$ —x(t)的直流分量

注：a_k的物理意义！

Example： $x(t)=e^{j\omega_0 t}$

$$a_1=1$$

$$a_k=0,\quad k\neq 1$$

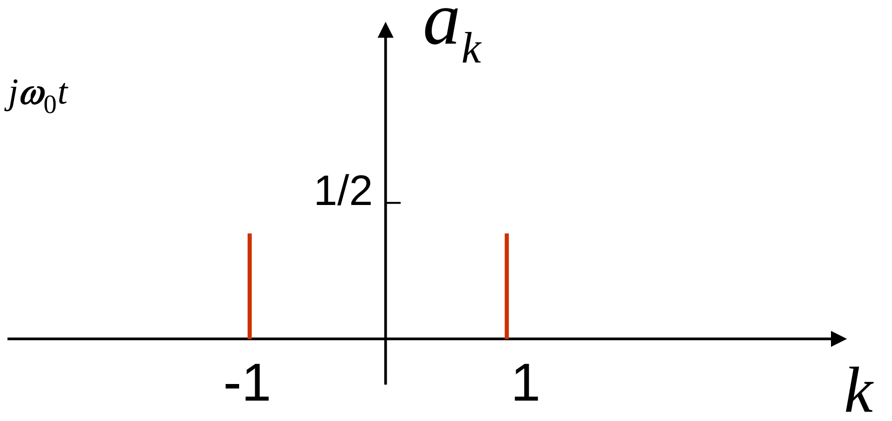


Example: $x(t)=\cos(\omega_0 t)$

$$\because x(t)=\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$\therefore a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$$

$$a_k=0,\quad k\neq \pm 1$$



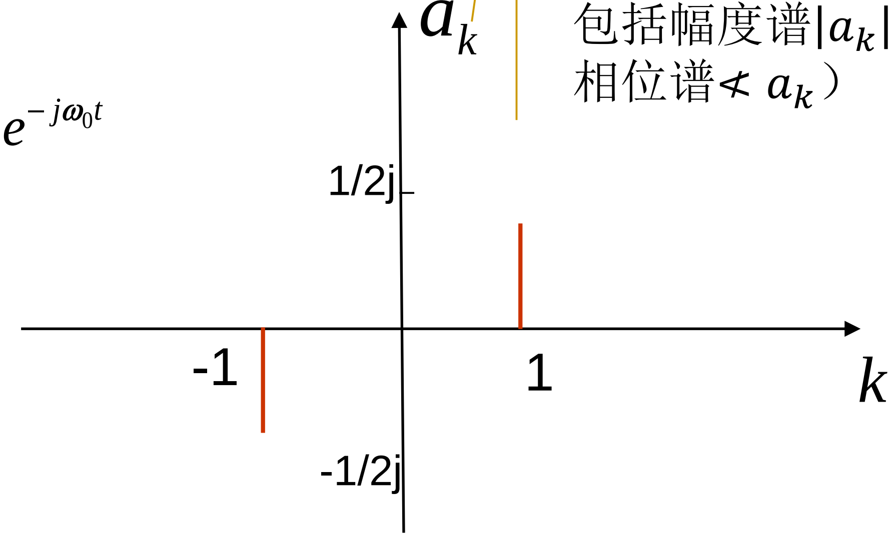
注：将实信号用复指数信号表示时，会产生负频率

Example： $x(t)=\sin(\omega_0 t)$

$$\because x(t)=\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

$$\therefore a_1=\frac{1}{2j}\quad a_{-1}=-\frac{1}{2j}$$

$$a_k=0,\quad \mathrm{k}\neq\pm1$$



注：频谱图（一般包括幅度谱$|a_k|$和相位谱$\measuredangle\, a_k$）

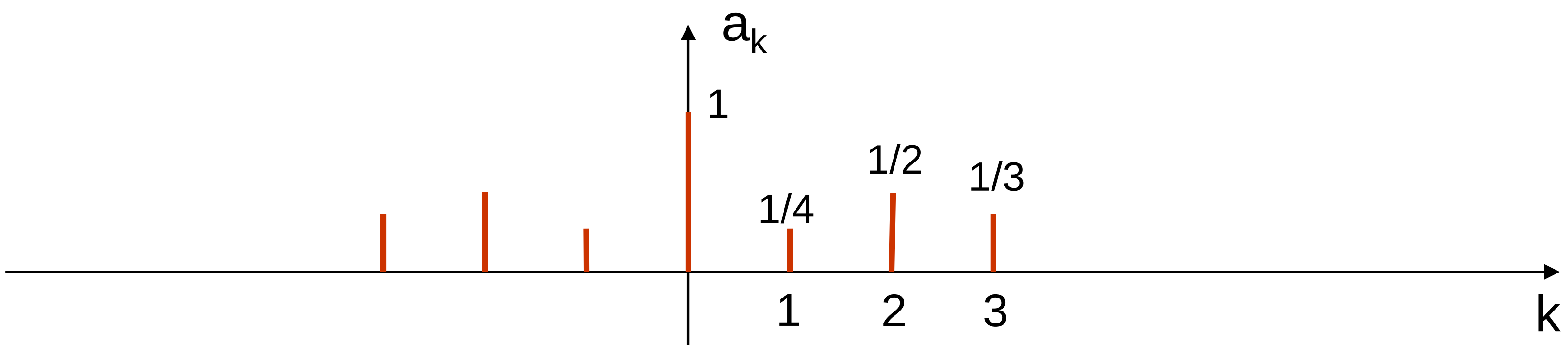
？ 实信号的傅里叶级数的系数一定是实的吗？一定是偶的吗？

Exercise：分别画出$x(t)=\sin(\omega_0 t)$的傅里叶系数的幅度和相位特性

Example: $x(t)=1+\frac{1}{2}\cos 2\pi t+\cos 4\pi t+\frac{2}{3}\cos 6\pi t$ ——基波频率$\omega_0=2\pi$

根据欧拉公式 $x(t)=1+\frac{1}{4}(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t})+\frac{1}{2}(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t})+\frac{1}{3}(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t})$

即，$a_0=1$，$a_1=a_{-1}=\frac{1}{4}$，$a_2=a_{-2}=\frac{1}{2}$，$a_3=a_{-3}=\frac{1}{3}$

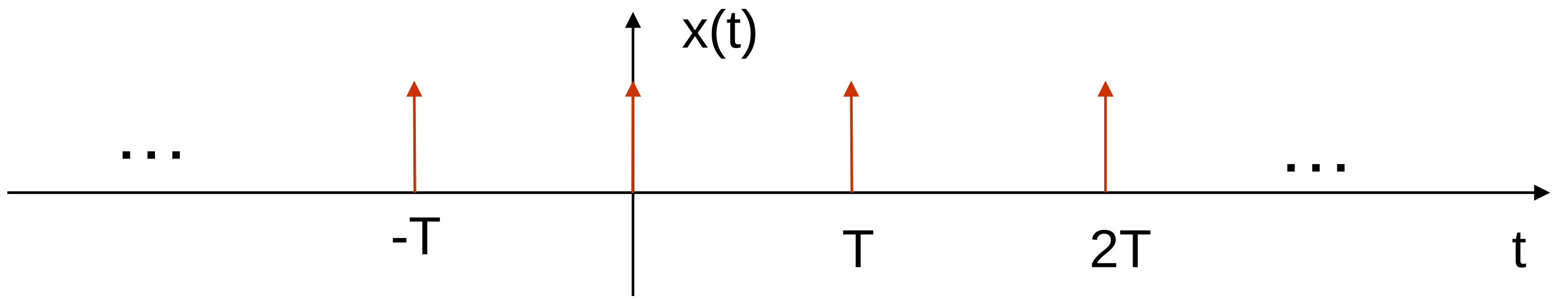


周期信号的频谱分析：

1. 周期信号的频谱是离散的，仅在$k\omega_0$处有值，谱线间隔为$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

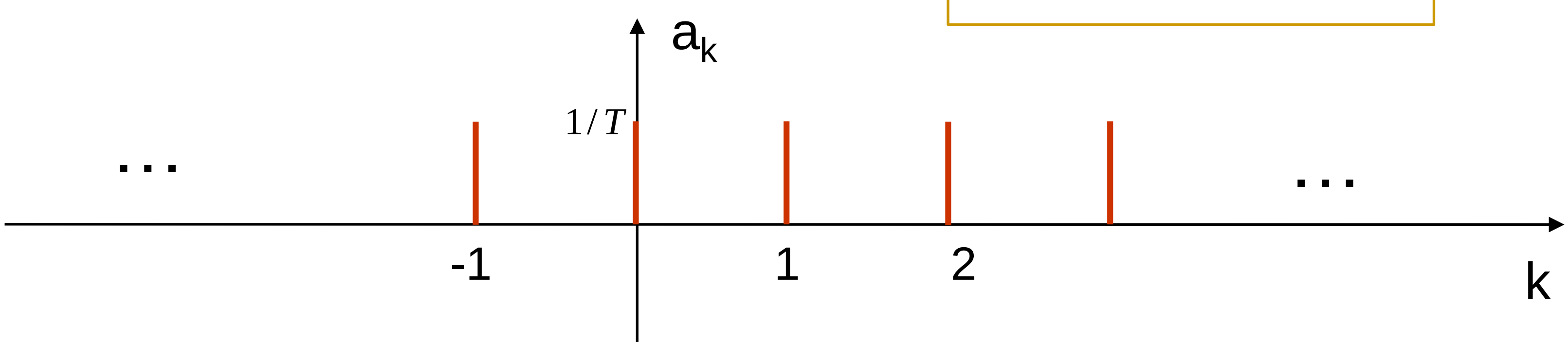
2. a_k可度量其第k次谐波的幅度和相位。a_k一般为复数，可分别画出其幅度谱$|a_k|$和相位谱$\measuredangle a_k$

Example: $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$



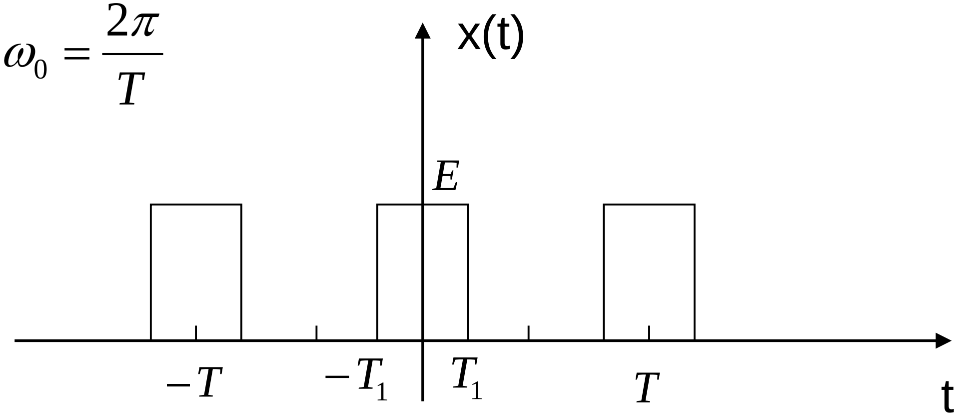
$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_0 t}}$$



注：周期冲激脉冲信号包含所有的谐波分量，且各谐波分量的幅值相等

例：周期为T的矩形脉冲，基波频率$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$



$$x(t) = \begin{cases} E, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

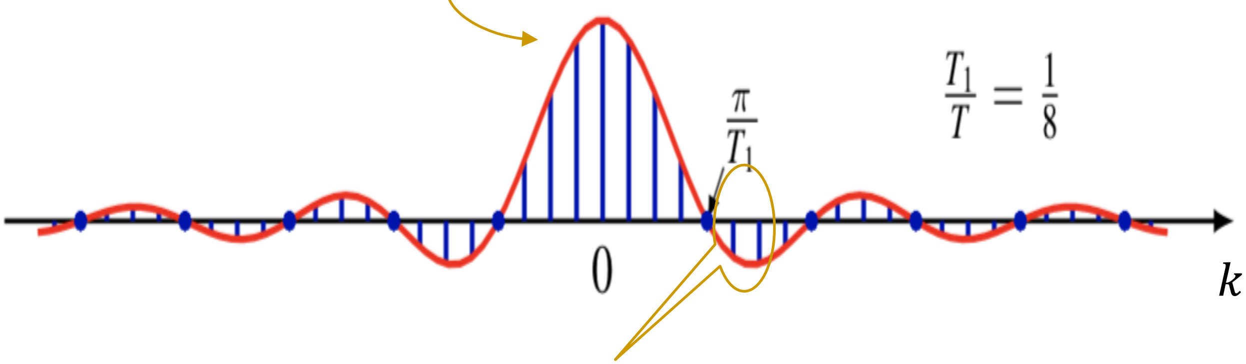
$k = 0$时， $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T_1}^{T_1} E dt = \dfrac{E \cdot 2T_1}{T}$ ——直流分量

$k \neq 0$时， $a_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T_1}^{T_1} E \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = \cdots = \dfrac{E\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$

周期为T，脉冲宽度为$2T_1$的周期矩形脉冲，其傅里叶级数的系数

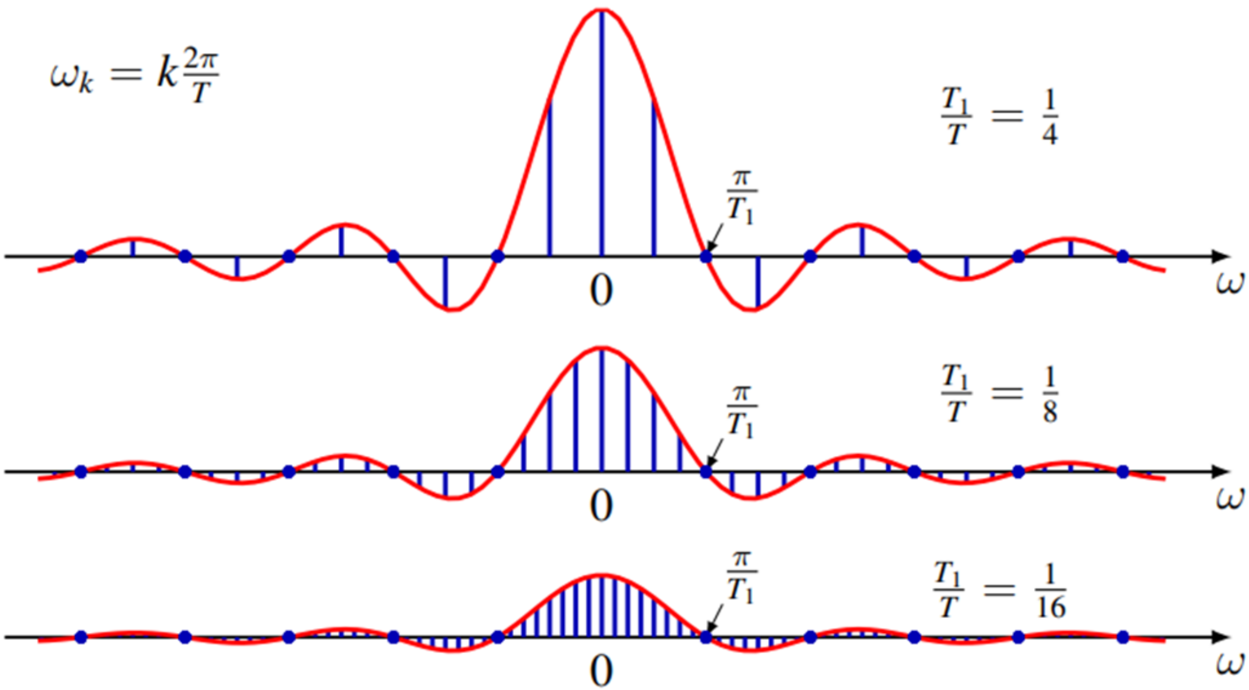
$$\boxed{a_k = \frac{E\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{2ET_1}{T} Sa(k\omega_0 T_1)}$$

注：包络为$S_a(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ —Sampling Function（取样函数）

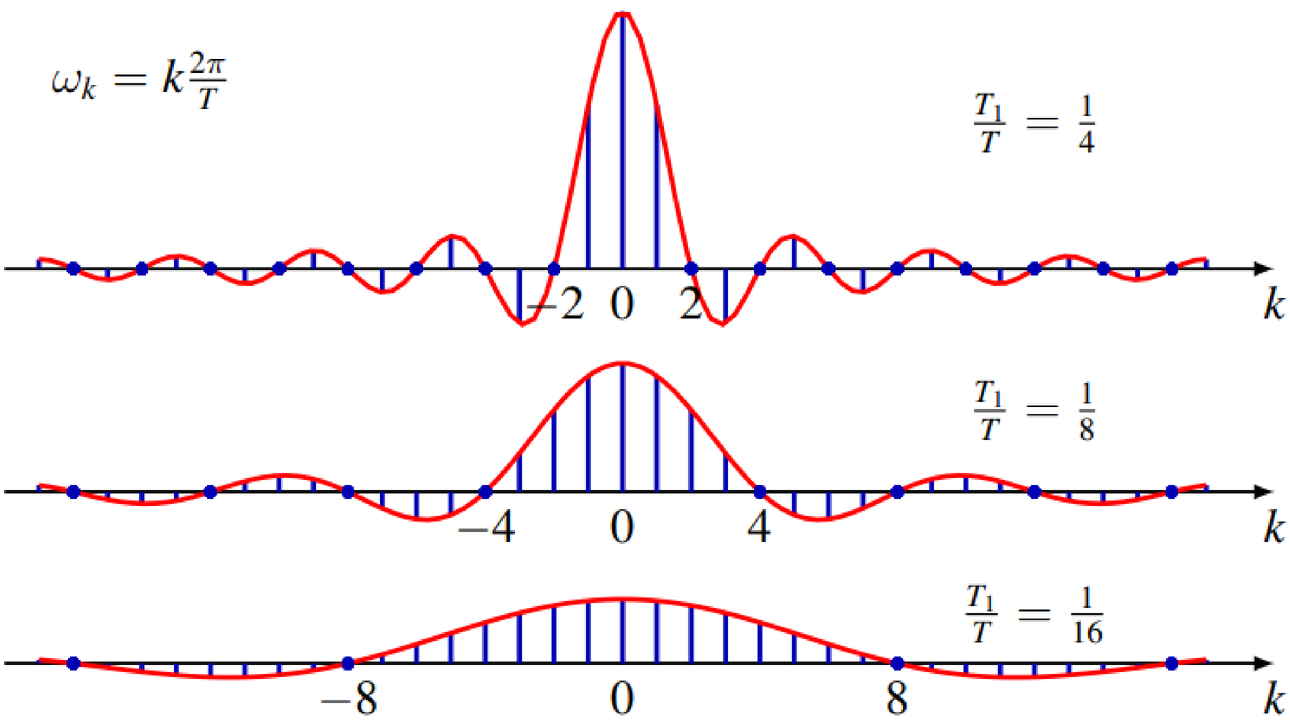


注：主瓣带宽$= \dfrac{\pi}{T_1}\ rad/s = \dfrac{1}{2T_1}\ Hz = \dfrac{1}{\text{脉冲宽度}}$

- Spectra for fixed T_1 and different T



- Spectra for fixed T and different T_1



若x(t)为实周期信号　即 $x(t)=x^*(t)$

$$\because x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Longleftrightarrow x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{\therefore a_k^* = a_{-k}}$$

则 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}] \overset{a_{-k}=a^*{}_k}{=} a_0+\sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$

①极坐标形式　$a_k = A_k e^{j\theta_k}$

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

傅里叶级数的三角函数表示

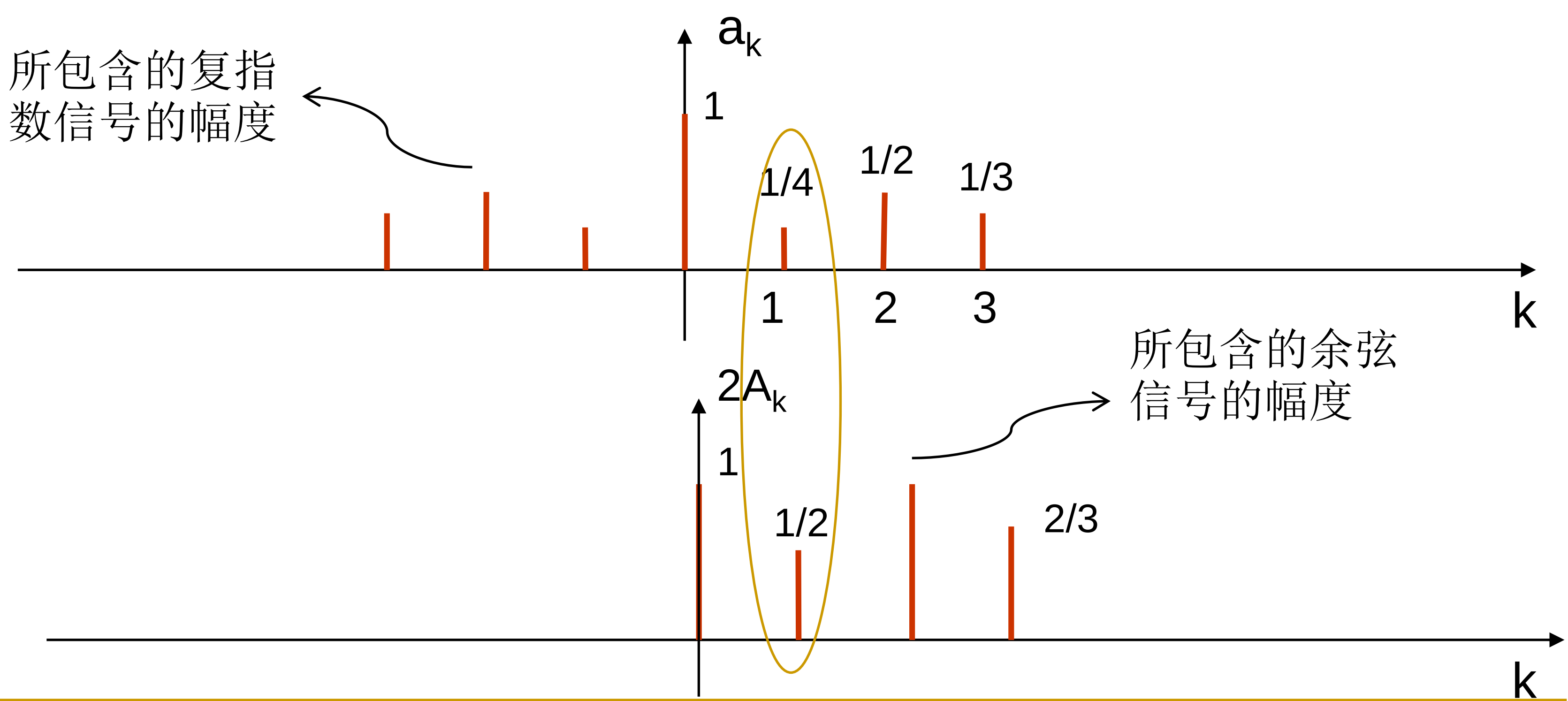
②直角坐标形式　$a_k = B_k + jC_k$

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t]$$

Example: $x(t)=1+\frac{1}{2}\cos 2\pi t+\cos 4\pi t+\frac{2}{3}\cos 6\pi t$ ——基波频率$\omega_0 = 2\pi$

根据欧拉公式 $x(t)=1+\frac{1}{4}(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t})+\frac{1}{2}(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t})+\frac{1}{3}(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t})$

即，$a_0=1$，$a_1=a_{-1}=\frac{1}{4}$，$a_2=a_{-2}=\frac{1}{2}$，$a_3=a_{-3}=\frac{1}{3}$



若x(t)为实周期信号，可以给出其复指数形式的傅里叶级数表示，也可以给出三角函数形式的傅里叶级数表示；但很多时候复指数形式对问题的讨论更为方便。

4.1 Fourier Series Representation of Periodic Signals

- Fourier Series Representation of Continues-Time Periodical Signals
- Convergence of the Fourier series
- Properties of Continues-Time Fourier Series

x(t)满足下述条件之一，则可用傅里叶级数展开式表示！

1.一个周期内能量有限

$$\int_T |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

该条件保证：

① $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$收敛，即积分为有限值

② $x(t)$ 与它的傅里叶级数表示式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

不是在每一个t值都相等,但二者没有能量上的区别。

设 $$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

则该条件保证：

$$\int_T |e(t)|^2 dt = 0$$

2.Dirichlet条件

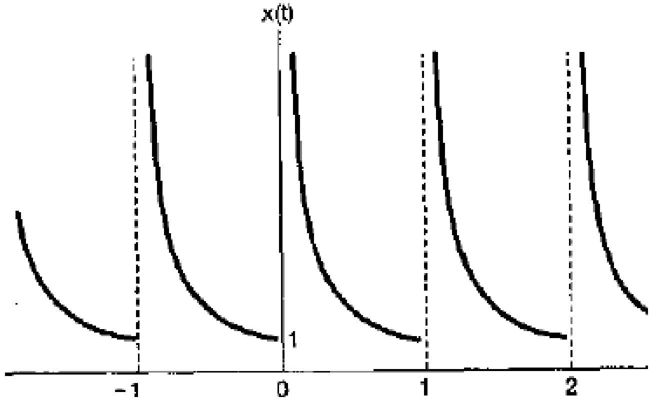
1）在任何周期内x(t)绝对可积（absoultely intergrable),

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

2）在任意有限区间内，x(t)具有有限个最大最小值

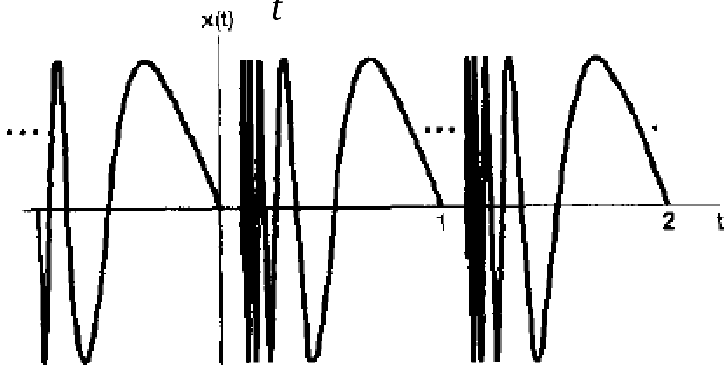
3）在任意有限区间内，x(t)只有有限个不连续点，且在这些不连续点上函数值有限。

$$x(t) = 1/t,\ 0 < t \le 1$$



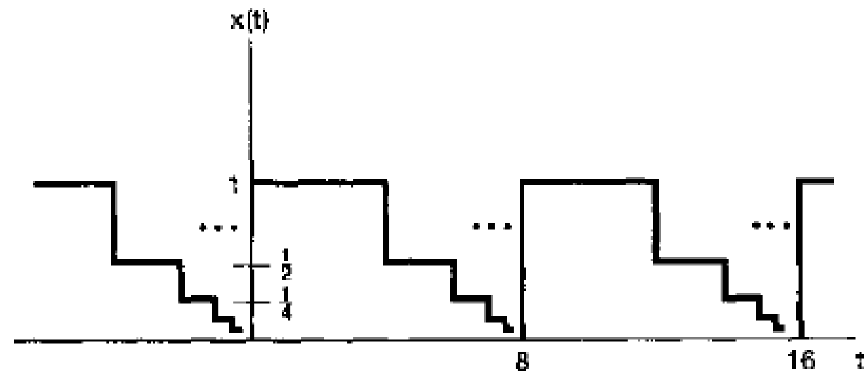
(a)

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right),\ 0 < t < 1$$



(b)

$$x(t) = 1,\ 0 \le t \le 4;$$
$$x(t) = 1/2,\ 4 \le t \le 6;$$
$$x(t) = 1/4,\ 6 \le t \le 7;$$
$$\cdots$$



(c)

图3.8 不满足狄利赫里条件的信号

该条件保证：

① $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ 收敛，即积分为有限值

②除了某些对 $x(t)$ 不连续的孤立的t值外，$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 等于$x(t)$；

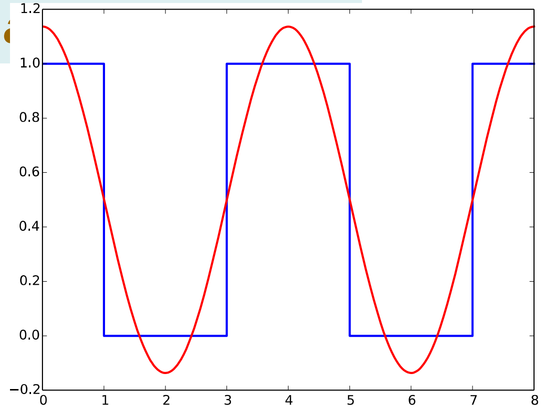
而在那些不连续点上，$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 收敛于不连续点处的平均值。

Signal a

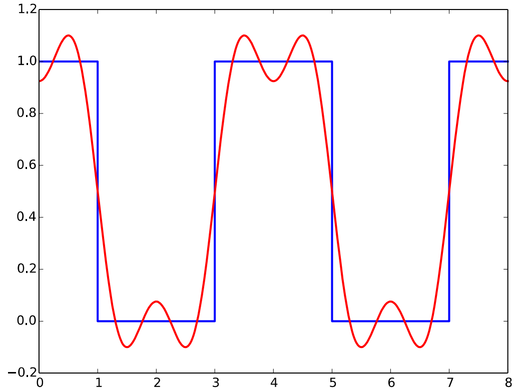
例，周期矩形脉冲的傅里叶级数展开

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

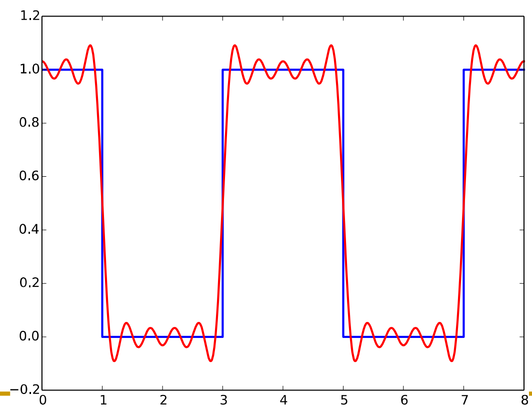
$$\sum_{k=-1}^{1} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

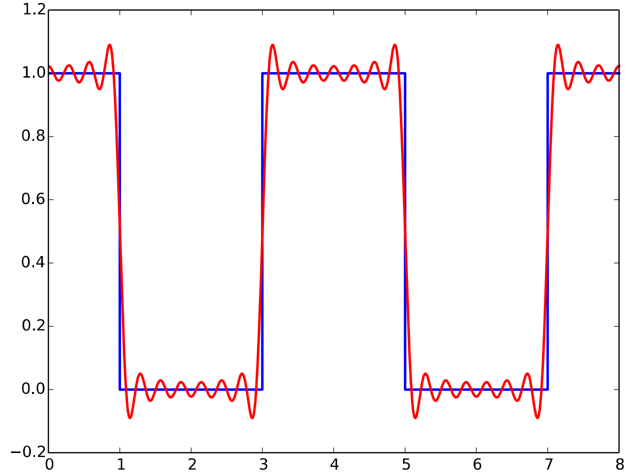


$$\sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

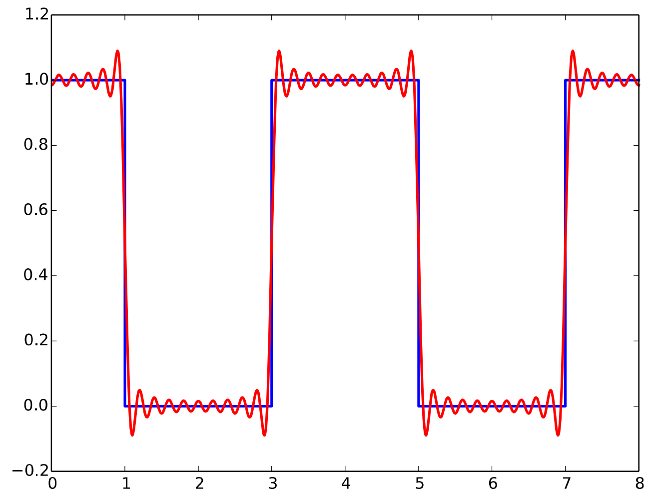


$$\sum_{k=-9}^{9} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



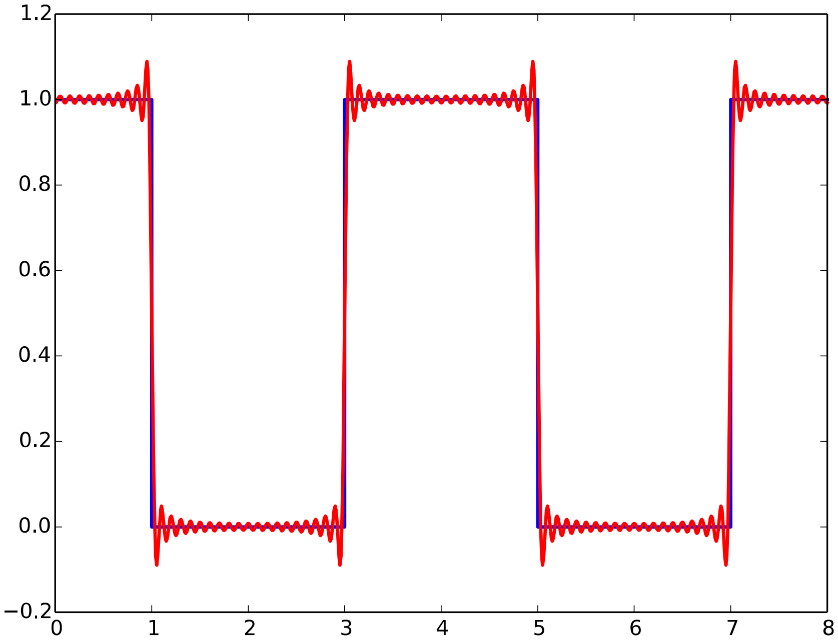


$$\sum_{k=-13}^{13} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



$$\sum_{k=-19}^{19} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\sum_{k=-39}^{39} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



关于吉布斯（Gibbs）现象：

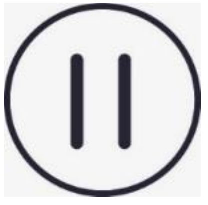
设 $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$

当$N \to \infty$时，除不连续点$(t = \pm T)$外，$x_N(t)$均收敛于$x(t)$；

在不连续点处$x_N(t)$出现起伏，随着N的增大：

- 起伏值向不连续点压缩
- 起伏部分的峰值保持不变（≈跳变量的1.09）

吉布斯（Gibbs）现象说明：一个不连续信号$x(t)$可以用其傅里叶级数展开式$x_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}a_k e^{jk\omega_0 t}$表示，$x_N(t)$在不连续点处会出现起伏，但当$N\rightarrow\infty$时，起伏的总能量收敛于0！即$x(t)$与$x_N(t)$的近似误差的能量为0.



4.1 Fourier Series Representation of Periodic Signals

- **Fourier Series Representation of Continues-Time Periodical Signals**
- **Convergence of the Fourier series**
- **Properties of Continues-Time Fourier Series**

- **Linearity**

$$x(t) \leftrightarrow a_k \qquad y(t) \leftrightarrow b_k$$

$$\boxed{z(t) = Ax(t) + By(t) \leftrightarrow C_k = Aa_k + Bb_k}$$

注：x(t)和y(t)的周期都为T

- **Time Shifting**

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$\boxed{x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} a_k}$$

注：信号在时域发生时移，在频域仅发生相位的超前或滞后

Example: 设 $\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow a_k$，求 $\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow$?

$$\sin(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \cos[\omega_0(t - \frac{T}{4})]$$

$$\leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0\frac{T}{4}} = a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}} = a_k(-j)^k$$

Example: 设$x(t) \leftrightarrow a_k$，求$x(t - \frac{T}{2}) \leftrightarrow$?

$$x(t - \frac{T}{2}) \leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0\frac{T}{2}} = a_k e^{-jk\pi} = a_k(-1)^k$$

Exercise: 证明$x(t) + x(t - \frac{T}{2})$将只包含偶次谐波

- **Time Reversal**

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$\boxed{x(-t) \leftrightarrow a_{-k}}$$

- **Time Scaling**

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$\boxed{x(\alpha t) \leftrightarrow a_k}$$

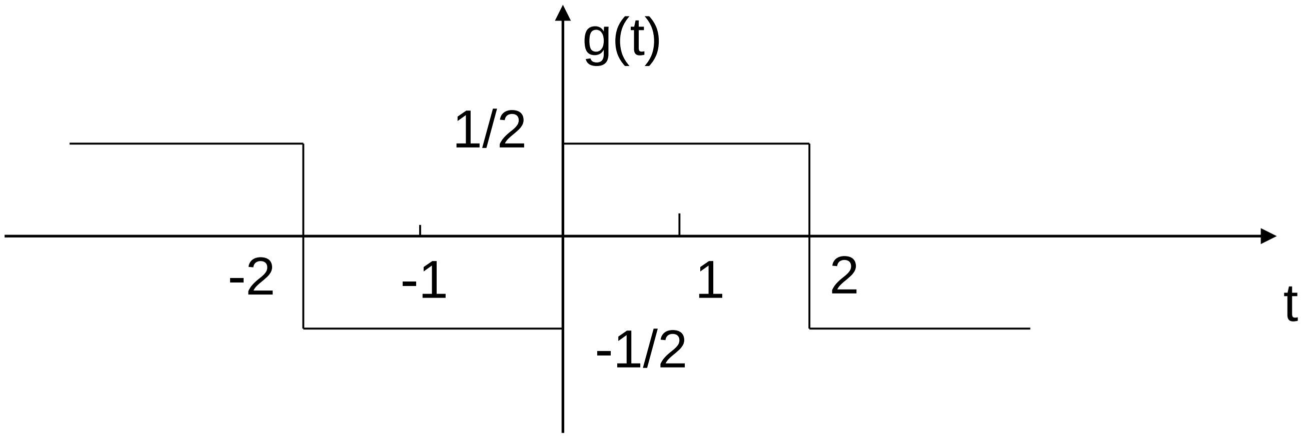
注：信号在时域和频域相反的压缩扩展特性

注：$x(\alpha t)$与$x(t)$具有相同的a_k，但其基波频率不同

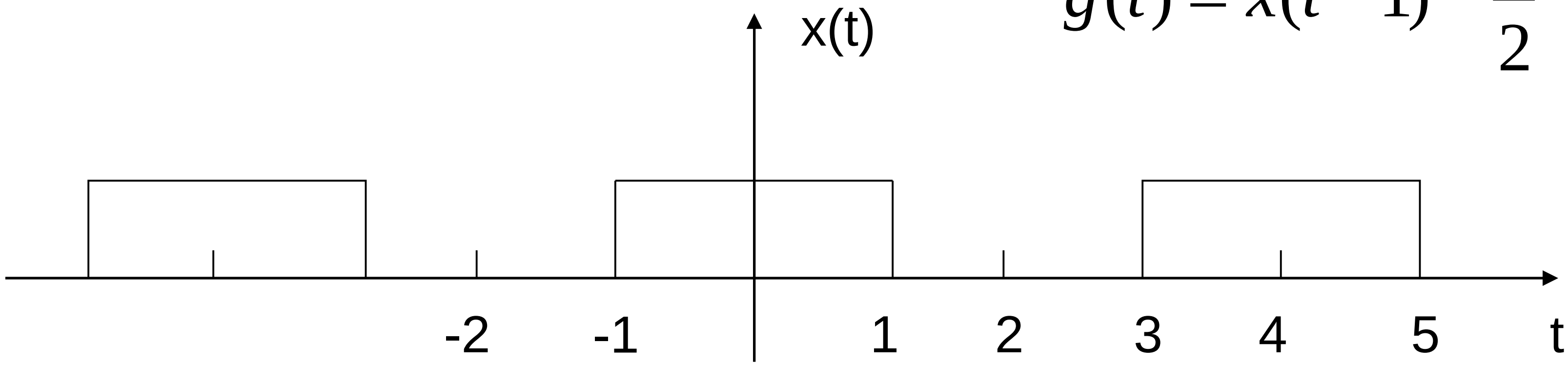
$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x(\alpha t) = \sum_k a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

傅里叶变换的性质！

Example：求$g(t)$的傅里叶级数的系数a_k



$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$



$$\because E=1, T_1=2, T=4 \quad \omega_0=\frac{\pi}{2}$$

$$x(t)\leftrightarrow b_k=\frac{E\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}=\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}$$

$$x(t-1)\leftrightarrow b_k e^{-jk\omega_0}=\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\leftrightarrow c_k=\begin{cases}-1/2, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

$$g(t)=x(t-1)-\frac{1}{2}$$

$$\leftrightarrow a_k=b_k e^{-jk\omega_0}+c_k$$

$$\text{又} b_0=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x(t)dt=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_k=\begin{cases}0, & k=0\\ \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}e^{-jk\frac{\pi}{2}}, & k\neq 0\end{cases}$$

Example： 已知周期T=4的信号x(t)的傅里叶级数的系数如下，求x(t)

$$a_k = (-1)^k \frac{\sin k\pi / 8}{k\pi}$$

$$b_k = \frac{\sin k\pi / 8}{k\pi} \leftrightarrow y(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < |t| < 4 \end{cases}$$

$$\because \ a_k = b_k e^{jk\pi}$$

$$又 T=4, \ \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \ x(t) = y(t \pm 2)$$

- **Differential Integral**

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jk\omega_0 a_k}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{jk\omega_0} a_k}$$

$$Note: \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \text{ is finite valued and peridoic only if } a_0 = 0$$

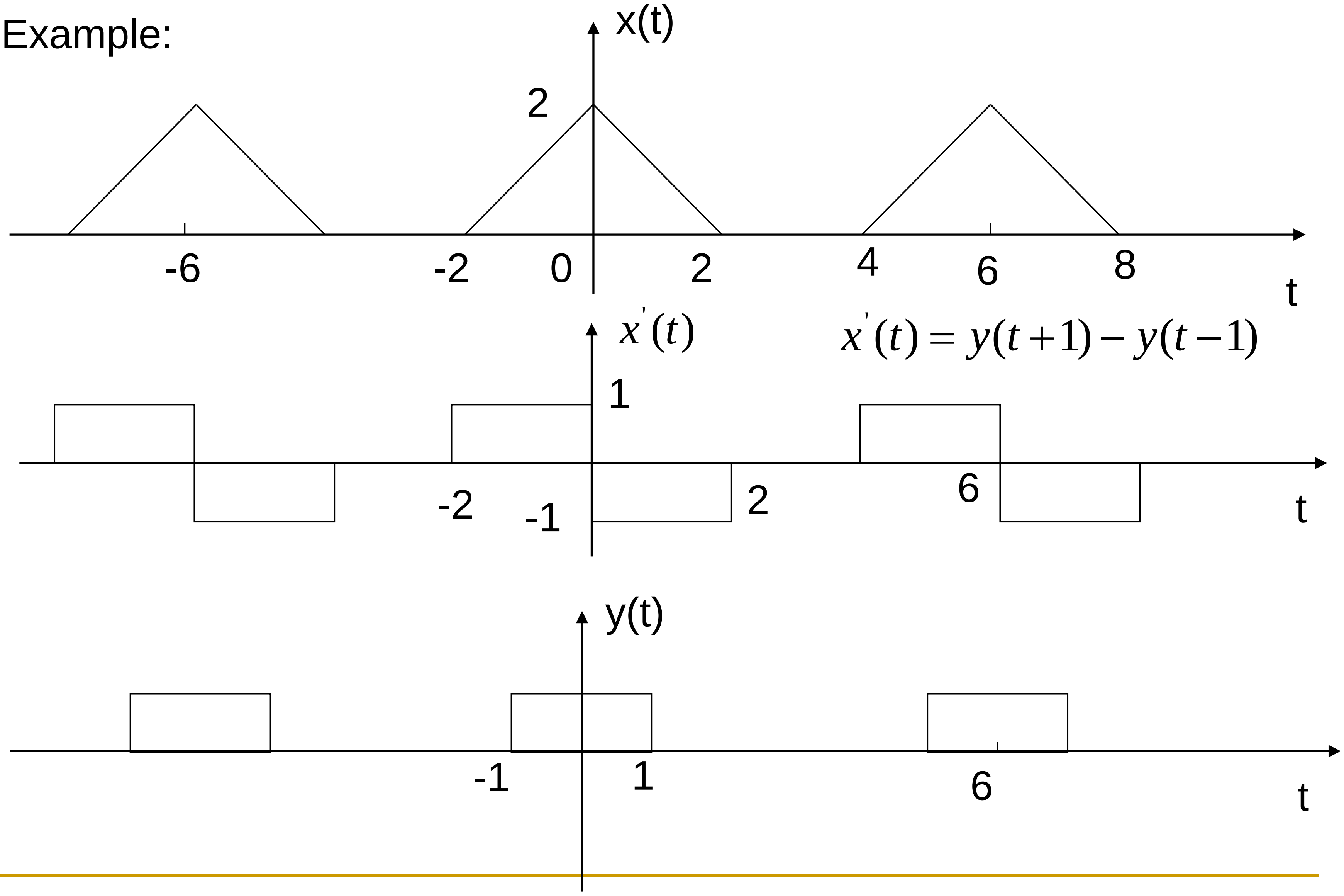
Proof:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow \frac{1}{T}\int_T \frac{dx(t)}{dt} e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[x(t)e^{-jk\omega_0 t}\right]_0^T + jk\omega_0\left[\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right]$$

$$= jk\omega_0 a_k$$

Example:



$$\because T=6\ \omega_0=\frac{\pi}{3},\quad T_1=1$$

$$\therefore \text{当}k\neq 0\text{时}，\ y(t)\leftrightarrow c_k=\frac{\sin(k\frac{\pi}{3})}{k\pi}$$

$$\because x'(t)=y(t+1)-y(t-1)$$

$$\therefore x'(t)\leftrightarrow b_k=c_k\cdot e^{+jk\frac{\pi}{3}}-c_k\cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sin(k\frac{\pi}{3})}{k\pi}(e^{+jk\frac{\pi}{3}}-e^{-jk\frac{\pi}{3}})$$

$$=2j\cdot\frac{\sin^2(k\frac{\pi}{3})}{k\pi}$$

$$\therefore x(t)\leftrightarrow a_k=\frac{b_k}{jk\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\sin^2(k\frac{\pi}{3})}{(k\frac{\pi}{3})^2}=\frac{2}{3}Sa^2(k\frac{\pi}{3})$$

当$k=0$时

$$a_0=\frac{1}{6}\int_6 x(t)dt=\frac{2}{3}$$

- **Freuency Shifting**

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$\boxed{e^{jM\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow a_{k-M}}$$

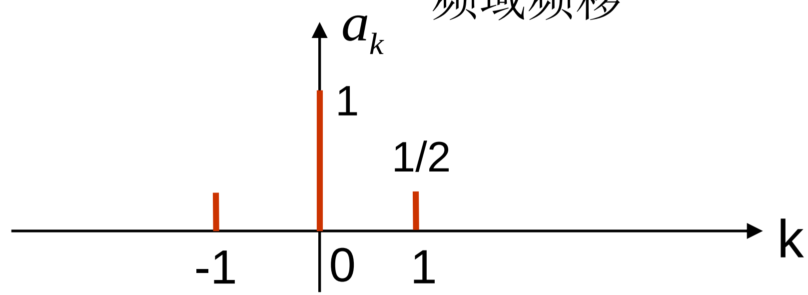
注：时域和频域的对偶特性!

时域调制

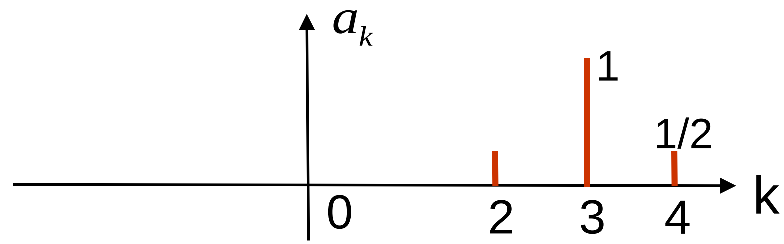
频域频移

Example:

$$x(t) = 1 + \cos\omega_0 t = 1 + \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$



$$e^{j3\omega_0 t}x(t) = e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}(e^{j4\omega_0 t} + e^{j2\omega_0 t})$$



Exercise: $\cos 3\omega_0 t \cdot x(t)$

- **Multiplication**

设$x(t)$和$y(t)$均为周期为T的周期信号

$$x(t) \leftrightarrow a_k \qquad y(t) \leftrightarrow b_k$$

$$\boxed{x(t)\cdot y(t) \leftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}}$$

离散卷积

Proof:

$$x(t)y(t) = \sum_l a_l e^{jl\omega_0 t} \sum_n b_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_l \sum_n a_l b_n e^{j(l+n)\omega_0 t} \overset{l+n=k}{=} \sum_l \sum_k a_l b_{k-l} e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_k \left(\sum_l a_l b_{k-l}\right) e^{jk\omega_0 t}$$

- **Periodic Convolution**

设$x(t)$和$y(t)$均为周期为T的周期信号

$$x(t) \leftrightarrow a_k \quad y(t) \leftrightarrow b_k$$

$$\boxed{x(t) * y(t) \leftrightarrow Ta_k b_k}$$

周期卷积

$$x(t) * y(t) = \int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

- **Conjugation and Conjugate Symmetry**

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$x^*(t) \leftrightarrow a^*_{-k}$$

If x(t) is real valued,then

$$\boxed{a_k = a^*_{-k} \quad \text{or} \quad a_{-k} = a^*_k}$$ --Conjugate Symmetry

(1) $$\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\}$$

$$\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$$

(2) $$|a_k| = |a_{-k}|$$

$$\angle a_k = -\angle a_{-k}$$

关于实信号的奇偶虚实对称特性：

$$x(t)\ real\ and\ even \leftrightarrow a_k\ real\ and\ even$$
$$x(t)\ real\ and\ odd \leftrightarrow a_k\ purely\ imaginary\ and\ odd$$

Proof:

$$x(t) real \leftrightarrow a_{-k} = a_k^*$$

$$x(t) even \leftrightarrow a_{-k} = a_k$$

综上，$a_k^* = a_k$

$\therefore a_k$为实偶的

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \leftrightarrow \mathrm{Re}\{a_k\}$$

$$x_0(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \leftrightarrow j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$$

Proof: $\because x(t) \leftrightarrow a_k \quad x(-t) \leftrightarrow a_{-k} = a_k^*$

$$\therefore x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \leftrightarrow \frac{a_k + a_k^*}{2} = \mathrm{Re}\{a_k\}$$

另，具有对称性的周期信号的傅里叶级数的系数：

$\boldsymbol{x(t)}$ 周期为T	$\boldsymbol{a_k}$
偶对称信号 $\boldsymbol{x(t)=x(-t)}$	不含正弦项
奇对称信号 $\boldsymbol{x(t)=-x(-t)}$	不含余弦项
奇谐信号 $\boldsymbol{x(t)=-x(t\pm\frac{T}{2})}$	只含奇次谐波
偶谐信号 $\boldsymbol{x(t)=x(t\pm\frac{T}{2})}$	只含偶次谐波

Proof:

$$if \;\; x(t)=x(-t) \qquad then \; a_{-k}=a_k$$

$$\therefore x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}] \overset{a_{-k}=a_k}{=} a_0+2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t$$

•**Parseval's Relation**

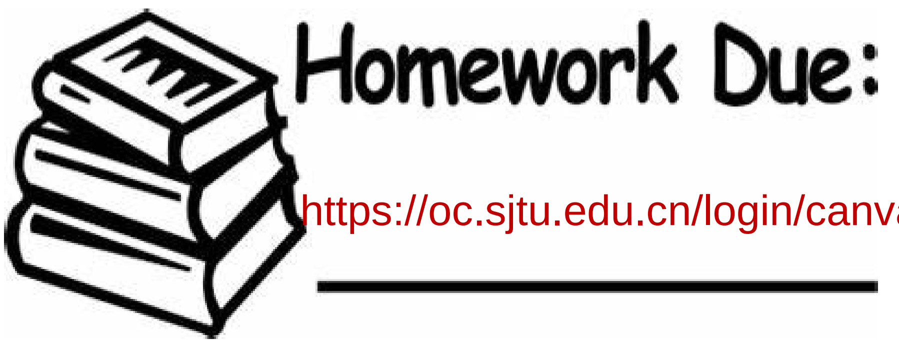
$$\frac{1}{T}\int_{T}|x(t)|^{2}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{k}|^{2}$$

$\frac{1}{T}\int_{T}|x(t)|^{2}dt$ _average power in one period of x(t)

$|a_{k}|^{2}$ _average power in the *k*th harmonic component

注：周期信号的平均功率等于其所有各次谐波的平均功率之和！

Q & A



https://oc.sjtu.edu.cn/login/canvas