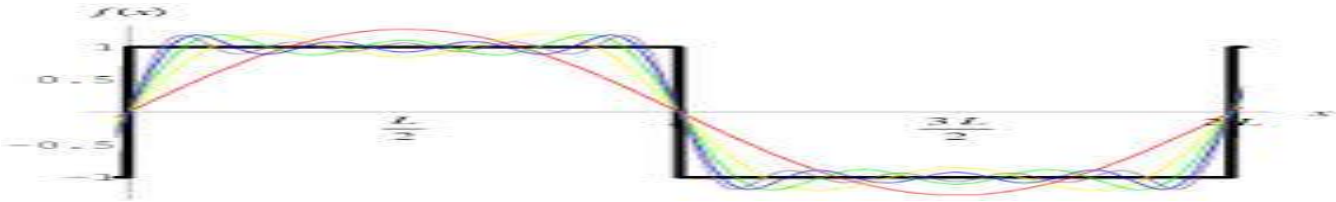
SIGNALS AND SYSTEMS

（信号与系统）

Wei Liu

Dept. of Electronic Engineering

Shanghai Jiao Tong University



■Staff

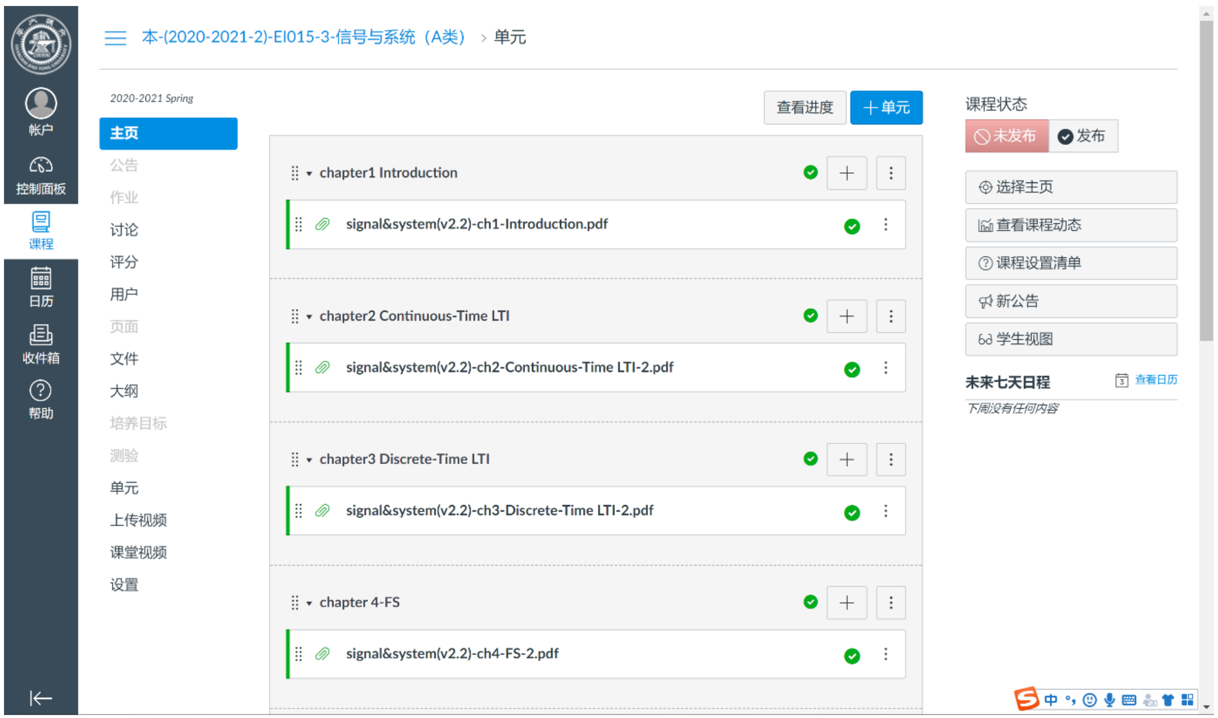
- ✓ **Lecturer:**
  - Wei Liu （刘伟）
  - Office: 1-428,SEIEE Building
  - Email: **liuweiee@sjtu.edu.cn**
- ✓ **TA:**

IIOT—智能物联网研究中心

■ Courseware

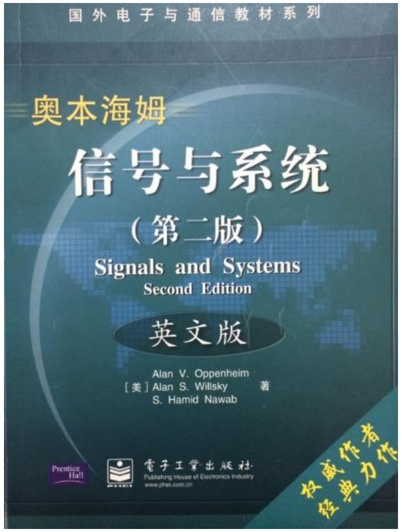
——登录canvas平台

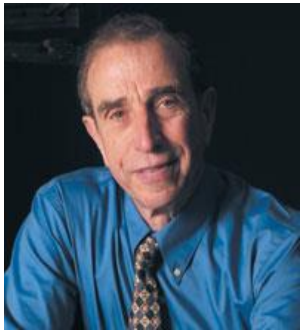
https://oc.sjtu.edu.cn/login/canvas

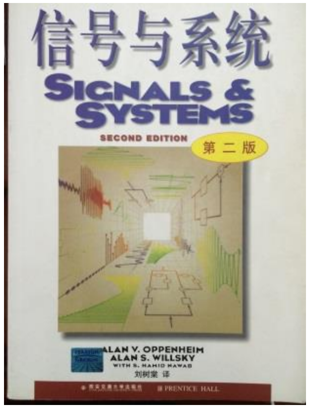


■ Textbook

Signals & Systems (Second Edition)
Alan V.Oppenheim, 电子工业出版社

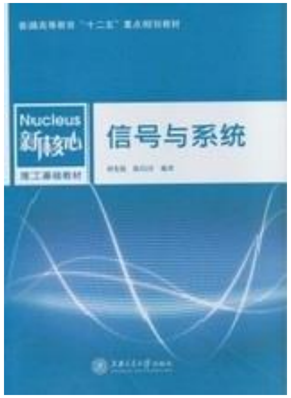






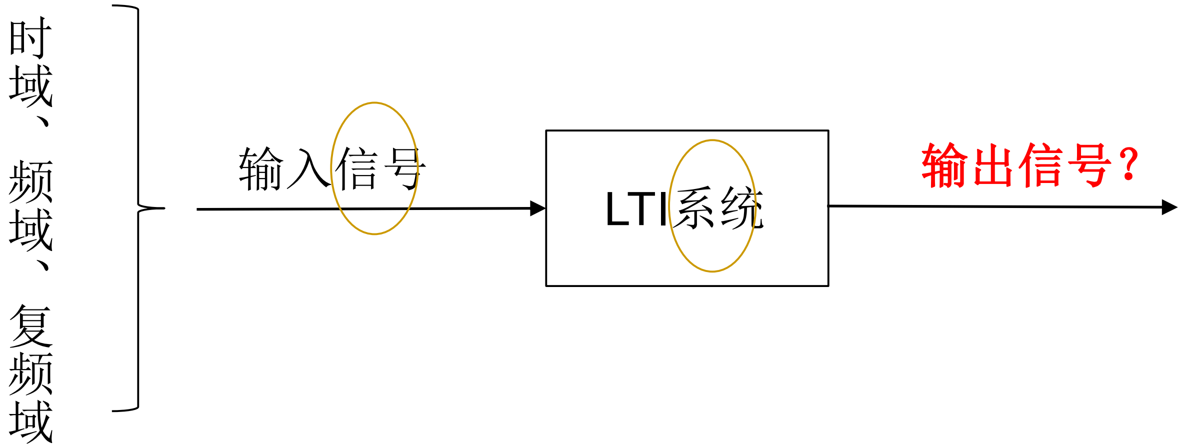
■ References

- 《信号与系统》刘树棠，西安交通大学出版社
- 《信号与系统》胡光锐 徐昌庆，上海交通大学出版社
- 《信号与系统习题精解与考研指导》 胡光锐等，上海交通大学出版社



■ Contents

—— 研究信号与线性时不变（LTI）系统在时域及变换域（频域、复频域）的表征和分析方法



■ Prerequisite Course

- 高等数学、数理方法
- 电路分析

■ Syllabus(16 weeks)

- ✓ Ch01: Introduction (1.5 weeks)
- ✓ Ch02: Continuous-time Linear Time-Invariant Systems (2 weeks)
- ✓ Ch03: Discrete-time Linear Time-Invariant Systems (1.5 weeks)
- ✓ Ch04: Continuous-time Fourier Transform (4 weeks)

  (Including FS and Frequency-Domain Analysis)
- ✓ Ch05: Discrete-time Fourier Transform (1.5 week)
- ✓ Ch09: Laplace Transform (3 week)
- ✓ Ch10: z Transform (1.5 week)

■ Assessment

总成绩100=平时40+期中10+期末50

- Homework： 课后习题
- Course Project: 实验仿真
- Mid-term exam： 时域和频域
- Final exam： 全部课程内容

注：

✓ 试卷为英文！

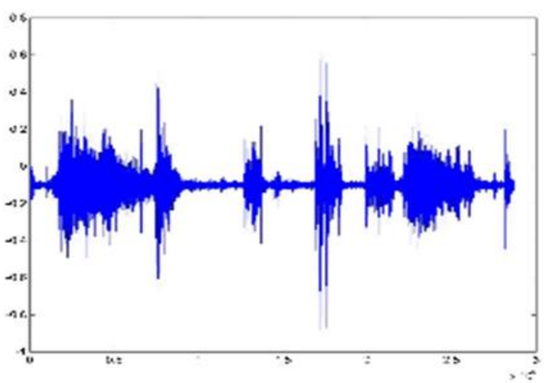
✓ 闭卷！——附上需记忆的基本公式

Forward

信号与LTI系统分析

Signal

- 信号可描述相当广泛的一类物理现象；
  例如：电压/电流，语言，图像……
- 在数学上，信号可表示为一个或多个变量的函数；
- 信号分析是信号处理、信号传输的基础。本课程主要研究信号分析，包括信号的描述、变换、分解等



Speech signal: $t \mapsto v(t)$

Color image: $(i, j) \mapsto (r[i, j], g[i, j], b[i, j])$

信息(Information)- 消息和信号中所包含的某种有意义的抽象的东西

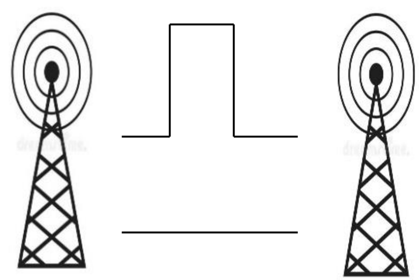
消息(Message)- 携带信息的一组有序符号序列（如文字、语音、图像...）

信号(Signal)- 消息的物理表现形式（ 电信号、声信号、光信号...）

通常，先将抽象的信息表示成某种符号序列即消息，再通过信号传输出去。。。

信息

消息	信号
“上课”	“1”
“不上课”	“0”

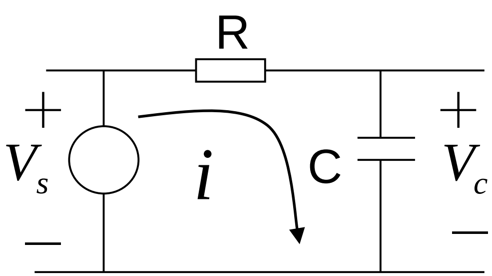


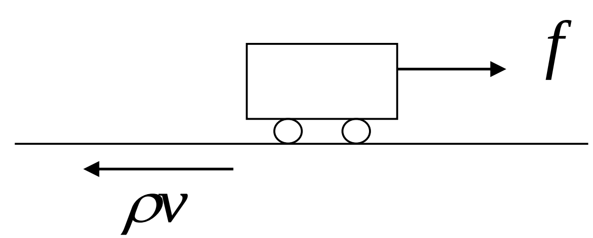
信号	消息
“1”	“上课”
“0”	“不上课”

信息

System

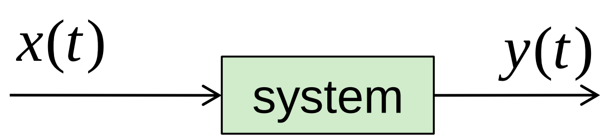
- 由个相互作用、相互依赖的事物组成的能够完成某种特定功能的整体；例如：电路系统，音响系统，图像处理系统……
- 系统可由一定条件下的数学模型描述；
- 对系统的研究包括系统分析和系统综合。本课程主要研究系统分析，即在系统模型给定的情况下，研究其对不同激励下的响应。





$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

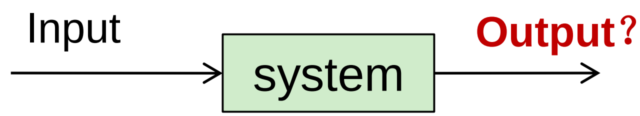
- 系统总是对给定的信号作出响应而产生出另外的信号！



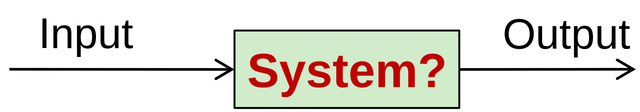
x(t)：输入或激励

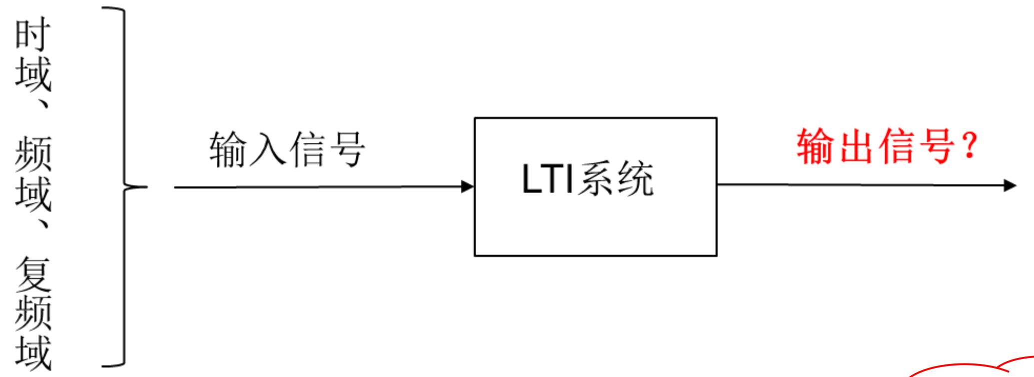
y(t)：输出或响应

✓ 系统分析：在给定系统的条件下，研究其对不同输入信号的响应



✓ 系统综合：已知给定输入下的响应，研究如何进行系统设计





课程特色！

- ✓ 与数学紧密联系，要多练习!
- ✓ 要注重数学背后的物理含义!
- ✓ 掌握对LTI系统进行描述和分析的基本思想！

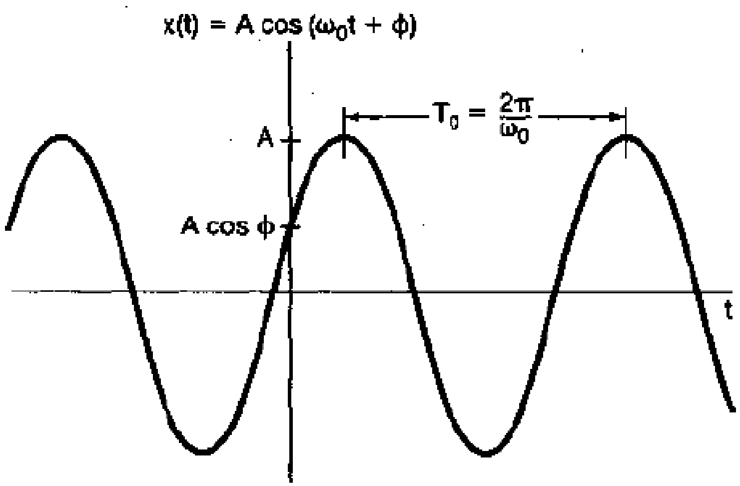
Chapter 1 Signals and Systems

本章主要研究内容：

- 信号
  - 信号的定义、描述和分类
  - 信号的基本运算
  - 常见信号
- 系统
  - 系统的概念、描述和分类
  - 系统的基本性质

一、Mathematical Representation of Signals

- 信号在数学上可表示为一个或多个变量的函数
- 信号可用数字表达式或波形描述



注：本课程所研究的信号主要是关于时间或（复）频率的**一维函数！**

二、Classification of Signals

1. 确知信号与随机信号
2. 连续信号与离散信号
3. 能量信号与功率信号
4. 周期信号与非周期信号
5. 实信号与复信号
6. 奇信号与偶信号

。。。。。。

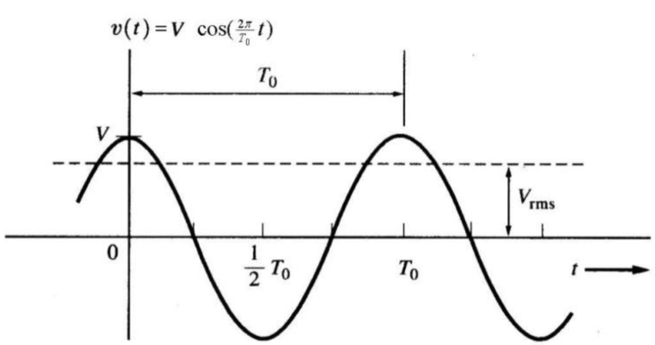
1. Deterministic and Random signals(确知信号与随机信号)

- 确知信号

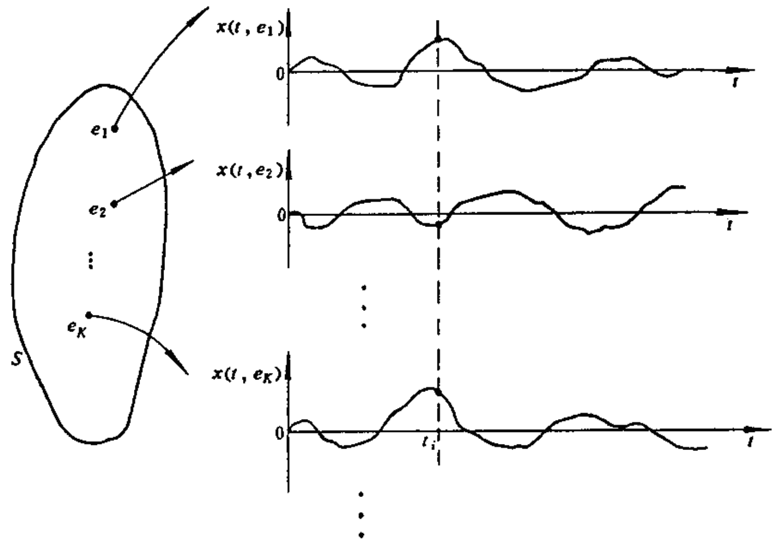
——可用确切的数学解析式描述，给定自变量t得到的是确定的数值

- 随机信号

——无法用确切的数学解析式描述，给定自变量t得到的是随机变量



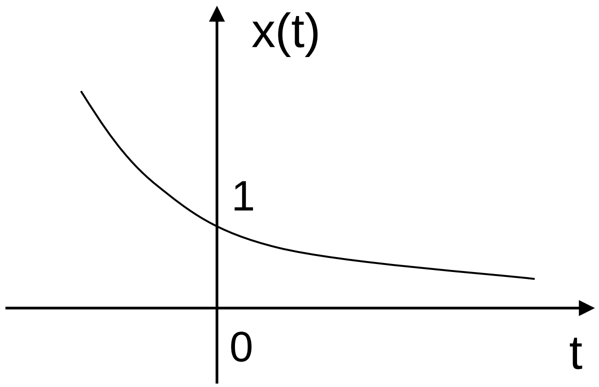
$$x(t) = cos(\omega_0 t + \emptyset)$$



2. Continuous-Time and Discrete-Time Signals(连续时间信号与离散时间信号)

- 连续时间信号
  ——在自变量 t 的连续值上都有定义

$Example$: $x(t) = 2e^{-t}$

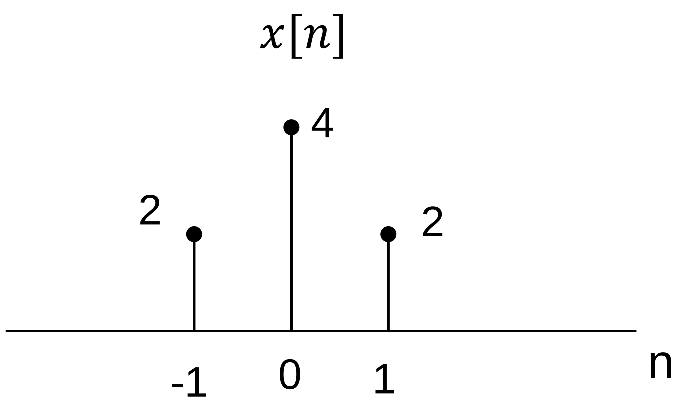


- 离散时间信号
  ——仅在自变量 t 的离散时刻上有定义

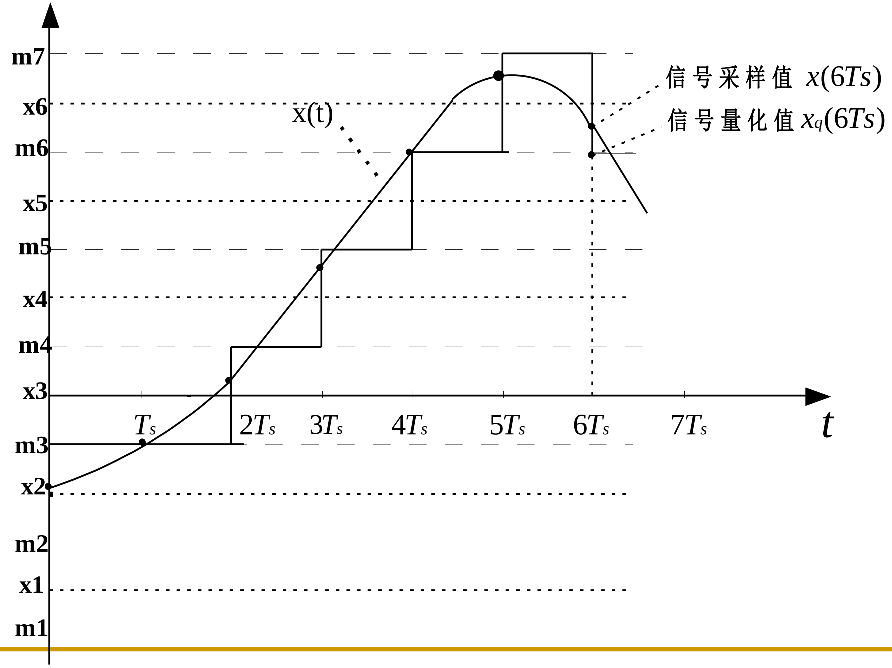
即$t = nT$, T为常数，$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$

故离散时间信号的自变量常用n表示（n为**整数**），离散时间信号也称为离散时间**序列(discrete-time sequence)**

$$Example: \quad x[n] = \begin{cases} 2, & n = -1 \\ 4, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 0, & others \end{cases}$$



	时间 t 连续	时间 t 离散
信号幅度连续	模拟信号	抽样信号
信号幅度离散	量化信号	数字信号
	连续信号	离散信号



3. Energy-Limited and Power-Limited Signals(能量有限信号与功率有限信号)

若$v(t)$和$i(t)$分别为电阻R上的电压和电流，则

瞬时功率 $p(t)=v(t)\cdot i(t)=\dfrac{v^2(t)}{R}=i^2(t)\cdot R$

在(t_1,t_2)内的总能量 $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{v^2(t)}{R}dt$

在(t_1,t_2)内的平均功率 $\displaystyle\frac{1}{t_1-t_2}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt=\frac{1}{t_1-t_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{v^2(t)}{R}dt$

$|\bullet|$ 复信号取模

- 信号能量

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt \qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$$

- 信号平均功率

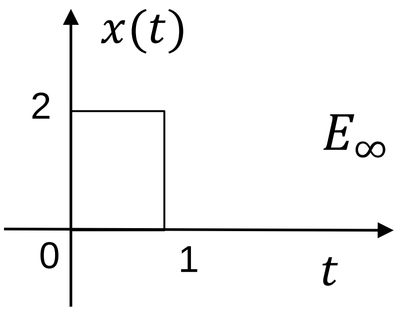
$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt \qquad P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$$

注：以上借助了“能量”和“功率”的概念，但在量纲上并不相同。

- **Finite-energy signal(能量有限信号)**

$E_\infty < \infty \qquad P_\infty = 0$

Example：



$E_\infty = 1$

- **Finite-average power signal(功率有限信号)**

$P_\infty < \infty \qquad E_\infty = \infty$

Example： $x[n] = 4 \qquad P_\infty = 16$

另，P_∞和E_∞可能都不为有限值：　Example： $x(t) = t$

1.0 INTRODUCTION

1.1 CONTINUOUS-TIME AND DISCRETE-TIME SIGNALS

1.2 TRASFORMATION OF INDEPENDENT VARIABLE

1.3 TYPICAL FUNCTIONS

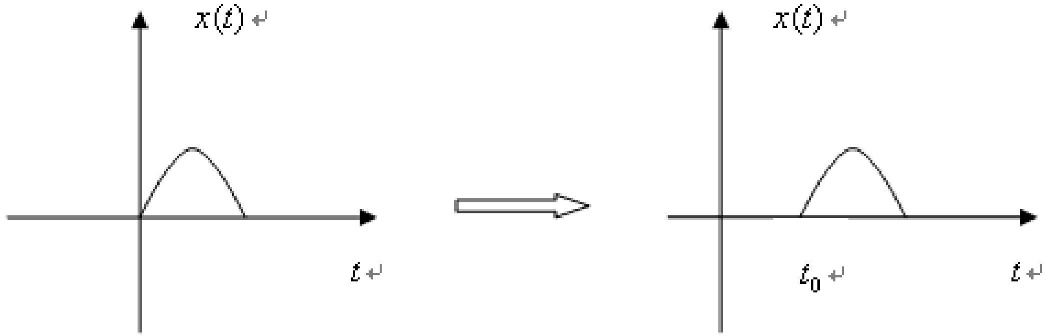
1.4 CONTINUOUS-TIME AND DISCRETE-TIME SYSTEMS

1.5 BASIC SYSTEM PROPERTIES

一、Examples of Transformations(基本变换举例)

1. Time Shift（时移）

$x(t) \rightarrow x(t-t_0)$ $\qquad$ $x[n] \rightarrow x[n-n_0]$

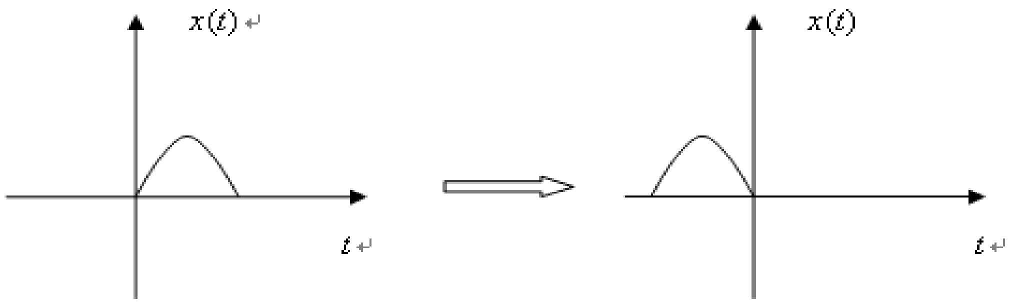


注：t_0或n_0取值正（负）时，分别对应右（左）移

例：雷达测距

2. Time Reversal（反折）

$$x(t) \rightarrow x(-t) \qquad\qquad x[n] \rightarrow x[-n]$$



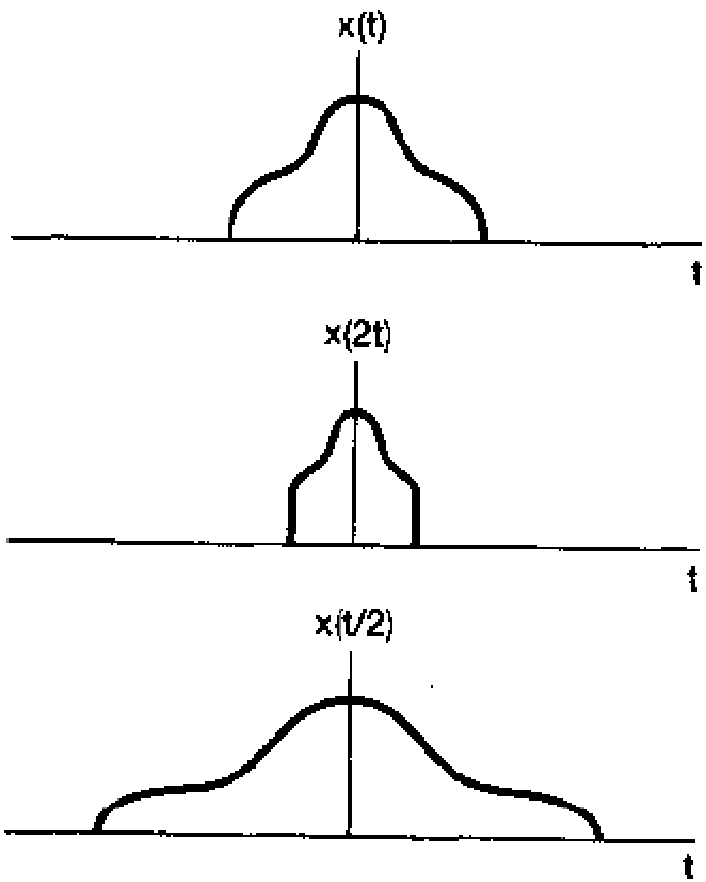
例：磁带倒转

3. Time Scaling（尺度变换）

$$x(t) \rightarrow x(\alpha t) \qquad\qquad x[n] \rightarrow x[\alpha n]$$

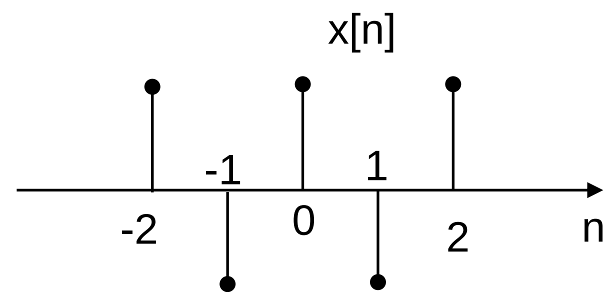
注： $|\alpha| > 1$ —压缩 $\qquad |\alpha| < 1$ —扩展

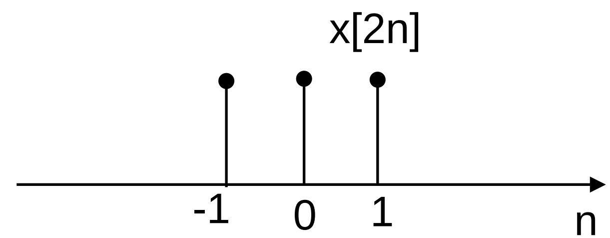
Example: x(t)、x(2t)及x(t/2)



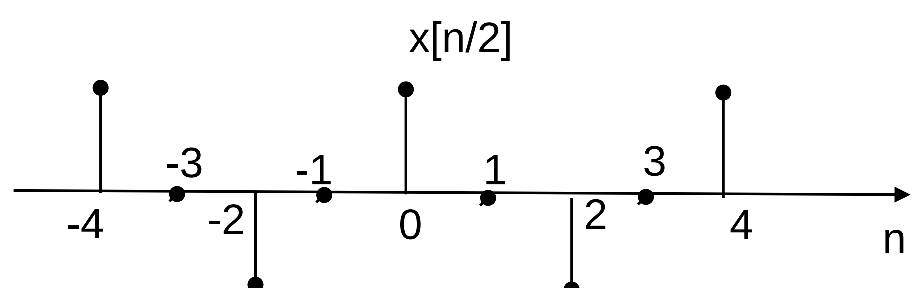
图片来源 《信号与系统》刘树棠

Example: x[n]、x[2n]及x[2/n]





注：x[2n]仅包括了x[n]中n为偶数的样本点！

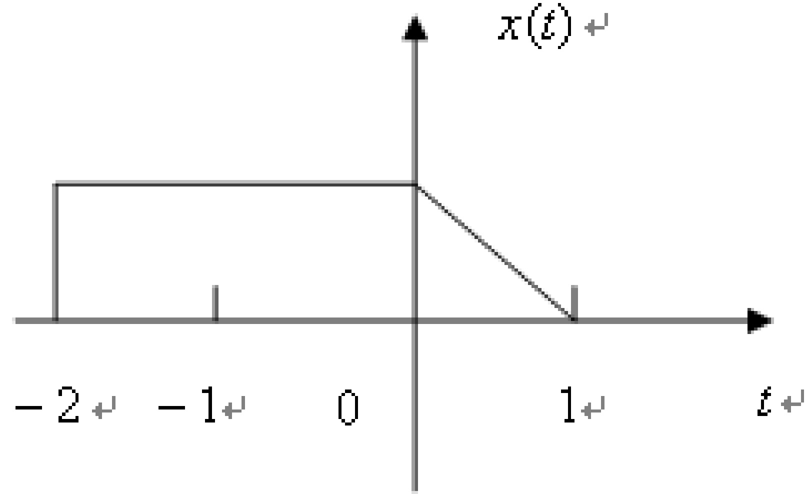


Exercise: x[n/3]？

注：x[n/2]是在x[n]的相邻样本点插入1个0！

$$x(t) \rightarrow x(\alpha t + \beta)$$

Example： $x(t) \rightarrow x(-3t-2)$



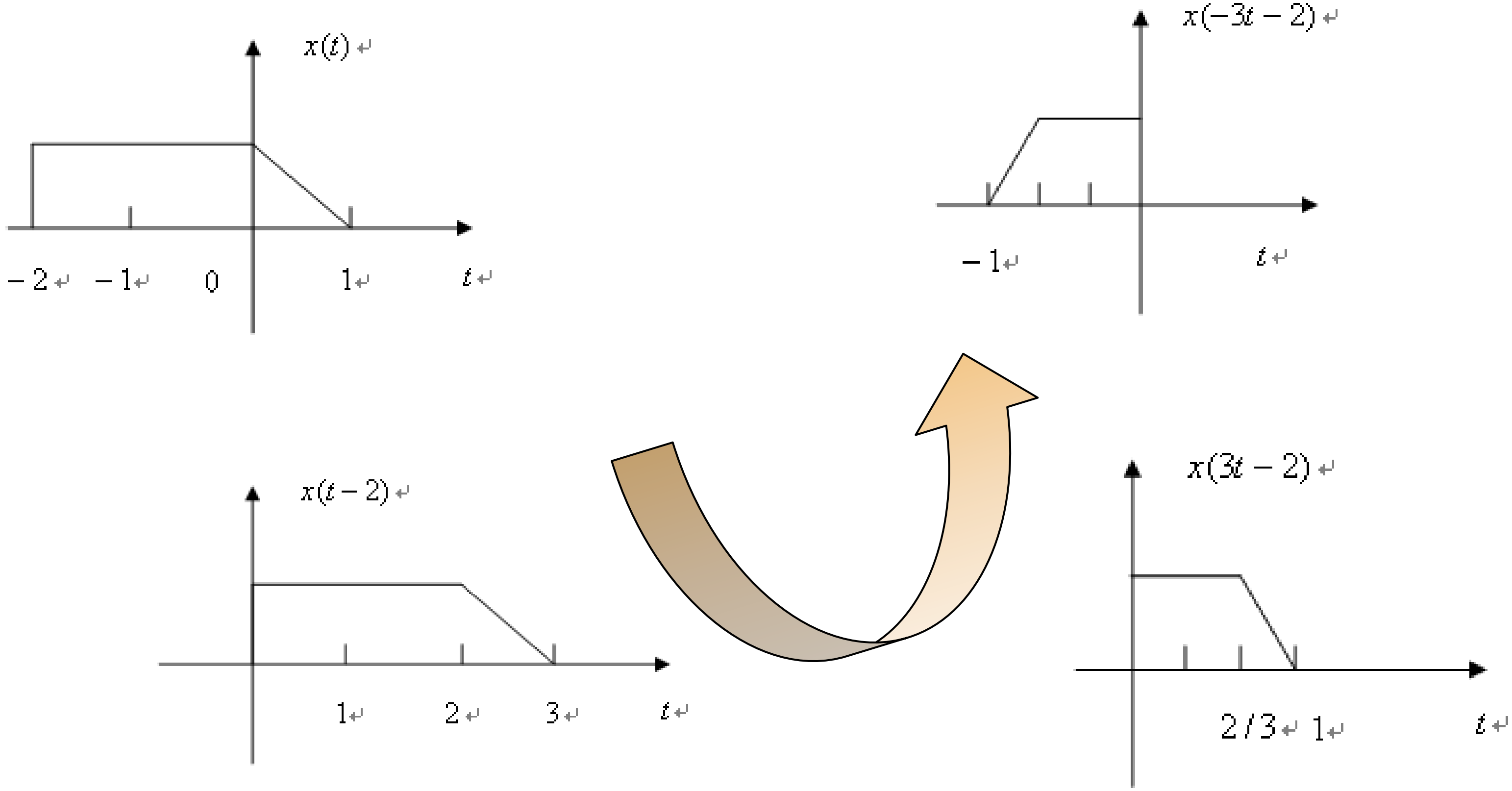
Solution1: 先平移，再反折或尺度变换

① 向右平移2为x(t-2)；

② 压缩3倍为x(3t-2)

③ 再反折为x(-3t-2)

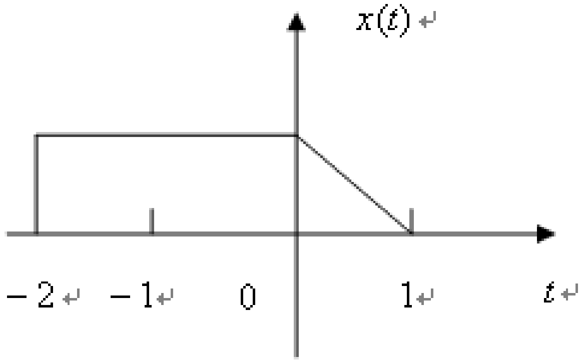
$$x(t) \rightarrow x(t-2) \rightarrow x(3t-2) \rightarrow x(-3t-2)$$



图片来源 《信号与系统》刘树棠

Solution2：先尺度变换反折再平移？

$$x(t) \rightarrow x(3t) \rightarrow x(-3t) \quad \rightarrow x\left(-3\left(t+\frac{2}{3}\right)\right) = x(-3t-2)$$



注意尺度变换后的时移量！

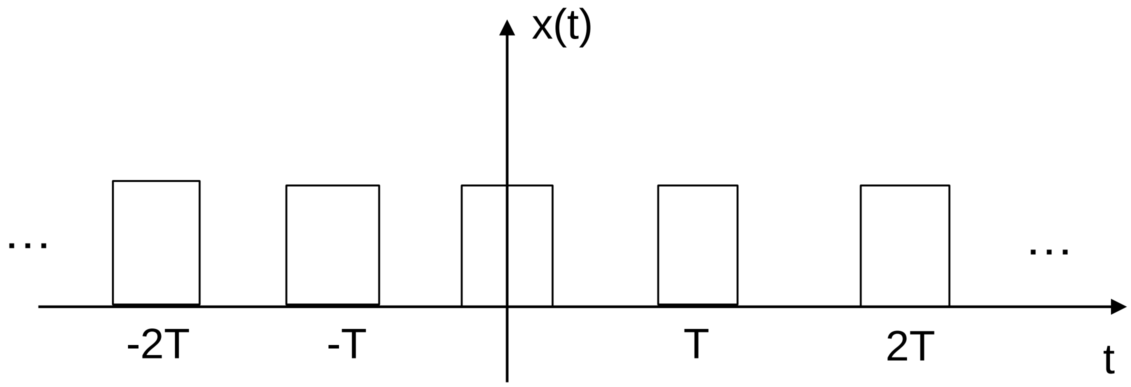
二、Periodic and Non-Periodic Signals（周期信号与非周期信号）

若对于所有的t或n，都有T或N（T、N都为正）使

$$x(t) = x(t+T) \qquad x[n] = x[n+\mathrm{N}]$$

则x(t) 或 x[n]为周期信号，反之为非周期信号

使上式成立的**最小的**T或N为基本周期，记作：T_0或N_0



三、Real and Complex Signals（实信号与复信号）

信号的取值为实数，则为实信号；信号的取值为复数，则为复信号。

Example:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) \qquad \text{—实信号}$$

$$x(t) = Ce^{-j\omega_0 t} \qquad \text{—复信号}$$

四、Even and Odd Signals(偶信号与奇信号)

若 $x(t)=x(-t)\quad x[n]=x[-n]$ 则 x(t)或x[n] 为偶信号

若 $x(t)=-x(-t)\quad x[n]=-x[-n]$ 则 x(t)或x[n] 为奇信号

$$E_V\{x(t)\}=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$$ ——x(t)的偶部

$$O_d\{x(t)\}=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$ ——x(t)的奇部

- $E_V\{x(t)\}$ 为偶信号， $O_d\{x(t)\}$ 为奇信号
- 任何信号都能分解成其偶信号与奇信号之和，即：

$$x(t)=E_v\{x(t)\}+O_d\{x(t)\}$$

其它基本运算：

- 加减和乘除运算

- 连续时间信号的微分与积分
  - 微分

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

  - 积分

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

- 离散时间信号的差分与求和
  - 一阶前向差分

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$$

一阶后向差分

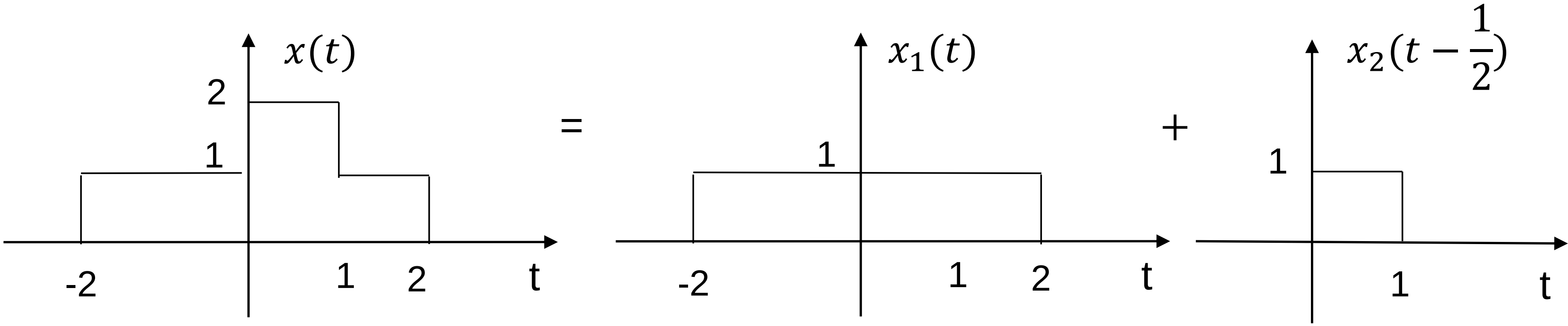
$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$$

  - 求和

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

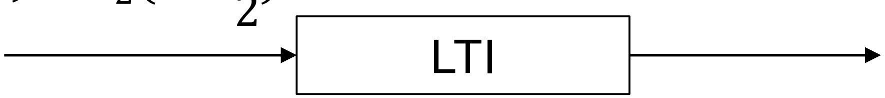
为什么要学习信号的基本变换?

Example:



$$x(t)=x_1(t)+x_2(t-\frac{1}{2})$$

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t-\frac{1}{2})$$



注：将相对复杂的信号用“基本”信号的线性变换和线性组合表示，利用基本信号的输出求多数信号的输出。

一、Continuous-Time Complex Exponentials Signals and Sinusoidal Signals(连续时间复指数信号与正弦信号)

$$\boxed{x(t) = C \cdot e^{\alpha t}}$$

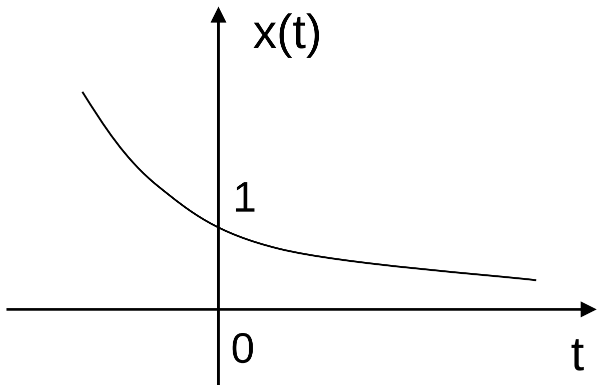
$-C$、α为复数

1、实指数信号

$-C$、α都为实数

$\alpha > 0$为增函数；$\alpha < 0$为减函数

$x(t) = 2e^{-t}$



$$\frac{dx(t)}{dt} = -2e^{-t}$$

注：实指数信号的微分和积分仍是实指数信号！

2、（周期）复指数信号与正弦信号

$-\alpha$为纯虚数

① $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

② $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$或$A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

周期！

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \qquad \sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

——Euler's Function

(1) $e^{j\omega_0 t}$ is periodic for any value of ω_0 , Fundamental Period $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$

(2) the larger the magnitude of ω_0 , the higher is the rate of oscillation in the signal $e^{j\omega_0 t}$

Fourier Transform

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega) = \int x(t)e^{-j\omega t}dt$$

注：将$x(t)$用$e^{j\omega t}$的线性组合表示

③一组成谐波关系的复指数信号

一组其基本频率是某一频率ω_0的整数倍的周期复指数信号，ω_0为其基波频率。

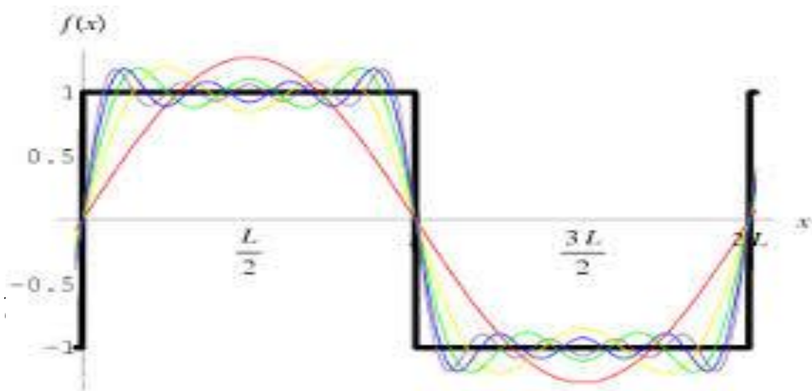
$$\{e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, \ldots\ldots\}$$

注：周期信号可以用一组成谐波关系的复制数信号的线性组合表示！

FS Represention

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}d$$



3、一般情况

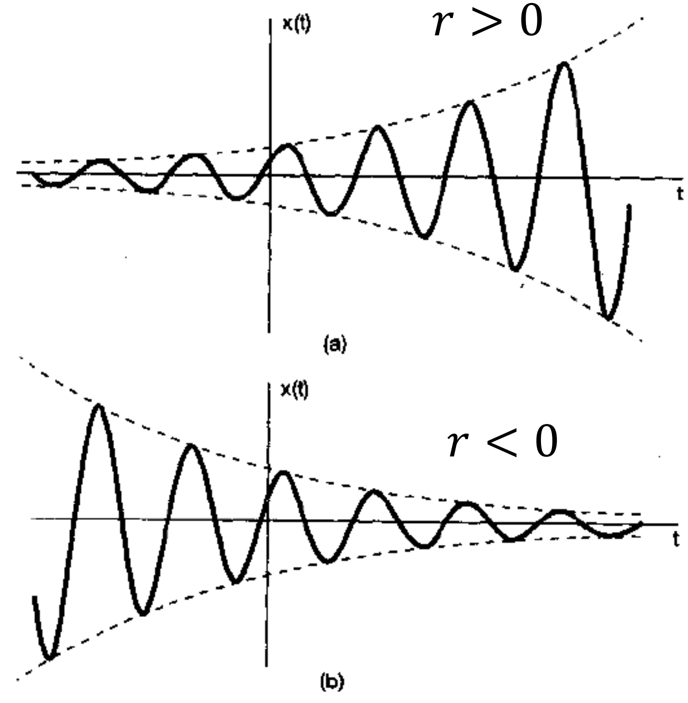
$$x(t) = C \cdot e^{\alpha t}$$

若 $C = |C|e^{j\theta}$ $\alpha = r + j\omega_0$

则 $x(t) = |c| \cdot e^{rt} \cdot e^{j(\omega_0 t + \theta)}$

其中：

- $|C|e^{rt}$— 包络，$r > 0$时增长，$r < 0$时衰减
- ω_0一振荡频率，θ— 初始相位



图片来源 《信号与系统》刘树棠

二、Discrete-Time Complex Exponentials Signals and Sinusoidal Signals (离散时间复指数信号与正弦信号)

$$\boxed{x[n] = C \cdot \alpha^n}$$ —C、α为复数

1、实指数信号

—C、α都为实数

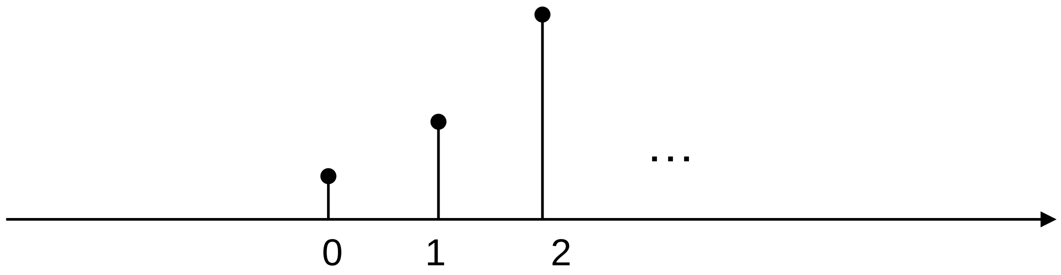
- $|\alpha| > 1$时，$x[n]$为增函数； $|\alpha| < 1$时，$x[n]$为减函数；

example： $x[n] = 2^n$， $x[n] = (\frac{1}{2})^n$

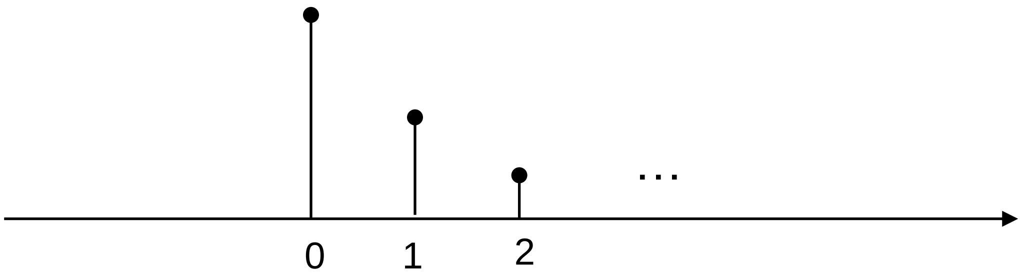
- $\alpha > 0$时，$x[n]$的取值符号一致； $\alpha < 0$时，$x[n]$的取值符合交替；

example： $x[n] = 2^n$， $x[n] = (-2)^n$

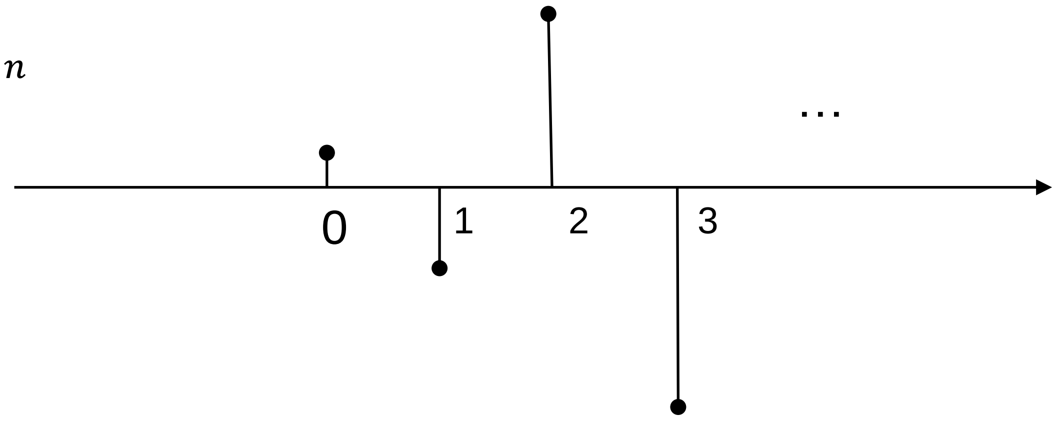
$x[n] = 2^n$



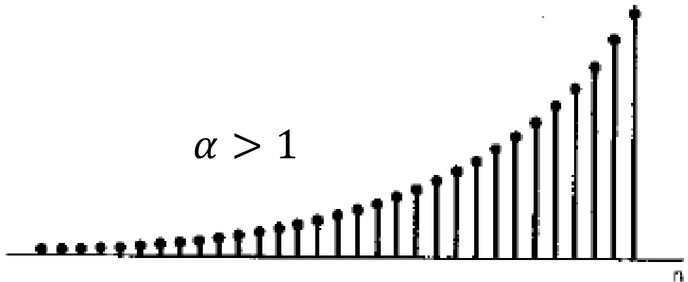
$x[n] = (\frac{1}{2})^n$



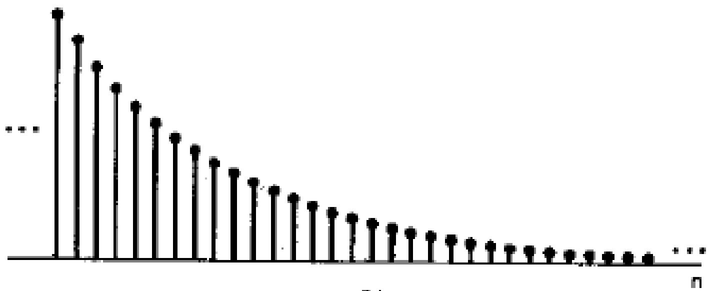
$x[n] = (-2)^n$



$\alpha > 1$



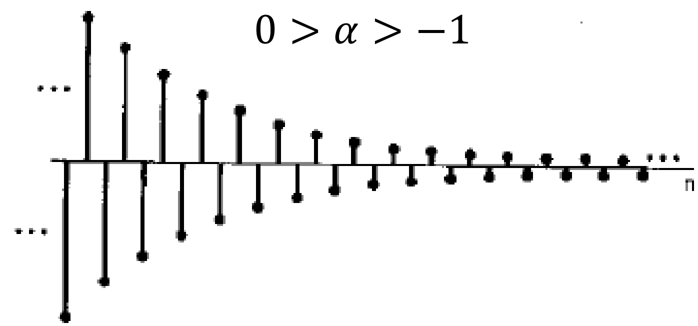
(a)



(b)

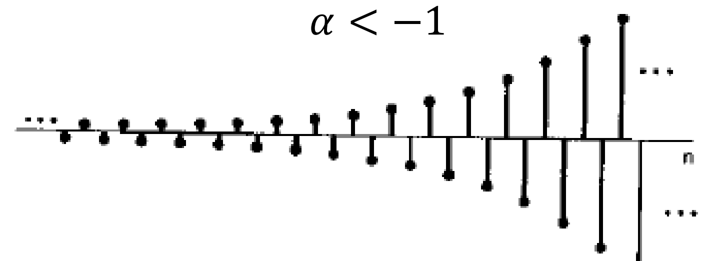
$1 > \alpha > 0$

$0 > \alpha > -1$



(c)

$\alpha < -1$



(d)

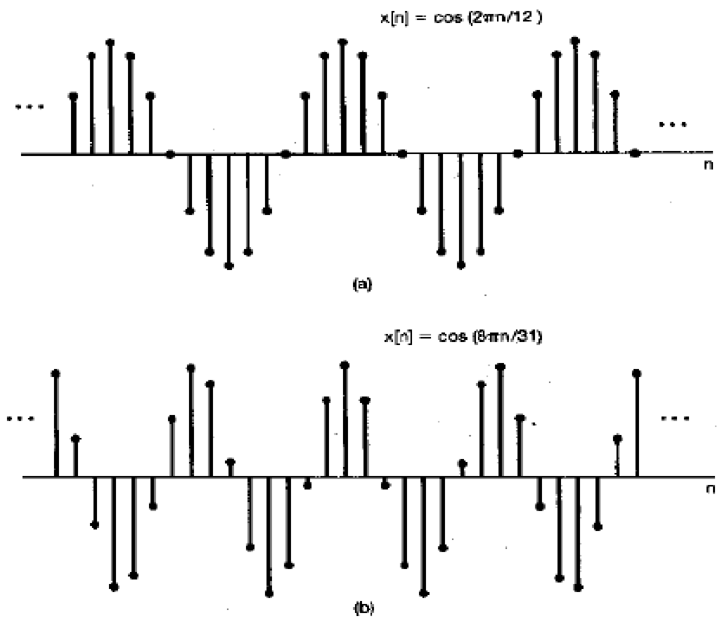
图片来源 《信号与系统》刘树棠

2、复指数信号与正弦信号

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

周期?

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)\text{或}A\sin(\omega_0 n + \varphi)$$



图片来源 《信号与系统》刘树棠

关于复指数序列的周期性！

① $\because e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\omega_0 N}$

要使$e^{j\omega_0 n}$具有周期性$\longrightarrow$ $e^{j\omega_0 N} = 1$

$\therefore$ 须$\omega_0 N = 2\pi m$ 即：$\dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$

当$\dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$为有理数时，$e^{j\omega_0 n}$为周期的,且基波周期为$N$（$m, N$为整数,且无公因子）；反之，$e^{j\omega_0 n}$为非周期的

Example:

(1) $x[n]=A\sin(\omega_0 n+\varphi)\overset{\omega_0/2\pi=m/N}{=}A\sin(2\pi\frac{m}{N}n+\varphi)$

当$\frac{\omega_0}{2\pi}$为有理数，则经过N个点可产生2π的整数倍相移，因此周期为N

---

(2) $x[n]=\cos(8\pi n/31)=\cos(2\pi\frac{4}{31}n)$

周期为31

---

(3) $x[n]=\cos(n/6)\ =\cos(2\pi\frac{1}{2\pi\cdot 6}n)$

$\because\frac{1}{2\pi\cdot 6}$为无理数 $\therefore x[n]$为非周期的

$\because\ e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 T} \cdot e^{j\omega_0 t}$

$\therefore$ 须$\omega_0 T = 2\pi$，

即只要取基波周期$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$，则有$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$

> 对任何的ω_0，$e^{j\omega_0 t}$关于t都是周期的

Example:

(1) $x(t) = je^{j10t} = e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j10t} = e^{j(10t+\frac{\pi}{2})} \rightarrow$ 周期为$\dfrac{2\pi}{10}$

(2) $x(t) = \cos^2(2t - \dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}[1 + \cos(4t - \dfrac{2\pi}{3})] \rightarrow$ 周期为$\dfrac{2\pi}{4}$

② $\because e^{j(\omega_0 \pm k\cdot 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\pm k\cdot 2\pi n}$

而 $e^{j\pm k\cdot 2\pi n} = 1$

$\therefore e^{j(\omega_0 \pm k\cdot 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}$

具有频率ω_0的复指数信号与具有频率$\omega_0 \pm 2k\pi$的复指数信号相同，$e^{j\omega_0 n}$不会随ω_0增加而不断增加其振荡速率。

注：一般只需考虑ω_0在$[0,2\pi)$或$[-\pi，\pi)$时$e^{j\omega_0 n}$的取值。

$e^{j\omega_0 t}$则随着ω_0的增大而不断提高其振荡速率，不同的ω_0对应不同的复指数信号。

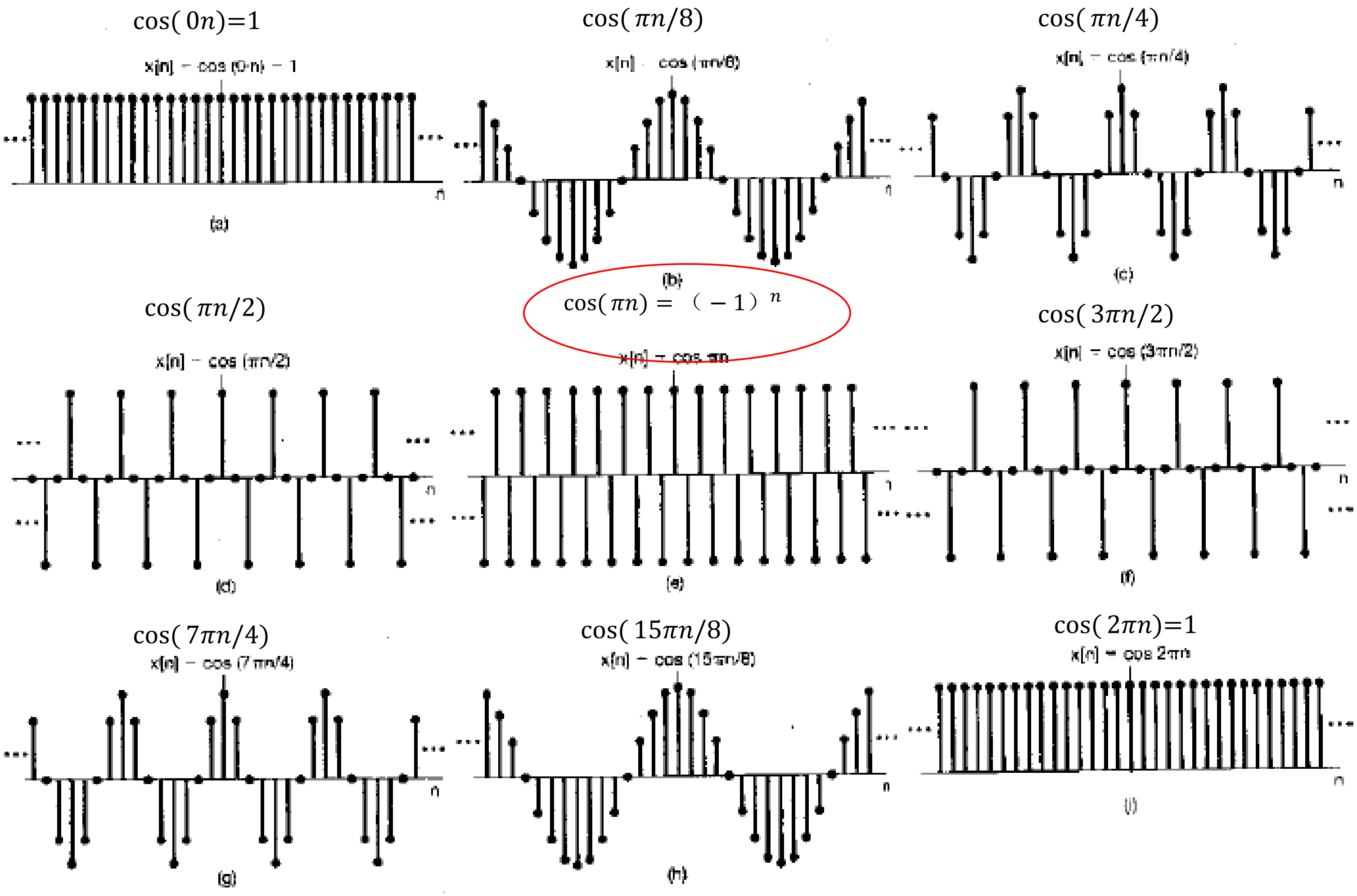


图 1.27 对应于几个不同频率时的离散时间正弦序列

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
对于任何ω_0关于t呈周期性	仅对特定的ω_0关于n呈周期性
不同的ω_0对应于不同的振荡频率	ω_0关于2π呈周期性

注：连续时间信号的频谱是连续的，离散时间信号的频谱是周期的！

Exercies: 确定$x[n]=\cos(\pi n/2)\cos(\pi n/4)$的周期性

3、一般情况：

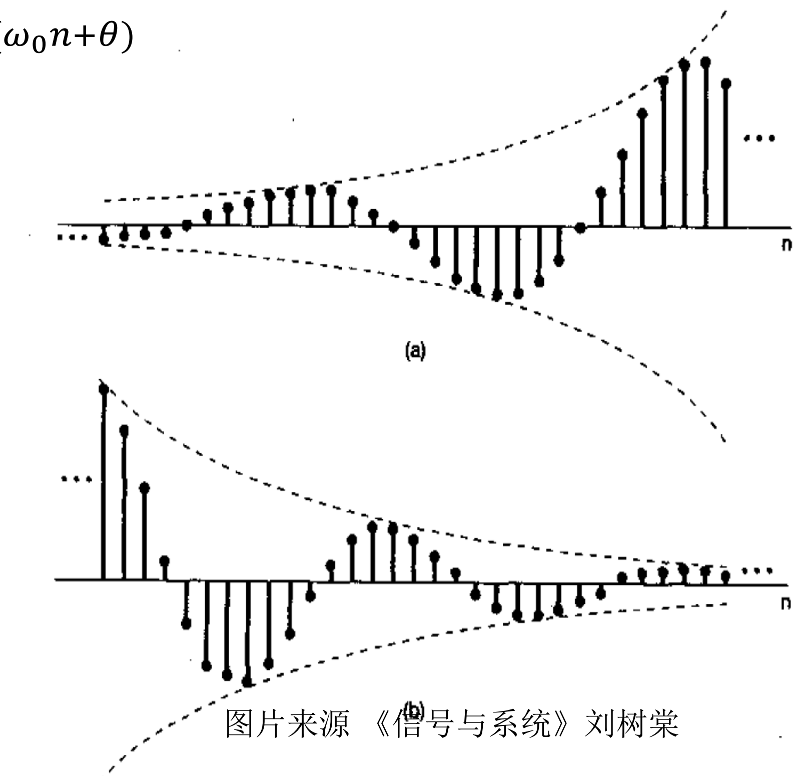
$$x[n] = C\alpha^n$$

若 $C = |C|e^{j\theta}$ $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ 则：

$$C\alpha^n = |C|e^{j\theta} \cdot |\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |C||\alpha|^n \cdot e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

$|\alpha| > 1$ --幅度增长的正弦序列

$|\alpha| < 1$ --幅度衰减的正弦序列

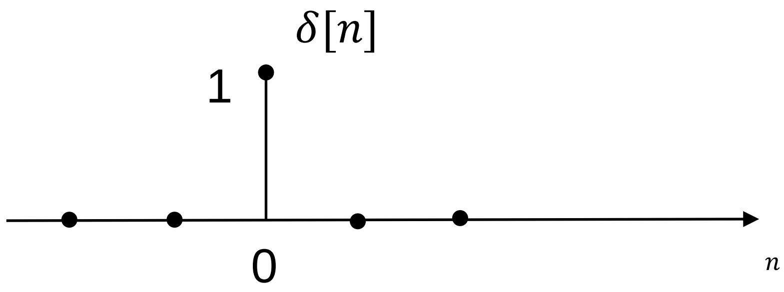


图片来源 《信号与系统》刘树棠

三、Discrete-Time Unit Impulse and Unit Step Sequences(离散时间单位脉冲和单位阶跃序列)

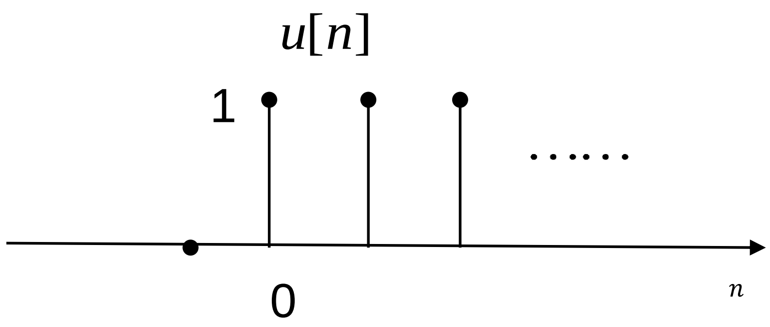
1、单位脉冲（Unit Impulse ）序列

$$\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$



2、单位阶跃（Unit Step ）序列

$$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$$



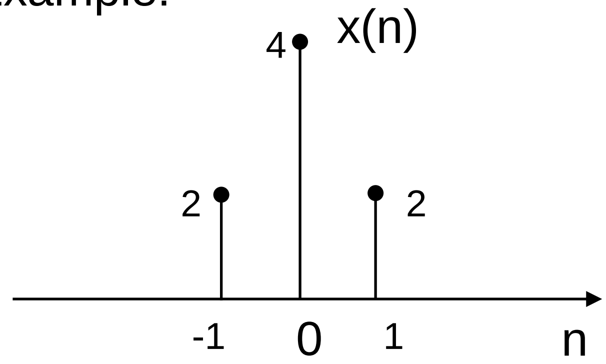
✓ 单位脉冲序列可用于表示信号在某时刻的样值，称为脉冲函数的采样性质

$$x[n]\cdot\delta[n]=x[0]\cdot\delta[n]$$

$$x[n]\cdot\delta[n-n_0]=x[n_0]\cdot\delta[n-n_0]$$

注：$x[0]\delta[n]$ 与$x[0]$不同！

Example:



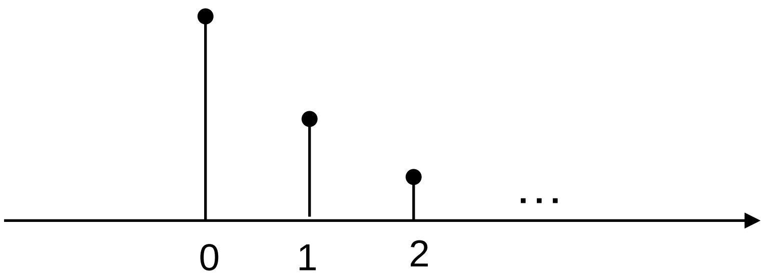
$$x[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]$$

注：离散时间信号可用 $\delta[n]$ 及其时移的线性组合表示！

✓ 单位阶跃信号可用于表示单边信号、有限持续时间信号

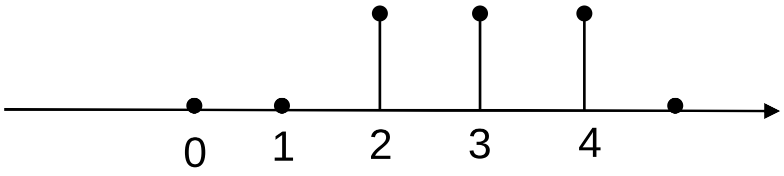
Example：

$$x[n]=(\frac{1}{2})^n\cdot u[n]$$



Example：

$$\begin{aligned}x[n]&=u[n-2]-u[n-5]\\&=\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]\\&=\begin{cases}1 & 2\le n\le 4\\0 & others\end{cases}\end{aligned}$$



3．关系

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$ ——差分

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \qquad u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$ ——累加

图示！

Example：Sketch each of the following signals

1. $x[n] = (2n+1)(\delta[n+2] - \delta[n])$
2. $x[n] = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{n} (u[m] - u[m-3])$

Solution:

1. $x[n] = -3\delta[n+2] - \delta[n]$
2. $x[n] = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{n} (\delta[m] + \delta[m-1] + \delta[m-2])$

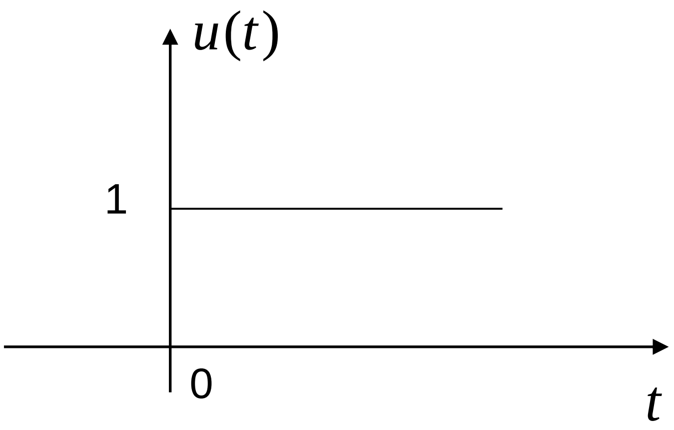
$$= u[n] + u[n-1] + u[n-2]$$

四、Continuous-Time Unit Step and Unit Impulse Functions(连续时间单位阶跃和单位冲激函数)

1、单位阶跃（Unit Step ）函数

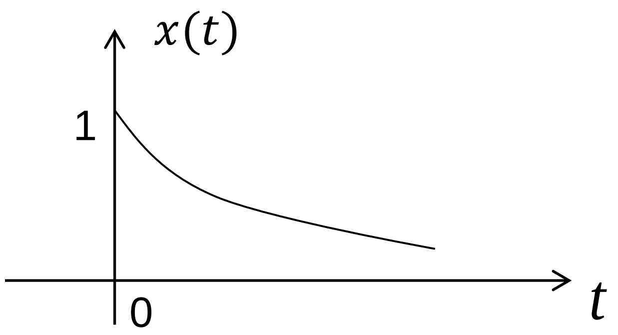
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

注： $u(t)$在$t = 0$处没有定义

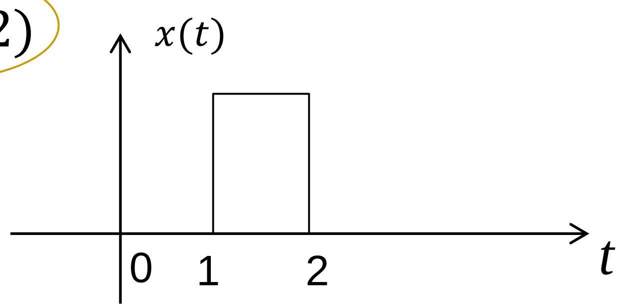


✓ 单位阶跃信号可用于表示单边信号、有限持续时间信号

Example： $x(t) = e^{-t}u(t)$

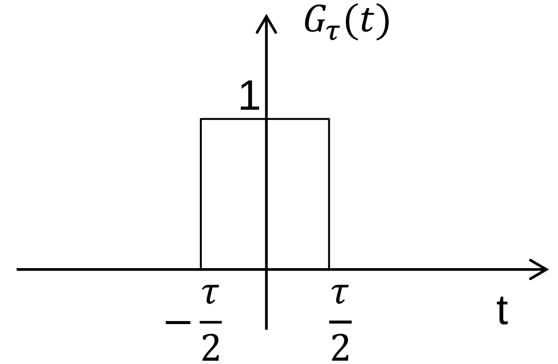


Example： $x(t) = u(t-1) - u(t-2)$



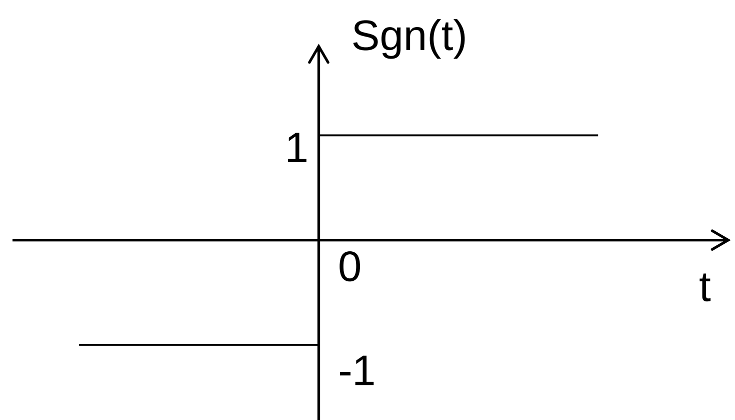
- 矩形脉冲信号：

$$G_\tau(t) = u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2}) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



- 符号函数sgn(t)：

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{sgn}(t) = 2u(t) - 1 = u(t) - u(-t)$$

2、单位冲激(Unit Impulse)函数

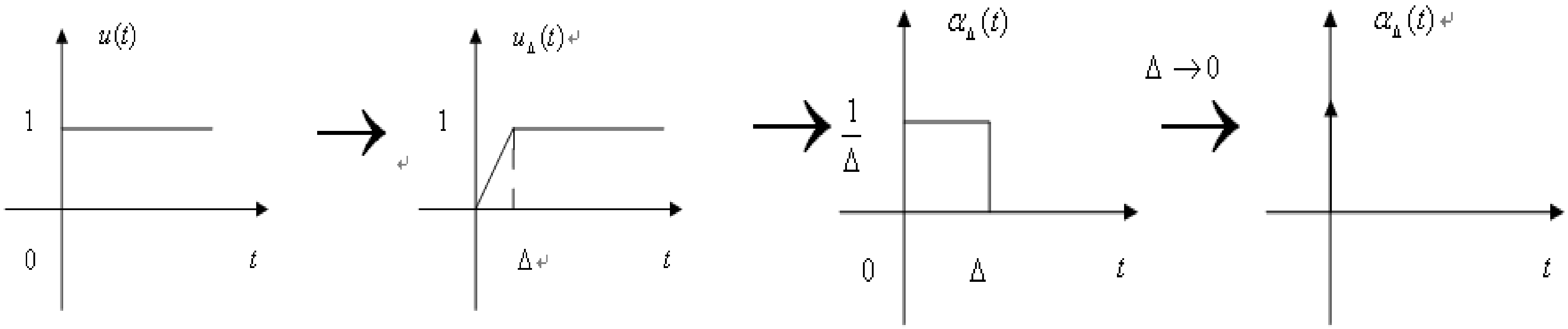
① $\because u(t)$在$t=0$处没有定义 $\therefore$ 定义信号$u_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta} & 0\le t<\Delta \\ 1 & t\ge\Delta\end{cases}$

$\delta(t)$看作$u_\Delta(t)$的微分在$\Delta\to 0$时的极限

即：$\delta_\Delta(t)=\dfrac{du_\Delta(t)}{dt}$

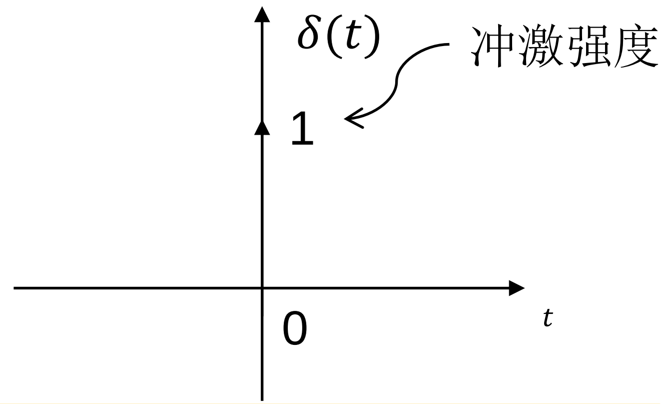
$\delta(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$

$\delta(t)$是$\delta_\Delta(t)$面积保持不变，而当$\Delta\to 0$时的极限情况，此时信号幅度$\to\infty$



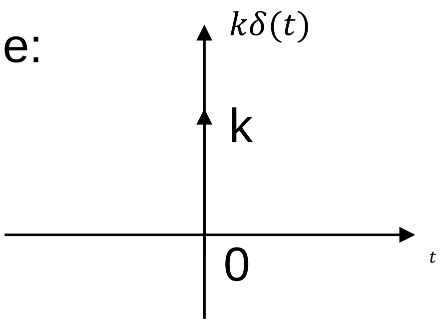
②狄拉克（Dirac）定义

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases}$$



信号$\delta(t)$在$t=0$处有一无限大的冲激，冲激强度为1，其它点均为0

Example:



$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t)dt = k \\ k\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \qquad \delta(-t) = \delta(t)$$

$\delta(t)$ 在信号与系统分析中的作用！

$\delta(t)$ Is an idealized pulse which is “short enough” for any system that the system response is will not be influenced by the duration or the shape of the pulse.

冲激函数是一个理想“窄”脉冲！以至于可以忽略其形状对系统输出的影响。

✓ 单位冲激信号可用于表示信号在某时刻的样值，称为冲激函数的采样性质

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$$

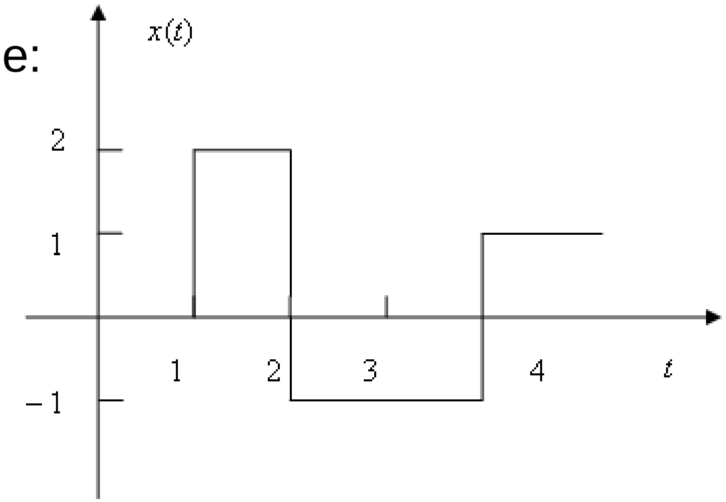
$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

3、关系

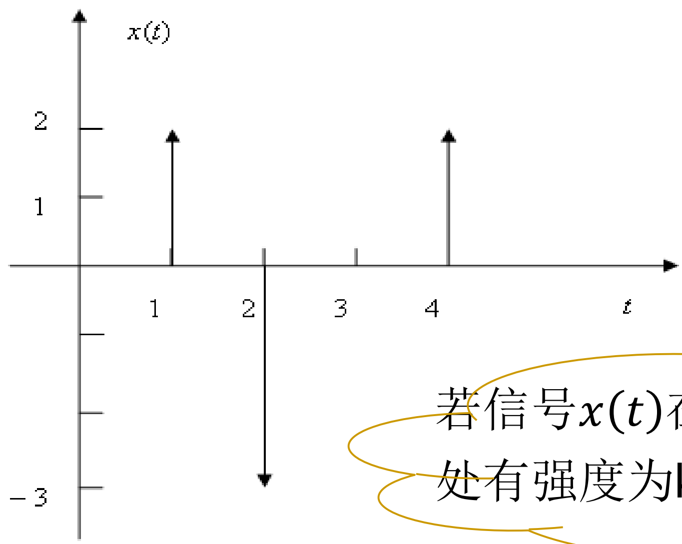
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

Example:



$$x(t) = 2[u(t-1) - u(t-2)] \\ -[u(t-2) - u(t-4)] + u(t-4) \\ = 2u(t-1) - 3u(t-2) + 2u(t-4)$$



$$\frac{dx(t)}{dt} = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$

若信号$x(t)$在$t = t_0$处有幅度为k的阶跃，则$\frac{dx(t)}{dt}$在$t = t_0$处有强度为k的冲激！

Example: Determine the value of the following signals

$$1.\, x(t) = (t^2 - 1)\delta(t-2)$$

$$2.\, x(t) = \int_{-3}^{3} (t^2 - 1)\delta(t-2)\, dt$$

Solution:

$$1.\quad x(t) = (t^2 - 1)\delta(t-2) = 3\delta(t-2)$$

$$2.\quad x(t) = \int_{-3}^{3} (t^2 - 1)\delta(t-2)\, dt = 3$$

Exercise：

$$x(t) = \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\delta(t-2)\, dt$$

附：关于分配函数”(Distribution function)/广义函数(Generalized function)

分配函数/广义函数$g(t)$的定义是赋予$\phi(t)$为$N_g[\phi(t)]$的过程，即：

$$N_g[\phi(t)] =< g(t), \phi(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\phi(t)dt$$

其中，作为检试函数的$\phi(t)$要求连续、具有各阶导数，且在t的某个有限区间内有值，即$\phi(t)$是紧致的。$N_g[\phi(t)]$可以是$t = t_0$时$\phi(t)$的值或导数，也可以是$\phi(t)$再某一区间所覆盖的面积，或其它与$\phi(t)$有关的数值。当$g(t)$为广义函数时，上式符号不能作为一般积分运算看待。

冲激函数$\delta(t)$的定义：

$$\boxed{N_g[\phi(t)] =< \delta(t), \phi(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)}$$

即，$\delta(t)$的定义是指定给$\phi(t)$的数值为$\phi(0)$

分配函数/广义函数相等的意义，是指两个函数指定给检试函数$\varphi(t)$的数值$N_g[\varphi(t)]$相同！

Example： $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)\delta(t)]\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)[x(t)\varphi(t)]dt = x(0)\varphi(0)$$

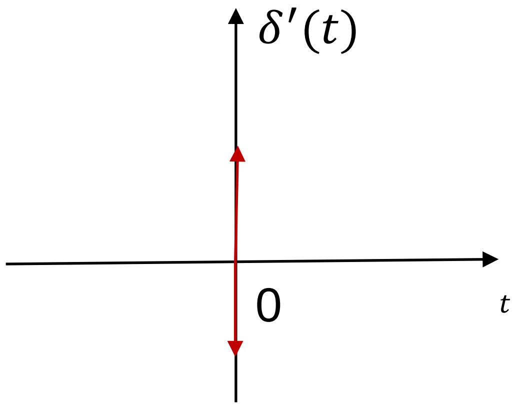
$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x(0)\delta(t)]\varphi(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = x(0)\varphi(0)$$

$$\therefore x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Exercise： 证明 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

附：冲激偶函数$\delta'(t)$

- $\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\, dt = 0$
- $\delta'(-t) = -\delta'(t)$
- $x(t) \cdot \delta'(t) = x(0) \cdot \delta'(t) - x'(0) \cdot \delta(t)$



$\delta'(t)$作为分配函数，它赋予检试函数$\phi(t)$的数值为$-\phi'(0)$，即

$$N_g[\phi(t)] =< \delta'(t), \phi(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\phi(t)dt = -\phi'(0)$$

附：$\delta(t)$的复合函数$\delta[f(t)]$

$\delta[f(t)]$中的$f(t)$为普通函数。若$f(t)=0$有n个互不相等的实根$t_1, t_2, \ldots, t_n$, 则有

$$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i)$$

其中$f'(t_i)$表示$f(t)$在$t=t_i$处的导数，且$f'(t_i) \neq 0$（$i = 1,2,\ldots,n$)

Example: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2 - 4t + 3)dt$

$$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t - t_i)$$

$\because f(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$

$t_1 = 1, t_2 = 3$

$f'(t_1) = 2t - 4|_{t=1} = -2$

$f'(t_2) = 2t - 4|_{t=3} = 2$

$$\therefore \delta(t^2 - 4t + 3) = \frac{1}{|-2|}\delta(t-1) + \frac{1}{|2|}\delta(t-3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2 - 4t + 3)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)dt = 1$$

Exercise : $\int_{-2}^{2} \delta(t^2 - 4t + 3)dt$

1.0 INTRODUCTION

1.1 CONTINUOUS-TIME AND DISCRETE-TIME SIGNALS

1.2 TRASFORMATION OF INDEPENDENT VARIABLE

1.3 TYPICAL FUNCTIONS

1.4 CONTINUOUS-TIME AND DISCRETE-TIME SYSTEMS

1.5 BASIC SYSTEM PROPERTIES

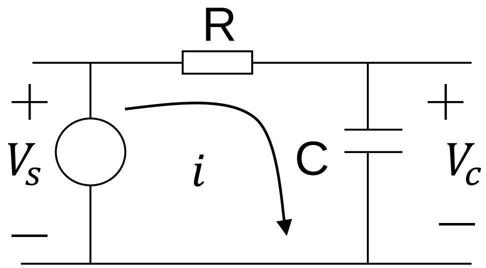
一、系统模型

① 在一定条件下，可为物理系统建立数学模型；

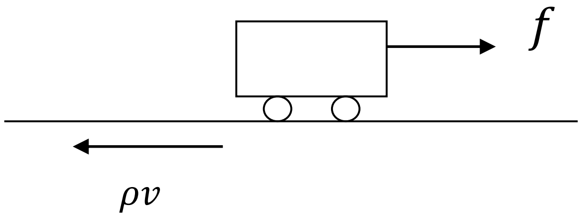
② 不同的物理系统，可抽象近似成形式上完全相同的数学模型；

③ 对该数学模型用数学解析式或图形描述，并采用数学工具分析。

Example:



$$\therefore \frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = \frac{1}{RC}V_s(t)$$



$$\therefore \frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{f(t)}{m}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

二、系统分类

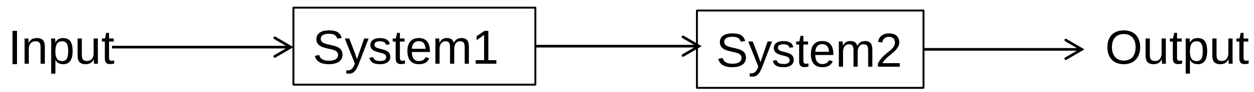
1.
- 连续时间和离散时间系统
- 无记忆和记忆系统
- 可逆和不可逆系统
- 线性和非线性系统
- 时变和非时变系统

2. 连续时间系统和离散时间系统(Continues-time and Discrete-time System)

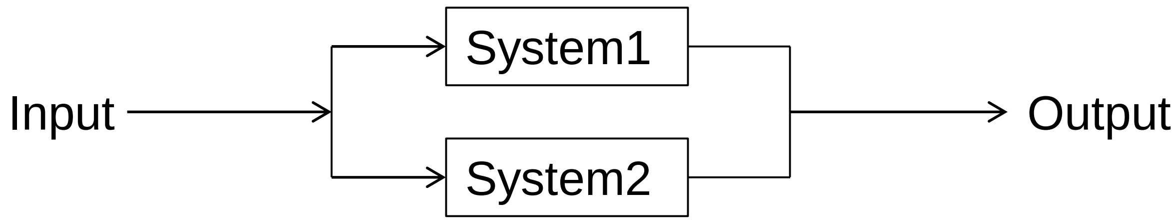
$$x(t) \rightarrow y(t) \qquad\qquad x[n] \rightarrow y[n]$$

输入和输出均为为连续（离散）时间信号的称为连续（离散）时间系统

3. 系统互联（Interconnection of System）

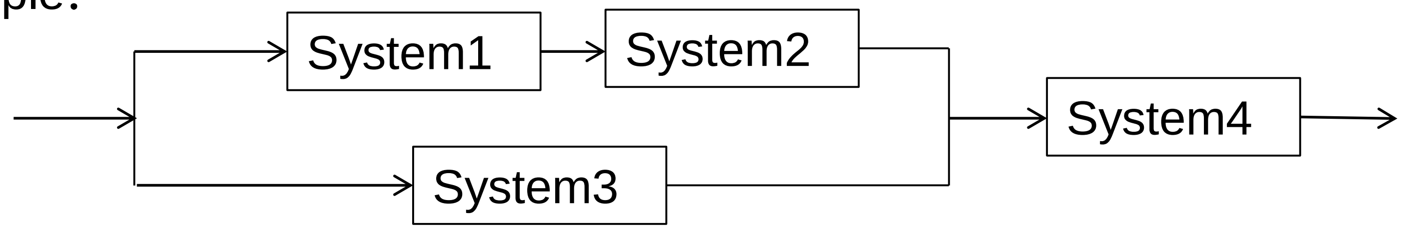


a. 级联(series/cascade interconnection）



b. 并联(parallel interconnection)

Example：



一、Systems with and without Memory（记忆系统与无记忆系统）

1. 无记忆系统

－系统的输出仅取决于当前时刻的输入

Example:

$$y(t)=x(t) \quad y[n]=x[n]$$ Identity system

$$y(t)=x^2(t)-2x(t)$$

注：无记忆系统可用代数方程描述

2．记忆系统

—系统的输出不仅与当前时刻的输入有关，而且与过去(或将来)的状态有关

Example:

Integrator

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \quad —— \quad y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Example:

Accumulator

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad —— \quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]+x[n]=y[n-1]+x[n]$$

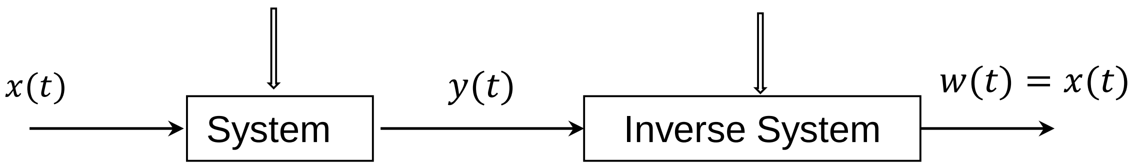
注：记忆系统可用微分或差分方程描述

二、Invertibility and Inverse Systems（可逆性与可逆系统）

1、可逆系统

—系统对不同的输入必然产生不同的输出

Example: $y(t) = 2x(t)$ $\qquad$ $w(t) = \dfrac{1}{2}y(t)$



2、不可逆系统

—系统对不同的输入可能产生相同的输出

Example: $y(t) = x^2(t)$

三、Causality（因果性）

——系统在任何时刻的输出只决定于当前时刻的输入及过去的输入

注：对因果性的判定，可根据定义，采用举例的方法

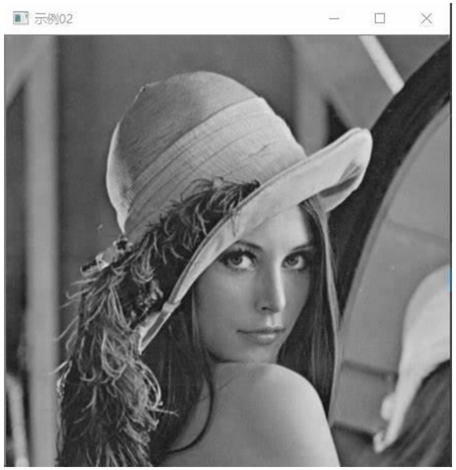
Example：

$y[n] = x[-n]$ —non-causal

$y(t) = x(t) \cdot \cos(t+1)$ —causal

另，对LTI系统，系统的因果性等效于**初始松弛（initial rest）条件**：若$t < t_0$时输入为0，则$t < t_0$时输出也为0

- 很多有实际意义的系统是非因果的，例如：图像处理、股票预测。。。



Example: non-causal average system

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{k=+M} x[n-k]$$

- 无记忆系统都是因果的

Question：记忆系统呢？是因果还是非因果？

四、Stability（稳定性）

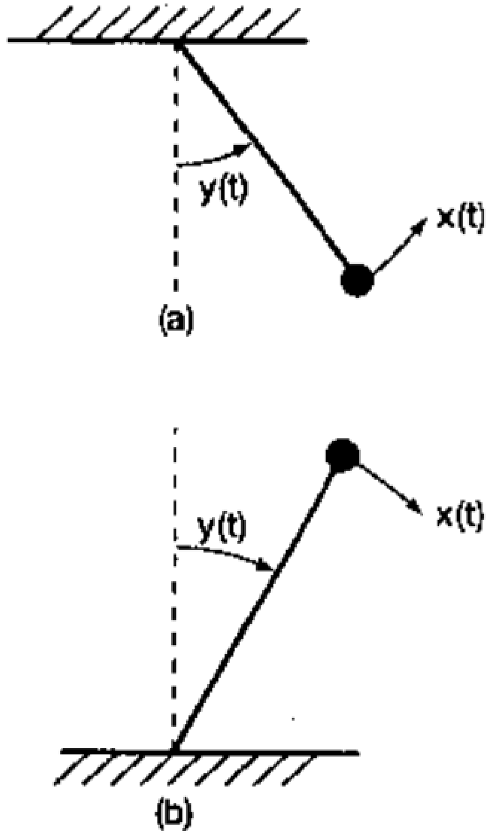
——若输入有界(bounded input)则输出也有界(bounded output)的系统（BIBO）

注：对稳定性的判定，可根据定义，证明$|x(t)|$ <M时有$|y(t)|$ <N；也可采用寻找特例的方法。

Example：

$y(t) = e^{x(t)}$ —stable

$y(t) = t \cdot x(t)$ —unstable



stabel

unstable

图片来源 《信号与系统》刘树棠

五、Linear Systems（线性系统）

若 $x_1(t) \to y_1(t) \quad x_2(t) \to y_2(t)$则

1. $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$ ——可加性（additivity）
2. $ax_1(t) \to ay_1(t)$，a为复数 ——齐次性（ homogeneity ）

同时满足可加性和齐次性的系统为线性系统 。即：

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x_1(t) + a_2x_2(t) &\to a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \\ a_1x_1[n] + a_2x_2[n] &\to a_1y_1[n] + a_2y_2[n] \end{aligned}}$$

叠加性质：信号的线性组合的输出，等于各信号输出的线性组合！

Example： $y(t)=t\cdot x(t)$

——线性系统

$$x_1(t)\to y_1(t)=tx_1(t)$$
$$x_2(t)\to y_2(t)=tx_2(t)$$

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$$
$$\to t(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))$$
$$=a_1tx_1(t)+a_2tx_2(t)$$
$$=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

Example： $y[n]=2x[n]+3$

——非线性系统

$$x_1[n]\to y_1[n]=2x_1[n]+3$$
$$x_2[n]\to y_2[n]=2x_2[n]+3$$

$$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$$
$$\to 2(a_1x_1[n]+a_2x_2[n])+3$$
$$=a_1(2x_1[n])+a_2(2x_2[n])+3$$

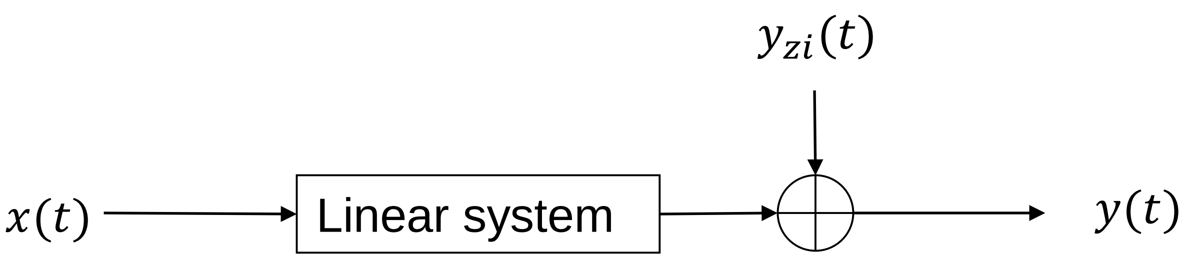
$$a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$$
$$=a_1(2x_1[n]+3)+a_2(2x_2[n]+3)$$
$$=a_1(2x_1[n])+a_2(2x_2[n])+3(a_1+a_2)$$

Example: $y[n] = 2x[n] + 3$

$$\because \mathrm{y}_1[\mathrm{n}] - \mathrm{y}_2[\mathrm{n}] = \{2\,\mathrm{x}_1[\mathrm{n}] + 3\} - \{2\,\mathrm{x}_2[\mathrm{n}] + 3\} = 2\{\mathrm{x}_1[\mathrm{n}] - \mathrm{x}_1[\mathrm{n}]\}$$

所以，上述为增量线性系统**(incrementally linear system) ——**任意两个输入的响应的差是两个输入的差的线性函数。

此时，系统总的输出可由一个线性系统的响应与一个零输入响应的叠加构成。



四、Time Invariance （时不变性）

若 $x(t) \rightarrow y(t) \quad x[n] \rightarrow y[n]$ 则

$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0) \quad x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$

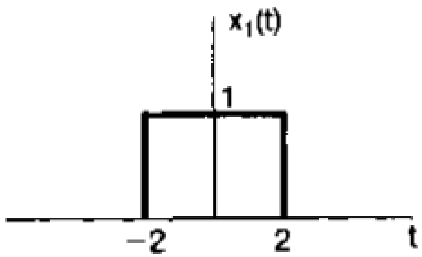
即：系统的功能与观测的起始时刻无关

Example：

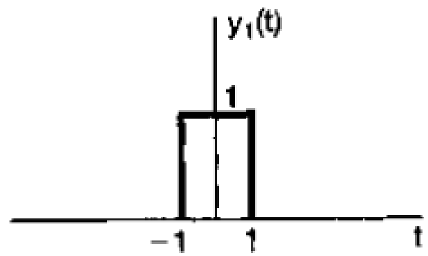
$y(t) = t \cdot x(t)$ —Time-varying

$y(t) = x(2t)$ —Time-varying

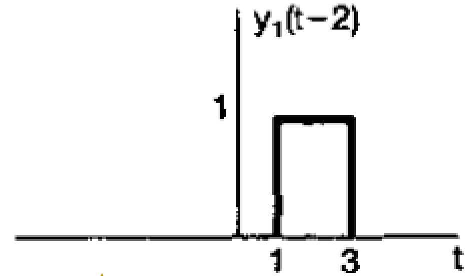
Example： $y(t) = x(2t)$



(a)



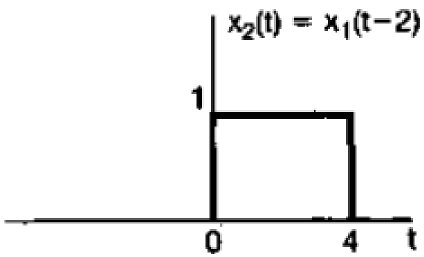
(b)



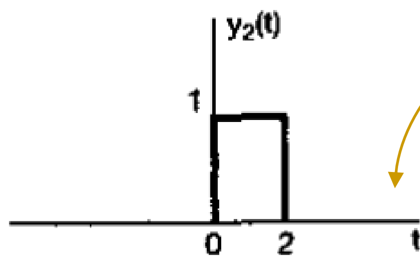
(e)

图片来源 《信号与系统》刘树棠

$y_2(t) = y_1(t-1)$



(c)



(d)

$\because x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(2t)$

$x_2(t) = x_1(t-2)$

$\rightarrow y_2(t) = x_2(2t) = x_1(2t-2)$

而$y_1(t-2) = x_1(2(t-2)) = x_1(2t-4)$

$\therefore y_1(t-2) \neq y_2(t)$

故为时变系统

注：本课程主要研究线性时不变（LTI）系统！

- 将输入表示为某基本信号（及其时移）的线性组合，则输出可以表示为该基本信号输出（及其时移）的线性组合

Basic Singal!

- 该基本信号能够构成相当广泛的一类有用信号
- LTI系统对该基本信号的响应十分简单

七、微分与差分特性

对LTI系统

若 $x(t) \to y(t) \quad x(n) \to y(n)$则

$$\frac{dx(t)}{dt} \to \frac{dy(t)}{dt} \qquad \nabla x(n) \to \nabla y(n)$$

Example：

若 $\delta(t) \to h(t) \quad u(t) \to s(t)$则

$$\because \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \qquad \therefore \frac{ds(t)}{dt} = h(t)$$

Example: $$y(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ x(t)+x(t-2), & t\geq 0\end{cases}$$

线性、时变、因果、稳定

Proof:

设$x_1(t)=x(t-t_0)$

$$\rightarrow y_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ x(t-t_0)+x(t-t_0-2), & t\geq 0\end{cases}$$

而$$y(t-t_0)=\begin{cases}0, & t-t_0<0\\ x(t-t_0)+x(t-t_0-2), & t-t_0\geq 0\end{cases}$$

$\because y(t-t_0)\neq y_1(t)\ \therefore$ 时变

附：系统分析方法概述

- 系统数学模型的建立
  - 输入-输出法—描述系统激励和响应的关系，不涉及系统的内部变量，主要用于单输入单输出系统
  - 状态变量法—不仅给出系统的响应，还给出系统内部变量的情况，主要用于多输入多输出系统
- 系统数学模型的求解
  - 时域—解微分/差分方程，卷积
  - 变换域—Fourier变换，Laplace和Z变换