课程项目

危国锐 516021910080
（上海交通大学电子信息与电气工程学院，上海 200240）

摘 要：.
关键词：词 1，词 2

Course Project

Guorui Wei 516021910080
(*School of Electronic Information and Electrical Engineering*,
Shanghai Jiao Tong University, *Shanghai* 200240, *China*)

Abstract: Abstract.
Keywords: keyword 1, keyword

目 录

1 项目要求

目标:

- 帮助学生理解和掌握课程的基本理论
- 提升学生将理论应用于实践中的能力

软件需求:

工具：MATLAB (推荐)，或其它工具，例如 Python, C/C++

作业要求：

- 请在 **CANVAS 上提交一个.zip 格式的文件，你的解答应至少包含以下三方面的内容：**
  1) 一份**大作业报告（中文或英文均可，.pdf 格式**）;
  2) 结果中的**语音片段**;
  3) 用于生成上述语音片段的**源代码**。
- **不允许**迟交，否则会酌情扣分

项目 1 (5 分)

1) 选择一段音频信号 (音乐等), 将其记为 $f(t)$, 画出该信号的波形。
2) 生成 $f(-t), f(2t), f(t/2)$, 并画出它们的波形。
3) 分别计算 $f(t), f(2t), f(t/2)$ 的傅里叶变换,画出它们的频谱，并对它们进行比较和分析。
4) 将 $f(t)$ 的傅里叶变换记为 $F(\mathrm{j}\omega)$，画出幅度谱的傅里叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}\{|F(\mathrm{j}\omega)|\}$ 的波形，画出相位谱的傅里叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\measuredangle F(j\omega)}\right\}$ 的波形。将它们与原始信号 $f(t)$ 进行比较。
5) 对 $f(t)$ 在频域实现一个低通滤波器（可使用理想低通滤波器，自行确定截止频率），画出得到的信号的波形。

项目 2 (5 分, 以下两个选项中任选一个)

提示: 你可以自由选取所用的声音信号。

选项 1: 声音消除器（Voice Eliminator）

1) 设计一个名为“Voice Eliminator”的软件或仿真程序，可用于消除一首歌曲中歌手的声音。
2) 分析“Voice Eliminator”的基本设计思路和原理，并用编程语言实现之。
3) 进一步，使用合适的方法来提高“Voice Eliminator”的性能（从理论和实际的角度）。

选项 2: 语音采样器（Speech Sampler）

1) 采集某个人的声音作为一段连续时间信号，使用不同的采样频率对其进行若干次采样，得到若干份离散时间信号。(推荐采样频率：44 kHz, 22 kHz, 11 kHz, 5.5 kHz, 2.75 Hz)
2) 对上述离散时间信号分别进行重构，得到相应的连续时间信号，分析不同采样频率对对重构质量的影响，并计算重构误差。
3) 分析“Speech Sampler”的基本设计思路和原理，并用编程语言实现之。

2 预备知识

本节首先推导四种 Fourier 变换，得到：1）非周期信号的 Fourier 变换可视作周期信号情形的推广，2）周期（非周期）、离散（连续）时间信号的频谱是离散（连续）、周期（非周期）的. 然后，从数值积分的角度，说明对于一个连续时间信号，其采样值序列的离散 Fourier 变换可视作该信号的 Fourier 变换的一个近似（2.24）.

2.1 离散 Fourier 变换（DFT）

在一定的条件下，以正整数 N 为最小正周期的离散时间信号 $x(n)$ 可表为 N 个以 N 为周期的复指数信号

$$\exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right),\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

的线性组合：

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right).\tag{2.1}$$

若将 a_k 视作 $x(n)$ 在函数内积空间

$$\operatorname{span}\left\{\exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right)\right\},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

上的最佳平方逼近的坐标，则 a_k 满足**法方程**

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{a}:=(a_0,\cdots,a_{N-1})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}:=(b_0,\cdots,b_{N-1})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Phi}:=(\varphi_{ij})_{N\times N}$,

$$b_k:=\left\langle x(n),\exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right)\right\rangle:=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right),\tag{2.3}$$

$$\varphi_{ij}:=\left\langle\exp\left(\mathrm{j}i\frac{2\pi}{N}n\right),\exp\left(\mathrm{j}j\frac{2\pi}{N}n\right)\right\rangle:=\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(\mathrm{j}i\frac{2\pi}{N}n\right)\exp\left(-\mathrm{j}j\frac{2\pi}{N}n\right)=N\delta_{ij}.\tag{2.4}$$

从而

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right).\tag{2.5}$$

定义

$$\mathcal{F}[x(n)](k):=\hat{x}(k):=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right),\qquad k=0,1,\cdots,N-1\tag{2.6}$$

为离散时间序列 $x(n)$ 的 N 点**离散 Fourier 变换**（Discrete Fourier transform, DFT），则

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{x}(k)](n):=x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}(k)\exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right)\tag{2.7}$$

为相应的 N 点**离散 Fourier 逆变换**（Inverse discrete Fourier transform, IDFT）.

可见，周期、离散时间信号的频谱（Fourier 变换）是离散的、周期的.

2.2 离散时间 Fourier 变换（DTFT）

将周期的离散时间序列的 DFT 推广到非周期的离散时间序列，即得离散时间 Fourier 变换（DTFT）.

设 $x(n)$ 是一个非周期的离散时间信号. 定义以偶数 N 为最小正周期的离散时间信号

$$x_N(n) := \begin{cases} x(n), & -\dfrac{N}{2} \le n < \dfrac{N}{2}, \\ x(n+N), & \forall n. \end{cases} \tag{2.8}$$

有

$$x(n) = \lim_{N\to+\infty} x_N(n), \qquad \forall n. \tag{2.9}$$

由 IDFT（2.7），有

$$\begin{aligned} x(n) &= \lim_{N\to+\infty} x_N(n) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right) \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n) \exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \exp(\mathrm{j}\omega n)\,\mathrm{d}\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \exp(-\mathrm{j}\omega n). \end{aligned} \tag{2.10}$$

定义

$$\mathcal{F}[x(n)](\omega) := \hat{x}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \exp(-\mathrm{j}\omega n), \qquad \omega \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

为离散时间序列 $x(n)$ 的**离散时间 Fourier 变换**（Discrete-time Fourier transform, DTFT），则

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{x}(\omega)](n) := x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \hat{x}(\omega) \exp(\mathrm{j}\omega n)\,\mathrm{d}\omega \tag{2.12}$$

为相应的**离散时间 Fourier 逆变换**. 这样，非周期的离散时间信号 $x(n)$ 被表为复指数信号 $\exp(\mathrm{j}\omega n)$ 的“线性组合”.

注意到 2π 是 $\mathcal{F}[x(n)](\omega)$ 的周期. 可见，非周期、离散时间信号的频谱是连续的、周期的.

2.3 Fourier 级数（FS）

在一定的条件下，以 T 为最小正周期的连续时间信号 $x(t)$ 可表为可列个以 T 为周期的复指数信号

$$\exp(\mathrm{j}k\omega_0 t), k \in \mathbb{Z}, \qquad \omega_0 := 2\pi/T$$

的线性组合：

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(\mathrm{j}k\omega_0 t) \frac{1}{T} \int_T x(t) \exp(-\mathrm{j}k\omega_0 t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

称（2.13）为周期的连续时间信号 $x(t)$ 的 **Fourier 级数**（Fourier series, FS）.

可见，周期、连续时间信号的频谱是离散的、非周期的.

2.4 连续时间 Fourier 变换（CTFT）

将周期的连续时间信号的 Fourier 级数推广到非周期的连续时间信号，即得连续时间 Fourier 变换（CTFT）.

设 $x(t)$ 是一个非周期的连续时间信号. 定义以 T 为最小正周期的连续时间信号

$$x_T(t) := \begin{cases} x(t), & -\dfrac{T}{2} \le t < \dfrac{T}{2}, \\ x(t+T), & \forall t. \end{cases} \tag{2.14}$$

有

$$x(t)=\lim_{T\to+\infty}x_T(t)\,,\qquad \forall t. \tag{2.15}$$

由周期的连续时间信号的 Fourier 级数（2.13），有

$$\begin{aligned}x(t)&=\lim_{T\to+\infty}x_T(t)\\&=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\exp(\mathrm{j}k\omega_0 t)\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\exp(-\mathrm{j}k\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega\int_{\mathbb{R}}x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{2.16}$$

定义

$$\mathcal{F}[x(t)](\omega):=\hat{x}(\omega):=\int_{\mathbb{R}}x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t\,,\omega\in\mathbb{R} \tag{2.17}$$

为连续时间信号 $x(t)$ 的**连续时间 Fourier 变换**（Continuous-time Fourier transform, CTFT），则

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{x}(\omega)](t):=x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{x}(\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega \tag{2.18}$$

为相应的**连续时间 Fourier 逆变换**（Inverse continuous-time Fourier transform, ICTFT）. 这样，非周期的连续时间信号 $x(t)$ 被表为复指数信号$\exp(\mathrm{j}\omega t)$ 的“线性组合”.

可见，非周期、连续时间信号的频谱是连续的、非周期的.

2.5 DFT 与 CTFT 的关系：从数值积分的视角

自然界中的声音信号是连续的，但计算机通常只能以离散方式存储和处理之.

设有连续时间信号 $x(t)$ 满足

$$x(t)=0,\qquad \forall t\colon t<t_0 \text{ or } t\ge t_0+\tau. \tag{2.19}$$

这 $x(t)$ 仅在有限时间上不恒为零，故称其为**时域有限**的. 记 $x(t)$ 的 CTFT 为

$$X(\omega):=\mathcal{F}[x(t)]=\int_{\mathbb{R}}x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_0+\tau}x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.20}$$

设在计算机中存储了 $x(t)$ 在 $t=t_0+nT_{\mathrm{s}}$, $n=0,\cdots,N-1$, 时刻的采样值 $x(t_0+nT_{\mathrm{s}})$, $NT_{\mathrm{s}}=\tau$. 记 $F_{\mathrm{s}}:=1/T_{\mathrm{s}}$ 为采样频率，则 $N=\tau F_{\mathrm{s}}$. 记离散时间序列

$$\tilde{x}(n):=x(t_0+nT_{\mathrm{s}}),\qquad 0\le n<N \tag{2.21}$$

的 N 点 DFT（2.6）为

$$\hat{x}(k):=\mathcal{F}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_{\mathrm{s}})\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right),\qquad k=0,1,\cdots,N-1. \tag{2.22}$$

使用采样时刻 $t=t_0+nT_{\mathrm{s}}$, $n=0,\cdots,N-1$, 上 $x(t)$ 的值，定积分（2.20）的矩形近似为

$$X(\omega)\sim T_{\mathrm{s}}\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_{\mathrm{s}})\exp\bigl(-\mathrm{j}\omega(t_0+nT_{\mathrm{s}})\bigr)\,. \tag{2.23}$$

比较（2.22）和（2.23），得 $x(t)$ 的 CTFT $X(\omega)$ 与其采样序列 $\tilde{x}(n):=x(nT_{\mathrm{s}})$ 的 N 点 DFT $\hat{x}(k)$ 的关系为（在矩形积分公式近似下）

$$X(\omega)\big|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_{\mathrm{s}}}\sim T_{\mathrm{s}}\hat{x}(k)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{N}\omega_{\mathrm{s}}t_0\right),\qquad k=0,1,\cdots,N-1, \tag{2.24}$$

其中 $\omega_{\mathrm{s}}:=2\pi F_{\mathrm{s}}$ 为采样圆频率. 记 $\omega_k:=\frac{k}{N}\omega_{\mathrm{s}}$, 上式写成

$$X(\omega_k) \sim T_{\mathrm{s}} \sum_{n=0}^{N-1} x(t_0 + nT_{\mathrm{s}}) \exp\big(-\mathrm{j}\omega_k (t_0 + nT_{\mathrm{s}})\big).$$

式（2.24）右端可作为 $x(t)$ 的 CTFT $X(\omega)$ 的一个数值解.

注 2.1 由（2.24）只能得到 $X(\omega)$ 在 $\omega \in [0, \omega_{\mathrm{s}})$ 上的一些近似值（若取 $-N/2 \le k < N/2$, 则得到 $\omega \in [-\omega_{\mathrm{s}}/2\,, \omega_{\mathrm{s}}/2)$ 上的），这符合 Nyquist 采样定理. ■

注 2.2 事实上，不必限制（2.22）和（2.24）中 $k \in \mathbb{Z}$ 的取值. 因为 $\hat{x}(k)$ 具有周期 N, 所以 CTFT 数值解 $X(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_{\mathrm{s}}}$ 具有周期 ω_{s}. ■

3 项目 1

3.1 项目简介

选择一段音频信号 (音乐等), 将其记为 $f(t)$, 画出该信号的波形。

生成 $f(-t), f(2t), f(t/2)$, 并画出它们的波形。

分别计算 $f(t), f(2t), f(t/2)$ 的傅里叶变换，画出它们的频谱，并对它们进行比较和分析。

将 $f(t)$ 的傅里叶变换记为 $F(\mathrm{j}\omega)$，画出幅度谱的傅里叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}\{|F(\mathrm{j}\omega)|\}$ 的波形，画出相位谱的傅里叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\measuredangle F(j\omega)}\}$ 的波形。将它们与原始信号 $f(t)$ 进行比较。

对 $f(t)$ 在频域实现一个低通滤波器（可使用理想低通滤波器，自行确定截止频率），画出得到的信号的波形。

3.2 数据和方法

3.2.1 音频信号

本项目使用的音频信号是使用 Chrome Music Lab - Song Maker (chromeexperiments.com) 工具 [1]制作的，时长 2 秒，采样率 48 kHz，可从 https://musiclab.chromeexperiments.com/Song-Maker/song/6679651116384256 下载.

3.2.2 CTFT 数值算法

设在计算机中存储了连续时间信号 $x(t)$ 在 $t = t_0 + nT_s, n = 0, \cdots, N-1$ 时刻的样值

$$x(t_0 + nT_s), \qquad n = 0, \cdots, N-1,$$

采样间隔 $T_s > 0$. 下面建立数值求解 $x(t)$ 的 CTFT 的算法.

假定 $x \in \mathrm{C_c}[t_0, t_0 + NT_s)$[2]. $x(t)$ 的 CTFT 可按（2.24）求得数值结果：

$$X(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_s} \sim \exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{N}\omega_s t_0\right) T_s \sum_{n=0}^{N-1} x(t_0 + nT_s) \exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right) \tag{3.1}$$

上式右端的求和号可直接调用快速 Fourier 变换程序（例如，Matlab 的 fft 函数 [3]）计算.

至此，数值求解 $x(t)$ 的 CTFT 的算法已建立，现重述如下.

算法 3.1 (CTFT by DFT) **输入**：数组 $\{t_n\}, \{x_n\}$, $n = 0, \cdots, N-1$. 要求 $\{t_n\}$ 单调递增，且等间隔.

步 1 决定 t_0, T_s. 令 t_0 为数组 $\{t_n\}$ 的首元素，T_s 为 $\{t_n\}$ 的公差.

步 2 按（3.1）计算 $X(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_s} \sim \exp(-\mathrm{j}\frac{k}{N}\omega_s t_0) T_s \sum_{n=0}^{N-1} x(t_0 + nT_s) \exp(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n)$.

■

3.2.3 数值 CTFT 的性质

记 $X(\omega)$ 是用算法 3.1 求出的 $x(t)$ 的数值 CTFT，下面推导其反变换，时移，尺度变换和奇偶虚实性质，并与 CTFT 解析解的相应性质作比较.

---

[1] https://musiclab.chromeexperiments.com/Song-Maker/

[2] continuous functions that are only nonzero on a closed subinterval of $[t_0, t_0 + NT_s)$

[3] https://ww2.mathworks.cn/help/matlab/ref/fft.html

设 $X(\omega)$ 是由 $x(t)$ 的样值

$$x(t_0+nT_\mathrm{s}),\qquad n=0,\cdots,N-1$$

用算法 3.1 求得的，简记为

$$x(t)\xleftrightarrow[\text{算法 3.1}]{\text{数值 CTFT}}X(\omega_k),$$

其中 $\omega_k:=\frac{k}{N}\omega_\mathrm{s}$，$k\in\mathbb{Z}$，$\omega_\mathrm{s}:=2\pi/T_\mathrm{s}$，

$$X(\omega_k):=\exp(-\mathrm{j}\omega_k t_0)\,T_\mathrm{s}\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_\mathrm{s})\exp(-\mathrm{j}\omega_k nT_\mathrm{s})\,. \tag{3.1$'$}$$

1 反变换

由离散 Fourier 逆变换（2.7），有

$$\begin{aligned}x(t_0+nT_\mathrm{s})&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp(\mathrm{j}\omega_k nT_\mathrm{s})\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_\mathrm{s})\exp(-\mathrm{j}\omega_k nT_\mathrm{s})\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega_\mathrm{s}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\omega_k)\exp\big(\mathrm{j}\omega_k(t_0+nT_\mathrm{s})\big)\,.\end{aligned}\tag{3.2}$$

上式右端可视作连续时间 Fourier 逆变换（2.18）

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R}\hat{x}(\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega \tag{3.3}$$

的矩形积分公式的近似，其中 $\hat{x}(\omega)$ 是 $x(t)$ 的 CTFT 解析解（2.17）

$$\hat{x}(\omega):=\mathcal{F}[x(t)]:=\int_\mathbb{R}x(t)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.17}$$

式（3.2）可写成

$$x(t_0+nT_\mathrm{s})=F_\mathrm{s}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X(\omega_k)\exp(\mathrm{j}\omega_k t_0))\exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right)\,. \tag{3.2$'$}$$

上式右端的求和号可直接调用快速 Fourier 逆变换程序（例如，Matlab 的 ifft 函数 [4]）计算.

算法 3.2 (ICTFT by IDFT) **输入：**初始时刻 t_0, 数组 $\{\omega_k\},\{X_k\}$，$k=0,\cdots,N-1$. 要求 $\{\omega_k\}$ 单调递增，且等间隔.

步 1 决定 $F_\mathrm{s},T_\mathrm{s}$. 令 ω_s 为 $\{\omega_k\}$ 的公差，则 $F_\mathrm{s}:=\omega_\mathrm{s}/(2\pi)$，$T_\mathrm{s}:=2\pi/\omega_\mathrm{s}$.

步 2 按（3.2′）计算 $x(t_0+nT_\mathrm{s})=F_\mathrm{s}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X(\omega_k)\exp(\mathrm{j}\omega_k t_0))\exp(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n)$. ■

2 尺度变换性质

考虑信号 $g(t):=x(at)$. 若 $a>0$, 则它的数值 CTFT $G(\omega)$ 将由其样值

$$g\left(\frac{t_0}{a}+n\frac{T_\mathrm{s}}{a}\right)=x(t_0+nT_\mathrm{s}),\qquad n=0,\cdots,N-1$$

决定. 根据算法 3.1，

$$\begin{aligned}G(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}a\omega_\mathrm{s}}&=\exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{N}a\omega_\mathrm{s}\frac{t_0}{a}\right)\frac{T_\mathrm{s}}{a}\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_\mathrm{s})\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right)\\&=\frac{1}{a}X(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_\mathrm{s}},\qquad a>0,k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

若 $a<0$, 则它的 CTFT 数值解 $G(\omega)$ 将由其样值

$$g\left(\frac{t_0}{a}+(N-1)\frac{T_\mathrm{s}}{a}+n\frac{T_\mathrm{s}}{-a}\right)=x(t_0+(N-1-n)T_\mathrm{s}),\qquad n=0,\cdots,N-1$$

[4] https://ww2.mathworks.cn/help/matlab/ref/ifft.html

决定. 根据算法 3.1，此时

$$
\begin{aligned}
G(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}(-a)\omega_s} &= \exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{N}(-a)\omega_s\left(\frac{t_0}{a}+(N-1)\frac{T_s}{a}\right)\right) \\
&\quad \times \frac{T_s}{-a}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_0+(N-1-n)T_s)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right) \\
&= \exp\left(-\mathrm{j}\frac{-k}{N}\omega_s t_0\right)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{N}\omega_s(-(N-1)T_s)\right) \\
&\quad \times \frac{T_s}{-a}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_0+nT_s)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}(N-1-n)\right) \\
&= \exp\left(-\mathrm{j}\frac{-k}{N}\omega_s t_0\right)\frac{T_s}{-a}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_0+nT_s)\exp\left(-\mathrm{j}(-k)\frac{2\pi}{N}n\right) \\
&= \frac{1}{-a}X(\omega)|_{\omega=\frac{-k}{N}\omega_s}, \qquad a<0, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

式（3.4）（3.5）可统一写成

$$
g(t) := x(at) \xleftrightarrow[\text{算法 3.1}]{\text{数值 CTFT}} G(\omega_k) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega_k}{a}\right), \qquad a\neq 0, \tag{3.6}
$$

其中 $\omega_k := \frac{k}{N}|a|\omega_s$，$k\in\mathbb{Z}$.

式（3.6）与 CTFT 解析解的尺度变换性质相同.

3 时移性质

考虑信号 $g(t) := x(t+\tau)$, 则它的数值 CTFT 数值 $G(\omega)$ 将由其样值

$$
g(t_0-\tau+nT_s) = x(t_0+nT_s), \qquad n = 0,\cdots,N-1
$$

决定. 根据算法 3.1，

$$
\begin{aligned}
G(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_s} &= \exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{N}\omega_s(t_0-\tau)\right)T_s\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_s)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right) \\
&= \exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{N}\omega_s\tau\right)X(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_s}, \qquad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

上式简记为

$$
g(t) := x(t+\tau) \xleftrightarrow[\text{算法 3.1}]{\text{数值 CTFT}} G(\omega_k) = \exp(\mathrm{j}\omega_k\tau)\,X(\omega_k), \tag{3.8}
$$

其中 $\omega_k := \frac{k}{N}\omega_s$，$k\in\mathbb{Z}$.

式（3.8）与 CTFT 解析解的时移性质相同.

命题 3.3 算法 3.1 得到的数值 CTFT 能保持 CTFT 解析解的尺度变换和时移性质. ■

4 奇偶虚实性

考虑 $x(t)$ 的共轭信号 $g(t) := x^*(t)$. 用算法 3.1 得到的 $g(t)$ 的 CTFT 数值解

$$
\begin{aligned}
G(\omega)|_{\omega=\frac{k}{N}\omega_s} &= \exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{N}\omega_s t_0\right)T_s\sum_{n=0}^{N-1}x^*(t_0+nT_s)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n\right) \\
&= \left[\exp\left(-\mathrm{j}\frac{-k}{N}\omega_s t_0\right)T_s\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_s)\exp\left(-\mathrm{j}(-k)\frac{2\pi}{N}n\right)\right]^* \\
&= X^*(\omega)|_{\omega=\frac{-k}{N}\omega_s}, \qquad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

上式简记为

$$x^*(t) \xleftrightarrow[\text{算法 3.1}]{\text{数值 CTFT}} X^*(-\omega_k), \tag{3.9$'$}$$

其中 $\omega_k := \frac{k}{N}\omega_{\mathrm{s}}$，$k \in \mathbb{Z}$.

式（3.9）与 CTFT 解析解的相应性质相同.

特别地，若 $x(t)$ 为实信号，则 $X(\omega_k)$ 是共轭对称的：$X(\omega_k) = X^*(-\omega_k)$, 即

$$|X(\omega_k)| = |X(-\omega_k)|, \qquad \arg\big(X(\omega_k)\big) = -\arg\big(X(-\omega_k)\big)\,. \tag{3.10}$$

反之，若 $X(\omega_k)$ 是共轭对称的，则 $x(t)$ 是实的.

命题 3.4 对于实信号，由算法 3.1 得到的数值 CTFT 的幅频特性是偶对称的，相频特性是奇对称的. 反之，对于共轭对称的频谱，其由算法 3.2 得到的逆变换是实的. ∎

3.3 结果和讨论

3.4 项目小结

4 项目 2：语音采样器（Speech Sampler）

4.1 项目简介

采集某个人的声音作为一段连续时间信号，使用不同的采样频率对其进行若干次采样，得到若干份离散时间信号。(推荐采样频率：44 kHz, 22 kHz, 11 kHz, 5.5 kHz, 2.75 Hz)

对上述离散时间信号分别进行重构，得到相应的连续时间信号，分析不同采样频率对对重构质量的影响，并计算重构误差。

分析“Speech Sampler”的基本设计思路和原理，并用编程语言实现之。

4.2 数据和方法

4.2.1 连续时间信号

为了突出研究主题——采样与重建，本文使用仅含 3 个单音频率分量的连续时间信号（图 4.1）

$$x(t) := \sum_{i=1}^{3} \sin(2\pi f_i t + \varphi_i)\,, \tag{4.1}$$

其中 $f_1 = 10\ \mathrm{kHz}$, $f_2 = 5\ \mathrm{kHz}$, $f_3 = 2.5\ \mathrm{kHz}$, $\varphi_1 = \pi/6$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = 5\pi/6$.

这种信号可通过计算机软件（例如 Matlab）方便地生成.

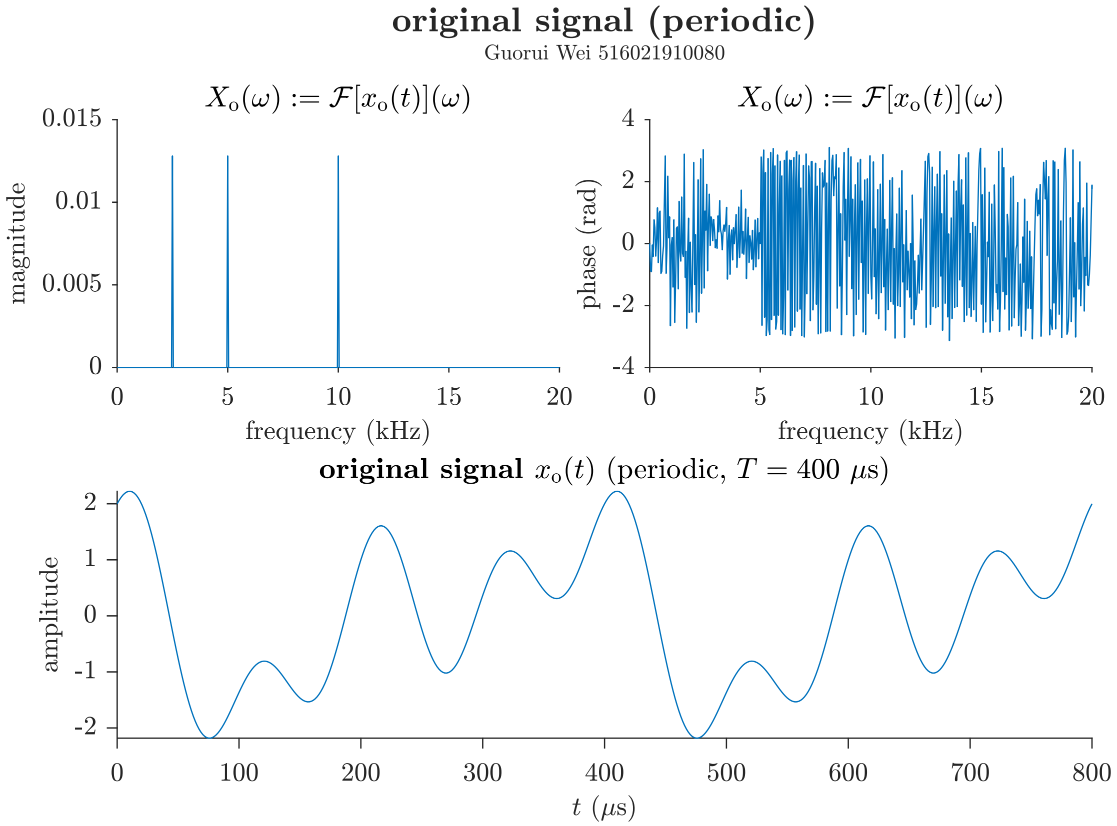


图 4.1 本项目使用的连续时间信号 $x(t)$. 该信号仅含 3 个等幅且初相不同的单音频率分量，即 $x(t) := \sum_{i=1}^{3} \sin(2\pi f_i t + \varphi_i)$，$f_1 = 10$ kHz，$f_2 = 5$ kHz，$f_3 = 2.5$ kHz，$\varphi_1 = \pi/6$，$\varphi_2 = \pi/2$，$\varphi_3 = 5\pi/6$. 因此 $x(t)$ 具有 400 μs 周期. 本图展示了 $x(t)$ 在两个周期上的图像.

4.2.2 冲激串采样与理想带限内插

对连续时间信号 $x(t)$ 执行如图 4.2 所示的冲激串采样和重建流程. 原始信号 $x(t)$ 与周期采样信号

$$p(t) := \sum_n \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s}\sum_k e^{jk\omega_s t} \overset{\text{CTFT}}{\longleftrightarrow} P(\omega) = \omega_s \sum_k \delta(\omega - k\omega_s)\,, \tag{4.2}$$

相乘，得采样后信号 $x_p(t)$, 其频谱

$$X_p(\omega) := \mathcal{F}[x_p(t)] = \mathcal{F}[x(t)p(t)] = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_k X(\omega - k\omega_s)\,. \tag{4.3}$$

可见，$X_p(\omega)$ 就是 $X(\omega)$ 的等幅周期拓展.

若 $x(t)$ 是带限(band-limited)的，即 $x(t)$ 的频谱满足

$$X(\omega) := \mathcal{F}[x(t)](\omega) = 0, \qquad \forall\omega\colon |\omega| > \omega_m, \tag{4.4}$$

则只需将取样后的信号 $x_p(t)$ 通过一个截止频率为 ω_c，$\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$，幅度为 T_s 的理想低通滤波器（频率响应记为 $H(\omega)$），就可恢复出原始信号 $x(t)$. 理想低通滤波器的冲激响应

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} T_s e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{2\omega_c}{\omega_s}\operatorname{sinc}\frac{\omega_c t}{\pi}, \tag{4.5}$$

上式中的 sinc 函数定义为

$$\operatorname{sinc} t := \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

得到的重建信号

$$x_{\mathrm{r}}(t)=x_{\mathrm{p}}(t)*h(t)=\sum_{n} x(nT_{\mathrm{s}})\delta(t-nT_{\mathrm{s}})*h(t)=\sum_{n} x(nT_{\mathrm{s}})h(t-nT_{\mathrm{s}})\,. \tag{4.7}$$

若取 $\omega_{\mathrm{c}}=\omega_{\mathrm{s}}/2\in(\omega_{\mathrm{m}},\omega_{\mathrm{s}}-\omega_{\mathrm{m}})$，$\omega_{\mathrm{s}}>2\omega_{\mathrm{m}}$，则有

$$x_{\mathrm{r}}(t)=\sum_{n} x(nT_{\mathrm{s}})\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_{\mathrm{s}}}-n\right). \tag{4.8}$$

特别地，

$$x_{\mathrm{r}}(nT_{\mathrm{s}})=\sum_{m} x(mT_{\mathrm{s}})\,\mathrm{sinc}(n-m)=x(nT_{\mathrm{s}}),\qquad \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

可见，重建信号 $x_{\mathrm{r}}(t)$ 经过所有采样点 $(nT_{\mathrm{s}},x(nT_{\mathrm{s}}))$，可将 $x_{\mathrm{r}}(t)$ 视作在插值节点 $(nT_{\mathrm{s}},x(nT_{\mathrm{s}}))$，$n\in\mathbb{Z}$ 下，以 sinc 函数作为**插值基函数**的一个插值函数，称为**理想带限内插** (ideal band-limited interpolation).

定理 4.1 (ideal band-limited interpolation) 设带限信号 $x(t)$ 满足（4.4），其等间隔样值 $x(nT_{\mathrm{s}})$. 若采样频率 $\omega_{\mathrm{s}}:=2\pi/T_{\mathrm{s}}$ 满足 $\omega_{\mathrm{s}}>2\omega_{\mathrm{m}}$，则以这些采样时刻作插值节点，以 sinc 函数作为插值基函数作理想带限内插（4.8），可精确重建 $x(t)$. ■

注 4.2 (时域有限信号的重建) 重建公式（4.8）是无穷级数，需要无限个采样值，一般难以实现. 对于时域有限信号，因其除一个有限时间区间外恒为零，故只需在其非恒零区间上等时间间隔采样，这时（4.8）成为有限项求和. 但时域有限信号通常是频域无限的，通常不满足定理 4.1 的条件，这时通过（4.8）得到的重建信号只是原始信号的近似. ■

对于时域无限的原始信号，通常只能获得该信号在一个有限时间区间上的等间隔采样值. 为了使用重建公式（4.8），可以规定在实际取样区间外的“虚拟”样值都为零. 这时，重建公式（4.8）是对这样一个信号的近似：它在采样时间区间内同原始信号相同，在采样时间区间外为零（或至少在“虚拟”采样时刻为零）；而它通常不是频域有限的，即使原始信号是频域有限的. 这样，重建公式（4.8）可认为是在采样时间区间内对原始信号的一个近似，而在采样时间区间外不具有重建意义. 从插值的角度看，重建公式（4.8）可用于内插（interpolation），而不用于外推（extrapolation），故称为理想带限内插.

注 4.3 (时域无限信号在有限区间上的重建) 对于时域无限信号，可以利用其在有限时间区间上的等时间间隔采样值和重建公式（4.8），在该时间区间上作内插（不宜用于外推）. 这种“截断”方式通常会在原始信号的基础上引入高频分量，导致定理 4.1 的条件不再被满足. 因此，即使原始信号是频域有限的，通常也不能通过（4.8）在采样时间区间上精确重建原始信号. ■

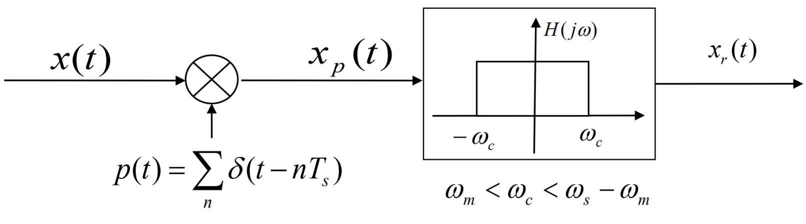


图 4.2 理想采样与重建原理图. $x(t)$ 是带限信号(band-limited signal)，当 $|\omega|>\omega_{\mathrm{m}}$ 时，$x(t)$ 的频谱 $X(\omega):=\mathcal{F}[x(t)](\omega)=0$. $p(t)$ 是取样函数(sampling function)，在冲激串采样中取为周期冲激串，取样周期为 T_{s}，即取样频率 $\omega_{\mathrm{s}}:=2\pi/T_{\mathrm{s}}$. 取样后的信号 $x_{\mathrm{p}}(t)$ 通过一个截止频率为 ω_{c}，幅度为 T_{s} 的理想低通滤波器，得到重建信号 $x_{\mathrm{r}}(t)$. 若 $\omega_{\mathrm{m}}<\omega_{\mathrm{c}}<\omega_{\mathrm{s}}-\omega_{\mathrm{m}}$，则有 $x_{\mathrm{r}}(t)=x(t)$，$\forall t$. 图源：上海交通大学 2022 年春季学期 ICE2301 课程教学用课件“signal&system(v3.1)-ch4-FT-频域分析.pdf”第 66 页（刘伟，2022）.

4.2.3 基于理想带限内插的信号重建

设有时域有限的连续时间信号 $x(t)\in \mathrm{C_c}[t_0,t_0+\tau)$, 其等时间间隔样值

$$x(t_0+nT_\mathrm{s}),\qquad n=0,\cdots,N-1,$$

其中 $NT_\mathrm{s}=\tau$. 下面建立其理想带限内插.

记 $y(t):=x(t+t_0)$, 则 $y(t)\in \mathrm{C_c}[0,\tau)$, 其等时间间隔样值

$$y(nT_\mathrm{s}):=x(t_0+nT_\mathrm{s}),\qquad n=0,\cdots,N-1.$$

于是 $y(t)$ 的理想带限内插（4.8）成为

$$y_\mathrm{r}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(nT_\mathrm{s})\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_\mathrm{s}}-n\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_\mathrm{s})\operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT_\mathrm{s}}{T_\mathrm{s}}\right).\tag{4.10}$$

若 $y(t)$ 满足定理 4.1 的条件（实际中很难满足，因为时域有限信号通常是频域无限的），则 $x(t)$ 也满足定理 4.1 的条件（因为 $x(t),y(t)$ 具有相同的幅频特性），从而

$$x_\mathrm{r}(t)=x(t)=y(t-t_0)=y_\mathrm{r}(t-t_0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_\mathrm{s})\operatorname{sinc}\left(\frac{t-(t_0+nT_\mathrm{s})}{T_\mathrm{s}}\right).\tag{4.11}$$

为此，规定

$$x_\mathrm{r}(t):=\sum_{n=0}^{N-1}x(t_0+nT_\mathrm{s})\operatorname{sinc}\left(\frac{t-(t_0+nT_\mathrm{s})}{T_\mathrm{s}}\right)\tag{4.12}$$

为时域有限的连续时间信号 $x(t)\in \mathrm{C_c}[t_0,t_0+\tau)$ 的**理想带限内插**.

定义连续时间信号 $x(t)$ 的样值序列 $\boldsymbol{x}$ 和取样函数序列 $\boldsymbol{s}(t)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&:=(x_i)_{N\times 1}:=\big(x(t_0+iT_\mathrm{s})\big)_{N\times 1},\qquad i=0,\cdots,N-1,\\ \boldsymbol{s}(t)&:=\big(s_i(t)\big)_{N\times 1}:=\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{t-(t_0+iT_\mathrm{s})}{T_\mathrm{s}}\right)\right)_{N\times 1},\qquad i=0,\cdots,N-1,\end{aligned}\tag{4.13}$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&:=[x(t_0+0T_\mathrm{s}),x(t_0+1T_\mathrm{s}),\cdots,x(t_0+(N-1)T_\mathrm{s})]^\mathrm{T},\\ \boldsymbol{s}(t)&:=\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{t-(t_0+0T_\mathrm{s})}{T_\mathrm{s}}\right),\cdots,\operatorname{sinc}\left(\frac{t-(t_0+(N-1)T_\mathrm{s})}{T_\mathrm{s}}\right)\right]^\mathrm{T}.\end{aligned}\tag{4.13$'$}$$

则（4.12）可写成

$$x_\mathrm{r}(t):=\boldsymbol{s}^\mathrm{T}(t)\boldsymbol{x}.\tag{4.12$'$}$$

现在用等时间间隔样值 $\boldsymbol{x}$ 理想带限内插到 $t=t_k$，$k=0,\cdots,M-1$ 上，试图重建原始信号 $x(t)$. 定义重建信号序列

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{r}:=\big(x_\mathrm{r}(t_k)\big)_{M\times 1},\qquad k=0,\cdots,M-1,$$

则由（4.12′）得

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{r}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}^\mathrm{T}(t_0)\\ \vdots\\ \boldsymbol{s}^\mathrm{T}(t_{M-1})\end{bmatrix}\boldsymbol{x}.\tag{4.14}$$

上式这种矩阵形式适合计算机编程实现. 若定理 4.1 的条件被满足，则 $\boldsymbol{x}_\mathrm{r}$ 和原始信号在相应时刻的值相等.

4.2.4 信号重建质量的评价

由（4.9）知道，理想带限内插总是能够精确恢复原始信号在取样时刻的值. 因此，为了评价信号重建的质量，应考察重建公式（4.8）对非取样时刻原始信号的恢复情况. 注 4.3 指出，重建公式（4.8）不宜用于外推，故不必考察（4.8）在取样时间区间外的重建性能.

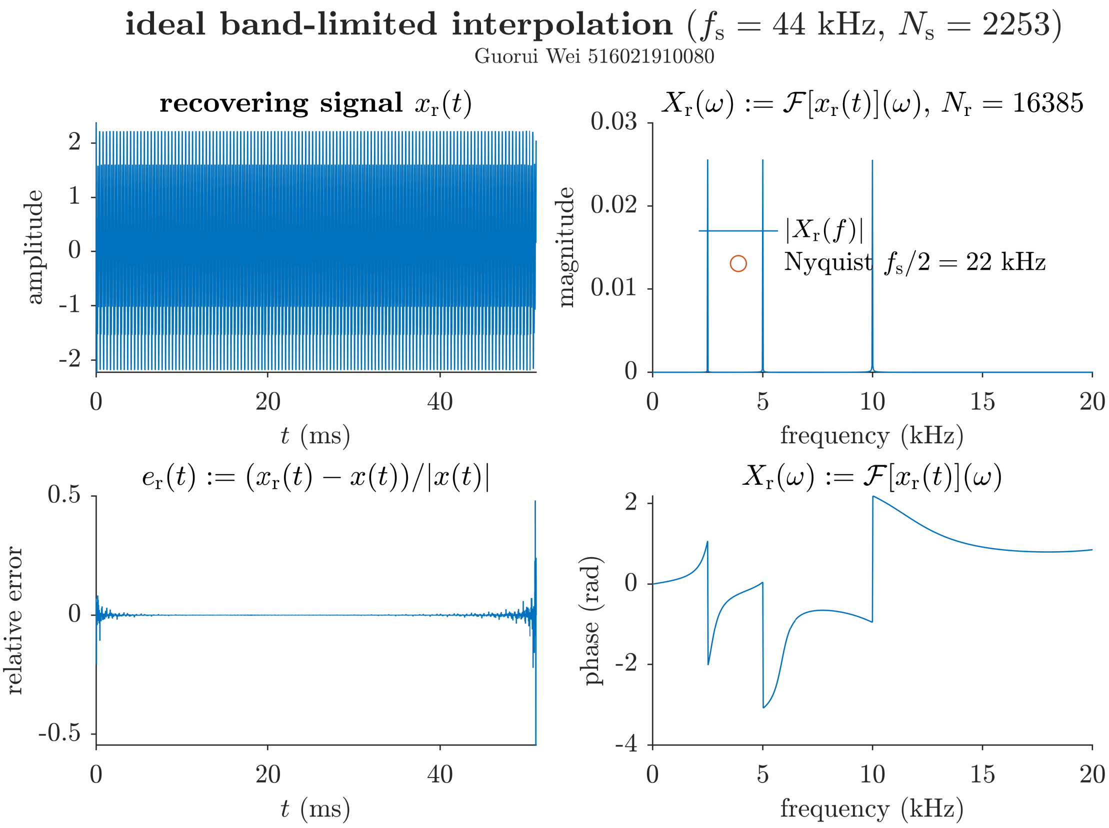
基于上述考虑，本项目按下述方式评价信号重建质量. 在采样时间区间内，等间隔地选定一组重建时刻，重建时间间隔远小于且整除采样时间间隔，以使重建时刻包含采样时刻. 计算**重建相对误差**

$$e_{\mathrm{r}}(t_{\mathrm{r}}) := \frac{x_{\mathrm{r}}(t_{\mathrm{r}}) - x(t_{\mathrm{r}})}{|x(t_{\mathrm{r}})|}, \tag{4.15}$$

其中 t_{r} 是重建时刻，$x_{\mathrm{r}}(t)$ 是利用理想带限内插重建公式（4.8）对原始信号 $x(t)$ 在采样时间区间上的重建信号.

4.3 结果和讨论

对原始信号（4.1），从初始时刻 0 秒（含）起，分别以采样频率 44、22、11、5.5、2.75 kHz 等间隔取样，获得 2253、1127、564、282、141 个采样值. 在采样时间区间内，以重建频率 320 kHz，等时间间隔地选取 16385 个重建时刻，使用理想带限内插公式（4.8）获得重建信号在重建时刻上的值. 用（4.15）计算重建相对误差.



4.4 项目小结

References

Appendix A　MATLAB 源代码

Appendix B