Chapter 3 DISCRETE-TIME LTI SYSTEM

本课程研究在时域、频域及复频域中LTI系统的描述和求解！

本章内容：

一、用差分方程描述并求解LSI系统

二、用 $h[n]$ 描述LTI系统，并用卷积和求解

注：$h(n)$是基本信号$\delta(n)$经过LTI系统的输出，称为系统的冲激响应

Linear Constant-Coefficient Difference Equation（线性常系数差分方程）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

1、迭代法

2、时域法

- 齐次解＋特解 / 自由响应＋强迫响应
- 零输入响应＋零状态响应
- 暂停响应＋稳态响应

一、迭代法

example：$y[n]=ay[n-1]+x[n]$

其中 $x[n]=\delta[n]$ 且 $n<0$时，$y[n]=0$

$$\because\ y[0]=ay[-1]+x[0]=a\times 0+\delta[0]=1$$

$$y[1]=ay[0]+x[1]=a\times 1+\delta[1]=a$$

$$y[2]=ay[1]+x[2]=a\times a+\delta[2]=a^2$$

。。。

$$\therefore\ y[n]=a^n$$

特点：简单，但难以得到闭式

二、时域法

1．齐次解+特解/自由响应+强迫响应

①齐次解(homogeneous solution) $y_h[n]$

设 $$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=0$$

解特征方程 $a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1}\alpha + a_N = 0$

得特征根 α_1、α_2、。。。α_{N}

a. 特征根为单（实）根

$$\boxed{y_h[n]=\sum_{i=1}^{N} c_i\alpha_i^n = c_1 a_1^n + c a_2^n + \cdots + c_N\alpha_N^n}$$

b. 特征根为k重根

设α_1为其k重实根，其余$N-k$个为单根

$$y_h[n]=(c_1 n^{k-1}+c_2 n^{k-2}+\cdots+c_k)\alpha_1^n+\sum_{i=k+1}^{N} c_i\alpha_i^n$$

注：待定系数C_i在完全解求得后由初始条件确定

②特解(particular solution) $y_p[n]$

化简式	特解函数式
n^k	$B_1 n^k + B_2 n^{k-1} + \cdots + B_k n + B_{k+1}$ — 特征根均不为1
	$n^r[B_1 n^k + B_2 n^{k-1} + \cdots + B_k n + B_{k+1}]$ — 有r重特征根为1
α^n	$B \cdot \alpha^n$ — α不是特征根
	$[B_1 n + B_2]\alpha^n$ — α是特征单根
	$[B_1 n^\gamma + B_2 n^{\gamma-1} + \cdots B_{\gamma+1}]\alpha^n$ — α是r重特征根
$\cos\beta n / \sin\beta n$	$B_1 \cos\beta n + B_2 \sin\beta n$ — 所有特征根均不等于$e^{\pm j\beta}$

③完全解(complete solution) $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$

Example： $y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1]$

$x[n] = n^2, \quad n \geq 0 \qquad y[-1] = -\frac{1}{2}$

①齐次解

$$\alpha + 2 = 0 \to \alpha = -2$$

$$\therefore y_h[n] = C \cdot (-2)^n$$

②特解

将 $x[n] = n^2$ 代入，方程右边 $= n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

设 $y_p[n] = B_1 n + B_2$ 代入原方程得

$$[B_1 n + B_2] + 2[B_1(n-1) + B_2] = 3B_1 n + 3B_2 - 2B_1 = 2n - 1$$

$$\therefore \begin{cases} 3B_1 = 2 \\ 3B_2 - 2B_1 = -1 \end{cases} \to \begin{cases} B_1 = \dfrac{2}{3} \\ B_2 = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

则 $y_p[n] = \dfrac{2}{3} n + \dfrac{1}{9}$

③完全解

$$y[n]=y_h[n]+y_p[1]=C\cdot(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

$$\because\ y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

$$y[-1]=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y[0]=-2y[-1]+x[0]-x[-1]=1$$

将 $y[0]=1$ 代入 $\rightarrow c=\dfrac{8}{9}$

$$\therefore y[n]=\underbrace{\frac{8}{9}(-2)^n}_{\text{自由}}+\underbrace{\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}}_{\text{强迫}}\qquad n\geq 0$$

关于边界条件：

设外加激励$x[n]$在$n=n_0$时刻加入

⑴ 起始状态

$$\{y[n_0-1],\ y[n_0-2],\ldots y[n_0-N]\}$$

（2）初始状态

$$\{y[n_0],\ y[n_0+1],\ldots y[n_0+N-1]\}$$

注：对离散时间系统，已知起始状态求初始状态可采用“迭代法”

2、零输入响应+零状态响应

①零输入响应(zero-input response) $y_{zi}[n]$

例：特征根为单根

$$y_{zi}[n]=\sum_{k=1}^{N}c_{zik}\alpha_k^n$$

注：c_{zik}由起始状态确定

②零状态响应(zero-states response) $y_{zs}[n]$

例：特征根为单根

$$y_{zs}[n]=\sum_{k=1}^{N}c_{zsk}\alpha_k^n+y_p[n]$$

注：c_{zsk}由$\{y_{zs}[n_0],y_{zs}[n_0+1],\cdots,y_{zs}[n_0+N-1]\}$确定

③完全响应

例：特征根为单根

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

$$= \sum_k c_{zik}\alpha_k^n + \sum_k c_{zsk}\alpha_k^n + y_p[n]$$

$$= \sum_i c_i\alpha_i^n + y_p[n]$$

注：自由响应=零输入+部分零状态

Example: $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]$

$$x[n]=2^n u[n] \quad y[-1]=0 \quad y[-2]=\frac{1}{2}$$

Soulution:

$$\alpha^2+3\alpha+2=0 \rightarrow \alpha_1=-1 \quad \alpha_2=-2$$

(1) $y_{zi}[n]=c_{zi1}(-1)^n+c_{zi2}(-2)^n$

$$\begin{cases} y[-1]=0 \\ y[-2]=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -c_{zi1}-\frac{1}{2}c_{zi2}=0 \\ c_{zi1}+\frac{1}{4}c_{zi2}=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_{zi1}=1 \\ c_{zi2}=-2 \end{cases}$$

$$\therefore y_{zi}[n]=(-1)^n-2(-2)^n$$

(2) $y_{zs}[n]=c_{zs1}(-1)^n+c_{zs2}(-2)^n+B\cdot 2^n$

将特解 $B\cdot 2^n$ 代入原方程得：

$$B\cdot 2^n+3B\cdot 2^{n-1}+2B\cdot 2^{n-2}=2^n$$

$$(B+\frac{3}{2}B+\frac{1}{2}B)\cdot 2^n=2^n \rightarrow B=\frac{1}{3}$$

$$\therefore y_{zs}[n]=c_{zs1}(-1)^n+c_{zs2}(-2)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n$$

零状态响应在外加激励加入前为0！

$$\because \boxed{y_{zs}[-1]=y_{zs}[-2]=0}$$

$$\therefore y_{zs}[0]=-3y_{zs}[-1]-2y_{zs}[-2]+x[0]=1$$

$$y_{zs}[1]=-3y_{zs}[0]-2y_{zs}[-1]+x[1]=-1$$

$$\longrightarrow \begin{cases} c_{zs1}=-\dfrac{1}{3} \\ c_{zs2}=1 \end{cases}$$

$$\therefore y_{zs}[n]=-\frac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n$$

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

$$= \underbrace{(-1)^n - 2(-2)^n}_{zero-input\ response} \underbrace{- \frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}\cdot 2^n}_{zero-states\ response}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n}_{natural\ response} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2^n}_{forced\ response}$$

④零输入线性，零状态线性

Example： $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=x[n]+2x[n-2]$

$$x[n]=u[n] \qquad y[-1]=2 \qquad y[-2]=-\frac{1}{2}$$

Determine：

1、natural response and forced response

2、zero-input response and zero-states response

提示：可先求解x[n]作用下的零状态响应，再利用零状态线性求x[n-2]作用下的零状态响应。

关于h[n]的求解 一

$h[n]$是$\delta[n]$作用下系统的零状态响应，可将对$h[n]$的求解转换为已知$h[0]$时，系统的零输入响应。

$h[0]$用迭代法，由已知条件$\begin{cases} x[n]=\delta[n] \\ h[n]=0, n<0 \end{cases}$求解

Example: $y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]=x[n]$

$$\begin{cases} x[n]=\delta[n] \\ h[n]=0, n<0 \end{cases} \rightarrow h[0]=1$$

$$\because \alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=0$$

$(\alpha-1)^3=1 \rightarrow \alpha=1$为方程的三重根

$$\therefore h[n]=c_1 n^2+c_2 n+c_3$$

$$\begin{cases} h[0]=1 \\ h[1]=3 \\ h[2]=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{1}{2} \\ c_2=\dfrac{3}{2} \\ c_3=1 \end{cases}$$

注：代入外加
激励加入以后
的边界条件！

$$\therefore h[n]=\frac{1}{2}(n^2+3n+2), \quad n\geq 0$$

3、暂态响应+稳态响应

Exercise： $6y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=x[n]$

$$x[n]=10\cos[\frac{n\pi}{2}]\cdot u[n] \qquad y[0]=0,\ y[1]=1$$

$$y[n]=\underbrace{2\cdot(\frac{1}{2})^n-3\cdot(\frac{1}{3})^n}_{\text{暂态}}+\underbrace{\sqrt{2}\cos[\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}]}_{\text{稳态}}$$

$\delta[n]$ ——（离散时间）系统时域分析的基本信号

基本信号应满足：

① 能构成相当广泛的一类有用信号 /相当广泛的一类有用信号可用该基本信号的“线性组合”表示

② LTI系统对该基本信号的响应应十分简单，且系统对任意输入 信号的响应可用该基本信号的响应很方便的表示

一、Convolution-Sum Representation of LTI Systems（离散时间LTI系统的卷积和表示）

$\because\ x[n] = \ldots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1]\ldots$

$\therefore\ x[n]$总是可以用$\delta[n]$及其时移的加权求和表示，即

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

权值

基本信号

注：$x[n]$可表示成基本信号$\delta[n]$的加权求和

设 $\delta[n] \to h[n]$ ——单位脉冲（序列）响应（Unit Impulse Response)

根据时不变性 $\delta[n-k] \to h[n-k]$

又 $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

根据线性 $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

卷积和 (Convolution-Sum)

即：

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot h[n-k] = x[n] * h[n]}$$

注：可利用基本信号的输出h[n]求任意信号x(n)的输出

- ✓ **LTI系统的输出等于输入与系统单位脉冲响应的卷积**

注：卷积和求解的是系统的零状态响应！

二、 卷积和的计算

$$y[n]=x_1[n]*x_2[n]$$

$$=\sum_k x_1[k]\cdot x_2[n-k]$$

$$=\sum_k x_2[k]\cdot x_1[n-k]$$

图解法！

1) 将n变为k—k为自变量，n为参变量

例：$x_1[n] \to x_1[k], x_2[n] \to x_2[k]$

2）反折、平移—平移量为n

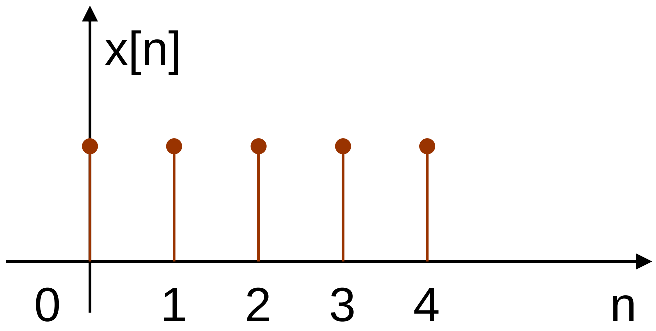
例：$x_2[k] \to x_2[n-k]$

3）相乘求和—确定求和的上、下限

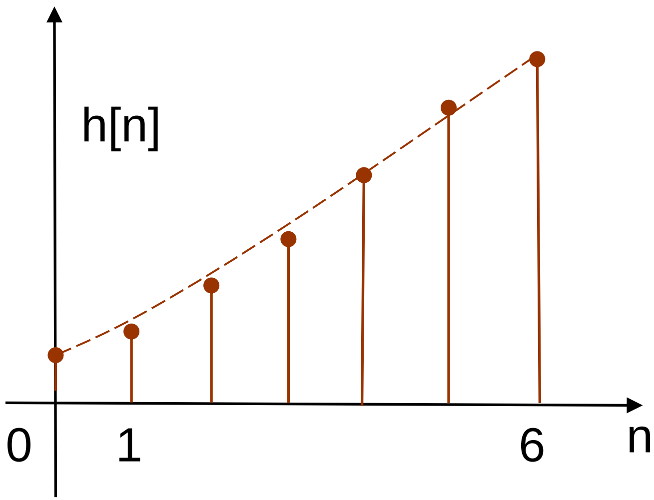
例：$\sum_k x_1[k]x_2[n-k]$

Example：

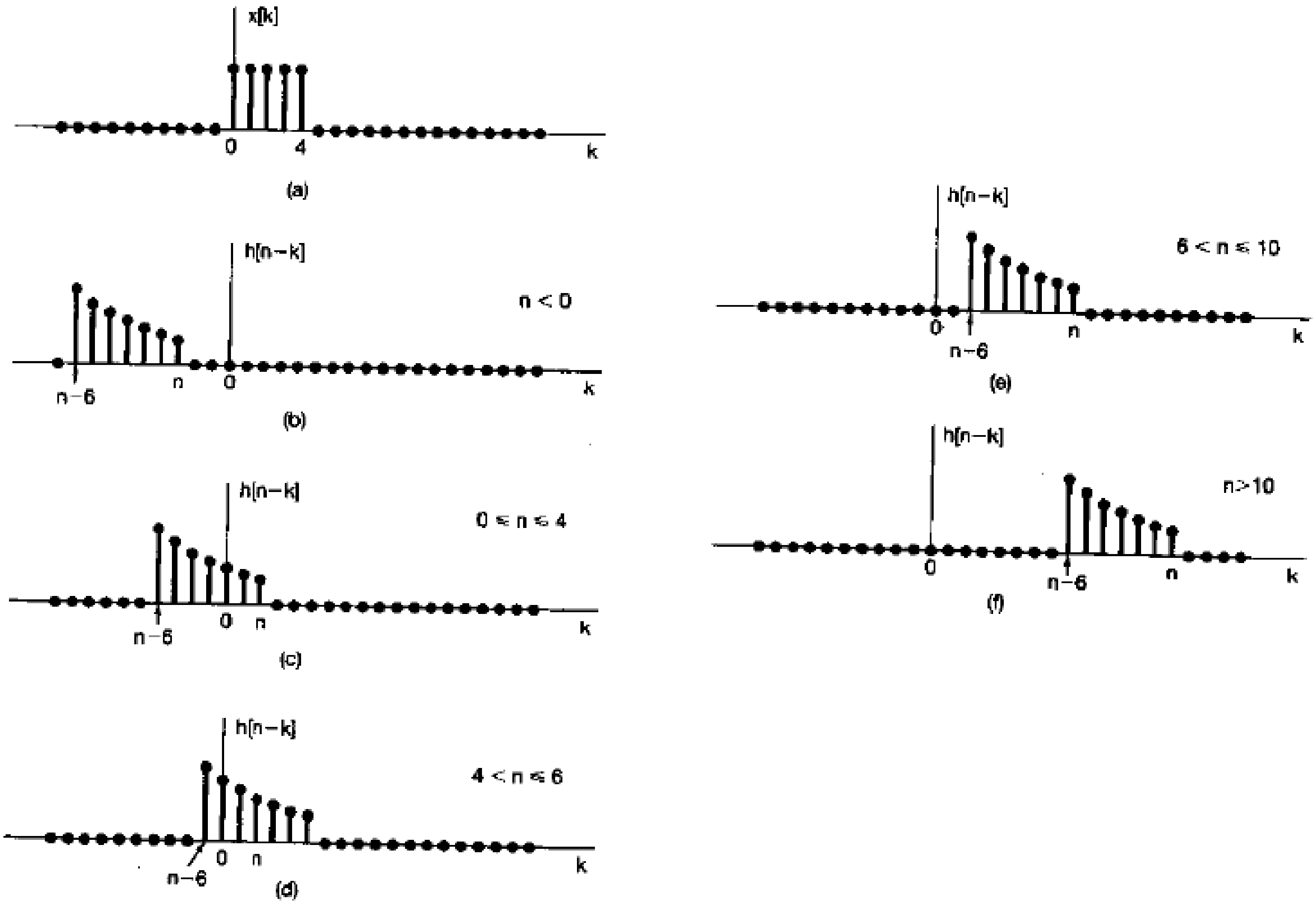
Let $$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & others\end{cases}$$



$$h[n]=\begin{cases}a^n & 0\le n\le 6\\ 0 & others\end{cases}$$



Determine $y[n]=x[n]*h[n]$


x[k]
0
4
k
(a)
h[n−k]
n < 0
n−6
n
0
k
(b)
h[n−k]
0 ≤ n ≤ 4
n−6
0
n
k
(c)
h[n−k]
4 < n ≤ 6
n−6
0
n
k
(d)
h[n−k]
6 < n ≤ 10
0
n−6
n
k
(e)
h[n−k]
n>10
0
n−6
n
k
(f)

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\cdot h[n-k]$$

$$(1)\ n<0 \quad y[n]=0$$

$$(2)\ 0\le n\le 4$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}\ \underline{\underline{r=n-k}}\sum_{r=0}^{n}a^{r}=\frac{1-a^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$(3)\begin{cases} n>4 \\ n-6\le 0\end{cases}\Rightarrow 4<n\le 6$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{4}a^{n-k}$$

$$=a^{n}\sum_{k=0}^{4}(a^{-1})^{k}=a^{n}\frac{1-(a^{-1})^{5}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{a^{n-4}-a^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$(4)\begin{cases} n > 6 \\ n-6 \le 4 \end{cases} \Rightarrow 6 < n \le 10$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} a^{n-k}$$

$$\underline{\underline{r = k-n+6}} \sum_{r=0}^{10-n} a^{6-r} = a^{6} \sum_{r=0}^{10-n} (a^{-1})^{r}$$

$$= a^{6} \frac{1-(a^{-1})^{11-n}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{a^{n-4} - a^{7}}{1-\alpha}$$

$$(5)\ n > 10 \quad y[n] = 0$$

附：等比级数求和公式

$$\sum_{k=0}^{N} a^k = \begin{cases} N+1 & a=1 \\ \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a}, & |a| \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

求有限长序列的卷积和！

——常借助冲击序列的卷积性质！

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$
$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

Example: Let $x_1[n]=u[n+2]-u[n-1]$

$$x_2[n]=2^n(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2])$$

Determine $y[n]=x_1[n]*x_2[n]$

Solution: $x_1[n]=\delta[n+2]+\delta[n+1]+\delta[n]$

$$x_2[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+4\delta[n-2]$$

$x_2[n]$ \ $x_1[n]$	$\delta[n+2]$	$\delta[n+1]$	$\delta[n]$
$\delta[n]$	$\delta[n+2]$	$\delta[n+1]$	$\delta[n]$
$2\delta[n-1]$	$2\delta[n+1]$	$2\delta[n]$	$2\delta[n-1]$
$4\delta[n-2]$	$4\delta[n]$	$4\delta[n-1]$	$4\delta[n-2]$

$$y[n]=\delta[n+2]+3\delta[n+1]+7\delta[n]+6\delta[n-1]+4\delta[n-2]$$

注：当两个序列不全是有限长序列时，通常仍需采用图解法

Example: $$2^n u(n) * 3^n u(n)$$

Soultion：

$$2^n u(n) * 3^n u(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k u(k) \cdot 3^{n-k} u(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot 3^{n-k}, \quad n \geq 0$$

$$= 3^n \sum_{k=0}^{n} (\frac{2}{3})^k$$

$$= 3^n \frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

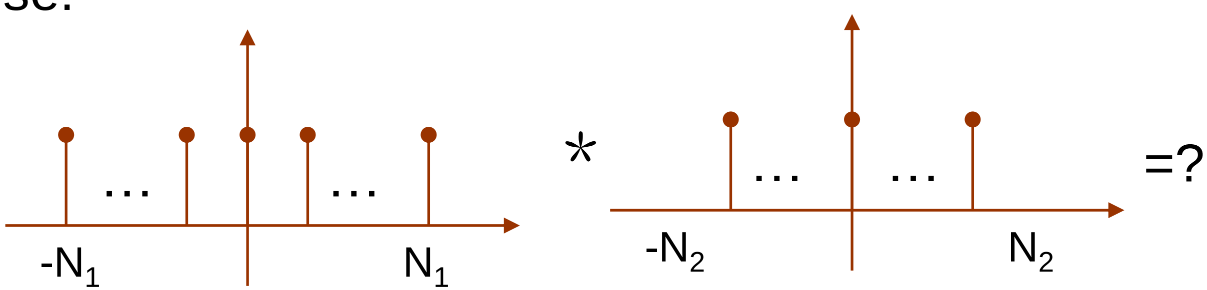
$$=[3^{n+1} - 2^{n+1}] \cdot u[n]$$

Exercise: $x[n]=2^n u[-n]$

$h[n]=u[n]$

Determine $x[n]*h[n]=?$

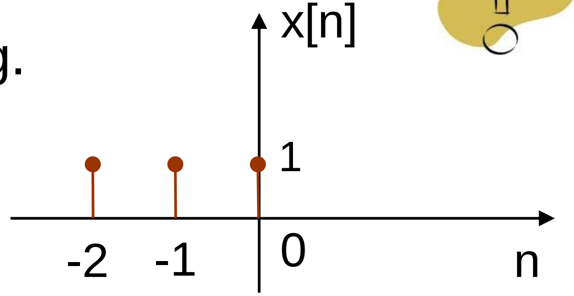
Exercise:

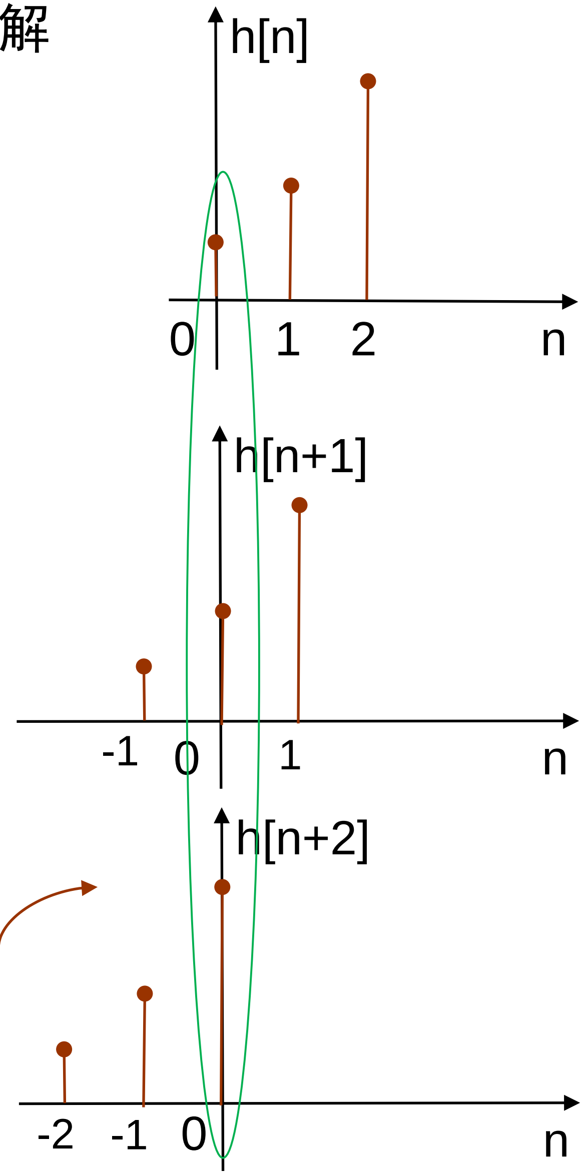


注：此序列长度为$2N_1+1$

卷积运算与求解系统输出！

e.g.





根据LTI系统的叠加性：

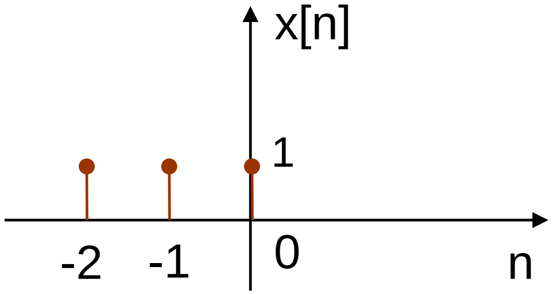
$$\because\ x[n] = x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n]$$

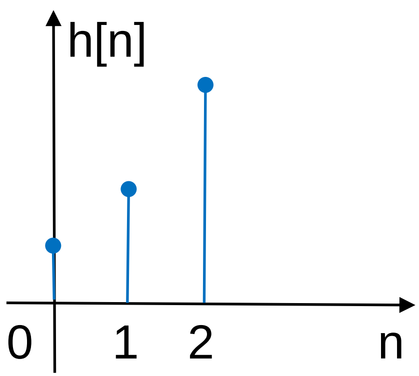
$$\therefore\ y[n] = x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n]$$

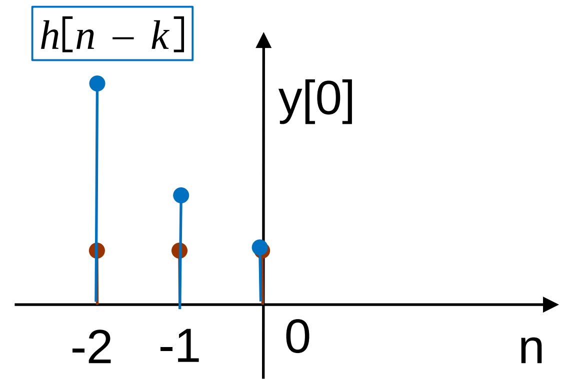
即，任意时刻的输出=输入的所有样值在该时刻输出的加权叠加，而权值取决于系统的h[n]！

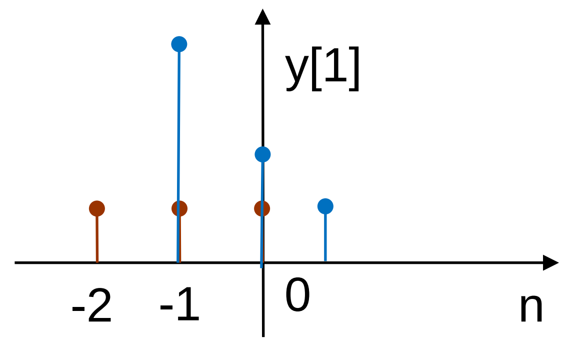
例如:n=0

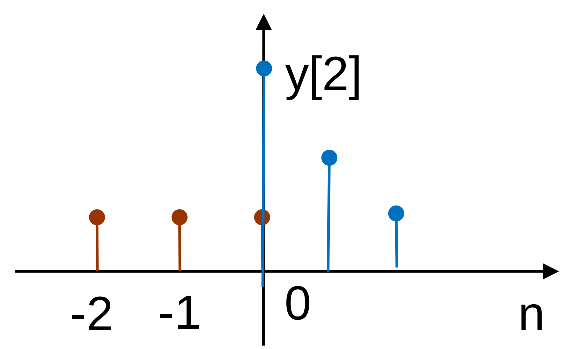
$$y[0] = x[-2]h[2] + x[-1]h[1] + x[0]h[0]$$











例如:

$$y[0] = x[-2]h[2] + x[-1]h[1] + x[0]h[0]$$

$$y[1] = x[-2]h[3] + x[-1]h[2] + x[0]h[1]$$

$$y[2] = x[-2]h[4] + x[-1]h[3] + x[0]h[2]$$

附：关于冲激函数/冲激脉冲序列

1. 定义

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] = 1$$

2. 奇偶特性

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$\delta[-n] = \delta[n]$$

3. 微积分特性

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

4. 相乘

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

5. 卷积

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$x[n]*\delta[n-m]=x[n-m]$$

6. 筛选性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]=x[n]$$

7. 尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta[an]=\delta[n]$$

- ✓ **LTI系统的输出等于输入与系统单位脉冲响应的卷积**

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

注：x(n)为外加激励，y(n)为零状态响应，h(n)为系统的单位脉冲响应

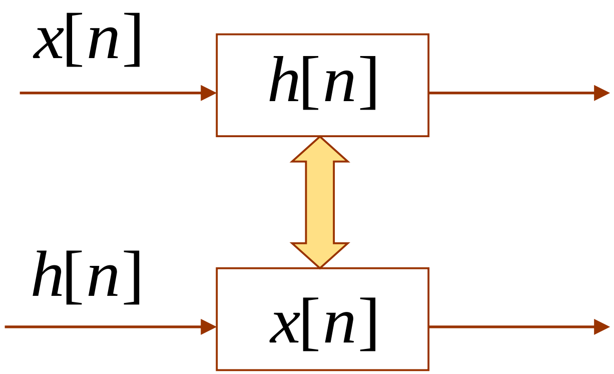
- ✓ **LTI系统可“完全”由其单位脉冲响应描述**

当用h(n)描述时，LTI系统的性质？

一、The Commutative Property（交换律）

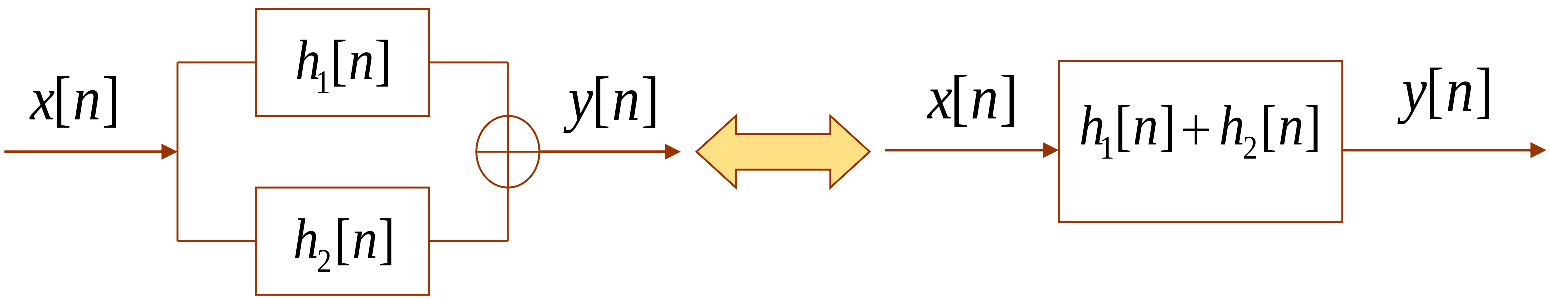
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

注：物理意义



二、The Distributive Property（分配律 ）

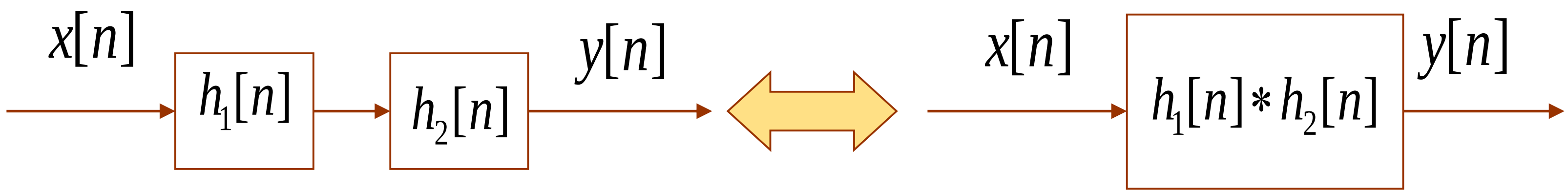
$$x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]+h_2[n])$$



注：并联系统等效系统的冲激响应等于各子系统冲激响应之和

三、The Associative Property （结合律 ）

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$$



注：级联系统等效系统的冲激响应等于各子系统冲激响应的卷积

！ LTI系统级联后的等效冲激响应与级联次序无关

注： 以上结论仅对LTI系统成立

四、LTI Systems with and without Memory（有记忆和无记忆的LTI系统）

1、 $\because y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$

根据无记忆系统的定义，要使y[n]仅与k=n时的x[k]有关，须

当$k\neq n$时，$h[n-k]=0$

∴无记忆LTI系统的单位冲激响应为

$$\boxed{h[n]=k\delta[n]}$$

此时 $y[n]=kx[n]$

当k=1时 $h[n]=\delta[n]$ ——恒等系统

五、Invertibility of LTI Systems（LTI系统的可逆性）

设系统$h(n)$是可逆的，其可逆系统为$h_1(n)$。根据恒等系统的特性知

$$\boxed{h(n)*h_1(n)=\delta(n)}$$

Example：

$$h[n]=u[n] \quad —— \quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

$$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1] \quad —— \quad y[n]=x[n]-x[n-1]$$

显然，$h_1[n]$为$h[n]$的可逆系统

且有 $h[n]*h_1[n]=u[n]-u[n-1]=\delta[n]$

六、Causality for LTI Systems（LTI系统的因果性 ）

1、$\because\ y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$

要使$y[n]$与$k>n$时的$x[k]$无关，须使$k>n$时，$h[n-k]=0$

∴离散的因果LTI系统的h[n]须满足：

$$\boxed{h[n]=0,\quad n<0}$$

2、因果信号

—— $n<0$时，取值为0的信号

即，离散的因果LTI系统的h[n]须为因果信号

七、Stability for LTI Systems（LTI系统的稳定性）

根据稳定性的定义，　当$|x[n]|< B$时

$$|y[n]|=|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]|\le\sum_{k}|h[k]||x[n-k]|\le B\sum_{k}|h[k]|$$

可以证明，要使$|y[n]|$有界，当且仅当

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty}$$

即，离散LTI系统稳定的充要条件是h[n]绝对可和

八、The Unit Step Response of an LTI System （LTI系统的单位阶跃响应 ）

—当输入为$u[n]$时系统的响应，记作$s[n]$

$s[n]=u[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$	$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$
$h[n]=s[n]-s[n-1]$	$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

注：LTI系统的差分特性！

Example:

已知LTI系统，如图

其中 $h_1[n]=\sin 8n \quad h_2[n]=a^n u[n], |a|<1$

$x[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$

求 $y[n]$

Solution:

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$
$$= \{x[n] * h_2[n]\} * h_1[n]$$
$$= \{a^n u[n] - a \cdot a^{n-1} u[n-1]\} * h_1[n]$$
$$= a^n \delta[n] * \sin 8n = \sin 8n$$

关于时域中系统的描述和求解方法:

一、h(t)/h[n]

- $y(t)=x(t)*h(t)\,/\,y[n]=x[n]*h[n]$可求系统的零状态响应
- h(t)/h[n]可“完全”描述一个LTI/LSI系统

二、微分/差分方程

•在已知边界条件下，可用经典法求得系统的完全响应

•微分/差分方程不能完全描述一个LTI/LSI系统，需要一些附加条件

CH1-3习题点评！

(g) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ 是不是因果系统?

1. 用LTI系统因果性的充要条件:

$$h(t) = \delta'(t)$$

$h(t) = \delta'(t) = 0, \ t < 0$ 故系统因果.

2. $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{x(t+\Delta t)} - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

出现$x(t+\Delta t)$未来值, → 系统非因果?

解释:

① 导数可以用 $x(t) - x(t-\Delta t)$计算, 不需要用到$x(t+\Delta t)$

② 既然$x(t)$具有导数, 则左导数和右导数相等, 体现了"导数反映某点变化趋势, 可以预测未来点"的特性.

参考资料:

1 https://dsp.stackexchange.com/questions/58533/is-the-first-derivative-operation-on-a-signal-a-causal-system

2 http://blog.jafma.net/2015/10/04/differentiation-derivative-is-causal-but-not-exactly-realizable/