Chapter 2 CONTINUOUS-TIME LTI SYSTEM

本课程研究在时域、频域及复频域中LTI系统的描述和求解！

本章内容：

一、用微分方程描述并求解LTI系统

二、用 $h(t)$ 描述LTI系统，并用卷积积分求解

注：$h(t)$是信号$\delta(t)$经过LTI系统的输出，称为系统的冲激响应

2.0 INTRODUCTION

2.1 THE DIFFERENTAL EQUATION

2.2 THE CONVOLUTION INTEGRAL

2.3 PROPERTIES OF LTI SYSTEM

Linear Constant-Coefficient Differential Equations（线性常系数微分方程）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$$

- 微分方程描述了系统的输入与输出之间的隐式（implicit expression）
- 微分方程的求解则是寻找输入与输出之间的显式（explicit expression）

注：要求解微分方程或要用微分方程完全表征一个系统，还需要给定一些附加条件！

微分方程的解：

- **齐次解＋特解 / 自由响应＋强迫响应**
- **零输入响应＋零状态响应**
- **暂停响应＋稳态响应**

1、齐次解+特解/自由响应+强迫响应

①齐次解(*homogeneous solution*) $y_h(t)$

设

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = 0$$

解特征方程 $a_N\alpha^N + a_{N-1}\alpha^{N-1} + \cdots + a_1\alpha = 0$

得特征根 α_1、α_2、。。。α_{N}

a. 特征根为单根

$$\boxed{y_h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{\alpha_i t}}$$

b.特征根有重根

设α_1为其k重根，即：$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_k$

其余$(N-k)$个根$\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \cdots \alpha_N$为单根

$$\boxed{y_h(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i t^{k-i} e^{\alpha_i t} + \sum_{j=k+1}^{N} A_j e^{\alpha_j t}}$$

注：待定系数A_i、A_j在完全解求得后由初始状态$\{y^{(k)}(0_+)\}$决定

附：关于边界条件

设外加激励$x(t)$在$t=0$时刻加入

(1) 系统在激励加入前的瞬时状态为“起始状态”或“$0_$状态”

$$\{y^{(k)}(0_-)\}=\{y\ (0_-),y^{(1)}(0_-),y^{(2)}(0_-)\ldots y^{(N-1)}(0_-)\}$$

$$k=0,1\ldots N-1$$

(2) 系统在激励加入后的瞬时状态为“初始状态”或“0_+状态”

$$\{y^{(k)}(0_+)\}=\{y\ (0_+),y^{(1)}(0_+),y^{(2)}(0_+)\ldots y^{(N-1)}(0_+)\}$$

$$k=0,1\ldots N-1$$

注：

- 一般情况下已知的是{0-}状态
- 在激励加入后，受激励的影响，0+状态与0-状态有可能相同，也可能发生跳变
- 对于连续时间系统中如何求解{0-}到{0+}状态的跳变，见相关的参考书

② 特解(*particular solution*) $y_p(t)$

将激励x(t)代入方程右边，并化简。观察化简后的形式，选择相应的特解函数式代入原方程，求其待定系数。

化简式	特解函数式
t^p	$B_1t^p + B_2t^{p-1} + \cdots + B_pt + B_{p+1}$
$e^{\alpha t}$	$Be^{\alpha t}$ (α不是特征根) $B_0te^{\alpha t} + B_1e^{\alpha t}$（$\alpha$是特征单根） $B_0t^ke^{\alpha t} + B_1t^{k-1}e^{\alpha t} + \cdots + B_ke^{\alpha t}$ (α是k重特征根)
$\cos\beta t / \sin\beta t$	$B_1\cos\beta t + B_2\sin\beta t$

③ 完全解(*complete solution*) $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

④ 齐次解也称为自由响应(*natural response*)——由系统的自身特性决定

特解也称为强迫响应(*forced response*)——由外加激励决定

完全响应=自由响应+强迫响应

Example: $$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$x(t)=e^{-t}u(t),\quad y(0_+)=y(0_-)=2$$

Solution:

$$\because \alpha+2=0\rightarrow\alpha=-2$$

$$\therefore y_h(t)=Ae^{-2t}$$

$$\because x(t)=e^{-t},\quad t>0$$

$$\therefore y_p(t)=Be^{-t}\rightarrow y_p{}'(t)=-Be^{-t}$$

代入原方程得

$$-Be^{-t}+2Be^{-t}=e^{-t}\rightarrow B=1$$

$$\therefore\ y(t)=y_h(t)+y_p(t)=Ae^{-2t}+e^{-t}$$

又 $y(0_+)=2\rightarrow A+1=2\rightarrow A=1$

$$\therefore\ y(t)=e^{-2t}+e^{-t},\quad t>0$$

2、零输入响应+零状态响应

①零输入响应(*zero-input response*) $y_{zi}(t)$

——由系统起始状态引起的响应

——解的形式为齐次解

例：特征根为单根

$$y_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{N}A_{zik}e^{\alpha_k(t)}$$

注： 待定系数A_{zik}可直接由起始状态$\{y^{(k)}(0_)\}$确定

②零状态响应*(zero-states response)* $y_{zs}(t)$

——由系统的外加激励引起的响应

——解的形式为齐次解+特解

例：特征根为单根

$$y_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{N}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+y_p(t)$$

注：待定系数A_{zsk}由跳变状态$\{y^{(k)}(0_+)-y^{(k)}(0_-)\}$确定

③完全响应

例：特征根为单根

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

$$=\underbrace{\sum_{k}A_{zik}e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入}}+\underbrace{\sum_{k}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+y_p(t)}_{\text{零状态}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k}A_{k}e^{\alpha_k t}}_{\text{自由}}+\underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫}}$$

即：自由响应=零输入+部分零状态

自由响应的待定系数要在完全解求得后由0+状态决定？

Example：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(0_+) = y(0_-) = 2$$

Solution:

$$a+2=0 \rightarrow a=-2$$

$$\therefore y_{zi}(t)=A_{zi}e^{-2t}$$

$$y(0_-)=2 \rightarrow A_{zi}=2$$

$$\therefore y_{zi}(t)=2e^{-t}$$

$$y_{zs}(t)=A_{zs}e^{-2t}+e^{-t}$$

$$y_{zs}(0_+)=y(0_+)-y(0_-)=0$$

$$\rightarrow A_{zs}=-1$$

$$\therefore y_{zs}(t)=-e^{-2t}+e^{-t}$$

$$y(t)=2e^{-2t}+(-e^{-2t}+e^{-t})$$

$$=e^{-2t}+e^{-t}$$

Exercise :

已知：描述LTI系统的微分方程如下

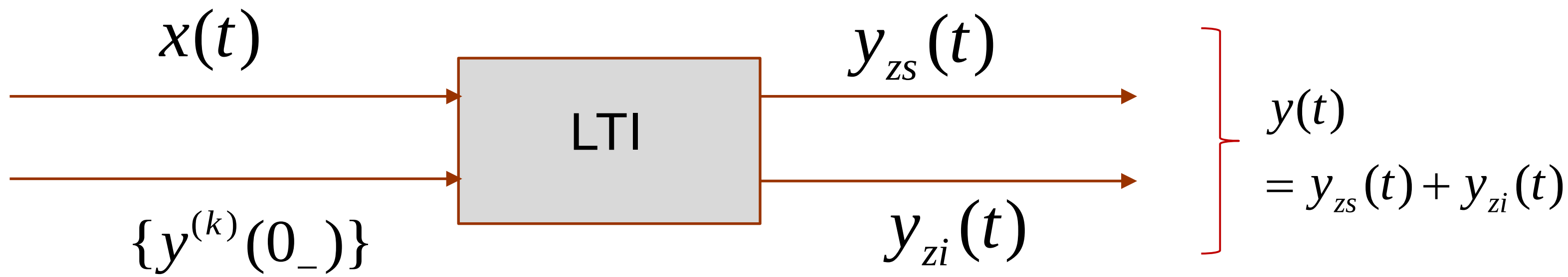
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

$$x(t)=e^{-t}u(t) \quad y(0_-)=0 \quad y'(0_-)=3$$

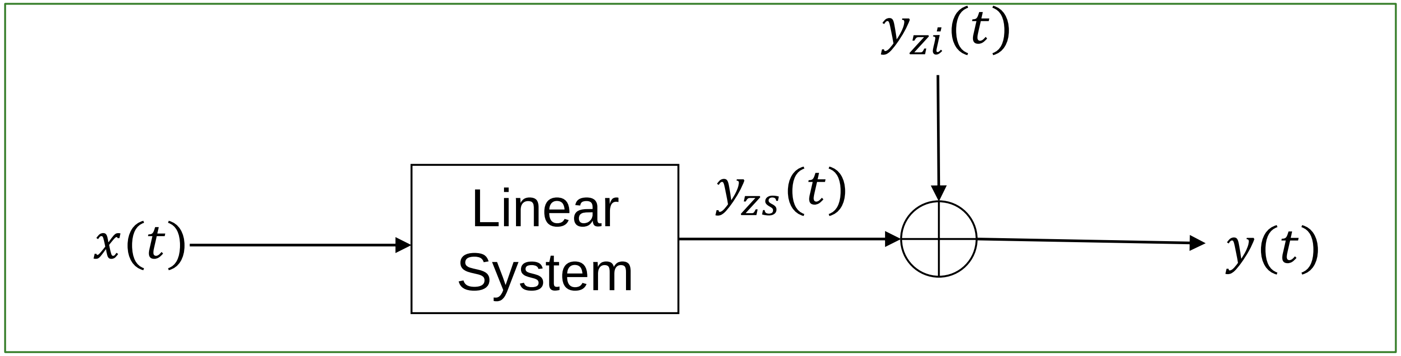
$$\text{且 } y_{zs}(0_+)=0 \quad y_{zs}'(0_+)=1$$

求：系统的完全响应，并指出零输入响应、零状态响应以及自由响应和强迫响应

提示：系统的特征根为-1,-2，而外加激励为$x(t)=e^{-t}u(t)$



注：起始状态不为零时，系统的完全响应$y(t)$与外加激励x（t）之间**不**呈线性关系！



增量线性系统

④ 零输入线性和零状态线性

系统的零状态响应对各激励信号呈线性——**零状态线性**

系统的零输入响应对各起始状态呈线性——**零输入线性**

Example: $$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(1) $y(0\_)=2 \quad x(t)=e^{-t}$

$$y_{zi}(t)=2e^{-t} \qquad y_{zs}(t)=-e^{-2t}+e^{-t} \qquad y(t)=e^{-2t}+e^{-t}$$

(2) $y(0\_)=2 \quad \underline{x(t)=3e^{-t}}$

$$y_{zi}(t)=2e^{-2t} \qquad \underline{y_{zs}(t)=3(-e^{-2t}+e^{-t})} \qquad y(t)=-e^{-2t}+3e^{-t}$$

(3) $\underline{y(0\_)=6} \quad x(t)=e^{-t}$

$$\underline{y_{zi}(t)=3\times 2e^{-2t}} \qquad y_{zs}(t)=-e^{-2t}+e^{-t} \qquad y(t)=5e^{-2t}+e^{-t}$$

Example：

LTI系统，外加激励为$x(t)$，且$t<0$时$x(t)=0$。在相同的系统起始条件下，激励为$x(t)$时，系统全响应为$y_1(t)=2e^{-t}+\cos 2t$，$t>0$；激励为$2x(t)$时，系统全响应为$y_2(t)=e^{-t}+2\cos 2t, t>0$。求在相同起始条件下，激励为$4x(t)$时系统的完全响应$y(t)$

Souliton:

$$\because \begin{cases} y_1(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = 2e^{-t} + \cos 2t \\ y_2(t) = y_{zi}(t) + 2y_{zs}(t) = e^{-t} + 2\cos 2t \end{cases}$$

$$y_{zs}(t) = -e^{-t} + \cos 2t$$

$$y_{zi}(t) = 3e^{-t}$$

$$\therefore y(t) = y_{zi}(t) + 4y_{zs}(t) = -e^{-t} + 4\cos 2t$$

3、暂态响应+稳态响应

$t \to \infty$ 时，响应中趋于0的部分——暂态响应

$t \to \infty$ 时，响应中仍存在下的部分——稳态响应

例：

$$y(t) = \underbrace{-e^{-t}}_{暂态} + \underbrace{4\cos 2t}_{稳态}$$

零输入响应的求解

——经典法：求齐次解

零状态响应的求解

——经典法：求齐次解和特解

——*时域卷积法*

例： $y(t) = x(t) * h(t)$

——*变换域乘法*

例： $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$ $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$

零状态响应对外加激励呈线性！

2.0 INTRODUCTION

2.1 THE DIFFERENTAL EQUATION

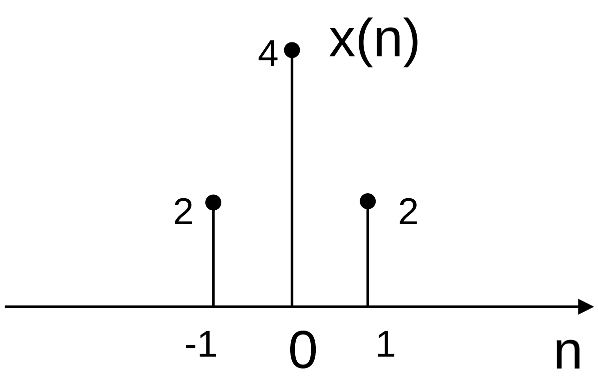
2.2 THE CONVOLUTION INTEGRAL

2.3 PROPERTIES OF LTI SYSTEM

Linear Time-Invariant System !

根据LTI系统的叠加性质，将输入信号表示成一组基本信号的线性组合，则输出等于这组基本信号输出的线性组合！

Example:



$$x[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1]$$

$$if \;\; \delta[n] \to h[n]$$

$$then \;\; x[n] \to y[n] = 2h[n+1] + 4h[n] + 2h[n-1]$$

$\delta[n]$ —— （离散时间）系统时域分析的基本信号

$\delta(t)$ ——（连续时间）系统时域分析的基本信号

基本信号应满足：

① 能构成相当广泛的一类有用信号 /相当广泛的一类有用信号可用该基本信号的“线性组合”表示

② LTI系统对该基本信号的响应应十分简单，且系统对任意输入 信号的响应可用该基本信号的响应很方便的表示

一、The Convolution Integral Representation of LTI System
（连续时间LTI系统的卷积积分表示）

设 $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 \le t \le \Delta \\ 0 & \text{其余}t \end{cases}$ $\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$

则 $x(t) = \lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

权值 $x(\tau)d\tau$ 基本信号 $\delta(t-\tau)$

注：x(t)可表示成基本信号 $\delta(t)$ 的加权求和

设 $\delta(t) \to h(t)$ ——单位冲激响应(unit impulse respones)

根据时不变性 $\delta(t-\tau) \to h(t-\tau)$

又 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

根据线性 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

卷积积分
(Convolution Integral)

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)}$$

注：利用基本信号的输出h(t)求任意信号x(t)的输出

✓ **LTI系统的输出等于输入与系统单位冲激响应的卷积**

注：卷积积分求解的是系统的零状态响应！

二、卷积积分的计算

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x_2(\tau)\cdot x_1(t-\tau)d\tau$$

图解法！

1) 将t变为$\boldsymbol{\tau}$—$\boldsymbol{\tau}$为自变量，t为参变量

2）反折、平移—平移量为t，t表示任意时刻

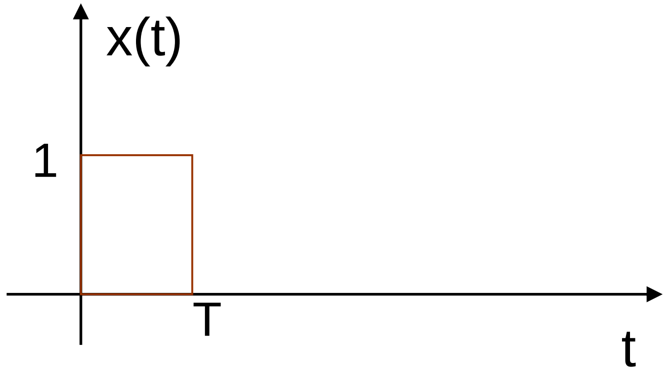
3）相乘求积分—确定积分的上、下限

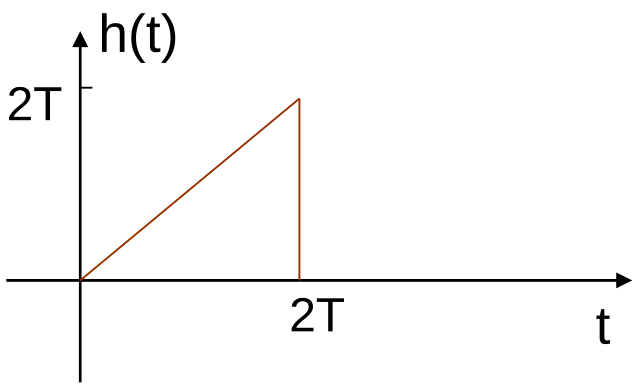
Example:

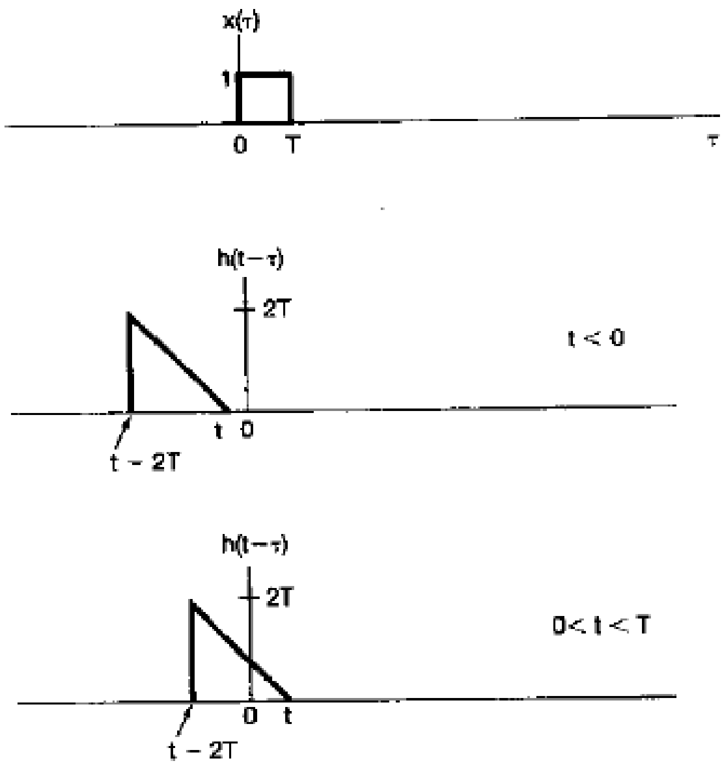
Let $x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & others\end{cases}$

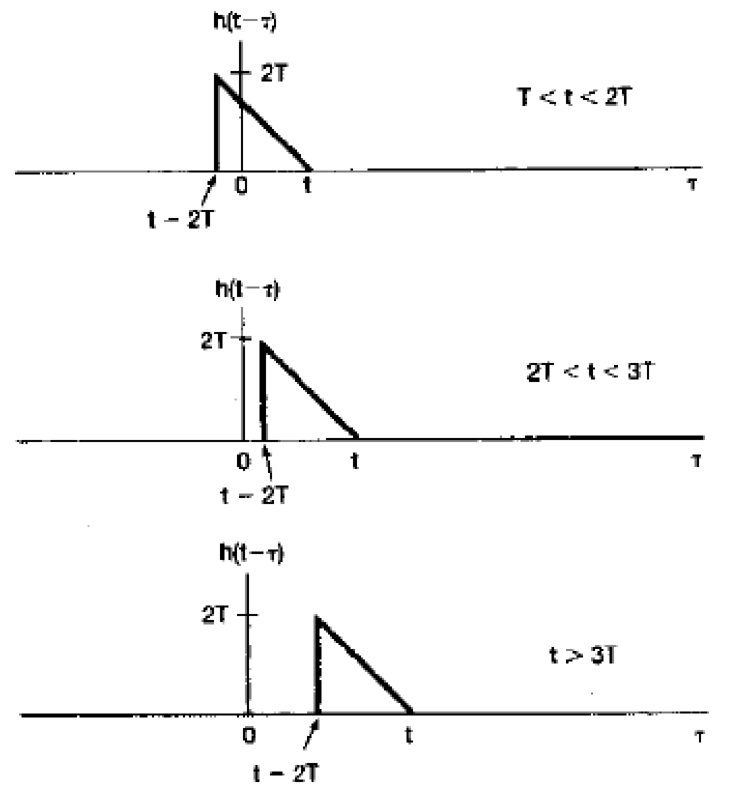
$h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & others\end{cases}$

Determine： $y(t)=x(t)*h(t)$









图片来源 《信号与系统》刘树棠

图 2.19 例 2.7 中信号 $x(\tau)$和不同 t 值时的 $h(t-\tau)$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(1) $t<0$

$$y(t)=0$$

(2) $0<t<T$

$$y(t)=\int_0^t 1\cdot(t-\tau)d\tau=\frac{t^2}{2}$$

(3) $\begin{cases} t>T \\ t-2T<0 \end{cases} \Rightarrow T<t<2T$

$$y(t)=\int_0^T 1\cdot(t-\tau)d\tau=tT-\frac{T^2}{2}$$

(4) $\begin{cases} t-2T>0 \\ t-2T<T \end{cases} \Rightarrow 2T<t<3T$

$$y(t)=\int_{t-2T}^T 1\cdot(t-\tau)d\tau$$

$$=-\frac{t^2}{2}+tT+\frac{3T^2}{2}$$

(5) $t-2T>T \Rightarrow t>3T$

$$y(t)=0$$

Exercise: 用 $y(t)=x(t)*h(t)=\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ 重做此题

三、卷积积分的性质

1.代数性质

- 交换律

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

- 分配律

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

- 结合律

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$$

2. 尺度变换性质

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

$$\boxed{|a| y(\frac{t}{a}) = x_1(\frac{t}{a}) * x_2(\frac{t}{a})}$$

Proof:

$$x_1(\frac{t}{a}) * x_2(\frac{t}{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\frac{\tau}{a}) \cdot x_2(\frac{t-\tau}{a}) d\tau$$

$$\underline{\underline{\text{令}\ \frac{\tau}{a} = \tau'}} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau') \cdot x_2(\frac{t}{a} - \tau') |a| \, d\tau'$$

$$= |a| \, y(\frac{t}{a})$$

3. 平移性质

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t-t_1-t_2) &= x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2) \\ &= x_1(t-t_2)*x_2(t-t_1) \end{aligned}}$$

Proof:

$$x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau-t_1)\cdot x_2(t-\tau-t_2)d\tau$$

$$\underline{\underline{令\tau-t_1=\tau'}}\ =\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau')\cdot x_2[t-(t_1+\tau')-t_2]d\tau'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau')\cdot x_2[t-t_1-t_2-\tau']d\tau'$$

$$==\ y(t-t_1-t_2)$$

4. 微积分性质

若 $y(t)=x_1(t)*x_2(t)$ 则

$$y^{(i)}(t)=x_1^{(j)}(t)*x_2^{(i-j)}(t)$$

其中，i、j取正整数时表示微分的阶次，取负整数时表示（重）积分的阶次。

当i=0，j=1时

$$y(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)*\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau$$

当i=1，j=0时

$$\frac{d}{dt}y(t)=x_1(t)*\frac{d}{dt}x_2(t)$$

利用微积分性质求解卷积积分！

——常借助冲击函数的卷积性质！

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$x(t)*\delta^{'}(t)=\frac{dx(t)}{dt}*\delta(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau*\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

注：以上表示信号x(t)经过恒等系统、延迟系统以及微分器和积分器的输出!

Example:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$
$$x_1(t) = 2[u(t-1) - u(t-3)]$$
$$x_2(t) = [u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)]$$

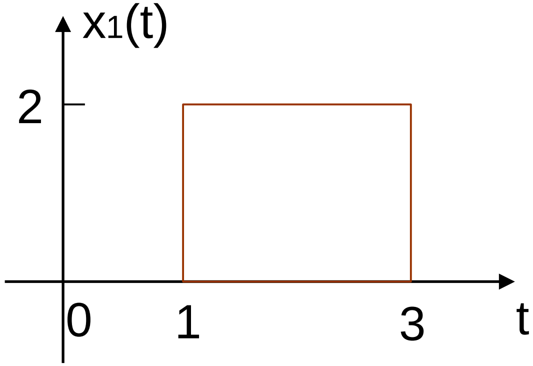
Solution1:

$$y(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau$$
$$= [2\delta(t-1) - 2\delta(t-3)] * [tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)]$$
$$= 2(t-1)u(t-1) - 4(t-2)u(t-2) + 4(t-4)u(t-4) - 2(t-5)u(t-5)$$

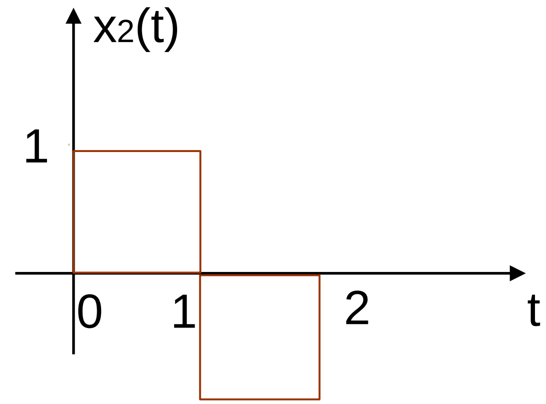
注：$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\boldsymbol{\tau} = \int_{0}^{t} d\boldsymbol{\tau} = tu(t)$

Solution2: 借助图形！

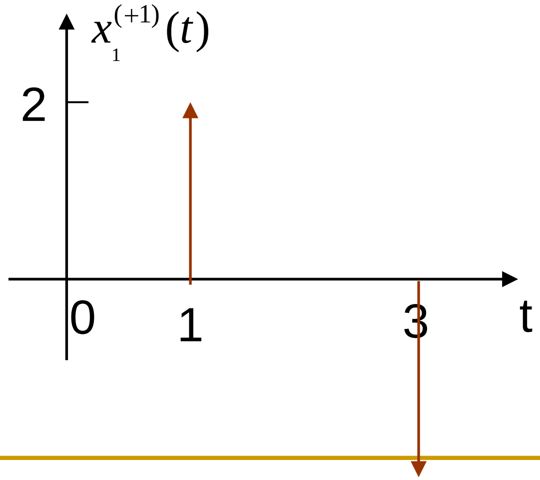
$x_1(t) = 2[u(t-1) - u(t-3)]$



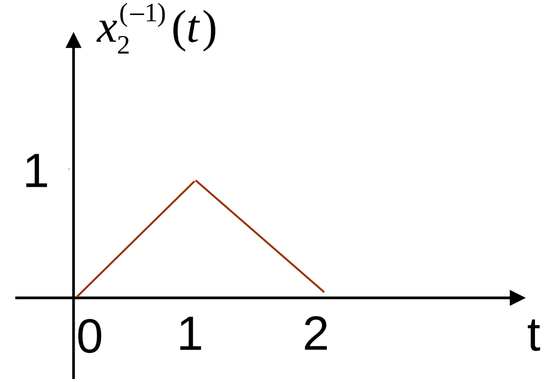
$x_2(t) = [u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)]$



$x_1^{'}(t) = 2\delta(t-1) - 2\delta(t-3)$



$\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau = t[u(t) - u(t-1)] + (2-t)[u(t-1) - u(t-2)]$

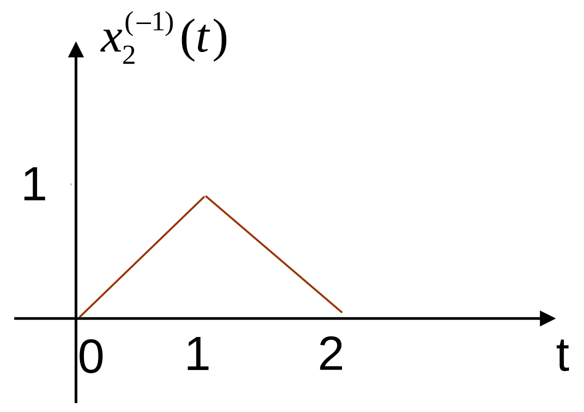


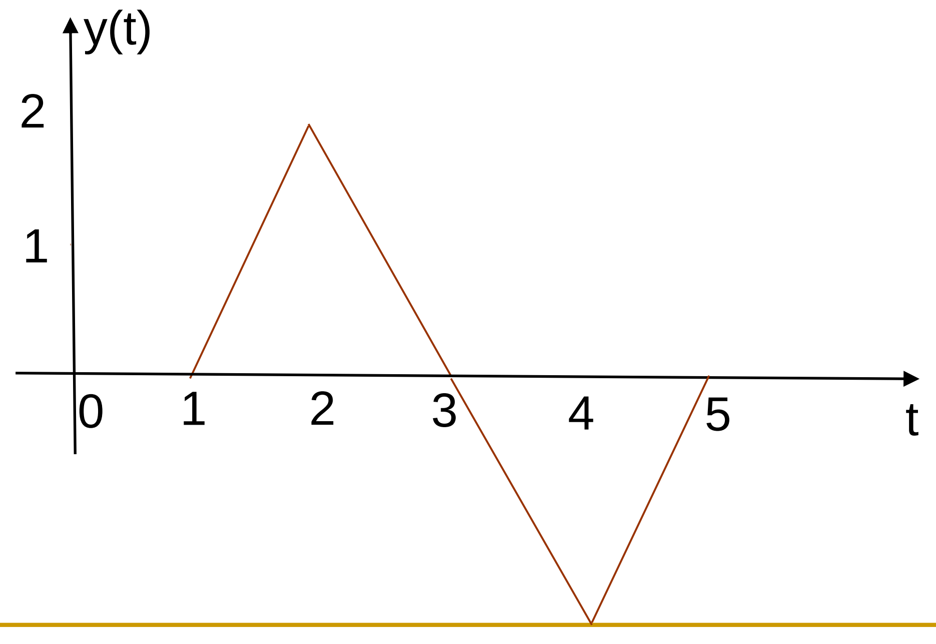
$$y(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau$$

$$= x_1^{(+1)}(t) * x_2^{(-1)}(t)$$

$$= [2\delta(t-1) - 2\delta(t-3)] * x_2^{(-1)}(t)$$

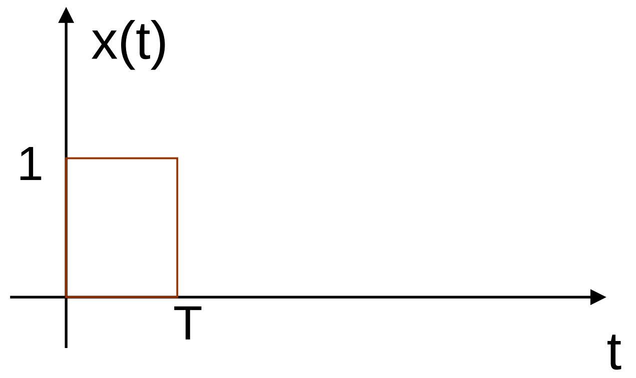
$$= 2x_2^{(-1)}(t-1) - 2x_2^{(-1)}(t-3)$$



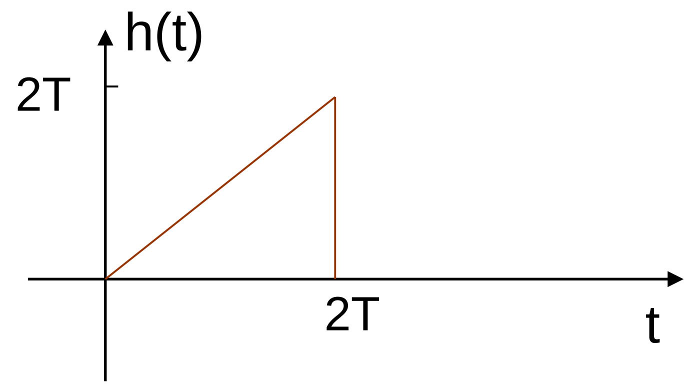


Example:

Let $x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & others\end{cases}$



$h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & others\end{cases}$



Determine $y(t)=x(t)*h(t)$

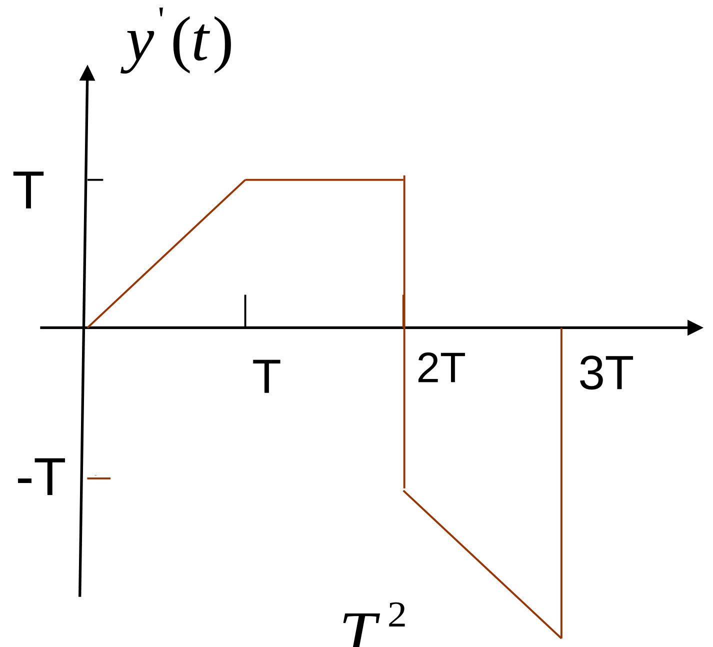
$$y'(t) = x'(t) * h(t) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{t} y'(\tau) d\tau$$

$$\because x'(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$$

$$\therefore y'(t) = x'(t) * h(t) = h(t) - h(t-T)$$

$$= \begin{cases} t & 0 \le t < T \\ T & T \le t < 2T \\ T-t & 2T \le t < 3T \\ 0 & others \end{cases}$$

注： $y(t)=\int_{-\infty}^{t} y^{'}(\tau)d\tau$



$$while \quad 0 \le t < T$$

$$y(t)=\int_{0}^{t} \tau d\tau=\frac{t^2}{2}$$

$$while \quad T \le t < 2T$$

$$y(t)=\int_{0}^{T} \tau d\tau+\int_{T}^{t} Td\tau=\frac{T^2}{2}+T(t-T)=Tt-\frac{T^2}{2}$$

$$while \quad 2T \le t < 3T$$

$$y(t)=\int_{0}^{T} \tau d\tau+\int_{T}^{2T} Td\tau+\int_{2T}^{t}(T-\tau)d\tau=-\frac{t^2}{2}+Tt+\frac{3T^2}{2}$$

$$others \quad y(t)=0$$

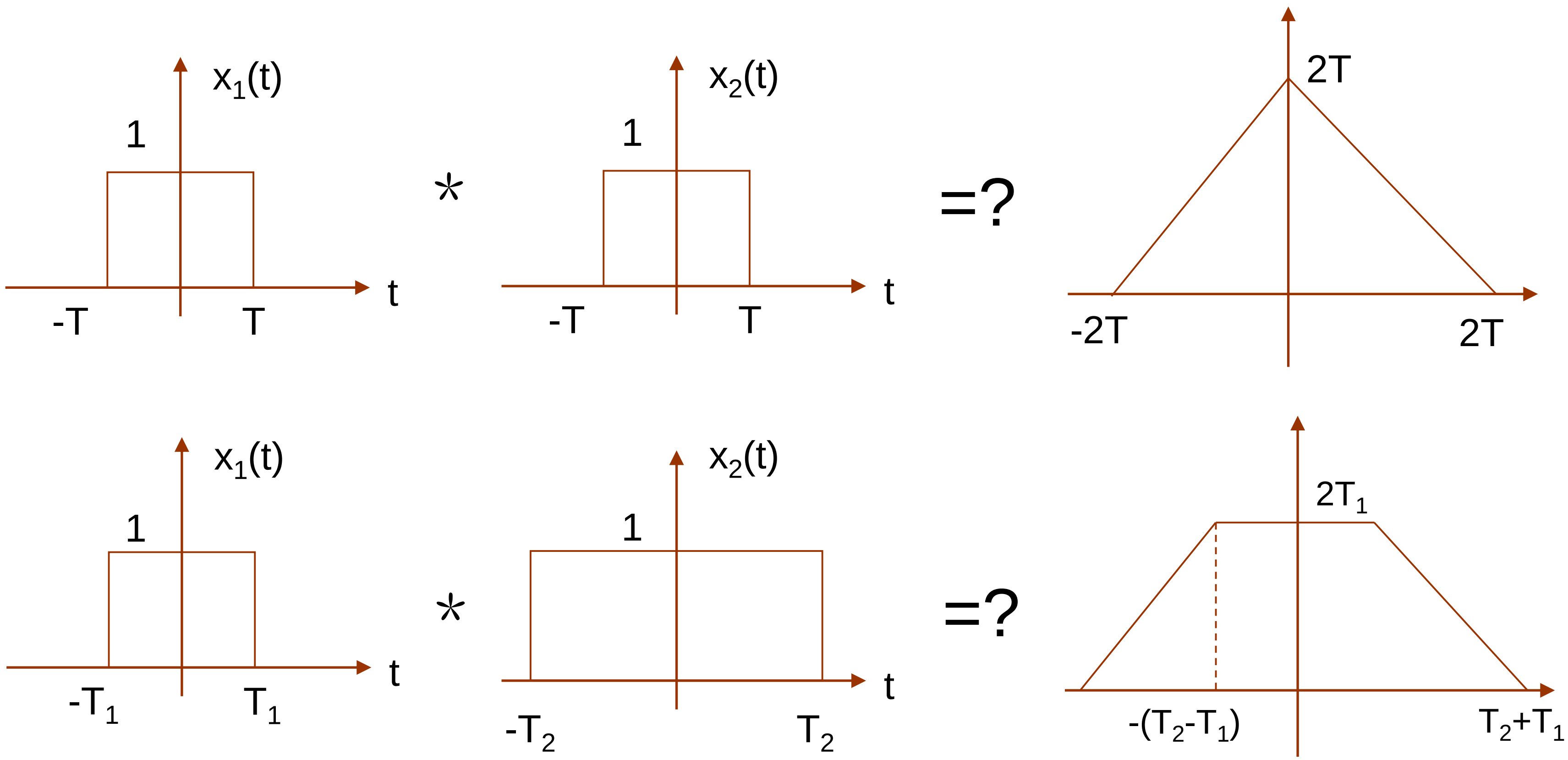
注：在卷积运算中，图解法是基本的方法，其它方法是否采用要因题而议（通常微积分法都要需借助与冲激函数的卷积）！

Exercise: Compute the convolution $y(t) = x(t) * h(t)$

$$x(t) = e^{2t}u(-t)$$
$$h(t) = u(t-3)$$

借助图形！

Exercise:



重要结论！

- ✓ **LTI系统的输出等于输入与系统单位冲激响应的卷积**

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

注：x(t)为外加激励，y(t)为零状态响应，h(t)为系统的单位冲激响应

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h(t)$$

- ✓ **LTI系统可“完全”由其单位冲激响应描述**

Example:

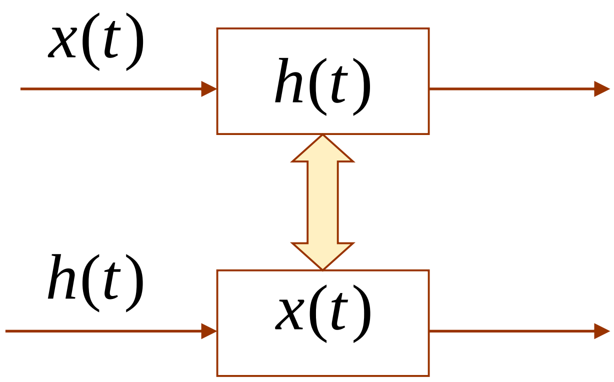
$$y(t)=x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)\quad\rightarrow h(t)=\delta(t-t_0)$$ —延迟器

$$y(t)=x(t)*\delta'(t)=\frac{dx(t)}{dt}*\delta(t)=\frac{dx(t)}{dt}\quad\rightarrow h(t)=\delta'(t)$$ —微分器

当用h(t)描述时，LTI系统的性质？

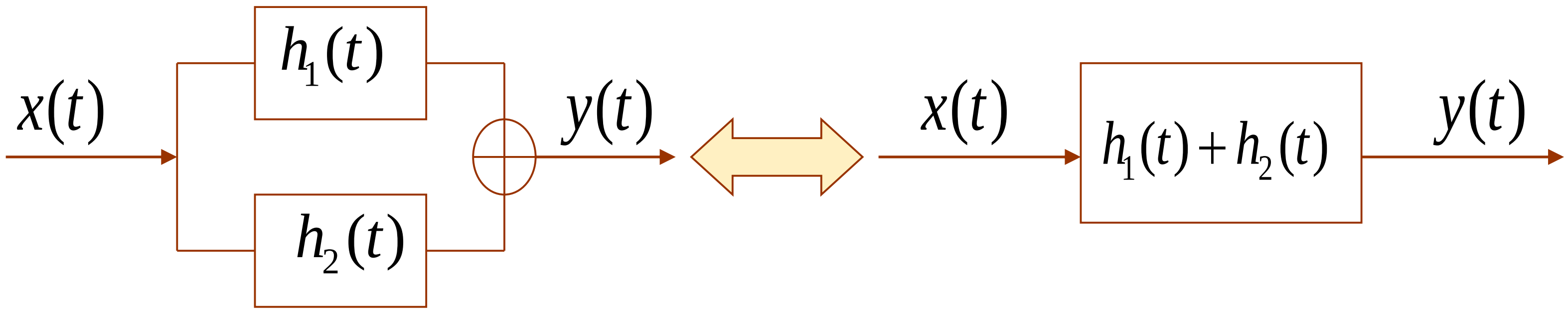
一、The Commutative Property（交换律 ）

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



二、The Distributive Property（分配律 ）

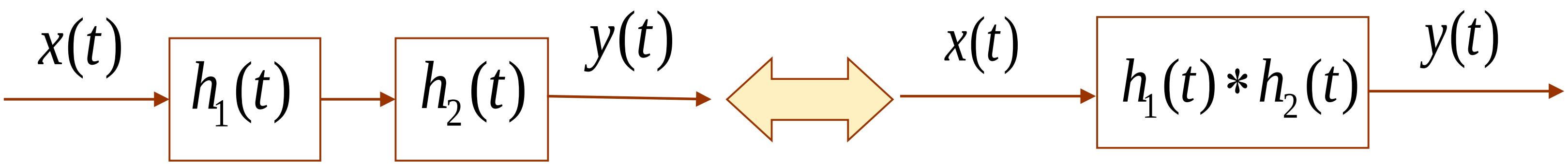
$$x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$



注：并联系统等效系统的冲激响应等于各子系统冲激响应之和

三、The Associative Property （结合律 ）

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

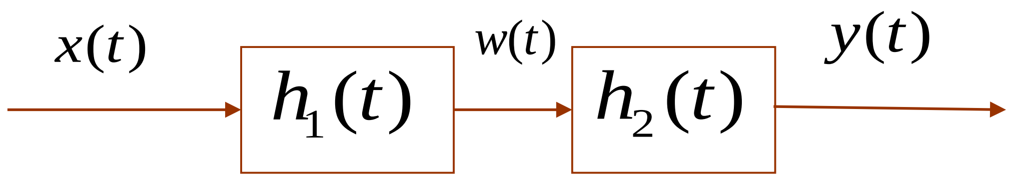


注：级联系统等效系统的冲激响应等于各子系统冲激响应的卷积

！ LTI系统级联后的等效冲激响应与级联次序无关

注：以上结论仅对LTI系统成立

Example:



$$w(t) = 2x(t) \quad y(t) = w^2(t) = 4x(t)$$

若交换$h_1(t)$和$h_2(t)$的次序，则

$$w(t) = x^2(t) \quad y(t) = 2w(t) = 2x^2(t)$$

四、LTI Systems with and without Memory（有记忆和无记忆的LTI系统）

1、 $\because y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

根据无记忆系统的定义，

要使$y(t)$仅与$\tau = t$时刻的$x(\tau)$有关，须

当$\tau \neq t$时，$h(t-\tau) = 0$

$\therefore$无记忆LTI系统的单位冲激响应为

$$\boxed{h(t) = k\delta(t)}$$

此时 $y(t) = kx(t)$

当k=1时 $h(t) = \delta(t)$ ——恒等系统

五、Invertibility of LTI Systems（LTI系统的可逆性）

设系统$h(t)$是可逆的, 其可逆系统为$h_1(t)$，根据恒等系统的特性

$$\boxed{h(t)*h_1(t)=\delta(t)}$$

Example:：

$h(t)=\delta(t-t_0)$ 则 $y(t)=x(t-t_0)$

$h_1(t)=\delta(t+t_0)$ 则 $y(t)=x(t+t_0)$

显然，$h_1(t)$为$h(t)$的可逆系统

且有 $h(t)*h_1(t)=\delta(t-t_0)*\delta(t+t_0)=\delta(t)$

六、Causality for LTI Systems（LTI系统的因果性 ）

1、 $\because y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

要使$y(t)$与$\tau > t$时的$x(\tau)$无关，须使$\tau > t$时，$h(t-\tau)=0$

∴连续的因果LTI系统的h(t)须满足：

$$\boxed{h(t) = 0, \quad t < 0}$$

2、因果信号

—— $t < 0$时，取值为0的信号

即，连续的因果LTI系统的h(t)须为因果信号

另，

- **初始松弛（initial rest）条件：**若$t < t_0$时输入为0，则对应的输出在$t < t_0$时也为0
- 对LTI系统，因果性等效于初始松弛条件

七、Stability for LTI Systems（ LTI系统的稳定性 ）

根据稳定性的定义， 当$|x(t)|< B$时

$$\left|y(t)\right| = \left|\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \le \int \left|x(\tau)\right|\left|h(t-\tau)\right|d\tau \le B\int \left|h(t-\tau)\right|d\tau$$

可以证明，要使$|y(t)|$有界，当且仅当

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty}$$

即，连续LTI系统稳定的充要条件是h(t)绝对可积

Example: $$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$\because h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|u(\tau)|d\tau=\int_{0}^{\infty}d\tau=\infty$$

$\therefore$ 系统因果，非稳定

八、The Unit Step Response of an LTI System （LTI系统的单位阶跃响应 ）

当输入为$u(t)$时，系统的响应记作$s(t)$，称为单位阶跃响应

$s(t)=u(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$	$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$
$h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$	$\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$

注：LTI系统的微积分特性！

Example:

已知LTI系统，$x(t)=e^{-5t}u(t)$时，$y(t)=\sin\omega_0 t$，

求系统的冲激响应$h(t)$

Solution:

$$\because x(t)=e^{-5t}u(t)\rightarrow y(t)=\sin\omega_0 t$$

$$\therefore \frac{dx(t)}{dt}=-5e^{-5t}u(t)+\delta(t)\rightarrow\frac{dy(t)}{dt}=\omega_0\cos\omega_0 t$$

又 $-5e^{-5t}u(t)+\delta(t)\rightarrow -5\sin\omega_0 t+h(t)$

$$\therefore \omega_0\cos\omega_0 t=-5\sin\omega_0 t+h(t)$$

则 $h(t)=\omega_0\cos\omega_0 t+5\sin\omega_0 t$

CH2-Summary !