

Chapter 9 The Laplace Transform

9.1 DEFINATION OF THE LAPLACE TRANSFORM

9.2 THE REGION OF CONVERGENCE FOR LAPLACE THANSFORMS

9.3 PROPERTIES OF THE LAPLACE TRANSFORM

9.4 THE INVERSE LAPLACE TRANSFORM

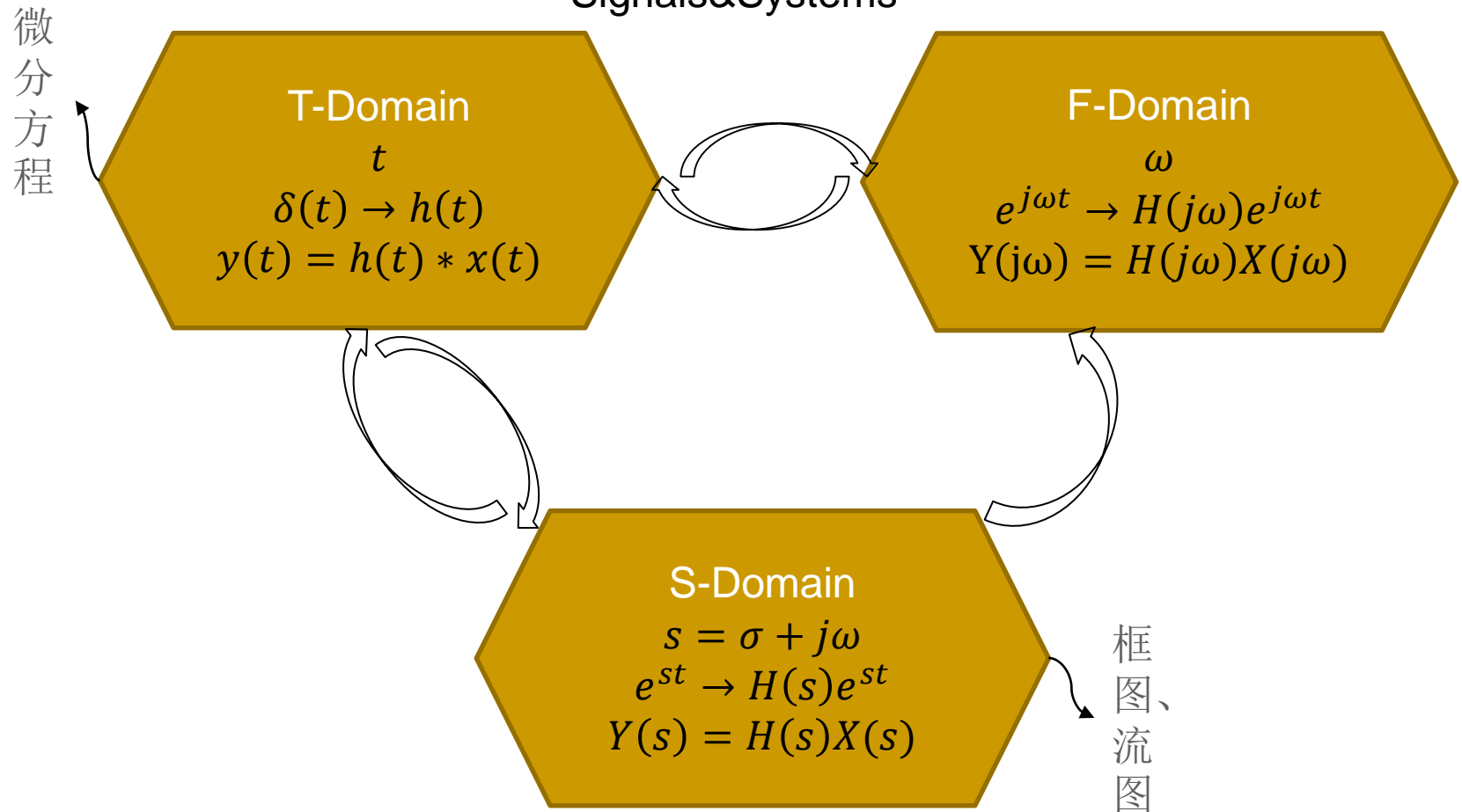
9.5 UNILATERAL LAPLACE TRANSFORM

9.6 ANALYSIS OF LTI SYSTEMS USING LAPLACE TRANSFORM

- **System Function of LTI System**
- **System Function and Differential Equation , Causality and Stability , Properties in Time-Domain and Frequency-Domain, Block Diagram**

C-T

Signals&Systems



9.1 DEFINATION OF THE LAPLACE TRANSFORM

9.2 THE REGION OF CONVERGENCE FOR LAPLACE THANSFORMS

9.3 PROPERTIES OF THE LAPLACE TRANSFORM

9.4 THE INVERSE LAPLACE TRANSFORM

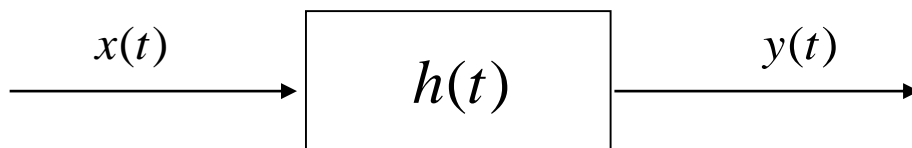
9.5 UNILATERAL LAPLACE TRANSFORM

9.6 ANALYSIS OF LTI SYSTEMS USING LAPLACE TRANSFORM

- **System Function of LTI System**
- **System Function and Differential Equation , Causality and Stability , Properties in Time-Domain and Frequency-Domain, Block Diagram**

■ System function of LTI system

1. 定义



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad y(t) \leftrightarrow Y(s)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

——— 系统函数
(System Function)

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad / \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

2. $H(s)$ 可完全描述一个系统

3. 物理意义

作为基本信号 e^{st} 应满足

(1)相当广泛的一类信号可用 e^{st} 的“线性组合”表示

(2)系统对 e^{st} 的响应形式简单，且任意信号的响应，可用 e^{st} 的响应的“线性组合”表示

Signal and System

Consider input : $x(t) = e^{st}$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= H(s) \cdot e^{st} \end{aligned}$$

$\therefore e^{st}$ 经过 *LTI* 系统的输出仍是 e^{st} 的形式，只是幅度、相位发生改变。
改变量取决于 $H(s)$ 。

此时， e^{st} 称为特征函数(*eigenfunction*)， $H(s)$ 为特征值(*eigenvalue*)。

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}, \quad -\infty < t < \infty \\ \rightarrow y(t) &= e^{\alpha t} \cdot H(s) \Big|_{s=\alpha} \end{aligned}$$

Signal and System

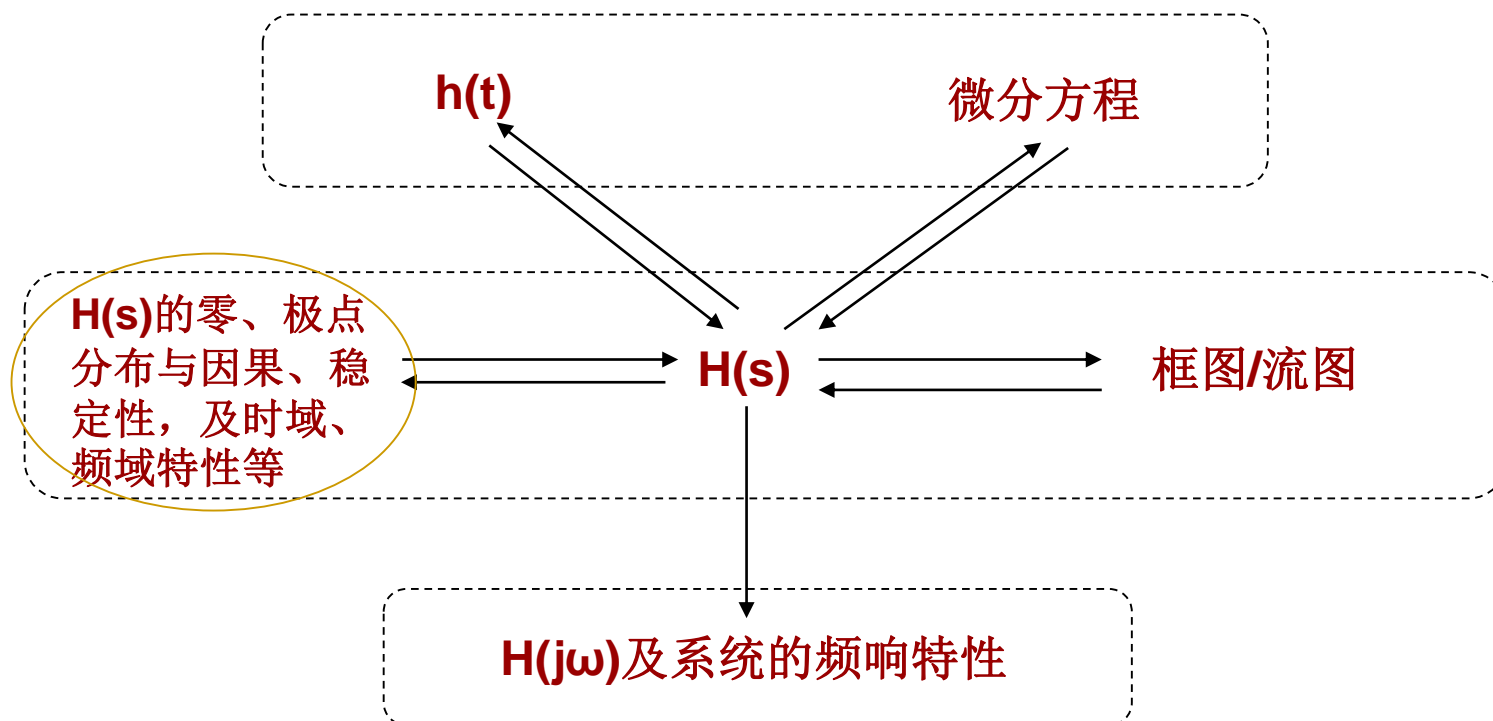
Consider any input: $x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \sum_k a_k [h(t) * e^{s_k t}] \\ &= \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} \end{aligned}$$

$H(s)$ 给出了任意复频率分量经过LTI系统后幅度、相位的改变量。

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{x(t)} & \boxed{h(t) \leftrightarrow H(s)} & \xrightarrow{y(t)} \\ = \frac{1}{2\pi j} \int X(s) \underline{e^{st}} ds & & = \frac{1}{2\pi j} \int X(s) \underline{H(s) e^{st}} ds \end{array}$$

围绕LTI系统描述和求解方法 —— 微分方程、 $h(t)$ 、 $H(j\omega)$ 、 $H(s)$ 、框图/流图，介绍S域分析！



■ System Function vs Differential Equation

Example: 已知微分方程，求系统函数

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{d}{dt} y(t) - 6y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + x(t)$$

对方程两边作拉普拉斯变换

$$s^2 Y(s) + sY(s) - 6Y(s) = sX(s) + X(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s^2 + s - 6}$$

注：以上根据微分方程只求得H(s)的代数表达式，但没有确定ROC。所以微分方程本身不能完全表征LTI系统，必须加上其他的限制条件，例如因果性、稳定性等。

Example:

已知LTI系统

$x(t) = e^{-3t}u(t)$ 时, 系统的零状态响应为 $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

求系统的 $H(s)$ 及微分方程。

Solution:

$$\therefore X(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{Re}[s] > -3$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{Re}[s] > -1$$

注：
H(s)收敛域的
确定！

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$\text{Re}[s] > -1$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 3x(t)$$

Example: LTI系统, 在 $x_1(t), x_2(t)$ 的作用下, 系统的初始条件相同,

当 $x_1(t) = \delta(t)$ 时, 系统的全响应 $y_1(t) = 3e^{-2t}u(t)$

当 $x_2(t) = u(t)$ 时, 系统的全响应 $y_2(t) = 2e^{-t}u(t)$

求系统的 $h(t)$ 及微分方程。

Being

$$y_1(t) = 3e^{-2t}u(t) \leftrightarrow Y_{zi}(s) + H(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$y_2(t) = 2e^{-t}u(t) \leftrightarrow Y_{zi}(s) + G(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$\text{And } G(s) = \frac{1}{s}H(s) \quad \text{Then} \quad \left(1 - \frac{1}{s}\right)H(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

$$\therefore H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \quad \Re[s] > -1$$

$$\Rightarrow h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$



Example:

已知：LTI系统，初始条件为0

1. $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$ 时, $y(t) = \delta(t) + ae^{-\frac{t}{4}}u(t)$
2. 对所有的t, $x(t) = e^{-2t}$ 时, $y(t) = 0$

求：1) 常数a的值及系统的微分方程

- 2) $x(t) = e^{-\frac{t}{4}}u(t)$ 时系统的输出y(t)

$$1) \quad \because X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \text{ 时, } Y(s) = 1 + \frac{a}{s + \frac{1}{4}}$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + (\frac{3}{4} + a)s + (\frac{a}{2} + \frac{1}{8})}{s + \frac{1}{4}}$$

$$\text{又 当 } x(t) = e^{-2t} \text{ 时, } y(t) = e^{-2t} H(s) \Big|_{s=-2} = 0$$

则必有 $H(-2)=0$, 代入得 $a=7/4$

2) 初始条件为0, $\therefore Y(s) = H(s)X(s)$

$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{5}{2}s + 1}{s + \frac{1}{4}} \quad X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{4}}$$

$$\therefore Y(s) = H(s)X(s) = \dots = 1 + \frac{K_1}{(s + \frac{1}{4})^2} + \frac{K_2}{s + \frac{1}{4}}$$

$$K_1 = \frac{7}{16} \quad K_2 = 2$$

$$\therefore y(t) = \delta(t) + \frac{7}{16}te^{-\frac{t}{4}}u(t) + 2e^{-\frac{t}{4}}u(t)$$

■ System Function vs Causality and Stability

- Causality

1. 定义——对任意系统
2. $t < 0$ 时, $h(t) = 0$ ——对LTI系统
3. 具有有理系统函数 $H(s)$ 的LTI系统, 其因果性

$\Leftrightarrow H(s)$ 的ROC位于最右边极点的右边

For a system with a rational system function, causality of the system is equivalent the ROC being the right-half plane to the right of the rightmost pole.

注: 如果 $H(s)$ 不是有理的, 上述等效关系不一定成立。

例:
$$H(s) = \frac{e^s}{s+1} \quad \Re\{s\} > -1$$

- **Stability**

1. 定义——对任意系统

2. $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ ——对LTI系统

3. LTI系统的稳定性 \Leftrightarrow 系统函数 $H(s)$ 的ROC包括 $j\omega$ 轴

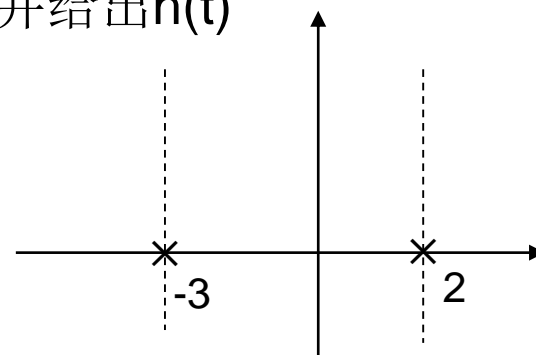
An LTI system is stable if and only if the ROC of the system function $H(s)$ includes the entire $j\omega$ -axis

Example:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}, \text{ 讨论其因果、稳定性, 并给出 } h(t)$$

$$\therefore H(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{\frac{3}{5}}{(s-2)} + \frac{\frac{2}{5}}{s+3}$$

\therefore 可能的ROC有三种



(1) ROC为 $\text{Re}[s] > 2$ 因果, 非稳定 $h(t) = (\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t})u(t)$

(2) ROC为 $-3 < \text{Re}[s] < 2$ 非因果, 稳定 $h(t) = -\frac{3}{5}e^{2t}u(-t) + \frac{2}{5}e^{-3t}u(t)$

(3) ROC为 $\text{Re}[s] < -3$ 非因果, 非稳定 $h(t) = -(\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t})u(-t)$

- **Causality & Stability**

具有有理系统函数 $H(s)$ 的因果系统，其稳定的的充要条件是 $H(s)$ 的全部极点位于 s 的左半（开）平面

A causal system with rational system function $H(s)$ is stable if and only if all the poles of $H(s)$ lie in the left-half of the s -plane

Example:

若 $h(t)$ 的拉氏变换为有理系统函数 $H(s)$ ，其所表示的LTI系统因果且稳定，则

$\frac{dh(t)}{dt}$ 表示的系统是因果和稳定的吗？ $\int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$ 呢？

Example:

LTI系统, 已知

(1) 系统是因果

(2) 系统函数是有理真分式, 且仅有两个极点 $s=-2, s=4$

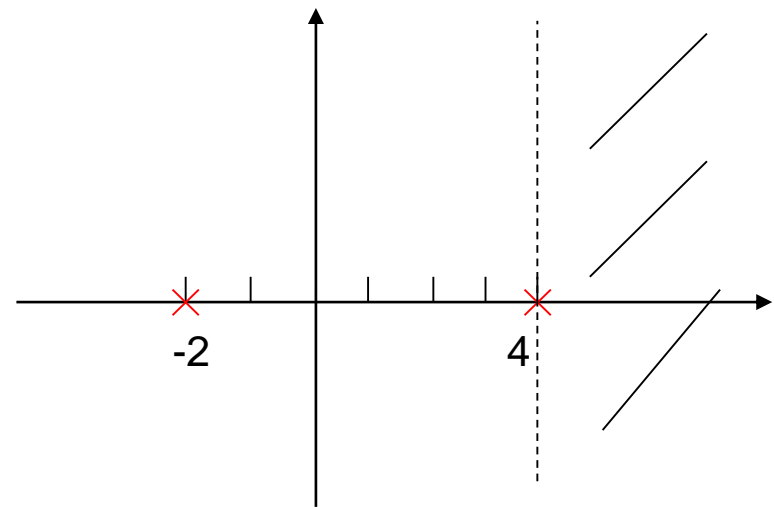
(3) 对所有的 t , 当 $x(t)=1$ 时, 有 $y(t)=0$

(4) $h(0_+) = 4$

求系统函数 $H(s)$

由(1),(2)知, $H(s)$ 的ROC如图。

系统因果, 非稳定



又 $H(s)$ 是有理的，所以设

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)} = \frac{p(s)}{s^2 - 2s - 8}$$

由(3)知， $x(t) = 1 = e^{0 \cdot t}$ 时， $y(t) = e^{0 \cdot t} \cdot H(s)|_{s=0} = H(0) = 0$

$\because H(0) = 0 \quad \therefore H(s)$ 必有一零点在 $s=0$ 处，即 $p(s)=s \cdot q(s)$

根据初值定理，由(4)知

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 \cdot q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4$$

上述极限：

分子的最高阶次高于分母时，发散

分子的最高阶次低于分母时， $h(0_+) = 0$

分子的最高阶次等于分母时， $h(0_+) = \text{非零值} \Rightarrow q(s) = k$

$$\text{即 } h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k \cdot s^2}{s^2 - 2s - 8} = 4 \rightarrow k = 4$$

$$\text{则 } H(s) = \frac{4s}{s^2 - 2s - 8} \quad \Re[s] > 4$$

Signal and System

Exercise:

A stable and causal LTI system with $h(t) \leftrightarrow H(s)$.

$H(s)$ is rational, contains a pole at $s=-2$ and does not have a zero at $s=0$.

Can we determine definitely whether it is true or false?

(a) $\Im\{h(t)e^{3t}\}$ converges;

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 0$

(c) $th(t)$ is the impulse response of a causal and stable system

(d) $H(s) = H(-s)$

(e) $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 2$



■ System Function vs Properties in Time-Domain

—研究s域的零极点分布与时域波形的关系

(一) $H(s)$ 的零极点与 $h(t)$

一般波形的形状由极点决定，而波形的幅度、相位则由零、极点共同决定；或者说，零点只影响波形的幅度和相位，而极点决定形状。

因果系统，设ROC: $\Re[s] > -1$

$$(1) \quad H(s) = \frac{1}{(s+1)} \quad \text{一阶实极点 } s=-1 \quad h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$(2) \quad H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \quad \text{一阶复极点 } s = -1 \mp j \quad h(t) = e^{-t} \cos 2t \cdot u(t)$$

$$(3) \quad H(s) = \frac{s}{(s+1)^2 + 2^2} \quad \longleftrightarrow \quad \therefore h(t)$$

$$\therefore H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$= e^{-t} \left[\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right] \cdot u(t)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-t} \cos(2t + 26.57^\circ) \cdot u(t)$$

$$(4) \quad H(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \text{二重(实)极点 } s=-1 \quad h(t) = te^{-t}u(t)$$

$$(5) \quad H(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$h(t)$ 是周期为 T 的周期信号，极点在 $j\omega$ 轴的 $\pm j\frac{2\pi k}{T}$ 处， $k=0,1,2,\dots$

$$(6) \quad H(s) = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad h(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

$h(t)$ 为时域有限信号，ROC为整个 s 平面

$$\text{注：零点： } 1 - e^{-s\tau} = 0 \rightarrow s = \pm j\frac{2\pi k}{\tau} \quad (e^{\pm j2\pi k} = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

极点： $s=0$

在 $s=0$ 处，零、极点抵消

对因果系统， $H(s)$ 的零极点与 $h(t)$ ：

极点位置 { 左半开平面
虚轴
右半开平面

极点类型 { 一阶实极点
一阶共轭复极点
 r 阶实 / 共轭复极点

表1 极点位于左半开平面 ($\alpha > 0$)

极点类型	H(s)分母所含因子	h(t)的波形形式	举例
一阶实极点 $s = -\alpha$	$(s + \alpha)$	$ke^{-\alpha t}u(t)$	$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}$ $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$
一阶共轭复极点 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$	$(s + \alpha)^2 + \beta^2$	$ke^{-\alpha t} \sin(\beta t + \theta)u(t)$	$H(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$ $h(t) = e^{-\alpha t} \sin \beta t u(t)$
r阶 实极点	$(s + \alpha)^r$	$k_i t^i e^{-\alpha t} u(t) \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$	
r阶.共轭复极点	$[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^r$	$k_i t^i e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \theta_i) u(t) \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$	

结论：因果系统H(s)的极点位于左半开平面时，h(t)衰减，系统稳定。

表2 极点位于虚轴上 ($\alpha = 0$)

极点类型	H(s)分母所含因子	h(t)的波形形式	举例
一阶实极点 $s = 0$	s	$ku(t)$	$H(s) = \frac{1}{s}$ $h(t) = u(t)$
一阶共轭复极点 $s_{1,2} = \pm j\beta$	$s^2 + \beta^2$	$k \sin(\beta t + \theta)u(t)$	$H(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$ $h(t) = \sin \beta t u(t)$
r阶 实极点	s^r	$k_i t^i u(t) \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$	
r阶.共轭复极点	$[s^2 + \beta^2]^r$	$k_i t^i \sin(\beta t + \theta_i)u(t) \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$	

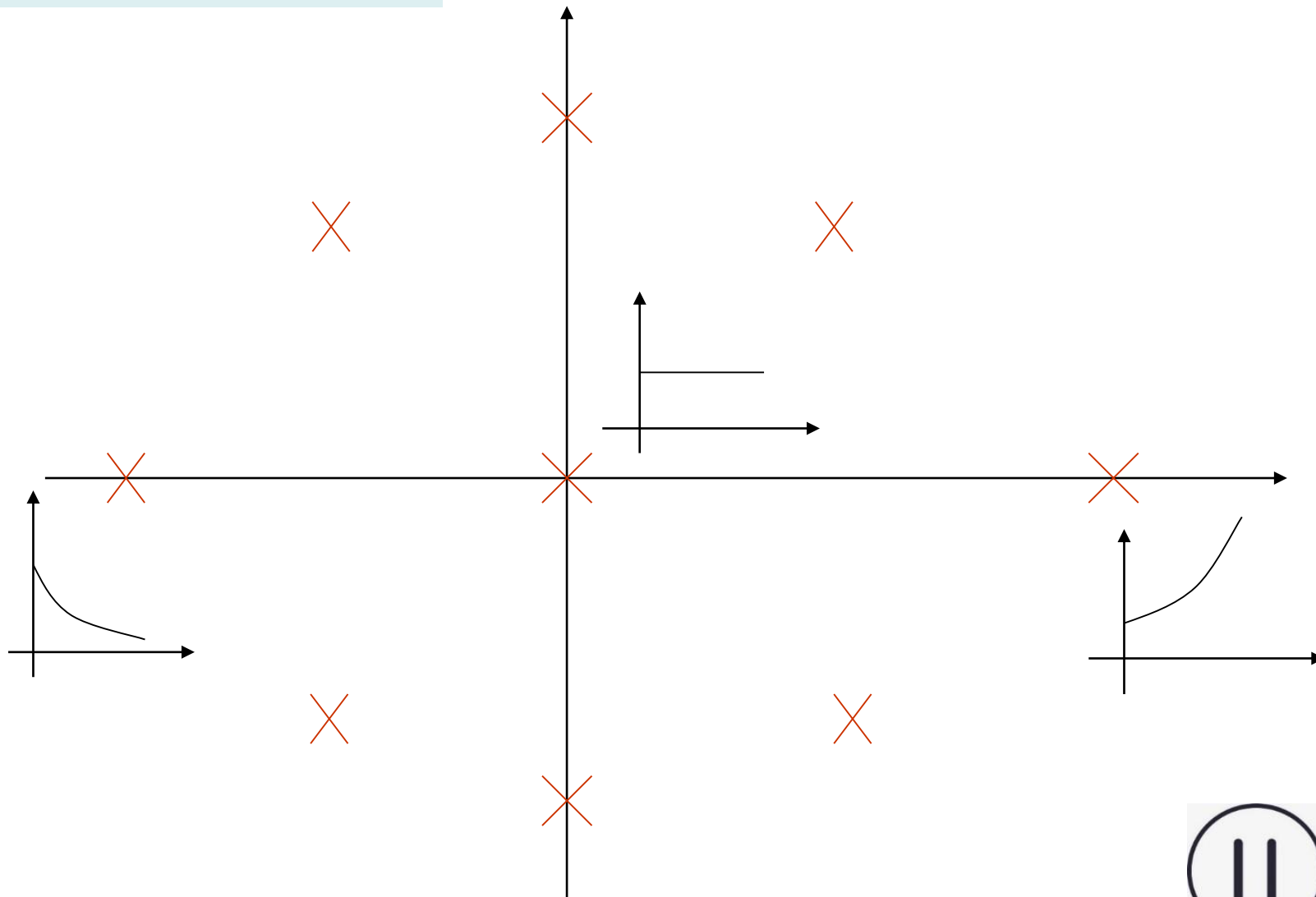
结论：因果系统H(s)的极点位于虚轴上时：若为一阶极点，h(t)等幅，系统临界稳定；若为一阶以上极点，h(t)增幅，系统不稳定

表3 极点位于右半开平面 ($\alpha > 0$)

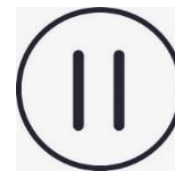
极点类型	H(s)分母所含因子	h(t)的波形形式	举例
一阶实极点 $s = \alpha$	$(s - \alpha)$	$ke^{\alpha t}u(t)$	$H(s) = \frac{1}{s - \alpha}$ $h(t) = e^{\alpha t}u(t)$
一阶共轭复极点 $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$(s - \alpha)^2 + \beta^2$	$ke^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta)u(t)$	$H(s) = \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$ $ke^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta)u(t)$
r阶极点 (略)			

结论：因果系统H(s)的极点位于右半开平面时，h(t) 增长，系统不稳定。

Signal and System



$H(s)$ 的零极点与 $h(t)$ 的波形



(二) $Y(s)$ 的零极点与 $y(t)$

Example: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + 6x(t)$

$$x(t) = u(t) \quad y(0_-) = 2 \quad y'(0_-) = 1$$

$$\therefore \underline{s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)} + \underline{3[sY(s) - y(0_-)]} + \underline{2Y(s)} = \underline{2sX(s) + 6X(s)}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - [sy(0_-) + y'(0_-) + 3y(0_-)] = (2s + 6)X(s)$$

$$\therefore Y(s) = \frac{sy(0_-) + y'(0_-) + 3y(0_-)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{2(s+3)}{s^2 + 3s + 2} \cdot X(s)$$

$$= \frac{2s+7}{s^2 + 3s + 2} + \frac{2(s+3)}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+2}}_{\text{零输入}} + \underbrace{\frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+2}}_{\text{零状态}}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+2}}_{\text{自由}} + \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{强迫}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}}_{\text{暂态}} + \frac{1}{s} \quad \text{稳态}$$

$$H(s) = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow y(t) = (e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) + u(t)$$

✓ 零输入响应—仅与 $H(s)$ 的极点有关，与 $X(s)$ 的极点无关

零状态响应—与 $H(s)$ 及 $X(s)$ 的极点均有关

✓ 自由响应—仅与 $H(s)$ 的极点有关

强迫响应—仅与 $X(s)$ 的极点有关

✓ 暂态响应—由位于左半开平面的极点决定

稳态响应—由位于 $j\omega$ 轴上的极点决定

注：以上讨论的是波形形状与极点的关系，但波形的幅度和相位则由零极点共同决定。

对因果系统:

$H(s)$ 的极点	$\left\{ \begin{array}{l} \text{左半开平面 — 波形衰减, 自由响应是暂态响应} \checkmark \\ j\omega \text{轴} \left\{ \begin{array}{l} \text{一阶 — 波形等幅, 自由响应是稳态响应} \\ \text{二阶} \end{array} \right. \\ \text{右半开平面 — 略} \end{array} \right.$
$X(s)$ 的极点	$\left\{ \begin{array}{l} \text{左半开平面 — 波形衰减, 强迫响应是暂态响应} \\ j\omega \text{轴 — } x(t) \text{ 是阶跃或正弦信号, 强迫响应是稳态响应} \checkmark \\ \text{右半开平面 — 略} \end{array} \right.$

■ System Function vs the Properties in Frequency-Domain

—根据 $H(s)$ 求解 $H(j\omega)$

(一) 对稳定系统，即 $H(s)$ 的ROC包括 $j\omega$ 轴，则

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

对因果稳定系统，当 $x(t) = E_m \sin(\omega_0 t) u(t)$ ，系统的稳态响应为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = E_m |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)]$$

在正（余）弦激励作用下，系统的稳态响应是同频率的正（余）弦信号，只是幅度和相位发生改变，改变量由 $H(j\omega)$ 决定

——系统的频响特性

说明：

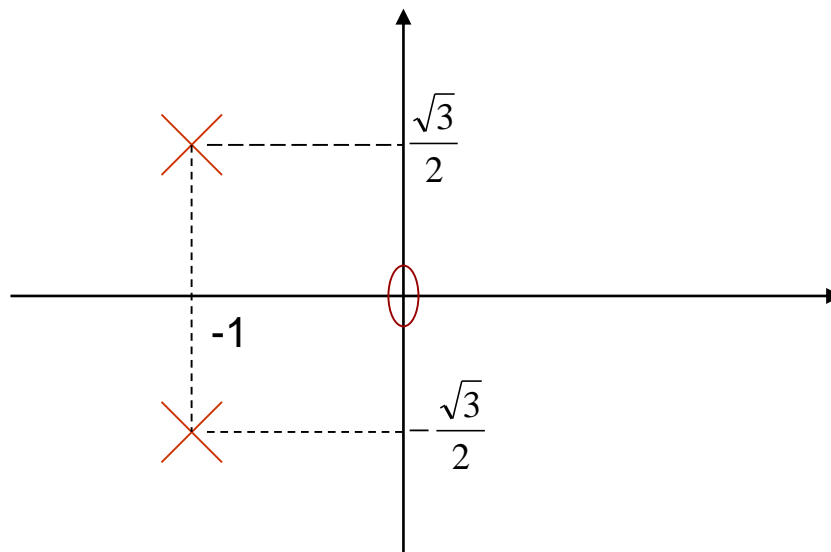
- 因果稳定系统 $\Rightarrow H(s)$ 的极点在左半开平面，其所决定的输出波形是衰减的
- $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ 的极点在虚轴上，其所决定的输出波形是等幅的，成为稳态响应

Example: 已知系统函数 $H(s)$ 的零、极点如图, 且 $h(0_+) = 2$

求: (1) 系统函数 $H(s)$

(2) 在 $x(t) = \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$ 作用下, 系统的稳态响应

(3) 给出系统的R、L、C电路实现, 并标出元件值



(1) 根据零、极点图，设

$$H(s) = \frac{ks}{(s+1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$\therefore h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \frac{ks^2}{(s+1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 2$$

$$\therefore k = 2$$

$$H(s) = \frac{2s}{(s+1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

(2) 系统的稳态响应

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |H(j\omega)|_{\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin[\frac{\sqrt{3}}{2}t + \angle H(j\omega)|_{\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}}]$$

$$\therefore H(j\frac{\sqrt{3}}{2}) = H(s)|_{s=j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{j\sqrt{3}}{1+j\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\therefore y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin[\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{6}]$$

s域电路分析

——利用元件的s域模型列写电路方程并求解

- 元件的s域模型

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

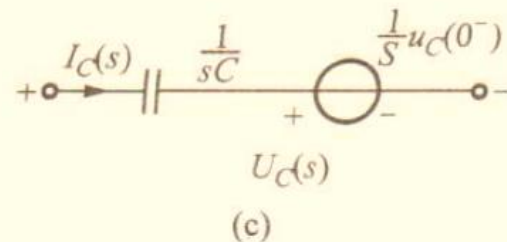
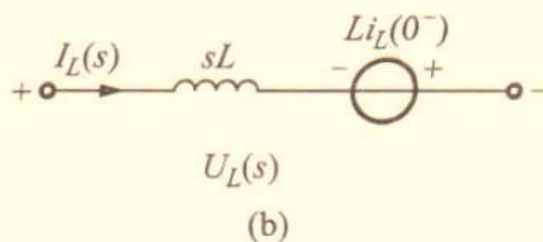
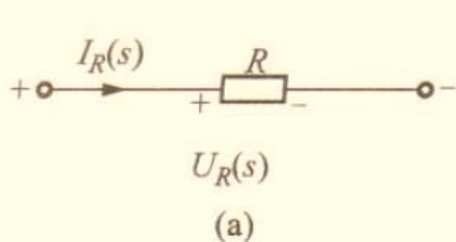
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_C(\tau) d\tau + u_C(0^-)$$

$$U_R(s) = RI_R(s)$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(0^-)}{s}$$



串联形式的s域模型

$$i_R(t) = \frac{1}{R} u_R(t)$$

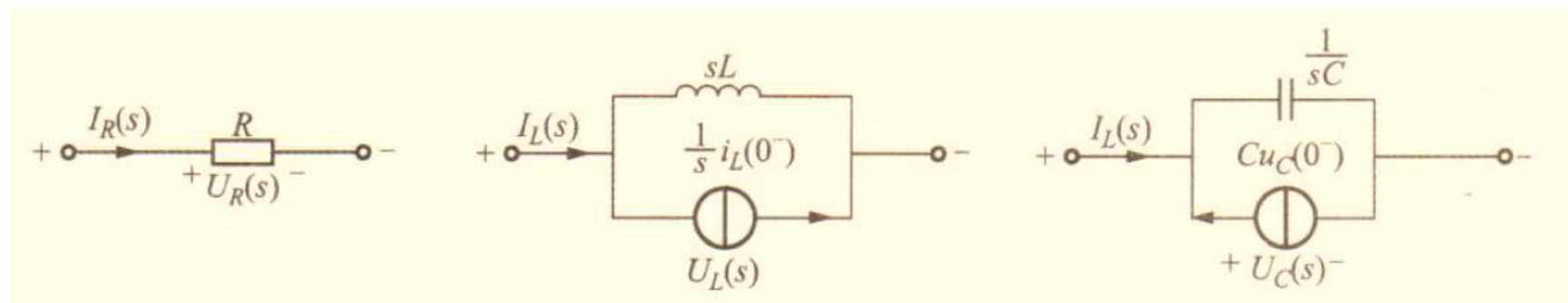
$$I_R(s) = \frac{1}{R} U_R(s)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{0-}^t u_L(\tau) d\tau + i_L(0-)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{i_L(0-)}{s}$$

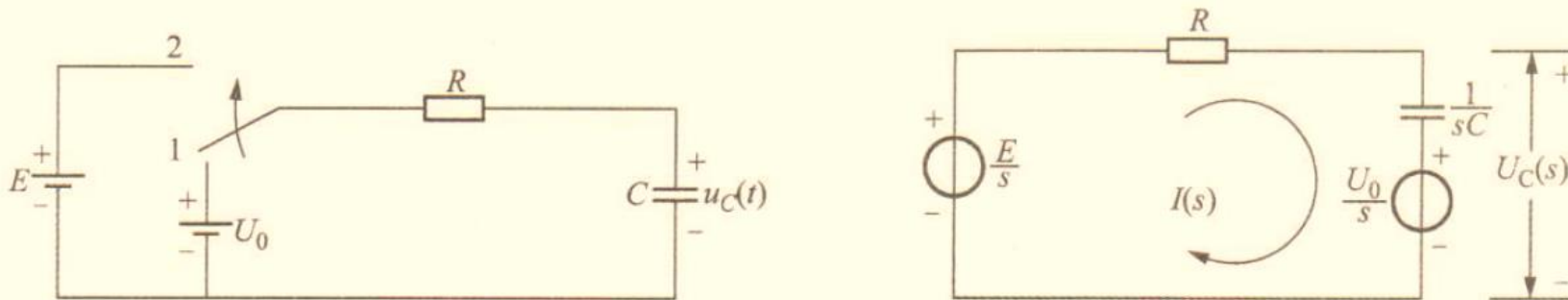
$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$I_C(s) = sC U_C(s) - C u_C(0-)$$



并联形式的s域模型

例：如图， $t < 0$ 时，开关位于1端，电路已达到稳定状态； $t = 0$ 时，开关从1端转到2端。试利用s域模型求解 $u_C(t)$



注：从 0^- 到 0^+ ，电容两端的电压不变，即 $u_C(0^-) = u_C(0^+) = U_0$ 从而得s域模型

$$\left(R + \frac{1}{sC}\right)I(s) = \frac{E}{s} - \frac{U_0}{s} \Rightarrow I(s) = \frac{\frac{1}{s}(E - U_0)}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$U_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{U_0}{s}$$

代入并整理得

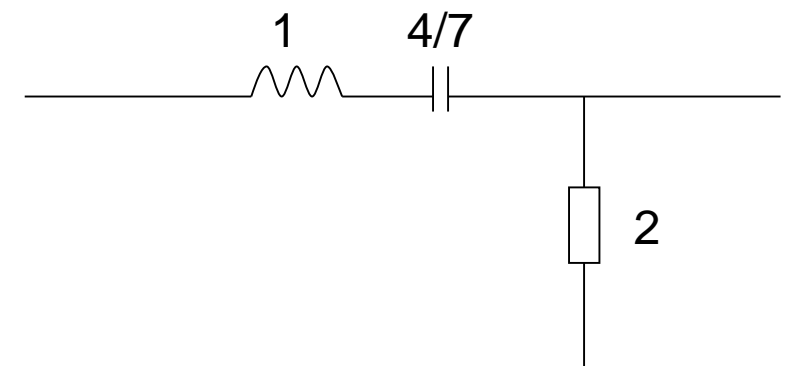
$$\begin{aligned} U_C(s) &= \frac{E}{s} \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} + U_0 \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \\ &= E \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right] + U_0 \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

作反变换得

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \left[E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) + U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \right] u(t) \\ &= \left[E - (E - U_0)e^{-\frac{1}{RC}t} \right] u(t) \end{aligned}$$

(3) R、L、C电路实现

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + \frac{7}{4}} = \frac{2}{s + 2 + \frac{7}{4}s^{-1}}$$



Example :

Consider a first order LTI causal system for which the system function $H(s)=Y(s)/X(s)$ has a pole $p=-3$ and a zero $z=3$, assume that the initial-value of the system impulse response is $h(0^+) = -6$

- (1) Determine the system function $H(s)$, sketch the magnitude spectrum $|H(j\omega)|$
- (2) If the input is $x(t) = te^{-3t}u(t)$, Determine the zero-state response $y_{zs}(t)$
- (3) If $x(t) = \cos(t)u(t)$, Determine the steady-state response $y_{ss}(t)$
- (4) Sketch a circuit with R、L or C which can be represented by the system function $H(s)$, label the value of R、L or C

$$(1) \quad H(s) = K \frac{s-3}{s+3} = K - \frac{6K}{s+3}$$

$$\therefore h(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{-6K}{s+3} = -6 \quad \therefore K = 1$$

$$\text{then } H(s) = \frac{s-3}{s+3}$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega-3}{j\omega+3}$$

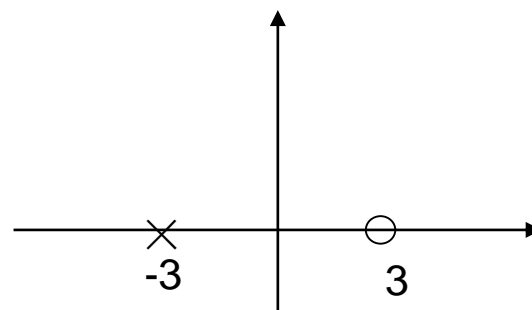
$$\therefore |H(j\omega)| = 1$$

$$(2) \quad x(t) = te^{-3t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{(s+3)^2} \quad \Re[s] > -3$$

$$Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s) = \frac{s-3}{(s+3)^3} = \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{6}{(s+3)^3}$$

$$\therefore y_{zs}(t) = (t - 3t^2)e^{-3t}u(t)$$

应用初值定理
时H(s)应为真
分式!



Signal and System

$$(3) \quad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{while } x(t) = \cos(t)$$

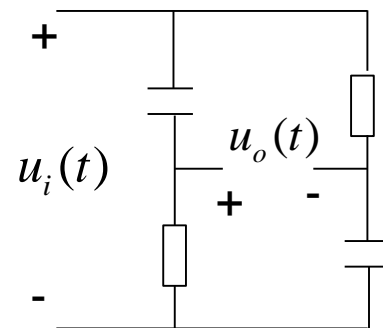
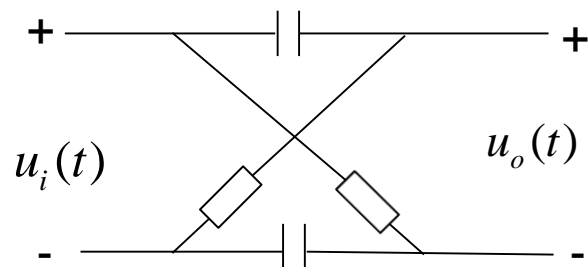
$$\therefore |H(j\omega)|_{\omega=1} = 1$$

$$\varphi(\omega)|_{\omega=1} = -2\arctg \frac{1}{3}$$

$$\therefore y_{ss}(t) = \cos(t - 2\arctg \frac{1}{3})$$

$$(4) \quad H(s) = \frac{s-3}{s+3} = \frac{1-\frac{3}{s}}{1+\frac{3}{s}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{3}{s}} - \frac{\frac{3}{s}}{1+\frac{3}{s}}$$



(二) S平面的几何分析

——根据 $H(s)$ 的零、极点分布，用几何作图的方法概略得到 $H(j\omega)$ 的特性曲线。

已知

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^M (s - z_j)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)}$$

其中， $H(s)$ 的极点全部在左半开平面——因果稳定系统

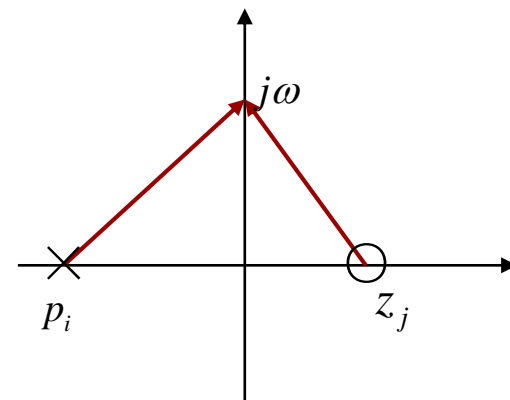
则

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^M (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^N (j\omega - p_i)}$$

设

$$j\omega - z_j = N_j e^{j\psi_j}$$
$$j\omega - p_i = M_i e^{j\theta_i}$$

——从极点（零点）
到虚轴上任意点的
矢量



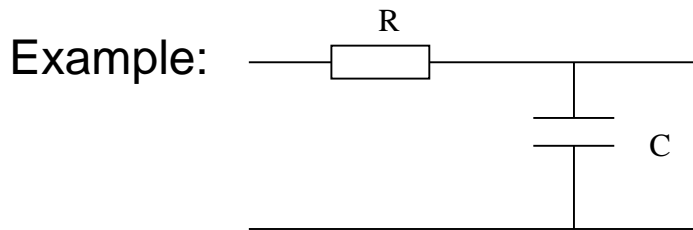
得

$$H(j\omega) = k \frac{N_1 N_2 \cdots N_M e^{j[\psi_1 + \psi_2 \cdots + \psi_m]}}{M_1 M_2 \cdots M_N e^{j[\theta_1 + \theta_2 \cdots + \theta_m]}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性—— $|H(j\omega)| = K \cdot \frac{N_1 N_2 \cdots N_M}{M_1 M_2 \cdots M_N}$

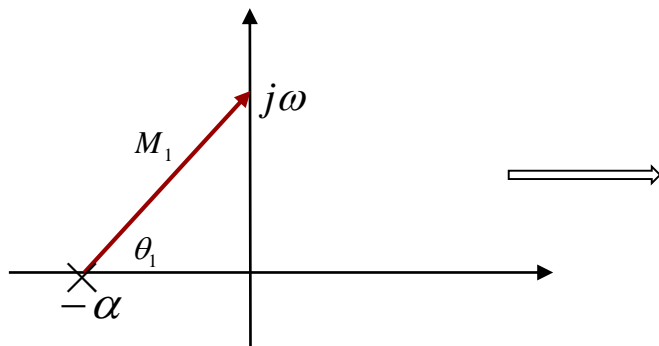
相频特性—— $\varphi(\omega) = [\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m] - [\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n]$

Signal and System



$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad \alpha = \frac{1}{RC} \quad \Longrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$



$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{M_1 e^{j\theta_1}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\alpha}{M_1} \quad \varphi(\omega) = -\theta_1$$

✓ 随着 ω 增大, M_1 增大, $|H(j\omega)|$ 减小 $\rightarrow 0$, $\varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ LPF

Signal and System

$$(1) |H(j\omega)| = \frac{\alpha}{M_1}$$

$$\omega = 0, \quad M_1 = \alpha \Rightarrow |H(j0)| = 1$$

$$\omega = \alpha, \quad M_1 = \sqrt{2}\alpha \Rightarrow |H(j\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow |H(j\infty)| \rightarrow 0$$

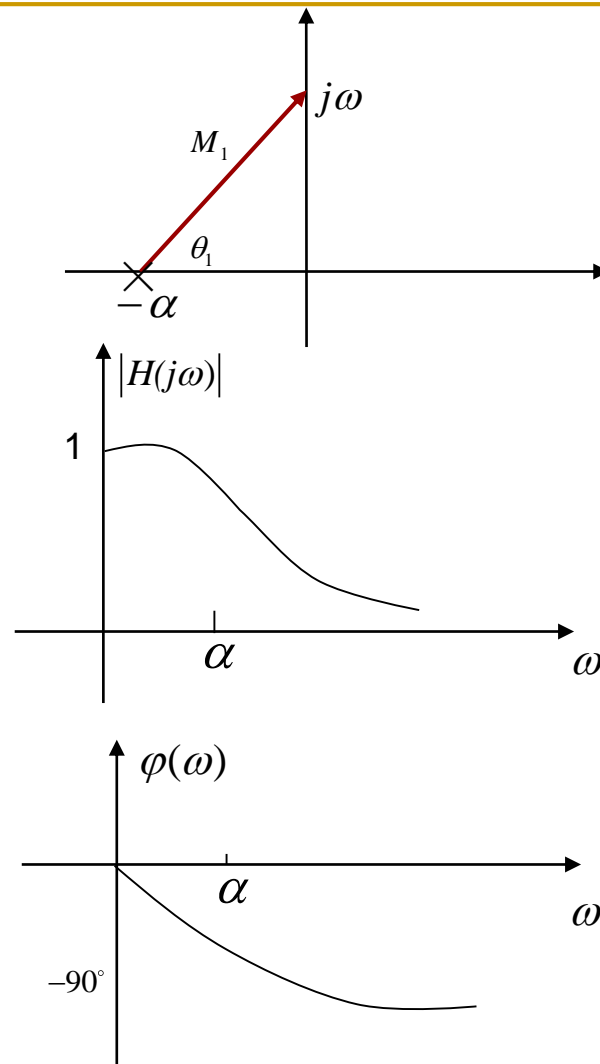
$$(2) \varphi(\omega) = -\theta_1$$

$$\omega = 0, \quad \theta_1 = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$$

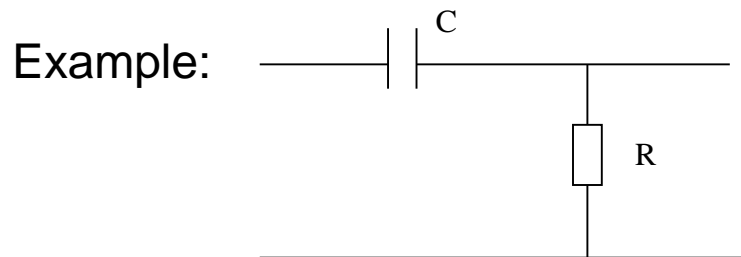
$$\omega = \alpha, \quad \theta_1 = 45^\circ \Rightarrow \varphi(\alpha) = -45^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \theta_1 = 90^\circ \Rightarrow \varphi(\infty) = -90^\circ$$

✓ $\omega = \alpha$ 时, $M_1 = \sqrt{2}\alpha$, $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ω 为
拐点频率或3dB带宽

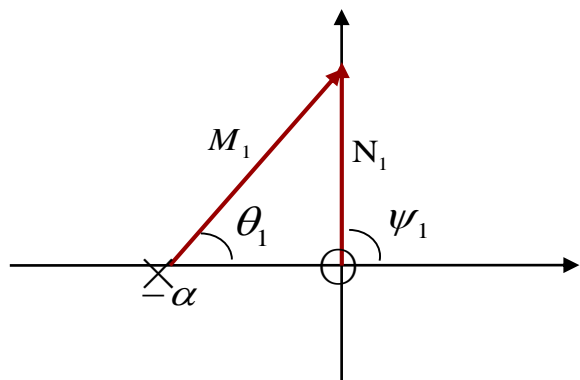


Signal and System



$$H(s) = \frac{s}{s + \alpha} \quad \alpha = \frac{1}{RC} \quad \Longrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega / \alpha)$$



$$\Longrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{N_1 e^{j\psi_1}}{M_1 e^{j\theta_1}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{N_1}{M_1} \quad \varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1$$

✓ $\omega = 0$ 时 $|H(j\omega)| = 0$; 随着 ω 增大, N_1 相对增大, $|H(j\omega)| \rightarrow 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{HPF}$

$$(1) \quad |H(j\omega)| = \frac{N_1}{M_1}$$

$$\omega = 0, \quad N_1 = 0 \quad M_1 = \alpha \Rightarrow |H(j0)| = 0$$

$$\omega = \alpha, \quad N_1 = \alpha \quad M_1 = \sqrt{2}\alpha \Rightarrow |H(j\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad N_1 \rightarrow \infty \quad M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow |H(j\infty)| = 1$$

$$(2) \quad \varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1$$

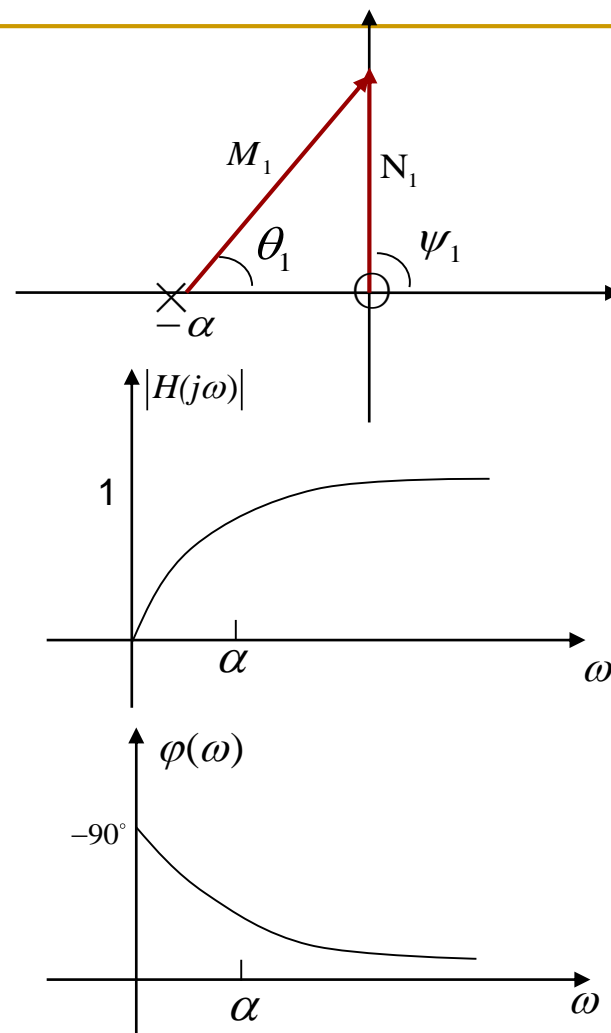
$$\omega = 0, \quad \psi_1 = 90^\circ \quad \theta_1 = 0 \Rightarrow \varphi(j0) = 90^\circ$$

$$\omega = \alpha, \quad \psi_1 = 90^\circ \quad \theta_1 = 45^\circ \Rightarrow \varphi(j\alpha) = 45^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad \psi_1 = 90^\circ \quad \theta_1 \rightarrow 90^\circ \Rightarrow \varphi(j\infty) \rightarrow 0^\circ$$

✓ $\omega = \alpha$ 为拐点频率

注：复杂系统可由相对简单的一阶或二阶系统的互联构成，通过零极点分布知悉简单系统的特性，从而可获得相对复杂系统的特性描述及其构成



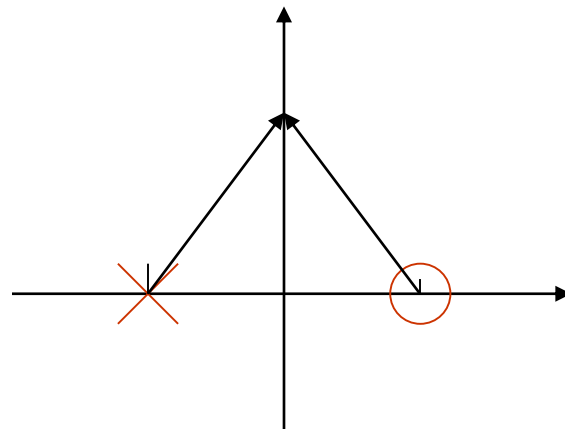
(三) 全通系统

- 1) 全通系统是幅频特性为常数，相频特性不受约束的系统。
- 2) 全通网络系统函数的极点位于 s 的左半平面，零点位于 s 的右半平面，且零极点关于虚轴互为镜像

例：一阶全通系统 $H(s) = K \frac{s - a}{s + a}$

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = K \frac{j\omega - a}{j\omega + a} = K \frac{N}{M} e^{j(\psi - \theta)}$$

$$|H(j\omega)| = k \quad \varphi(\omega) = \pi - 2 \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

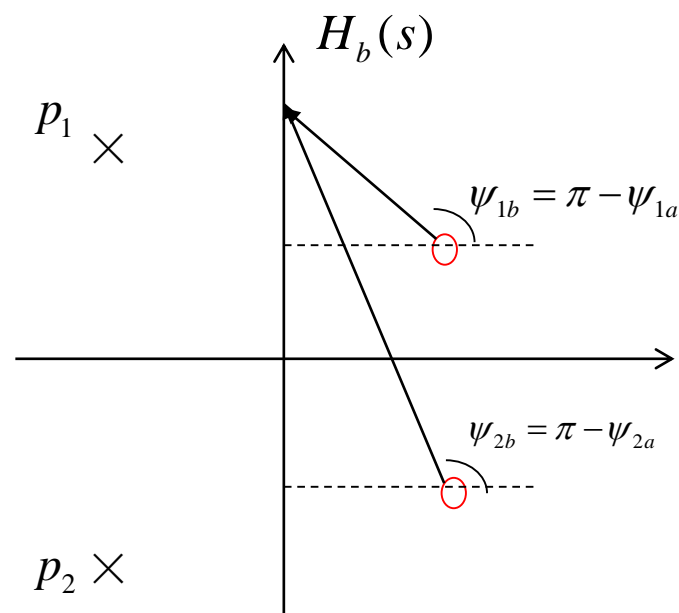
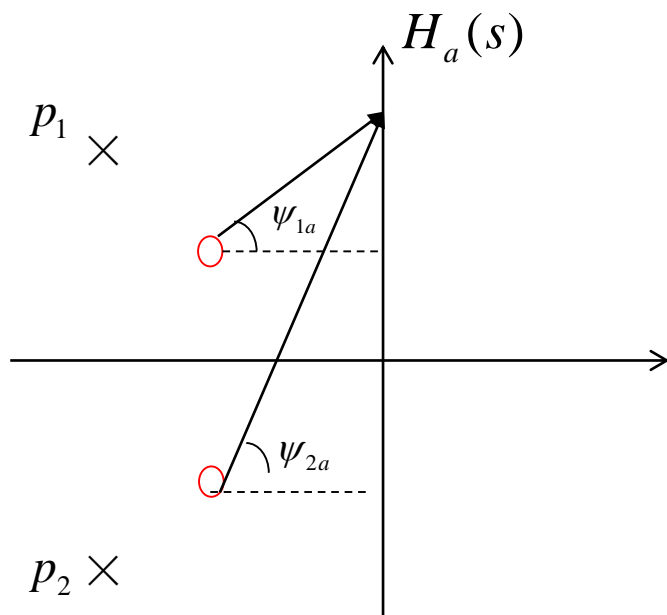


注：全通系统可用于相位均衡

(四) 最小相移网络

1) 具有相同幅频特性的系统，当系统函数的零点位于 s 的左半平面或虚轴时，系统的相移最小，称为最小相移网络

例：二阶系统 $H_a(s)$ 与 $H_b(s)$



Proof:

$$\angle H_a(j\omega) = (\psi_{1a} + \psi_{2a}) - (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\begin{aligned}\angle H_b(j\omega) &= (\psi_{1b} + \psi_{2b}) - (\theta_1 + \theta_2) \\ &= (\pi - \psi_{1a} + \pi - \psi_{2a}) - (\theta_1 + \theta_2) \\ &= 2\pi - (\psi_{1a} + \psi_{2a}) - (\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

$$\angle H_a(j\omega) - \angle H_b(j\omega) = 2(\psi_{1a} + \psi_{2a}) - 2\pi$$

$$\because \psi_{1a} + \psi_{2a} \leq \pi$$

$$\therefore \angle H_a(j\omega) - \angle H_b(j\omega) \leq 0$$

2) 零点位于s右半平面的非最小相移网络可以表示成最小相移函数与全通函数的乘积。

例:
$$H_a(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_1^*)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$H_b(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_1^*)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

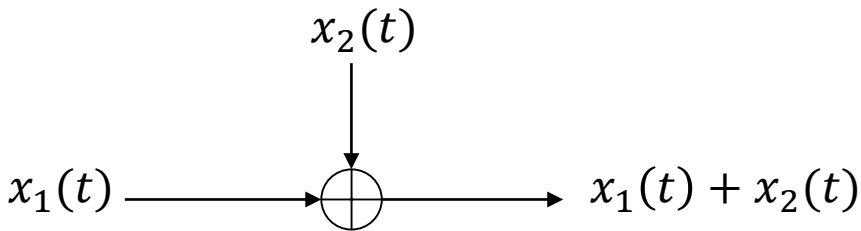
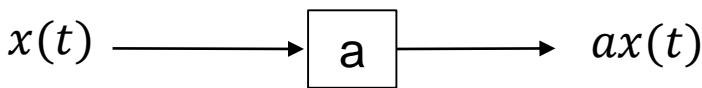
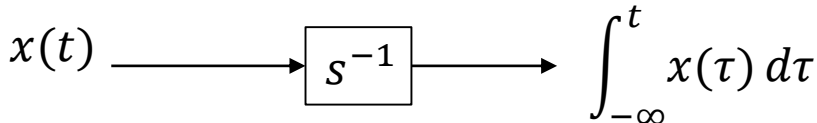
$$= \frac{(s - z_1)(s - z_1^*)}{(s - p_1)(s - p_2)} \cdot \frac{(s + z_1)(s + z_1^*)}{(s - z_1)(s - z_1^*)}$$

注：非最小相移网络可用最小相移与全通网络的级联代替

■ System Function vs Block Diagram Representations

(一) 系统框图

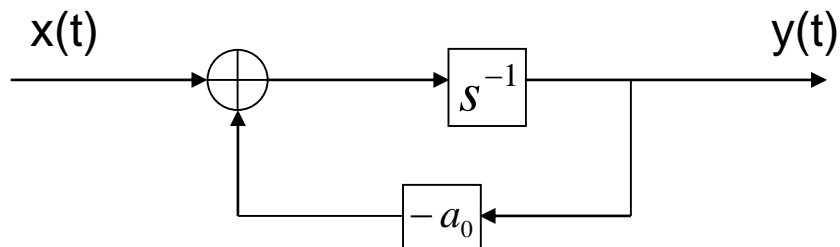
框图的基本元素：

- 加法器 
- 常系数乘法器 
- 积分器 

1、已知系统函数，画系统框图

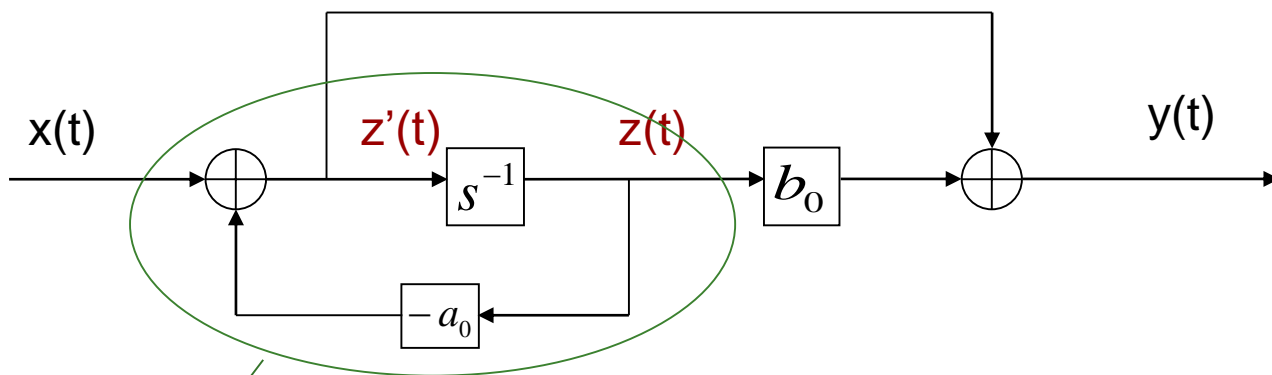
Example: $H(s) = \frac{1}{s + a_0}$

$$sY(s) + a_0Y(s) = X(s) \Rightarrow Y(s) = s^{-1}[X(s) - a_0Y(s)]$$



Example:
$$H(s) = \frac{s + b_0}{s + a_0} = \frac{1}{s + a_0} \cdot (s + b_0)$$

若将 $\frac{1}{s + a_0}$ 系统的输出设为 $z(t)$, 则 $y(t) = z'(t) + b_0 z(t)$



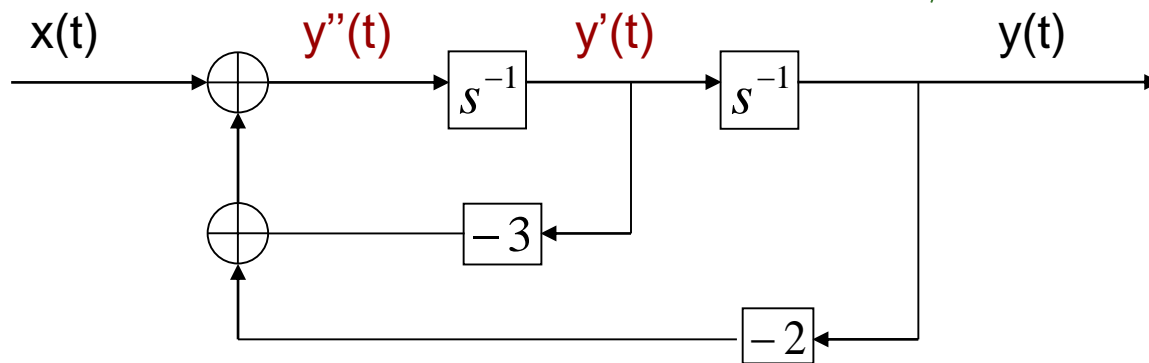
注：积分器的输入为输出信号的微分

Example:
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2Y(s) = X(s)$$

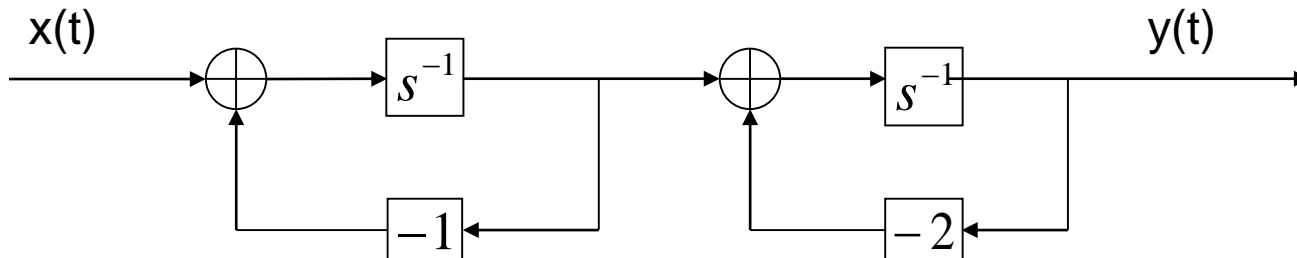
$$\Rightarrow Y(s) = s^{-2} [X(s) - 3sY(s) - 2Y(s)]$$

注：二阶系统必然有2个积分环节



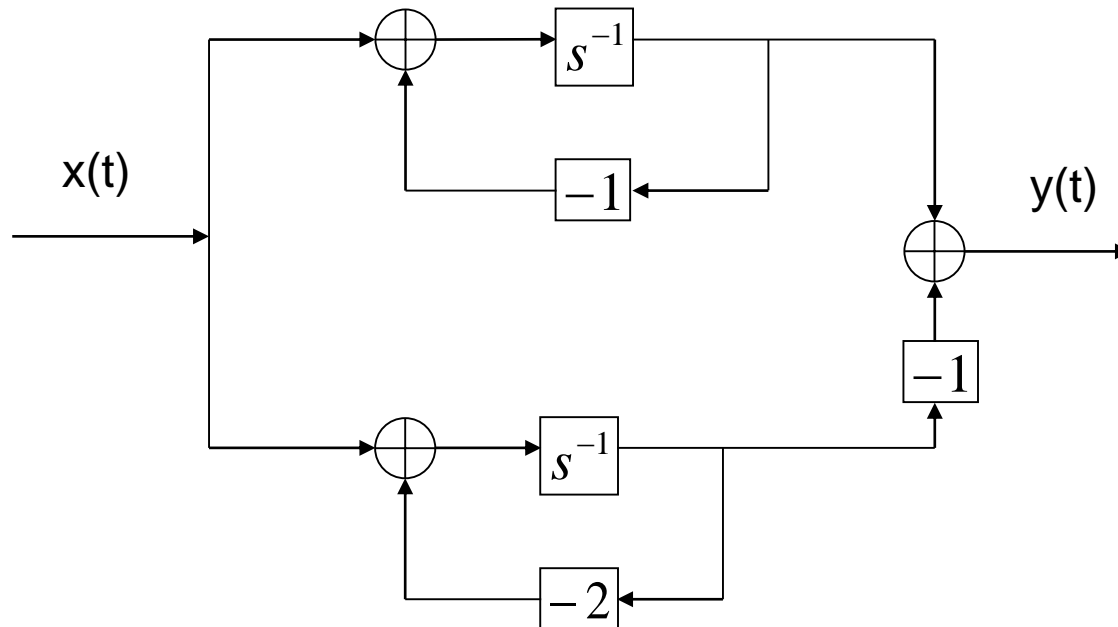
直接型

Example:
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$$



级联型

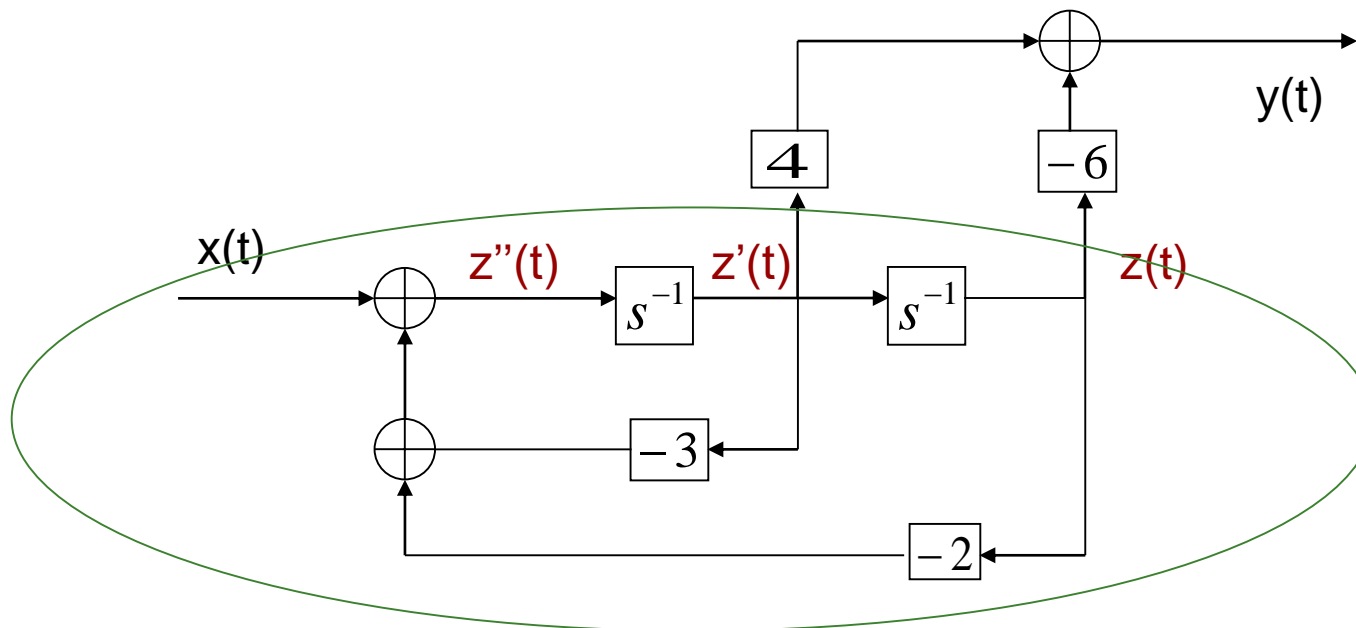
Example:
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$



并联型

Example:
$$H(s) = \frac{4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot (4s - 6)$$

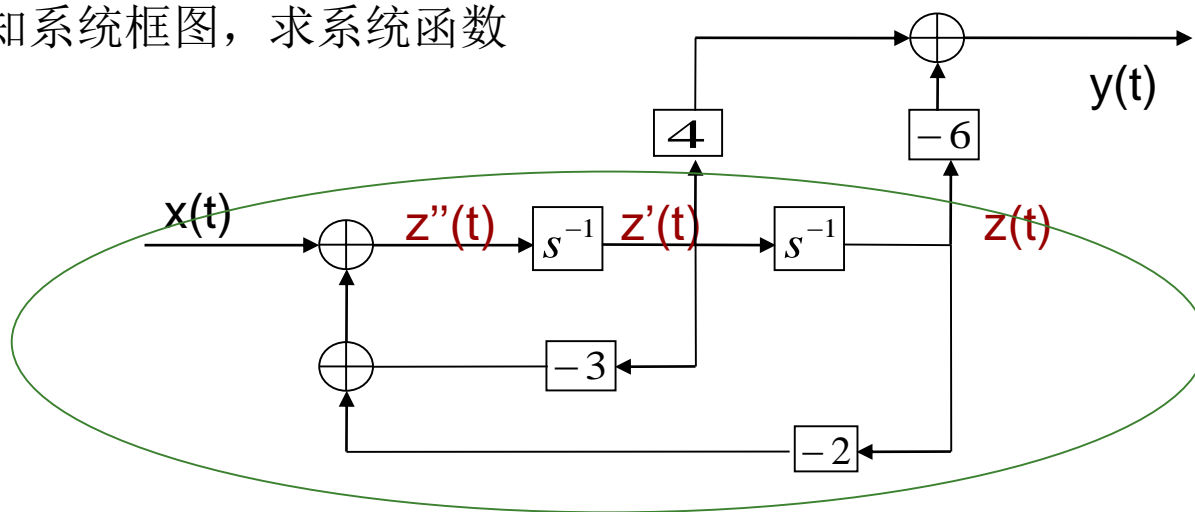
若将 $\frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ 系统的输出设为 $z(t)$, 则 $y(t) = 4z'(t) - 6z(t)$



直接型

Excise: 画出其级联型和并联型

2、已知系统框图，求系统函数



$$\because Y(s) = -6Z(s) + 4sZ(s)$$

$$\text{又 } s^2 Z(s) = X(s) - 3sZ(s) - 2Z(s)$$

$$\Rightarrow Z(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\therefore Y(s) = -6 \cdot \frac{X(s)}{s^2 + 3s + 2} + 4s \cdot \frac{X(s)}{s^2 + 3s + 2}$$

整理得

$$Y(s) = \frac{-6 + 4s}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$



(二) 信号流图

一般而言，信号流图是一种**赋权**的**有向**图，它由连接在节点间的有向支路构成。

信号流图由美国梅森（Mason）于20世纪50年代首先提出。此后在反馈系统分析、线性方程组求解，线性模拟及数字滤波器设计等方面得到广泛应用。

与框图相比，流图的主要优点：系统模拟的表示简明清楚，系统函数的计算明显简化。分析多个反馈环路组成的复杂系统时，流图的优点更为突出。此外，可借助流图研究系统的状态空间分析。

Example: $H(s) = \frac{1}{s + a_0}$ 的框图和流图

流图的术语：

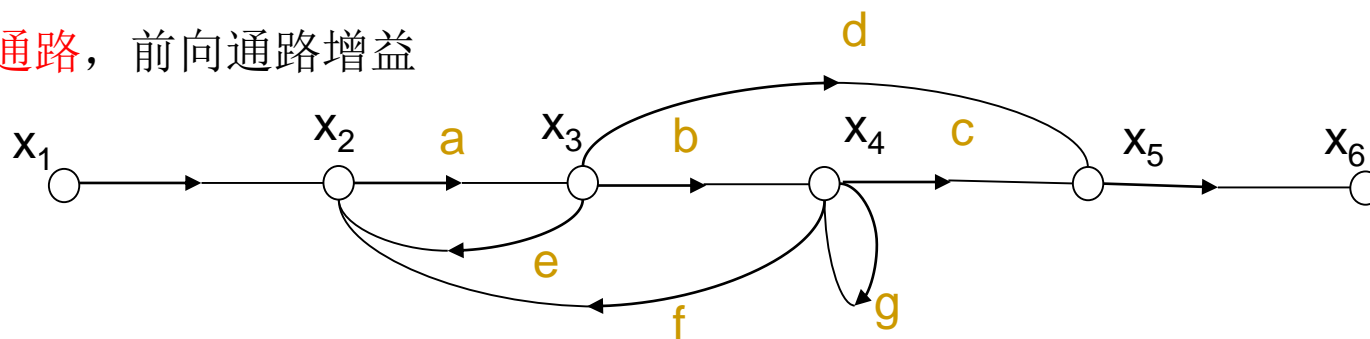
- 节点：表示信号变量的点
- 支路：表示信号变量间传输关系的有向线段
- 增益（**转移函数**）：支路上的传输函数
- 输入节点（源点），输出节点（阱点），混合节点
- 通路：从任意节点沿箭头方向到达另一节点的路径

开通路：通路与任意节点相交不多于一次

闭通路（**环路**）：通路的终点即是起点，且与其它任何节点相交不多于一次

- 环路增益
- **前向通路**，前向通路增益

例：



流图的性质：

1. 信号只能沿支路的箭头方向传输，支路的输出是该支路的输入与支路增益的乘积。
2. 当节点有多个输入时，该节点将所有输入支路的信号相加，并将其和信号传输给所有与该节点相连的输出支路。
3. 具有输入和输出支路的混合节点，通过增加一个具有单位传输值的支路，可以将它变成输出节点。
4. 系统的信号流图形式不是唯一的。
5. 流图与其转置流图的传输函数相同。

注：转置流图是将流图中所有支路箭头方向倒转，同时把输入、输出节点对换

梅森(Mason)公式:

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_i g_i \Delta_i$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

(1) Δ ——信号流图的特征行列式 ($H(s)$ 的特征多项式)

$\sum L_a$ 所有不同环路的增益之和

$\sum L_b L_c$ 所有两两互不接触的环路增益乘积之和

$\sum L_d L_e L_f$ 所有三个都互不接触的环路增益乘积之和

(2) i ——由输入节点到输出节点的第*i*条前向通路的标号

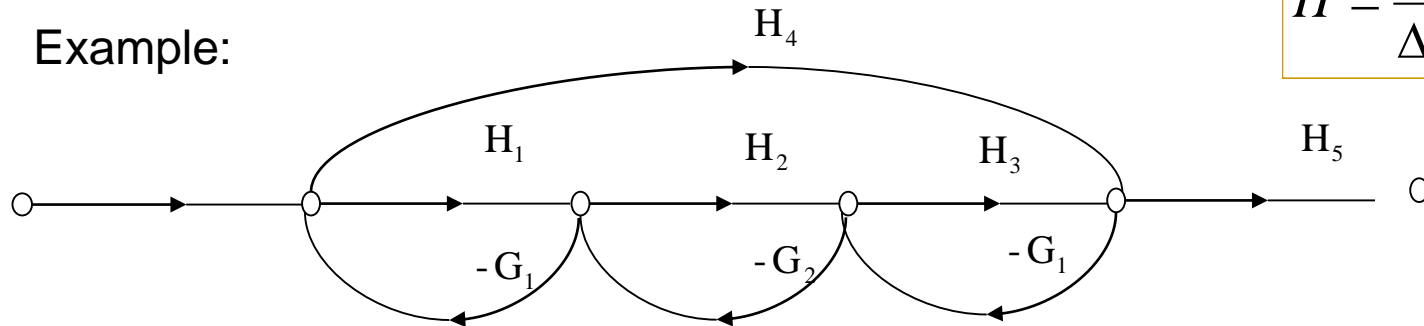
(3) g_i ——第*i*条前向通路的增益

(4) Δ_i ——第*i*条前向通路特征行列式的余因子。

即，除去与第*i*条前向通路接触的环路外余下子图的特征行列式。

Signal and System

Example:



$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_i g_i \Delta_i$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta &= 1 - \sum_a l_a + \sum_{b,c} l_b l_c \\ &= 1 + (G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4) + G_1 H_1 G_3 H_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad g_1 &= H_1 H_2 H_3 H_5 \\ \Delta_1 &= 1 \text{ — 没有与该前向通路不接触的子图} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad g_2 &= H_4 H_5 \\ \Delta_2 &= 1 - \sum_a l_a = 1 + G_2 H_2 \end{aligned} \quad \therefore H = \frac{g_1 \Delta_1 + g_2 \Delta_2}{\Delta} = \dots$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \cdots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}} \end{aligned}$$

1、直接形式

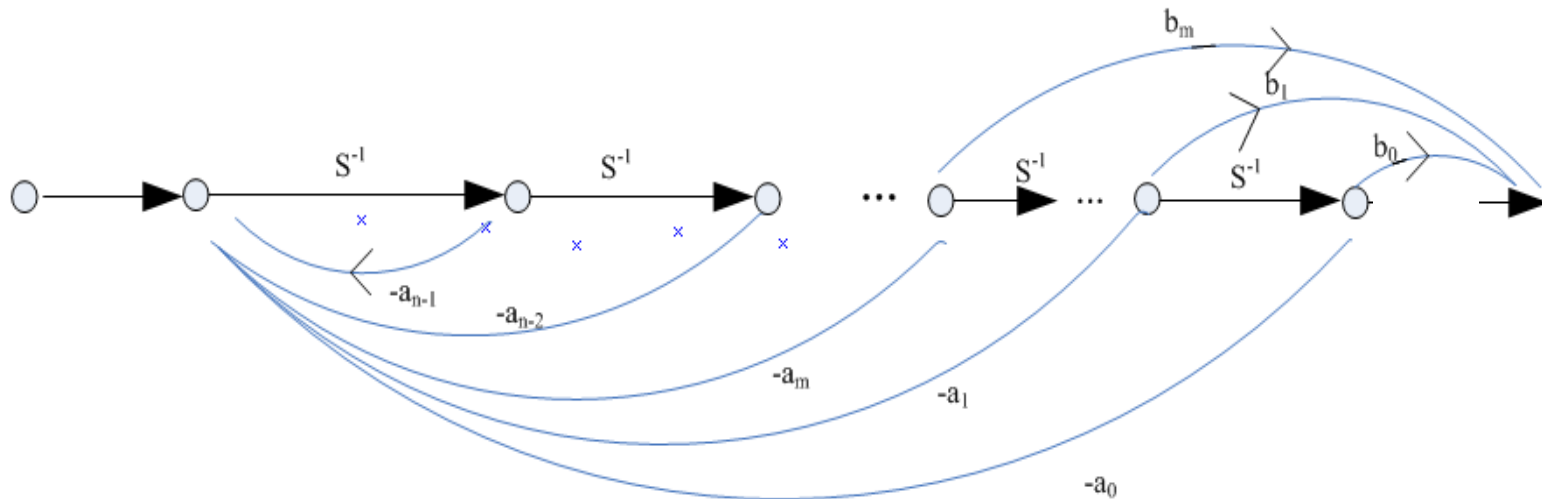
- 分母——n个回路组成的特征行列式，且各回路都互相接触

$$\Delta = 1 - \sum_{\Delta} l_a = 1 - (-a_{n-1} s^{-1} - \cdots - a_1 s^{-(n-1)} - a_0 s^{-n})$$

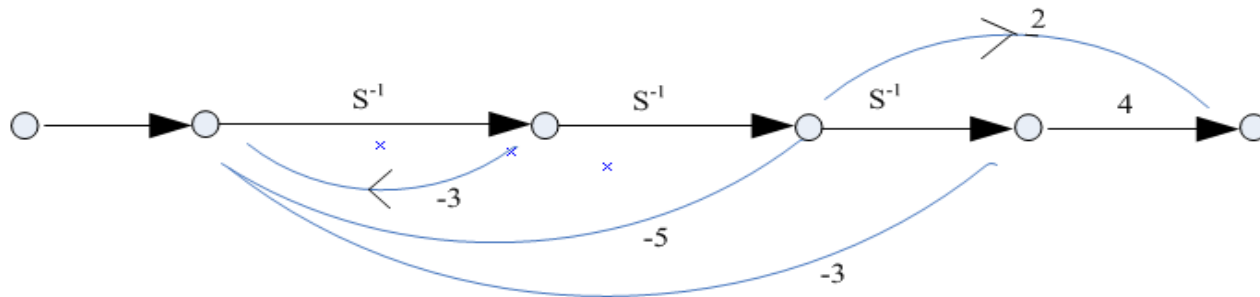
- 分子——(m+1)条前向通路的增益，且各前向通路都没有不接触的回路

$$\Delta_i = 1 \quad i = 1, 2, \cdots, m+1$$

$$H(s) = \frac{b_ms^{-(n-m)} + b_{m-1}s^{-(n-m+1)} + \dots + b_1s^{-(n-1)} + b_0s^{-n}}{1 - (-a_{n-1}s^{-1} - \dots - a_1s^{-(n-1)} - a_0s^{-n})} = \frac{\sum_i g_i}{1 - \sum_a l_a}$$



Example: $H(s) = \frac{2s + 4}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3} = \frac{2s^{-2} + 4s^{-3}}{1 - (-3s^{-1} - 5s^{-2} - 3s^{-3})}$



2、级联形式

——将 $H(s)$ 分解成简单的子系统函数的乘积，且每个子系统可用直接形式实现

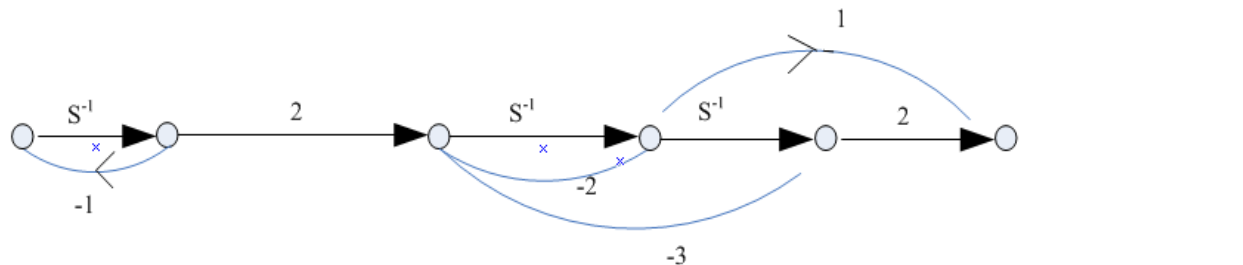
Example:
$$H(s) = \frac{2s + 4}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$$

$$\because s^3 + 3s^2 + 5s + 3 = (s + 1)(s^2 + 2s + 3)$$

$$\therefore H(s) = \frac{2(s + 2)}{(s + 1)(s^2 + 2s + 3)} = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

$$H_1(s) = \frac{2}{s + 1} = \frac{2s^{-1}}{1 + s^{-1}}$$

$$H_2(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 3} = \frac{s^{-1} + 2s^{-2}}{1 + 2s^{-1} + 3s^{-2}}$$



3、并联形式

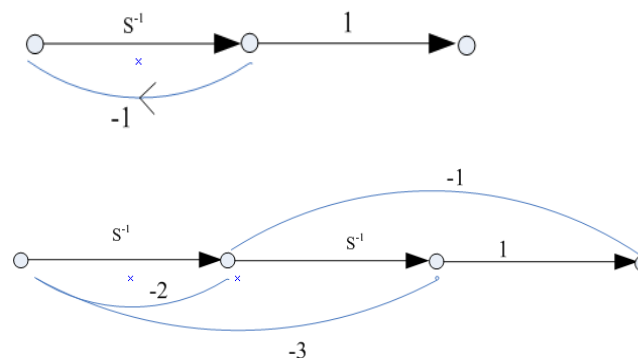
——将 $H(s)$ 作部分分式展开，分解成子系统函数的和，且每个子系统可用直接形式实现

Example:
$$H(s) = \frac{2s + 4}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+2s+3} = H_1(s) + H_2(s)$$

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} = \frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}$$

$$H_2(s) = \frac{-s+1}{s^2+2s+3} = \frac{-s^{-1} + s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}}$$

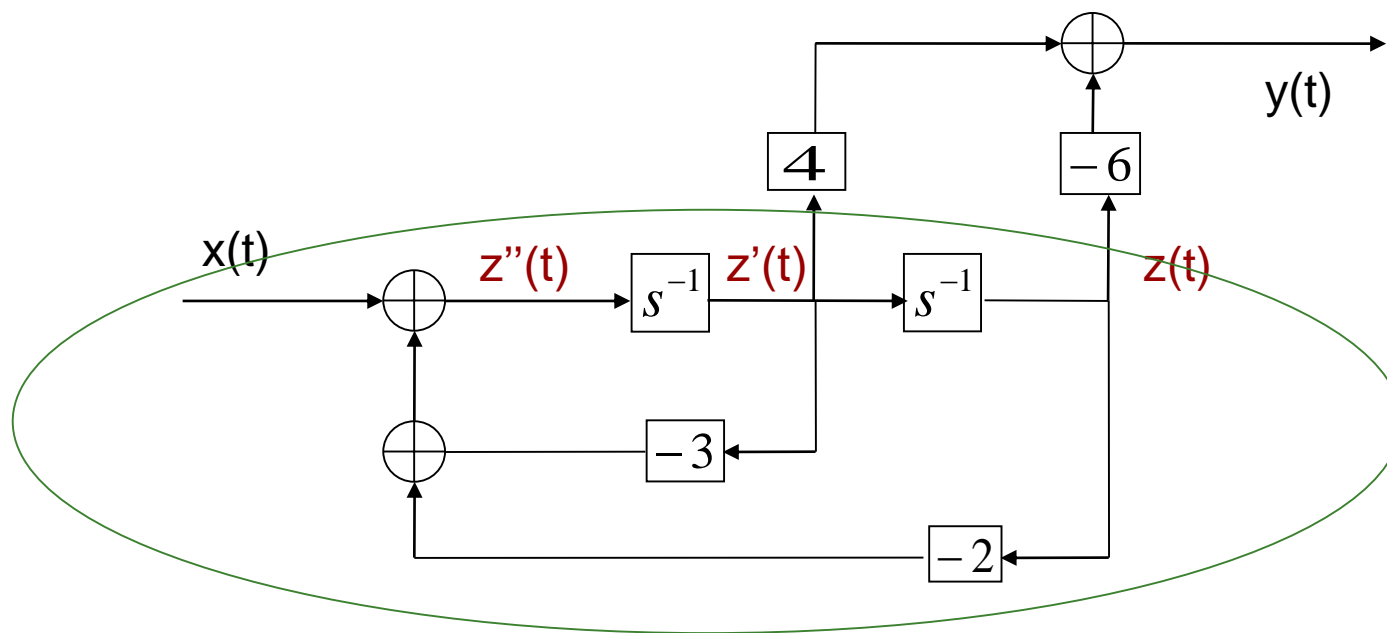


注：1. 级联、并联的主要特点是调试方便。当改变某个子系统的零极点时，不会对其他子系统产生影响。

2. 以上所有的流图形式，都可用对应的框图表示。

Example: 利用梅森公式画框图

$$H(s) = \frac{4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4s^{-1} - 6s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}$$



小结

一、基本变换

$$\blacksquare \quad x(t) \xrightleftharpoons[\text{部分分式展开法}]{\text{基本信号+性质}} X(s)$$

(单极点、重极点和共轭极点)

■ 收敛域

二、单边Laplace变换——解微分方程

三、系统的S域分析

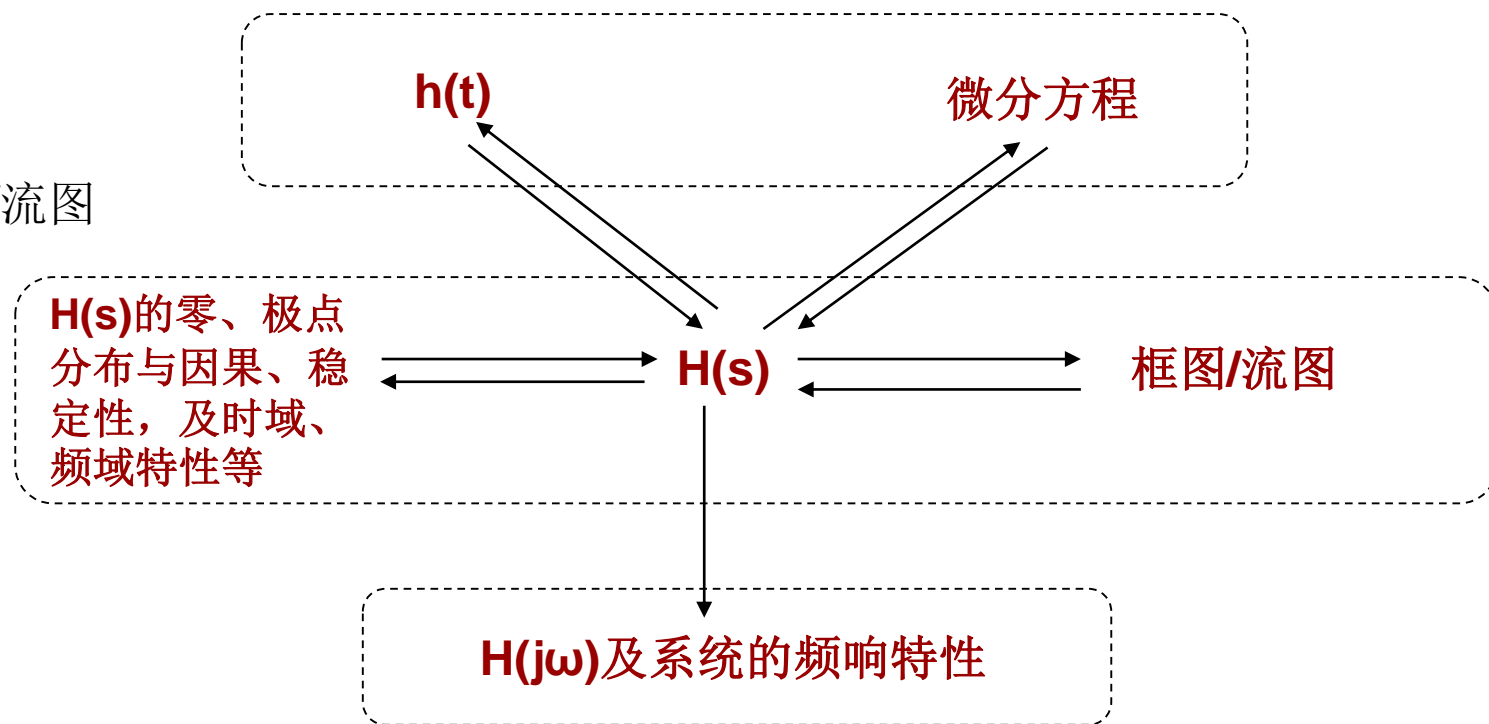
- 微分方程

- $h(t)$

- $H(j\omega)$

- $H(s)$

- 框图/流图



Q & A



Homework Due:

<https://oc.sjtu.edu.cn/login/canvas>

