第 10-11 周作业

危国锐 516021910080
（上海交通大学电子信息与电气工程学院，上海 200030）

摘 要： 主教材：[1]. 截止日期：2022-05-04.

关键词： 词 1，词 2

Homework (Week 10-11)

Guorui Wei 516021910080
(*School of Electronic Information and Electrical Engineering*,
Shanghai Jiao Tong University, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Textbook: [1]. Due date: 2022-05-04.

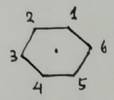
Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-05-04

(p.80) 6. 解: $D_6 = \{(1), (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), (654321)$ 集,

$(26)(35), (12)(36)(45), (13)(46), (23)(14)(56), (15)(34), (16)(25)(34)\}$.



按型分类. $1^6: \{(1)\}$, $6^1: \{(123456), (654321)\}$,

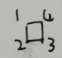
$3^2: \{(135)(246), (153)(264)\}$, $2^3: \{(14)(25)(36), (12)(36)(45), (23)(14)(56), (16)(25)(34)\}$,

$2^2 1^2: \{(26)(35), (13)(46), (15)(34)\}$.

MATH 2401 Homework 2022.04.27 (due date) 05.05

(p.86) 解: (p.85, prop. 11.3) n颗珠子, r种颜色, ⇒ 项链数

$$t = \frac{1}{2n} \sum_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} c(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\, r^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}.$$



$n=4 \Rightarrow D_4 = \{(1), (1234), (13)(24), (1432), (24), (12)(34), (13), (14)(23)\}$.

型: 1^4: (1), 1个. 4^1: (1234)(1432), 2个.

2^2: (13)(24), (12)(34), (14)(23), 3个. $2^1 1^2$: (24)(13), 2个.

$(r=2)$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2\times 4}\left[1\times 2^4 \times 2\times 2^1 + 3\times 2^2 + 2\times 2^{1+2}\right] = 6.$$

(p.94) 1. 证: (反证). 设 R 是有单位元的非零环. 假设 R 是零乘环, 则 $\forall a\in R\ (a\neq 0)$, 有 $1\cdot a = a = 0$, 矛盾. ∴ R 不是零乘环. ∎

3. 证: $\forall t_1, t_2 \in T_n(R)$, 有 $t_1 - t_2 \in T_n(R)$, $t_1t_2 \in T_n(R)$. ∴ $T_n(R)$ 是 $M_n(R)$ 的子环

$\forall d_1, t_2 \in D_n(R)$, 有 $d_1 - d_2 \in D_n(R)$, $d_1d_2 \in D_n(R)$. ∴ $D_n(R)$ 是 $M_n(R)$ 的子环

-14-

(p.95) 4. 证：先证 (End(A), +) 作成 Abel 群.

$\forall f, g \in \mathrm{End}(A)$，有：$f+g: A \to A$，$a_1+a_2 \mapsto \overset{(f+g)(a_1+a_2)}{f(a_1+a_2)} + g(a_1+a_2)$

$= (f(a_1)+g(a_1)) + (f(a_2)+g(a_2)) = (f+g)(a_1) + (f+g)(a_2)$，$(\forall a_1, a_2 \in A)$

$\therefore f+g \in \mathrm{End}A$. ["+" 对 End(A) 封闭]. 显然 "+" 是 $\underset{\mathrm{End}A}{\overset{\mathrm{End}A \times \mathrm{End}A}{A \times A \to A}}$ 的映射 ["唯一性" 显然]. 即 "+" 是 End A 上的二元运算. "+" 显然满足结合律、交换律，且以 "零同态" 为零元；$\forall f \in \mathrm{End}(A)$，$\exists \tilde{f} \in \mathrm{End}(A)$：$\tilde{f}: A \to A$，$a \to -f(a)$ 是 f 的负元. $\therefore$ (End(A), +) 作成 Abel 群.

再证 (End(A), $\cdot$) 是幺半群. $\forall a_1, a_2 \in A$，有 $(f \cdot g)(a_1+a_2)$

$= f(g(a_1+a_2)) = f(g(a_1)+g(a_2)) = f(g(a_1)) + f(g(a_2)) = (f \cdot g)(a_1) + (f \cdot g)(a_2)$，

$\Rightarrow f \cdot g \in \mathrm{End}(A)$，$\forall f, g \in \mathrm{End}(A)$. [封闭性]. "唯一性" 显然. $\Rightarrow$ "$\cdot$" 是 End A 上的二元运算. 显然满足结合律. $\overset{id_A}{E}: A \to A$，$a \mapsto a$ $(\forall a \in A)$ 是 A 的恒同态 (恒等映射)，显然是 (End(A), $\cdot$) 的单位元. $\therefore$ (End(A), $\cdot$) 是幺半群.

再证 "左(右)" "$\cdot$" 对 "+" 的分配律. $\forall f, g, h \in \mathrm{End}(A)$，有

$(f \cdot (g+h))(a) = f((g+h)(a)) = f(g(a)+h(a)) = (f \cdot g)(a) + (f \cdot h)(a)$，

$\forall a \in A$. $\Rightarrow f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$. [左分配律]. 同理有右分配律.

$\therefore$ (End(A), +, $\cdot$) 满足有单位元的环的定义.

7. 解：$\bar{m} \in U(\mathbb{Z}_n) \iff \exists\ \bar{m}_1 \in \mathbb{Z}_n$ s.t. $\bar{m}\bar{m}_1 = \bar{1}$

$\iff \exists\ \bar{m}_1 \in \mathbb{Z}_n$ s.t. $n \mid m m_1 - 1 \iff (m, n) = 1, m < n$.

$\therefore U(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{m} \mid (m,n)=1, 0 < m < n\}$.

(p.95) 8 解. $\forall\ \alpha = a+b\sqrt{-3} \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$，$\exists\ \alpha' = c+d\sqrt{-3}$，s.t.

$1 = \alpha'\alpha = (ac \mp 3bd) + (ad+bc)\sqrt{-3}. \Longleftrightarrow \begin{cases} ac \mp 3bd = 1, \\ ad+bc = 0 \end{cases}$，$\cdots(*)$

$a^2+b^2 \neq 0,\ c^2+d^2 \neq 0.$ 即 $\begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非零解：

$\Rightarrow c = \dfrac{a}{a^2+3b^2},\ d = \dfrac{-b}{a^2+3b^2},\ c, d \in \mathbb{Z}.$

$\Rightarrow a^2+3b^2 = 1. \Rightarrow a = \pm 1,\ b = 0. \Rightarrow U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]) = \{1, -1\}.$

易证 $(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}], +, \cdot)$ 作成有单位元的交换环. 下证 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 无零因子，从而为整环.

$\forall\ \alpha = a+b\sqrt{-3} \neq 0$，$a^2+b^2 \neq 0$，有 $\alpha\beta = 0 \xrightarrow{\beta := c+d\sqrt{-3}} \begin{cases} ac-3bd = 0, \\ ad+bc = 0 \end{cases}$

$\overset{a^2 \neq 3b^2}{\Rightarrow} c = d = 0.$ $\therefore\ \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 无左零因子，$\Leftrightarrow$ 无零因子. $\therefore\ \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 是整环.

假设 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 是域. 则由定义，$U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]) = \mathbb{Z}^*[\sqrt{-3}]$，这与 $U(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]) = \{\pm 1\}$ 矛盾. 故不是域.

10. 解：设 F 是 $\mathbb{Q}$ 的子域，则 $(F, +)$；$(F^*, \cdot)$ 是 Abel 群.

F 中至少有 1 $\Rightarrow \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\text{由“+”}} \subseteq F. \xrightarrow[\text{有理数定义}]{(F^*, \cdot)\ \text{Abel}} \mathbb{Q} \subseteq F.$

$\therefore\ F = \mathbb{Q}.$ $\therefore\ \mathbb{Q}$ 的子域只有 $\mathbb{Q}$.

11. 证：显然 $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +)$，$(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \cdot)$ 作成 Abel 群，且有分配律 $\Rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 是 $\mathbb{R}$ 的子域. 显然 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 是 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 的子域. 由 T_{10} 知没有真包含于 $\mathbb{Q}$ 的子域. 设有 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 的真子域 F，F 真包含 $\mathbb{Q}$，则 F 中含 $q\sqrt{2}$，$q \in \mathbb{Q}$. 而 $q\sqrt{2} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\sqrt{2}$，$\therefore\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq F \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \Rightarrow F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

$\therefore\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 的子域只有 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(p.95) 12. 证: $\left.\begin{array}{l}(a+a)^2=a+a\\(a+a)^2=4a^2=4a\end{array}\right\} \Rightarrow a+a=0 \Leftrightarrow a=-a,\ \forall a\in A.$

$\left.\begin{array}{l}(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a+b+ab+ba\\(a+b)^2=a+b\end{array}\right\} \Rightarrow ab+ba=0 \Rightarrow ab=-ba=ba,$ $\forall a,b\in A$. [交换环]

14. 证: $(F^*,\cdot)$ 成 Abel 群. $\forall f\in F^*$, 由 Lagrange 定理,

$\Rightarrow o(f)\mid |F^*|=|F|-1 \Rightarrow f^{|F^*|}=f^{|F|-1}=1 \Rightarrow f^{|F|}=f.$

而 $f=0$ 显然满足 $f^{|F|}=0=f=0$. $\therefore f^{|F|}=f$, $\forall f\in F$.

15. 证 (i) "+" 是 $R[G]$ 上的二元运算 [封闭, 唯一], 满足结合律, 交换律, 有零元 $\sum_{g\in G}0g$; $\forall \sum_{g\in G}r_g g$, 有逆负元 $\sum_{g\in G}(-r_g)g$. $\therefore (R[G],+)$ 是 Abel 群.

"$\cdot$" 是 $R[G]$ 上的二元运算 [封闭, 唯一]. 满足结合律. $\therefore (R[G],\cdot)$ 是半群. 又 "$\cdot$" 对 "+" 满足左, 右分配律. $\therefore (R[G],+,\cdot)$ 是环.

(ii) "$\Leftarrow$". 显然. "$\Rightarrow$". $\forall r,t\in R$, 有 $(rg)(tg)=(rt)g$, $(tg)(rg)=(tr)g$, $\Rightarrow rt=tr$. $\Rightarrow$ R 是交换环. $\forall g_1,g_2\in G$,

有 $\left.\begin{array}{l}(\cancel{1_R}^{r}\cdot g_1)(\cancel{1_R}^{r}\cdot g_2)=(\cancel{1_R 1_R}^{r^2})g_1g_2\ (\ne 0)\\(\cancel{1_R}^{r}\cdot g_2)(\cancel{1_R}^{r}\cdot g_1)=(\cancel{1_R 1_R}^{r^2})g_2g_1\end{array}\right\} \Rightarrow g_1g_2=g_2g_1 \Rightarrow G$ is Abel.

(iii) $1_Re\cdot\sum_{g\in G}r_g g=\sum_{g\in G}(1_R\cdot r_g)g=\sum_{g\in G}r_g g$, 同理 $\sum_{g\in G}r_g g\cdot 1_Re=\sum_{g\in G}r_g g$,

$\forall \sum_{g\in G}r_g g\in R[G]$, $\therefore$ 1_Re 是 $R[G]$ 的单位元.

(iv) 把 R 中每个元素 r 看成 $re\in R[G]$, 则 $\{re\mid r\in R\}$ 是 $R[G]$ 的子环.

~~(v)~~ (p.96) 15(v) 证：取 $r\in R,\ r\neq 0_R$，则 $\alpha := \sum_{g\in G} rg \in R[G]$，$\alpha \neq 0_{R[G]}$.

$\forall g_1\in G,\ g_1\neq e_G$ [$\because |G|>1$, $\therefore$ 故可取到]，$\forall r'\in R\ (r'\neq 0_R)$，有

$$\underbrace{r'g_1}_{\in R[G]}\cdot\alpha = r'g_1\cdot\sum_{g\in G} rg = \sum_{g\in G} r'r\,(g_1 g) \xlongequal{|G|\text{有限，左消去律}} \sum_{g\in G} r'r\,g$$

$$= r'e_G\cdot\sum_{g\in G} rg = r'e_G\cdot\alpha,$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[r'g_1+(-r')e_G\right]}_{=:\beta\in R[G]}\cdot\alpha = 0_{R[G]}.$$

$\because r'\neq 0,\ g_1\neq e_G$, $\therefore \beta\neq 0_{R[G]}$

$\Rightarrow$ β,α 是 $R[G]$ 的左，右零因子

$\Rightarrow$ $R[G]$ 是有零因子环. ∎

References

[1] 刘绍学, 章璞. 近世代数导引 [M]. 1 ed. 北京: 高等教育出版社, 2011.