上海交通大学在线考试诚信承诺书

SJTU Online Examination Honor Code Letter

考试不仅是对学习成效的检查，更是对道德品质的检验。自觉维护学校的考风考纪，营造公平、公正的考试环境是全体同学的共同责任和义务。特别在疫情防控的特殊时期，更应强化自律意识，恪守诚信，拒绝舞弊，做一名诚实守信的新时代大学生，用诚信的考试构筑诚信的人生。

Examination is the evaluation of both learning effect and morality. It is the responsibility and obligation of all students to consciously maintain the school's common examination practice, abide by the discipline and create a fair and just examination environment. Especially in the special period of epidemic prevention and control, we should strengthen the consciousness of self-discipline, abide by the integrity, refuse to cheat, be an honest and trustworthy college student in the new era, and build an honest life from the integrity test.

我郑重承诺 I solemnly promise：

（1）本人将履约践诺，知行统一；遵从诚信规范，恪守学术道德；自尊自爱，自省自律。I will fulfill my promise, unify between knowledge and action, abide by the rules of integrity, academic ethics, be self-respected and self-disciplined.

（2）在线考试过程中，自觉遵守学校和老师宣布的考试纪律（详见《上海交通大学本科生学生手册》中的《学生考试纪律规定》，沪交教【2019】28 号），不剽窃，不违纪，不作弊。In the process of online examination, I will consciously abide by the examination discipline announced by the school and the teachers (see the regulations on student examination discipline in the undergraduate student handbook of Shanghai Jiao Tong University, HJJ [2019] No. 28), and do not plagiarize, violate discipline or cheat.

（3）若违反相关考试规定和纪律要求，自愿接受学校的严肃处理或处分。In case of violation of relevant examination regulations and discipline, students shall bear the serious treatment or punishment from the school.

承诺人 Committed by：危国锐

（学号 Student No：516021910080）

日期 Date (Y/M/D)：2022 年 4 月 27 日

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

班级号___F1603407_ 学号_516021910080____ 姓名 _危国锐_

课程名称 ___MATH2401 抽象代数____________ 成绩 ________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：_危国锐__

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

一. 判断是非并说明理由(满分9分，每小题3分)

1. 49 阶群一定是循环群。

2. 60阶群必有30阶子群。

3. 最小的非交换群是对称群S_3。

MATH2401 期中考试 2022.04.27 (due date)

卢国锐 516021910080

一、判断.

1. 答: 不正确. 考虑 $G := \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$, "$\oplus$"是直和. 则 $|G| = 49$.
下证这 G 不是循环群. 反证. 设 G 是循环群, 则 $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$
使得 $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7 = \langle (a,b) \rangle$, 且 $o(a,b) = 49$. $\Rightarrow \mathbb{Z}_7 = \langle a \rangle = \langle b \rangle$
$\Rightarrow o(a) = o(b) = 7 \Rightarrow (a,b)^7 = (e,e) \Rightarrow o(a,b) \mid 7$. i.e. $49 \mid 7$, 矛盾.
故 $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$ 是49阶群, 但不是循环群.

2. 答: 不正确. 考虑 $G := A_5$, A_5是5次交错群. 有 $|G| = |A_5| = \frac{5!}{2} = 60$,
且已知 A_5 是单群 (教材 p.61, 定理8.6). 下证 A_5 没有30阶子群.
反证. 设有 $H \leq A_5$ 且 $|H| = 30$. 则 $[A_5 : H] = \frac{|A_5|}{|H|} = \frac{60}{30} = 2$.
$\Rightarrow H \lhd A_5$, 但 H 是 A_5 的真子群. 这与 A_5 是单群矛盾.
$\therefore$ 60阶单群 A_5 没有30阶子群.

3. 答: 正确. 原因: (1) 1阶群只含单位元, 自然是交换群; (2) 2, 3, 5阶群是素数阶群, 由 Lagrange 定理可证素数阶群是循环群, 从而可交换;
(3) 在2022.03.11课上已证"4阶群(在同构意义下)要么为 $\mathbb{Z}_4$, 要么为 Klein 四元群 K_4". 而 $\mathbb{Z}_4$, K_4 都是交换群. 故4阶群必是交换群.
(4) 教材 p.32 命题3.3 已证"S_n的中心是一阶群 $\{(1)\}$, $\forall n \geq 3$". 故 S_3 是非交换群 (6阶).

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 MATH2401 抽象代数 姓名 危国锐

二.（满分5分）设G是p^n阶群，P是G的p^{n-1}阶子群，这里p为素数，$n \geq 1$。证明$P \lhd G$。

二、证：对n归纳. 当$n=1$时，$|P|=1 \Rightarrow |P|=\{e\} \lhd G$，

结论成立. 当$n=2$时，$|G|=p^2$，$\Rightarrow$ G是Abel群（教材p.64，习题8）

$\Rightarrow$ G的任何子群都是正规子群，$\Rightarrow H \lhd G$，结论成立.

假设结论对小于n的情况成立$(n>2)$，下证结论对n也成立. 记$H:=P\leq G$.

由于p-群有非平凡的中心（教材p.59，推论8.3），且$|C(G)|\,\big|\,|G|$（Lagrange），

故$p\,\big|\,|C(G)|$. 可取p阶元$a\in C(G)$. [必可取到，Sylow定理]

令$K:=\langle a\rangle \leq C(G)$，则$K\lhd G$. 令$G':=G/K$，$H':=H/K$，则$H'\leq G'$，

$|G'|=p^{n-1}$，$|H'|=p^{n-2}$. 由归纳假设，$\Rightarrow H'\lhd G'$. 由群同态基本

定理（正规子群对应定理，教材p.48）["商的(正规)子 = (正规)子的商"]

$\Rightarrow H\lhd G$.

$\therefore \forall n\geq 1$，结论成立. 证

四.（满分6分）写出所有互不同构的120阶Abel群。

四. 解：$120 = 2^3\times 3\times 5 \Rightarrow$ 共有 $P(3)P(1)P(1)=3$ 个互不同构的

120阶Abel群：$H_1=\mathbb{Z}_{2^3}\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5$，

$H_2=\mathbb{Z}_{2^2}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5$，$H_3=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5$.

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 MATH2401 抽象代数 姓名 危国锐

五. 类似于Abel群的内外直和理论，探究非Abel群的内外直和（直积），完成下列问题（满分10分）

1. 写出两个非Abel群的内外直积的定义。

2. 证明非Abel群的内外直积等价。

3. 给出两个非Abel群直积的判别定理，并证明之。

五. 解：1. 定义（外直积） 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为任意 n 个群. 则集合的卡氏积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 对运算 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)(b_1,b_2,\cdots,b_n) \overset{\text{def}}{=} (a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n)$ 显然作成一个群，而且 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$（e_i为A_i的单位元）为其单位元，又 $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$ 是 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的逆元. 称这群为群 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的外直积.

定义（内直积） 设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是群 G 的 n 个子群，若满足：

(1) $G = G_1G_2\cdots G_n$，且 G 中每个元素的表示法是唯一的；

(2) G_i 中的任意元素同 G_j $(i\neq j)$ 中任意元素可换，

则称群 G 是子群 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的内直积.

2. 证：(1) 外直积 $\Rightarrow$ 内直积.

记群 $G_1, \cdots, G_n$ 的外直积为 $G := G_1\times\cdots\times G_n$. 定义 G 的子集 $(i=1,\cdots,n)$

$\tilde{G}_i := \{(e_1,\cdots,g_i,\cdots,e_n)\in G \mid g_i\in G_i,\ e_j \text{是} G_j \text{的单位元}\}$，则显然 $\tilde{G}_i\leq G$，且

$\varphi_i: G_i\to\tilde{G}_i,\quad g_i\mapsto(e_1,\cdots,g_i,\cdots,e_n)$，$\forall g_i\in G_i$，是同构映射 i.e. $G_i\cong \tilde{G}_i$.

下证 G 是 $\tilde{G}_1, \cdots, \tilde{G}_n$ 的内直积.

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 MATH2401 抽象代数 姓名 危国锐

（接上页）

显然 $G=\tilde{G}_1\tilde{G}_2\cdots\tilde{G}_n$，且 $\tilde{G}_i$ 中的任意元素同 $\tilde{G}_j$ $(i\neq j)$ 中的任意元素可换.

故只需证 G 中每个元素的表法唯一. $\forall g=\tilde{g}_1\tilde{g}_2\cdots\tilde{g}_n\in G$，$\tilde{g}_i=(e_1,\cdots,g_i,\cdots,e_n)$，

$g_i\in G_i$，$i=1,\cdots,n$. 设 g 又可表成 $\tilde{g}_1'\tilde{g}_2'\cdots\tilde{g}_n'$，$\tilde{g}_i'=(e_1,\cdots,g_i',\cdots,e_n)$，$g_i'\in G_i$.

则 $\tilde{g}_1\cdots\tilde{g}_n=\tilde{g}_1'\cdots\tilde{g}_n'$. ~~因 $\tilde{G}_i$ 中~~ $\Rightarrow(\tilde{g}_1^{-1}\tilde{g}_1')(\tilde{g}_2^{-1}\tilde{g}_2')\cdots(\tilde{g}_n^{-1}\tilde{g}_n')=e_G$.

$\Leftrightarrow(g_1^{-1}g_1',\cdots,g_n^{-1}g_n')=(e_1,\cdots,e_n)\Leftrightarrow g_i=g_i'$，$i=1,\cdots,n$.

$\therefore$ 表法唯一 ~~得~~.

由内直积的定义 $\Rightarrow G=\tilde{G}_1\cdots\tilde{G}_n$ 是内直积. 且 $\tilde{G}_i\cong G_i$，$i=1,\cdots,n$.

(2) 内直积 $\Rightarrow$ 外直积.

设群 G 是其子群 $G_1,\cdots,G_n$ 的内直积. 令 $\tilde{G}:=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$（外直积）.

易知 $\varphi: G\to\tilde{G}$，$a_1a_2\cdots a_n\mapsto(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $(a_i\in G_i)$ 是映射、单射、满射、

"保持运算"，故 φ 是 $G\to\tilde{G}$ 的一个同构映射，因此 $G\cong\tilde{G}$.

综上，由群的外直积可引出一个内直积，反之也可以；内、外直积在群同构意义下等价.

-3-

3. <u>定理</u> 设 $G_1,\cdots,G_n$ 是群 G 的子群. G 是 G_i，$i=1,\cdots,n$ 的内直积，

当且仅当 G_i 满足：

(1) $G_i\lhd G$，$i=1,\cdots,n$；

(2) $G=G_1G_2\cdots G_n$，即 G 中每个元素都可表为 $G_1,\cdots,G_n$ 中元素的积；

(3) $G_1G_2\cdots G_{i-1}\cap G_i=\{e\}$，$i=2,\cdots,n$. [$\Leftrightarrow G_1\cdots G_{i-1}G_{i+1}\cdots G_n\cap G_i=\{e\}$，$i=1,\cdots,n$]

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 MATH2401 抽象代数 姓名 危国锐

（接上页）

证 必要性（"⇒"）. 满足(2)显然，下证(1)(3)成立.

$\forall x_i \in G_i$, $\forall g = g_1 g_2 \cdots g_n \in G$, $g_i \in G_i$. 由内直积定义的(2)

易知 $g x_i g^{-1} = g_i x_i g_i^{-1} \in G_i$ $(\forall x_i \in G_i, \forall g \in G)$，故 $G_i \triangleleft G$，

即(1)成立.

若 $G_1 G_2 \cdots G_{i-1} \cap G_i \neq \{e\}$，则必存在 $e \neq a_i = a_1 a_2 \cdots a_{i-1} \in G_1 \cdots G_{i-1} \cap G_i$，

这与内直积定义的(1)（表法唯一）矛盾. 故(3)也成立.

充分性（"⇐"）. 显然 $G = G_1 \cdots G_n$. 下证"表法唯一".（反证）设 G 中有元素 x

表为 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 中元素相乘时不唯一，令 $x = a_1 \cdots a_{i-1} a_i \cdots a_n = b_1 \cdots b_{i-1} b_i \cdots b_n$,

$(a_j, b_j \in G_j, j = 1, \cdots, n)$, $a_i \neq b_i$, $\cancel{a_{i+1} = b_{i+1}, \cdots, a_n = b_n}$ $a_k = b_k$ $(\forall k > i)$.

则有 $(b_1 \cdots b_{i-1})^{-1}(a_1 \cdots a_{i-1}) = b_i a_i^{-1} \in G_1 \cdots G_{i-1} \cap G_i$，这与但

$b_i a_i^{-1} \neq e$，这与条件(3)矛盾. 故内直积定义的(1)成立. [注：因 $G_i \triangleleft G$,

故 $G_i G_j = G_j G_i$ $(\forall i, j) \Leftrightarrow G_i G_j \leqslant G$. 进而 $G_{i_1} G_{i_2} \cdots G_{i_k}$（集合乘法）仍

是 G 的子群]

下证内直积定义的(2)成立. $\forall a_i \in G_i$, $\forall a_j \in G_j$, $i \neq j$. 考虑 a_i, a_j 的

换位子：$\underbrace{a_i \overbrace{a_j a_i^{-1} a_j^{-1}}^{\in G_i \triangleleft G}}_{\in G_j \triangleleft G} \in G_i \cap G_j = \{e\} \Rightarrow a_i a_j = a_j a_i$. ∴ 内直积定义(2)成立.

和 ∴ G 是子群 $G_1, \cdots, G_n$ 的内直积. ∎

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 ______________________ 姓名 ________

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 ______________________ 姓名 ________

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 ____ 姓名 _______

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 ______________________ 姓名 ________

上 海 交 通 大 学 试 卷（草稿纸）

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 ______________________________ 姓名 ________

上 海 交 通 大 学 试 卷（草稿纸）

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

课程名称 ________________________ 姓名 ________