思考题大作业——循环群的直和

危国锐　516021910080

（上海交通大学电子信息与电气工程学院，上海 200030）

摘　要：循环群的外直和未必是循环群. 当两个循环群的阶互素时，它们的外直和是循环群. 进而，有限个群阶两两互素的循环群的外直和仍是循环群. 另外，单位元群（是循环群）与任何循环群的直和都是循环群. 有两个循环群，若它们的外直和是循环群，则它们必须且只需满足：有一个单位元群，或二者的阶互素. 进而，有有限个循环群，若它们的外直和是循环群，则它们必须且只需满足：只有一个非单位元群，或阶两两互素.

关键词：词 1，词 2

Straight Sum of Circulating Groups

Guorui Wei　516021910080

(*School of Electronic Information and Electrical Engineering*,

Shanghai Jiao Tong University, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Abstract.

Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Motivation

本文将探究以下问题：
（1）循环群的外直和一定是循环群吗？
（2）在什么条件下，循环群的外直和仍是循环群？
（3）若有两个循环群，它们的外直和是循环群，那么这两个循环群要满足什么条件？

2 主要结果

2.1 循环群的外直和未必是循环群

在 2022 年 4 月 6 日的课堂上，蒋老师给出了以下两个例子.

例 2.1 记 $K_4 \coloneqq \{e, a, b, ab\}$ 为 Klein 四元群，$H_1 \coloneqq \langle a\rangle, H_2 \coloneqq \langle b\rangle$. 则有 $K_4 = H_1 \oplus H_2$. ■

例 2.2 设 $G_1 \coloneqq \langle a\rangle, G_2 \coloneqq \langle b\rangle, o(a) = 3, o(b) = 5$，$G$ 是 G_1 与 G_2 的外直和. 则 G 是 15 阶循环群. ■

例 2.1 指出，Klein 四元群可分解成两个循环群的内直和，而 Klein 四元群不是循环群. 由于内、外直和在同构意义下是等价的，故例 2.1 实际上给出了两个循环群的（外）直和不是循环群的例子. 而例 2.2 则给出了两个循环群的外直和构成循环群的例子. 可见，循环群的外直和可能是、但未必是循环群.

2.2 两个循环群的外直和

主教材的命题 6.2 已指出：“无限循环群同构于整数加群 $\mathbb{Z}$，n 阶循环群同构于模 n 的剩余类加群 $\mathbb{Z}_n$” (刘绍学 & 章璞, 2011, p. 49). 因此，在同构意义下，只需研究 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}_n$ 这两个循环群.

2.2.1 有限循环群与无限循环群的外直和

命题 2.3 m 是正整数. $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}$ 是循环群，当且仅当 $m = 1$.（注：$\mathbb{Z}_1$ 是单位元群）

证 必要性. 若 $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}$ 是循环群，设 $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z} = \langle(\bar{a}, b)\rangle$，则 $\mathbb{Z}_m = \langle\bar{a}\rangle, \mathbb{Z} = \langle b\rangle \Rightarrow (a, m) = 1, b = \pm 1$. 考虑 $(\bar{a}, m) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}$. 必存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $(\bar{a}, m) = k(\bar{a}, \pm 1)$. 从而有 $k = \pm m$，于是 $\bar{a} = \pm m\bar{a} \Leftrightarrow m|(1 \pm m)a$. 又因为 $(a, m) = 1$，故 $m|(1 \pm m) \Rightarrow m = 1$.

充分性. 显然有 $\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z} = \langle(\bar{0}, \pm 1)\rangle$. ■

2.2.2 两个无限循环群的外直和

命题 2.4 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 不是循环群.

证 反证法. 若 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 是循环群，设 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle(a, b)\rangle$. 则 $\mathbb{Z} = \langle\bar{a}\rangle, \mathbb{Z} = \langle b\rangle \Rightarrow a, b = \pm 1$. 考虑 $(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, |m| \neq |n|$. 必存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $(m, n) = k(a, b)$. 从而有 $|m| = |ka| = |k| = |kb| = |n|$，这与 $|m| \neq |n|$ 矛盾. 故 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 不是循环群. ■

2.2.3 两个有限循环群的外直和

现将主教材第 2.9 节习题 4 (刘绍学 & 章璞, 2011, p. 73):

4. 设m, n为正整数.证明$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong Z_{mn}$ 当且仅当$(m,\ n) = 1$.

(提示：充分性：考虑映射π : $Z_m \oplus Z_n \longrightarrow Z_{mn}$, $(\bar{s},\ \bar{t}) \mapsto \overline{sn + tm}$; 必要性：若$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \langle a \rangle$, 则$\mathbb{Z}_m = \langle a^n \rangle$, $\mathbb{Z}_n = \langle a^m \rangle$; 再利用$\langle a^m \rangle \cap \langle a^n \rangle = \langle a^{[m,n]} \rangle$.)

写成下面的定理.

定理 2.5 设 m, n 为正整数. $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ 当且仅当 $(m, n) = 1$.

证 这定理在我的第 8 周作业（截止日期：2022 年 4 月 13 日）中已证过，现附于下.

4. 证: "$\Leftarrow$". 考虑映射(待证) π: $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{mn}$,

$(\bar{s}, \bar{t}) \mapsto \overline{sn + tm}$. 有 "$(\bar{s}_1, \bar{t}_1) = (\bar{s}_2, \bar{t}_2) \Longleftrightarrow$

$m \mid s_1 - s_2$ 且 $n \mid t_1 - t_2 \overset{(m,n)=1}{\Longleftrightarrow} mn \mid (s_1 - s_2)n + (t_1 - t_2)m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi(\bar{s}_1, \bar{t}_1) = \pi(\bar{s}_2, \bar{t}_2)$.

从左推右 $\Rightarrow$ π 是映射; 从右推左 $\Rightarrow$ π 是单射.

$(m, n) = 1 \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$: $am + bn = 1$. $\therefore \forall\, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{mn}$,

$\exists\, (\overline{yb}, \overline{ya}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$: $\pi(\overline{yb}, \overline{ya}) = \overline{y(bn + am)} = \bar{y}$.

$\therefore$ π 是满射. 又 $\forall\, (\bar{s}_1, \bar{t}_1), (\bar{s}_2, \bar{t}_2) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, 有 $\pi((\bar{s}_1, \bar{t}_1) + (\bar{s}_2, \bar{t}_2))$

$= \pi((\overline{s_1 + s_2}, \overline{t_1 + t_2})) = \overline{n(s_1 + s_2) + m(t_1 + t_2)} = \pi(\bar{s}_1, \bar{t}_1) + \pi(\bar{s}_2, \bar{t}_2)$ - 11 -

$\Rightarrow \pi$ 是同态. $\therefore \pi$ 是 $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{mn}$ 的同构.

"$\Rightarrow$". $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn} \Rightarrow \exists (\bar{s},\bar{t}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$:

$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\bar{s},\bar{t})\rangle$, $o(\bar{s},\bar{t}) = |\mathbb{Z}_{mn}| = mn$.

$\therefore \mathbb{Z}_m = \langle \bar{s} \rangle$, $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{t} \rangle$. $\Rightarrow o(\bar{s}) = |\mathbb{Z}_m| = m$,

$o(\bar{t}) = |\mathbb{Z}_n| = n$. 又已证 $o(\bar{s},\bar{t}) = [o(\bar{s}), o(\bar{t})]$ (注),

$\Rightarrow mn = [m,n] \Rightarrow (m,n) = \frac{mn}{[m,n]} = 1$.

注: 对 "$o(\bar{s},\bar{t}) = [o(\bar{s}), o(\bar{t})]$" 的证明.

由 $(\bar{s},\bar{t})^{[o(\bar{s}),o(\bar{t})]} = (0,0)$, $\Rightarrow o(\bar{s},\bar{t}) \mid [o(\bar{s}),o(\bar{t})]$.

由 $(\bar{s},\bar{t})^{o(\bar{s},\bar{t})} = \left(\bar{s}^{o(\bar{s},\bar{t})}, \bar{t}^{o(\bar{s},\bar{t})}\right) = (0,0) \Rightarrow o(\bar{s}) \mid o(\bar{s},\bar{t})$ 且 $o(\bar{t}) \mid o(\bar{s},\bar{t})$

$\Rightarrow [o(\bar{s}),o(\bar{t})] \mid o(\bar{s},\bar{t})$. $\therefore o(\bar{s},\bar{t}) = [o(\bar{s}), o(\bar{t})]$.

■

利用定理 2.5，便可得到本文的主要结论.

定理 2.6 有两个有限循环群. 它们的外直和是循环群，当且仅当二者的阶互素.

证 充分性. 由定理 2.5 的“当”部分立得.

必要性. 若两个循环群的外直和是循环群，则由命题 2.3 和命题 2.4 可得它们必是有限群. 再由定理 2.5 的“仅当”部分，便证得必要性.

■

2.3 有限个有限循环群的外直和是循环群的充要条件

推论 2.7 有有限个有限循环群. 它们的外直和是循环群，当且仅当它们的阶两两互素.

证 从略.

■

3 结论

通过上文的讨论，我们得到了主要结果——定理 2.6 和推论 2.7. 现在，我们对本文开头提出的三个问题：

（1）循环群的外直和一定是循环群吗？

（2）在什么条件下，循环群的外直和仍是循环群？

（3）若有两个循环群，它们的外直和是循环群，那么这两个循环群要满足什么条件？作以下回答.

1. 循环群的外直和未必是循环群.

例 2.1 给出了循环群的（外）直和不是循环群的例子，例 2.2 给出了循环群的外直和仍是循环群的例子.

2. 当两个循环群的阶互素时，它们的外直和是循环群. 进而，有限个群阶两两互素的循环群的外直和仍是循环群. 另外，单位元群（是循环群）与任何循环群的直和都是循环群.

见命题 2.3，定理 2.6 和推论 2.7.

3. 有两个循环群，若它们的外直和是循环群，则它们必须且只需满足：有一个单位元群，或二者的阶互素. 进而，有有限个循环群，若它们的外直和是循环群，则它们必须且只需满足：只有一个非单位元群，或阶两两互素.

见命题 2.3，定理 2.6 和推论 2.7.

4 致谢

命题 2.3 的证明模仿了谭宇（学号：519020910083）同学的作业，全文结构和主要结论也受到他的作业的启发. 在此向他表示感谢.

References

刘绍学, & 章璞. (2011). *近世代数导引* (1 ed.). 高等教育出版社.