第 12 周作业

危国锐 516021910080
（上海交通大学电子信息与电气工程学院，上海 200030）

摘 要： 主教材：[1]. 截止日期：2022-05-11.
关键词： 词 1，词 2

Homework (Week 12)

Guorui Wei 516021910080
(*School of Electronic Information and Electrical Engineering*,
Shanghai Jiao Tong University, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Textbook: [1]. Due date: 2022-05-11.
Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-05-11

(v) (p.96) 15 (v) 证: 取 $r\in R$, $r\neq 0_R$. 则 $\alpha := \sum_{g\in G} rg \in R[G]$, $\alpha\neq 0_{R[G]}$.

$\forall g_1\in G$, $g_1\neq e_G$ [$\because |G|>1$, $\therefore$ 必可取到], $\forall r'\in R$ ($r'\neq 0_R$), 有

$$\underbrace{r'g_1}_{\in R[G]}\cdot\alpha = r'g_1\cdot\sum_{g\in G} rg = \sum_{g\in G} r'r(g_1g) \xlongequal{|G|\text{有限, 左消去律}} \sum_{g\in G} r'rg$$

$$= r'e_G\cdot\sum_{g\in G} rg = r'e_G\cdot\alpha,$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[r'g_1 + (-r')e_G\right]}_{=:\beta\in R[G]}\cdot\alpha = 0_{R[G]}.$$

$\because r'\neq 0$, $g_1\neq e_G$, $\therefore \beta\neq 0_{R[G]}$

$\Rightarrow$ β,α 是 $R[G]$ 的左、右零因子

$\Rightarrow$ $R[G]$ 是有零因子环. □

MATH2401 Homework (Week 12) 2022.05.11 (due)

(p.103) 1. 证: "$\Rightarrow$" 显然. 下证充分性 ("$\Leftarrow$").

$u\in I$, u可逆 $\Rightarrow$ $1 = uu^{-1}\in I$ ("吸收性") $\Rightarrow$ $\forall r\in R$: $r = \underbrace{1}_{\in I}\cdot r\in I$

$\Rightarrow R\subseteq I \xRightarrow{I\subseteq R} I = R$. 证毕.

设 I 是除环 R 的理想. R 除 0 外皆可逆. 由上证的定理 $\Rightarrow$ I 只能为 $\{0\}$ 或 R. $\therefore$ 除环是单环. 域是除环, 故也是单环.

2. 证: (i) $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) \xRightarrow[\text{消去律}]{(R,+)\text{群}} f(0) = 0$.

$f(-r)+f(r) = f(r-r) = f(0) = 0 \overset{\text{"}f(r)+f(-r)\text{"}}{\Rightarrow} f(r) = -f(r)$.

(ii) f是$R\to R'$同态 $\Rightarrow$ $\forall a\in R$, 有 $f(a)f(1) = f(a\cdot 1) = f(a) = f(1)\cdot f(a)$.

又f是满的, $\therefore$ 当a取遍R时, $f(a)$取遍R'. $\therefore$ $f(1)$是R'的单位元,

i.e. $f(1) = 1$. $\Rightarrow$ $f(r)f(r^{-1}) = f(r\cdot r^{-1}) = f(1) = 1 = f(r^{-1})f(r)$, $\forall r\in U(R)$.

$\Rightarrow$ $f(r^{-1}) = (f(r))^{-1}$, $\forall r\in U(R)$.

当f不满时, 上述结论未必成立.

-18-

(p.103) 2. 证：(iii) 只需证明 $(R'^*, \cdot)$ 作成 Abel 群.

~~R'是环 ⇒ · 是 R' 的运算, 且~~

$\forall a', b' \in R'$, $a', b' \neq 0'$. 因 f 是 $R \to R'$ 环同构, 故 $\exists!\, a, b \in R$: $a' = f(a)$, $b' = f(b)$, 且 $a, b \neq 0$. $\Rightarrow a'b' = f(a)f(b) = f(ab)$. 又 R 是域 $\Rightarrow$ R 无零因子 $\Rightarrow ab \neq 0 \Rightarrow f(ab) \neq 0 \Rightarrow a'b' = f(ab) \neq 0 \Rightarrow R'$ 无零因子

$\Rightarrow$ · 是 R'^* 的运算. 自然满足结合律.

$\forall r' \in R'^*$, $\exists!\, r \in R: r' = f(r)$, 且 $r' \cdot f(1) =$ $f(r)f(1) = f(r \cdot 1) \overset{r \neq 0}{=} f(r) = f(1) \cdot r'$. ~~又 f(r) 有逆~~

$\Rightarrow f(1)$ 是 R'^* 的单位元. 又有 $f(r^{-1}) \cdot r' = f(r^{-1} \cdot r) = f(1) = f(r^{-1})\, r'$, $\Rightarrow \forall r' \in R'$ 有逆元.

$\forall a', b' \in R'$, $\exists!\, a, b$ s.t. $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, 且 $a'b' = f(a)f(b) = f(ab)$ $= f(ba) = f(b)f(a) = b'a'$ $\Rightarrow (R'^*, \cdot)$ 交换.

$\therefore (R'^*, \cdot)$ 作成 Abel 群 $\overset{环}{\Rightarrow} (R', +, \cdot)$ 是域.

(iv) 由 (ii) 立得. 注: F 是域 $\Rightarrow U(F) = F^*$. 皋

(p.104) 3. 证: 显然 $\oplus$ 是 R 的运算, 且满足结合律, 交换律. -1 是 $(R, \oplus)$ 的零元. $\forall r \in R$, 有关于 $\oplus$ 的负元 $-r-2$. $\therefore (R, \oplus)$ 是 Abel 群.

显然 $\odot$ 是 R 的运算, 可验证 $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ (结合律).

0 是 $(R, \odot)$ 的单位元. $\therefore (R, \oplus, \odot)$ 是有单位元的环.

易验证, $\phi: (R, +, \cdot) \to (R, \oplus, \odot)$, $a \mapsto a - 1$, $\forall a \in R$. 是同构. [$\phi(a) \oplus \phi(b) = a-1 \oplus b-1 = a+b-1 = \phi(a+b)$,

$\phi(a \cdot b) = ab - 1 = \cdots = \phi(a) \odot \phi(b)$. ϕ 是 $R \to R$ 双射]

$\therefore (R, +, \cdot) \cong (R, \oplus, \odot)$. 皋

(p.104) 5. 证：只需证 I 具有"吸收"性.

$\forall a\in I, \forall r\in R$, 有 $(a+I)(r+I) = ar + I$ （R/I 中 · 的定义）.

又有由 $a+I = 0+I$, 有 $(a+I)(r+I) = (0+I)(r+I) = 0+I$.

因 · 是 R/I 中的运算，故 $ar + I = 0 + I \Rightarrow ar \in 0+I = I$. ∎

6. 证：由 (p.101) 引理 2.5(i), $Ker f$ 是 R 的理想. 因 R 是单环，

故 $Ker f = \{0\}$ 或 R, $\Leftrightarrow$ f 是单同态或 $f=0$.

7. 解：是同构. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \underbrace{\bar{1}}_{有unit}, \bar{2}\}$,

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}', \bar{1}', \dots, \bar{5}'\}$ 的子环 $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}', \bar{2}', \underbrace{\bar{4}'}_{单位元}\}$.

定义 $\phi: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\bar{1} \mapsto \bar{4}'$, $\bar{0} \mapsto \bar{0}'$, $\bar{2} \mapsto \bar{2}'$. 容易验证 ϕ 是同构 [双射, 保持加, 乘法]. 故～.

8. 证：先证 $I := \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$ 是 R 的子加群.

$\forall a,b\in I$, $\exists N_1, N_2 \geq 1$, 有 $\forall n > N_1$: $a\in I_n$ 且 $\forall n > N_2$: $b \in I_n$.

$\Rightarrow$ $\cancel{a+b^{-1}}$ $a-b$ $\in I_n$ $(\forall n > \max\{N_1, N_2\})$ $\Rightarrow a-b\in I \Rightarrow (I,+) \lhd (R,+)$.

再证 I 具有"吸收"性. $\forall a\in I, \forall r\in R$, 有 $ar \in I_n$ ($\exists N_1, \forall n > N_1$)

$\Rightarrow$ $ar\in I$.

$\therefore$ I 是 R 的理想. ∎

10. 证：先证 ψ 是单射. 假设 $\psi(J_1) = \psi(J_2)$ i.e. $J_1/I = J_2/I$.

$\forall a\in J_1$, 有 $a+I \in J_1/I = J_2/I \Rightarrow \exists b\in J_2$: $a+I = b+I \in J_2/I$.

$\Rightarrow$ $a-b\in I$ $\cancel{= 0+I}$ $\subseteq J_2$. $\Rightarrow a = a-b+b \in J_2$.

$\Rightarrow$ $J_1 \subseteq J_2$. 同理, $J_2 \subseteq J_1$. $\therefore J_1 = J_2$. $\Rightarrow \psi$ 单. （转下页） -20-

(p.104) 10. 证(接上页) ~~(b)~~ 再证 ψ 是$^{\Gamma\to\Omega}$满射. Ω 中的元素是 R/I 的理想，从而是 R/I 的子环，由子环对应定理 (p.102, 定理2.9 (i))，必形如 J/I，其中 J 是 R 的包含 I 的子环. 故只需证 J 是 R 的理想 [这样，便 $\exists J\in\Gamma$: $\psi(J)=J/I$，从而 ψ 是满射]. 事实上，$\forall a\in J$, $\forall r\in R$,

有 $\underbrace{(a+I)}_{\in J/I}\underbrace{(r+I)}_{\in R/I} \in J/I$ [因 J/I 是 R/I 的理想，有吸收律].

$\Rightarrow \exists\ b\in J$: $(a+I)(r+I) = ar+I = b+I \in J/I$.

$\Rightarrow ar-b \in I \overset{\subseteq J}{\Rightarrow} ar = \underbrace{ar-b}_{\in J} + \underbrace{b}_{\in J} \in J$

$\Rightarrow$ J 具有吸收律 $\xrightarrow[J\supseteq I]{J\text{是}R\text{的子环}}$ J 是$_{R的}$包含 I 的理想. 自.

$\therefore$ ψ 是 $\Gamma\to\Omega$ 的双射.

11. ~~解~~ (i) 证: 设 $a^{m_1}=0$, $b^{m_2}=0$. 因 $ab=ba$，故 则有

$$(a+b)^{m_1+m_2-1} = \sum_{k=0}^{m_1+m_2-1} C_{m_1+m_2-1}^{k}\, a^k\, b^{m_1+m_2-1-k}.$$

当 $k\geqslant m_1$，由 $a^k=0$ $\Rightarrow$ 各项为零. 当 $k\leqslant m_1-1$，有 $m_1+m_2-1-k \geqslant m_2 \Rightarrow$ 各项为零.

$\Rightarrow (a+b)^{m_1+m_2-1}=0$. $\Rightarrow$ $a+b$ 也是幂零元.

(ii) 未必成立. 考虑数域 F 上的二阶全矩阵环 $M_2(F)$. $\begin{bmatrix} & 1\\ 0 & \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} & \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 均是 $M_2(F)$ 的幂零元，但二者之和不是幂零元.

(iii) 证: $\forall a,b\in N$，则 $-a,-b$, $a+b$ 均幂零 $\Rightarrow (N,+)\lhd(R,+)$

$\forall n\in N$, $\forall r\in R$, 显然 nr 也幂零 $\Rightarrow nr\in N$ [吸收律] $\Rightarrow$ N 是 R 的理想.

设 $r+N\in R/N$ $(r\in R)$ 是 R/N 的幂零元，即 $\exists\ m$: $(r+N)^m = r^m+N = N$

$\Rightarrow r^m\in N \Rightarrow r$ 也是幂零元 $\Rightarrow r\in N \Rightarrow r+N = N$ (是 R/N 的零元).

$\therefore$ R/N 的幂零元只有零元 N. 自

(p.105) 12. 证：先证 $(\sqrt{I},+) \leqslant (R,+)$. $\forall\, a\in\sqrt{I}$, $\exists\, m\geqslant 1$: $a^m\in I$.

$\Rightarrow \underbrace{(-a)^m} = (-1)^m \underbrace{a^m}_{\in I} \in I \Rightarrow -a\in\sqrt{I}$. ~~$\forall\, b\in\sqrt{I}$, $\exists\, n\geqslant 1$~~

$\forall\, a,b\in\sqrt{I}$, $\exists\, m,n\geqslant 1$: $a^m\in I$, $b^n\in I$.

$\Rightarrow (a+b)^{m+n-1} \overset{ab=ba}{=\!=} \sum_{k=0}^{m+n-1} C_{m+n-1}^{k}\, a^k\, b^{m+n-1-k}$. 因 $k\geqslant m$ 和 $m+n-1-k\geqslant n$ 至少有1个成立，由 I 的（R的理想）的吸收性 $\Rightarrow (a+b)^{m+n-1}\in I$

$\Rightarrow a+b\in\sqrt{I}$. $\therefore (\sqrt{I},+) \lhd (R,+)$.

再证 $\sqrt{I}$ 具有吸收性. $\forall\, a\in\sqrt{I}$, $\forall\, r\in R$, $\exists\, m\geqslant 1$: $a^m\in I$

$\Rightarrow (ar)^m = \underbrace{a^m}_{\in I} r^m \in I \Rightarrow ar\in\sqrt{I}$.

$\therefore \sqrt{I}$ 是 R 的理想. ∎

14. 证：(i) $(\mathbb{Z},+)$ 的生成元只有 $1,-1$. (p.51)，而群同构必将生成元映到生成元(p.51)，故 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z},+)=\{\mathrm{Id},\sigma\}$，$\mathrm{Id}$ 是 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 恒等映射，σ : $1\mapsto -1$，$m\mapsto -m$，$\forall\, m\in\mathbb{Z}$. 显然 Id 也是 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 的环自同构. 而 $\sigma(1\cdot 1) = -1 \neq 1 = \sigma(1)\sigma(1)$，故 σ 不是 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 的环自同构. $\therefore \mathrm{Aut}(\mathbb{Z},+,\cdot)=\{\mathrm{Id}\}\cong\{1\}$.

(ii) 设 ψ : $\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ 环同构. 则 ψ 是 $(\mathbb{Z}_n,+)$ 的群自同构. 记 $\psi(\bar{1})=\bar{i}$，$1\leqslant i<n$，因 $\bar{i}$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 的生成元 $\Leftrightarrow (i,n)=1$，故 $(i,n)=1$.

又 ψ 是环同构 $\Rightarrow \psi(\bar{1}\cdot\bar{1}) = \bar{i}^2 = \overline{i^2} = \psi(\bar{1}) = \bar{i} \Rightarrow n \mid i^2-i = i(i-1)$

$\xRightarrow{(n,i)=1} n\mid i-1 \xRightarrow{1\leqslant i<n} i-1=0 \Rightarrow i=1 \Rightarrow \psi=\mathrm{Id}$.

$\Rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)=\{\mathrm{Id}\}\cong\{1\}$. ∎

-22-

References

[1] 刘绍学, 章璞. 近世代数导引 [M]. 1 ed. 北京: 高等教育出版社, 2011.