第 8 周作业

危国锐　516021910080
（上海交通大学电子信息与电气工程学院，上海 200030）

摘　要：主教材：[1]. 截止日期：2022-04-13. 注：图 1.1　习题 2.9 第 1 题的参考解答. 我看不懂，请求帮助！

关键词：词 1，词 2

Homework (Week 8)

Guorui Wei　516021910080
(*School of Electronic Information and Electrical Engineering*,
Shanghai Jiao Tong University, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Textbook: [1]. Due date: 2022-04-13.

Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-04-13

MATH2401 Homework 2022.04.13 (due date)

(p.64) 4. 解: Sylow 定理 (p.62): 设 G 是有限群, 其阶为 $n=p^r m$, 其中 p 是素数, $r\geq 1$, 则 G 中存在 p^r 阶子群.

由此可知, 若素数 $p\mid n$, 则 n 阶群必有 p 阶子群.. 而素数阶群必为循环群 [设群 G 的阶 $|G|=p$, p 为素数. $\forall e\neq g\in G$, 由 Lagrange 定理知 $o(g)\mid |G|=p \overset{o(g)\neq 1}{\Rightarrow} o(g)=p \Rightarrow G=\langle g \mid g\neq e\rangle$.], 其生成元便是一个 p 阶元.

5. 证: H 的两个共轭子群 $g_1Hg_1^{-1}$, $g_2Hg_2^{-1}$, $g_1,g_2\in G$, 相等, iff.

$$g_1Hg_1^{-1}=g_2Hg_2^{-1} \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2H = Hg_1^{-1}g_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} g_1^{-1}g_2\in N_G(H)$$

$\Leftrightarrow g_1N_G(H)=g_2N_G(H)$. 故 H 的共轭子群的个数, 就是 $N_G(H)$ 在 G 中的左陪集的个数 $[G:N_G(H)]=|G|/|N_G(H)|$.

9. 证: (p.59) 推论 8.3: p^n 阶群 (p 素, $n\geq 1$) 有非平凡的中心; 故由此 $\Rightarrow$ p^2 阶群 G 的中心 $C(G)$: $|C(G)|>1$.

由 Lagrange 定理 $\Rightarrow |C(G)| \mid |G|=p^2 \Rightarrow |C(G)|=p$ 或 p^2.

若 $|C(G)|=p$, 则 $G/C(G)$ (商群) 的阶 $|G/C(G)| = \frac{|G|}{|C(G)|}=p$,

$\Rightarrow G/C(G)$ 为循环群 (素数阶) $\xrightarrow{(p.67)5}$ G is Abel $\Rightarrow C(G)=G$

$\Rightarrow |C(G)|=|G|=p^2$, 矛盾. 故 $|C(G)|=p^2=|G| \Rightarrow G=C(G)$

$\Rightarrow G$ is Abel.

-10-

(p.64) 10. 证: 设(非Abel)群 G: $|G|=p^3$, p为素数. 由Lagrange定理 $\Rightarrow$

$|C(G)| \mid |G|=p^3$. 由(p.59, 推论8.3) $\Rightarrow |C(G)|>1$. 已知 G 非Abel $\Rightarrow C(G) \subsetneqq G \Rightarrow |C(G)|<|G|=p^3$. $\therefore$ $|C(G)|$ 只可能是 p 或 p^2.

若 $|C(G)|=p^2$, 则商群($C(G) \lhd G$) $G/C(G)$ 的阶 $\cancel{\frac{|G|}{|C(G)|}}$

$$\left|G/C(G)\right| \xlongequal{\text{Lagrange}} \frac{|G|}{|C(G)|} = p \xRightarrow{\text{素数阶}} G/C(G) \text{ 为循环群}$$

$\xRightarrow{(p.47,\ 6.5)}$ G is Abel, 与已知条件矛盾.

故 $|C(G)|$ 只能是 p. $\Rightarrow$ $C(G)$ 是 p 阶循环群 $\xRightarrow{(\text{prop } 6.2,\ p.49)} C(G)\cong \mathbb{Z}_p$.

Δ (p.73) 1. 将"$\oplus$"按内直和理解, 则待证问题重述为如下.

$f: G\to G'$ 群同构. $G = H\oplus K$, $H,K \le G$. $G' = H'\oplus K'$, $K',H' \le G'$, $K'=f(K)$. 求证: $H\cong H'$. [求助!]

4. 证: "$\Leftarrow$". 考虑映射(待证) $\pi: \mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{mn}$,

$(\bar{s},\bar{t}) \mapsto \overline{sn+tm}$. 有 "$(\bar{s}_1,\bar{t}_1)=(\bar{s}_2,\bar{t}_2) \Longleftrightarrow$

$m \mid s_1-s_2$ 且 $n \mid t_1-t_2 \overset{(m,n)=1}{\Longleftrightarrow} mn \mid (s_1-s_2)n+(t_1-t_2)m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \pi(\bar{s}_1,\bar{t}_1)=\pi(\bar{s}_2,\bar{t}_2)$.

从左推右 $\Rightarrow$ π 是映射; 从右推左 $\Rightarrow$ π 是单射.

$(m,n)=1 \Rightarrow \exists\, a,b\in\mathbb{Z}: am+bn=1$. $\therefore \forall\, \bar{y}\in\mathbb{Z}_{mn}$,

$\exists\, (\overline{yb},\overline{ya})\in \mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n: \pi(\overline{yb},\overline{ya}) = \overline{y(bn+am)} = \bar{y}$.

$\therefore$ π 是满射. 又 $\forall (\bar{s}_1,\bar{t}_1),(\bar{s}_2,\bar{t}_2)\in\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$, 有 $\pi((\bar{s}_1,\bar{t}_1)+(\bar{s}_2,\bar{t}_2))$

$=\pi((\overline{s_1+s_2},\overline{t_1+t_2})) = \overline{n(s_1+s_2)+m(t_1+t_2)} = \pi(\bar{s}_1,\bar{t}_1)+\pi(\bar{s}_2,\bar{t}_2)$

- 11 -

$\Rightarrow \pi$是同态. $\therefore \pi$是$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{mn}$的同构.

"$\Rightarrow$". $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn} \Rightarrow \exists (\bar{s},\bar{t}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$:

$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle (\bar{s},\bar{t}) \rangle$, $o(\bar{s},\bar{t}) = |\mathbb{Z}_{mn}| = mn$.

$\therefore \mathbb{Z}_m = \langle \bar{s} \rangle$, $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{t} \rangle$. $\Rightarrow o(\bar{s}) = |\mathbb{Z}_m| = m$,

$o(\bar{t}) = |\mathbb{Z}_n| = n$. 又已证 $o(\bar{s},\bar{t}) = [o(\bar{s}), o(\bar{t})]$ (注),

$\Rightarrow mn = [m,n] \Rightarrow (m,n) = \frac{mn}{[m,n]} = 1.$ #

注: 对"$o(\bar{s},\bar{t}) = [o(\bar{s}), o(\bar{t})]$"的证明.

由 $(\bar{s},\bar{t})^{[o(\bar{s}),o(\bar{t})]} = (0,0)$, $\Rightarrow o(\bar{s},\bar{t}) \mid [o(\bar{s}), o(\bar{t})]$.

由 $(\bar{s},\bar{t})^{o(\bar{s},\bar{t})} = \left(\bar{s}^{o(\bar{s},\bar{t})}, \bar{t}^{o(\bar{s},\bar{t})}\right) = (0,0) \Rightarrow o(\bar{s}) \mid o(\bar{s},\bar{t})$ 且 $o(\bar{t}) \mid o(\bar{s},\bar{t})$

$\Rightarrow [o(\bar{s}), o(\bar{t})] \mid o(\bar{s},\bar{t})$. $\therefore o(\bar{s},\bar{t}) = [o(\bar{s}), o(\bar{t})]$.

-12-

注：第 2.9.1 题的参考解答（下图）我看不太懂，请求帮助！

习题2.9

1. 注意：有同学直接证明$f(H)+f(K)$是直和，这是不对的.

可以用(h,k)表示$H\oplus K$的元素, 用矩阵形式表示同构f, 因为$f(K)=K'$, 所以

$$f=\begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

其中$f_{11}:H\mapsto H'$, $f_{21}:H\mapsto K'$, $f_{22}:K\mapsto K'$, $f(h,k)=(f_{11}(h),f_{21}(h)+f_{22}(k))$.

下面只需证明f_{11} 是群同构, f_{11}也可以通过f与$H'\oplus K'$到H'的投影的复合得到, 因此, f_{11} 是群同态(也可以用定义验证)。

f_{11}是满射,是说明略。证明f_{11} 是单射, 设$h\in H$ 使得$f_{11}(h)=0$, 因为$f_{22}(K)=f(K)=K'$, 所以存在$k\in K$, 使得$f_{22}(k)=-f_{21}(h)$. 因此可验证$(h,k)\in \mathrm{Ker}f$, 所以$h=0$.

图 1.1 习题 2.9 第 1 题的参考解答. 我看不懂，请求帮助！

References

[1] 刘绍学, 章璞. 近世代数导引 [M]. 1 ed. 北京: 高等教育出版社, 2011.