# 上海交通大学期末试卷（A）

**(2021 至 2022 学年第 2 学期. 本试题满分 100 分)**

课程名称：抽象代数　　　班级：

学号：　　　　　　　姓名：　　　　　成绩:

我承诺，我将严格遵守考试纪律。承诺人：

说明：不用抄题目，但需把题目的大小题号写清楚。

一. 判断是非并说明理由 (满分 25 分，每小题 5 分)

1. 存在 8 阶单群。

2. 设交换非零环 $R$, 则 $R$ 的极大理想一定是素理论。

3. 有限整环是域。

4. 27 元域存在一个 9 元的子域。

5. 整环都是唯一因子分解环，唯一因子分解环都是主理想整环。

二. 解答题（满分 29 分, 前 4 小题 20 分，后 3 小题 9 分)

1. 求 27 阶非 Abel 群 $G$ 的中心。

2. 求有理数域的扩域 $Q(\sqrt{2}\,)$ 的自同构群。

3. 求正六面体的旋转群的阶。

4. 设 $E$ 是多项式 $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 - 3)$ 在有理数域 $Q$ 上的分裂域，求伽罗瓦群 $Gal(E/Q)$ 的阶

5. 写出一个有限的非交换的单环的例子。

6. 在高斯整环 $\mathbb{Z}[i]$ 中，把 $99 + 27i$ 分解为不可约元的乘积。

7. 在多项式环 $\mathbb{Z}_{11}[x]$ 中, 求 $(6x + 2)^{11}$

三. (16 分) 对 4 次对称群 $S_4$, 完成下列问题。

(1). 写出它的一个生成元集；

(2). 写出它所有的共轭类，确定它所有的正规子群；

(3). 确定它 Sylow 子群的个数，并写出阶数小的那一类的全部 Sylow 子群 (注：写出生成元即可)。

四. （10 分) 设多项式 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3 \in Q[x]$.

(1) 判别多项式 $f(x)$ 在 $Q[x]$ 上是否可约？

(2) 设 $v$ 是 $f(x)$ 的一个实根，求 $[Q(v) : Q]$, 并将 $\dfrac{1}{v-1}$ 写成基的 $Q-$ 线性组合。

五. （8 分）4 元域 $F$, 证明

(1) $Char\ F = 2$;

(2) $\forall a \in F, a \neq 0, 1$, 则 $a$ 是方程 $x^2 = x + 1$ 的解。

六. (12 分) 构造 9 元域（写出相应的集合，说明其加法和乘法运算法则），并求出它所有的本原元。