第 3-4 周作业

危国锐 516021910080

（上海交通大学电子信息与电气工程学院，上海 200030）

摘　要：截止日期：2022-03-16.

关键词：词 1，词 2

Homework (Week 3-4)

Guorui Wei 516021910080

(*School of Electronic Information and Electrical Engineering*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Due date: 2022-03-16.

Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-03-16

MATH2401 Homework 2022.03.09 (due date) 03.16

(p.26) 5. 证：下证 $L \subseteq H(K\cap L)$.

$\forall l \in L, \exists h\in H, \exists k \in K: l = hk.$ ($\because l \in L \leq G = HK$)

另外，$L \geq H \Rightarrow hL = L \Rightarrow \exists l_1 \in L: l = hl_1$.

$\Rightarrow hk = l = hl_1 \Rightarrow k = l_1 \in K\cap L \Rightarrow l = hk \in H(K\cap L)$

$\therefore L \subseteq H(K\cap L)$.

显然 $H(K\cap L)\subseteq L$. 故 $L = H(K\cap L)$.

(p.26) 6. 证：$\bigcap_{g\in G} gHg^{-1} \lhd G \iff \forall x \in \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}, \forall g_0\in G: g_0xg_0^{-1} \in \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$.

$\therefore$ 就是要证 $\forall x\in \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}, \forall g_0 \in G, \forall g_1 \in G: g_0xg_0^{-1}\in g_1Hg_1^{-1}$.

事实上，$g_0xg_0^{-1} \overset{\exists h\in H}{=\!=} g_0\left((g_0^{-1}g_1)h(g_0^{-1}g_1)^{-1}\right)g_0^{-1} = g_1hg_1^{-1} \in g_1Hg_1^{-1}$ ($\forall x \in \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$)

$\therefore \bigcap_{g\in G} gHg^{-1} \lhd G$. [H的共轭子群的交是正规子群]

(p.26) 7. 证：$\forall s_1,s_2 \in SL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}): |s_1^{-1}| = 1, |s_1s_2| = 1$

$\Rightarrow s_1^{-1}\in SL_n(\mathbb{R}), s_1s_2\in SL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$.

$\forall g\in GL_n(\mathbb{R}), \forall s\in SL_n(\mathbb{R}): |gsg^{-1}| = |g||s||g^{-1}| = 1$

$\Rightarrow gsg^{-1}\in SL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$.

-1-

(p.27) 8. 证：$\forall s=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_n(\mathbb{Z})$，$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$，$ad-bc=1$：

$s^{-1}=\frac{1}{|s|}s^{*} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in SL_n(\mathbb{Z})$. 又有 $\forall s_1,s_2\in SL_n(\mathbb{Z})$：

$s_1s_2\in SL_n(\mathbb{Z})$. $\therefore SL_n(\mathbb{Z}) \leqslant GL_n(\mathbb{R})$.

[注] $SL_n(\mathbb{Z})$ 不是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的正规子群. 考虑

$g=\begin{bmatrix} 1/3 & \\ & 1 \end{bmatrix}\in GL_n(\mathbb{R})$，$s=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix}\in SL_n(\mathbb{Z})$：

显然 $gsg^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ & 1 \end{bmatrix}\notin SL_n(\mathbb{Z})$. $\therefore SL_n(\mathbb{Z})$ 不是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的正规子群.

(p.32) 1. 解：$\sigma=(452)(523)(321)=(12)\cancel{3}(45)$

2. 证：任一 t-轮换 $(i_1\, i_2 \cdots i_t)=\underbrace{(i_1\, i_t)\cdots(i_1\, i_3)(i_1\, i_2)}_{(t-1\text{个对换的乘积})}$.

3. 证：记 t-轮换 $\pi_t:=(i_1\, i_2\cdots i_t)$，则有 $\pi_t^n(i_k)=i_{k+n}$，

下标为模 t 的加法. $\Rightarrow \pi_t^p\neq(1)$，$p=1,2,\cdots,n-1$，$\pi_t^t=(1)$.

$\Rightarrow o(\pi_t)=t$.

4. 证：记 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s$，其中 σ_i 是，$i=1,\cdots,s$，是互不相交的轮换，$o(\sigma_i)=t_i$.

有 $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$.（互不相交 $\Rightarrow$ 可交换）. 设有正整数 n 使得 $(1)=\sigma^n$.

因为 $(1)=\sigma^n \Leftrightarrow (1)=\sigma_1^n\cdots\sigma_s^n \Leftrightarrow \sigma_i^n=(1),\ \forall i$

$\Leftrightarrow t_i|n,\ \forall i \Leftrightarrow [t_1,\cdots,t_n]\,|\,n$，

故 n 最小可取 $\{t_i\}_{i=1}^{s}$ 的最小公倍数 $[t_1,\cdots,t_n]$，故 $o(\sigma)=[t_1,\cdots,t_n]$.

-2-

(p.32) 5. 证：显然 $\langle (12),(23),\cdots,(n-1\ n)\rangle \subseteq S_n$，故只需证 $S_n \subseteq \langle (12),\cdots,(n-1\ n)\rangle$，

即 $\forall \sigma\in S_n$：σ 可表示成 $(12),\cdots(n-1\ n)$ 的乘积.

(p.29) 已证：σ 可表成对换的乘积，故只需证任一对换可表成 $(12),\cdots,(n-1\ n)$ 的乘积.

任一对换 $(i\,j)=(1\,i)(1\,j)(1\,i)$，故只需证 $(1\,n)$，$\forall n$，可表成 $(12),\cdots,(n-1\ n)$ 的乘积. 事实上，有

$$(1\,n)=(12)(23)\cdots(n-1\ n)(n-2\ n-1)\cdots(23)(12).$$

$\Rightarrow S_n=\langle (12),(23),\cdots,(n-1\ n)\rangle$.

(p.37) 1. 解：$6\nmid 20 \xrightarrow{\text{Lagrange}}$ 20 阶群无 6 阶子群.

2. 证："$\overset{H}{\sim}$ 和 $(\overset{H}{\sim})'$ 相等" $\Longleftrightarrow$ "$a\overset{H}{\sim}b \Longleftrightarrow a(\overset{H}{\sim})'b$, $(\forall a,b\in G)$"；

$\Longleftrightarrow$ "$a\in bH \Longleftrightarrow a\in Hb$, $(\forall a,b\in G)$"

$\Longleftrightarrow$ "$bH=Hb$, $\forall b\in G$"

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $H\lhd G$.

-3-

References

[1] 刘绍学, 章璞. 近世代数导引 [M]. 1 ed. 北京: 高等教育出版社, 2011.