第 6 次作业

危国锐　120034910021

（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘　要：主教材：(胡冠章 and 王殿军, 2006)，学习指导书：(胡冠章, 2012)．截止日期：2022-05-16.

关键词：群对集合的作用，有限可换群的结构

Homework 6

Guorui Wei　120034910021

(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Main textbook: (胡冠章 and 王殿军, 2006), Study guide: (胡冠章, 2012). Due date: 2022-05-16.

Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

摘要 .... **i**
Abstract .... **i**
1 Due date: 2022-05-16 .... **1**
References **3**

1 Due date: 2022-05-16

MATH6013 第6次作业 2022.05.16 (due)

2.9-3. 证(解)：检验"群对集合的作用的定义.

有：(1) $e(aH) = eaH = aH$, ✓; (2) $(g_1g_2)(aH) = g_1g_2aH$ $= g_1(g_2(aH))$. ✓.

求 aH 的 G-轨道 $\Omega_{aH} := \{ g(aH) \triangleq gaH \mid g\in G\}$. 因为 g 遍历 G 中元素, ga 亦取遍 G 中元素 [$\because$ $\forall g'\in G$, 有 $\underbrace{(g'a^{-1})}_{\in G} a = g'$]. 故 $\Omega_{aH} = \Omega$, $\forall aH\in\Omega$.

$\Rightarrow$ G 在 Ω 上可迁.

求 $aH\in\Omega$ 的稳定子群 $G_{aH} := \{ \overset{g\in G}{\forall} \mid g(aH) := gaH = aH \}$. 因此有

$g\in G_{aH} \overset{def}{\Leftrightarrow} g(aH) \triangleq gaH = aH \Leftrightarrow a^{-1}ga\in H \Leftrightarrow g\in aHa^{-1}$,

$\therefore$ $G_{aH} = aHa^{-1}$, $\forall a\in G$.

2.9-4 证：检验满足定义的条件：(1) $e(K) = eK = K$,

(2) $(g_1g_2)(K) = g_1g_2K = g_1(g_2(K))$.

下面讨论可迁性. 记 $|G| =: n$.

(i) 当 $k=1$, $\Omega = \{ \{g\} \mid g\in G \} \overset{"="}{\cong} G$, 这时 G 对 Ω 的作用就是 G(群) 对自身的左平移作用, 是可迁的.

(ii) 当 $k=n$, $\Omega = \{G\}$, 这时 G 对 Ω 的作用成为恒等作用, 而 Ω 是单元集, 故可迁.

(iii) 当 $2\le k\le n-2$ $(n\geq 4)$, 有 $|\Omega| = C_n^k > n$. 假设 G 在 Ω 上可迁, 则有轨道公式 $|\Omega| = |\Omega_a| = [G:G_a] \Rightarrow |G| = |G_a|\cdot|\Omega_a| = |G_a||\Omega| \geq |\Omega| > n = |G|$, 矛盾. $\therefore$ G 在 Ω 上不可迁.

[转下页]

-1-

2.9-4 证[接上页] (iv) 当 $k=n-1$ 时，G 在 Ω 上可迁，证明如下.

记 $K_x := G\setminus\{x\}$, $x\in G$, 则 $\Omega=\{K_x \mid x\in G\}$. $\forall a,b\in G$, $a\neq b$,

有 $b\notin ba^{-1}K_a$ [不然, $\exists\, k\in K_a$: $b=ba^{-1}k \Rightarrow a=k\in K_a := G\setminus\{a\}$, 矛盾]

$(|ba^{-1}K_a|=|K_a|=|G|-1)$

$\Rightarrow$ $ba^{-1}K_a = K_b$ $\Rightarrow$ G 在 Ω 上可迁.

$(ba^{-1})(K_a)$

综上，当 $k=1, n-1, n$; G 在 Ω 上可迁；当 $2\le k\le n-2$, 不可迁. ∎

2.11-2 证 要证 $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$.

因为 (1) $\mathbb{Z}_6$ is Abel $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_2 \lhd \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_3\lhd\mathbb{Z}_6$;

(2) $\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_3=\{k\bar{2}+l\bar{3} \mid k,l\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}_6$;

(3) $\mathbb{Z}_2\cap\mathbb{Z}_3=\{\bar{0}\}$,

由定理 2.11.2, 有 $\mathbb{Z}_6\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$.

2.11-5 解: $45=5^1\times3^2$, $2=2+0=1+1$

$\therefore$ ~~$\mathbb{Z}_{45}\cong$~~ 有 $P(1)P(2)=2$ 个互不同构的 $45=5^1 3^2$ 阶 Abel 群.

$\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{3^2}$, $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

应用定理 2.11.4 表为最简单的形式

A+

-2-

References

胡冠章. 应用近世代数（第三版）学习指导和习题详解[C]//北京:清华大学出版社,2012
胡冠章, 王殿军. 应用近世代数[C]//北京:清华大学出版社,2006