第 3 次作业

危国锐　120034910021
（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘　要：截止日期：2022-04-04.
关键词：词 1，词 2

Homework 3

Guorui Wei　120034910021
(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Due date: 2022-04-04.
Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-04-04

MATH 6013 第三次作业 2022.4.4 (due date)

2.4-1. 证：$\forall j \in \{\tau(i_1), \cdots, \tau(i_k)\}$，利用置换的结合律，有

$$\tau\sigma\tau^{-1}(j) \overset{\exists m}{=} \tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i_m)) = \tau\sigma(i_m) = \tau(i_{m+1}), \quad m = 1, \cdots, k,$$

其中下标为模k的加法.

$\forall j \notin \{\tau(i_1), \cdots, \tau(i_k)\}$，设 $j = \tau(i)$，$i \notin \{i_1, \cdots, i_k\}$，则有

$\sigma(i) = i$，$\Rightarrow \tau\sigma\tau^{-1}(j) = \tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i)) = \tau\sigma(i) = \tau(i) = j$.

综上，$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1), \tau(i_2), \cdots, \tau(i_k))$.

2.4-2. 证：记 $B_n := \{S_n\text{中的奇置换}\}$. 因两奇置换之积为偶置换，故 $\sigma B_n \subseteq A_n \overset{\text{左消去律}}{\Longrightarrow} |B_n| = |\sigma B_n| \le |A_n|$.

另外，因奇置换与偶置换之积为奇置换，故 $\sigma A_n \subseteq B_n$，从而 $|A_n| = |\sigma A_n| \le |B_n|$. $\Rightarrow |A_n| = |B_n|$.

又 $S_n = A_n \cup B_n$，$A_n \cap B_n = \emptyset$，$\Rightarrow |S_n| = |A_n| + |B_n|$.

$\Rightarrow |B_n| = |A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}$.

2.4-5. 证：显然 $\langle (123), (124), \cdots, (12n) \rangle \le A_n$，故只需证 $A_n \subseteq \langle (123), (124), \cdots, (12n) \rangle$，也就是 $\forall \sigma \in A_n$，可将 σ 表示为 $(12i), (12j)$，$i = 3, \cdots, n$，及其逆 $(1i2), (1j2)$ 之乘积. ~~事实上~~，~~有~~ 已证 σ 可表示为偶数个对换之积：$\sigma = (1i_1)(1j_1)\cdots(1i_m)(1j_m)$，而 $(1i)(1j) = (1i2)(12j)(12i)$，故 σ 可表为 $\cdots$.

$\Rightarrow A_n = \langle (123), (124), \cdots, (12n) \rangle$.

-1-

2.5-1. 证：用循环证法.

(1)⇒(2)：$a^{-1}b\in H \Rightarrow \exists h\in H: a^{-1}b=h \Rightarrow b=ah\in aH$.

(2)⇒(3)：$\forall bh\in bH$，有 $bh \overset{b\in aH}{=\!=} ah_1h\ (\exists h_1\in H) = a\underbrace{(h_1h)}_{\in H\leq G}\in aH$，

$\therefore bH\subseteq aH$.

$\forall ah\in aH$，有 $ah \overset{b\in aH^*}{=\!=} (bh_1^{-1})h\ (\exists h_1\in H) = b\underbrace{(h_1^{-1}h)}_{\in H\leq G}\in bH$，

$\therefore aH\subseteq bH. \Rightarrow aH=bH$.

(3)⇒(4)：显然.

(4)⇒(1)：$aH\cap bH\neq\emptyset \Rightarrow \exists x: x\in aH$ 且 $x\in bH$

$\Rightarrow \exists h_1,h_2\in H: ah_1=x=bh_2 \Rightarrow a^{-1}b=h_1h_2^{-1}\in H$. 目.

2.5-3. 解. 由Lagrange定理，A_4的子群的阶必是 $|A_4|=\frac{4!}{2}=12$的因子 1, 2, 3, 4, 6, 12. 对于子群，再利用元素的阶是群的阶的因子，用生成元表示.

一阶子群：$\{(1)\}$； 二阶子群：$\langle(12),(34)\rangle$, $\langle(13),(24)\rangle$, $\langle(14),(23)\rangle$.

三阶子群：$\langle(123)\rangle$, $\langle(124)\rangle$, $\langle(134)\rangle$, $\langle(234)\rangle$.

四阶子群：$\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$.

六阶子群：因A_4中无六阶元，故A_4中的六阶子群只能由一个二阶元和一个三阶元生成. 但找不到这样的六阶子群.

十二阶子群：A_4.

-2-

2.5.4 证：由主教材定理 2.5.3，$|AB| = \frac{|A||B|}{|A\cap B|}$，故只需证 $|A\cap B| = 1$. 事实上，由于 $A\cap B \leq A$，$A\cap B \leq B$，由 Lagrange 定理 $\Rightarrow$ $|A\cap B| \mid |A|$ 且 $|A\cap B| \mid |B|$ $\Rightarrow$ $|A\cap B| \mid (|A|,|B|) = 1$

$\Rightarrow |A\cap B| = 1$.

2.5.6 证：$\forall a\in A$，由 $Ag = Bh$，有 $ag = b_1 h\ (\exists\, b_1\in B) \Rightarrow a = b_1 h g^{-1}$.

又由 $Ag = Bh \Rightarrow g = b_2 h\ (\exists\, b_2\in B) \Rightarrow a = b_1 h (b_2 h)^{-1} = b_1 b_2^{-1} \in B$.

$\therefore A \subseteq B$.

反之，$\forall b\in B$，由 $Ag = Bh$ 得 $bh = a_1 g\ (\exists\, a_1\in A)$

$\Rightarrow b = a_1 g h^{-1}$. 又由 $Ag = Bh \Rightarrow h = a_2 g\ (\exists\, a_2\in A)$

$\Rightarrow b = a_1 g (a_2 g)^{-1} = a_1 a_2^{-1} \in A$. $\therefore B \subseteq A$.

综上，得 $A = B$.

A+

-3-

References

[1] 胡冠章, 王殿军. 应用近世代数 [M]. 3 ed. 北京: 清华大学出版社, 2006.