



第 6 次作业

危国锐 120034910021

(上海交通大学海洋学院, 上海 200030)

摘 要: 主教材: ([胡冠章 and 王殿军, 2006](#)), 学习指导书: ([胡冠章, 2012](#)). 截止日期: 2022-05-16.

关键词: 群对集合的作用, 有限可换群的结构

Homework 6

Guorui Wei 120034910021

(School of Oceanography, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Main textbook: ([胡冠章 and 王殿军, 2006](#)), Study guide: ([胡冠章, 2012](#)). Due date: 2022-05-16.

Keywords: keyword 1, keyword 2



目 录

摘要	i
Abstract.....	i
1 Due date: 2022-05-16	1
References	3



1 Due date: 2022-05-16

MATH6013

第6次作业

2022.05.16 (due)

2.9-3. 证(解): 检验 \checkmark 群对集合 H 作用的定义.

$$\text{有: (1) } e(aH) = eaH = aH, \checkmark; \quad (2) (g_1g_2)(aH) = g_1g_2aH \\ = g_1(g_2(aH)). \checkmark$$

求 aH 的 G -轨道 $\Omega_{aH} := \{ g(aH) \stackrel{\Delta}{=} gaH \mid g \in G \}$. 因 g 遍历 G 中元素, ga 亦取遍 G 中元素 $\because \forall g' \in G, \text{ 有 } \underbrace{(g'a^{-1})}_{\in G} a = g'$, 故 $\Omega_{aH} = \Omega, \forall aH \in \Omega$.
 $\Rightarrow G$ 在 Ω 上可迁.

求 $aH \in \Omega$ 的稳定子群 $G_{aH} := \{ \overset{g \in G}{\underset{\text{def}}{g(aH) \stackrel{\Delta}{=} gaH = aH}} \}$. 因有
 $g \in G_{aH} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} g(aH) \stackrel{\Delta}{=} gaH = aH \Leftrightarrow a^{-1}ga \in H \Leftrightarrow g \in aHa^{-1},$
 $\therefore G_{aH} = aHa^{-1}, \forall a \in G.$

2.9-4 证: 检验满足定义的群: (1) $e(K) = eK = K$,

$$(2) (g_1g_2)(K) = g_1g_2K = g_1(g_2(K)).$$

下面讨论可迁性. 记 $|G| = n$.

(i) 当 $k=1$, $\Omega = \{ \{g\} \mid g \in G \} \stackrel{""}{=} G$, 这时 G 对 Ω 的作用就是 G (群) 对自身的左平移作用, 是可迁的.

(ii) 当 $k=n$, $\Omega = \{G\}$, 这时 G 对 Ω 的作用成为恒等作用, 而 Ω 是单元素集, 故可迁.

(iii) 当 $2 \leq k \leq n-2$, 有 $|\Omega| = C_n^k > n$. 假设 G 在 Ω 上可迁, 则有
 轨道公式 $|\Omega| = |\Omega_a| = [G : G_a] \Rightarrow |G| = |G_a| \cdot |\Omega_a| = |G_a| |\Omega| > |\Omega| > n = |G|,$
 矛盾. $\therefore G$ 在 Ω 上不可迁. [转下页]

-1-



2.9-4 证[接上] (iv) 当 $k = n-1$ 时, G 在 Ω 上可迁, 证明如下.

记 $K_x := G \backslash \{x\}$, $x \in G$, 则 $\Omega = \{K_x \mid x \in G\}$. $\forall a, b \in G$, $a \neq b$,

有 $b \notin ba^{-1}K_a$ [不然, $\exists k \in K_a: b = ba^{-1}k \Rightarrow a = k \in K_a := G \backslash \{a\}$, 矛盾]
 $(|ba^{-1}K_a| = |K_a| = |G|-1)$
 $\Rightarrow ba^{-1}K_a = K_b \Rightarrow G$ 在 Ω 上可迁.

$(ba^{-1})(K_a)$

综上, 当 $k = 1, n-1, n$, G 在 Ω 上可迁; 当 $2 \leq k \leq n-2$, 不可迁.

2.11-2 证 要证 $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

因为 (1) \mathbb{Z}_6 is Abelian $\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \triangleleft \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_3 \triangleleft \mathbb{Z}_6$;

(2) $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_3 = \{k\bar{2} + l\bar{3} \mid k, l \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_6$;

(3) $\mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}\}$,

由定理 2.11.2, 有 $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

2.11-5 解: $45 = 5^1 \times 3^2$, $2 = 2 + 0 = 1 + 1$

$\therefore \mathbb{Z}_{45} \cong$ 有 $P(1)P(2) = 2$ 个互不同构的 $45 = 5^1 3^2$ 阶 Abelian 群.

$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3^2, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.



References

- 胡冠章. 应用近世代数（第三版）学习指导和习题详解[C]//北京:清华大学出版社,2012
胡冠章, 王殿军. 应用近世代数[C]//北京:清华大学出版社,2006