第 5 次作业

危国锐　120034910021

（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘　要：主教材：(胡冠章 and 王殿军, 2006)，学习指导书：(胡冠章, 2012). 截止日期：2022-05-02.

关键词：词 1，词 2

Homework 5

Guorui Wei　120034910021

(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Main textbook: (胡冠章 and 王殿军, 2006), Study guide: (胡冠章, 2012). Due date: 2022-05-02.

Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-05-02

MATH 6013 第5次作业 2022.05.03 (due date)

2-8-1. 证: $\forall a,b \in G$: $(\varphi f)(ab) = \varphi(f(ab)) \xlongequal{f\text{同态}} \varphi(f(a)f(b))$

$\xlongequal{\varphi\text{同态}} \varphi(f(a))\varphi(f(b)) = (\varphi f)(a)\cdot(\varphi f)(b)$. $\therefore \varphi f$ 是同态.

2-8-3. 证: "$\Rightarrow$" (必要性). 反证法. 假设 $(k, |G|) = m \geq 2$, 则有素数 $p \mid m \Rightarrow p \mid k$ 且 $p \mid |G|$. $\xRightarrow{G \text{ is Abel}}$ (主教材定理 2.6.3) G 中有 p 阶元, 记为 a, $o(a) = p$. $\Rightarrow f(a) = a^k \xRightarrow{o(a)=p \mid k} f(a) = e = f(e)$. 与 f 是同构 ($\Rightarrow$ 单射) 矛盾. $\therefore (k, |G|) = 1$.

"$\Leftarrow$". 先证 f 是单射. 只需 (等价于) 证 $Kerf = \{e\}$. 事实上, $\forall a \in Kerf := \{a \in G \mid f(a) = a^k = e\}$, 有 $o(a) \mid k$. 另一方面, 由 Lagrange 定理 $\Rightarrow o(a) \mid |G|$. $\therefore o(a) \mid (k, |G|) = 1 \Rightarrow o(a) = 1 \Leftrightarrow a = e$. $\therefore Kerf = \{e\}$. $\Leftrightarrow f$ 是单射.

$\xRightarrow{\text{单}} |Imf| = |G| \xRightarrow[\text{有限集}]{Imf \leq G} Imf = G \Rightarrow f$ 是满射.

$\forall g_1, g_2 \in G$, 有 $f(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^k \xlongequal{\text{Abel}} g_1^k g_2^k = f(g_1) f(g_2) \Rightarrow f$ 是自同态.

$\therefore f$ 是 G 上的自同构.

2-8-4. ~~证~~解: 先证 "$f(a) = a' \xRightarrow{f\text{同态}} f^{-1}(a')$ (全原像) $= aKerf$".

$\forall g \in f^{-1}(a')$, 有 (定义) $f(g) = a' = f(a) \Rightarrow f(g)(f(a))^{-1} = a'(a')^{-1} = e$

$\xRightarrow{f\text{同态}} f(ga^{-1}) = e \Rightarrow ga^{-1} \in Kerf \Leftrightarrow g \in aKerf$. $\therefore f^{-1}(a') \subseteq aKerf$.

$\forall ak \in aKerf$, ($k \in Kerf$), 有 $f(ak) \xlongequal{f\text{同态}} f(a)f(k) = f(a) = a' \Rightarrow ak \in f^{-1}(a')$.

$\therefore aKerf \subseteq f^{-1}(a')$.

$\therefore f(a) = a' \xRightarrow{f\text{同态}} f^{-1}(a') = aKerf$.

-9-

上述结论容易推广到子群：$H \le G$，f同态。则：$f(H) = H' \Rightarrow f^{-1}(H') = \bigcup_{h \in H} h\,\mathrm{Ker}f$.

解：(1) $\langle 6k+2 \rangle$, $k=0,1,\cdots$，和 $\langle 6k+4 \rangle$, $k=0,\cdots$.

(2) $\langle 6m+3 \rangle$, $m=0,\cdots$.

2.8-5 证：作映射 $f: \mathbb{Q} \to U$, $q \mapsto e^{i2q\pi}$, $\forall q \in \mathbb{Q}$.

显然f是映射，且是满射.

$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$，有 $f(q_1+q_2) = e^{i2(q_1+q_2)\pi} = e^{i2q_1\pi} \cdot e^{i2q_2\pi} = f(q_1)f(q_2)$

$\Rightarrow f$是同态. $\Rightarrow f$是满同态.

$\mathrm{Ker}f = \{ q \in \mathbb{Q} \mid f(q) = e^{i2q\pi} = 1 \}$ 易知 $= \mathbb{Z}$.

由同态基本定理 $\Rightarrow$ $(\mathbb{Q},+)/\mathrm{Ker}f = (\mathbb{Q},+)/(\mathbb{Z},+) \cong \mathrm{Im}f = U$.

补充题：证明 $\mathrm{Aut}\, S_3 \cong S_3$.

证：$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

— 10 —

References

胡冠章. 应用近世代数（第三版）学习指导和习题详解[C]//北京:清华大学出版社,2012
胡冠章, 王殿军. 应用近世代数[C]//北京:清华大学出版社,2006