第 4 次作业

危国锐　120034910021
（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘　要：主教材：(胡冠章 and 王殿军, 2006)，学习指导书：(胡冠章, 2012). 截止日期：2022-04-18.

关键词：词 1，词 2

Homework 4

Guorui Wei　120034910021
(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Main textbook: (胡冠章 and 王殿军, 2006), Study guide: (胡冠章, 2012). Due date: 2022-04-18.

Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-04-18

2.5.4 证：由主教材定理 2.5.3，$|AB| = \dfrac{|A||B|}{|A\cap B|}$，故只需证 $|A\cap B| = 1$. 事实上，由于 $A\cap B \le A$, $A\cap B \le B$, 由 Lagrange 定理 $\Rightarrow |A\cap B| \,\big|\, |A|$ 且 $|A\cap B| \,\big|\, |B| \Rightarrow |A\cap B| \,\big|\, (|A|,|B|) = 1$

$\Rightarrow |A\cap B| = 1$.

2.5.6 证：$\forall a \in A$, 由 $Ag = Bh$, 有 $ag = b_1 h \ (\exists\, b_1 \in B) \Rightarrow a = b_1 h g^{-1}$.

又由 $Ag = Bh \Rightarrow g = b_2 h \ (\exists\, b_2 \in B) \Rightarrow a = b_1 h (b_2 h)^{-1} = b_1 b_2^{-1} \in B$.

$\therefore A \subseteq B$.

反之，$\forall b \in B$, 由 $Ag = Bh$ 得 $bh = a_1 g \ (\exists\, a_1 \in A)$

$\Rightarrow b = a_1 g h^{-1}$. 又由 $Ag = Bh \Rightarrow h = a_2 g \ (\exists\, a_2 \in A)$

$\Rightarrow b = a_1 g (a_2 g)^{-1} = a_1 a_2^{-1} \in A$. $\therefore B \subseteq A$.

综上，得 $A = B$.

MATH6013 第4次作业 2022.04.18 (due date)

2.6.1 证：(1) $\forall x \in A\cap B$, $\forall g \in G$, 有 $gxg^{-1} \in A \lhd G$ 且 $gxg^{-1} \in B \lhd G$

$\Rightarrow gxg^{-1} \in A\cap B$. $\therefore A\cap B \lhd G$.

(2) 先证 $AB \le G$. 只需证 $AB = BA$.（主教材 2.2节，子群例题4）.

$\forall ab \in AB$, 有 $\cancel{aB}$ $ab \in aB \overset{B\lhd G}{=\!=} Ba \subseteq BA$, $\therefore AB \subseteq BA$.

同理 $BA \subseteq AB$. $\therefore AB = BA$. 故 $AB \le G$.

$\forall ab \in AB$, $\forall g \in G$, 有 $gabg^{-1} = \underbrace{gag^{-1}}_{\in A\lhd G} \cdot \underbrace{gbg^{-1}}_{\in B\lhd G} \in AB$. $\therefore AB \lhd G$.

-3-

2.6-2. 证: $A \lhd G, B \leq G \Rightarrow \forall x \in A\cap B, \forall b \in B$，有 $bxb^{-1} \in A \lhd G$

且 $bxb^{-1} \in B \leq G \Rightarrow bxb^{-1} \in A\cap B$. $\therefore A\cap B \lhd B$.

$A \lhd G, B \leq G \Rightarrow \forall ab \in AB$，有 $ab \in Ab \xlongequal{A\lhd G} bA \subseteq BA$，

$\therefore AB \subseteq BA$. 同理 $BA \subseteq AB$. $\therefore AB = BA \xLeftrightarrow{A,B\leq G} AB \leq G$.

2.6-5. 证: $C := \langle A\cup B \rangle = \{ a_1b_1a_2b_2\cdots a_nb_n \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N} \}$.

$\Rightarrow AB \subseteq C$. 下证 $C \subseteq AB$.

$B \lhd C \Rightarrow \forall a \in A \leq C$，有 $Ba = aB$. $\therefore \forall b \in B, \forall a \in A$，有

$ba \in Ba = aB \Rightarrow \exists b' \in B, s.t.\ ba = ab'$. $\therefore \forall c \in C := \langle A\cup B \rangle$，

c可表示为 $\phi \neq a_1b_1a_2b_2\cdots$. 从左向右，只遇到形如"$ba$"，$b\in B$，$a \in A$，的因子，都可将其写成形如"$ab'$"，$b' \in B$ 的形式. 这样，c最终必可表为形如"ab"的形式. $\Rightarrow c \in AB\ (\forall c \in C) \Rightarrow C \subseteq AB$. $\therefore C = AB$.

2.6-6 证: a与b的换位子 $\alpha_{ab} := aba^{-1}b^{-1}$. $\Rightarrow (\alpha_{ab})^{-1} = \alpha_{ba}$.

换位子群 $K := \langle \alpha_{ab} \mid a,b \in G \rangle = \{ G$中换位子的有限乘积$\}$.

(1) 先证 $g\alpha_{ab}g^{-1}$ 仍是换位子，$\forall a,b,g \in G$. 事实上，$g\alpha_{ab}g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1}$

$= gag^{-1}\cdot gbg^{-1}\cdot ga^{-1}g^{-1}\cdot gb^{-1}g^{-1} = \alpha_{g(a)g(b)}$，其中 $g(a) := gag^{-1}$，是由g所确定的共轭变换.

下证 $\forall x \in K$，有 $gxg^{-1} \in K\ (\forall g \in G)$. 事实上，$\forall x \in G$可表为 $x = \alpha_{a_1b_1}\alpha_{a_2b_2}\cdots\alpha_{a_nb_n}$.

$\Rightarrow gxg^{-1} = g\alpha_{a_1b_1}g^{-1}\cdot g\alpha_{a_2b_2}g^{-1}\cdots g\alpha_{a_nb_n}g^{-1} = \alpha_{g(a_1)g(b_1)}\cdots\alpha_{g(a_n)g(b_n)} \in K, \forall g \in G$.

$\therefore K \lhd G$.

-4-

2.6-6 证：(2). $\forall aK, bK \in G/K$，有 $aK \cdot bK \cdot (aK)^{-1} \cdot (bK)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}K$

$= \alpha_{ab} \cdot K \xlongequal{\alpha_{ab} \in K} K$，$\Rightarrow aK \cdot bK = bK \cdot aK$，$\forall a, b \in G$. $\therefore G/K$ 可交换.

(3) 因 $K := \langle \alpha_{ab} \mid a, b \in G \rangle$，故要证 $K \leq N$ 只需证 $\alpha_{ab} \in N$ ($\forall a, b \in G$).

事实上，G/N 可换 $\Rightarrow aN \cdot bN = bN \cdot aN \Leftrightarrow (ab)^{-1}N = (ba)^{-1}N \Leftrightarrow \overset{aba^{-1}b^{-1}}{\cancel{(ba)^{-1}ab}} \in N$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha_{ab} \in N$，$\forall a, b \in G$. $\therefore K \leq N$.

2.6-7 证：(1) 先讨论 $|G| = +\infty$ 的情形.

此时，$\forall a \in G \setminus \{e\}$，有 $\langle a \rangle \triangleleft G$. $\because G$ 是单群，且 $\langle a \rangle \neq \{e\}$，

故只有 $\langle a \rangle = G$ ($\forall a \in G \setminus \{e\}$)，$\underset{o(a)=+\infty}{\wedge}$ 但 $\langle a^2 \rangle \subsetneq \langle a \rangle$（不然，$\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle$

$\Rightarrow o(a) < +\infty$，矛盾），这与 $\langle a^2 \rangle = G = \langle a \rangle$ 矛盾. 故 $|G| < +\infty$.

(2) 设 $|G| = n < +\infty$，$\overset{则}{\vee}\, p \mid n$，$p$ 是素数. 下证 $n = p$.

（反证）假设 $p < n$. 由主教材 (p.71 定理 2.6.3) $\Rightarrow$ G 中有 p 阶元.

记为 a. 则有 $\langle a \rangle \triangleleft G$，但 $\{e\} \subsetneq \langle a \rangle \subsetneq G$，这与 G 是单群矛盾. 故 $p = n$. 即 G 是素数阶群，从而（定理 2.5.2 推论(3)）G 也是循环群.

2.7-1. 解：(1) $C(G) := C_G(G) := \{ g \in G \mid \forall x \in G : gx = xg \}$.

$\Rightarrow C(G) = \{$数量矩阵$\} = \{ \alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C}^* \}$，$I := \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $C_G(N) := \{ g \in G \mid \forall n \in N : gn = ng \}$.

-5-

2.7.1 解（续上页） 记 $g := \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in C_G(N)$，$n := \begin{bmatrix} a & b \\ & d \end{bmatrix} \in N$，$ad \neq 0$.

则有 $gn = ng$，$\forall\, n \in N$. 即

$$\begin{cases} ax = ax + bw, \\ xb + yd = ay + bz, \\ aw = dw, \\ bw + dz = dz, \end{cases} \quad \forall\, ad \neq 0,\ b \in \mathbb{C}. \Rightarrow w = 0,\ x = z,\ y = 0. \Rightarrow g \in C(G),\ (\forall g \in C_G(N).)$$

$\Rightarrow C_G(N) \subseteq C(G)$. 显然 $C(G) \subseteq C_G(N)$，故 $C_G(N) = C(G) = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$.

(3) $C_N(H) := \{ n \in N \mid \forall\, h \in H: nh = hn \}$.

记 $n := \begin{bmatrix} a & b \\ & d \end{bmatrix} \in C_N(H)$，$ad \neq 0$，$h := \begin{bmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{bmatrix} \in H$，$t \in \mathbb{C}$.

则有 $nh = hn$，$\forall h \in H$. 即 $b + td = at + b$，$\forall\, t \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow a = d$.

$\Rightarrow C_N(H) \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \right\}$. 容易验证右边集合 $\subseteq C_N(H)$,

故 $C_N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & a \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C} \right\}$.

(4) $N_G(H) := \{ g \in G \mid \forall\, h \in H: ghg^{-1} \in H \}$.

$\forall\, g := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in N_G(H)$. 记 $h := \begin{bmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{bmatrix} \in H$，$t \in \mathbb{C}$. 则有

$ghg^{-1} \in H$，即 $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad - bc - act & a^2 t \\ -c^2 t & ad - bc \end{bmatrix} \in H$，$\forall\, t \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow c = 0$. $\Rightarrow N_G(H) \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & d \end{bmatrix} \middle| \, ad \neq 0,\ b \in \mathbb{C} \right\} =: N$.

容易验证 $N \subseteq N_G(H)$. 故 $N_G(H) = N$.

-6-

2.7-2. 证: $C_G(H) := \{ g\in G \mid gh = hg\ (\forall h\in H) \}$.

$N_G(H) := \{ g\in G \mid gH = Hg \} = \{ g\in G \mid gHg^{-1} \subseteq H \}$.

(1) 显然 $C_G(H) \leq N_G(H)$. 要证 $C_G(H) \lhd N_G(H)$, 就是要证 $\forall n\in N_G(H)$: $nC_G(H)n^{-1} \subseteq C_G(H)$. 事实上, $\forall\, ncn^{-1} \in nC_G(H)n^{-1}$, $\forall h\in H$:

$$(nc\underbrace{n^{-1})h(n}_{=:h_1\in H}c^{-1}n^{-1})h^{-1} = nch_1c^{-1}n^{-1}h^{-1} = \underbrace{nh_1n^{-1}}_{=h}h^{-1} = e,$$

$\therefore\ ncn^{-1} \in C_G(H)$, $\forall n\in N_G(H)$, $\forall c\in C_G(H)$. $\Rightarrow C_G(H) \lhd N_G(H)$.

(2) 先证 $H \leq C_G(C_G(H))$. 事实上, $\forall h\in H$, 有: $hc = ch\ (\forall c\in C_G(H))$

$\Rightarrow h\in C_G(C_G(H))$, $\forall h\in H \Rightarrow H \leq C_G(C_G(H))$. $\quad\cdots(*)$

另外, 显然有 "$H\leq K \Rightarrow C_G(H) \geqslant C_G(K)$". 将这结果应用于 $(*)$,

$\Rightarrow C_G(H) \geqslant C_G(C_G(C_G(H)))$. 而在 $(*)$ 中将 H 取为 $C_G(H)$, 又有 $C_G(H) \leq C_G(C_G(C_G(H)))$. $\therefore C_G(H) = C_G(C_G(C_G(H)))$.

2.7-4. 证: G 有非平凡的中心 $C(G)$, (主教材 p.74, 例 2.7.3), 即 $|C(G)| > 1$.
由 Lagrange 定理, $\Rightarrow |C(G)| \mid |G| = p^2$, p 是素数 $\Rightarrow |C(G)| = p$ 或 p^2. 下面证明 $|C(G)| \neq p$.

不然; 取 $a\in G\setminus C(G)$, 则有 $C(G) < C_G(a) \leq G$. [注: 显然有 $C(G) \leq C_G(a)$. 又 $a\notin C(G)$ 但 $a\in C_G(a)$, 故 $C(G) < C_G(a)$]. $\Rightarrow |C_G(a)| > |C(G)| = p$.
由 Lagrange 定理 $\Rightarrow |C_G(a)| \mid |G| = p^2 \Rightarrow |C_G(a)| = p^2 = |G| \Rightarrow C_G(a) = G$
$\Rightarrow a\in C(G)$, 矛盾. 与 $a\in G\setminus C(G)$ 矛盾.

$\therefore |C(G)|$ 只能是 p^2. $\Rightarrow C(G) = G \Rightarrow G$ is Abel.

-7-

2.7-5. 证(反证法) 假设 G 的 q 阶子群 H 不是正规子群. 则存在 $g\in G$: $gHg^{-1}\neq H$.

因 $|gHg^{-1}|=|H|=q$ [群的左、右消去律], 且 $gHg^{-1}\cap H<H$,

[子群的交仍是子群: $gHg^{-1}\cap H\leq H$. 若 $gHg^{-1}\cap H=H \Leftrightarrow H\leq gHg^{-1}$ $\xLeftrightarrow{|H|=|gHg^{-1}|}$ $H=gHg^{-1}$, 这与 $H\neq gHg^{-1}$ 矛盾. 故 $gHg^{-1}\cap H<H$],

故 $|gHg^{-1}\cap H|<|H|=q$. 而由 Lagrange 定理 $\Rightarrow$ $|gHg^{-1}\cap H|\,\big|\,|H|=q$,

$\Rightarrow$ $|gHg^{-1}\cap H|=1$. 又由 (p.65, 定理 2.5-3), 有

$$|gHg^{-1}H|=\frac{|gHg^{-1}|\cdot|H|}{|gHg^{-1}\cap H|}=q^2>pq=|G|,$$

这与 $gHg^{-1}H\subseteq G$ 矛盾.

$\therefore$ $H\trianglelefteq G$.

2.7-8. 解: A_4 中的元素按型分类: $1^4:\{(1)\}$, $2^2:\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$,

$1^1 3^1:\{(123),(132),\cdots\}$ (共 $2C_4^3=8$ 个).

取 $\tau=(12)(34)$, 由于 $(12)\in C_{S_4}(\tau)$, 含奇置换, 由 (p.77, 定理 2.7.6), "2^2" 在 A_4 中仍是一个共轭类.

取 $\sigma=(123)$, 由于 $C_{S_4}(\sigma)=\{(1),(123),(132)\}$ 不含奇置换, 由 (p.77, 定理 2.7.6), "$1^1 3^1$" 在 A_4 中分裂为以下两个共轭类:

$$K_\sigma^{(1)}:=\{\tau\sigma\tau^{-1}\mid \tau\in A_4\}=\{(123),(134),(243),(142)\},$$

$$K_\sigma^{(2)}:=\{\tau\sigma\tau^{-1}\mid \tau\in S_4\backslash A_4\}=\{(132),(234),(143),(124)\}.$$

A_4 中的正规子群 H 由共轭类组成, 且由 Lagrange 定理 $\Rightarrow$ $|H|\,\big|\,|A_4|=12$.

$\therefore$ A_4 的全部正规子群如下: $H_1=\{(1)\}$, $H_2=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$, $H_3=A_4$.

A+

-8-

References

胡冠章. 应用近世代数（第三版）学习指导和习题详解[C]//北京:清华大学出版社,2012
胡冠章, 王殿军. 应用近世代数[C]//北京:清华大学出版社,2006