

上海交通大学试卷

(2021 至 2022 学年 第__2__学期 共 6 页 11 题)

班级号_____ 学号_____ 姓名 _____

课程名称 _____应用近世代数_____ 成绩 _____

第一题 (本题 8 分): 设 G 是含幺半群, e 是单位元。证明 b 是 a 的逆元的充分必要条件是 $aba=a, ab^2a=e$.

第二题 (本题 12 分): 求出整数加群 \mathbb{Z} 与剩余类加群 $\mathbb{Z}/(12)$ 的所有子群。

我承诺，我将严
格遵守考试纪律。

题号										
得分										
批阅人(流水阅										

第三题（本题 10 分）：设 A_n 是由 n 次对称群 S_n 的所有偶置换生成的子群。证明

$$A_n = \langle (123), (124), \dots, (12n) \rangle.$$

第四题（本题 8 分）：证明一个可换群（即交换群）如果是单群，那么它必是素数阶循环群。

第五题（本题 8 分）：设群 G 的阶为 pq ，其中 p 与 q 是素数，并且 $p < q$ 。证明 G 存在 q 阶子群，并且该子群是正规子群。

第六题（本题 8 分）：在同构的意义之下，求出 45 阶交换群的所有可能类型。

第七题（本题 8 分）：设 G 是交换群， p 是素数，并且 p 整除群 G 的阶，那么 G 存在 p 阶子群。

第八题（本题 12 分）：

- （1）利用带余除法定理，证明一个域 k （如： k 是有理数域，实数域或者复数域）上的多项式环 $k[x]$ 是主理想整环。
- （2）利用（1）证明 $k[x]$ 中任何两个不全为零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在最大公因式。

第九题（本题 10 分）：计算用 4 种颜色做成 4 颗珠子的项链有多少种。

第十题（本题 8 分）：证明：用圆规和一根没有任何标记的直尺不能三等分 60° 角.

第十一题（本题 8 分）：

- (1) 设 R 是一个环， \sim 是 R 中的一个等价关系，并且与 R 中加法与乘法相容. 证明 0 所在的等价类 $[0]$ 是环 R 的一个理想。
- (2) 设 H 是群 G 的一个非平凡的真子群，那么 H 的左陪集给出 G 的一个划分，从而定义了 G 上的一个等价关系。证明该等价关系与 G 的乘法相容充分必要条件是 H 是正规子群。