



第 4 次作业

危国锐 120034910021

(上海交通大学海洋学院, 上海 200030)

摘 要: 主教材: ([胡冠章 and 王殿军, 2006](#)), 学习指导书: ([胡冠章, 2012](#)). 截止日期: 2022-04-18.

关键词: 词 1, 词 2

Homework 4

Guorui Wei 120034910021

(School of Oceanography, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Main textbook: ([胡冠章 and 王殿军, 2006](#)), Study guide: ([胡冠章, 2012](#)). Due date: 2022-04-18.

Keywords: keyword 1, keyword 2



目 录

摘要	i
Abstract.....	i
1 Due date: 2022-04-18	1
References	7



1 Due date: 2022-04-18

2.5.4. 证: 由主教材定理 2.5.3, $|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$, 故只需证

$|A \cap B| = 1$. 事实上, 由于 $A \cap B \leq A$, $A \cap B \leq B$, 由 Lagrange
定理 $\Rightarrow |A \cap B| \mid |A|$ 且 $|A \cap B| \mid |B| \Rightarrow |A \cap B| \mid (|A|, |B|) = 1$

$\Rightarrow |A \cap B| = 1$.

2.5.6 证: $\forall a \in A$, 由 $A \cap B = B$,
有 $ag = bh (\exists h \in B) \Rightarrow a = bhg^{-1}$.

又由 $A \cap B = B \Rightarrow g = b_2h (\exists b_2 \in B) \Rightarrow a = bh(b_2h)^{-1} = bb_2^{-1} \in B$.

$\therefore A \subseteq B$.

反之, $\forall b \in B$, 由 $A \cap B = B$ 得 $bh = ag (\exists a \in A)$

$\Rightarrow b = agh^{-1}$. 又由 $A \cap B = B \Rightarrow h = a_2g (\exists a_2 \in A)$

$\Rightarrow b = ag(a_2g)^{-1} = aa_2^{-1} \in A$. $\therefore B \subseteq A$.

综上, 得 $A = B$.

MATH6013

第4次作业

2022.04.18 (due date)

2.6-1 证: (1) $\forall x \in A \cap B, \forall g \in G$, 有 $gxg^{-1} \in A \triangleleft G$ 且 $gxg^{-1} \in B \triangleleft G$
 $\Rightarrow gxg^{-1} \in A \cap B$. $\therefore A \cap B \triangleleft G$.

(2) 先证 $AB \leq G$. 只需证 $AB = BA$. (主教材 2.2 节, 子群性质 4).

$\forall ab \in AB$, 有 $ab \in AB \xrightarrow{B \triangleleft G} Ba \subseteq BA$, $\therefore AB \subseteq BA$.

同理 $BA \subseteq AB$. $\therefore AB = BA$. 故 $AB \leq G$.

$\forall ab \in AB, \forall g \in G$, 有 $gabg^{-1} = \underbrace{ga}_{\in A \triangleleft G} g^{-1} \cdot \underbrace{bg}_{\in B \triangleleft G} g^{-1} \in AB$. $\therefore AB \triangleleft G$.



2.6-2. 证: $A \triangleleft G, B \leq G \Rightarrow \forall x \in A \cap B, \forall b \in B, \text{有 } bxb^{-1} \in A \triangleleft G$

且 $bxb^{-1} \in B \leq G \Rightarrow bxb^{-1} \in A \cap B. \therefore A \cap B \triangleleft B.$

$A \triangleleft G, B \leq G \Rightarrow \forall ab \in AB, \text{有 } ab \in Ab \xrightarrow{A \triangleleft G} bA \subseteq BA,$

$\therefore AB \subseteq BA. \text{同理 } BA \subseteq AB. \therefore AB = BA. \xrightarrow{A, B \leq G} AB \leq G.$

2.6-5. 证: $C := \langle A \cup B \rangle = \{ a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N} \}.$

$\Rightarrow AB \subseteq C. \text{下证 } C \subseteq AB.$

$B \triangleleft C \Rightarrow \forall a \in A \leq C, \text{有 } Ba = aB. \therefore \forall b \in B, \forall a \in A, \text{有}$

$ba \in Ba = aB \Rightarrow \exists b' \in B, \text{s.t. } ba = ab'. \therefore \forall c \in C := \langle A \cup B \rangle,$

c 可表为 $c \neq a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots$. 从左向右, 凡遇到形如 " ba ", $b \in B, a \in A$, 的

因子, 都可将其写成形如 " ab' ", $b' \in B$ 的形式. 这样, c 最终必可表为

形如 " ab " 的形式. $\Rightarrow c \in AB (\forall c \in C) \Rightarrow C \subseteq AB. \therefore C = AB.$

2.6-6 证: a 与 b 的换位子 $\alpha_{ab} := aba^{-1}b^{-1} \Rightarrow (\alpha_{ab})^{-1} = \alpha_{ba}.$

换位子群 $K := \langle \alpha_{ab} \mid a, b \in G \rangle = \{ G \text{ 中换位子的有限乘积} \}.$

(1) 先证 $g\alpha_{ab}g^{-1}$ 仍是换位子, $\forall a, b, g \in G$. 事实上, $g\alpha_{ab}g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = gaq^{-1} \cdot gbq^{-1} \cdot ga^{-1}q^{-1} \cdot gb^{-1}q^{-1} = \alpha_{g(a)g(b)}$, 其中 $g(a) := gaq^{-1}$, 是由 g 所确定的共轭变换.

下证 $\forall x \in K$, 有 $gxg^{-1} \in K (\forall g \in G)$. 事实上, $\forall x \in G$ 可表为 $x = \alpha_{a_1 b_1} \alpha_{a_2 b_2} \cdots \alpha_{a_n b_n}.$

$\Rightarrow gxg^{-1} = g\alpha_{a_1 b_1}g^{-1} \cdot g\alpha_{a_2 b_2}g^{-1} \cdots g\alpha_{a_n b_n}g^{-1} = \alpha_{g(a_1)g(b_1)} \cdots \alpha_{g(a_n)g(b_n)} \in K, \forall g \in G.$

$\therefore K \triangleleft G.$



2.6-6 证: (2). $\forall aK, bK \in G/K$, 有 $aK \cdot bK \cdot (aK)^{-1} \cdot (bK)^{-1} = ab a^{-1} b^{-1} K$

$$= \alpha_{ab} \cdot K \stackrel{\alpha_{ab} \in K}{=} K, \Rightarrow aK \cdot bK = bK \cdot aK, \forall a, b \in G. \therefore G/K \text{ 可换.}$$

(3) 因 $K := \langle \alpha_{ab} \mid a, b \in G \rangle$, 故要证 $K \leq N$ 只需证 $\alpha_{ab} \in N$ ($\forall a, b \in G$).

事实上, G/N 可换 $\Rightarrow aN \cdot bN = bN \cdot aN \Leftrightarrow (ab)^{-1}N = (b^{-1}a^{-1})N \Leftrightarrow \frac{ab a^{-1} b^{-1}}{(b^{-1}a^{-1})ab} \in N$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \alpha_{ab} \in N, \forall a, b \in G. \therefore K \leq N.$

2.6-7 证: (1) 先讨论 $|G| = +\infty$ 的情形.

此时, $\forall a \in G \setminus \{e\}$, 有 $\langle a \rangle \triangleleft G$. $\therefore G$ 是单群, 且 $\langle a \rangle \neq \{e\}$,

故必有 $\langle a \rangle = G$ ($\forall a \in G \setminus \{e\}$). 但 $\langle a^2 \rangle \subsetneq \langle a \rangle$ (不然, $\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle$
 $\Rightarrow \langle a \rangle = +\infty$).

$\Rightarrow \langle a \rangle < +\infty$ (矛盾), 这与 $\langle a^2 \rangle = G = \langle a \rangle$ 矛盾. 故 $|G| < +\infty$.

(2) 设 $|G| = n < +\infty, \forall p \mid n, p$ 是素数. 下证 $n = p$.

(反证) 假设 $p < n$. 由主教材 (p.71 定理 2.6.3) $\Rightarrow G$ 中有 p 阶元.

记为 a . 则有 $\langle a \rangle \triangleleft G$, 但 $\{e\} \subsetneq \langle a \rangle \subsetneq G$, 这与 G 是单群矛盾. 故 $p = n$. 即 G 是素数阶群, 从而 (定理 2.5.2 推论 (3))

G 也是循环群.

2.7-1. 解: (1) $C(G) := C_G(G) := \{g \in G \mid \forall x \in G: gx = xg\}.$

$$\Rightarrow C(G) = \{\text{数量矩阵}\} = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}, I := \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) $C_G(N) := \{g \in G \mid \forall n \in N: gn = ng\}.$



2.7.1 解 (提示) 记 $g := \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in G(N)$, $n := \begin{bmatrix} a & b \\ & d \end{bmatrix} \in N$, $ad \neq 0$.

则有 $gn = ng$, $\forall n \in N$. 即

$$\begin{cases} ax = ax + bw, \\ xb + yd = ay + bz, \\ aw = dw, \\ bw + dz = dz, \end{cases} \quad \forall ad \neq 0, \quad b \in \mathbb{C}. \quad \Rightarrow \quad w=0, \quad x=z, \quad y=0.$$

$\Rightarrow G(N) \subseteq C(G)$. 且 $C(G) \subseteq G(N)$, 故 $G(N) = C(G) = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$.

(3) $C_N(H) := \{n \in N \mid \forall h \in H: nh = hn\}$.

记 $n := \begin{bmatrix} a & b \\ & d \end{bmatrix} \in C_N(H)$, $ad \neq 0$, $h := \begin{bmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{bmatrix} \in H$, $t \in \mathbb{C}$.

则有 $nh = hn$, $\forall h \in H$. 即 $b + td = at + b$, $\forall t \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow a = d$.

$\Rightarrow C_N(H) \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\}$. 易验证右边集合 $\subseteq C_N(H)$,

故 $C_N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$.

(4) $N_G(H) := \{g \in G \mid \forall h \in H: ghg^{-1} \in H\}$.

$\forall g := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in N_G(H)$. 记 $h := \begin{bmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{bmatrix} \in H$, $t \in \mathbb{C}$. 则有

$ghg^{-1} \in H$, 即 $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc-act & a^2t \\ -c^2t & ad-bc \end{bmatrix} \in H$, $\forall t \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow c = 0$. $\Rightarrow N_G(H) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & d \end{bmatrix} \mid ad \neq 0, b \in \mathbb{C} \right\} =: N$.

易验证 $N \subseteq N_G(H)$. 故 $N_G(H) = N$.



2.7-2. 证: $C_G(H) := \{g \in G \mid gh = hg \ (\forall h \in H)\}.$

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\} = \{g \in G \mid gHg^{-1} \subseteq H\}.$$

(1) 显然 $C_G(H) \leq N_G(H)$. 要证 $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$, 就是要证 $\forall n \in N_G(H):$

$$nC_G(H)n^{-1} \subseteq C_G(H). \text{ 事实上, } \forall nc_n^{-1} \in nC_G(H)n^{-1}, \forall h \in H:$$

$$\underbrace{(nc_n^{-1})h(nc_n^{-1})^{-1}}_{=: h \in H} = nchc^{-1}n^{-1}h^{-1} = \underbrace{nhn^{-1}}_{=: h}h^{-1} = e,$$

$$\therefore nc_n^{-1} \in C_G(H), \forall n \in N_G(H), \forall c \in C_G(H). \Rightarrow C_G(H) \triangleleft N_G(H).$$

(2) 先证 $H \leq C_G(C_G(H))$. 事实上, $\forall h \in H$, 有: $hc = ch \ (\forall c \in C_G(H))$

$$\Rightarrow h \in C_G(C_G(H)), \forall h \in H \Rightarrow H \leq C_G(C_G(H)). \quad \dots (*)$$

另外, 显然有 " $H \leq K \Rightarrow C_G(H) \geq C_G(K)$ ". 将这一结果应用于(*),

$$\Rightarrow C_G(H) \geq C_G(C_G(C_G(H))). \text{ 而在 } (*) \text{ 中将 } H \text{ 取为 } C_G(H), \text{ 又}$$

$$\text{有 } C_G(H) \leq C_G(C_G(C_G(H))). \therefore C_G(H) = C_G(C_G(C_G(H))).$$

2.7-4. 证: G 有平凡子群 $C(G)$, (主教材 p.74, 例 2.7.3), 即 $|C(G)| > 1$.

由 Lagrange 定理, $\Rightarrow |C(G)| \mid |G| = p^2$, p 是素数 $\Rightarrow |C(G)| = p$ 或 p^2 . 下面证明 $|C(G)| \neq p$.

不然, 取 $a \in G \setminus C(G)$, 则有 $C(G) < C_G(a) \leq G$. [注: 显然.

有 $C(G) \leq C_G(a)$. 又 $a \notin C(G)$ 但 $a \in C_G(a)$, 故 $C(G) < C_G(a)$. $\Rightarrow |C_G(a)| > |C(G)| = p$.

由 Lagrange 定理 $\Rightarrow |C_G(a)| \mid |G| = p^2 \Rightarrow |C_G(a)| = p^2 = |G| \Rightarrow C_G(a) = G$

$\Rightarrow a \in C(G)$, 矛盾. 与 $a \in G \setminus C(G)$ 矛盾.

$\therefore |C(G)|$ 只能是 p^2 . $\Rightarrow C(G) = G \Rightarrow G$ is Abelian.



2.7-5. 证 (反证法) 假设 G 的 q 阶子群 H 不是正规子群. 则存在 $g \in G: gHg^{-1} \neq H$.

因 $|gHg^{-1}| = |H| = q$ [群的左右消去律], 且 $gHg^{-1} \cap H < H$,

[子群的交仍是子群: $gHg^{-1} \cap H \leq H$. 若 $gHg^{-1} \not\subseteq H, \Rightarrow H \subsetneq gHg^{-1}$

$\xLeftrightarrow{|H|=|gHg^{-1}|} H = gHg^{-1}$, 这与 $H \neq gHg^{-1}$ 矛盾. 故 $gHg^{-1} \cap H < H$],

故 $|gHg^{-1} \cap H| < |H| = q$. 再由 Lagrange 定理 $\Rightarrow |gHg^{-1} \cap H| \mid |H| = q$,

$\Rightarrow |gHg^{-1} \cap H| = 1$. 又由 (p. 65, 定理 2.5-3), 有

$$|gHg^{-1}H| = \frac{|gHg^{-1}| \cdot |H|}{|gHg^{-1} \cap H|} = q^2 > pq = |G|,$$

这与 $gHg^{-1}H \subseteq G$ 矛盾.

$\therefore H \trianglelefteq G$.

2.7-8. 解: A_4 中的元素按型分类: $1^4: \{(1)\}$, $2^2: \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$1^1 3^1: \{(123), (132), \dots\}$ (共 $2C_4^3 = 8$ 个).

取 $\tau = (12)(34)$. 由于 $(12) \in C_{S_4}(\tau)$, 含有置换, 由 (p. 77, 定理 2.7.6).

" 2^2 " 在 A_4 中仍是一个共轭类.

取 $\sigma = (123)$. 由于 $C_{S_4}(\sigma) = \{(1), (123), (132)\}$ 不含奇置换, 由 (p. 77, 定理 2.7.6),

" $1^1 3^1$ " 在 A_4 中分裂为以下两个共轭类:

$$K_{\sigma}^{(1)} := \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in A_4\} = \{(123), (134), (243), (142)\},$$

$$K_{\sigma}^{(2)} := \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_4 \setminus A_4\} = \{(132), (234), (143), (124)\}.$$

A_4 中的正规子群 H 由共轭类组成, 且由 Lagrange 定理 $\Rightarrow |H| \mid |A_4| = 12$.

$\therefore A_4$ 的全部正规子群如下: $H_1 = \{(1)\}$, $H_2 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$H_3 = A_4$.

- 8 -



References

- 胡冠章. 应用近世代数（第三版）学习指导和习题详解[C]//北京:清华大学出版社,2012
- 胡冠章, 王殿军. 应用近世代数[C]//北京:清华大学出版社,2006