第 2 次作业

危国锐 120034910021
（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘　要：主教材：(胡冠章 and 王殿军, 2006)，学习指导书：(胡冠章, 2012). 截止日期：2022-03-21.

关键词：词 1，词 2

Homework 2

Guorui Wei 120034910021
(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Main textbook: (胡冠章 and 王殿军, 2006), Study guide: (胡冠章, 2012). Due date: 2022-03-21.

Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

1 Due date: 2022-03-21

MATH 6013 课后作业 2022.03.21 (due date)

（习题2.3） 1. 解：因 $o(a)=n$，$o(b)=2$，故 G 中任一元素 σ 可写成

$$\sigma = a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\cdots a^{i_n}b^{j_n}, \quad n\in\mathbb{N},$$

$i_k=0,1,\cdots,n-1$，$j_k=0,1$. 又 $ba=a^{-1}b$，故 σ 还可写成

$$\sigma = a^k b^l, \quad k=0,1,\cdots,n-1,\ l=0,1.$$

即 $G=\{a^kb^l \mid k=0,1,\cdots,n-1,\ l=0,1\}$.

定义"映射" f：~~a^kb^l~~ $G\to D_n$，$a^kb^l \mapsto \rho_1^k\pi_0^l$.

容易验证这 f 确为 G 到 D_n 的映射（"一映一"），且为单射、满射，~~故 $G\overset{f}{\cong}D_n$~~ 且保持群的运算. 故 $G\overset{f}{\cong}D_n$.

3. 解：$\mathbb{Z}_{12}^* = \{\bar{k} \mid (k,12)=1\} = \{\bar1,\bar5,\bar7,\overline{11}\}$.

$K_4=\{a,b,c,e\}$. 定义"映射" f：$K_4\to\mathbb{Z}_{12}^*$：$e\mapsto\bar1$，$b\mapsto\bar7$，$a\mapsto\bar5$，$c\mapsto\overline{11}$.

容易验证 f 确为 K_4 到 $\mathbb{Z}_{12}^*$ 的~~映~~双射，且保持群的运算，例如 $f(ab)=f(c)=\overline{11}=f(a)f(b)=\bar5\bar7$

$\therefore K_4 \overset{f}{\cong} \mathbb{Z}_{12}^*$.

4. 解：否.（反证法）. 假设有同构映射 $f:(\mathbb{Q},+)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$，则必有 $a\in\mathbb{Q}$ s.t. $f(a)=2$.（因 f 是满射）. 从而有

$$2=f(a)=f\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)f\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}^*,$$

矛盾. 故 $(\mathbb{Q},+)$ 不能同构于 $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

-1-

(p.54) 5. 证: (1) $\langle a^m\rangle = \{ a^{km} \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $m=[s,t]$.

显然 $\langle a^m\rangle \subseteq A\cap B$. (因 $s\mid km$, $t\mid km$).

下证 $A\cap B \subseteq \langle a^m\rangle$. $\forall g\in A\cap B$, 不妨记 $g=a^n$, $n\in\mathbb{Z}$.

由 $g\in A$ 得 $s\mid n$. 由 $g\in B$ 得 $t\mid n$. 故 $[s,t]\mid n$.

$\Rightarrow g\in\langle a^m\rangle$. $\xRightarrow{\forall g\in A\cap B}$ $A\cap B\subseteq\langle a^m\rangle$.

∴ $A\cap B=\langle a^m\rangle$.

(2) $\langle A,B\rangle = \{ a^{ps+qt} \mid p,q\in\mathbb{Z}\}$, $\langle a^d\rangle = \{ a^{kd} \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

$\forall g\in \cancel{\langle a^d\rangle}\langle A,B\rangle$, 不妨记 $g=a^{ps+qt}$. 因 $d\mid ps+qt$,

故 $g\in\langle a^d\rangle$. $\Rightarrow \langle A,B\rangle\subseteq\langle a^d\rangle$.

下证 $\langle a^d\rangle\subseteq\langle A,B\rangle$. $\forall h\in\langle a^d\rangle$, 不妨记

$h=a^{kd}$, $k\in\mathbb{Z}$. 由更相减损术, 知存在 p,q 使得

$\cancel{k}d = ps+qt$, $p,q\in\mathbb{Z}$. $\Rightarrow kd=(kp)s+(kq)t$.

$\Rightarrow h\in\langle A,B\rangle$. ∴ $\langle a^d\rangle\subseteq\langle A,B\rangle$.

∴ $\langle A,B\rangle=\langle a^d\rangle$.

References

胡冠章. 应用近世代数（第三版）学习指导和习题详解[C]//北京:清华大学出版社,2012
胡冠章，王殿军. 应用近世代数[C]//北京:清华大学出版社,2006