第 2 次作业

危国锐　120034910021
（上海交通大学海洋学院，上海 200030）

摘　要：截止日期：2022-03-21.
关键词：词 1，词 2

Homework 2

Guorui Wei　120034910021
(*School of Oceanography*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200030, *China*)

Abstract: Due date: 2022-03-21.
Keywords: keyword 1, keyword 2

目 录

摘要 ..... **i**

Abstract ..... **i**

1 Due date: 2022-03-21 ..... **1**

References **3**

1 Due date: 2022-03-21

MATH6013 课后作业 2022.03.21 (due date)

习题2.3) 1. 解：因 $o(a)=n$, $o(b)=2$, 故 G 中任一元素 σ 可写成

$$\sigma = a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \cdots a^{i_n} b^{j_n}, \quad n\in N,$$

$i_k = 0,1,\cdots,n-1$, $j_k = 0,1$. 又 $ba = a^{-1}b$, 故 σ 还可写成

$$\sigma = a^k b^l, \quad k=0,1,\cdots,n-1, \ l=0,1.$$

即 $G = \{ a^k b^l \mid k=0,1,\cdots,n-1, \ l=0,1 \}$.

定义"映射" f: $\cancel{a^k b^l}$ $G\to D_n$, $a^k b^l \mapsto \rho_1^k \pi_0^l$.
容易验证这 f 确为 G 到 D_n 的映射("一映一"), 且为单射、满射, ~~故~~ $\cancel{G \overset{f}{\cong} D_n}$ 且保持群的运算. 故 $G \overset{f}{\cong} D_n$.

3. 解： $\mathbb{Z}_{12}^* = \{ \bar{k} \mid (k,12)=1 \} = \{ \bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11} \}$.

$K_4 = \{a,b,c,e\}$. 定义"映射" f: $K_4 \to \mathbb{Z}_{12}^*$: $e\mapsto \bar{1}$, $b\mapsto \bar{7}$, $a\mapsto \bar{5}$, $c\mapsto \overline{11}$.
容易验证 f 确为 K_4 到 $\mathbb{Z}_{12}^*$ 的双射, 例如 $f(ab)=f(c)=\overline{11}=f(a)f(b)=\bar{5}\,\bar{7}$ 且保持群的运算.

$\therefore K_4 \overset{f}{\cong} \mathbb{Z}_{12}^*$.

4. 解：否.(反证法). 假设有同构映射 $f: (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Q}^*,\cdot)$,
则必有 $a\in \mathbb{Q}$ s.t. $f(a)=2$. (因 f 是满射). 从而有

$$2 = f(a) = f\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) f\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^*,$$

矛盾. 故 $(\mathbb{Q},+)$ 不能同构于 $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

-1-

(p.54) 5. 证：(1) $\langle a^m \rangle = \{ a^{km} \mid k \in \mathbb{Z} \}$, $m = [s,t]$.

显然 $\langle a^m \rangle \subseteq A \cap B$. (因 $s \mid km$, $t \mid km$).

下证 $A \cap B \subseteq \langle a^m \rangle$. $\forall g \in A \cap B$, 不妨记 $g = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

由 $g \in A$ 得 $s \mid n$. 由 $g \in B$ 得 $t \mid n$. 故 $[s,t] \mid n$.

$\Rightarrow g \in \langle a^m \rangle \xRightarrow{\forall g \in A\cap B} \Rightarrow A \cap B \subseteq \langle a^m \rangle$.

$\therefore A \cap B = \langle a^m \rangle$.

(2) $\langle A, B \rangle = \{ a^{ps+qt} \mid p, q \in \mathbb{Z} \}$, $\langle a^d \rangle = \{ a^{kd} \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

$\forall g \in \cancel{\langle a^d \rangle} \langle A, B \rangle$, 不妨记 $g = a^{ps+qt}$. 因 $d \mid ps+qt$,

故 $g \in \langle a^d \rangle$. $\Rightarrow \langle A, B \rangle \subseteq \langle a^d \rangle$.

下证 $\langle a^d \rangle \subseteq \langle A, B \rangle$. $\forall h \in \langle a^d \rangle$, 不妨记

$h = a^{kd}$, $k \in \mathbb{Z}$. 由更相减损术, 知存在 p, q 使得

$d = ps + qt$, $p, q \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow kd = (kp)s + (kq)t$.

$\Rightarrow h \in \langle A, B \rangle$. $\therefore \langle a^d \rangle \subseteq \langle A, B \rangle$.

$\therefore \langle A, B \rangle = \langle a^d \rangle$.

A+

-2-

References

[1] 胡冠章, 王殿军. 应用近世代数 [M]. 3 ed. 北京: 清华大学出版社, 2006.