（1）Ekman 层底的垂向速度：

根据书上的公式 7.11，Ekman 底的垂向速度是

$$w_E = \vec{k} \cdot \nabla \times \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho_0 f_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{\rho_0 f_0} \right) = \frac{A\pi}{\rho_0 f_0 L} \sin\left(\frac{\pi y}{L} \right), -L < y < L.$$

在±L 之外是 0。

注意，根据题目意思，这里可以简单一点，旋度中的f可以作为f_0处理，而不需要考虑β效应。但如果考虑了β效应也没问题。

（2）垂向积分的径向（南北方向）输运速度：

根据书中的公式 7.14，

$$V_I = \frac{f}{\beta} \vec{k} \cdot \nabla \times \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho_0 f} \right).$$

这里我们会假设 β 平面，这也是题目提示的意思。于是，

$$\begin{aligned} V_I &= -\frac{f}{\rho_0 \beta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{f} \right) \\ &= -\frac{f}{\rho_0 \beta} \frac{f \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \beta \tau_x}{f^2} \\ &= \frac{\tau_x}{\rho_0 f} - \frac{1}{\rho_0 \beta} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

把τ_x的形式带进来，最终的结果是

$$V_I = \frac{A}{\rho_0 f} \cos\left(\frac{\pi y}{L} \right) + \frac{A\pi}{\rho_0 \beta L} \sin\left(\frac{\pi y}{L} \right).$$

上述结果成立的范围仍然是 ±L 之间，在这个区域之外结果是 0。

注意：

上述结果中是f，而不是f_0。大多数同学没有考虑到这一点。如果不考虑 β 效应，下面算流量的时候结果就是 0。大家也可以体会考不考虑f随纬度的变化导致的根本性区别（不是定量上的区别）。

有同学提出题目中风应力在 ±L 处不连续，这应该是题目的问题，可能在±L 之外应该是-A。但均匀的风场在 Sverdrup 理论中不起作用，所以这个错误对题目本身没有影响。

（3）用数值的方法确定w_E和V_I的最大值我就不写了。

（4）北纬 30 度的质量输运：

$$V_I = \frac{A}{\rho_0 f}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) + \frac{A\pi}{\rho_0 \beta L}\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right).$$

在北纬 30 度，也就是 y = 0 的地方，

$$V_I = \frac{A}{\rho_0 f}.$$

质量输运是

$$M = V_I \cdot L_x,$$

其中$L_x = 5000$ km = 5×10^6 m。因为 A = 0.2 N m^{-2}，$\rho_0 = 1025$ kg m^{-3}，在北纬 30 度，$f = 2\Omega\sin 30^o = 2 \times \frac{0.5}{24\times 3600} = 1.16 \times 10^{-5}$ s^{-1}。因此，

$$M = \frac{0.2}{1025 \times 1.16 \times 10^{-5}} \times 5 \times 10^6 = 84 \times 10^6\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-1} = 84\ \mathrm{Sv}.$$

这里我用了体积为单位，也就是 Sv 作为单位。但如果用质量为单位，也就是 kg s^{-1} 也可以。它们之间只差一个密度。但如果用其它单位一般就会有问题了，例如有同学用 m/s 之类的速度单位，这个肯定在估算的概念上存在问题。

到这里为止，应该是作业的内容。下面进行一些扩充，并不是作业要求的内容。

整个洋盆质量输运在向南方向的积分是$V = \int_{-L/2}^{L/2} V_I dy$。将 y = 0 认为是在北纬 30 度，1500 千米相当于 15 个纬度，也就是从北纬 15 度到 45 度的范围积分，即在整个中纬度洋盆积分。这里就不考虑赤道区域和高纬度区域。因此，

$$V = \int_{-L/2}^{L/2}\left[\frac{A}{\rho_0 f}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) + \frac{A\pi}{\rho_0 \beta L}\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right]dy.$$

上式的第二项比较简单，记

$$V2 = \int_{-L/2}^{L/2}\frac{A\pi}{\rho_0 \beta L}\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy.$$

做一个变量替换$Y = \frac{\pi y}{L}$,

$$V2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{A}{\rho_0 \beta}\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)d\left(\frac{\pi y}{L}\right) = \frac{A}{\rho_0 \beta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin Y\, dY = 0.$$

对于第一项，记为

$$V1 = \int_{-L/2}^{L/2}\frac{A}{\rho_0 f}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy.$$

我们考虑f随纬度的变化，即 β 效应。

$$V1 = \int_{-L/2}^{L/2}\frac{A}{\rho_0 (f_0 + \beta y)}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy \approx \int_{-L/2}^{L/2}\frac{A}{\rho_0 f_0}\left(1 - \frac{\beta y}{f_0}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy.$$

上式要注意如何做的近似，也就是$\frac{1}{f_0+\beta y} \approx \frac{1}{f_0}\left(1-\frac{\beta y}{f_0}\right)$。仍然做变量替换，$Y=\frac{\pi y}{L}$，

$$
\begin{aligned}
V1 &= \frac{A}{\rho_0 f_0}\int_{-L/2}^{L/2}\left(1-\frac{\beta y}{f_0}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)dy \\
&= \frac{AL}{\rho_0 f_0 \pi}\int_{-L/2}^{L/2}\left[\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)-\frac{\beta L}{f_0\pi}\left(\frac{\pi y}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right]d\left(\frac{\pi y}{L}\right) \\
&= \frac{AL}{\rho_0 f_0 \pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\cos Y-\frac{\beta L}{f_0\pi}Y\cos Y\right]dY.
\end{aligned}
$$

因为$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos Y\,dY=2$，$\int_0^{\pi}Y\cos Y\,dY=-2$，上式变为

$$V1=\frac{2AL}{\rho_0 f_0\pi}+\frac{2A\beta L^2}{\rho_0 f_0^2\pi^2}.$$

因此，$V=V1+V2=\frac{2AL}{\rho_0 f_0\pi}+\frac{2A\beta L^2}{\rho_0 f_0^2\pi^2}$。

为了和黑潮流量相比，V 需要对 y 方向的长度取平均，即除以±L/2 之间积分的长度，也就是 L。

$$\beta=\frac{2\Omega}{a}\cos 30^o=\frac{2*0.866}{24*3600*6370*10^3}=3.15\times10^{-12}\ \mathrm{m^{-1}\ s^{-1}}.$$

所以，流量为

$$M=\frac{V}{L}\cdot L_x=\left(\frac{2A}{\rho_0 f_0\pi}+\frac{2A\beta L}{\rho_0 f_0^2\pi^2}\right)\cdot L_x$$

$$=\left[\frac{2\times0.2}{1025\times(1.16\times10^{-5})\times3.14}+\frac{2\times0.2\times(3.15\times10^{-12})\times1.5\times10^6}{1025\times(1.16\times10^{-5})^2\times(3.14)^2}\right]\times5\times10^6$$

$$\approx 60\times10^6\ \mathrm{m^3\ s^{-1}}.$$

也就是总的流量约为 60 Sv。

更多的一点讨论：

在一个极端简化的风场结构下，向南的流量和向北的西边界流量可以相比。这说明 Sverdrup 关系的正确性。

此外，太平洋和大西洋的西边界流，也就是黑潮和湾流的流量差不多，都是 30 Sv 左右。两个大洋的风场结构和强度也相当。而对大西洋，洋盆宽度大约是太平洋的一半。那么根据 Sverdrup 关系，产生的问题就是，为什么洋盆尺度差别这么大，但两个西边界流的流量事实上却差不多呢？而不是和洋盆宽度一样，相差近两倍呢？这个其实是风生环流理论中并没有解决的一个理论问题。