基础数理统计（研究生公共课）

肖柳青 教授 博士主讲

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

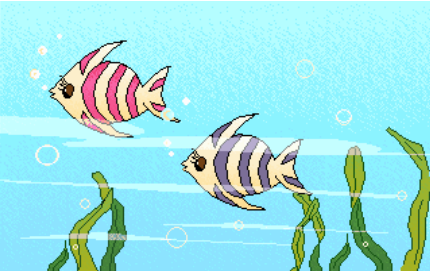
第 2 章 参数估计（Parametric Estimation）

主要内容

1.点估计的基本概念
2.两种基本的点估计方法
3.点估计的优良标准（无偏性及有效估计和C-R下界）
4.最佳点估计（充分统计量）
5.置信区间估计
6.贝叶斯估计

2.4 置信区间估计的基本概念
(Confidential Interval)

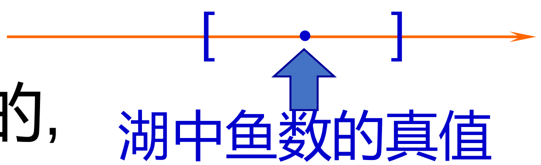
譬如，在估计湖中鱼数的问题中，若我们根据一个实际样本得到鱼数 N 的极大似然估计为 1000 条.



但实际上，N 的真值可能大于 1000 条，也可能小于1000条.

若我们能给出一个区间，在此区间内我们合理地相信 N 的真值位于其中，这样对鱼数的估计就有把握多了.

也就是说，我们希望确定一个尽可能小的区间，使我们能以比较高的可靠程度相信它包含真参数值.



这里所说的"可靠程度"是用概率来度量的，称为置信概率，置信度或置信水平.

习惯上把置信水平记作 $1-\alpha$，这里 α 是一个很小的正数.

置信水平的大小是根据实际需要选定的。**例如，通常可取置信水平 = 0.95 或 0.9 等等.**

根据一个实际样本，由给定的置信水平$1-\alpha$，我们求出一个的区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$，使

$$P(\underline{\theta} \le \theta \le \bar{\theta}) = 1-\alpha,$$

如何寻找这种区间?

我们选取未知参数的某个估计量$\hat{\theta}$，根据置信水平$1-\alpha$，可以找到一个正数 δ， 使得

$$P(|\hat{\theta}-\theta| \le \delta) = 1-\alpha,$$

只要知道 $\hat{\theta}$ 的概率分布就可以确定 δ. 由不等式 $|\hat{\theta}-\theta| \le \delta$ 可以解出θ：

$$\hat{\theta}-\delta \le \theta \le \hat{\theta}+\delta$$

这个不等式就是我们所求的置信区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

下面我们就来正式给出置信区间的定义，并通过例子说明求置信区间的方法.

一、 置信区间的定义

定义： 设 θ 是总体 X 的待估参数, , $X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的样本, 对给定值 $0<\alpha<1$, 若统计量 $\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})=1-\alpha ,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间. $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限.

置信度 置信概率

作区间估计, 就是要设法找出两个只依赖于样本的界限(构造统计量) $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$. $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$是随机区间,代入样本值所得的普通区间称为置信区间的实现.

- 置信水平为 0.95 是指 100 组样本值所得置信区间的实现中, 约有95个能覆盖 θ, 而不是说一个实现以 0.95 的概率覆盖了 θ.
- 要求 θ 以很大的可能被包含在置信区间内, 就是说, 概率 $P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$ 要尽可能大. 即要求估计尽量可靠.
- 估计的精度要尽可能的高即要求区间置信的长度尽可能短, 或能体现该要求的其它准则.

将样本值代入 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 所得的普通区间称为置信区间的实现.

- 置信水平的概率意义; 并非一个实现以 $1-\alpha$ 的概率覆盖了 θ.
- 估计要尽量可靠, 即 $P(\underline{\theta}<\theta<\bar{\theta})=1-\alpha$ 要尽可能大.
- 估计的精度要尽可能的高. 即要求置信区间的长度尽可能短.

可靠度与精度是一对矛盾, 一般是在保证可靠度的条件下尽可能提高精度.

二、置信区间的求法

（一）单个正态总体

1. 均值 μ
   - (1) 已知方差 σ^2
   - (2) 未知方差 σ^2
2. 方差 σ^2
   - (1) 已知均值 μ
   - (2) 未知均值 μ

（二）两个正态总体

1. 均值 $\mu_1-\mu_2$
   - (1) 已知方差 σ_1^2, σ_2^2
   - (2) 未知方差 σ_1^2, σ_2^2, 但相等！
2. 方差 σ_1^2/σ_2^2
   - (1) 已知均值 μ_1, μ_2
   - (2) 未知均值 μ_1, μ_2

如何根据实际样本，由给定的置信水平$1-\alpha$，求出一个区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$，使

$$P(\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta})=1-\alpha\ ?$$ ①

我们选取未知参数的某个估计量$\hat{\theta}$,根据置信水平$1-\alpha$, 可以找到一个正数 δ， 使得 $P(|\hat{\theta}-\theta|\le\delta)=1-\alpha,$

只要知道$\hat{\theta}$的概率分布就可以确定δ.

分布的分位数 ②

由不等式 $|\hat{\theta}-\theta|\le\delta$ 可以解出θ： $\hat{\theta}-\delta\le\theta\le\hat{\theta}+\delta$ ③

这个不等式就是我们所求的置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

对于给定的置信水平，根据估计量U 的分布，确定一个区间， 使得 U 取值于该区间的概率为置信水平.

(一) 单个正态总体置信区间的求法

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$，S^2 分别是其样本均值和样本方差，求参数 μ、σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

1. 均值 μ 的置信区间

① 确定未知参数的估计量及其函数的分布

(1) 已知方差 σ^2 时

$\because$ $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的无偏估计量，故可用 $\bar{X}$ 作为 EX 的一个估计量，

由抽样分布定理知

$\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$，　$\therefore\ U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

对给定的置信度 $1-\alpha$，

有了分布就可求出 U 取值于任意区间的概率

按标准正态分布的双侧 α 分位数的定义 $P(|U|\geq u_{\alpha/2})=\alpha$，

② 由分布求分位数 μ

即令 $\Phi(u_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}$，查正态分布表可得 $u_{\alpha/2}$，

③ 由 $u_{\alpha/2}$ 确定置信区间

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2}\quad\Leftrightarrow\quad \bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$$

即得置信区间　$\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$，　简记为 $\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$

求置信区间首先要明确问题:

是求什么参数的置信区间? 置信水平 $1-\alpha$ 是多少?

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

一般步骤如下:

1. 寻找未知参数 θ 的一个良好的点估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$;

确定待估参数估计量函数 $U(\hat{\theta})$ 的分布;

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

2. 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 由概率 $P(|U|\geq x_\alpha)=\alpha$,

查表求出分布的分位数 x_α,

$$\Phi(u_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}$$

$$P(|U|\geq u_{\alpha/2})=\alpha$$

3. 由分位数 $|U|\geq x_\alpha$ 确定置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

$$\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$$

$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是θ的 $100(1-\alpha)\%$ 的置信区间.

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$$

总体分布的形式是否已知, 是怎样的类型, 至关重要.

[例] 某乡农民在联产承包责任制前人均纯收入 X（单位：万元），且 $X \sim N(300, 25^2)$. 推行联产承包责任制后，在该乡抽得 $n=16$ 的样本，得 $\bar{x}=325$万元，假设 $\sigma^2=25^2$没有变化，求μ的置信水平为 0. 95 的置信区间.

解 由于 $\alpha=0.05$， 查正态分布表得 $u_{0.025}=1.96$，

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2} \Leftrightarrow \left|\frac{325-\mu}{25/\sqrt{16}}\right|<1.96 \Leftrightarrow 325-\frac{25}{\sqrt{16}}1.96<\mu<325+\frac{25}{\sqrt{16}}1.96$$

即得置信区间 （312. 75， 337. 25）.

区间长度为 24. 25

如在上例中取 $\alpha=0.01+0.04$， 由正态分布上侧分位数定义知

$$0.01+0.04=1-\Phi(u_{0.01})+1-\Phi(u_{0.04})=1-\Phi(u_{0.01})+\Phi(-u_{0.04})$$

$$=1-P(-u_{0.04}<U<u_{0.01})$$

长度为 25. 5

查表知 $u_{0.01}=2.33$，$u_{0.04}=1.75 \Rightarrow 325-\frac{25}{\sqrt{16}}2.33<\mu<325+\frac{25}{\sqrt{16}}1.75$

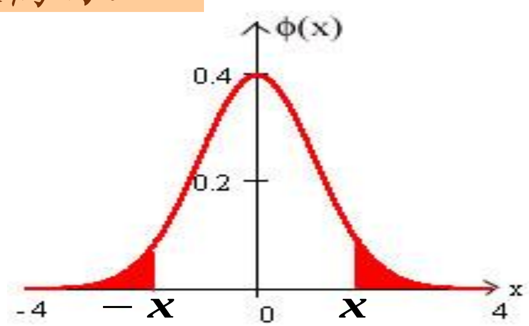
- 同一置信水平下的置信区间不唯一，其长度也不相等.

谁是精度最高的？

当然区间长度越短的估计，精度就越高.

由于标准正态分布密度函数的图形是单峰且对称的，

在保持面积不变的条件下，以对称区间的长度为最短！！



同一置信水平下的置信区间不唯一. 其长度也不相等.

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$$

的长度是最短的, 故我们总取它作为置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

一般地, 在概率密度为单峰且对称的情形下, $a=-b$ 对应的置信区间的长度为最短.

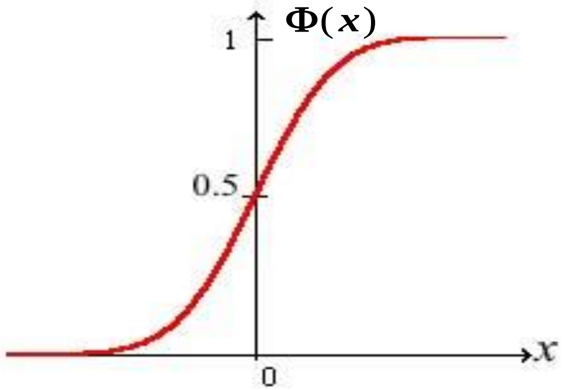
l 与 n, α 的关系: 由置信区间公式 $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$ 可知,

置信区间的长度 l 为: $l=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$,

1^0 若给定 n, l 随着 α 的减小而增大;

$\Phi(u_{\alpha/2})$ 就越大, 这时 α 就越小.

则 $u_{\alpha/2}$ 越大, l 就越大,



2^0 若给定 α, l 随着 n 的增大而减小;

且由于 l 与 $\sqrt{n}$ 成反比, 减小的速度并不快,

例如, n 由 100 增至 400 时, l 才能减小一半.

$$\Phi(u_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}$$

(2) 方差 σ^2未知时 —— 实用价值更大 !!

由于$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$与$\sigma$有关, 故不能采用已知方差的均值估计方法 —用 $U=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 分布的分位数求μ的置信区间.

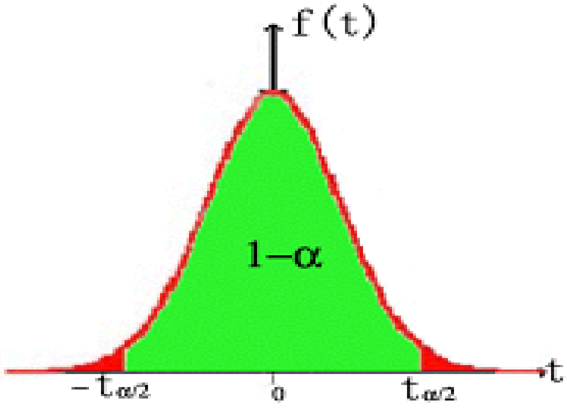
但其解决的思路一致.

由于S^2是σ^2的无偏估计量,故可用S替代σ的估计量:

由抽样分布定理知 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

令 $P\{|T|\le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$,

查t分布表确定上侧$\alpha/2$分位数$t_{\alpha/2}(n-1)$,



$$\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|\le t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow\ \bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\le\mu\le\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$$

$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$即为$\mu$的置信度为$1-\alpha$的区间估计.

[例] 为确定某种溶液中甲醛浓度，测定总体服从正态分布，且其4个独立测量值的平均值 $x = 8.34\%$， 样本标准差 $s = 0.03\%$，求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解 由于 $\alpha/2 = 0.025$，自由度 $n-1 = 3$， 查 t 分布表得 $t_{0.025} = 3.182$，

将 $\bar{x} = 8.34\%$ 代入 $\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}$ 得

$$\left|\frac{8.34-\mu}{0.03/\sqrt{4}}\right| < 3.182$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(8.34-\frac{0.03}{\sqrt{4}}\times 3.182\right)\% < \mu < \left(8.34+\frac{0.03}{\sqrt{4}}\times 3.182\right)\%$$

即得置信区间 $\left(\left(8.34-\frac{0.03}{\sqrt{4}}\times 3.182\right)\%,\ \left(8.34+\frac{0.03}{\sqrt{4}}\times 3.182\right)\%\right)$

即 $(8.292\%,\ 8.388\%)$.

2. 方差σ^2 的 置信区间的求法

（2）μ 未知时　因为σ^2 的无偏估计为 S^{*2}, 由抽样分布定理知

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

找一个含σ与S, 但不含μ, 且分布已知的统计量

由 $P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\chi^2\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$

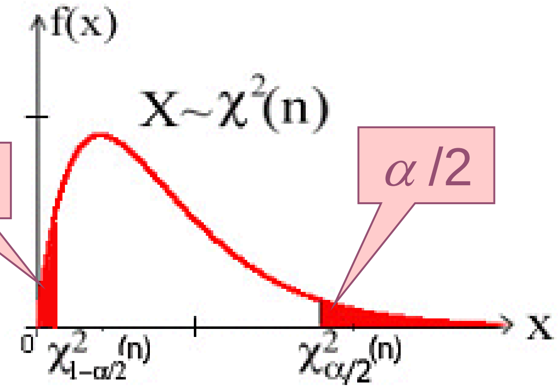
确定 χ^2 分布的上侧 $\alpha/2$ 分位数

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$,

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$,

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},$$



所以σ^2的置信水平为$1-\alpha$ 的区间估计为 $$\left(\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\quad\frac{(n-1)S^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

并不是最短的置信区间

为了计算简单, 在概率密度不对称的情形下, 如 χ^2 分布, F 分布, 习惯上仍取对称的分位点来计算未知参数的置信区间.

[例] 为确定某种溶液中甲醛浓度, 测定总体服从正态分布, 且其 4 个独立测量值的平均值 $\bar{x} = 8.34\%$, 样本标准差 $s = 0.03\%$, 求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

求总体方差 σ^2 和标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解 由于 $\alpha/2 = 0.025$, 自由度 $n-1 = 3$,

查 χ^2 分布表得 $\chi^2_{0.025}(3) = 9.348$, $\chi^2_{1-0.025}(3) = 0.216$,

将 $s^2 = 0.0009$ 代入 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$,

得 $$\frac{3\times 0.0009}{9.348} \le \sigma^2 \le \frac{3\times 0.0009}{0.216},$$

故 σ^2 的置信区间为 $(0.00029\%, 0.0125\%)$,

故 σ 的置信区间为 $(0.017\%, 0.112\%)$.

一个正态总体未知参数的置信区间（S无偏估计）

待估参数		枢轴量	枢轴量的分布	双侧置信区间的上、下限
μ	σ^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,\ 1)$	$\bar{X}\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ^2未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\bar{X}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}$
σ^2	μ已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}$　$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$
	μ未知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	$\chi^2(n-1)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$　$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

(二) 两个正态总体 置信区间的求法

设 $X_1, \cdots, X_m$ 分别是总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1, \cdots, Y_n$ 分别是总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 分别是总体 X 和 Y 的样本均值, S_X^2, S_Y^2 分别是总体 X 和 Y 的样本方差. 求参数 $\mu_1 - \mu_2$ 和 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

1. 均值 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

(1) 已知方差 σ_1^2, σ_2^2 时　　由于 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 分别是 μ_1, μ_2 的无偏估计量, 故可用 $\bar{X}-\bar{Y}$ 作为 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个估计量,

由抽样分布定理知

$$U = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1),$$

对给定的置信度 $1-\alpha$,

令 $\Phi(u_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$, 查正态分布表可得 $u_{\alpha/2}$,

$$|U| < u_{\alpha/2} \iff \bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}} < \mu_1-\mu_2 < \bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$$

即得置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$$

(二) 两个正态总体置信区间的求法

设 $X_1, \cdots, X_m$ 分别是总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1, \cdots, Y_n$ 分别是总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别是总体 X 和 Y 的样本均值, S_X^2, S_Y^2 分别是总体 X 和 Y 的样本方差,求参数 $\mu_1 - \mu_2$ 和 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

1. 均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

(2) 未知方差 σ_1^2, σ_2^2, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时

仍用 $\bar{X} - \bar{Y}$ 作为 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个估计量,

$$\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}$$

由抽样分布定理知

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} \sim t(n+m-2),$$

对给定的置信度 $1-\alpha$,

查 t 分布表可得 $t_{\alpha/2}(n+m-2)$,

$$|T|<t_{\alpha/2}(n+m-2) \Leftrightarrow \bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}S_\omega\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} < \mu_1-\mu_2 < \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}S_\omega\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},$$

即得置信区间 $\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}\right)$

例 为比较两个小麦品种的产量，选择18块条件相似的试验田，采用相同的耕作方法做试验，结果播种甲品种的8块试验田的单位面积产量和播种乙品种的10块试验田的单位面积产量（单位：kg）分别为：

甲品种 628 583 510 554 612 523 530 615

乙品种 535 433 398 470 567 480 498 560 503 426

假定每个品种的单位面积产量均服从正态分布，试求这两个品种平均单位面积产量差的0.95置信区间。

解　以 $x_1,\cdots x_8$ 记甲品种的单位面积产量，

$y_1,\cdots y_{10}$ 记乙品种的单位面积产量，

由样本数据可计算得到

$$\bar{x}=569.38, s_x^2=2110.55, m=8$$

$$\bar{y}=487.00, s_y^2=3256.22, n=10$$

下面分两种情况讨论。

(1) 若已知两个品种的单位面积产量的标准差相同，则可采用二样本t区间。

此处 $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)=t_{0.975}(16)=2.1199$

$$S_w=\sqrt{\frac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}}=\sqrt{\frac{7\times 2110.55+9\times 3256.22}{16}}=52.4880$$

$$\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}s_w t_{1-\alpha/2}(\mathrm{m+n-2})=52.4880\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}\times 2.1199=52.78$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的0.95置信区间为

$$569.38-487\pm 52.78=[29.60,135.16]$$

（2）若两个品种的单位面积产量的标准差不相同，则可采用近似t区间。此处

$$s_0^2 = s_x^2/m + s_y^2/n = 2110.55/8 + 3256.22/10 = 589.44, s_0 = 24.28$$

$$l = \frac{589.44^2}{\frac{2110.55^2}{8^2 \times 7} + \frac{3256.22^2}{10^2 \times 11}} = 17.74 \approx 18$$

$$s_0 t_{0.975}(l) = 24.28 \times 2.1009 = 51.01$$

于是$\mu_1 - \mu_2$的0.95近似置信区间为[31.37, 133.38]。

(3) σ_1^2,σ_2^2 未知，n, m > 50, $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\approx\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}$$

$$\longrightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$\overline{X},\overline{Y}$ 相互独立，因此 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}\right)$$

(4) σ_1^2, σ_2^2 未知，但 $n=m$，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

令 $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, 可以将它们看成来自正态母体 $Z \sim N(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ 的子样

$$\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y},$$

$$S_Z^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - Y_i) - (\bar{X} - \bar{Y})\right]^2$$

仿单个正态母体公式 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z^*}{\sqrt{n}} \right)$$

(5)方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1, μ_2 未知)

取枢轴量 $F=\dfrac{S_X^{*2}/\sigma_1^2}{S_Y^{*2}/\sigma_2^2}=\dfrac{S_X^{*2}/S_Y^{*2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

因此, 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

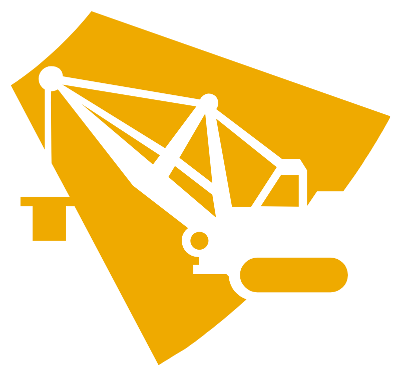
$$\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}},\quad F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}}\right)$$

例 某车间有两台自动机床加工一类套筒，假设套筒直径服从正态分布。现在从两个班次的产品中分别检查了5个和6个套筒，得其直径数据如下(单位：cm)：

甲班：5.06 5.08 5.03 5.00 5.07

乙班：4.98 5.03 4.97 4.99 5.02 4.95

试求两班加工套筒直径的方差比$\sigma_{甲}^2/\sigma_{乙}^2$ 的0.95置信区间。



解 此处，m = 5，n = 6，由查表知

$$F_{0.025}(4,5)=\frac{1}{F_{0.975}(5,4)}=1/9.36=0.1068, F_{0.975}(4,5)=7.39$$

由数据算得 $s_{甲}^2=0.00037$，$s_{乙}^2=0.00092$

故置信区间的两端分别为

$$\frac{s_{甲}^2}{s_{乙}^2}\frac{1}{F_{0.975}(4,5)}=\frac{0.00037}{0.00092}\times\frac{1}{7.39}=0.0544\quad,$$

$$\frac{s_{甲}^2}{s_{乙}^2}\frac{1}{F_{0.025}(4,5)}=\frac{0.00037}{0.00092}\times\frac{1}{0.1068}=3.7657$$

由此可知

$\sigma_{甲}^2/\sigma_{乙}^2$ 的0.95置信区间为[0.0544, 3.7657]。

例 某厂利用两条自动化流水线罐装番茄酱. 现分别 从两条流水线上抽取了容量分别为13与17的两个相互独立的子样

$$X_1, X_2, \cdots, X_{13} \qquad Y_1, Y_2, \cdots, Y_{17}$$

$$\bar{x} = 10.6g, \qquad \bar{y} = 9.5g$$

$$s_X^{*2} = 2.4g^2, \quad s_Y^{*2} = 4.7g^2$$

假设两条流水线上罐装的番茄酱的重量都服从正态分布, 其均值分别为 μ_1与 μ_2

(1) 若它们的方差相同 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$,

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信概率为0.95 的置信区间;

(2) 若不知它们的方差是否相同, 求它们的

方差比的置信概率为 0.95 的置信区间

解 (1) 取枢轴量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_X^{*2}+(m-1)S_Y^{*2}}{n+m-2}}}\sim t(n+m-2)$$

$$t_{0.025}(28)=2.0484$$

由公式 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_X^{*2}+(m-1)S_Y^{*2}}{n+m-2}}\right)$$

$$=(-0.3545,\quad 2.5545)$$

(2) 枢轴量为 $F=\dfrac{S_X^{*2}/S_Y^{*2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(12,\ 16)$

$$F_{0.975}(16,\ 12)=\frac{1}{F_{0.025}(12,16)}=\frac{1}{2.89}$$

$$F_{0.025}(16,\ 12)=3.16$$

由公式 得方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(F_{0.975}(16,12)\frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}},\quad F_{0.025}(16,12)\frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}}\right)$$

$$=(\ 0.1767,\quad 1.6136\ )$$

两个正态总体未知参数的置信区间（一）

待估参数		枢轴量	枢轴量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2、σ_2^2 均已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,\ 1)$	$(\bar{X}-\bar{Y})\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 但未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$(\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$

其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$

两个正态总体未知参数的置信区间（二）

待估参数		枢轴量	枢轴量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1、μ_2 均未知	$\dfrac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}$	$F(m-1,\ n-1)$	$\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$， $\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$
	μ_1、μ_2 均已知	$\dfrac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/\sigma_1^2}{m\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2/\sigma_2^2}$	$F(m,\ n)$	$\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\cdot\dfrac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}$， $\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\cdot\dfrac{n\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}$

小结——正态总体置信区间的求法

主要根据抽样分布Th

① 根据未知参数的无偏估计量，确定其某个估计量 $\hat{\theta}$；

② 由 $\hat{\theta}$ 的概率分布和置信水平 $1-\alpha$，确定其相应的分位数 $x_{\alpha/2}$；

③ 由不等式 $|\hat{\theta}-\theta| \le x_\alpha$，解得所求的置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

SJTU

（一）单个总体

- 均值 μ
  - 已知方差 σ^2：$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;
  - 未知方差 σ^2：$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
- 方差 σ^2
  - 已知均值 μ
  - 未知均值 μ：$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$.

（二）两个总体

- 均值差 $\mu_1-\mu_2$
  - 已知方差 σ_1^2, σ_2^2：$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{(\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})^{\frac{1}{2}}} \sim N(0,1)$;
  - 未知方差 σ_1^2, σ_2^2 但相等！：$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}} \sim t(m+n-2)$,
- 方差比 σ_1^2/σ_2^2
  - 已知均值 μ_1, μ_2
  - 未知均值 μ_1, μ_2：$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$,

三、单侧置信区间

求单侧置信区间的思路完全同于双侧的情形

上述置信区间中置信限都是双侧的，有些实际问题，人们关心的只是参数在一个方向的界限.

例如对于设备、元件的使用寿命来说，平均寿命过长没什么问题，过短就有问题了．这时，可将置信上限取为+∞，而只着眼于置信下限，这样求得的置信区间叫单侧置信区间.

定义（P. 52）设 θ 是总体 X 的待估参数，$X_1, \cdots, X_n$ 是取自 X 的样本，对给定值 $0<\alpha<1$，若统计量 $\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 满足

$$P(\theta>\underline{\theta})=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，称 $\underline{\theta}$ 为单侧置信下限；若统计量 $\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 满足

$$P(\theta<\overline{\theta})=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(-\infty, \overline{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，称 $\overline{\theta}$ 为单侧置信上限.

例 从一批汽车轮胎中随机地取16只作磨损试验，记录其磨坏时所行驶路程(单位:公里)， 算得样本均值 $\bar{x}=41116$，样本标准差 $s=6346$.设此样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ 均未知，问该种轮胎平均行驶路程至少是多少($\alpha=0.05$)?

解 由于σ^2未知， 由抽样分布定理知随机变量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

查 t 分布表可得满足条件 $P(T<t_{0.05}(16-1))=0.05$ 的上侧分位数

$t_{0.05}(15)=1.7531$,

将 $\bar{x}=41116$, $s=6346$ 代入 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_\alpha$ 得 $\frac{41116-\mu}{6346/\sqrt{16}}<1.7531$,

即得置信度为0.95的单侧置信下限 $\underline{\mu}=41116-\frac{6346}{\sqrt{16}}\times 1.7531=38334$,

故该种轮胎平均行驶路程不少于38334公里，其置信概率为0.95.

关于置信区间的构造有两点说明:

1、满足置信度要求的c与d通常不唯一。若有可能，应选平均长度 $E(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L)$ 达到最短的c与d，这在G的分布为对称分布场合通常容易实现。

2、实际中，选平均长度$(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L)$ 尽可能短的c与d，这往往很难实现，因此，常这样选择 c与d，使得两个尾部概率各为$\alpha/2$，即$P(G<c)=P(G>d)=\alpha/2$，这样的置信区间称为等尾置信区间。这是在G的分布为偏态分布场合常采用的方法。

【例】 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自均匀总体$U(0, \theta)$的一个样本，试对给定的$\alpha\ (0<\alpha<1)$给出θ的$1-\alpha$同等置信区间。

解:（1）取$x_{(n)}$作为枢轴量，其分布函数为

$$F(x;\theta)=(x/\theta)^n,\quad 0<x<1;$$

（2）$x_{(n)}/\theta$的分布函数为$F(y)=y^n, 0<y<1$，故

$$P(c\le x_{(n)}/\theta\le d)=d^n-c^n,$$

因此我们可以适当地选择c和d满足$d^n-c^n=1-\alpha$

（3）利用不等式变形可容易地给出θ的$1-\alpha$同等置信区间为$[x_{(n)}/d,\ x_{(n)}/c]$，该区间的平均长度为$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)Ex_{(n)}$。不难看出，在$0\leqslant c<d\leqslant 1$及$d^n-c^n=1-\alpha$的条件下，当$d=1$，$c=\sqrt[n]{\alpha}$时，$\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$取得最小值，这$\left[x_{(n)},\ \frac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right]$是$\theta$的置信水平$1-\alpha$为最短置信区间。

非正态母体的情形置信区间

一. 非正态母体的情形 (大子样)

设母体的期望 $EX=\mu$ 与方差 $DX=\sigma^2$ 均未知, 用大子样($n\geq 50$)对 μ 作区间估计.

取 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

由 $P(|U|<u_{\alpha/2})=1-\alpha$ 得 μ 的置信区间

$$(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

例 从学校新生中随机地选50名,进行田径项目测试, 由测试成绩得子样均值 $\bar{x}=75.8$,

$$s^2=144.72.$$

成绩的置信区间, 置信概率为95%.

解 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.05}=1.96,\ s=12.03.$ 由(1)式得

$$\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}=75.8-1.96\times\frac{12.03}{\sqrt{50}}=72.465,$$

$$\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}=75.8+1.96\times\frac{12.03}{\sqrt{50}}=79.135,$$

$$(72.465,\ 79.135)$$

若母体 $X \sim B(1, p)$，容量为 n 的子样中恰有 m 个1，试对 p 作区间估计.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{m}{n}$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{m}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

代入(1)式得

$$\left(\frac{m}{n} - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)},\ \frac{m}{n} + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)}\right)$$

例1 自一大批产品中抽取100个样品, 其中有60个一级品, 求这批产品的一级品率 p 的置信度为0.95的置信区间.

解 $n=100,\ m=60,\ u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

$$\left(\frac{m}{n}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)},\ \frac{m}{n}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)}\right)$$

$$=(0.504,\ 0.696)$$

注 另一解法见后面附录

非正态母体均值的区间估计（补充）

若母体 X 的分布未知，但子样容量很大，

由中心极限定理，可近似地视 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

若σ^2已知，则 μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间可取为

$$\overline{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

若σ^2未知，则 μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间可取为

$$\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

设 X 服从参数为 p 的0-1分布, 子样为

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$

推导 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间公式.

解 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p) \longrightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\longrightarrow \quad 0 \le \frac{n(\bar{X}-p)^2}{p(1-p)} < u_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

$$\Longrightarrow (n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2)p^2-(2n\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}^2)p+n\overline{X}^2<0$$

$$a=(n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2),\ b=-(2n\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}^2),\ c=n\overline{X}^2$$

$$\boxed{p_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad p_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

附例1 自一大批产品中抽取100个样品, 其中有60个一级品, 求这批产品的一级品率 p 的置信度为0.95的置信区间.

解 $n=100$, $\bar{x}=0.6$, $\alpha=0.05$, $u_{0.025}=1.96$

$$a=100+1.96^2=103.84, c=100\times0.6^2=36,$$

$$b=-(2\times100\times0.6+1.96^2)=-123.84$$

代入前页公式得 p 的置信区间为

$$(p_1, \ p_2)=(0.502, \ 0.691)$$

注 结果与前面例1稍有差别.

第7次作业：

- 孙p.62 习题二
- 43、46.

谢 谢！