基础数理统计

第二章　随机变量

1. 2.1 引言
2. 2.2 分布函数和概率函数
3. 2.3 一些重要的离散随机变量
4. 2.4 一些重要的连续随机变量
5. 2.5 二元分布
6. 2.6 边际分布
7. 2.7 独立随机变量
8. 2.8 条件分布
9. 2.9 多元分布与独立同分布样本
10. 2.10 两个重要的多元分布
11. 2.11 随机变量的变换

2.1 引言

1 2.1 引言

2 2.2 分布函数和概率函数

3 2.3 一些重要的离散随机变量

4 2.4 一些重要的连续随机变量

5 2.5 二元分布

6 2.6 边际分布

7 2.7 独立随机变量

8 2.8 条件分布

随机变量

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 1

随机变量就是给原始的样本空间 Ω 中每个元素标记为一个实数：

$$X: \ \Omega \to \mathbb{R},$$

特殊随机变量-示性函数

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

如果感兴趣的是样本空间 Ω 中某个子集-事件 A，可以定义随机变量

$$I_A(\omega) = I(\omega \in A) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in A, \\ 0 & \text{if } \omega \in A^c. \end{cases}$$

其中

$$P(I_A = 1) = P(A), P(I_A = 0) = 1 - P(A).$$

2.2 分布函数和概率函数

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

1 2.1 引言
2 2.2 分布函数和概率函数
3 2.3 一些重要的离散随机变量
4 2.4 一些重要的连续随机变量
5 2.5 二元分布
6 2.6 边际分布
7 2.7 独立随机变量
8 2.8 条件分布

分布函数

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

给定一个随机变量 X, 我们可以用分布函数来描述其概率信息:

定义 2 (累积分布函数)

对随机变量 X, 分布函数 *(Cumulative Distribution Function, CDF)* 定义为

$$F(x) = P(X \leq x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

注：随机变量 X, Y 的分布函数分别记为 F, G，如果 $F(x) = G(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立，则 $P(X \in A) = P(Y \in A)$(A 为可测集)，但并不意味着 $X = Y$。

分布函数的性质

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

分布函数 $F(\cdot)$ 是定义在实数空间 $\mathbb{R}$ 上的函数,

- 正则性 $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1;$
- 单调增函数 $\forall x_1 \leq x_2, \quad F(x_1) \leq F(x_2);$
- 右连续 $F(x) = F(x^+) = \lim_{y\to x^+} F(y).$

反之，任意满足上述性质的函数也都可以成为分布函数。

常见概率的计算

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

- $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - F(x^-)$;
- $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$;
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$.

概率密度

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 3

如果 X 取值为可数的值，则 X 是离散的，定义 X 的概率函数或概率密度函数为 $f_X(x) = P(X = x)$。

概率密度函数

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 4 (概率密度函数)

对于随机变量 X, 如果存在一个非负函数 $f(x) \geq 0$, 满足 $\int f(x)dx = 1$ 以及 $\forall a \leq b$,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx,$$

那么我们称 X 是连续随机变量，$f(x)$ 为其密度函数 (pdf)。密度函数与分布函数之间的关系：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad f(x) = F'(x).$$

注：PDF 可以是无界的，例如 $f(x) = 2/3x^{-1/3}$, $x \in (0, 1)$。

分位数

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 5 (分位数函数)

令 X 为一个随机变量，其 CDF 为 F，逆 CDF 或分位数函数定义为

$$F^{-1}(q) = \inf\{x : F(x) > q\}.$$

其中 $q \in (0, 1)$。如果 F 严格递增并且连续则 $F^{-1}(q)$ 是满足 $F(x) = q$ 的唯一实数 x。

称 $F^{-1}(1/4)$ 为第一分位数，$F^{-1}(1/2)$ 为中位数，$F^{-1}(3/4)$ 为第三分位数。

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

例 1

1. 如果 $P(X=0)=P(X=2)=1/4,\ P(X=1)=1/2$，则 $F^{-1}(1/4)=1$ 但 $F(x)=1/4\ \forall x\in[0,1)$。
2. 如果 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=1,\ (0\leq 0\leq 1)$，则 $F(x)=x,\ \forall x\in[0,1],\ \ F^{-1}(q)=q$。

2.3 一些重要的离散随机变量

1 2.1 引言
2 2.2 分布函数和概率函数
3 2.3 一些重要的离散随机变量
4 2.4 一些重要的连续随机变量
5 2.5 二元分布
6 2.6 边际分布
7 2.7 独立随机变量
8 2.8 条件分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

重要的分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

单点分布，离散均匀分布，Bernoulli 分布，二项式分布，几何分布，Poisson 分布

2.4 一些重要的连续随机变量

1. 2.1 引言
2. 2.2 分布函数和概率函数
3. 2.3 一些重要的离散随机变量
4. 2.4 一些重要的连续随机变量
5. 2.5 二元分布
6. 2.6 边际分布
7. 2.7 独立随机变量
8. 2.8 条件分布

重要的分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

均匀分布，正态分布，指数分布，Gamma 分布，Beta 分布，t 分布，Cauchy 分布，χ^2 分布

2.5 二元分布

1. 2.1 引言
2. 2.2 分布函数和概率函数
3. 2.3 一些重要的离散随机变量
4. 2.4 一些重要的连续随机变量
5. 2.5 二元分布
6. 2.6 边际分布
7. 2.7 独立随机变量
8. 2.8 条件分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

对于二元随机变量 (X, Y), 其概率分布对应的是联合分布函数

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

如果连续的，对应的有二元密度函数 $f(x, y)$(对应微积分中的二元积分)

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dudv.$$

二维正态分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 6

若二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ 是常数且

$$\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0,\ -1 < \rho < 1.$$

则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ 的二维正态分布，记作

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho).$$

2.6 边际分布

1 2.1 引言
2 2.2 分布函数和概率函数
3 2.3 一些重要的离散随机变量
4 2.4 一些重要的连续随机变量
5 2.5 二元分布
6 2.6 边际分布
7 2.7 独立随机变量
8 2.8 条件分布

- 如果是离散分布，假设联合分布为:

$$P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i,j} p_{ij} = 1,$$

那么边际分布为:

$$P(X = a_i) = \sum_j P(X = a_i, Y = b_j) = \sum_j p_{ij} = p_{i\cdot},$$

$$P(Y = b_j) = \sum_i P(X = a_i, Y = b_j) = \sum_i p_{ij} = p_{\cdot j}.$$

- 如果是连续分布，假定密度函数为 $f(x, y) \geq 0$,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv,$$

$$P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv,$$

以及 X 边际分布的密度函数为

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

2.7 独立随机变量

1 2.1 引言
2 2.2 分布函数和概率函数
3 2.3 一些重要的离散随机变量
4 2.4 一些重要的连续随机变量
5 2.5 二元分布
6 2.6 边际分布
7 2.7 独立随机变量
8 2.8 条件分布

独立

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

如果对于任意 A 和 B 有

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B),$$

则称随机变量 X 和 Y 是独立的，记为 $X \amalg Y$。

如果两个随机变量 (X, Y) 独立,

- $\forall x, y$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

  或者 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.

- 如果是离散分布, 对于 $\forall a_i, b_j$

$$P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

- 如果是连续分布

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

随机变量的独立性

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定理 1 (独立性定理)

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，$f(x, y)$ 是 (X, Y) 的联合密度函数，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是存在非负可积函数 $r(x)$ 和 $g(y)$ 使得

$$f(x, y) = r(x)g(y), \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

在一切连续点上成立. 这时

$$f_X(x) = \frac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx}, \qquad f_Y(y) = \frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy}.$$

2.8 条件分布

1 2.1 引言

2 2.2 分布函数和概率函数

3 2.3 一些重要的离散随机变量

4 2.4 一些重要的连续随机变量

5 2.5 二元分布

6 2.6 边际分布

7 2.7 独立随机变量

8 2.8 条件分布

定义 7

如果 X 和 Y 都是离散的，且 $f_Y(y) > 0$，则条件概率密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

定义 8

对连续情形，假设 $f_Y(y) > 0$，则条件概率密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

从而

$$P(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)dx.$$

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

二维连续型随机变量的条件分布

例 2

若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$. $(\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1)$. 求在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件分布及在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件分布.

二维连续型随机变量的条件分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

解: 由前面的例子知道, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 所以

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{\left(x-\mu_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \right\},$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{\left(y-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \right\}.$$

二维连续型随机变量的条件分布

即在 $X = x$ 的条件下，Y 的条件分布为

$$N(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2));$$

在 $Y = y$ 的条件下，X 的条件分布为

$$N(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)).$$

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

2.9 多元分布与独立同分布样本

1 2.1 引言

2 2.2 分布函数和概率函数

3 2.3 一些重要的离散随机变量

4 2.4 一些重要的连续随机变量

5 2.5 二元分布

6 2.6 边际分布

7 2.7 独立随机变量

8 2.8 条件分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 9 (简单随机样本)

如果 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立 *(independent)* 且具有共同的边际分布函数 F*(identically distributed)*，则称 $X_1, \cdots, X_n$ 是 *i.i.d*，记为 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim F$。如果 F 的密度函数为 f，也可以记为 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim f$，有时候也称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自 F 样本量为 n 的随机样本。

2.10 两个重要的多元分布

1 2.1 引言

2 2.2 分布函数和概率函数

3 2.3 一些重要的离散随机变量

4 2.4 一些重要的连续随机变量

5 2.5 二元分布

6 2.6 边际分布

7 2.7 独立随机变量

8 2.8 条件分布

多项分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 10

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^\top \sim Multinomial(n, p)(p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)^\top, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1, p_i > 0, i = 1, 2, \ldots, k)$ 如果

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}. \quad (\sum_{i=1}^{k} x_i = n).$$

多元正态分布

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

定义 11

若 p 维随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_p)^\top$ 的联合密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

其中 $\boldsymbol{\mu}$ 是 p 维实向量，Σ 是 p 阶正定矩阵，则称 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_p)^\top$ 服从（非退化的）p 元正态分布；也称 X 为 p 维正态随机向量，简记 $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$。

2.11 随机变量的变换

1 2.1 引言
2 2.2 分布函数和概率函数
3 2.3 一些重要的离散随机变量
4 2.4 一些重要的连续随机变量
5 2.5 二元分布
6 2.6 边际分布
7 2.7 独立随机变量
8 2.8 条件分布

随机变量的函数

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换

对于随机变量 X(若已知对应分布函数 $F(x)$), 在实际应用中很多时候我们会考虑其函数形式 $r(x)$，如何计算函数形式随机变量 $r(X)$ 的分布？

求变换的分布的 3 个步骤

1. 对每个 y, 求集合 $A_y = \{x : r(x) \leqslant y\}$.
2. 求 CDF

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(r(X) \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(\{x : r(x) \leqslant y\}) \\ &= \int_{A_y} f_X(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.11}$$

3. PDF 为 $f_Y(y) = F_Y'(y)$.

对于随机变量 (X, Y)(若已知对应概率密度函数 $f_{X,Y}(x, y)$)，在实际应用中很多时候我们会考虑其函数形式 $r(x, y)$，如何计算函数形式随机变量 $r(X, Y)$ 的分布?

求变换的分布的 3 个步骤

1. 对每个 z，求集合 $A_z = \{(x, y) : r(x, y) \leqslant z\}$.
2. 求 CDF

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(r(X, Y) \leqslant z) \\
&= \mathbb{P}(\{(x, y) : r(x, y) \leqslant z\}) = \int\int_{A_z} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

3. PDF 为 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

作业：2，4，9，10，14，17，20

2.1 引言
2.2 分布函数和概率函数
2.3 一些重要的离散随机变量
2.4 一些重要的连续随机变量
2.5 二元分布
2.6 边际分布
2.7 独立随机变量
2.8 条件分布
2.9 多元分布与独立同分布样本
2.10 两个重要的多元分布
2.11 随机变量的变换