上 海 交 通 大 学 试 卷 （A 卷）

（2021 至 2022 学年第 2 学期　2022 年 6 月 14 日，16:00–18:00）

班级号 ______________　学号 ______________　姓名 ______________

课程名称 ______基础数理统计______　成绩 ______________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：________

题号	1	2	3	4	5
得分					
评阅人					

一、填空题 (共 25 分, 每题 5 分)

1. 若 $X \sim N(0,1)$, $Y = \exp(2X)$, 则 Y 的方差是____________。

2. 令 X 服从参数 β 的指数分布，则 $F_X^{-1}(0.5)$ 是____________。

3. 令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 i.i.d 且 $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 满足 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$, 则 $\exp(\bar{X}_n)$ 近似服从分布____________。

4. 令 X 的分布函数是 F，基于样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 得到的经验分布函数是 F_n，x, y 是两个不同的点，则 $F_n(x)$ 和 $F_n(y)$ 的协方差是____________。

5. 令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 i.i.d 且均服从 $N(0,1)$，则 $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 的矩母函数是____________。

二 (10 分) 令 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 为来自二维正态分布 $N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$ 的简单随机样本，请给出 ρ 的最大似然估计。

三 (**20 分**) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，考虑假设检验 $H_0: \sigma = \sigma_0$ vs $H_1: \sigma \neq \sigma_0$.

(1) (**10 分**) 请给出 Wald 检验；

(2) (**10 分**) 请构造似然比检验。

四 (25 分) 令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自 $U(\theta, \theta+1)$ 的简单随机样本.

(1) **(10 分)** 请给出 θ 的矩估计及其极限分布;

(2) **(15 分)** 令 $\tau = F_X^{-1}(q)(0 < q < 1)$，请给出 τ 的极大似然估计。

五. (**20 分**) 假设数据 $(y_i, x_i) : i = 1, 2, \cdots, n$ 满足线性回归模型

$$y_i = \beta_0 + x_i\beta_1 + \epsilon_i,\ \ \epsilon_1, \cdots, \epsilon_n \text{ 独立同分布于 } N(0, \sigma^2). \ (\sigma \text{ 未知})$$

(1) (**10 分**) 对假设检验问题 $H_0 : \beta_1 = 0$ vs $H_1 : \beta_1 \neq 0$，请构造似然比检验；

(2) (**10 分**) 请构造 $\mathrm{E}(y|x = x_0)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间。