基础数理统计

第四章　不等式

4.1 概率不等式

马尔可夫 (Markov) 不等式

定理 1 (马尔可夫 (Markov) 不等式)
对于一个非负的随机变量 X, 假定期望存在，那么 $\forall t > 0$,

$$P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

证明.

$$\begin{aligned} P(X > t) &= \int_t^\infty dF(x) \\ &\leq \int_t^\infty \frac{x}{t} dF(x) = \frac{1}{t}\int_t^\infty x dF(x) \\ &\leq \frac{E(X)}{t}. \end{aligned}$$

□

切比雪夫 (Chebyshev) 不等式

定理 2 (切比雪夫 (Chebyshev) 不等式)

对于随机变量 X, $\forall t > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}.$$

说明：上式即为

$$P\left(\frac{|X - \mathrm{E}(X)|}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}} \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2}.$$

不等式的应用

例 1

令

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{成功} \\ 0 & \text{失败} \end{cases}$$

试验 n 次后成功的频率为样本均值 $\bar{X}_n$，与每次成功的概率 p 之间的误差满足

$$P(|\bar{X}_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{V(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

霍夫丁 (Hoeffding) 不等式

定理 3 (霍夫丁 (Hoeffding) 不等式)

令 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 为相互独立的随机变量且满足 $a_i \le Y_i \le b_i$。令 $\epsilon > 0$，则对任意的 $t > 0$ 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}[Y_i - E(Y_i)] \ge \epsilon\right) \le \exp(-t\epsilon)\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8}\right).$$

霍夫丁 (Hoeffding) 不等式–续

说明：注意到

$$\min_{t>0} \exp(-t\epsilon) \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8}\right) = \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$$

故

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}[Y_i - \mathrm{E}(Y_i)] \geq \epsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

由对称性知，

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}[Y_i - \mathrm{E}(Y_i)] \leq -\epsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

霍夫丁 (Hoeffding) 不等式的应用

定理 4

令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 *i.i.d* 且服从参数为 p 的 *Bernoulli* 分布，则对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon) \leq 2\exp(-2n\epsilon^2).$$

说明：令 $n = 100, \epsilon = 0.2$，则

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon) &\leq 0.0625 \ (\textit{Chebyshev}) \\ P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon) &\leq 0.00067 \ (\textit{Hoeffding}). \end{aligned}$$

Mill 不等式

定理 5 (Mill 不等式)

令 $Z \sim N(0,1)$，则

$$P(|Z| > t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-t^2/2}}{t}.$$

作业：1，2，5

4.2 有关期望的不等式

定理 6 (Cauchy-Schwartz 不等式)

如果 X 和 Y 具有有限方差，则

$$E|XY| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}.$$

定理 7 (Jensen 不等式)

如果 g 为凸函数，即

$$g(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha g(x)+(1-\alpha)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \alpha \in [0,1].$$

则

$$Eg(X) \geq g(E(X)).$$

如果 g 为凹函数，则

$$Eg(X) \leq g(E(X)).$$