基础数理统计

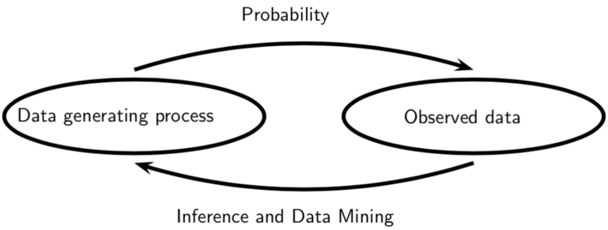
课程相关

- 教材：统计学完全教程，L. 沃塞曼著，张波，刘中华，魏秋萍，代金译。科学出版社。
- 参考教材：
  1. 应用数理统计，邰淑彩，孙韫玉，何娟娟，武汉大学出版社。
  2. 统计思想欣赏，王静龙，科学出版社。
  3. 统计学图鉴，栗原伸一，丸山敦史著，侯振龙译，人民邮电出版社。
  4. 魅力统计，王静龙，梁小筠。中国统计出版社。
- 考核方式: 平时作业 30%+ 期末考试 70%
- 助教：唐王，王胜男，刘峻源
- 上课时间地点：周四 12：55-15：40，东上院 315

第一章　概率

1.1 引言

概率与统计


Probability
Data generating process
Observed data
Inference and Data Mining

随机性

概率统计研究随机性，例如：

- 博彩业：早期的概率统计 (尤其是初等概率) 几乎都来自于现实生活中的赌博。
- 保险业：例如人寿险通过研究整个人群的年龄分布来设计产品；汽车保险通过研究不同价位 (不同人群、不同城市等) 汽车交通意外概率设计产品。
- 信用风险：通过对不同人群研究违约概率来决定授信额度。
- 量化交易、电商等其他领域。

统计学

统计学的分类:

- 描述统计学：统计量，图表
- 推断统计学：估计，假设检验等
  1. 频率学派统计学 (传统的统计学)
  2. 贝叶斯统计学

1.2 样本空间和事件

1.1 引言
1.2 样本空间和事件
1.3 概率
1.4 有限样本空间上的概率
1.5 独立事件
1.6 条件概率
1.7 贝叶斯理论

术语

有关集合的术语

Ω	样本空间
ω	试验结果 (点或者元素)
A	事件(Ω的子集)
A^c	集合 A 的余集 (非 A)
$A\bigcup B$	并(A或B)
$A\bigcap B$或AB	交(A和B)
$A-B$	集合差(ω属于A但不属于B)
$A\subset B$	集合包含
$\varnothing$	零事件 (永不为真)
Ω	必然事件 (永远为真)

例 1

将一枚硬币连续抛两次，则

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- 第一次出现正面的事件是 $A = \{HH, HT\}$

事件的集合运算-1

对于**可列个**事件 $A_1, A_2, \cdots,$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega : \omega \in A_i \text{ for at least one } A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega : \omega \in A_i \text{ for all } A_i\},$$

以及

$$\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \quad \{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\}^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

事件的集合运算-2

定义 1 (划分)

如果 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不相交且并为 Ω, 称为一个划分，即

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \ \textit{for all } i \neq j \textit{ and } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

例 2

$A_i = [i-1, i), \ \cup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, \infty) = \Omega.$

事件的集合运算-3

定义 2 (单调集合序列的极限)

- 单调增 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.
- 单调减 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

例 3

令 $\Omega = \mathbb{R}$,

- $A_i = [0, 1/i), i = 1, 2, \ldots$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1)$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$。
- $A_i = (0, 1/i), i = 1, 2, \ldots$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 1)$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$。

1.3 概率

概率公理化

定义 3 (概率)

定义在概率空间 Ω 上的函数 $\mathbb{P}:\Omega\to[0,1]$ 称为一个概率，如果其满足下述三条公理:

- 正则性: $\mathbb{P}(A)\geq 0$;
- 规范性: $\mathbb{P}(\Omega)=1$;
- 可列可加性: 如果 $A_1, A_2, \ldots$ 两两不相交，

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i).$$

注:

数学上只要满足上述三条公理的任意函数 $\mathbb{P}$ 都是概率.

概率的常见性质

基于概率定义的三条公理，可推导出下列常见性质:

$$P(\emptyset) = 0$$
$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

更一般的，我们有

引理 1

对于任意两个事件 A 和 B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

容斥原理

$$
\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) \\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) \\
&+ \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).
\end{aligned}
$$

定理 1 (概率的连续性)

如果 $A_n \to A$,

$$P(A_n) \to P(A).$$

1.4 有限样本空间上的概率

1.1 引言
1.2 样本空间和事件
1.3 概率
1.4 有限样本空间上的概率
1.5 独立事件
1.6 条件概率
1.7 贝叶斯理论

均匀概率分布

定义 4 (均匀概率分布)
如果 Ω 是有限的，且每种结果都是等可能的，则

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

1.5 独立事件

事件独立性定义

定义 5

对于两个事件 A 和 B, 如果

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B),$$

则称事件 A 与 B 独立。记为 $A \amalg B$。一列事件 $\{A_i : i \in I\}$ 称为独立的，如果

$$P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i), \ \textit{for all } J \subset I.$$

说明:

1. 独立性有时用于假设有时需要推导;
2. 正概率的互斥事件不可能是独立的。

例 4

两个人轮流投篮，第 *1* 个人投进的概率是 *1/3*，第 *2* 个人投进的概率是 *1/4*，问第 *1* 个人比第 *2* 个人先投进的概率是多少?

解： A_j 表示第 j 轮时第 1 个人首次投进；所关心的事件为 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$，$A_1, A_2, \ldots$ 两两互斥，每轮投篮中两人均没投中的概率是 $2/3 * 3/4 = 1/2$(因为每个人是否投中是相互独立的)，注意到每轮投篮是相互独立进行的，

$$P(E) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{j-1} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

1.6 条件概率

1 1.1 引言

2 1.2 样本空间和事件

3 1.3 概率

4 1.4 有限样本空间上的概率

5 1.5 独立事件

6 1.6 条件概率

7 1.7 贝叶斯理论

条件概率定义

定义 6

对于两个事件 A, B, 如果 $P(B) > 0$, 那么给定事件 B, 事件 A 发生的条件概率为:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

例 5

疾病 D 的医学检验结果可能为 $+$ 和 $-$，概率如下：

$$\begin{aligned} P(+\cap D) &= 0.009,\ P(-\cap D)=0.001, \\ P(+\cap D^c) &= 0.099,\ P(-\cap D^c)=0.891. \end{aligned}$$

则 $P(+|D)=0.9,\ \ P(-|D^c)=0.9$。

1.7 贝叶斯理论

全概率公式

定理 2 (全概率法则)

如果 $A_1, \cdots, A_k$ 为样本空间 Ω 的一个分割，那么对于任意事件 B,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i).$$

注:

$P(A_i)$ 称为先验概率 (prior probability)，$P(A_i|B)$ 称为后验概率 (posterior probability).

Bayes 公式

定理 3 (Bayes 定理)

如果 $A_1, \cdots, A_k$ 为样本空间 Ω 的一个分割且 $P(A_i) > 0$. 那么如果 $P(B) > 0$, 对于每个 i 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

例 6

例 *(5)* 中，

$$P(+) = 0.108,\ P(-) = 0.892,\ \ P(D|+) = \frac{1}{12} \approx 0.08.$$

作业：10，12，15，19，20