# 基础数理统计

# 第五章　　随机变量的收敛

1. 5.1 引言
2. 5.2 收敛的类型
3. 5.3 大数定律
4. 5.4 中心极限定理
5. 5.5 Delta 方法

# 5.1 引言

# 引例





### 例 1

抛一枚均匀的硬币 $n$ 次，记正面向上的频率为 $p_n$, 如何刻画 $p_n \to 0.5$?

可以定义一组独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots,$

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = 0.5,$$

频率可以表示为：

$$p_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

关于 $p_n$,

- $p_n$ 的取值是随机的: 对于同一个 $n$, 理论上 $p_n \in [0,1]$;
- 对于随机变量 $p_n$, 我们可以写出其精确分布:

$$P(p_n = \frac{k}{n}) = C_n^k 0.5^n,\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

- 对于偶数次 $n = 2m$, $m \to \infty$, 用 Stirling's formula

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

可以得到

$$P(p_n = 0.5) = C_{2m}^m 0.5^{2m} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \to 0.$$

# 5.2 收敛的类型

# 依概率收敛和依分布收敛





## 定义 1

令 $X_1, X_2, \ldots$ 为随机变量序列，$X$ 为另一随机变量，令 $F_n$ 表示 $X_n$ 的 *CDF*，$F$ 表示 $X$ 的 *CDF*。

(1). 如果对任意 $\epsilon > 0$，

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0, \ \textit{as } n \to \infty.$$

则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛 *(in probability)* 于 $X$，记为 $X_n \xrightarrow{P} X$。

(2). 如果对所有 $F(x) = P(X \leq x)$ 的连续点 $x$，有

$$F_n(x) \to F(x), \ \textit{as } n \to \infty.$$

则称 $\{X_n\}$ 依分布收敛 *(in distribution)* 到 $X$，记为 $X_n \rightsquigarrow X$。

# 依概率收敛和依分布收敛





**例 2**

$X_n \sim N(0, 1/n)$，$P(X = 0) = 1$，则 $X_n \xrightarrow{P} X$ 且 $X_n \rightsquigarrow X$。

# 均方收敛





**定义 2**

如果

$$E(X_n - X)^2 \to 0, \ as\ n \to \infty.$$

则称 $\{X_n\}$ 均方意义下收敛于 $X$(也称 $L_2$ 收敛)，记为 $X_n \stackrel{qm}{\to} X$。

# 各种收敛之间的关系



**定理 1 (各种收敛之间的关系)**

如下关系成立：

(a) $X_n \xrightarrow{qm} X$ 意味着 $X_n \xrightarrow{P} X$。

(b) $X_n \xrightarrow{P} X$ 意味着 $X_n \rightsquigarrow X$。

(c) $X_n \rightsquigarrow X$ 且 $P(X = c) = 1$，则 $X_n \xrightarrow{P} X$。

# 几个例子





## 例 3 (依概率收敛但不均方收敛)

$U \sim Uniform(0,1)$, $X_n = \sqrt{n} I_{(0,1/n)}(U)$, $P(X=0)=1$.

## 例 4 (依分布收敛但不依概率收敛)

$X \sim N(0,1)$, $X_n = -X$.

# 各种收敛的性质



## 定理 2

令 $X_n, Y_n, X, Y$ 为随机变量，$g$ 为连续函数，则

(1) $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$，则 $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$;

(2) $X_n \xrightarrow{qm} X$, $Y_n \xrightarrow{qm} Y$，则 $X_n + Y_n \xrightarrow{qm} X + Y$;

(3) (*Slutzky* 定理)

  (3a) $X_n \rightsquigarrow X$, $Y_n \rightsquigarrow c$，则 $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$;

  (3b) $X_n \rightsquigarrow X$, $Y_n \rightsquigarrow c$，则 $X_n Y_n \rightsquigarrow cX$;

(4) $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$，则 $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$;

(5) $X_n \xrightarrow{P} X$，则 $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$;

(6) $X_n \rightsquigarrow X$，则 $g(X_n) \rightsquigarrow g(X)$.

# 5.3 大数定律

# 弱大数定律





**定义 3 (弱大数定律 (WLLN))**

对于独立同分布的随机变量 $X_1, \cdots, X_n$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于总体均值 $E(X_1)$.

# 5.4 中心极限定理

# 中心极限定理





**定理 3 (中心极限定理 (CLT))**

令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为均值为 $\mu$ 方差为 $\sigma^2$ 的 *i.i.d* 序列，令 $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则

$$Z_n \equiv \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1),$$

*i.e*,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

# CLT–续





例子 (1) 中，

- 对于任意一个 $k$，
$$P(p_n = k/n) \to 0.$$

- 对于任意有限个 $k_1, \cdots, k_m$，
$$P(p_n \in \{k_1/n, \cdots, k_m/n\}) \to 0.$$

- 正好出现 $n/2$ 次数 $P(np_n = n/2) \to 0.$
- 出现次数在 $n/2$ 左右 $m$ 次以内 $P(np_n \in (n/2 - m, n/2 + m)) \to 0.$

问题：$P(np_n \in (n/2 - \sqrt{n}, n/2 + \sqrt{n})) \to ?$

代入中心极限定理，$\mu = 0.5, \sigma = 0.5$

$$
\begin{aligned}
& P(np_n \in (n/2 - \sqrt{n}, n/2 + \sqrt{n})) \\
=& P(\frac{\sqrt{n}|p_n - 0.5|}{0.5} \leq \frac{1}{0.5}) \\
=& P(\frac{\sqrt{n}(p_n - 0.5)}{0.5} \leq 2) - P(\frac{\sqrt{n}(p_n - 0.5)}{0.5} \leq -2) \\
=& \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9544997.
\end{aligned}
$$

# CLT–续

$S_n^2$ 为样本协方差 $(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$。

**定理 4**

假设跟 $CLT$ 相同的条件，则

$$\frac{\sqrt{\bar{X}_n-\mu}}{S_n} \rightsquigarrow N(0,1).$$

**定理 5 (Berry-Essèen 定理)**

假设 $E|X_1|^3<\infty$，则

$$\sup_z |P(Z_n\le z)-\Phi(z)| \le \frac{33}{4}\frac{E|X_1-\mu|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}.$$

作业：2，4，9，11，12，13

# 多元中心极限定理





令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 i.i.d 随机向量，其中

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{ki} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X_{1i}) \\ \mathrm{E}(X_{2i}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{E}(X_{ki}) \end{pmatrix}, \bar{X}_n = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{X}_k \end{pmatrix}$$

这里 $\bar{X}_j = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_{ji}$，方差矩阵为 $\Sigma$，则

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \boldsymbol{\mu}) \rightsquigarrow N_k(\mathbf{0}, \Sigma).$$

# 5.5 Delta 方法

# Delta 方法





**定理 6 (Delta 方法)**

假设

$$\frac{\sqrt{n}(Y_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1),$$

$g$ 为可微函数满足 $g'(\mu) \neq 0$，则

$$\frac{\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu))}{|g'(\mu)|\sigma} \rightsquigarrow N(0,1),$$

# 多元 Delta 方法



## 定理 7 (多元 Delta 方法)

假设

$$\sqrt{n}(Y_n - \boldsymbol{\mu}) \rightsquigarrow N_k(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 且

$$\nabla g(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial y_k} \end{pmatrix}.$$

令 $\nabla_{\boldsymbol{\mu}}$ 为 $\nabla g(y)$ 在 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mu}$ 初的取值且元素均是非零的，则有

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\boldsymbol{\mu})) \rightsquigarrow N(0, \nabla_{\boldsymbol{\mu}}^\top \Sigma \nabla_{\boldsymbol{\mu}}).$$

作业：6，8，14，15.