基础数理统计 （研究生公共课）

肖柳青 教授 博士主讲

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第三章 假设检验
Hypothesis Testing

我们将讨论不同于参数估计的另一类重要的统计推断问题.这就是根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确.这类问题称作假设检验问题.

假设检验
- 参数假设检验 — 总体分布已知,检验关于未知参数的某个假设
- 非参数假设检验 — 总体分布未知时的假设检验问题

本章大纲

1. 假设检验的基本概念
2. 单个正态总体参数的假设经验
3. 两个正态总体参数比较的假设经验
4. 最佳检验的概念
5. 分布拟合的假设检验
6. 独立性检验

学习目标

- 理解假设检验的直观概念
- 了解假设检验方法的可能缺陷
- 掌握广义似然比检验
- 掌握正态总体的假设检验
- 掌握两个独立样本的比较
- 理解质量控制

§3.1 假设检验概念

一、引例

引例1 (p. 63)　某日用食品厂用包装机包装咖啡豆. 包装机正常工作时，包装量 $X \sim N(500, 2^2)$，每天开工后须先检查包装机工作是否正常. 某天开工后，在装好的咖啡豆中任取了 9 袋，称得重量的平均值 $\bar{x} = 502(g)$. 假设总体方差不变，问这天包装机工作是否正常.

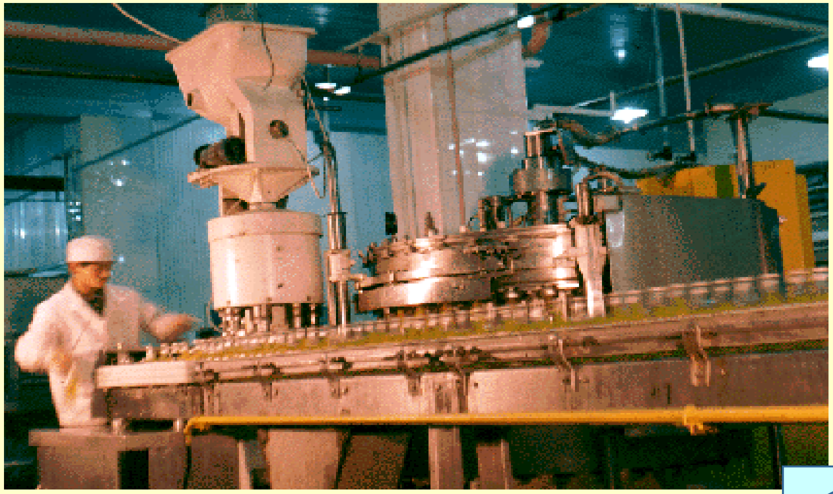
如何由抽样判断包装机工作是否正常？

由题意可设这天包装重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 如果工作正常，则 X 服从的分布应与平常的一样，即 $X \sim N(500, 2^2)$.

问题就转化为：*由抽样结果判断假设"$\mu = \mu_0 = 500$"是否成立？*

为此，我们提出假设

H_0：$\mu = \mu_0 = 500$　和　H_1：$\mu \neq \mu_0$



引例2 从研究生数理统计随机抽取同学组成两个小组，在教学中试验组使用启发式教学法，对照组使用传统教学法，然后统一测验.

实验组的成绩为 64, 58, 65, 56, 58, 45, 55, 63, 66, 69 ;

对照组的成绩为 60, 59, 57, 41, 38, 52, 46, 51, 49, 58 .

问两种教学法是否有差异?（经验是启发式优于传统式）

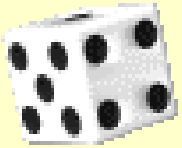
如何判断是否有差异？

设 μ_1, μ_2 是分别为实验组和对照组学习成绩的均值，如果启发式优于传统式，则应有 $\mu_1 > \mu_2$.

问题就转化为：*由抽样结果判断假设 "$\mu_1 > \mu_2$" 是否成立？*

为此，我们提出假设 H_0: $\mu_1 > \mu_2$ 和 H_1: $\mu_1 \le \mu_2$

引例3 把一颗骰子重复抛掷 300 次，结果如下:



出现的点数	1	2	3	4	5	6
出现的频数	40	70	48	60	52	30

试检验这颗骰子的六个面是否匀称?

上述问题的共同点：

由题意对总体的未知参数或其分布形式作出假设（如引例1中假设 $\mu=500$; 引例2中假设 $\mu_1>\mu_2$,引例3中假设 $F(x)=F_0(x)$ 等等），然后由抽样结果判断假设是否成立.

对总体的参数或分布形式作出一个假设，根据样本提供的信息，来推断假设是否具有制定的特征—— 这个过程就是假设检验.

称需要判断是否为真的那个假设为原假设(零假设)，记为 H_0；

如例1中H_0：$\mu=500$； 例2中H_0： $\mu_1>\mu_2$，例3中H_0：$F(x)=F_0(x)$.

称原假设的对立假设为备择假设(对立假设)，记为 H_1.

实际中，往往把不轻易否定的命题作为原假设

显然，原假设与备择假设是对立的.

例1 与 例2 是参数假设检验，例3 则是非参数假设检验.

分布假设

参数假设检验主要有三种类型：

双侧假设 H_0： $\mu=\mu_0$， H_1： $\mu\neq\mu_0$；

单侧假设
$$\begin{cases} H_0: \mu\le\mu_0, & H_1: \mu>\mu_0; \\ H_0: \mu\ge\mu_0, & H_1: \mu<\mu_0; \end{cases}$$

它们的检验分别称为 双侧检验，单侧检验和分布检验.

概率反证法

假设检验的基本原则： 小概率事件在一次试验中基本上不会发生

给出确认小概率事件是否已发生的数量界限 —— $u_{\alpha/2}$

不否定 H_0 并不是肯定 H_0 一定对，而只是说差异还不够显著，还没有达到足以拒绝 H_0 的程度.

在假设检验中，我们称这个小概率 α 为显著性水平，简称水平. α 的选择要根据实际情况而定, 常取 $\alpha=0.1$，$\alpha=0.01$，$\alpha=0.05$ 等.

假设检验会不会犯错误呢?

会！但错误的概率不大于 α.

如果 H_0 成立，但统计量的实测值落入拒绝域，从而作出否定 H_0 的结论，那就犯了"弃真"的错误. ——第一类错误

如果 H_0 不成立, 但统计量的实测值未落入拒绝域，从而作出接受 H_0 的错误结论, 那就犯了"取伪"的错误. ——第二类错误

决定 \ 实际情况	H_0 为真	H_0 不真
拒绝 H_0	第一类错误	正确
接受 H_0	正确	第二类错误

犯第一类错误的概率通常记为 α

犯第二类错误的概率通常记为 β

犯两类错误的概率:

显著性水平

P(第一类错误) $= P$(拒绝$H_0 \mid H_0$为真) $= P(Q \in W \mid H_0$为真$) = \alpha$;

P(第二类错误) $= P$(接受$H_0 \mid H_0$不真) $= P(Q \in \bar{W} \mid H_0$不真$) = \beta$.

我们当然希望能同时降低两类错误的概率α, β!

但是当样本容量n固定时，两类错误是互相制约的：

α越小，拒绝域W就越小，接受域$\bar{W}$就越大，从而β越大;

β越小，拒绝域W就越大，接受域$\bar{W}$就越小，从而α增大;

一类错误的概率减少会导致另一类错误的概率增加

要保证两类错误的概率都充分地小，唯一地办法是增加样本容量.

——不现实!!

类似书上p. 63例3. 1. 2

例 3.1.2 某厂生产的螺钉,按标准强度为$68/mm^2$, 而实际生产的强度X 服从$N(\mu,3.6^2)$.
若$E(X)=\mu=68$,则认为这批螺钉符合要求,否则认为不符合要求.为此提出如下假设:

$H_0:\mu=68$ ———— 称为原假设或零假设

原假设的对立面:

$H_1:\mu\neq 68$ ———— 称为备择假设

现从整批螺钉中取容量为36的子样，其均值为 $\bar{x}=68.5$，问原假设是否正确？

若原假设正确，则 $\boxed{\overline{X} \sim N(68, 3.6^2/36)}$

因而 $\boxed{E(\overline{X})=68}$，即 $\boxed{\overline{X}}$ 偏离68不应该太远，

故 $\boxed{\left|\dfrac{\overline{X}-68}{3.6/6}\right|}$ 取较大值是小概率事件．因此，

可以确定一个常数 c 使得 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-68}{3.6/6}\right|>c\right)=\alpha$

取 $\alpha=0.05$，则 $c=u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$

由 $\left|\dfrac{\overline{X}-68}{3.6/6}\right|>1.96 \longrightarrow \overline{X}>69.18$ 或 $\overline{X}<66.824$

即区间$(-\infty, 66.824)$ 与 $(69.18, +\infty)$

为检验的**拒绝域** 或**临界域**

称$\overline{X}$的取值区间$(66.824, 69.18)$

为检验的**接受域** （实际上没理由拒绝），

现 $\overline{x}=68.5$ 落入接受域，则接受原假设

$$H_0: \mu = 68$$

任何检验方法都不能完全排除犯错误的可能性. 理想的检验方法应使犯两类错误的概率都很小, 但在子样容量给定的情形下, 不可能使两者都很小, 降低一个, 往往使另一个增大.

假设检验的指导思想是控制犯第一类错误的概率不超过α, 然后, 若有必要, 通过增大子样容量的方法来减少 β .

在例3.1.2中，犯第一类错误的概率

$$P(\text{拒绝}H_0 | H_0\text{为真})$$

$$= P(\bar{X} < 66.824 \cup \bar{X} > 69.18)$$

$$= \alpha = 0.05$$

若H_0为真，则 $\bar{X} \sim N(68, 3.6^2/36)$

所以，拒绝 H_0 的概率为α，α又称为**显著性水平**，α 越大，犯第一类错误的概率越大，即越显著.

下面计算犯第二类错误的概率 β

$$\beta = P(\text{接受}H_0|H_0\text{不真})$$

H_0不真,即$\mu \neq 68$,μ可能小于68,也可能大于68, β 的大小取决于 μ 的真值的大小.

设 $\mu = 66,\ n = 36,\quad \bar{X} \sim N(66, 3.6^2/36)$

$$\beta_{\mu=66} = P(66.82 \le \bar{X} \le 69.18 \mid \mu = 66)$$

$$= \Phi\left(\frac{69.18-66}{0.6}\right) - \Phi\left(\frac{66.82-66}{0.6}\right)$$

$$= \Phi\ (5.3) - \Phi\ (1.37) = 1 - 0.9147 = 0.0853$$

若 $\mu = 69, \; n = 36, \quad \bar{X} \sim N(69, 3.6^2/36)$

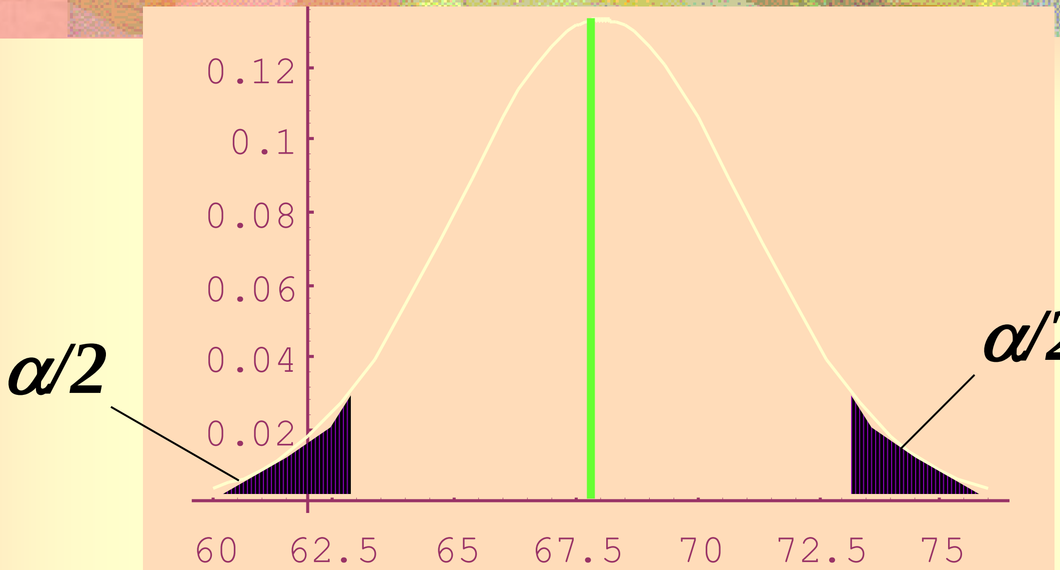
$$\beta_{\mu=69} = P(66.82 \le \bar{X} \le 69.18 \mid \mu = 69)$$

$$= \Phi\left(\frac{69.18-69}{0.6}\right) - \Phi\left(\frac{66.82-69}{0.6}\right)$$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-3.63)$$

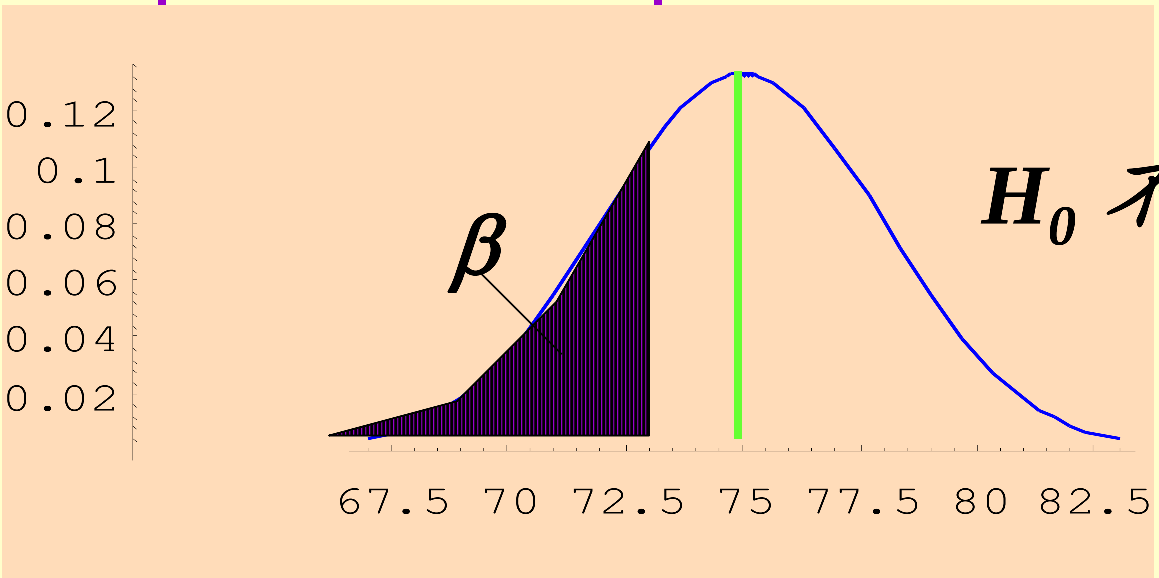
$$= 0.6179 - 0.0002 = 0.6177$$

取伪的概率较大.



0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
60
62.5
65
67.5
70
72.5
75
α/2
α/2

H_0 真



0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
67.5
70
72.5
75
77.5
80
82.5
β

H_0 不真

现增大子样容量,取n = 64, μ = 66,则

$$\bar{X} \sim N(66, 3.6^2/64)$$

仍取α=0.05,则

$$c = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

由 $\left|\dfrac{\bar{X}-68}{3.6/8}\right| > 1.96$ 可以确定拒绝域为

$(-\infty, 67.118)$ 与 $(68.882, +\infty)$

因此，接受域为(67.118, 68.882)

$$\beta_{\mu=66} = P(67.118 \le \bar{X} \le 68.882 \mid \mu = 66)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{68.88-66}{0.45}\right) - \Phi\left(\frac{67.12-66}{0.45}\right)$$

$$= \Phi(6.4) - \Phi(2.49)$$

$$\approx 1 - 0.9936 = 0.0064 < 0.0853$$

$$\beta_{\mu=69} = P(67.12 \le \bar{X} \le 68.88 \mid \mu = 69)$$

$$= 0.3936 < 0.6177$$

$$(\mu \to \mu_0, \beta \to 1-\alpha)$$

命题 当子样容量确定后，犯两类错误的概率不可能同时减少.

证 设 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ 在水平 α 给定下,检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$$

此时犯第二类错误的概率为

$$\beta = P(\text{接受}H_0 \mid H_0\text{伪}) = P(\overline{X} - \mu_0 < k \mid \mu = \mu_1)$$

$$= P_{H_1}(\overline{X} - \mu_0 < k) = P_{H_1}(\overline{X} - \mu_1 < k - (\mu_1 - \mu_0))$$

$$= P_{H_1}\left(\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{k - (\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{k - (\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

$$\underline{\underline{k=\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_\alpha}} \qquad \Phi\left(z_\alpha-\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

又 $$\beta=\int_{-\infty}^{-z_\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(-z_\beta)$$ ***(见注)***

$$\therefore\ z_\alpha-\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=-z_\beta \quad \text{即} \quad z_\alpha+z_\beta=\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\mu_1-\mu_0)$$

由此可见,当 n 固定时

1） **若** $\alpha\downarrow\Rightarrow z_\alpha\uparrow\Rightarrow z_\beta\downarrow\Rightarrow\beta\uparrow$

2） **若** $\beta\downarrow\Rightarrow z_\beta\uparrow\Rightarrow z_\alpha\downarrow\Rightarrow\alpha\uparrow$

证毕.

注 当 $\mu=\mu_1$ 时 $\bar{X}\sim N(\mu_1,\ \sigma_0^2/n)$

从而 $$\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}=X^*\sim N(0,\,1)$$

$$\beta=1-(1-\beta)=1-P(X^*>z_{1-\beta})$$

$$=P(X^*\le z_{1-\beta})=\Phi(z_{1-\beta})=\Phi(-z_\beta)$$

注 1° 一般，作假设检验时，先控制犯第一类错误的概率α，在此基础上使 β 尽量地小. 要降低 β 一般要增大样本容量. 当H_0不真时，参数值越接近真值，β 越大

注 2° 备择假设可以是单侧，也可以双侧.

引例2中的备择假设是双侧的. 若根据以往生产情况，$\mu_0=68$. 现采用了新工艺，关心的是新工艺能否提高螺钉强度，μ越大越好. 此时可作如下的右边假设检验:

$$H_0: \mu = 68; \quad H_1: \mu > 68$$

注 3° 关于原假设与备择假设的选取

在控制犯第一类错误的概率 α 的原则下,使得采取拒绝H_0 的决策变得较慎重,即H_0 得到特别的保护.

因而,通常把有把握的、有经验的结论作为原假设,或者尽可能使后果严重的错误成为第一类错误.

U 检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U \leq -u_\alpha$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U \geq u_\alpha$

例 微波炉的一个重要质量指标是关闭炉门时的辐射量. 某厂生产的微波炉该指标 $\sim N(\mu,\sigma^2)$, 且长期 $\sigma=0.1$, 均值符合要求不超过0.12. 为检查近期产品质量抽查了25台, 得其关门时辐射量的均值 $\bar{x}=0.1203$. 试问 $\alpha=0.05$ 水平上该厂炉门关闭辐射量是否升高?

分析 题意即判断正态总体的均值是否高于0.12, 由历史知应设 $H_0: \mu\le 0.12$, $H_1: \mu>0.12$, 又因为 σ 已知, 故应用单侧的 U 检验法.

解 设 $H_0: \mu\le 0.12$, $H_1: \mu>0.12$, 由水平查正态分布表得临界值 $u_{0.05}=1.65$, 所以拒绝域 $W=(1.65,+\infty)$. 将样本观测值 $\bar{x}=0.1203$ 及 $\mu_0=0.12$, $\sigma=0.1$, $n=25$ 代入检验统计量 U 得

$$U_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=0.015<1.65,$$

所以在水平 α 下不能拒绝 H_0, 即可认为目前该厂炉门关闭辐射量没有升高.

可能犯第二类错误, 但犯错的概率不超过0.05

P.65 例3.2.1 请自读

T 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T \leq -t_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T \geq t_{\alpha}$

例 抽取某中学某班级28名学生的语文考试成绩，得样本均值为80分，样本标准差为 8.147，若全年级语文平均成绩是 85 分. 试问该班语文平均成绩是否有差异？（假定该年级学生语文的平均成绩服从正态分布，$\alpha=0.05$）

P.67 例3.2.2 请自读

分析 题意即判断正态总体的均值是否等于85，应设 $H_0: \mu=85$，$H_1: \mu\neq 85$，又因为σ未知，故应用双侧的T检验法.

解 设 $H_0: \mu=85$，$H_1: \mu\neq 85$，由水平查 t 分布表得临界值 $t_{0.025}(28-1)=2.0518$，所以拒绝域 $W=(-\infty,-2.0518)\cup(2.0518,+\infty)$.

将 $\bar{x}=80$，$s=8.147$ 及 $\mu_0=85$，$n=28$ 代入检验统计量 T 得

$$|T_0|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\approx 3.248>2.0518,$$

所以在水平α下拒绝H_0，即认为该班的语文平均成绩与全年级的语文平均成绩存在差异.

可能犯第一类错误，但犯错的概率不超过0.05

置信区间和假设检验的对偶关系

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_1$$

$$|\bar{X} - \mu_0| > x_0 \qquad P\left(|\bar{X} - \mu_0| > x_0\right) = \alpha$$

$$x_0 = \sigma_{\bar{X}} z(\alpha / 2)$$

$$|\bar{X} - \mu_0| < \sigma_{\bar{X}} z(\alpha / 2)$$

$$-\sigma_{\bar{X}} z(\alpha / 2) < \bar{X} - \mu_0 < \sigma_{\bar{X}} z(\alpha / 2)$$

$$\left[\bar{X} - \sigma_{\bar{X}} z(\alpha / 2), \bar{X} + \sigma_{\bar{X}} z(\alpha / 2)\right]$$

置信区间和假设检验的对偶关系：引理A

引理A

假定对Θ中的每个θ_0都存在一个假设$H_0: \theta=\theta_0$的水平为α的检验，该检验的接收域记为$A(\theta_0)$。则

$$C(X)=\{\theta: X \in A(\theta)\}$$

是θ的一个$100(1-\alpha)$的置信区间。

置信区间和假设检验：引理A证明

引理A证明

A是一个检验在水平α下的接收域，所以有

$$P\left[\mathbf{X} \in A(\theta_0) \mid \theta = \theta_0\right] = 1 - \alpha$$

则按照C(X)的定义

$$P\left[\theta_0 \in C(\mathbf{X}) \mid \theta = \theta_0\right] = P\left[\mathbf{X} \in A(\theta_0) \mid \theta = \theta_0\right]$$

$$= 1 - \alpha$$

置信区间和假设检验的对偶关系：引理B

引理B

假定$C(X)$是θ的一个$100(1-\alpha)\%$的置信域，即对每个θ_0都有

$$P\left[\theta_0 \in C(\mathbf{X}) \mid \theta = \theta_0\right] = 1-\alpha$$

则假设$H_0: \theta=\theta_0$的一个检验的水平为α的一个接收域为

$$A(\theta_0) = \left\{\mathbf{X} \mid \theta_0 \in C(\mathbf{X})\right\}$$

证明

$$P\left[\mathbf{X} \in A(\theta_0) \mid \theta = \theta_0\right] = P\left[\theta_0 \in C(\mathbf{X}) \mid \theta = \theta_0\right] = 1-\alpha$$

例 某种导线的电阻服从正态分布 $\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，其中一个质量指标是电阻差不得大于 0.005Ω， 现从中抽取 9 根导线测其电阻，测得样本标准差 $s=0.0066$，试问 $\alpha=0.05$ 水平上能否认为这批导线的电阻波动合格?

P.68 例3.2.3 请自读

P.70 表3.2.1 请自读

解 依题意，问题归结为检验单侧假设

$$H_0: \sigma^2 \le 0.005^2, \quad H_1: \sigma^2 > 0.005^2;$$

又因为 μ 未知，故采用单侧的 χ^2 检验法.

由水平 α 查 χ^2 分布表得临界值 $\chi^2_{0.05}(9-1)=15.507$，

所以 H_0 的拒绝域 $W=(15.507, +\infty)$.

将样本观测值 $s^2=0.0066^2$，$\sigma_0{}^2=0.005^2$，$n=9$ 代入检验统计量 χ^2 得

$$\chi^2_{0.005}=\frac{(9-1)\times 0.0066^2}{0.005^2}=13.94<15.507,$$

所以在水平 $\alpha=0.005$ 下认为这批导线的电阻波动合格.

（2）关于 σ² 的检验　χ^2 ***检验法(μ已知)***

原假设 H_0	*备择假设 H_1*	*检验统计量及其在 H_0为真时的分布*	*拒绝域*
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(n)$

χ^2检验法(μ 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(n-1)$

§3.3 两正态总体参数的假设检验p.71

- **1. 两正态总体均值的检验　　（*U 检验*）**

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}$$

①H_0：$\mu_1 \le \mu_2$，H_1：$\mu_1 > \mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2 \le 0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2>0$

$W=\{\bar{x}-\bar{y}\ge c\}$，$W=\{u\ge u_{1-\alpha}\}$　　单边检验

②H_0：$\mu_1 \ge \mu_2$，H_1：$\mu_1 < \mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2 \ge 0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2<0$

$W=\{\bar{x}-\bar{y}\le c\}$，$W=\{u\le u_{\alpha}=-u_{1-\alpha}\}$

③ H_0： $\mu_1 = \mu_2$， H_1： $\mu_1 \neq \mu_2 \Leftrightarrow H_0$： $\mu_1 - \mu_2 = 0$， H_1： $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

双边检验

$W = \{|\bar{x} - \bar{y}| \geq c\}$， $W = \{|u| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

$\hat{\mu}_1 = \bar{X}$， $\hat{\mu}_2 = \bar{Y}$， $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m})$

（2）$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 未知　　t 检验　　$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{1/n+1/m}}$

①H_0：$\mu_1\le\mu_2$，H_1：$\mu_1>\mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2\le 0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2>0$

$W=\{\bar{x}-\bar{y}\ge c\}$，$W=\{t\ge t_{1-\alpha}(n+m-2)\}$

②H_0：$\mu_1\ge\mu_2$，H_1：$\mu_1<\mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2\ge 0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2<0$

$W=\{\bar{x}-\bar{y}\le c\}$，$W=\{t\le t_{\alpha}(n+m-2)=-t_{1-\alpha}(n+m-2)\}$

③H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\ne\mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2=0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2\ne 0$

$W=\{|\bar{x}-\bar{y}|\ge c\}$，$W=\left\{|t|\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\right\}$

$$\hat{\mu}_1=\bar{X}\text{，}\hat{\mu}_2=\bar{Y}\text{，}\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2=\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\sigma^2)\text{，}\hat{\sigma}^2=S_W^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

$$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)\text{，}\quad S_W=\sqrt{S_W^2}$$

① $\alpha(\mu_1-\mu_2)=P(\bar{x}-\bar{y}\geq c\,|\,\mu_1-\mu_2\leq 0)=P(\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_W\sqrt{1/n+1/m}}\geq\frac{c-(\mu_1-\mu_2)}{s_W\sqrt{1/n+1/m}}\,\Big|\,\mu_1-\mu_2\leq 0)$

$=1-F(\frac{c-(\mu_1-\mu_2)}{s_W\sqrt{1/n+1/m}})$ 关于 $\mu_1-\mu_2$ 单增， $\mu_1-\mu_2\leq 0$

$\max\limits_{\mu_1-\mu_2}\alpha(\mu_1-\mu_2)=\alpha(0)$ ， $\alpha(\mu_1-\mu_2)\leq\alpha$ ， $\alpha(0)=\alpha$ ， $1-F(\frac{c}{s_W\sqrt{1/n+1/m}})=\alpha$

$\frac{c}{s_W\sqrt{1/n+1/m}}=t_{1-\alpha}(n+m-2)$， $c=t_{1-\alpha}(n+m-2)s_W\sqrt{1/n+1/m}$，

$$W=\left\{\bar{x}-\bar{y}\geq t_{1-\alpha}(n+m-2)s_W\sqrt{1/n+1/m}\right\}=\left\{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_W\sqrt{1/n+1/m}}\geq t_{1-\alpha}(n+m-2)\right\}$$

取检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{1/n+1/m}}$， 则拒绝域 $W=\{t\geq t_{1-\alpha}(n+m-2)\}$

例　甲乙两台机床分别加工某种机械轴，轴直径分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，检验两台机床加工的轴平均直径是否一致。（$\alpha=0.05$）

解：H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\neq\mu_2$

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{1/n+1/m}},\quad S_W=\sqrt{\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}}$$

$n=8$，$m=7$，$\alpha=0.05$，$t_{0.975}(13)=2.1604$，$W=\{|t|\geq 2.1604\}$

$\bar{x}=19.295$，$\bar{y}=20.143$，$s_W^2=0.2425$，$s_W=0.4924$，$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_W\sqrt{1/n+1/m}}=-0.8554$

$|t|=0.8554<2.1604$，所以保留原假设 H_0，即在 $\alpha=0.05$ 水平上，两台机床加工的轴平均直径是一致的。

$\sigma_1\neq\sigma_2$ 未知　　t 检验　　$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n}+\dfrac{S_Y^2}{m}}}$

①H_0：$\mu_1 \le \mu_2$，H_1：$\mu_1 > \mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2 \le 0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2>0$

$W=\{\bar{x}-\bar{y}\ge c\}$，$W=\{t\ge t_{1-\alpha}(l)\}$

②H_0：$\mu_1 \ge \mu_2$，H_1：$\mu_1 < \mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2 \ge 0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2<0$ 单边检验

$W=\{\bar{x}-\bar{y}\le c\}$，$W=\{t\le t_{\alpha}(l)=-t_{1-\alpha}(l)\}$

③H_0：$\mu_1 = \mu_2$，H_1：$\mu_1 \ne \mu_2 \Leftrightarrow H_0$：$\mu_1-\mu_2 = 0$，$H_1$：$\mu_1-\mu_2\ne 0$ 双边检验

$W=\{|\bar{x}-\bar{y}|\ge c\}$，$W=\{|t|\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)\}$

$\hat{\mu}_1=\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n})$，$\hat{\mu}_2=\bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{m})$，两者独立，$\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2=\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m})$，

$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n}+\dfrac{S_Y^2}{m}}}\sim t(l)$，$l=\dfrac{\left(\dfrac{S_X^2}{n}+\dfrac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\dfrac{S_X^4}{n^2(n-1)}+\dfrac{S_Y^4}{m^2(m-1)}}$，$l$不为整数时，取与$l$最接近的整数。

（1）关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$ （σ_1^2，σ_2^2 已知）	$\lvert U \rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$U \leq -u_\alpha$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$U \geq u_\alpha$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}} S_w} \sim t(n+m-2)$	$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$T \leq -t_{\alpha}$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\left(\begin{array}{c} \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{未知} \\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \end{array} \right)$	$T \geq t_{\alpha}$

其中 $$S_w = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

(3)大样本检验 *U* 检验

① H_0： $\mu_1 \le \mu_2$， H_1： $\mu_1 > \mu_2 \Leftrightarrow H_0$： $\mu_1 - \mu_2 \le 0$， H_1： $\mu_1 - \mu_2 > 0$

$W = \{\bar{x} - \bar{y} \ge c\}$， $W = \{u \ge u_{1-\alpha}\}$

② H_0： $\mu_1 \ge \mu_2$， H_1： $\mu_1 < \mu_2 \Leftrightarrow H_0$： $\mu_1 - \mu_2 \ge 0$， H_1： $\mu_1 - \mu_2 < 0$

$W = \{\bar{x} - \bar{y} \le c\}$， $W = \{u \le u_\alpha = -u_{1-\alpha}\}$

③ H_0： $\mu_1 = \mu_2$， H_1： $\mu_1 \ne \mu_2 \Leftrightarrow H_0$： $\mu_1 - \mu_2 = 0$， H_1： $\mu_1 - \mu_2 \ne 0$

$W = \{|\bar{x} - \bar{y}| \ge c\}$， $W = \left\{|u| \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

3.成对数据的比较 两样本不相互独立

- 两个样本是来自同一总体上的重复观测，成对出现且相关。

两个样本是来自同一总体上的重复观测，成对出现且相关。例如，考察某种降血压药的疗效，测试 n 个高血压病人服药前后的血压分别为 $(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_n)$，其中 (X_i,Y_i) 是第 i 个病人服药前后的血压，它们是有关系的，不可能相互独立。另一方面，$(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 个不同病人的血压，由于每个人在体质等面的条件不同，这 n 个观测值也不能看成来自同一个正态总体的样本，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 也一样。这样的数据称为**成对数据**。由于 (X_i,Y_i) 是来自同一个病人的血压值，X_i-Y_i 就消除了人的体质诸方面的条件差异，集中体现了降血压的疗效，从而我们可以将 $(X_1-Y_1,\cdots,X_n-Y_n)$ 看作来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 是降血压药的平均效果。因此降血压药是否有效问题就归结为检验假设：

$$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_0:\mu\neq 0$$

成对数据的检验转化成单个正态总体的均值检验。成对 $t-$检验法

例 7 某工厂两个实验室每天同时从工厂的冷却水中取样，分别测定水中的含氯量各一次，记录 11 天。

实验室 A： $\bar{x}=1.339$， $s_X=0.412$； 实验室 B： $\bar{y}=1.381$， $s_Y=0.403$

问两个实验室测定的结果在 $\alpha=0.05$ 水平上有无显著性的差异？

解：成对数据　每天测定结果与实验室有关，还与该天水中的含氯量有关，比较两个实验室的测量值之间是否有显著性差异。（两样本不是相互独立的简单随机样本）

$d_i=x_i-y_i$　消除了水样间的差异　　$d_1,d_2,\cdots,d_{11}\sim N(\mu,\sigma^2)$

H_0： $\mu=0$　　H_1： $\mu\neq 0$　　$t=\dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$， $W=\left\{|t|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(10)=2.228\right\}$

$t=\dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}=\dfrac{-0.0418}{0.0796/\sqrt{11}}=-1.742$， $|t|=1.742<2.228$， 所以保留原假设 H_0， 即在 $\alpha=0.05$ 水平上两个实验室测定的结果没有显著性差异。

2. 两正态总体方差的检验(*F* 检验)

假设

总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$　样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$　$\bar{X}, S_X^2$

总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$　样本 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$　$\bar{Y}, S_Y^2$

μ_1, μ_2 未知，两样本相互独立

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

① H_0： $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$， H_1： $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_0$： $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 1$， H_1： $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ 单边检验

$W = \left\{ s_X^2 / s_Y^2 \ge c \right\}$， $W = \{ F \ge F_{1-\alpha}(n-1, m-1) \}$

② H_0： $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$， H_1： $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_0$： $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \ge 1$， H_1： $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ 单边检验

$W = \left\{ s_X^2 / s_Y^2 \le c \right\}$， $W = \{ F \le F_{\alpha}(n-1, m-1) \}$

③ H_0： $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$， H_1： $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_0$： $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$， H_1： $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \ne 1$ 双边检验

$W = \left\{ s_X^2 / s_Y^2 \ge c_1 \text{或} s_X^2 / s_Y^2 \le c_2 \right\}$， $c_1 > c_2$， $W = \left\{ F \ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \text{或} F \le F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \right\}$

$\hat{\sigma}_1^2 = S_X^2$， $\hat{\sigma}_2^2 = S_Y^2$， $F = \dfrac{S_X^2 / S_Y^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

① $\alpha(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) = P(s_X^2 / s_Y^2 \ge c \,|\, \sigma_1^2 \le \sigma_2^2) = P(\dfrac{s_X^2 / s_Y^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge \dfrac{c}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \,\Big|\, \sigma_1^2 \le \sigma_2^2) = 1 - F(\dfrac{c}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2})$ 关于 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 单增， $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 1$，

$\max\limits_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \alpha(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) = \alpha(1)$， $\alpha(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \le \alpha$， $\alpha(1) = \alpha$， $1 - F(c) = \alpha$， $c = F_{1-\alpha}(n-1, m-1)$，

$W = \left\{ s_X^2 / s_Y^2 \ge F_{1-\alpha}(n-1, m-1) \right\}$。令 $F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$， 则拒绝域 $W = \{ F \ge F_{1-\alpha}(n-1, m-1) \}$

[例] 为比较两台自动机床的精度，分别取容量为10和8的两个样本，测量某个指标的尺寸(假定服从正态分布)，得到下列结果：

车床甲：1.08，1.10，1.12，1.14，1.15，1.25，1.36，1.38，1.40，1.42；

车床乙：1.11，1.12，1.18，1.22，1.33，1.35，1.36，1.38 .

在水平 $\alpha=0.1$ 时，问这两台机床是否有同样的精度？

F 检验法

解 设两台自动机床的方差分别为 σ_1^2, σ_2^2,

在 $\alpha=0.1$ 下检验假设： $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$， $H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$；

由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计量， 取检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(9,7)$,

其中 S_1^2, S_2^2 分别为两正态总体的的样本方差. 查表得：

$$F_{\alpha/2}(9,7)=F_{0.05}(9,7)=3.68,\ F_{1-\alpha/2}(9,7)=1/F_{0.05}(7,9)=1/3.29=0.304,$$

所以接受域为 $W=(0.304, 3.68)$， 由样本值代入 F 可得 $F_0=1.51$,

由于 $0.304<1.51<3.68$， 故接受 H_0.

（2）关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$，$\mu_1,\mu_2$均未知	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$ 或 $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$，$\mu_1,\mu_2$均未知	$F\le F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$，$\mu_1,\mu_2$均未知	$F\ge F_{\alpha}(n-1,m-1)$

3.非正态总体 参数的大样本检验

- 应用中心极限定理，先将一般分布转化为标准正态分布，然后再进行参数检验。

1. 两点分布参数的检验　　U 检验　　$U=\dfrac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

$X \sim b(1,p)$，p 未知　　样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

①H_0： $p \le p_0$　　H_1： $p > p_0$　　$W=\{\bar{x} \ge c\}=\{u \ge u_{1-\alpha}\}$

②H_0： $p \ge p_0$　　H_1： $p < p_0$　　$W=\{\bar{x} \le c\}=\{u \le -u_{1-\alpha}\}$

③H_0： $p = p_0$　　H_1： $p \ne p_0$　　$W=\{|\bar{x}-p_0| \ge c\}=\{|u| \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

样本容量 n 充分大时，$U=\dfrac{\bar{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$。检验统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$，$H_0$ 为真。

2. 总体均值的检验　　U 检验　　$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

总体 X　$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$　样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

① H_0：$\mu\le\mu_0$　H_1：$\mu>\mu_0$　$W=\{\bar{x}\ge c\}=\{u\ge u_{1-\alpha}\}$

② H_0：$\mu\ge\mu_0$　H_1：$\mu<\mu_0$　$W=\{\bar{x}\le c\}=\{u\le -u_{1-\alpha}\}$

③ H_0：$\mu=\mu_0$　H_1：$\mu\ne\mu_0$　$W=\{|\bar{x}-\mu_0|\ge c\}=\left\{|u|\ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

样本容量 n 充分大时，$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$。检验统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，$H_0$ 为真。

我们讨论了正态总体均值和方差的假设检验.

假设检验可按照检验时所用检验统计量的分布，分为

U 检验 —— 用正态分布

t 检验 —— 用 t 分布

χ^2 检验 —— 用 χ^2 分布

F 检验 —— 用 F 分布

对于非正态总体的均值，当其样本容量较大时，若能求得检验统计量的极限分布，依据它们去决定临界值 C.

§3.4 最佳检验的概念

- 检验的p 值
- 假设检验的另一个判别法则：基于尾部概率的比较
- 做假设检验时，显著性水平不同判断结果可能会不同

$\alpha=0.05$，拒绝原假设H_0；$\alpha=0.01$，保留原假设H_0

例 5 一支香烟中的尼古丁含量 $X \sim N(\mu,1)$，合格标准规定 $\mu \le 1.5$ mg，检验一批香烟的尼古丁含量是否合格？

解：建立假设：H_0：$\mu \le \mu_0 = 1.5$；H_1：$\mu > \mu_0 = 1.5$　　$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}}$，$W = \{u \ge u_{1-\alpha}\}$

抽取一盒香烟（20 支），平均尼古丁含量 $\bar{x} = 1.97mg$，$u_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} = \dfrac{1.97 - 1.5}{1/\sqrt{20}} = 2.10$

显著性水平 α	拒绝域 W	$u = 2.10$ 结论
0. 05	$W = \{u \ge 1.645\}$	拒绝 H_0
0. 025	$W = \{u \ge 1.96\}$	拒绝 H_0
0. 01	$W = \{u \ge 2.33\}$	保留 H_0
0. 005	$W = \{u \ge 2.58\}$	保留 H_0

原假设 H_0 成立时，$\mu = \mu_0 = 1.5$，$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$P(u \ge 2.10 \mid \mu = \mu_0 = 1.5) = 1 - \Phi(2.10) = 1 - 0.9821 = 0.0179$$

0. 0179 是拒绝原假设 H_0 的最小显著性水平。

定义　拒绝原假设 H_0 的最小显著性水平称为检验的 p 值

$$\begin{cases} \alpha \ge p & \text{在显著性水平}\alpha\text{下拒绝}H_0 \\ \alpha < p & \text{在显著性水平}\alpha\text{下保留}H_0 \end{cases}$$

例 6 某厂产品长期以来不合格率 $p \le 0.01$，为检验生产过程是否稳定，抽检 100 件产品，发现 2 件不合格品，试判断该厂生产是否稳定。

解：H_0：$p \le p_0 = 0.01$；H_1：$p > p_0 = 0.01$　$T = n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p)$，$W=\{T \ge c\}$，$T_0 = 2$

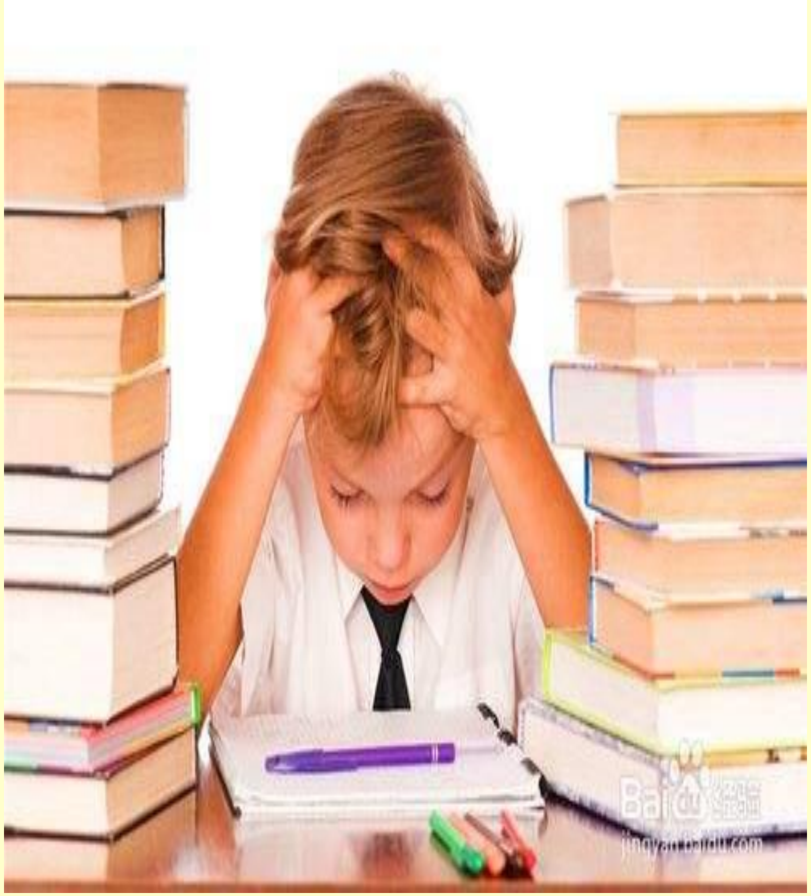
$$p = P(T \ge T_0 \mid p = p_0) = 1 - P(T < T_0 \mid p = p_0) = 1 - P(T < 2 \mid p = 0.01)$$

$$= 1 - C_{100}^{0} 0.99^{100} - C_{100}^{1} 0.01 \cdot 0.99^{99} = 0.264$$

$\alpha \ge 0.264$ 时拒绝 H_0，$\alpha < 0.264$ 时保留 H_0。

第9次作业：

- 孙p. 89 习题三
- 4、9、14、15、19.



谢 谢！