

Étude du mouvement du déchet

Nicolas GRY

15 mars 2021

Table des matières

1	Phase de déplacement dans le champ magnétique	2
1.1	Mise en situation	2
1.1.1	Introduction des grandeurs et notations	2
1.1.2	Schématisation de la situation	2
1.2	Étude littérale du mouvement	3
1.2.1	Étude de l'alignement angulaire du déchet	3
1.2.2	Étude du déplacement du moment dans le champ magnétique	4

1 Phase de déplacement dans le champ magnétique

1.1 Mise en situation

1.1.1 Introduction des grandeurs et notations

On considère un solénoïde caractérisé par :

- Sa longueur L
- Son rayon a
- L'intensité du courant qui le traverse i
- Son nombre de spires n

Ce solénoïde engendre un champ magnétique :

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z$$

. On notera indifféremment $||\vec{B}||$ et B .

On considère un déchet spatiale :

- modélisé par un moment magnétique solide \vec{p}
- de moment d'inertie J_θ
- de masse m

On notera indifféremment $||\vec{p}||$ et p .

On travaillera dans le repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et on notera (r, θ, z) les coordonnées du déchet.

1.1.2 Schématisation de la situation

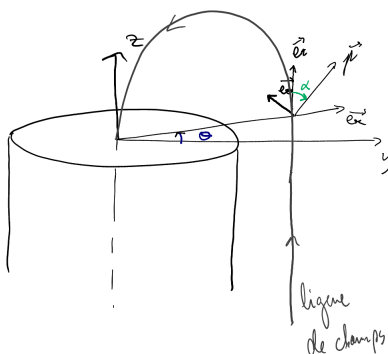


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié de la situation

On imagine que le moment magnétique \vec{p} forme un angle α avec \vec{e}_z . L'objectif ici est d'étudier les variations de α et d'évaluer le temps que met \vec{p} à s'aligner avec les lignes de champs.

1.2 Étude littérale du mouvement

1.2.1 Étude de l'alignement angulaire du déchet

Système : débris assimilé à un moment magnétique solide \vec{p} de moment d'inertie J_θ

Référentiel : En lien avec le solénoïde, supposé galiléen (raisonnable au regard de la durée de l'expérience)

Conditions initiales

À $t = 0$, on suppose que le déchet est incliné d'un angle α_0 par rapport à l'axe de révolution du solénoïde. On suppose également la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ du déchet nulle à $t = 0$, ce qui est raisonnable puisque le déchet est dénué de tout mouvement dû au champ $\vec{B}(r, z)$ lorsqu'il n'y est pas soumis, i.e. à $t = 0$.

Bilan des forces

NB : Il ne faut pas oublier durant cette étude que \vec{B} dépend de r et de z , les variables du repère cylindrique défini dans le cadre de l'étude.

Force magnétique :

$$\vec{F}_B = \text{grad}(\vec{B} \cdot \vec{p})$$

Théorème du moment cinétique

Projeté selon \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} J_\theta \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \vec{M}(\vec{F}_B) \cdot \vec{e}_\theta \\ &= (\vec{p} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_\theta \\ &= pB_r \cos(\alpha) - pB_z \sin(\alpha) \end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

Équation différentielle du 2nd ordre non-linéaire à second membre non-constant :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{pB_z}{J_\theta} \sin(\alpha) = \frac{pB_r}{J_\theta} \cos(\alpha)$$

Étude de la fin de l'alignement angulaire

On se place en premier dans la situation où α est considéré petit. On a alors :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{pB_z}{J_\theta} \alpha = \frac{pB_r}{J_\theta}$$

On pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{pB_z}{J_\theta}}$$

Solution générale de l'équation homogène associée

$$\alpha_h(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec A et φ des constantes d'intégrations.

Solution particulière de l'équation

$$\alpha_p(t) = \frac{B_r}{B_z}$$

Solution générale de l'équation

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{B_r}{B_z}$$

Détermination des constantes d'intégration avec les conditions initiales

Avec :

$$\alpha(0) = \alpha_0$$

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = 0$$

On en déduit :

$$A = \alpha_0 - \frac{B_r}{B_z}$$

$$\varphi \equiv 0 [\pi]$$

Et donc finalement :

Équation de l'angle formé entre \vec{p} et \vec{e}_z

$$\alpha(t) = \left(\alpha_0 - \frac{B_r(r, z)}{B_z(r, z)} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{B_r(r, z)}{B_z(r, z)}$$

Étude de l'alignement angulaire : Résolution numérique de l'équation différentielle**1.2.2 Étude du déplacement du moment dans le champ magnétique**

Système : débris assimilé à un moment magnétique solide \vec{p}

Référentiel : En lien avec le solénoïde, supposé galiléen (raisonnable au regard de la durée de l'expérience)

Conditions initiales

À $t = 0$, on suppose que le déchet est animé d'une vitesse initiale \vec{v}_0 .

Hypothèse

On travaille d'abord sans considérer la force d'attraction gravitationnelle entre le solénoïde et le débris.

Bilan des forces

NB : Il ne faut pas oublier durant cette étude que \vec{B} dépend de r et de z , les variables du repère cylindrique défini dans le cadre de l'étude.

Force magnétique d'aimantation :

https://oatao.univ-toulouse.fr/17352/1/Sadowski_17352.pdf