Étude du mouvement du déchet

Nicolas GRY

15 février 2021

Table des matières

1 Phase de déplacement dans le champ magnétique

1.1 Mise en situation

1.1.1 Introduction des grandeurs et notations

On considère un solénoïde caractérisé par :

- Sa longueur L
- Son rayon a
- L'intensité du courant qui le traverse i
- Son nombre de spires n

Ce solénoïde engendre un champ magnétique :

$$\vec{B} = B_r \vec{e_r} + B_z \vec{e_z}$$

. On notera indifféremment $||\vec{B}||$ et B.

On considère un déchet spatiale, de masse m, que l'on modélise par un moment magnétique solide $\vec{p}$ de moment d'inertie J_θ.

On notera indifféremment $||\vec{p}||$ et p.

On travaillera dans le repère cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ et on notera (r, θ, z) les coordonnées du déchet.

1.1.2 Schéma de la situation

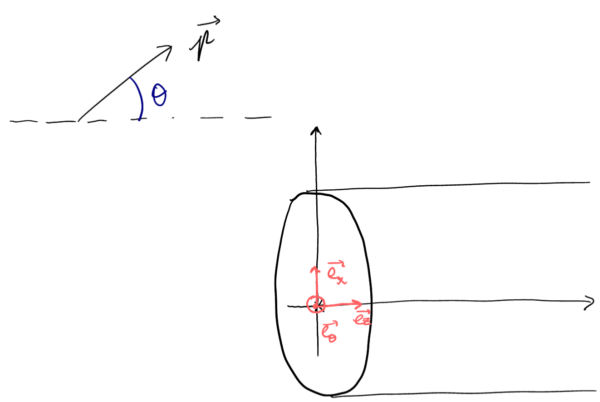

FIGURE 1.1 – Schéma simplifié de la situation

1.2 Étude littérale du mouvement

1.2.1 Étude de l'alignement du déchet

Système : débris assimilé à un moment magnétique solide $\vec{p}$ de moment d'inertie J_θ

Référentiel : En lien avec le solénoïde, supposé galiléen (raisonnable au regard de la durée de l'expérience)

Conditions initiales

À t = 0, on suppose que le déchet est incliné d'un angle θ_0 par rapport à l'axe de révolution du solénoïde. On suppose également la vitesse angulaire du déchet nulle à t = 0, ce qui est raisonnable puisque le déchet est dénué de tout mouvement dû au champ B lorsqu'il n'y est pas soumis, ie à t = 0.

Bilan des forces

Force magnétique :

$$\vec{F_B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{B}.\vec{p})$$

Théorème du moment cinétique

Projeté selon $\vec{e_\theta}$:

$$\begin{aligned} J_\theta \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= \vec{\mathcal{M}}(\vec{F_B}).\vec{e_\theta} \\ &= (\vec{p} \wedge \vec{B}).\vec{e_\theta} \\ &= pB_r\cos(\theta) - pB_z\sin(\theta) \end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

Équation différentielle du 2^{nd} ordre non-linéaire à second membre non-constant :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pB_z}{J_\theta}\sin(\theta) = \frac{pB_r}{J_\theta}\cos(\theta)$$

Étude de la fin de l'alignement

On se place en premier dans la situation où θ est considéré petit. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pB_z}{J_\theta}\theta = \frac{pB_r}{J_\theta}$$

On pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{pB_z}{J_\theta}}$$

Solution générale de l'équation homogène associée

$$\theta_h(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec A et φ des constantes d'intégrations.

Solution particulière de l'équation

$$\theta_p(t) = \frac{B_r}{B_z}$$

Solution générale de l'équation

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{B_r}{B_z}$$

Détermination des constantes d'intégration avec les conditions initiales

Avec :

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

On en déduit :

$$A = \theta_0 - \frac{B_r}{B_z}$$

$$\varphi \equiv 0\,[\pi]$$

Et donc finalement :

Équation de l'angle formé entre $\vec{p}$ et $\vec{e_z}$

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{B_r}{B_z}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{B_r}{B_z}$$