GEOMETRIA
10 luglio 2012 – 2 ore

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.*
- *Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.*

COGNOME, NOME: ______________________ ______________

MATRICOLA: ______________________

DOCENTE: ______________________

Q1	a	b	c	d	**Q9**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q10**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q11**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q12**	a	b	c	d
Q5	a	b	c	d	**Q13**	a	b	c	d
Q6	a	b	c	d	**Q14**	a	b	c	d
Q7	a	b	c	d	**Q15**	a	b	c	d
Q8	a	b	c	d	**Q16**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

QUIZ		ESERCIZI			TOTALE	

QUIZ

Q1. Sia S l'immagine dell'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(u,v) = (4\cos u, 4+4\sin u, 4v)$. Sia π il piano tangente a S nel punto $(4,4,4)$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) π non esiste.
(b) π ha equazione $y = 4$.
(c) π ha equazione $x = 4$.
(d) π ha equazione $z = 4$.

Q2. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori

$$a = (1+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 3), \quad b = (\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 4), \quad c = (1,1,\sqrt{2}+5), \quad d = (1, -1+\sqrt{3}, 7), \quad e = (1,-1,33).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) a, b, c, d, e sono linearmente indipendenti.
(b) b, c, d, e possono essere completati a base di $\mathbb{R}^3$.
(c) a, c, d, e sono linearmente indipendenti.
(d) Nessuna delle altre affermazioni è vera.

Q3. Sia

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A non è invertibile.
(b) A non è diagonalizzabile.
(c) $q(x,y,z)$ è indefinita.
(d) $q(x,y,z)$ è definita.

Q4. Sia dato il sistema lineare $S : AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Ci sono infiniti valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S ha una sola soluzione.
(b) S ha una e una sola soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.
(c) Per $k = 0$ le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
(d) Esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui le soluzioni di S dipendono esattamente da un parametro libero.

Q5. In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'insieme

$$V = \{ (t, x, y, z) \mid t + x + y + z + 1 = 0 \}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
(b) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 3.
(c) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 2.
(d) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 1.

Q6. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1, 2, 0) = f(0, 1, 2).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f è suriettivo.
(b) $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq 2$.
(c) $\dim(\ker(f)) = 0$
(d) $(1, 1, -2) \notin \ker(f)$.

Q7. Sia data la funzione $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ e sia D il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) D è aperto non limitato.
(b) D è compatto.
(c) D è aperto limitato.
(d) $D = \mathbb{R}^2$.

Q8. Nello spazio siano dati i piani $\alpha_h : \; x + hy - 3z = 1$, con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I piani α_h sono paralleli fra loro al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(b) I piani α_h sono ortogonali al vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(c) La retta $(x, y, z) = (3t, 0, t)$ è parallela ad α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(d) Il vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ è parallelo a α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Q9. Sia l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente matrice A rispetto alla base canonica. Supponiamo che f non sia iniettivo e che 2 e 3 siano autovalori di A.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f è suriettivo.
(b) A ammette 2 o 3 come autovalore doppio.
(c) Il polinomio caratteristico di A ha una radice complessa non reale.
(d) A è diagonalizzabile.

Q10. Sia data la conica γ di equazione $x^2 + 2hxy + y^2 - 6 = 0$, dove h è un parametro reale.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Per ogni $h > 1$, γ è un'iperbole.
(b) Per $h = 1$, γ è un'iperbole.
(c) Esiste $h < -1$, tale che la conica γ sia un'ellisse.
(d) Per ogni h, γ è una circonferenza.

Q11. Nello spazio siano dati i vettori applicati $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Esistono due piani distinti contenenti sia $\vec{u}$ che $\vec{v}$.
(b) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w} = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ sono complanari.
(c) L'angolo tra i vettori applicati $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è ottuso.
(d) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ sono complanari ($\times$ indica il prodotto vettoriale).

Q12. Sia data la funzione $f(x, y) = y^2 + e^{x^2}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $(0, 0)$ è un punto di sella per f.
(b) $(0, 0)$ è un punto di minimo per f.
(c) In $(0, 0)$ la funzione non è differenziabile.
(d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Q13. Nello spazio sia data la sfera $\mathscr{S}$ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 2z = 0$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\mathscr{S}$ ha centro in $(0, 3, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.
(b) $\mathscr{S}$ non ha punti reali.
(c) $\mathscr{S}$ ha centro in $(3, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.
(d) $\mathscr{S}$ ha raggio 0.

Q14. Per ogni funzione h sia J_h la relativa matrice jacobiana. Siano date le funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $J_{g \circ f} = J_f \cdot J_g$.
(b) $J_{g \circ f}$ è invertibile.
(c) $J_{g \circ f}$ha al più rango 2 in ogni punto.
(d) $J_{f \circ g} = J_{g \circ f}$.

Q15. Sia data la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A_h non è diagonalizzabile perché non è simmetrica.
(b) A_h è diagonalizzabile perché è sempre invertibile.
(c) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 2, 10$.
(d) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 0$.

Q16. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f è iniettiva.
(b) f è suriettiva.
(c) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
(d) f è un isomorfismo.

ESERCIZI

Esercizio 1. Nello spazio siano dati i piani α, β, γ_h rispettivamente di equazioni

$$x + y + z = 1, \qquad x - 2y + z = 0, \qquad 2x - y + 2hz = 1,$$

con $h \in \mathbb{R}$.
(i) Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che i piani α, β, γ_h si intersechino in un unico punto.
(ii) Per ogni valore tale che $\alpha \cap \beta \cap \gamma_h$ sia un punto, determinare tale punto.
(iii) Verificare che, se $h = 1$, l'intersezione $r = \alpha \cap \beta \cap \gamma_1$ è una retta.
(iv) Determinare un sistema di equazioni parametriche di r.

Svolgimento dell'esercizio 1:

Svolgimento dell'esercizio 1:

ESERCIZI

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x, y) = x - y + \ln(x^2 + y^2).$$

(i) Determinare il dominio D di f e determinarne la frontiera ∂D.

(ii) Stabilire se il punto $(-1, 1)$ è stazionario per f e, in caso affermativo, determinarne la natura (punto di minimo, massimo, sella).

(iii) Determinare tutti i punti stazionari di f.

(iv) Calcolare il polinomio di Taylor di f del primo ordine centrato nel punto $(1, 0)$.

Svolgimento dell'esercizio 2:

Svolgimento dell'esercizio 2:

A

GEOMETRIA
10 luglio 2012 – 2 ore

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.*
- *Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.*

COGNOME, NOME: ______________________ ______________

MATRICOLA: ______________________

DOCENTE: ______________________

Q1	a	b	c	d	**Q9**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q10**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q11**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q12**	a	b	c	d
Q5	a	b	c	d	**Q13**	a	b	c	d
Q6	a	b	c	d	**Q14**	a	b	c	d
Q7	a	b	c	d	**Q15**	a	b	c	d
Q8	a	b	c	d	**Q16**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

QUIZ		ESERCIZI			TOTALE	

QUIZ

Q1. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f è iniettiva.
(b) f è suriettiva.
(c) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
(d) f è un isomorfismo.

Q2. Sia data la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 0$.
(b) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 2, 10$.
(c) A_h non è diagonalizzabile perché non è simmetrica.
(d) A_h è diagonalizzabile perché è sempre invertibile.

Q3. Sia l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente matrice A rispetto alla base canonica. Supponiamo che f non sia iniettivo e che 2 e 3 siano autovalori di A.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Il polinomio caratteristico di A ha una radice complessa non reale.
(b) A è diagonalizzabile.
(c) A ammette 2 o 3 come autovalore doppio.
(d) f è suriettivo.

Q4. Nello spazio sia data la sfera $\mathscr{S}$ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z = 0$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\mathscr{S}$ ha centro in $(0, 3, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.
(b) $\mathscr{S}$ non ha punti reali.
(c) $\mathscr{S}$ ha centro in $(3, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.
(d) $\mathscr{S}$ ha raggio 0.

Q5. Sia data la conica γ di equazione $x^2 + 2hxy + y^2 - 6 = 0$, dove h è un parametro reale.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Per ogni $h < 1$, γ è un'iperbole.
(b) Per $h = 1$, γ è un'iperbole.
(c) Esiste $h > -1$, tale che la conica γ sia un'ellisse.
(d) Per ogni h, γ è una circonferenza.

Q6. Nello spazio siano dati i vettori applicati $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w} = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ sono complanari.
(b) Esistono due piani distinti contenenti sia $\vec{u}$ che $\vec{v}$.
(c) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ sono complanari ($\times$ indica il prodotto vettoriale).
(d) L'angolo tra i vettori applicati $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è ottuso.

Q7. Sia data la funzione $f(x, y) = y^2 + e^{x^2}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
(b) In $(0,0)$ la funzione non è differenziabile.
(c) $(0,0)$ è un punto di sella per f.
(d) $(0,0)$ è un punto di minimo per f.

Q8. Per ogni funzione h sia J_h la relativa matrice jacobiana. Siano date le funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $J_{g \circ f}$ è invertibile
(b) $J_{g \circ f} = J_f \cdot J_g$.
(c) $J_{f \circ g} = J_{g \circ f}$.
(d) $J_{g \circ f}$ha al più rango 2 in ogni punto.

Q9. Nello spazio siano dati i piani $\alpha_h : \ x + hy - 3z = 1$, con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) La retta $(x, y, z) = (3t, 0, t)$ è parallela ad α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(b) Il vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ è parallelo a α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(c) I piani α_h sono paralleli fra loro al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(d) I piani α_h sono ortogonali al vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Q10. Sia S l'immagine dell'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(u, v) = (4v, 4\cos u, 4 + 4\sin u)$. Sia π il piano tangente a S nel punto $(4, 4, 4)$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) π non esiste.
(b) π ha equazione $y = 4$.
(c) π ha equazione $x = 4$.
(d) π ha equazione $z = 4$.

Q11. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1, 2, 0) = f(0, 1, 2).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f non è suriettivo.
(b) $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 3$.
(c) $\dim(\ker(f)) = 0$
(d) $(1, 1, -2) \notin \ker(f)$.

Q12. In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'insieme

$$V = \{ \ (t, x, y, z) \mid t + x + y + z = 0 \ \}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 3.
(b) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 2.
(c) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 1.
(d) Nessuna delle altre affermazioni è vera.

Q13. Sia dato il sistema lineare $S: AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Ci sono infiniti valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S ha infinite soluzioni.
(b) S ha una e una sola soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.
(c) Per $k = 0$ le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
(d) Esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui le soluzioni di S dipendono esattamente da un parametro libero.

Q14. Sia

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A non è invertibile.
(b) A non è diagonalizzabile.
(c) $q(x, y, z)$ è indefinita.
(d) $q(x, y, z)$ è definita.

Q15. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori

$$a = (1+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 3), \quad b = (\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 4), \quad c = (1, 1, \sqrt{2}+5), \quad d = (1, -1+\sqrt{3}, 7), \quad e = (1, -1, 33).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
(b) b, c, d, e possono essere completati a base di $\mathbb{R}^3$.
(c) a, b, c, d, e sono linearmente indipendenti.
(d) a, c, d, e sono linearmente indipendenti.

Q16. Sia data la funzione $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ e sia D il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) D è compatto.
(b) D è aperto non limitato.
(c) D è aperto limitato.
(d) $D = \mathbb{R}^2$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x,y) = y - x + \ln(x^2 + y^2).$$

(i) Determinare il dominio D di f e determinarne la frontiera ∂D.

(ii) Stabilire se il punto $(1,-1)$ è stazionario per f e, in caso affermativo, determinarne la natura (punto di minimo, massimo, sella).

(iii) Determinare tutti i punti stazionari di f.

(iv) Calcolare il polinomio di Taylor di f del primo ordine centrato nel punto $(0,1)$.

Svolgimento dell'esercizio 1:

Svolgimento dell'esercizio 1:

ESERCIZI

Esercizio 2. Nello spazio siano dati i piani α, β, γ_k rispettivamente di equazioni

$$x - y + z = 1, \qquad x - y - 2z = 0, \qquad 2x + 2ky - z = 1,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(i) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che i piani α, β, γ_k si intersechino in un unico punto.

(ii) Per ogni valore tale che $\alpha \cap \beta \cap \gamma_k$ sia un punto, determinare tale punto.

(iii) Verificare che, se $k = -1$, l'intersezione $r = \alpha \cap \beta \cap \gamma_{-1}$ è una retta.

(iv) Determinare un sistema di equazioni parametriche di r.

Svolgimento dell'esercizio 2:

Svolgimento dell'esercizio 2:

GEOMETRIA
10 luglio 2012 – 2 ore

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.*
- *Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.*

COGNOME, NOME: ______________________ ______________

MATRICOLA: ______________________

DOCENTE: ______________________

Q1	a	b	c	d	**Q9**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q10**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q11**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q12**	a	b	c	d
Q5	a	b	c	d	**Q13**	a	b	c	d
Q6	a	b	c	d	**Q14**	a	b	c	d
Q7	a	b	c	d	**Q15**	a	b	c	d
Q8	a	b	c	d	**Q16**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

QUIZ [ ] ESERCIZI [ ] [ ] TOTALE [ ]

QUIZ

Q1. Per ogni funzione h sia J_h la relativa matrice jacobiana. Siano date le funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $J_{g \circ f}$ è invertibile.
(b) $J_{g \circ f}$ha al più rango 2 in ogni punto.
(c) $J_{f \circ g} = J_{g \circ f}$.
(d) $J_{g \circ f} = J_f \cdot J_g$.

Q2. Sia l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente matrice A rispetto alla base canonica. Supponiamo che f non sia iniettivo e che 2 e 3 siano autovalori di A.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f è suriettivo.
(b) A ammette 2 o 3 come autovalore doppio.
(c) A è diagonalizzabile.
(d) Il polinomio caratteristico di A ha una radice complessa non reale.

Q3. Nello spazio siano dati i vettori applicati $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w} = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ sono complanari.
(b) Esistono due piani distinti contenenti sia $\vec{u}$ che $\vec{v}$.
(c) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ sono complanari ($\times$ indica il prodotto vettoriale).
(d) L'angolo tra i vettori applicati $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è ottuso.

Q4. Sia data la funzione $f(x, y) = y^2 + e^{x^2}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $(0, 0)$ è un punto di sella per f.
(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
(c) $(0, 0)$ è un punto di minimo per f.
(d) In $(0, 0)$ la funzione non è differenziabile.

Q5. Sia data la conica γ di equazione $x^2 + 2hxy + y^2 - 6 = 0$, dove h è un parametro reale.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Per $h = 1$, γ è un'iperbole.

(b) Esiste $h < -1$, tale che la conica γ sia un'ellisse.

(c) Per ogni h, γ è una circonferenza.

(d) Per ogni $h > 1$, γ è un'iperbole.

Q6. Sia data la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 2, 10$.

(b) A_h non è diagonalizzabile perché non è simmetrica.

(c) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 0$.

(d) A_h è diagonalizzabile perché è sempre invertibile.

Q7. Nello spazio sia data la sfera $\mathscr{S}$ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 2z = 0$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\mathscr{S}$ non ha punti reali.

(b) $\mathscr{S}$ ha centro in $(0, 3, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.

(c) $\mathscr{S}$ ha raggio 0.

(d) $\mathscr{S}$ ha centro in $(3, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.

Q8. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f è iniettiva.

(b) f è un isomorfismo.

(c) f è suriettiva.

(d) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Q9. Nello spazio siano dati i piani $\alpha_h :\ x + hy - 3z = 1$, con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I piani α_h sono ortogonali al vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(b) La retta $(x, y, z) = (3t, 0, t)$ è parallela ad α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(c) I piani α_h sono paralleli fra loro al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(d) Il vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ è parallelo a α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Q10. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori

$$a = (1+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 3), \quad b = (\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 4), \quad c = (1, 1, \sqrt{2}+5), \quad d = (1, -1+\sqrt{3}, 7), \quad e = (1, -1, 33).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) b, c, d, e possono essere completati a base di $\mathbb{R}^3$.
(b) a, b, c, d, e sono linearmente indipendenti.
(c) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
(d) a, c, d, e sono linearmente indipendenti.

Q11. Sia

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A non è diagonalizzabile.
(b) $q(x, y, z)$ è indefinita.
(c) $q(x, y, z)$ è definita.
(d) A non è invertibile.

Q12. Sia dato il sistema lineare $S : AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Per $k = 0$ le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
(b) Esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui le soluzioni di S dipendono esattamente da un parametro libero.
(c) Ci sono infiniti valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S ha una sola soluzione.
(d) S ha una e una sola soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Q13. In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'insieme

$$V = \{ (t, x, y, z) \mid t + x + y + z + 1 = 0 \}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 3.
(b) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
(c) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 1.
(d) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 2.

Q14. Sia S l'immagine dell'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(u, v) = (4\cos u, 4 + 4\sin u, 4v)$. Sia π il piano tangente a S nel punto $(4, 4, 4)$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) π ha equazione $x = 4$.
(b) π non esiste.
(c) π ha equazione $z = 4$.
(d) π ha equazione $y = 4$.

Q15. Sia data la funzione $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ e sia D il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) D è compatto.
(b) D è aperto limitato.
(c) D è aperto non limitato.
(d) $D = \mathbb{R}^2$.

Q16. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1, 2, 0) = f(0, 1, 2).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\dim(\ker(f)) = 0$
(b) $(1, 1, -2) \notin \ker(f)$.
(c) f è suriettivo.
(d) $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Nello spazio siano dati i piani α, β, γ_h rispettivamente di equazioni

$$x + y + z = 1, \qquad x - 2y + z = 0, \qquad 2x - y + 2hz = 1,$$

con $h \in \mathbb{R}$.
(i) Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che i piani α, β, γ_h si intersechino in un unico punto.
(ii) Per ogni valore tale che $\alpha \cap \beta \cap \gamma_h$ sia un punto, determinare tale punto.
(iii) Verificare che, se $h = 1$, l'intersezione $r = \alpha \cap \beta \cap \gamma_1$ è una retta.
(iv) Determinare un sistema di equazioni parametriche di r.

Svolgimento dell'esercizio 1:

Svolgimento dell'esercizio 1:

ESERCIZI

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x, y) = x - y + \ln(x^2 + y^2).$$

(i) Determinare il dominio D di f e determinarne la frontiera ∂D.

(ii) Stabilire se il punto $(-1, 1)$ è stazionario per f e, in caso affermativo, determinarne la natura (punto di minimo, massimo, sella).

(iii) Determinare tutti i punti stazionari di f.

(iv) Calcolare il polinomio di Taylor di f del primo ordine centrato nel punto $(1, 0)$.

Svolgimento dell'esercizio 2:

Svolgimento dell'esercizio 2:

C

GEOMETRIA
10 luglio 2012 – 2 ore

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.*
- *Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.*

COGNOME, NOME: ______________________ ______________

MATRICOLA: ______________________

DOCENTE: ______________________

Q1	a	b	c	d	**Q9**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q10**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q11**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q12**	a	b	c	d
Q5	a	b	c	d	**Q13**	a	b	c	d
Q6	a	b	c	d	**Q14**	a	b	c	d
Q7	a	b	c	d	**Q15**	a	b	c	d
Q8	a	b	c	d	**Q16**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

QUIZ		ESERCIZI			TOTALE	

QUIZ

Q1. Nello spazio siano dati i piani $\alpha_h :\ x + hy - 3z = 1$, con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I piani α_h sono ortogonali al vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(b) I piani α_h sono paralleli fra loro al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(c) Il vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ è parallelo a α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(d) La retta $(x, y, z) = (3t, 0, t)$ è parallela ad α_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Q2. Sia

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $q(x, y, z)$ è definita.
(b) A non è invertibile.
(c) $q(x, y, z)$ è indefinita.
(d) A non è diagonalizzabile.

Q3. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori

$$a = (1+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 3), \quad b = (\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 4), \quad c = (1, 1, \sqrt{2}+5), \quad d = (1, -1+\sqrt{3}, 7), \quad e = (1, -1, 33).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) a, b, c, d, e sono linearmente indipendenti.
(b) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
(c) b, c, d, e possono essere completati a base di $\mathbb{R}^3$.
(d) a, c, d, e sono linearmente indipendenti.

Q4. Sia S l'immagine dell'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f(u, v) = (4v, 4\cos u, 4 + 4\sin u)$. Sia π il piano tangente a S nel punto $(4, 4, 4)$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) π ha equazione $x = 4$.
(b) π non esiste.
(c) π ha equazione $z = 4$.
(d) π ha equazione $y = 4$.

Q5. Sia dato il sistema lineare $S : AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Ci sono infiniti valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali S ha infinite soluzioni.
(b) Esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui le soluzioni di S dipendono esattamente da un parametro libero.
(c) Per $k = 0$ le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
(d) S ha una e una sola soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Q6. Sia data la funzione $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ e sia D il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) D è compatto.
(b) $D = \mathbb{R}^2$.
(c) D è aperto non limitato.
(d) D è aperto limitato.

Q7. Sia data la funzione $f(x, y) = y^2 + e^{x^2}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $(0, 0)$ è un punto di minimo per f.
(b) In $(0, 0)$ la funzione non è differenziabile.
(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
(d) $(0, 0)$ è un punto di sella per f.

Q8. Per ogni funzione h sia J_h la relativa matrice jacobiana. Siano date le funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $J_{g\circ f}$ha al più rango 2 in ogni punto.
(b) $J_{g\circ f} = J_f \cdot J_g$.
(c) $J_{f\circ g} = J_{g\circ f}$.
(d) $J_{g\circ f}$ è invertibile.

Q9. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1,2,0) = f(0,1,2).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\dim(\ker(f)) = 0$
(b) $(1,1,-2) \notin \ker(f)$.
(c) f non è suriettivo.
(d) $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 3$.

Q10. Sia data la conica γ di equazione $x^2 + 2hxy + y^2 - 6 = 0$, dove h è un parametro reale.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Per ogni $h < 1$, γ è un'iperbole.
(b) Esiste $h > -1$, tale che la conica γ sia un'ellisse.
(c) Per ogni h, γ è una circonferenza.
(d) Per $h = 1$, γ è un'iperbole.

Q11. Nello spazio siano dati i vettori applicati $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w} = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ sono complanari.
(b) I vettori applicati $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ sono complanari ($\times$ indica il prodotto vettoriale).
(c) L'angolo tra i vettori applicati $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è ottuso.
(d) Esistono due piani distinti contenenti sia $\vec{u}$ che $\vec{v}$.

Q12. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) f è un isomorfismo.
(b) f è suriettiva.
(c) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
(d) f è iniettiva.

Q13. Nello spazio sia data la sfera $\mathscr{S}$ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z = 0$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $\mathscr{S}$ ha raggio 0.
(b) $\mathscr{S}$ ha centro in $(0, 3, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.
(c) $\mathscr{S}$ non ha punti reali.
(d) $\mathscr{S}$ ha centro in $(3, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{10}$.

Q14. Sia l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente matrice A rispetto alla base canonica. Supponiamo che f non sia iniettivo e che 2 e 3 siano autovalori di A.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A ammette 2 o 3 come autovalore doppio.
(b) A è diagonalizzabile.
(c) Il polinomio caratteristico di A ha una radice complessa non reale.
(d) f è suriettivo.

Q15. Sia data la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 0$.
(b) A_h è diagonalizzabile perché è sempre invertibile.
(c) A_h non è diagonalizzabile perché non è simmetrica.
(d) A_h è diagonalizzabile per ogni $h \neq 2, 10$.

Q16. In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'insieme

$$V = \{ \, (t, x, y, z) \mid t + x + y + z = 0 \, \}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 1.
(b) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
(c) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 3.
(d) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dimensione 2.

ESERCIZI

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = y - x + \ln(x^2 + y^2).$$

(i) Determinare il dominio D di f e determinarne la frontiera ∂D.

(ii) Stabilire se il punto $(1, -1)$ è stazionario per f e, in caso affermativo, determinarne la natura (punto di minimo, massimo, sella).

(iii) Determinare tutti i punti stazionari di f.

(iv) Calcolare il polinomio di Taylor di f del primo ordine centrato nel punto $(0, 1)$.

Svolgimento dell'esercizio 1:

Svolgimento dell'esercizio 1:

ESERCIZI

Esercizio 2. Nello spazio siano dati i piani α, β, γ_k rispettivamente di equazioni

$$x - y + z = 1, \qquad x - y - 2z = 0, \qquad 2x + 2ky - z = 1,$$

con $k \in \mathbb{R}$.
(i) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che i piani α, β, γ_k si intersechino in un unico punto.
(ii) Per ogni valore tale che $\alpha \cap \beta \cap \gamma_k$ sia un punto, determinare tale punto.
(iii) Verificare che, se $k = -1$, l'intersezione $r = \alpha \cap \beta \cap \gamma_{-1}$ è una retta.
(iv) Determinare un sistema di equazioni parametriche di r.

Svolgimento dell'esercizio 2:

Svolgimento dell'esercizio 2: