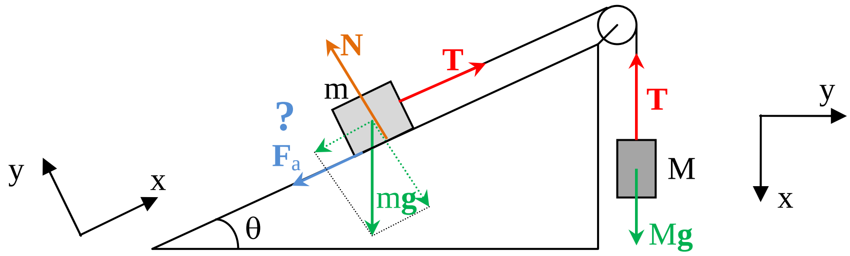
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Esercitazione del 10 Aprile 2013

Esercizio 1

Su un cuneo inclinato di θ = 30° rispetto all'orizzontale può scorrere un blocco di massa m = 40kg, connesso ad un secondo blocco di massa M = 30 kg mediante una fune inestensibile e di massa trascurabile, come indicato in figura. Trovare la tensione della fune sapendo che il coefficiente di attrito tra piano inclinato e massa m è μ = 0.2. Cosa accadrebbe se il coefficiente di attrito fosse invece pari a 0.4?



La direzione della forza di attrito agente sul blocco di massa m non è determinata a priori, se non si conosce il verso del moto. Il sistema potrebbe anche essere in equilibrio statico o dinamico (il testo dell'esercizio non specifica se i coefficienti di attrito dati siano statici o dinamici).

Si ipotizza quindi che il moto avvenga in una determinata direzione (ad esempio verso destra: la massa M scende => accelerazione nel verso delle x crescenti) e si tratta la forza di attrito $\mathbf{F}_a$ come se fosse rivolta come in figura. Se poi a posteriori si ottiene come risultato un valore negativo del suo modulo, F_a, e del modulo dell'accelerazione, significa che in realtà il moto ha luogo in verso opposto (la massa M sale) e $\mathbf{F}_a$ ha verso opposto a quello ipotizzato in figura. Se poi anche in quest'ultima ipotesi si trova un valore negativo del modulo dell'accelerazione, significa che il moto non è accelerato né in un verso né nell'altro. Evidentemente è un caso di equilibrio e si deve porre a=0.

Scriviamo dunque le equazioni di Newton per i due corpi, proiettandole nel sistema di riferimento scelto:

$$\begin{aligned} &Mg - T = Ma \\ &T - F_a - mg\sin\theta = ma \\ &N - mg\cos\theta = 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

Poiché la forza di attrito radente dinamico (stiamo ipotizzando che il sistema sia in moto) è legata alla reazione vincolare normale dalla relazione $F_a = \mu N$, dalla terza equazione del sistema [1] si ha: $F_a = \mu\, m\, g \cos\theta = 67.9$ N

Mettendo a sistema le prime due equazioni del sistema [1] si ottiene:

$$\begin{aligned} &T = M(g - a) \\ &a = \frac{Mg - F_a - mg\sin\theta}{M + m} \end{aligned} \qquad [2]$$

Da cui si ottiene $a = 0.43\ m/s^2$ e $T = 281.1$ N. L'accelerazione è positiva: il verso scelto è quello giusto.

Nel caso in il coefficiente di attrito tra massa m e piano fosse $\mu = 0.4$, la forza d'attrito sarebbe F_a = 135.8 N. Sostituendo nel sistema [2] si avrebbe $a = -0.54\ m/s^2$. Ciò lascerebbe credere che il verso dell'accelerazione sia quello sbagliato. Ipotizzando quindi che **a** e $\mathbf{F_a}$ abbiano verso opposto, il sistema [2] diventerebbe:

$$\begin{aligned} &T = M(g + a) \\ &a = -\frac{Mg + F_a - mg\sin\theta}{M + m} \end{aligned} \qquad [2]$$

L'accelerazione sarebbe $a = -3.34\ m/s^2$. Il segno è ancora negativo: si deve dunque concludere che il corpo è in equilibrio. L'equilibrio potrebbe in generale essere statico (corpi in quiete) o dinamico (corpi in moto uniforme, data un velocità iniziale). (*)

La soluzione si trova dunque imponendo a=0:

$$\begin{aligned} &Mg - T = 0 \\ &T - F_a - mg\sin\theta = 0 \\ &N - mg\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

Si trova così: $T = M\,g = 294$ N
$F_a = T - mg\sin\theta = 97.8$ N
$N = mg\cos\theta = 340$ N

Poiché risulta che $F_a < \mu N = 136$ N, si può concludere che la forza di attrito è di tipo statico. La situazione è quindi di equilibrio statico, con i due corpi in quiete.

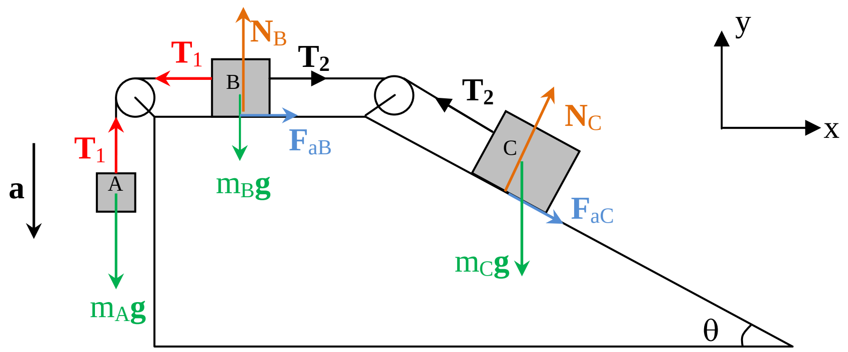
(*) *In realtà si può immediatamente intuire che l'equilibrio è statico perché il motivo per cui l'accelerazione risulta negativa in entrambi i casi ipotizzati è che si è posto $F_a=\mu N$, com'è per un attrito dinamico. Se in entrambi i casi il risultato è assurdo è perché in realtà $F_a \neq \mu N$, come può essere solo per l'attrito statico.*

Esercizio 2

Tre corpi di masse m_A = 10 kg, m_B = 5 kg e m_C = 3 kg sono collegate tramite fili inestensibili di massa trascurabile, come indicato in figura. Sapendo che il piano è inclinato di θ = 30°, che le superfici sono scabre e che l'accelerazione del sistema è a = 2 m/s^2 verso sinistra (cioè la massa A scende), determinare:

a) la tensione dei fili;

b) il coefficiente di attrito dinamico tra le masse e le superfici (si assuma che il coefficiente di attrito sia lo stesso per entrambe le masse B e C).



Applicando il secondo principio della dinamica sia ha

per la massa A: $\mathbf{T_1} + m_A\mathbf{g} = m_A\mathbf{a}$

per la massa B: $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} + m_B\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{aB} = m_B\mathbf{a}$

per la massa C: $\mathbf{T_2} + m_C\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{aC} = m_C\mathbf{a}$

e proiettando le equazioni vettoriali nel sistema di coordinate indicato:

$$\begin{cases} T_1 - m_A g = -m_A a \\ -T_1 + T_2 + F_{aB} = -m_B a \\ N_B - m_B g = 0 \\ -T_2\cos\theta + F_{aC}\cos\theta + N_C \operatorname{sen}\theta = -m_C a\cos\theta \\ +T_2 \operatorname{sen}\theta - F_{aC}\operatorname{sen}\theta + N_C\cos\theta + mg = -m_C a \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad [1]$$

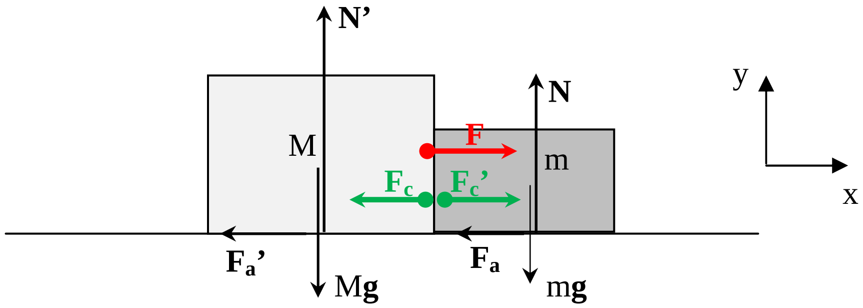
Il sistema è di 5 equazioni con 5 incognite (si ricordi che $F_{aB} = \mu N_B$ e $F_{aC} = \mu N_C$ dove μ è il coefficiente di attrito dinamico).

Risolvendo il sistema si trova:

$$\begin{cases} T_1 = 78 \text{ N} \\ T_2 = 35.89 \text{ N} \\ \mu = 0.655 \end{cases}$$

Esercizio 3

Su di un tavolo con superficie scabra (coefficiente di attrito dinamico $\mu = 2$), due blocchi sono posti a contatto tra loro. Una forza F = 60 N viene applicata al corpo di massa maggiore M = 2 kg, come indicato in figura, provocando il moto del sistema. Trovare la forza di contatto tra i due blocchi sapendo che la massa minore vale m = 200 g.



Tra i due blocchi si sviluppano due forze di contatto $\mathbf{F_c}$ ed $\mathbf{F_c}$**'** che per il terzo principio della dinamica (azione e reazione) saranno uguali in modulo e direzione ma opposte in verso: $\mathbf{F_c}$ ha verso opposto all'asse x ed è la forza che il corpo di massa m esercita sul corpo di massa M, $\mathbf{F_c}$' ha verso concorde all'asse x ed è la forza che il corpo di massa M esercita sul corpo di massa m.

Applicando il secondo principio della dinamica e proiettando le equazioni vettoriali nel sistema di riferimento mostrato in figura sia ha:

per la massa m: $\begin{cases} -F_a + F_c' = ma \\ N - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\mu N + F_c = ma \\ N - mg = 0 \end{cases}$ essendo la forza di attrito $F_a = \mu N$

e valendo la relazione $F_c = F_c$' (moduli)

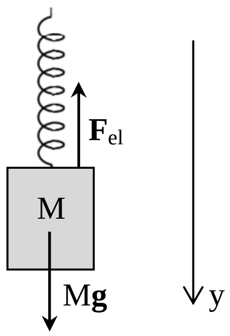
per la massa M: $\begin{cases} F - F_a' - F_c = Ma \\ N' - Mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F - \mu N' - F_c = Ma \\ N' - Mg = 0 \end{cases}$ essendo la forza di attrito F_a' = μN'.

Mettendo a sistema le quattro equazioni si ottiene infine:

$$\begin{cases} a = \dfrac{F_c - \mu mg}{m} \\ F_c = \dfrac{F - \mu Mg + \mu Mg}{1 + \dfrac{M}{m}} = \dfrac{F}{1 + \dfrac{M}{m}} = 5.45 \ \ \text{N} \end{cases}$$

Esercizio 4

Un corpo di massa M = 6 kg appeso ad una molla di massa trascurabile, posta in direzione verticale, la allunga di un tratto pari a 24 cm. Determinare la costante elastica della molla, k.
Si toglie poi tale massa M e la si sostituisce con una massa m = 200 g, si dispone tutto il sistema su di un piano orizzontale privo di attrito e si estende la molla lasciandola poi libera di oscillare. Determinare il periodo T di oscillazione.



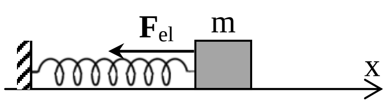
Sulla massa M agiscono la forza di gravità e la forza elastica di richiamo della molla:
Applicando il secondo principio della dinamica si ha:

$$M\mathbf{g} + \mathbf{F}_{el} = M\mathbf{a}$$

che proiettata nel sistema di riferimento in figura, tenendo conto che il sistema dopo che la molla si è allungata del tratto Δy=24 cm ha accelerazione nulla, diventa:

$$Mg - k\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad k = Mg/\Delta y = 245 \text{ N/m}$$

Rimossa la massa M e applicata la massa m e posto il tutto su di un piano orizzontale, il moto del sistema, in assenza di attriti, dipende solamente alla forza di richiamo della molla



Applicando il secondo principio della dinamica e proiettando forza ed accelerazione nel sistema di riferimento prescelto (origine dell'asse x corrispondente alla posizione dell'estremo della molla a riposo) si ha:

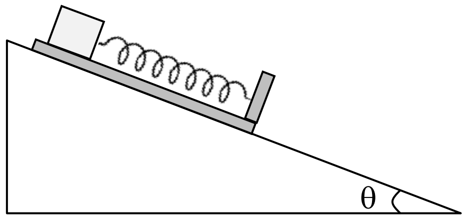
$$-kx = ma \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0 \qquad [1]$$

avendo posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

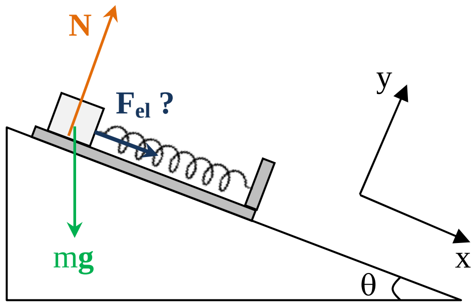
L'equazione [1] è l'equazione di un moto armonico di pulsazione ω e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$ 0.179 s

Esercizio 5

Una slitta scende lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$, con accelerazione costante **a**. Sulla slitta si trova un corpo di massa m = 0.38 kg, fissato ad una parete della slitta da una molla di costante elastica k = 5.5 N/m. Si assuma che non ci siano attriti e che il corpo non oscilli.
Calcolare di quanto è deformata la molla rispetto alla posizione di riposo e in che verso se:
1) $a = a_1 = 6\ m/s^2$
2) $a = a_2 = 3\ m/s^2$



Sul corpo di massa m agiscono 3 forze, tra cui la forza elastica della molla il cui verso dipende dalla condizione di allungamento o di compressione della molla:



Applicando il secondo principio della dinamica:

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F_{el}} = m\mathbf{a}$$

che proiettata lungo l'asse x del sistema di riferimento scelto si riduce all'equazione:

$$m\ g\ \text{sen}\theta + F_{el} = m\ a$$

Per il verso di $\mathbf{F}_{el}$ si è scelto quello concorde all'asse delle x, da verificare a posteriori.

1) Nel primo caso $a = a_1 = 6\ m/s^2$. Si ottiene quindi:

$$F_{el,1} = m\ a_1 - m\ g\ \text{sen}\theta = 0.38\ (6 - 9.8 \cdot 0.5) = 0.418\ N$$

La forza è quindi concorde all'asse x: la molla in questa situazione risulta allungata. Per calcolare il valore dell'allungamento basta ricordare che $|F_{el,1}| = k\ \Delta x_1$ dove Δx_1 è l'allungamento. Si ottiene quindi: $\Delta x_1 = |F_{el,1}|/k = 0.076\ m$

2) Nel secondo caso $a = a_2 = 3\ m/s^2$. Si ottiene quindi:

$$F_{el,2} = m\ a_2 - m\ g\ \text{sen}\theta = 0.38\ (3 - 9.8 \cdot 0.5) = -\ 0.722\ N$$

La forza è quindi orientata in verso discorde all'asse x: la molla in questa situazione risulta compressa. Per calcolare il valore della deformazione basta ricordare che $|F_{el,2}| = k\ \Delta x_2$ dove Δx_2 è la compressione. Si ottiene: $\Delta x_2 = |F_{el,2}|/k = 0.131\ m$.

Esercizio 6
Una massa m oscilla su un piano orizzontale. Essa è collegata a due molle collegate in parallelo di costante elastica k_1 e k_2 rispettivamente. Calcolare il periodo del moto oscillatorio.

In questo caso l'equazione del moto diventa:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1+k_2}{m}x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

Dunque due molle "in parallelo" risultano essere equivalenti ad un'unica molla con costante elastica somma delle singole costanti elastiche.

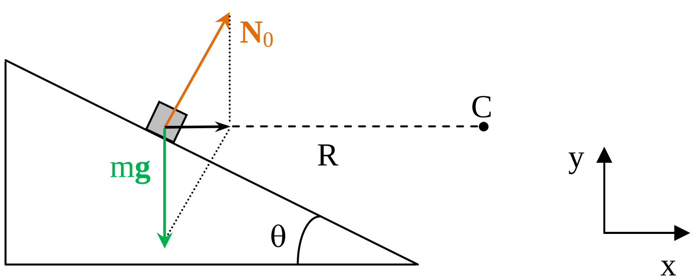
Esercizio 7
La curva sopraelevata di una autostrada è stata progettata per poter essere percorsa con una velocità v_0 = 110 km/h anche in assenza di attrito (strada ghiacciata). Il raggio di curvatura è R = 240 m.
a) Un'auto percorre tale curva con una velocità v_1 = 70 km/h. Quale deve essere il minimo coefficiente di attrito che consente alla macchina di percorrere la curva senza scivolare (cioè senza deviare dalla traiettoria con il raggio di curvatura R dato)?
b) Usando il coefficiente di attrito determinato in precedenza, con quale velocità massima, v_2, un'auto può percorrere la curva senza sbandare?

---

a) L'angolo di sopraelevazione è stato calcolato in modo che una macchina che abbia una velocità v_0 = 110 km/h (= 30.56 m/s) possa superare la curva senza sbandare anche in assenza di attrito.

In questo caso le forze che agiscono sull'auto sono:

m**g** = forza di gravità
N₀ = reazione vincolare della strada
θ = angolo di sopraelevazione (nella figura la curva è vista in sezione)



Perché l'accelerazione cui è soggetta l'auto sia puramente centripeta, occorre che la risultante di tutte le forze esercitate sull'auto (vettore nero) sia diretta verso il centro di curvatura (che giace su un piano orizzontale passante per il punto materiale)

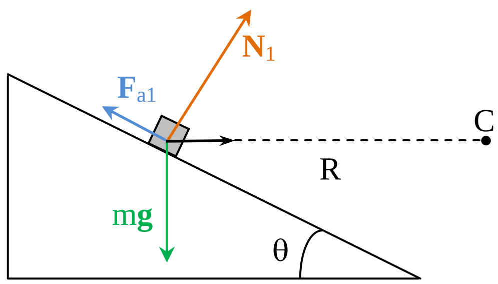
$$\mathbf{N}_0 + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_N \qquad [1]$$

Proiettando l'equazione nel sistema di coordinate scelto si ha:

$$\begin{cases} N_0 \operatorname{sen}\theta = ma_N = m\dfrac{v_0^2}{R} \\ N_0 \cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{v_0^2}{gR} \\ N_0 = \dfrac{mg}{\cos\theta} \end{cases} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{v_0^2}{gR}\right) = 21.65°$$

Se la velocità dell'auto è diversa dal valore v_0, l'angolo di sopraelevazione non è tale da far percorrere all'auto la curva senza sbandare anche in assenza di attrito. E' quindi necessario introdurre una forza di attrito tra l'auto e la strada.

Se la velocità è inferiore a v_0 lo sbandamento avverrebbe verso l'interno e quindi la forza di attrito è diretta verso l'esterno (vedi figura). E' il caso di $v = v_1 = 70$ km/h.



Perché l'accelerazione cui è soggetta l'auto sia puramente centripeta, occorre che la risultante di tutte le forze esercitate sull'auto (vettore nero) sia ancora diretta verso il centro di curvatura.

$$\mathbf{N}_1 + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{a1} = m\mathbf{a}_N$$

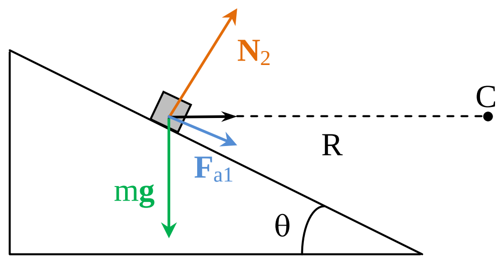
Proiettando l'equazione nel sistema di coordinate scelto si ha:

$$\begin{cases} N_1 \operatorname{sen}\theta - F_{a1}\cos\theta = ma_N = m\dfrac{v_1^2}{R} \\ N_1\cos\theta - mg + F_{a1}\operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = m\left(g\cos\theta + \dfrac{v_1^2}{R}\operatorname{sen}\theta\right) \\ F_{a1} = m\left(g\sin\theta - \dfrac{v_1^2}{R}\cos\theta\right) \end{cases}$$

Trattandosi di attrito statico, occorre che la forza di attrito sia inferiore al suo massimo valore, uguale a $\mu_s N_1$. Il minimo valore del coefficiente di attrito statico è quindi proprio quello che corrisponde a $F_{a1} = F_a^{max} = \mu_s^{min} N_1$

$$\mu_s^{min} = \frac{g\operatorname{sen}\theta - \dfrac{v_1^2}{R}\cos\theta}{g\cos\theta + \dfrac{v_1^2}{R}\operatorname{sen}\theta} = 0.222$$

b) Ipotizziamo ora che il coefficiente di attrito statico sia uguale al valore ricavato in precedenza, $\mu_s = 0.222$ e immaginiamo di percorrere la curva con velocità crescente, a partire dal valore v_1. Il valore della forza di attrito richiesta per produrre un'accelerazione puramente centripeta sarà sempre più piccolo, finché si azzererà quando la velocità sarà nuovamente uguale a v_0, come nel primo caso considerato. Se cresce ulteriormente superando il valore v_0 si tenderebbe ad avere uno sbandamento verso l'esterno e quindi la forza di attrito sarà ora diretta verso l'interno (vedi figura).



Come nei casi precedenti, perché l'accelerazione cui è soggetta l'auto sia puramente centripeta, occorre che la risultante di tutte le forze esercitate sull'auto (vettore nero) sia ancora diretta verso il centro di curvatura.

$$\mathbf{N}_2 + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{a2} = m\mathbf{a}_N$$

Proiettando l'equazione nel sistema di coordinate scelto si ha, per una velocità $v > v_0$:

$$\begin{cases} N_2 \operatorname{sen}\theta + F_{a2}\cos\theta = ma_c = m\dfrac{v^2}{R} \\ N_2\cos\theta - mg - F_{a2}\operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

La velocità massima v_2 si ottiene quando F_{a2} raggiunge il suo massimo valore = $\mu_s N_2$. Si ottiene dunque:

$$\begin{cases} N_2 \operatorname{sen}\theta + \mu_s N_2\cos\theta = m\dfrac{v_2^{\,2}}{R} \\ N_2\cos\theta - mg - \mu_s N_2\operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

che risolto dà

$$\begin{cases} v_2 = \sqrt{Rg\dfrac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}} = 39.96\ \text{m/s} = 143.85\ \text{km/h} \\ N_2 = \dfrac{mg}{\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$