SISTEMI LINEARI E MATRICI INVERSE

Osservazione. ripassare la definizione di sistema lineare e di soluzione di un sistema. Sapere inoltre il Teorema di Rouché-Capelli.

ESERCIZIO 1 Passare dalla scrittura estesa di un sistema alla forma matriciale e viceversa.

ESERCIZIO 2 Verificare se la terna $(2, 1, 1)$ è soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Trovare poi tutte le soluzioni del sistema.
Per trovare tutte le soluzioni utilizzare due metodi: (a) per riduzione; (b) scrivendo le soluzioni come somma di quella particolare più le soluzioni dell'omogeneo associato.

ESERCIZIO 3 Discutere i seguenti sistemi lineari (al variare del parametro reale, dove presente) e risolverli per i valori del parametro indicati.

1. $AX = B$ dove
$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} k & -k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right).$$
Risolverlo per un particolare valore di k, per il quale il sistema sia compatibile.

2. $AX = B$ dove
$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & k \\ 0 & -k & 0 \\ k+1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$
Risolverlo per $k = 0$.

3. $AX = B$ dove
$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & -k \\ k+1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$
Risolverlo per $k = 1$, riducendo fortemente.

ESERCIZIO 4 Risolvere il seguente sistema matriciale $AX = B$ con:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

ESERCIZIO 5 Discutere i seguenti sistemi matriciali $AX = B$:

1. $$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & t-1 & 0 & 1 & 0 \\ t/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

   (risolverlo per $t = 1$);

2. $$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

   (risolverlo per $t = 3$).

ESERCIZIO 6 Calcolare, con il metodo di riduzione, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 7 QUIZ

Q1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,1}$. Supponiamo che il sistema $AX = B$ abbia due soluzioni distinte $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n,1}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. Il sistema ha infinite soluzioni;
2. La matrice A è invertibile;
3. Il sistema non ha altre soluzioni;
4. $X_1 - X_2$ è soluzione del sistema.

Q2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. $\exists h, B$ tale che $AX = B$ non ha soluzioni;

2. A_h è invertibile per ogni h;

3. se $h = 0, AX = B$ ha infinite soluzioni, $\forall B \in \mathbb{R}^{3,1}$;

4. $\exists h$ tale che $AX = 0$ ha solo la soluzione nulla.

Osservate che la matrice è già ridotta.

Osservazione sui determinanti. Per semplificare i conti sul determinante, ricordarsi come si comporta il determinante con le operazioni elementari:

1. $A \to A'$ con $R_i \leftrightarrow R_j$ allora $\det(A') = -\det(A)$;

2. $A \to A'$ con $R_i \leftrightarrow hR_i, h \neq 0$ allora $det(A') = h \det(A)$;

3. $A \to A'$ con $R_i \leftrightarrow R_i + hR_j$ allora $\det(A) = \det(A')$.

Conseguenze:

1. Se nella riduzione applico solo la terza operazione elementare, il determinante non cambia.

2. Si possono dedurre i valori di $\det(kA), \det(-A)$.

3. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$; infatti con il metodo di riduzione si trova che una fortemente ridotta di A è I. I loro determinanti possono solo differenziarsi per una costante moltiplicativa diversa da 0.

ESERCIZIO 8 Stabilire, anche al variare del parametro reale dove presente, se le seguenti matrici sono invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Calcolare poi l'inversa di almeno una di queste con il metodo dei complementi algebrici.

Domande per una discussione su determinanti e inverse.

1. In generale, conoscendo A^{-1} e B^{-1} si possono dedurre $(AB)^{-1}, (A + B)^{-1}, ({}^tA)^{-1}$?

2. Esistono eventuali relazioni tra: $\det(A), \det(B)$ e $\det(A+B)$ o $\det(AB)$?(Ricordarsi il Teorema di Binet).

ESERCIZIO 9 Risolvere con il metodo di Cramer il sistema $AX = B$, dove A è la matrice dell'es. 8 e ${}^tB = (1, 2, 0)$.

ESERCIZIO 10 (T.E. 17/02/2009)
Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

1. Risolvere il sistema omogeneo $AX = 0$ ed esprimere le soluzioni in termini di un parametro libero.

2. Dati

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   verificare che $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 + x_4C_4$.

3. Determinare le soluzioni di $AX = C_4$.

   Utilizzare il fatto che sono note le soluzioni dell'omogeneo associato per (i) ed è ovvia la soluzione particolare ${}^t(0, 0, 0, 1)$ *per (ii).*

ESERCIZIO 11 QUIZ
Q1. Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo avente soluzioni non nulle. Quale affermazione è vera?

1. Per qualche $B \in \mathbb{R}^{n,1}$ il sistema lineare $AX = B$ non è risolubile;

2. la matrice A è invertibile;

3. per ogni $B \in \mathbb{R}^{n,1}$, il sistema lineare $AX = B$ ha infinite soluzioni;

4. per qualche $B \in \mathbb{R}^{n,1}$, il sistema lineare $AX = B$ ha una sola soluzione.

Q2. Siano $A \in \mathbb{R}^{4,4}, B \in \mathbb{R}^{4,1}$ e supponiamo che il sistema $AX = B$ sia incompatibile. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. Il rango di A è minore di 4;
2. il rango di A è maggiore di 4;
3. il sistema $AX = 0$ è incompatibile;
4. il rango di A è 4.