

## CURVE

**ESERCIZIO 1** Sia data l'elica conica  $f(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ .

1. Calcolare l'equazione di una retta tangente in un punto.
2. Considerato  $t \in [0, +\infty)$ , proiettare l'elica sul piano  $z = 0$  e  $x = 0$ ; verificare se le due curve ottenute sono regolari.

(i) Su  $z = 0$ , pur di restringersi all'intervallo  $t > 0$  otteniamo la spirale di Archimede che è una curva regolare. Questa spirale rappresenta il moto di un punto che si muove a velocità costante su un'asta incernierata nell'origine (allontanandosi dall'origine stessa) mentre l'asta ruota a velocità angolare costante.

(ii) Su  $x = 0$  è il grafico di una funzione nota.

**ESERCIZIO 2** Data la curva  $f(t) = (t^2, t, \cos t)$  calcolare la terna fondamentale e l'equazione del piano osculatore nel punto  $P$  corrispondente a  $t = 0$ .

### ESERCIZIO 3 QUIZ

Q1. Nello spazio sia data la curva  $\mathcal{C}$  di equazioni parametriche  $x = \sqrt{t^2 + 1}$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 3t$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1.  $\mathcal{C}$  è piana.
2.  $\mathcal{C}$  ha in  $P(1, 0, 0)$  retta tangente ortogonale all'asse  $x$ .
3.  $\mathcal{C}$  taglia il piano  $y - z = 2$  in due punti.
4.  $\mathcal{C}$  ha piano osculatore sempre parallelo al piano  $y = 2$ .

**ESERCIZIO 4** Data la curva  $f(\theta) = (\cos \theta, \theta + \sin \theta)$ , calcolare la lunghezza del suo arco tra i punti  $A(1, 0)$  e  $B(0, 1 + \pi/2)$ . Calcolare inoltre la retta tangente in un punto.

**ESERCIZIO 5** Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide

$$x(t) = R(t - \sin t), y(t) = R(1 - \cos t)$$

per  $0 < t < 2\pi$ .

**ESERCIZIO 6** Calcolare la lunghezza dell'arco di catenaria  $y = \cosh x$  per  $-1 \leq t \leq 1$ .

**Osservazione.** Ripassare la definizione di integrale curvilineo (detto anche di linea di prima specie). Questo integrale si può utilizzare per il calcolo di masse e, in alcuni casi, di estensioni di superfici laterali.

**ESERCIZIO 7** Data la molla a forma di elica cilindrica  $\underline{r}(t) = 2 \cos t \underline{i} + 2 \sin t \underline{j} + t \underline{k}$  di densità  $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , calcolare la sua massa per  $t \in [0, 2\pi]$ .

**ESERCIZIO 8** Nel piano  $xy$  sia  $\Gamma$  la circonferenza di centro  $O$  e raggio  $R$ . Siano  $g_1(x, y) = x^2 + y^2$  e  $g_2(x, y) = xy$  due funzioni definite su  $\Gamma$ . Calcolare  $\int_{\Gamma} g_i ds$ .

**ESERCIZIO 9** Sia dato il cilindro con generatrici parallele all'asse  $z$ , che ha come sezione con il piano  $z = 0$  l'ellisse  $4x^2 + y^2 = 16$ . Calcolare la porzione di superficie laterale compresa tra il piano  $z = 0$  e la superficie di equazione  $g(x, y) = \sqrt{4 + 3x^2}$ .