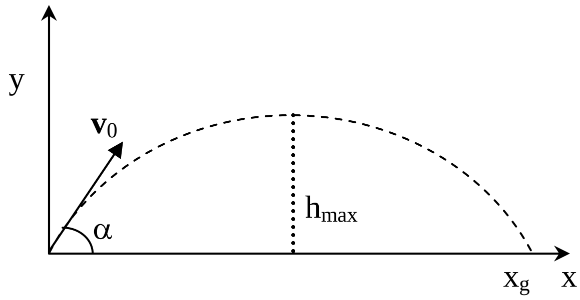
CINEMATICA del PUNTO MATERIALE – CASO di MOTI nel PIANO

Esercitazione del 20 Marzo 2013

Esercizio 1

Un proiettile viene sparato da un cannone con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ in una direzione che forma un angolo α con l'orizzonte. Determinare:

a) l'equazione della traiettoria
b) la massima altezza h_{max} raggiunta dal proiettile nella sua traiettoria
c) la gittata del proiettile (cioè la distanza orizzontale x_g percorsa dal proiettile prima di toccare terra)
d) l'angolo di tiro α_0 corrispondente alla massima gittata
e) la massima altezza h_{max0} corrispondente a tale angolo di tiro
f) il tempo di volo



a) Il moto è dato dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale (asse x) e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale (asse y). Se il punto in cui viene sparato il proiettile coincide con l'origine del sistema di riferimento le equazioni del moto nelle due direzioni sono:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \ \ t \\ y = v_0 \,\mathrm{sen}\alpha \ \ t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ y = \dfrac{v_0 \,\mathrm{sen}\alpha}{v_0 \cos\alpha} \, x - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2} \end{cases}$$

da cui l'equazione della traiettoria: $y = \mathrm{tg}\alpha \ x - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2}$

b) L'ascissa corrispondente al punto di massima altezza h_{max} si ottiene imponendo che la derivata prima dell'equazione della traiettoria si annulli:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{2} g \frac{2x_{max}}{(v_0 \cos\alpha)^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{max} = \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g} \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_0^{\,2} \cos\alpha}{g} \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{v_0^{\,2} \mathrm{sen} 2\alpha}{2g}$$

L'altezza massima si ottiene sostituendo il valore x_{max} così trovato nell'equazione [1] della traiettoria.

$$h_{max} = \frac{v_0^{\;2}}{g} tg\alpha \;\; \cos\alpha \;\; sen\alpha - \frac{g\, v_0^{\;4} \cos^2\alpha \;\; sen^2\alpha}{2g^2 \; v_0^{\;2} \; \cos^2\alpha} = \frac{v_0^{\;2} \; sen^2\alpha}{2g} \qquad [2]$$

c) La gittata corrisponde all'ascissa del punto in cui il proiettile tocca terra. Si può quindi ottenere mettendo a sistema l'equazione [1] della traiettoria con l'equazione della retta x = 0.

La gittata sarà quindi il valore di x soluzione dell'equazione:

$$tg\alpha \; x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_g = 0 \\ x_g = \dfrac{2 \, tg\alpha \, (v_0 \cos\alpha)^2}{g} = \dfrac{v_0^{\;2}}{g} sen2\alpha \end{cases}$$

La prima soluzione è l'ascissa del punto di partenza, mentre la seconda soluzione è la soluzione cercata, cioè l'ascissa del punto di impatto.

d) L'angolo α_0 per cui la gittata è massima si ottiene imponendo uguale a zero la derivata prima della gittata rispetto all'angolo di lancio α:

$$\frac{dx_g}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{v_0^{\;2}}{g} \cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 45° = \frac{\pi}{4}$$

e) La massima altezza h_{max0} raggiunta da proiettile in questo caso si ottiene sostituendo nell'equazione [2] $\alpha = \alpha_0 = \pi/4$:

$$h_{max\,0} = \frac{v_0^{\;2} \; sen^2\alpha_0}{2g} = \frac{1}{4}\frac{v_0^{\;2}}{g}$$

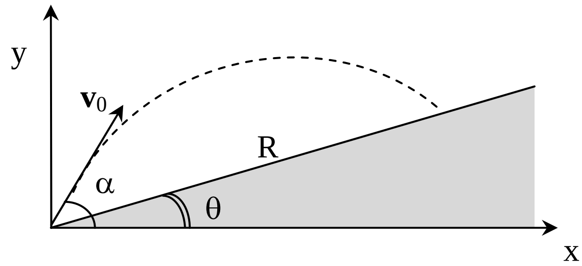
f) Per determinare il tempo di volo è necessario fare uso della legge oraria. Per semplicità si utilizza la legge oraria lungo l'asse x: $x = v_0 \cos\alpha \; t$, da cui

$$t_{volo} = \frac{x_G}{v_0 \cos\alpha} = \frac{v_0^{\;2} \; sen2\alpha}{g \, v_0 \cos\alpha} = \frac{2v_0 \; sen\alpha \cos\alpha}{g \cos\alpha} = \frac{2v_0 \; sen\alpha}{g} = \frac{2v_{0y}}{g}$$

Il tempo di volo coincide quindi con quello che si avrebbe se il proiettile venisse lanciato lungo la verticale con una velocità pari alla proiezione lungo l'asse y della velocità iniziale.

Esercizio 2

Un cannone è piazzato per sparare proiettili con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ lungo un piano inclinato di un angolo θ. Qual è il valore dell'angolo α che consente la massima gittata R lungo il piano inclinato?



Il moto è dato dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale (asse x) e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale (asse y). Se il punto in cui viene sparato il proiettile coincide con l'origine del sistema di riferimento l'equazione della traiettoria è:

$$y = \mathrm{tg}\alpha\ x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2}$$

Le coordinate del punto di impatto del proiettile con il piano inclinato si ottengono mettendo a sistema l'equazione dalla traiettoria con l'equazione della retta che identifica il piano inclinato.

$$y = \mathrm{tg}\theta\ x$$

l'equazione da risolvere diventa quindi: $\mathrm{tg}\theta\ x = \mathrm{tg}\alpha\ x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2}$ [1]

da cui: $x_R = 2(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\theta)\frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g}$

Il valore di x_R che si ottiene come soluzione dell'equazione [1] è pari alla proiezione della gittata R sull'asse delle x. La gittata R sarà quindi esprimibile come $x_R/\cos\theta$

$$R = \frac{2}{\cos\theta}(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\theta)\frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g}$$

Il valore di α per cui la gittata è massima si ottiene come annullando la derivata prima di R in funzione di α: dR/dα = 0.

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{2}{\cos\theta}\frac{{v_0}^2}{g}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha - 2(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\theta)\cos\alpha\ \mathrm{sen}\alpha\right) = 0$$

$$\left(1 - \left(2\mathrm{sen}^2\alpha + \mathrm{tg}\theta\ \mathrm{sen}2\alpha\right)\right) = 0 \Rightarrow \left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha + \mathrm{tg}\,\theta\ \mathrm{sen}2\alpha\right) = 0 \Rightarrow \left(\cos 2\alpha + \mathrm{tg}\,\theta\ \mathrm{sen}2\alpha\right) = 0$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}\right)$$

Da notare che se θ = 0 si ottiene α = ½ arctg (-∞) = π/4 : si ritrova il valore dell'angolo di lancio per cui la gittata è massima per un impatto su di un piano orizzontale.

Esercizio 3

Un fucile è puntato orizzontalmente verso il centro di un largo bersaglio distante d = 150 m. La velocità iniziale del proiettile è v_0 = 450 m/s. Calcolare:

a) le coordinate del punto in cui il proiettile colpisce il bersaglio

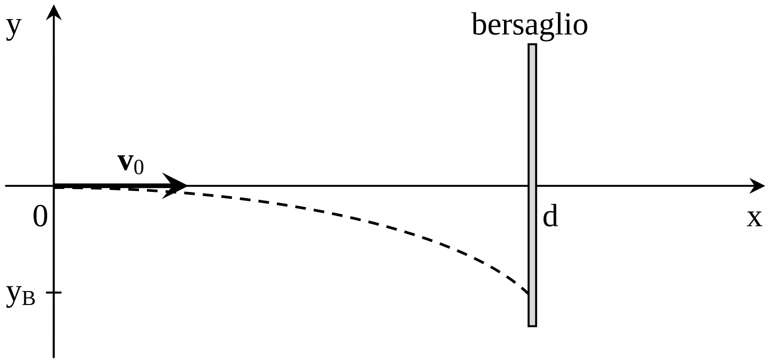
b) l'angolo di elevazione della canna necessario affinché il proiettile colpisca il centro del bersaglio.

---

a) Il moto è dato dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale (asse x) e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale (asse y). Se il punto in cui viene sparato il proiettile coincide con l'origine del sistema di riferimento le equazioni del moto nelle due direzioni sono:

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad [1]$$

Poiché il fucile è puntato lungo l'orizzontale la velocità iniziale del proiettile è diretta lungo l'asse x: pertanto $v_x = v_0$ e $v_y = 0$.



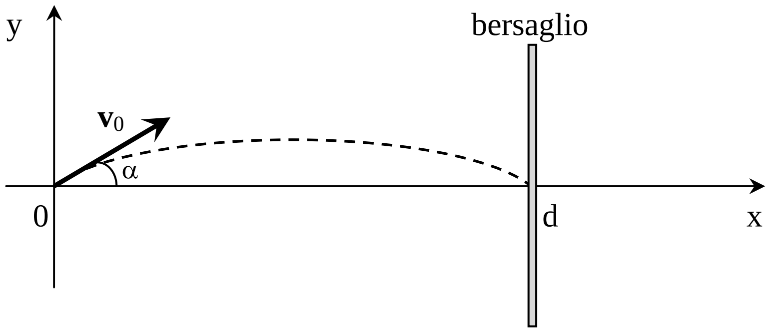
L'equazione della traiettoria è quindi: $y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$

Le coordinate del punto di impatto si ottengono come punto di intersezione tra l'equazione della traiettoria e quella del piano su cui giace il bersaglio: x = d.

Si ottiene quindi $y_B = -\frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2} = -\frac{1}{2}\ 9.8\ \left(\frac{150}{450}\right)^2 = -0.54\ \text{m}$

Le coordinate del punto di impatto saranno quindi x_B=150 m, y_B = -0.54 m

b) Il moto è ancora una composizione di un moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale (asse x) e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale (asse y). Le equazioni del moto sono ancora quelle riportate nel sistema di equazioni [1] ma in questo caso la canna del fucile ha un'inclinazione α rispetto all'orizzontale e quindi si avrà $v_x = v_0 \cos\alpha$ e $v_y = v_0\, \text{sen}\alpha$.



L'equazione della traiettoria sarà pertanto: $y = \text{tg}\alpha\ x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2}$

L'angolo di elevazione della canna si può ottenere imponendo che l'equazione della traiettoria passi per il punto di impatto coincida con il centro del bersaglio: $x_B = d$, $y_B = 0$.

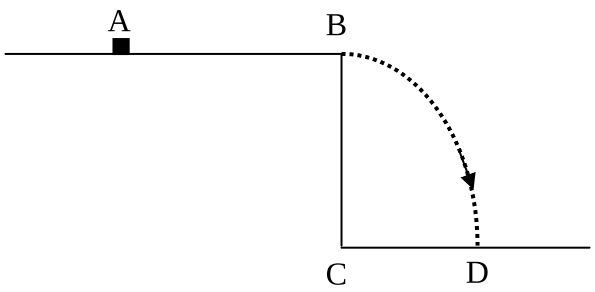
L'equazione da risolvere è quindi: $0 = \text{tg}\alpha\ d - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{(v_0 \cos\alpha)^2}$

da cui:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} d = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{(v_0 \cos\alpha)^2} \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{sen}\,\alpha\ \cos\alpha = g \frac{d}{v_0^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,2\alpha = g \frac{d}{v_0^{\ 2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(g \frac{d}{v_0^{\ 2}} \right) = 0.208°$$

Esercizio 4
Un oggetto puntiforme percorre il tratto AB = 2 m orizzontale (vedi figura) con una decelerazione pari ad a = -kv ($k = 3\ s^{-1}$). Raggiunto B prosegue nel vuoto e tocca terra in D. Se il tratto BC = 1.5 m e il tratto CD = 1.3 m, calcolare la velocità v_A del punto in A.



Nel tratto BD il moto dell'oggetto è dato dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale (asse x) e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale (asse y). Se il puntoB viene scelto come origine del sistema di riferimento l'equazione della traiettoria vale: $y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_B^{\ 2}}$ poiché la velocità in B ha componente non nulla solo sull'orizzontale.

Note le coordinate del punto di impatto sul terreno ($x_D = \overline{CD} = 1.3$ m, $y_D = -\overline{BC} = -1.5$ m), imponendo che l'equazione della traiettoria passi per il punto di impatto (x_D, y_D) si ottiene il valore di v_B.

$$v_B = \sqrt{-\frac{1}{2} g \frac{x_D^{\ 2}}{y_D}} = \sqrt{-\frac{1}{2}\, 9.8 \frac{(1.3)^2}{-1.5}} = 2.35\ \mathrm{m/s}$$

Sapendo che la decelerazione nel tratto AB può essere descritta mediante la legge a = -kv e che l'accelerazione è la derivata temporale della velocità, a = dv/dt, si ha:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -kv$$

che è una equazione differenziale del primo ordine. Risolvendo:

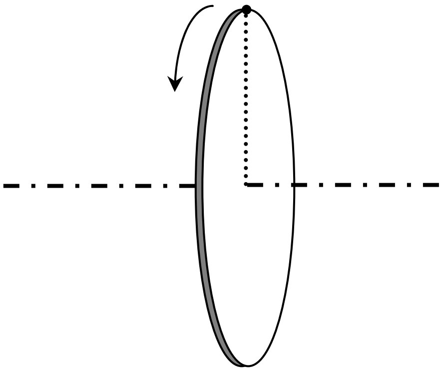
$$dv = -k\, dx \quad \rightarrow \quad \int_{v_A}^{v_B} dv = -k \int_A^B dx \quad \rightarrow \quad v_B - v_A = -k\ AB \quad \rightarrow \quad v_A = v_B + k\ AB$$

da cui $v_A = 8.35$ m/s

Esercizio 5

Un disco di diametro d = 40 cm inizia il moto rotatorio antiorario attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro con una accelerazione angolare costante pari a $\alpha = 2\ rad/s^2$. Un punto P posto sul bordo del disco all'istante t = 0 s si trova sulla verticale passante per il centro del disco. Calcolare all'istante t = 1 s:

a) la posizione del punto P
b) la velocità angolare ω del punto P
c) l'accelerazione centripeta, l'accelerazione tangenziale e l'accelerazione totale del punto P



a) Poiché il moto del punto P è un moto circolare è utile fare uso delle coordinate polari (r, θ). Poiché il moto avviene a r = costante la legge oraria può essere espressa facendo uso della sola variabile θ:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t = \frac{1}{2}\alpha t$$

poiché la velocità angolare iniziale ω_0 è nulla e nell'ipotesi che la posizione angolare iniziale venga identificata dall'angolo $\theta_0 = 0$.

Si ha quindi $\theta(t=1s) = 1$ rad

b) La velocità angolare dopo un secondo si ottiene dalla relazione: $\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t = 2\ rad/s$

c) L'accelerazione centripeta vale: $a_c = \omega^2\left(\frac{d}{2}\right) = 0.8\ m/s^2$

L'accelerazione tangenziale vale $a_t = \alpha\left(\frac{d}{2}\right) = 0.4\ m/s^2$

L'accelerazione totale ha modulo: $a = \sqrt{a_c^{\ 2} + a_t^{\ 2}} = 0.894\ m/s^2$

e forma un angolo $\phi = \mathrm{arctg}\frac{a_t}{a_c} = 26.56° = 0.46\ rad$ con la direzione radiale (quella dell'accelerazione centripeta)