VETTORI GEOMETRICI.

Osservazioni

1. Ripassare il concetto di vettore e la sua scrittura per componenti.

2. Ricordarsi che

$$\vec{u}//\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow rk \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \leq 1$$

   (l'ultima equivalenza è stata dimostrata lavorando sui ranghi). Cosa capita se uno dei due fosse il vettore nullo?

3. Ricordarsi che, dati due vettori non paralleli $\vec{u}$ e $\vec{v}$, allora

$$\vec{t} \text{ è complanare a } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \Leftrightarrow \vec{t} = a\vec{u}+b\vec{v}, a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow rk \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ t_x & t_y & t_z \end{pmatrix} \leq 2$$

   (l'ultima equivalenza è stata mostrata lavorando sui ranghi). Ricordarsi cosa succede se i primi due vettori fossero paralleli.

ESERCIZIO 1 Siano dati i vettori $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 3)$. Controllare che non siano paralleli e verificare se $\vec{t} = (3, 2, 5)$ è complanare ai precedenti. In caso affermativo calcolare i coefficienti a e b della combinazione lineare. Ripetere l'esercizio con $\vec{t} = (1, 2, 3)$.
Svolgerlo in due modi: (i) con la def. di complanarità ottenendo subito a e b; (ii) con la riduzione per righe della matrice delle componenti mostrando che si può risalire ad a e b dai coefficienti della riduzione.

Osservazione. Ricordarsi la corrispondenza tra coppie di punti e vettore.

ESERCIZIO 2 (Variazione sul tema del precedente) Verificare se i quattro punti $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 1, -1)$, $C = (2, 0, 0)$, $D = (-2, 2, 0)$ sono complanari.

Osservazione. Ripassare il prodotto scalare e le principali proprietà.

ESERCIZIO 3 Trovare i vettori complanari a $\vec{u} = \vec{i} - \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ e ortogonali a $\vec{u} + \vec{v}$.

ESERCIZIO 4 Trovare l'angolo formato dai vettori $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Determinare poi un vettore $\vec{t}$ ortogonale ad entrambi e di modulo unitario.

ESERCIZIO 5 Siano $\vec{u} = (1, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$. Scomporre $\vec{u}$ su $\vec{v}$ e su una direzione ortogonale a $\vec{v}$.

ESERCIZIO 6 Scomporre $\vec{u} = (1, 3, 1)$ lungo $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e lungo $\vec{w} = (3, 1, 1)$.
Osservare che, perchè abbia senso l'esercizio, i tre vettori devono risultare complanari. Si può risolvere chiedendo $\vec{u}$ combinazione lineare dei precedenti.

ESERCIZIO 7 Siano dati i tre vettori:

$$\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}, \quad \vec{v} = (1-b)\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k} \ \text{ e } \ \vec{w} = b\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Determinare i valori dei parametri reali a e b affinchè $\vec{u} + \vec{v}$ sia parallelo a $\vec{w}$.
Svolgerlo usando la condizione $\vec{t}//\vec{w} \Leftrightarrow \vec{t} \times \vec{w} = 0$ e mostrare che equivale alla proporzionalità delle componenti.

ESERCIZIO 8 QUIZ.
Q1. Nello spazio dei vettori applicati in O, sono dati i vettori:

$$\vec{u} = 3\vec{i}, \vec{v} = 7\vec{i} + \vec{j}, \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non sono complanari;
2. $\vec{w}$ è ortogonale al prodotto vettoriale di $\vec{v}$ con $\vec{u}$;
3. $\vec{w}$ è ortogonale a $\vec{u} + \vec{v}$;
4. esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Q2. Nello spazio dei vettori applicati in O, sono dati i vettori:

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{v} = \vec{j} - 2\vec{k}, \vec{w} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari;
2. $\vec{w}$ è parallelo a $\vec{v}$;

3. $\vec{u}$ e $\vec{w}$ formano un angolo acuto;

4. $\vec{w}$ è parallelo a $\vec{u} \times \vec{v}$.

Q3. Sia $\vec{v}$ un vettore non nullo. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. L'equazione $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{x} \times \vec{v}$ ha $\vec{x} = \vec{0}$ come unica soluzione;

2. se $\vec{w}$ è un vettore, allora $\vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ sono perpendicolari se e solo se $|\vec{v}| = |\vec{w}|$;

3. l'equazione $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{w}$ ha soluzione per ogni scelta di $\vec{w}$;

4. esiste un versore $\vec{u}$ tale che il triangolo di lati $\vec{v}$ e $\vec{u}$ ha area $2|\vec{v}|$.

ESERCIZIO 9 Utilizzando le operazioni note tra vettori calcolare:

1. l'area del parallelogramma individuato dai tre punti (non allineati) $A(1, 0, -1)$, $B(3, 3, 3)$, $C(4, 1, 2)$.

2. il volume del tetraedro di vertici (non complanari) A, B, C come nel punto precedente, e quarto vertice $D(0, 0, 0)$.