APPLICAZIONI LINEARI.

ESERCIZIO 1 Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita come

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2y + 3z, -x + 2y - 3z, y)$$

1. scrivere la matrice A rappresentativa di f rispetto alla basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$;

   it Farlo in due modi. (i) trovare le immagini di $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ e mettere le componenti per colonna; (ii) osservare che la matrice si può costruire direttamente mettendo per riga i coeff. di x, y, z delle varie componenti dell'immagine.

2. Calcolare $f(3, 4, -2)$ *(sia come comb. lineare di $f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)$, sia come $A\ {}^t(3, 4, -2)$).*

3. Stabilire se $f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)$, sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 2 Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, c + d)$$

1. scrivere una sua matrice rappresentativa.

2. Calcolare l'immagine della matrice identica.

3. Calcolare l'immagine dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$, la dimensione e una base per $\mathrm{Im}(f)$.

Suggerimento. Come basi per rappresentare l'applicazione lineare scegliere quelle naturali. Ricordiamo che, quella naturale di $\mathbb{R}^{2,2}$, è data dalle matrici

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 3 Siano date le applicazioni lineari

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$$

definite come $f(x,y,z) = (x+y, x+y-z), \quad g(s,t) = (3s-t, 3t-s, s)$. Usando le basi canoniche $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{R}^2$, calcolare le matrici rappresentative di f, g e $g \circ f$ e verificare $M(g \circ f) = M(g)M(f)$.

Osservazione. Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare definita tra spazi di dimensione n ed m, con matrice rappresentativa A, rispetto a due basi fissate in V e W, ricordarsi che :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow f$ iniettiva $\Leftrightarrow r(A) = n$;
2. $\mathrm{Im}(f) = W \Leftrightarrow f$ suriettiva $\Leftrightarrow r(A) = m$;
3. f biunivoca $\Leftrightarrow f$ suriettiva e iniettiva $\Leftrightarrow n = m = r(A) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertibile.

ESERCIZIO 4 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare descritta, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & h & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Dire per quali $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
2. Posto $h = 0$, calcolare $\dim(\mathrm{Ker(f)}), \dim(\mathrm{Im(f)})$. Successivamente, determinare una base per questi sottospazi.
3. Posto $h = 1$ calcolare, se esiste, $f^{-1}(\ {}^t(1,0,0))$.

ESERCIZIO 5 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare descritta, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & h \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Dire per quali $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
2. Posto $h = -2$, calcolare $\dim(\mathrm{Ker(f)}), \dim(\mathrm{Im(f)})$.
3. Posto $h = 0$ verificare se $(2,0,0) \in \mathrm{Im}(f)$ e trovarne le controimmagini.

ESERCIZIO 6 T.E. (2011)
Sia h un parametro reale. E' data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & h & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Posto $h = -2$, determinare $f(x, y, z, t)$.

2. Posto $h = -2$, verificare se i vettori $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 1)$ appartengono a $\mathrm{Ker}(f)$ e calcolarne una base.

3. Verificare che non esistono valori di h per i quali f sia iniettiva.

4. Determinare gli eventuali valori di h per i quali f è suriettiva.

ESERCIZIO 7 T.E. (2011)
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni:
f(1,0,0)=(3,3,-1,0)
f(0,1,0)=(1,0,1,1)
f(0,0,1)=(8,6,0,2).

1. Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche.

2. Calcolare la dimensione e una base per $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Provare che $\overrightarrow{w} = (12, 9, 0, 3) \in \mathrm{Im}(f)$ e trovare $f^{-1}(\overrightarrow{w})$.

4. Esistono vettori $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4$ tali che $f^{-1}(\overrightarrow{y})$ contiene un solo elemento? (giustificare la risposta).

ESERCIZIO 8 QUIZ
Q1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y).$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. f è iniettiva.

2. Im(f) ha dimensione 2.

3. f è suriettiva.

4. $\mathrm{Ker}(f)$ ha dimensione 2.

Q2. Sia dato il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x, hy, 2hz), h \in \mathbb{R}$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. f è suriettivo per ogni scelta di h.

2. La matrice associata ad f rispetto alla base canonica ha rango 2 se $h \neq 1$.

3. $f^{-1}(0, 0, 1)$ è vuoto se $h \neq 2$.

4. La dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ può essere 2 per qualche scelta di h.

Q3. La funzione $f : V(S_3) \to V(S_3)$ definita come $f(\underline{u}) = (\underline{u} \circ \underline{i})\underline{i}$

1. non è lineare.

2. É lineare e ha nucleo di dimensione 2.

3. Ha immagine nulla.

4. É suriettiva.

Q4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $a = (1, -2, -1, 2), b = (2, 1, -2, -1), c = (1, -3, -1, 1)$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})) = 2$.

2. $c \in \mathcal{L}(a, b)$.

3. Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ avente $a, b, c \in \mathrm{Ker}(f)$.

4. Esiste $d \in \mathbb{R}^4$ tale che (a, b, c, d) sia una base di $\mathbb{R}^4$.

Q5. Sia f l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. dimKer(f) ≥ 1.
2. $(-1/7, \sqrt{17/11}, \pi/2) \in \mathrm{Im}(f)$.
3. dim(Im(f)) ≤ 2.
4. $(-\sqrt{2}, -1/7, 21) \notin \mathrm{Im}(f)$.