CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE – CASO UNIDIMENSIONALE

Esercitazione del 13 Marzo 2013

Esercizio 1

La legge oraria del moto di una particella è data dalla equazione $x = at^3 + bt^2 + ct$
dove le costanti a, b e c valgono: $a = 1\ m/s^3$ $b = -8\ m/s^2$ $c = 3\ m/s$
Calcolare:

a) la velocità istantanea della particella ad un generico istante t
b) gli istanti t_1 e t_2 in cui la velocità istantanea è nulla
c) l'accelerazione istantanea della particella negli istanti t_1 e t_2
d) lo spostamento totale della particella nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2

---

a) La velocità istantanea è data dalla derivata della posizione rispetto al tempo:

$x = t^3 - 8t^2 + 3t$ (m, se t è espresso in secondi)

$v = dx/dt = 3t^2 - 16t + 3$ (m/s, se t è espresso in secondi)

b) Gli istanti in cui la velocità si annulla si possono ottenere risolvendo l'equazione:

$3t^2 - 16t + 3 = 0$

si ottiene: $t = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-9}}{3} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} t_1 = 0.195\ s \\ t_2 = 5.139\ s \end{array} \right.$

c) L'accelerazione istantanea si ottiene come derivata temporale della velocità:

$a = dv/dt = 6t - 16$ (m/s^2, se t è espresso in secondi)

Agli istanti t_1 e t_2 l'accelerazione varrà:
$a(t_1) = -14.83\ m/s^2$
$a(t_2) = 14.83\ m/s^2$

d) Lo spostamento totale della particella si ottiene come differenza tra le coordinate della posizioni occupate dalla particella agli istanti t_1 e t_2

$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = -60.140 - 0.288 = -60.428\ m$

Esercizio 2

Un razzo viene sparato verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale $v_0 = 80$ m/s. Esso accelera verso l'alto con una accelerazione <u>totale</u> $a = 4 m/s^2$ fino a quando giunge ad una altezza h = 1000 m poi i motori si spengono e il razzo va in caduta libera (cioè è soggetto solo più all'accelerazione di gravità).

Calcolare:

a) la massima altezza raggiunta dal razzo

b) per quanto tempo il razzo risulta in movimento

c) la velocità del razzo subito prima di toccare terra

---

a) Nella prima fase del moto l'accelerazione totale del razzo è 4 m/s^2 diretta verso l'alto. Si consideri come sistema di riferimento una retta y orientata verso l'alto, con origine a terra. Sia t=0 l'istante in cui il razzo viene lanciato (=> $y_0 = y(t=0) = 0$). L'equazione del moto è quindi:

$$y = v_0 t + ½\, a\, t^2 \quad [1]$$

Dalla [1], sapendo che il razzo è salito di un tratto y = h prima di spegnere i motori, si può ricavare la durata di questa prima fase del moto:

$$at_1^2+2v_0t_1-2h=0$$

$$t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2ah}}{a} = \frac{-80 \pm \sqrt{14400}}{4} \langle \begin{array}{ll} -50\text{ s} & \text{non accettabile} \\ & 10\text{ s} \end{array}$$

La velocità del razzo quando giunge in h si può ottenere dalla relazione

$$v(y)^2 = v_0^2 + 2a(y-y_0)$$

$$v_h = \sqrt{v_0{}^2 + 2ah} = 120 \;\; m/s$$

Nella seconda fase del moto il razzo continua a salire, ma il moto sarà decelerato in quanto l'accelerazione di gravità è diretta verso il basso.

L'equazione del moto diventa:

$$y = h + v_h t - ½\, g\, t^2 \quad [2]$$

essendo g l'accelerazione di gravità. Lo spazio percorso durante questa seconda fase, h_2, si può ottenere dalla relazione $v(y)^2 = v_{iniziale}^2 - 2g(y-y_{iniziale})$, ponendo v=0 quando $y-y_{iniziale} = h_2$ (nel punto di massima altezza la velocità si annulla) e $v_{iniziale}=v_h$. Quindi:

$$h_2 = v_h^2/(2g) = 734.7 \text{ m}$$

La massima altezza raggiunta dal razzo è quindi:

$$h_{max} = h + h_2 = 1734.7 \text{ m}$$

b) Come già calcolato per il punto a), la durata della prima fase del moto è $t_1 = 10$ s.

La durata della seconda fase si può ottenere dalla equazione [2] o in alternativa dalla relazione:

$$t_2 = -(0 - v_h)/g$$

si ha $t_2 = 12.24$ s
Durante la terza fase del moto il razzo, invertito il verso di movimento, scende verso terra con una accelerazione pari a quella di gravità. L’equazione del moto è quindi:

$$y = h_{max} - \frac{1}{2} g t^2 \qquad [3]$$

essendo la velocità iniziale nulla. Poiché l’ordinata del punto di impatto è y = 0, dalla [3] si ottiene che il tempo di caduta, t_3 vale:

$$t_3 = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = 18.81 \text{ s}$$

Il tempo totale di moto sarà pertanto:

$$t = t_1+t_2+t_3 = 41.05 \text{ s}$$

c) La velocità con cui il razzo tocca terra si può ottenere dalla relazione:

$$v_{impatto} = \pm\sqrt{0 - 2g(y_{impatto} - h_{max})} = \pm\sqrt{2gh_{max}} = \pm 184.39 \text{ m/s}$$

La velocità di impatto è rivolta verso il basso. Di conseguenza la soluzione da accettare è $v_{impatto} = -184.39$ m/s.

Esercizio 3
Un tram percorre in città una linea chiusa lunga L = 14 km fermandosi 20 volte a distanze uguali; alla partenza da ogni fermata il tram accelera con accelerazione costante $a_+ = 1.2\ m/s^2$ fino a raggiungere la velocità v* = 36 km/h, quindi in vista della fermata successiva frena con una decelerazione $a_- = 1.5\ m/s^2$. Calcolare:
a) il tempo T necessario per effettuare l'intero percorso
b) il minimo numero di vetture N che è necessario immettere sulla linea affinché un passeggero non debba aspettare alla fermata per più di $t_0 = 4$ minuti.

---

a) Il tratto da percorrere tra 2 fermate vale:

$$d = L/20 = 700\ m$$

Ogni volta il tempo di accelerazione e lo spazio percorso in accelerazione saranno rispettivamente:

$$t_+ = v^*/a_+ = 8.33\ s$$
$$s_+ = ½\ a_+\ t_+^2 = 41.63\ m$$

dove v* = 36 km/h = 10 m/s
Il tempo di decelerazione e lo spazio percorso in decelerazione saranno rispettivamente:

$$t_- = v^*/a_- = 6.67\ s$$
$$s_- = v^* t_- - ½\ a_-\ t_-^2 = 33.37\ m$$

Lo spazio percorso a velocità costante e il tempo impiegato a percorrerlo saranno di conseguenza:

$$s_c = d - s_+ - s_- = 625\ m$$
$$t_c = s_c/v^* = 62.5\ s$$

Il tempo che intercorre tra due fermate è quindi $t = t_c + t_+ + t_- = 77.5$ s e il tempo T necessario per effettuare l'intero percorso T = 20 t = 1550 s

b) Il numero di vetture che è necessario immettere sulla linea è pari all'arrotondamento all'intero superiore del rapporto tra il tempo di percorrenza e il tempo massimo di attesa (T_0 = 4 minuti = 240 s).

$$N = T/T_0 = 1550/240 = 6.458 \rightarrow N = 7$$

Esercizio 4

Un punto si muove lungo un asse orizzontale partendo dall'origine con accelerazione a = Av dove A = 0.2 s^{-1}. Determinare:

a) la legge oraria, assumendo che al tempo t = 0 la velocità valga v_0 = 2 m/s.

b) la posizione e la velocità al tempo t_1 = 2 s.

Assumendo invece A = -4 s^{-1} calcolare:

c) il tempo impiegato dal punto per fermarsi

d) la distanza percorsa prima di fermarsi.

Si assuma che anche in questo secondo caso al tempo t = 0 la velocità valga v_0 = 2 m/s.

---

a) Poiché l'accelerazione è la derivata temporale della velocità a = dv/dt, si può ottenere la velocità dalla relazione:

$$dv/dt = Av$$

che è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Risolvendo:

$$\frac{dv}{v} = A\,dt \quad \rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = A \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = A\,t \quad \rightarrow \quad v = v_0\, e^{A\,t}$$

Dalla velocità si può quindi ricavare la legge oraria ricordando che v = dx/dt, da cui:

$$dx = \left(v_0\, e^{At}\right)dt \quad \rightarrow \quad \int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{At}dt \quad \rightarrow \quad x = \frac{v_0}{A}\left(e^{At} - 1\right) \quad \rightarrow \quad x(t) = 10\left(e^{0.2\,t} - 1\right)$$

(m, se t è espresso in s)

b) Al tempo t_1 = 2 s la posizione vale:

$$x(t = t_1 = 2s) = 10\left(e^{0.4} - 1\right) = 4.92 \text{ m}$$

mentre la velocità vale:

$$v(t = t_1 = 2s) = 2\,e^{0.4} = 2.98 \text{ m/s}$$

c) La velocità in questo caso diventa: $v = v_0\, e^{A\,t} = 2\,e^{-4t}$

La velocità si annulla per t = ∞

d) La distanza percorsa dopo un tempo t = ∞ vale: $x = \frac{v_0}{A}\left(e^{At} - 1\right)$ = -0.5(e^{-4t}-1) = 0.5 m

Esercizio 5

Una pallina muovendosi di moto armonico oscilla tra due posizioni distanti d = 1m e ritorna nella posizione di partenza (con la stessa velocità) dopo $t_1 = 0.8$ s. Calcolare:

a) l'ampiezza dell'oscillazione
b) il periodo si oscillazione
c) la frequenza di oscillazione
d) l'accelerazione massima

---

a) L'equazione di un moto armonico può essere scritta come $x = A \text{ sen } (\omega t+\phi)$ dove A è l'ampiezza del moto armonico, ω la pulsazione e ϕ la fase iniziale.
Poiché la funzione seno può oscillare tra i valori –1 e +1 e nel caso in esame la pallina oscilla tra due posizioni distanti d = 1m si ha che l'ampiezza di oscillazione è pari a

$$A = d/2 = 0.5 \text{ m}$$

b) Il periodo di oscillazione, T, è il tempo che la pallina impiega a tornare nella posizione da cui è partita. Quindi $T = t_1 = 0.8$ s

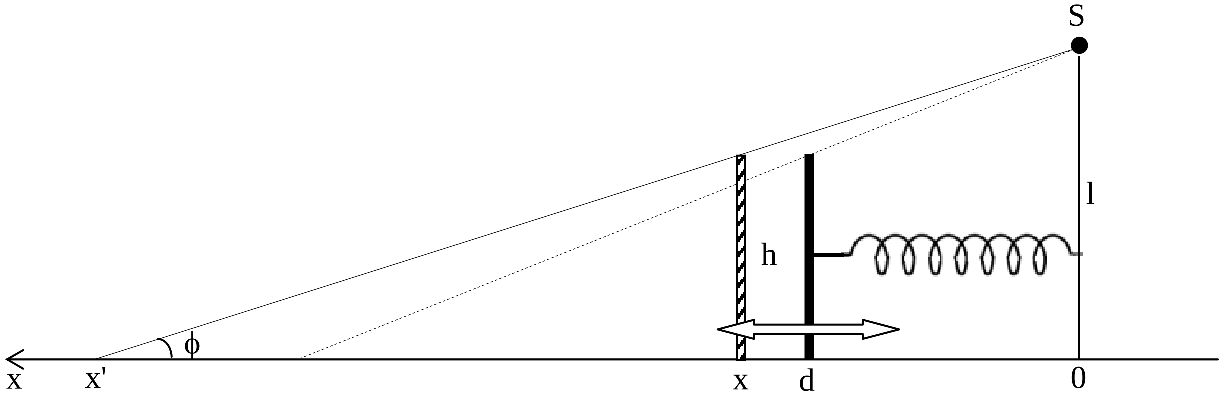
c) La frequenza di oscillazione è pari all'inverso del periodo: $\nu = 1/T = 1.25$ Hz

d) L'accelerazione è massima agli estremi della traiettoria:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \text{ sen}(\omega t + \phi) \qquad \rightarrow \qquad a_{max} = A\omega^2 = A(2\pi\nu)^2 = 30.84 \text{ m/s}^2$$

Esercizio 6

Una barretta di altezza h si muove di moto armonico intorno ad un punto distante d da un supporto di altezza l su cui è fissata una sorgente luminosa puntiforme S. Sapendo che il moto armonico ha ampiezza A e periodo T, determinare come varia nel tempo la lunghezza dell'ombra proiettata dalla sorgente luminosa. Quale sarà il moto dell'estremo dell'ombra?



L'equazione del moto della barretta è $x = d + A \sin(2\pi t/T)$, immaginando per semplicità che la fase iniziale sia nulla.

In un istante generico x è la posizione della barretta, x' la posizione dell'estremo della sua ombra e L=x'-x è la lunghezza dell'ombra.

Dal disegno appare evidente che $\mathrm{tg}\phi = l/x' = h/(x'-x)$, quindi:

$$x' = \frac{l}{l-h}x = \frac{ld}{l-h} + \frac{lA}{l-h}\sin(2\pi t/T)$$

Il moto dell'estremo dell'ombra è quindi armonico, attorno al punto a distanza ld/(l-h) dal supporto della sorgente luminosa, dello stesso periodo del moto della barretta e di ampiezza lA/(l-h).

La lunghezza dell'ombra è

$$L = x' - x = \frac{hd}{l-h} + \frac{hA}{l-h}\sin(2\pi t/T)$$

Anche la lunghezza dell'ombra varia in modo armonico con ampiezza hA/(l-h) attorno al valore hd/(l-h) e con lo stesso periodo del moto della barretta.