MATRICI

ESERCIZIO 1 Esercizi facili sulle operazioni tra matrici.

1. Date le matrici
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$
calcolare $2A - {}^tB$.

2. Date le matrici $A = [1\ 2\ \ -i]$ e $B = [i\ 4\ (2+i)]$ calcolare $A + iB$.

3. Date le matrici
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$
trovare, se possibile, una matrice $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ che soddisfi l'equazione matriciale: $3X + 2(A + B) - 3^tC = 0_M$.

   Ripetere l'esercizio con l'equazione matriciale: $3X + CB - BC = 0_M$.

Osservazione. La non commutatività del prodotto ha conseguenze su formule ben note che valgono nel calcolo letterale reale. Per esempio, se A e B sono due matrici quadrate, in generale:
$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{e} \quad A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B).$$

ESERCIZIO 2 Date due matrici A e B, sapendo che $AB = 0_M$ e $BA = 0_M$, dire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

1. $AB = BA$.
2. A oppure B sono la matrice nulla.

ESERCIZIO 3

1. Verificare che le seguenti coppie di matrici sono una l'inversa dell'altra:
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -3 & -7 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Calcolare poi (in modo sintetico) $({}^tA)^{-1}, AB^2, A^2 + B^2$.

ESERCIZIO 4 Verificare che la seguente matrice non ammette inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO 5 Si data l'equazione matriciale di secondo grado: $t^2 - 5t + 6 = 0$. Si discuta il numero di soluzioni dell'equazione seguendo le seguenti osservazioni.

1. Mostrare che la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ è soluzione dell'equazione.
2. Verificare che anche la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ è soluzione.
3. Ci sono altre soluzioni? Si provi a modificare la matrice A per ottenere infinite soluzioni (basta scegliere $a_{1,2}$ a piacere).
4. Generalizzare mostrando che ogni matrice del tipo $P^{-1}AP$ è soluzione.

ESERCIZIO 7 Mostrare che ogni matrice quadrata si decompone nella somma di una matrice simmetrica più una antisimmetrica.

ESERCIZIO 8 Scrivere esempi di matrici in forma ridotta e fortemente ridotta.

Osservazione. Ricordarsi i seguenti fatti sul rango di $A \in \mathbb{R}^{m,n}$:

1. $0 \leq r(A) \leq min(m, n)$;
2. se $B \in \mathbb{R}^{n,h} \Rightarrow r(AB) \leq min(r(A), r(B))$ (senza dim.);
3. se $B \in \mathbb{R}^{m,n} \Rightarrow r(A + B) \leq r(A) + r(B)$;
4. $r(A) = r({}^tA)$;
5. $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_M$;

   $r(A) = 1 \Leftrightarrow$ tutte le righe sono proporzionali ad una non nulla;

   $r(A) = 2 \Leftrightarrow$ ci sono due righe non proporzionali tra loro e le altre sono una combinazione di esse.

ESERCIZIO 9 Ridurre e calcolare il rango delle seguenti matrici (eventualmente dipendenti da parametro reale):

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Per questa matrice: ridurre e osservare che ha rango massimo 4; proseguire fino alla fortemente ridotta.

   Osservare che una sua fortemente ridotta è I e che ciò capita sempre se la matrice di partenza è quadrata di rango massimo.

2.
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ 1-i & 4 & i & 0 \\ 2 & 4+4i & 1-i & 0 \end{bmatrix}.$$

3.
$$C = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}.$$

4.
$$D = \begin{bmatrix} h & h-1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2-h \end{bmatrix}.$$

   Ripetere l'ultima riduzione con $D_{3,1} = 2 - 2h$.

ESERCIZIO 10 QUIZ

Q1. Sia $M = (1, 0, 1, 0)$ e sia $A = {}^tMM$. Dire quale delle seguenti risposte è corretta:

$$(a)\ r(A) = 0; \quad (b)\ r(A) = 1; \quad (c)\ r(A) = 2; \quad (d)\ r(A) = 3; \quad (e)\ r(A) = 4.$$