

CONICHE E QUADRICHE

Osservazione. Ripassare la classificazione delle coniche e le modalità portarle in forma canonica sia quando non compare il termine misto, sia quando compare.

ESERCIZIO 1 Classificare, riducendo a forma canonica (col metodo del completamento dei quadrati), e disegnare le seguenti coniche:

1. $x^2 - 4x + 8y^2 = 0$;
2. $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$;
3. $x^2 + 6x + 8y + 1 = 0$;
4. $x^2 + 6x + 8y + 1 = 0$.

ESERCIZIO 2 Classificare le seguenti coniche e scrivere una forma canonica (senza scrivere la rototraslazione):

1. $(x + 2y)^2 - 4y = 0$;
2. $2xy - 4x + 1 = 0$;
3. $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$;
4. $5x^2 + 4xy + y^2 - 2x = 0$.

La forma canonica non è richiesta nel caso di conica degenera.

ESERCIZIO 3 Dato il seguente fascio di coniche:

$$\gamma_t : \quad x^2 + (1 - t)y^2 + 2tx - 2(1 - t)y + 2 - t = 0$$

determinare i valori del parametro t per cui:

1. γ_t è una parabola;
2. γ_t è un'iperbole;
3. γ_t è un'ellisse con punti reali;
4. γ_t è una circonferenza;
5. γ_t è una conica degenera;

6. γ_t è un' ellisse senza punti reali.

ESERCIZIO 4 T.E. Nel sistema di riferimento Oxy è data la conica di equazione $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 1 = 0$.

1. Determinare la matrice simmetrica A della forma quadratica associata alla conica e calcolarne gli autovalori.
2. Determinare una rotazione che riduca l'equazione della conica in forma del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$ oppure $Y^2 = 2pX$.
3. Disegnare la conica nel sistema di riferimento Oxy .

ESERCIZIO 5 Nel sistema di riferimento Oxy è data la conica di equazione $(x - y)^2 + 8x - 1 = 0$.

1. Determinare la matrice simmetrica A della forma quadratica associata alla conica e calcolarne gli autovalori.
2. Classificare la conica.
3. Determinare una rotazione che riduca l'equazione della conica in forma del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$ oppure $Y^2 = 2pX$.
4. Disegnare la conica nel sistema di riferimento Oxy .

ESERCIZIO 6 Nel sistema di riferimento Oxy è data la conica di equazione $4x^2 + 4y^2 + 2xy - 4y = 0$.

1. Determinare la matrice simmetrica A della forma quadratica associata alla conica e calcolarne gli autovalori.
2. Classificare la conica.
3. Determinare una rotazione che riduca l'equazione della conica in forma del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$ oppure $Y^2 = 2pX$.
4. Disegnare la conica nel sistema di riferimento Oxy .

Osservazione. Per quanto riguarda le quadriche, è necessario sapere le loro forme canoniche e alcune semplici proprietà (per esempio discutere le loro intersezioni con particolari piani).

ESERCIZIO 7 QUIZ

Q1. Nel piano, l'equazione $x^2 + 3xy + 8y^2 - 4 = 0$ rappresenta:

1. una conica riducibile;
2. una coppia di rette ;
3. un'iperbole;
4. un'ellisse.

Q2. Si consideri il sottoinsieme \mathcal{C} di \mathbb{R}^2 formato dalle soluzioni dell'equazione:
 $-x^2 + y^2 + 2x + 3 = 0$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. \mathcal{C} è una coppia di rette incidenti;
2. \mathcal{C} è un'iperbole;
3. \mathcal{C} è l'insieme vuoto;
4. \mathcal{C} è una parabola.

Q3. Nello spazio sia data la quadrica \mathcal{Q} di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. \mathcal{Q} è un'ellissoide;
2. \mathcal{Q} non contiene rette;
3. \mathcal{Q} non contiene nessun punto;
4. \mathcal{Q} è un cono.

Q4. Nello spazio sia data la quadrica \mathcal{Q} di equazione $x^2 - y^2 = 3$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. \mathcal{Q} è un'iperbole equilatera;
2. le sezioni di \mathcal{Q} con i piani $z = k$, con $k \in \mathbb{R}$, sono insiemi non vuoti;
3. \mathcal{Q} è un cono;
4. \mathcal{Q} è un paraboloide a sella.

Q5. Nello spazio l'equazione $x^2 + y - 2z^2 = 0$ rappresenta:

1. una curva non piana;
2. un cono;
3. un'iperboloide
4. una superficie che ha in comune due rette con il piano $y = 0$.

Q6. Nello spazio sia data la quadrica \mathcal{Q} di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. \mathcal{Q} ha punti in comune con il piano di equazione $z = 1$.
2. \mathcal{Q} è una circonferenza di raggio 1.
3. \mathcal{Q} è un cono.
4. \mathcal{Q} è un paraboloide.

Q7. Nello spazio l'equazione $x^2 - xz = 4z$ rappresenta:

1. un cono con vertice nell'origine;
2. un cilindro;
3. una conica;
4. una coppia di rette.

Q8. Nel piano l'equazione $x^2 - 4y^2 = 2x$ rappresenta:

1. un'iperbole con centro nell'origine;
2. una coppia di rette parallele;
3. un'iperbole con asintoto parallelo alla retta: $x = 2y$;
4. una parabola con asse parallelo all'asse y .