AUTOVALORI, AUTOVETTORI, DIAGONALIZZAZIONE E FORME QUADRATICHE

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

ESERCIZIO 1 Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Verificare se i vettori ${}^t(1,1,3)$ e ${}^t(1,0,1)$ sono autovettori. In caso affermativo stabilire il relativo autovalore.
2. Mostrare, senza calcolare il polinomio caratteristico, che $\lambda = 0$ è un autovalore (con $\det A = 0$).
3. Calcolare gli autovalori con la loro molteplicità algebrica.
4. Calcolare i relativi autospazi con la loro dimensione (= molteplicità geometrica dell'autovalore).

ESERCIZIO 2 Siano date le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcolare gli autovalori con relativa molteplicità algebrica.
2. Calcolare una base e la dimensione dei relativi autospazi specificando la geometrica degli autovalori.

ESERCIZIO 3 Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia λ un suo autovalore.

1. Mostrare che λ^2 è autovalore di A^2.
2. Mostrare che $E_\lambda(A) \subseteq E_{\lambda^2}(A^2)$.

ESERCIZIO 4 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$, trovare i valori di a per i quali $r(A) = 2$. Posto $a = 2$, trovare autovalori e autovettori di A.

DIAGONALIZZAZIONE E FORME QUADRATICHE

Osservazione Ripassa la definizione di diagonalizzabilità e il criterio di diagonalizzazione. Può sempre essere utile ricordarsi che il determinante di una matrice A e la traccia di A sono, rispettivamente, il prodotto e la somma degli autovalori.

ESERCIZIO 1 T. E.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(a, b, c) = (a + b, 2b, -a + b + 2c).$$

1. Determinare la matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ di f.
2. Verificare che A è invertibile.
3. Determinare gli autovalori di A.
4. Determinare gli autospazi di A.
5. Determinare $D, P \in \mathbb{R}^{3,3}$, con D diagonale e P invertibile, tali che $P^{-1}AP = D$.

ESERCIZIO 2
Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Verificare che i vettori $(0, 1, -1)$ e $(1, 0, 1)$, sono autovettori per A. Qual e il loro relativo autovalore? Che limitazioni ci sono sulla sua molteplicità algebrica?

2. Senza calcolare $p_A(t)$, dire qual è l'altro autovalore di A.

3. La matrice A è diagonalizzabile?

ESERCIZIO 3 T.E.
Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

determinare i valori di $u \in \mathbb{R}$ affinché 1 sia autovalore della matrice.
Suggerimento. Farlo in due modi: (i) porre det(A-1)=0 oppure (ii) calcolare $p_A(t)$ e imporre 1 come radice.

Posto ora $u = 5$,

1. determinare il polinomio caratteristico $p(t)$ di A e verificare che $p(-3) = 0$;

2. determinare tutti gli autovalori e una base per ciascun autospazio;

3. determinare, se esistono, una matrice $P \in \mathbb{R}^{3,3}$ invertibile ed una matrice $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ diagonale, tale che $P^{-1}AP = D$.

4. Determinare, se esiste, una matrice $P \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che $AP = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Osservazione. Ripassare il Teorema Spettrale (diagonalizzazione di matrici simmetriche).
Osservazione. Ripassare le definizioni di forma quadratica e segnatura della forma. In particolare, per studiare la segnatura di una forma quadratica, ricordarsi la relazione tra autovalori, determinate e traccia di A.

ESERCIZIO 4 T.E.
Sia data la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Verificare che i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori per A relativi allo stesso autovalore $\lambda = -3$.

2. Verificare che il polinomio caratteristico di A è della forma $p(t) = -(t+3)^2(t-\lambda)$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Indicare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

4. Indicare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

5. Si consideri la forma quadratica

$$q(x,y,z) = (x,y,z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :$$

è vero o falso che $q(x,y,z) > 0$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ non nullo? Motivare la risposta.

ESERCIZIO 5 Sia data la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. trovare, se possibile, una matrice P invertibile e una matrice diagonale D tale che $P^{-1}AP = D$.

2. Trovare, se possibile, una matrice ortogonale Q e una matrice diagonale D tale che ${}^tQAQ = D$.

ESERCIZIO 6 Utilizzando il Teorema di Cayley-Hamilton, calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 7 QUIZ

Q1. Sia $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. Il polinomio caratteristico di N è $p(t) = -t^3$.

2. Il polinomio caratteristico di N è $p(t) = t^2 + 1$.

3. N è diagonalizzabile.

4. $(1,0)$ è autovettore di N.

Q2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. A è diagonalizzabile.

2. La matrice A non possiede autovalori non nulli.

3. A possiede l'autovalore nullo e la dimensione dell'autospazio ad esso associato è uguale a 2.

4. Il polinomio caratteristico possiede una radice semplice.

Q3. Sia data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. Gli autovalori di A sono tutti positivi.

2. $3+i$ è radice del polinomio caratteristico di A.

3. 0 è autovalore di A.

4. Esiste $P \in \mathbb{R}^{3,3}$ invertibile tale che $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Q4. Siano date la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ e la forma quadratica $q(x,y,z) = (x,y,z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. $q(2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. 0 è un autovalore di A.

3. $q(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4. Esiste $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nullo tale che $q(x, y, z) < 0$.

Q5. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, y - 3z, -z).$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. 0 è autovalore di f.

2. $(1, 0, 0)$ è un autovettore di f.

3. $(1, 0, 0)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$.

4. $(1, 0, 0)$ non appartiene a $\mathrm{Im}(f)$.

Q6. Siano date la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e la forma quadratica $q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. $q(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^3$, non nullo.

2. 0 è un autovalore di A.

3. $\pi + \sqrt{5}$ è radice del polinomio caratteristico di A.

4. Esiste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $q(x, y) < 0$.

Q7. Una matrice $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ ha autovalori $0, 1, 2$. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. M è invertibile.

2. M ha polinomio caratteristico $p(t) = 1 - t^3$.

3. M è diagonalizzabile.

4. Un autospazio di M ha dimensione 2.