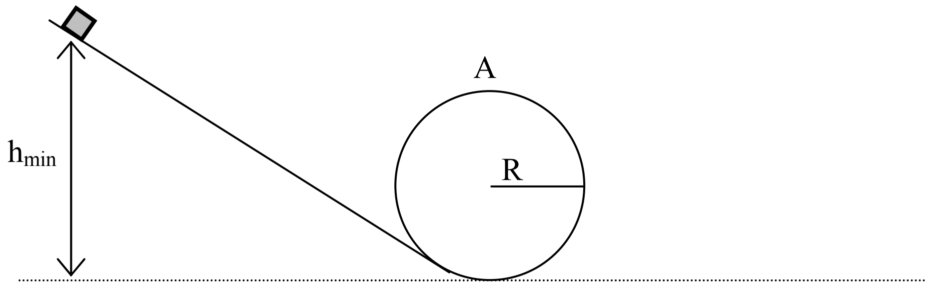
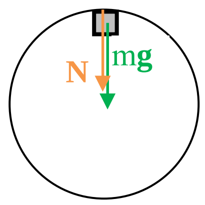
LAVORO ed ENERGIA
MOTI RELATIVI
Esercitazione del 17 Aprile 2013

Esercizio 1

Un oggetto puntiforme viene fatto scivolare lungo la pista mostrata in figura (Sia R il raggio della circonferenza disegnata dalla pista). Qual è la minima altezza da cui deve venir fatto cadere affinché raggiunga il punto A della traiettoria senza staccarsi?



Applicando il secondo principio della dinamica nel punto A si ottiene:



$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

dove l'accelerazione **a** è centripeta in quanto diretta verso il centro della circonferenza. La situazione limite si avrà quando N = 0 (che corrisponde alla situazione in cui l'oggetto "sfiora" la pista senza applicare ad essa alcuna forza e di conseguenza anche la pista non applicherà su di esso nessuna reazione vincolare). In tale caso si avrà:

$$mg = ma = mv^2/R$$

da cui si ottiene che la velocità minima che l'oggetto deve avere in A per non staccarsi è:

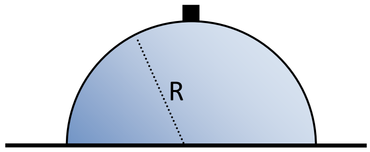
$$v = \sqrt{gR}$$

Per il principio di conservazione dell'energia meccanica, affinché l'oggetto abbia tale velocità in A è necessario che sia fatto cadere dall'altezza h_{min} che soddisfa l'equazione:

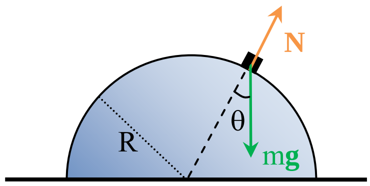
$$mgh_{min} = 2mgR + ½\, mgR \;\rightarrow\; h_{min} = 5/2\, R$$

Esercizio 2

Un corpo puntiforme è posto sulla cima di un blocco di ghiaccio di forma semisferica. Ad un certo istante il corpo comincia a scivolare verso il basso. Dimostrare che, in assenza di attrito, il corpo si stacca dal ghiaccio in un punto ad un'altezza 2R/3 dal suolo.
Come varia il risultato in presenza di attrito?



Durante il moto di scivolamento il corpo è soggetto a due forze: la forza peso e la reazione vincolare del ghiaccio. Si ha quindi:



$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \quad [1]$$

Utilizzando il sistema di coordinate intrinseco, proiettando l'equazione [1] nella direzione della normale alla traiettoria, si ottiene:

$$- N + mg\cos\theta = ma_N \quad \Rightarrow \quad - N + mg\cos\theta = mv^2/R \quad [2]$$

Nel momento in cui il corpo si stacca la reazione vincolare del ghiaccio si annulla e l'equazione [2] diventa:

$$mg\cos\theta = mv^2/R \quad \Rightarrow \quad v^2 = gR\cos\theta$$

Poiché non ci sono attriti l'energia meccanica si conserva e quindi l'energia meccanica posseduta dal corpo nell'istante in cui inizia a scivolare coincide con l'energia meccanica da esso posseduta nell'istante in cui si stacca dal blocco di ghiaccio. Di conseguenza:

$$mgR = mgh + ½\, mv^2$$

dove $h = R\cos\theta$ è l'altezza del punto in cui il corpo si stacca dal ghiaccio.

Si ha quindi:

$$mgR = mg\,h + ½\, m\,g\,h \quad \Rightarrow \quad R = 3/2\, h \quad \Rightarrow \quad h = 2/3\, R$$

In presenza di attrito l'energia meccanica non si conserva ma vale la relazione:

$$W_{nc} = E_{m,stacco} - E_{m,iniz}$$

dove W_{nc} indica il lavoro delle forze non conservative. Essendo $W_{nc} = W_{forza\ attrito} < 0$ si ha $E_{m,stacco} < E_{m,iniz}$ da cui:

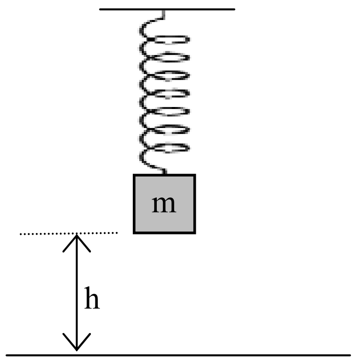
$$mgh + ½\, mv^2 < mgR \quad \Rightarrow \quad mgh + ½\, m\,g\,h < mgR \quad \Rightarrow \quad 3/2\, h < R \quad \Rightarrow \quad h < 2/3\, R$$

Il corpo si staccherà quindi dal blocco ad un'altezza inferiore rispetto al caso precedente.

Esercizio 3

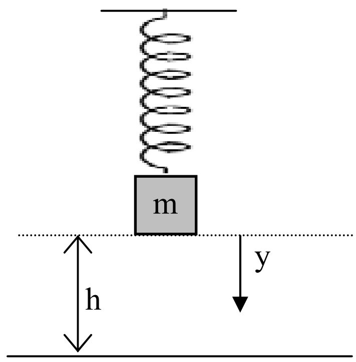
Una massa m si muove lungo la verticale, appesa ad una molla avente costante elastica k e massa trascurabile. Quando la massa si trova alla quota h dal suolo la molla non è deformata. Supponendo che il moto della massa abbia inizio a tale quota con velocità iniziale nulla, determinare:

1) la legge secondo la quale la velocità della massa m dipende dalla sua distanza dalla posizione iniziale
2) la quota minima e la quota massima raggiunte dalla massa m nel suo moto.



a) La massa m si muove sotto l'azione di due forze conservative: la forza di gravità e la forza elastica della molla. Perciò durante il moto si conserva l'energia meccanica, uguale alla somma dell'energia cinetica e delle due energie potenziali (gravitazionale ed elastica).
Inizialmente m è in quiete a quota h e la molla non risulta deformata quindi l'energia meccanica iniziale coincide con quella gravitazionale:

$$E_{tot\ iniz} = mgh$$



In un istante generico, ipotizzando che la massa sia scesa di un tratto y (coordinata che rappresenta la distanza dalla posizione iniziale), l'energia meccanica totale varrà:

$$E_{tot} = ½\ mv^2 + mg(h\text{-}y) + ½\ ky^2$$

e per il principio di conservazione dell'energia sarà $E_{tot\ iniz} = E_{tot}$ da cui

$$mgh = ½\ mv^2 + mg(h\text{-}y) + ½\ ky^2$$

da cui: $$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mg - \frac{1}{2}ky\right)y} \qquad [1]$$

b) Le quote massima e minima raggiunte durante il moto sono quelle in cui la velocità si annulla ed il moto inverte il suo verso. Si possono quindi ottenere cercando per quali valori di y la velocità v della massa si annulla. Dalla [1] si ottiene:

$y_1 = 0$ (che corrisponde alla posizione iniziale) $\rightarrow h_{max} = h$
$y_2 = 2mg/k$ $\rightarrow h_{min} = h - 2mg/k$

Esercizio 4

Un blocco di massa m = 10 kg viene fatto salire lungo un piano scabro inclinato di $\theta = 30°$ con una velocità iniziale v = 5.0 m/s. Percorre l = 2 m, si ferma e poi ritorna alla base.

1) Si calcoli la forza di attrito $\mathbf{f}_a$, supposta costante in modulo, agente sul blocco
2) Si trovi la velocità con cui il blocco ripassa per la posizione iniziale

---

1) Considerando il moto di salita e tenendo conto che è presente una forza non conservativa (la forza di attrito) si può scrivere che il lavoro delle forze non conservative, W_{nc}, (che il questo caso coincide con quello della forza di attrito) è pari alla variazione di energia meccanica totale.

$$W_{nc} = (E_{k\,fin} + E_{p\,fin}) - (E_{k\,iniz} + E_{p\,iniz}) = (0 + mgl\,\mathrm{sen}\theta) - (\tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + 0) = -27\ \mathrm{J}$$

Essendo $W_{nc} = f_a\,l\cos\pi = -f_a\,l$ si ottiene infine $f_a = 13.5$ N.

2) Anche nel moto di discesa è presente la forza di attrito e il lavoro da essa svolto è pari a quello eseguito durante il moto di salita. Riapplicando la relazione

$$W_{nc} = (E_{k\,fin} + E_{p\,fin}) - (E_{k\,iniz} + E_{p\,iniz})$$

si ottiene

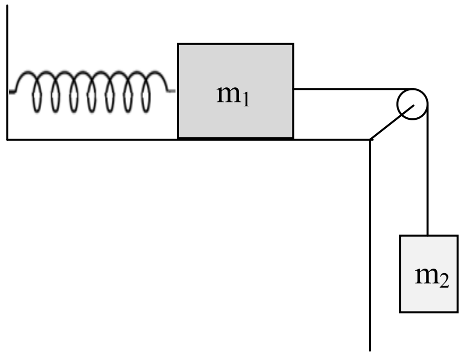
$$W_{nc} = -(\tfrac{1}{2}\,m\,v_{fin}^2 + 0) - (0 + mgl\,\mathrm{sen}\theta)$$

da cui risolvendo l'equazione rispetto a v_{fin}:

$$v_{fin} = 3.77\ \mathrm{m/s}$$

Esercizio 5

Due blocchi di massa rispettivamente $m_1 = 1$ kg e $m_2 = 0.5$ kg sono collegati da una fune di massa trascurabile che scorre su di una carrucola priva di attrito (vedi figura). Il blocco di massa m_1 poggia su un piano scabro tale che il coefficiente di attrito dinamico μ tra il blocco e il piano vale 0.3 ed è inoltre connesso ad un sostegno fisso mediante una molla. Sapendo che all'istante iniziale la molla si trova in posizione di riposo, calcolare la costante elastica della molla se la massa m_2 può scendere al massimo di un tratto h = 0.1 m prima di fermarsi.



Su questo sistema agiscono tre forze di cui due conservative (forza elastica della molla, forza gravitazionale) e una non conservativa. Pertanto, indicando con $E_{p,el}$, l'energia potenziale elastica della molla e con $E_{p,gr}$ quella potenziale gravitazionale, si ottiene che il lavoro compiuto dalla forza d'attrito W_{fa} vale:

$$W_{fa} = E_{k\ fin} + (E_{p,el} + E_{p,gr})_{fin} - [E_{k\ in} + (E_{p,el} + E_{p,gr})_{in}] \qquad [1]$$

Poiché l'energia cinetica iniziale e quella finale sono entrambe nulle e l'energia potenziale elastica iniziale è nulla, l'equazione [1] diventa:

$$W_{fa} = \int \mathbf{F_a} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F_a} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2}kh^2 - m_2 gh \qquad \Rightarrow \qquad \mu m_1 gh = m_2 gh - \frac{1}{2}kh^2$$

da cui:

$$k = \frac{2(m_2 - \mu m_1)gh}{h^2} = 2\frac{(0.5 - 0.3)\,9.8}{0.1} = 39.2 \text{ N/m}$$

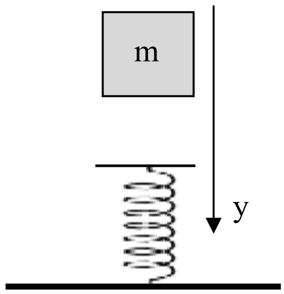
Esercizio 6

Un blocco di massa m = 250 g è lasciato cadere verticalmente su di una molla di costante elastica k = 4.5 N/cm. Il blocco colpisce la molla che si accorcia di d = 6.0 cm prima di fermarsi momentaneamente. Calcolare il lavoro compiuto, durante la fase di compressione:

a) dalla forza di gravità

b) dalla forza elastica.

Determinare inoltre la velocità del blocco un istante prima di iniziare a comprimere la molla.
Si trascurino gli attriti.



a) Il lavoro compiuto dalla forza peso durante la fase di compressione vale:

$$W_g = \int m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{y} = mg\,d\cos(0) = 0.25 \cdot 9.8 \cdot 0.06 = 0.147 \text{ J}$$

b) Il lavoro compiuto dalla forza elastica durante la fase di compressione vale:

$$W_{el} = \int \mathbf{F_{el}} \cdot d\mathbf{y} = \int -kydy = -\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{450 \cdot (0.06)^2}{2} = -0.81 \text{ J}$$

La velocità del blocco un istante prima di colpire la molla può essere ricavato dal teorema dell'energia cinetica:

$$E_{kf} - E_{ki} = \Sigma_i (W_i) = W_g + W_{el}$$

Essendo $E_{kf} = 0$, si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = -(W_g + W_{el}) \quad \rightarrow \quad v_i = \sqrt{-\frac{2(W_g + W_{el})}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.663}{0.250}} = 2.3 \text{ m/s}$$

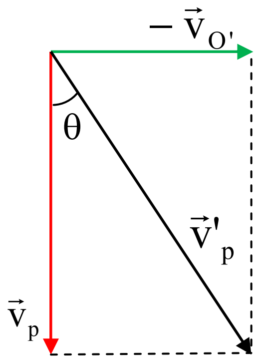
Esercizio 7

Qual è l'angolo massimo di cui può risultare inclinato, rispetto alla verticale, il vetro posteriore di una macchina che viaggia alla velocità costate v = 72 km/h per non essere bagnato dalla pioggia che cade verticalmente alla velocità v_p=10 m/s ?

Si utilizzi il teorema delle velocità relative considerando un sistema di riferimento fisso a terra (O; x, y, z) e un sistema di riferimento mobile solidale con la macchina (O'; x', y', z'):

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}_p'$$

dove $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_t$ è la velocità di trascinamento del sistema mobile rispetto al sistema fisso (in questo caso il vettore velocità della macchina). Il moto in questione è un moto di trascinamento traslatorio lungo l'asse x e l'oggetto osservato nei due sistemi di riferimento è la pioggia.



Nel sistema di riferimento solidale all'automobile:

$$\mathbf{v}_p' = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_{O'}$$

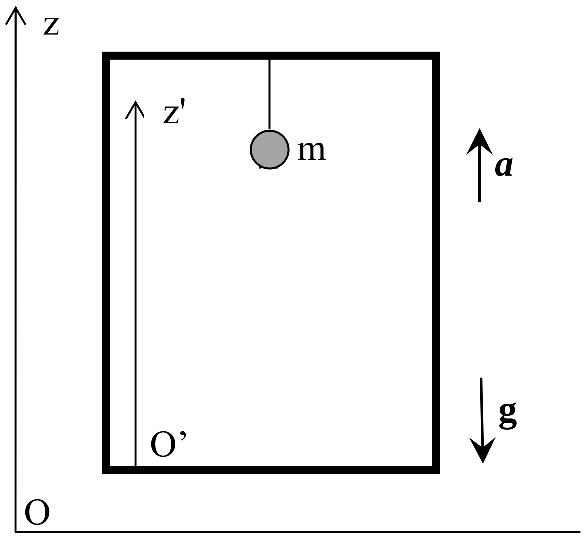
da cui: $$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{v_{o'}}{v_p} = \frac{20}{10} = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta = \mathrm{arctg}(2) = 63°$$

Se il vetro posteriore della macchina è inclinato dell'angolo θ non si bagna perché rispetto ad esso la pioggia scorre parallelamente.

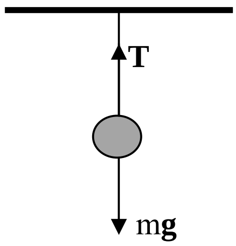
Esercizio 8

Un ascensore si muove verticalmente verso l'alto con una accelerazione a di 0.2 m/s^2, rivolta verso l'alto. Dal soffitto pende un filo di massa trascurabile a cui è attaccata una pallina di massa m = 0.5 kg.

1) Calcolare la tensione del filo durante il moto dell'ascensore
2) Se improvvisamente il filo si spezza, quanto tempo impiega la pallina a cadere sul pavimento, se la distanza dal pavimento è inizialmente h = 80 cm?



1) Rispetto ad un sistema di riferimento (O, z) inerziale e solidale a terra la pallina risulta accelerata con la stessa accelerazione $\boldsymbol{a}$ dell'ascensore e il suo moto è determinato dalla risultante delle forze reali agenti sulla pallina, ovvero la tensione del filo e la forza peso:



$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\boldsymbol{a} \qquad [1]$$

Da cui proiettando sull'asse z si ottiene: T = mg + ma = 5 N.
Dal punto di vista dell'osservatore non-inerziale solidale con l'ascensore (O', z') bisogna utilizzare il teorema delle accelerazioni relative:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t$$

dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione nel SR fisso (inerziale), $\mathbf{a}'$ è l'accelerazione nel SR mobile e $\mathbf{a}_t$ è l'accelerazione di trascinamento. In questo caso abbiamo $\mathbf{a}' = 0$ perché la pallina è in quiete rispetto all'ascensore e $\mathbf{a}_t = \boldsymbol{a}$.
Quello che vede l'osservatore nel SR mobile (non inerziale) è che, nonostante per lui la pallina sia in equilibrio, T > mg: per poter in ogni caso applicare la dinamica newtoniana (cioè per poter ancora scrivere $\Sigma\, \mathbf{F}_i' = m\, \mathbf{a}'$) deve pensare che agisca sulla pallina una forza ulteriore, rivolta verso il basso. E' una "forza apparente", che non compare nel SRI:

$$\Sigma\, \mathbf{F}_i' = \Sigma\, \mathbf{F}_{i,\text{vere}} + \Sigma\, \mathbf{F}_{i,\text{apparenti}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{app} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_t = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - m\boldsymbol{a}$$

Può allora scrivere:

$$\Sigma\, \mathbf{F}_i' = m\, \mathbf{a}'$$

$$\Sigma\, \mathbf{F}_i' = 0$$

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} - m\boldsymbol{a} = 0$$

che è evidentemente equivalente alla [1].

2) Nella seconda parte del problema conviene adottare il punto di vista dell'osservatore non-inerziale solidale con l'ascensore (O', z'). Quando la pallina si stacca dal filo si ha:

$\mathbf{a} = \mathbf{g}$
$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{a}$
da cui: $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = \mathbf{g} - \boldsymbol{a}$

proiettando sull'asse z' si ottiene: $a' = -g - a = -10$ m/s^2. Il segno meno indica che l'accelerazione **a'** è rivolta in verso opposto all'asse z', ossia verso il basso. Si noti che per l'osservatore non-inerziale solidale con l'ascensore è come se la pallina cadesse verso il fondo dell'ascensore con una accelerazione maggiore di quella di gravità.

La legge oraria per la pallina nel SR mobile è:

$$z'(t) = z'_0 + v'_0 t + \frac{1}{2} a' t^2$$

$$z'(t) = h + \frac{1}{2} a' t^2$$

Quando la pallina tocca il pavimento dell'ascensore $t = t_{caduta}$ e $z'(t_{caduta}) = 0$, da cui:

$$0 = h - \frac{1}{2}|a'| t^2_{caduta}$$

$$t_{caduta} = \sqrt{\frac{2h}{|a'|}} = 0.4 \text{ s}$$

Si può risolvere lo stesso problema dal punto di vista dell'osservatore inerziale solidale a terra. Sia $\mathbf{v}_0$ (rivolta verso l'alto) la velocità dell'ascensore nell'istante in cui si spezza il filo e quindi anche quella della pallina nello stesso istante. Negli istanti successivi la pallina seguirà il moto di caduta di un grave con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$. Proiettando sull'azze z si ottiene:

$$z_{pallina}(t) = z_{0,pallina} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{e} \quad v_{pallina}(t) = v_0 - gt$$

D'altra parte, il fondo dell'ascensore sale verso l'alto con moto uniformemente accelerato:

$$z_{fondo}(t) = z_{0,fondo} + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{e} \quad v_{fondo}(t) = v_0 + at$$

La pallina toccherà il fondo dell'ascensore quando $z_{pallina} = z_{fondo}$, nell'istante $t = t_{caduta}$

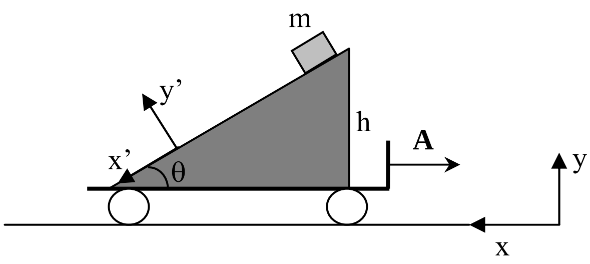
$$z_{0,pallina} + v_0 t_{caduta} - \frac{1}{2} g t^2_{caduta} = z_{0,fondo} + v_0 t_{caduta} + \frac{1}{2} a t^2_{caduta}$$

essendo $z_{0,pallina} - z_{0,fondo} = h$ si ha

$$h = \frac{1}{2} t^2_{caduta}(g + a) \qquad \Rightarrow \qquad t_{caduta} = \sqrt{\frac{2h}{(g+a)}} = 0.4 \text{ s}$$

Esercizio 9

Un carrello si muove con accelerazione costante **A** su di un piano orizzontale. Sul carrello è fissato un piano scabro, di coefficiente di attrito statico μ_s=0.7, inclinato di un angolo θ =30° rispetto al piano orizzontale. Sul piano scabro è poggiato un oggetto di massa m, inizialmente fermo rispetto al piano stesso. Si calcoli:



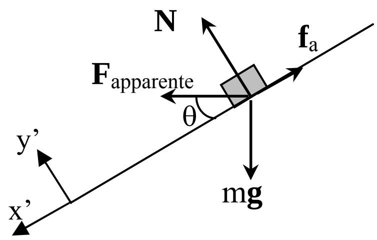
1) il massimo valore dell'accelerazione **A** del carrello per il quale l'oggetto rimane fermo rispetto al piano inclinato scabro;
2) il valore massimo dell'accelerazione **A** del carrello che permetta ancora il contatto dell'oggetto con il piano inclinato scabro.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale ancorato a terra (O, x, y) e un sistema di riferimento ancorato al piano inclinato (O', x', y'). Poiché il piano inclinato si muove assieme al carrello di moto accelerato, questo ultimo riferimento è non-inerziale.
Dal punto di vista dell'osservatore solidale al piano inclinato, il blocco m è in equilibrio per cui:

$$\sum \mathbf{F} = \sum (\mathbf{F}_{reali} + \mathbf{F}_{apparenti}) = 0$$

dove $\mathbf{F}_{reali}$ sono la reazione vincolare normale del piano, **N**, la forza di attrito radente, $\mathbf{f}_a$, e la forza peso, m**g**, mentre la forza apparente è data da $\mathbf{F}_{apparente}$ = - m**A**, essendo **A** l'accelerazione di trascinamento del sistema (O', x', y') rispetto al sistema inerziale (O, x, y). Risulta quindi:

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{f}_a - m\mathbf{A} = 0$$



che proiettata sul sistema (O', x', y') indicato in figura dà:

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta + mA\sin\theta = 0 \\ mg\sin\theta - f_a + mA\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Finché l'oggetto è in quiete, la forza di attrito statica soddisfa la relazione $f_a \le \mu_s N$, che considerando il sistema precedente, dà:

$$f_a = mg\sin\theta + mA\cos\theta \le \mu_s(mg\cos\theta - mA\sin\theta)$$

$$A \le g\frac{\mu_s\cos\theta - \sin\theta}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta} = 0.86\ m/s^2$$

Per valori superiori a 0.86 m/s^2 il blocco incomincerà a scivolare verso il basso lungo il piano inclinato.

Per calcolare il valore massimo dell'accelerazione **A** del carrello che permetta ancora il contatto dell'oggetto con il piano inclinato scabro occorre tenere conto della condizione di appoggio:

$$N \ge 0$$

da cui:

$$N = mg\cos\theta - mA\sin\theta \ge 0 \quad \Rightarrow \quad A \le \frac{g\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{g}{tg\theta} = 17\ m/s^2$$