

# GEOMETRIA

## 14 settembre 2012 – 2 ore

### Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.
- Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE: \_\_\_\_\_

<b>Q1</b>	a	b	c	d	<b>Q9</b>	a	b	c	d
<b>Q2</b>	a	b	c	d	<b>Q10</b>	a	b	c	d
<b>Q3</b>	a	b	c	d	<b>Q11</b>	a	b	c	d
<b>Q4</b>	a	b	c	d	<b>Q12</b>	a	b	c	d
<b>Q5</b>	a	b	c	d	<b>Q13</b>	a	b	c	d
<b>Q6</b>	a	b	c	d	<b>Q14</b>	a	b	c	d
<b>Q7</b>	a	b	c	d	<b>Q15</b>	a	b	c	d
<b>Q8</b>	a	b	c	d	<b>Q16</b>	a	b	c	d

---

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZI



TOTALE

## QUIZ

**Q1.** Sia data l'applicazione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  non è lineare.
- (b) L'immagine di  $f$  è contenuta nell'insieme  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 17 \}$ .
- (c)  $f$  è lineare ed il suo nucleo ha dimensione 1.
- (d)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto alla base canonica è triangolare.

**Q2.** Siano dati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^5$ :

$$v_1 = (0, 2, -1, 3, 0), \quad v_2 = (\sqrt{2}, 0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (\pi, 0, 0, e, \pi), \quad v_4 = (\sqrt{2}, 4, -1, 6, 1).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) I vettori sono linearmente indipendenti.
- (b)  $v_3$  appartiene al sottospazio generato da  $v_1$  e  $v_2$ .
- (c)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 3$ .
- (d)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 5$ .

**Q3.** Sia dato il sistema lineare  $S: AX = B$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Le soluzioni di  $S$  dipendono da un parametro libero.
- (b)  $S$  ha solo la soluzione nulla.
- (c)  $S$  ha una e una sola soluzione.
- (d) Il sistema  $S$  non ha soluzioni.

**Q4.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\det(3A) = 12$ .
- (b) Esiste  $B \in \mathbb{R}^{3,3}$  tale che  $AB = 8I$  ( $I$  denota la matrice identità).
- (c)  $\det A^2 = 2 \det(A)$ .
- (d)  $\det(A^t A) = 0$ .

**Q5.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata ad  $A$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $A$  ammette  $1 + 3i$  come autovalore.
- (b)  $q(x, y, z)$  è definita.
- (c)  $A$  ha almeno un autovalore positivo.
- (d)  $A$  ha l'autovalore 1.

**Q6.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  e si consideri l'applicazione  $f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  definita da  $f(X) = XA$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  non è lineare.
- (b)  $f$  è un endomorfismo avente matrice in  $\mathbb{R}^{3,3}$  rispetto ad una base opportuna.
- (c)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto a basi opportune è in  $\mathbb{R}^{4,4}$ .
- (d) Nessuna delle altre affermazioni è vera.

**Q7.** Nello spazio siano dati i vettori  $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$  e  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Il prodotto scalare di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.
- (b)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli.
- (c) Il prodotto vettoriale di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.
- (d) L'angolo fra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è in  $] \pi/2, \pi[$ .

**Q8.** Nello spazio sia dato il piano  $\pi$  di equazione  $2x - 3y + z + 4 = 0$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\pi$  contiene la retta

$$r : (x, y, z) = (t, t, t - 1).$$

- (b)  $\pi$  passa per il punto  $A$  di coordinate  $(2, -3, 1)$ .
- (c)  $\pi$  interseca il piano  $z = 0$  in uno ed un solo punto.
- (d)  $\pi$  è ortogonale alla retta

$$s : (x, y, z) = (2t, \sqrt{5} - 3t, 100 + t).$$

**Q9.** Sia data la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = xe^{xy}.$$

Sia poi  $\mathcal{S} = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$  il suo grafico.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo al piano coordinato  $xy$ .
- (b) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo all'asse delle  $z$ .
- (c)  $(0, 0)$  è un punto stazionario di  $f$ .
- (d)  $f$  non ammette punti stazionari.

**Q10.** Sia  $V$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  con  $\dim(V) = 2$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V + W) = 3$ .
- (b) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$ , di dimensione 3, tale che  $V \cap W = \{ (0, 0, 0, 0) \}$ .
- (c) Per ogni sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 si ha che  $V + W = \mathbb{R}^4$ .
- (d) Non esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V \cap W) = 1$ .

**Q11.** Sia  $D$  il dominio della funzione definita da

$$f(u, v) = \left( u^2, 2uv, \frac{u}{v} \right).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $D$  è aperto.
- (b) La matrice jacobiana di  $f$  in un punto  $P \in D$  è in  $\mathbb{R}^{2,3}$ .
- (c) Esiste  $P \in D$  tale che la matrice jacobiana di  $f$  in  $P$  sia nulla.
- (d) Non è possibile calcolare la matrice jacobiana di  $f$ , perché  $f$  non è lineare.

**Q12.** Nello spazio sia data la curva  $\gamma$  di equazioni

$$(x, y, z) = (\cos t, \cos t, 2 + \sin t)$$

$$0 < t < 2\pi.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\gamma$  giace su una sfera avente centro in  $(0, 0, 0)$ .
- (b)  $\gamma$  non è una curva piana.
- (c)  $\gamma$  ammette retta tangente in ogni suo punto.
- (d)  $\gamma$  ha punti in comune con il piano coordinato  $xy$ .

**Q13.** Sia data la funzione  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-xy}}$  e sia  $D$  il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $D$  è aperto.
- (b)  $D$  è chiuso.
- (c) La frontiera di  $D$  è vuota.
- (d)  $D$  è limitato.

**Q14.** Nello spazio sia  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  e sia  $\mathcal{B} = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k})$  una base dello spazio dei vettori applicati.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(3, 0, -1)$ .
- (b) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(3, 2, -1)$ .
- (c) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  non si possono determinare.
- (d) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(0, 0, 0)$ .

**Q15.** Nello spazio sia data la quadrica  $\mathcal{Q}$  di equazione

$$z = x^2 - 2y^2.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\mathcal{Q}$  è un iperboloide.
- (b)  $\mathcal{Q}$  è un paraboloide.
- (c) L'intersezione di  $\mathcal{Q}$  con il piano  $x = 1$  è degenerare.
- (d)  $\mathcal{Q}$  è un cono.

**Q16.** Nello spazio sia data la sfera  $\mathcal{S}$  di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La retta  $r$  di equazione  $(x, y, z) = (t, 0, t)$  passa per il centro di  $\mathcal{S}$ .
- (b)  $(1, -1, 0) \in \mathcal{S}$ .
- (c) La retta  $s$  di equazione  $(x, y, z) = (0, t, t)$  interseca  $\mathcal{S}$ .
- (d)  $\mathcal{S}$  ha raggio 2.

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , sia  $f_h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$M_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare  $\dim(\ker(f_h))$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Posto  $h = -2$ , determinare una base di  $\ker(f_{-2})$ .
- (iii) Posto  $h = -2$ , determinare una base di  $\text{Im}(f_{-2})$ : è vero o falso che  $(1, 1, 0) \notin \text{Im}(f_{-2})$ ?
- (iv) Spiegare perché  $\mathcal{B} = ((1, 2, 5), (3, -1, 1))$  è base di  $\text{Im}(f_{-2})$ .
- (v) Completare  $\mathcal{B}$  a una base di  $\mathbb{R}^3$ .

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

## ESERCIZI

**Esercizio 2.** Nello spazio sia data la superficie  $\mathcal{S}$  di equazioni parametriche

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = v + 1 + \cos u \\ y = -1 - v + 2 \sin u \\ z = 3v. \end{cases}$$

- (i) Verificare che il punto  $P$  di coordinate  $(4, -3, 6)$  appartiene a  $\mathcal{S}$ .
- (ii) Calcolare l'equazione del piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto corrispondente a  $u = 0$  e  $v = 2$ .
- (iii) Nel piano  $xy$  sia data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione

$$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 :$$

calcolare un'equazione canonica di  $\mathcal{C}$ .

- (iv) Verificare che  $\mathcal{C}$  è l'intersezione del piano  $xy$  con  $\mathcal{S}$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*



*Svolgimento dell'esercizio 2:*



# GEOMETRIA

## 14 settembre 2012 – 2 ore

### Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.
- Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE: \_\_\_\_\_

<b>Q1</b>	a	b	c	d	<b>Q9</b>	a	b	c	d
<b>Q2</b>	a	b	c	d	<b>Q10</b>	a	b	c	d
<b>Q3</b>	a	b	c	d	<b>Q11</b>	a	b	c	d
<b>Q4</b>	a	b	c	d	<b>Q12</b>	a	b	c	d
<b>Q5</b>	a	b	c	d	<b>Q13</b>	a	b	c	d
<b>Q6</b>	a	b	c	d	<b>Q14</b>	a	b	c	d
<b>Q7</b>	a	b	c	d	<b>Q15</b>	a	b	c	d
<b>Q8</b>	a	b	c	d	<b>Q16</b>	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZI



TOTALE

## QUIZ

**Q1.** Nello spazio sia data la sfera  $\mathcal{S}$  di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2z + 1 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La retta  $r$  di equazione  $(x, y, z) = (t, 0, t)$  passa per il centro di  $\mathcal{S}$ .
- (b)  $(1, -1, 0) \in \mathcal{S}$ .
- (c)  $\mathcal{S}$  ha raggio 2.
- (d) La retta  $s$  di equazione  $(x, y, z) = (0, t, t)$  interseca  $\mathcal{S}$ .

**Q2.** Nello spazio sia data la quadrica  $\mathcal{Q}$  di equazione

$$z^2 = x^2 - 2y^2.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\mathcal{Q}$  è un iperboloide.
- (b)  $\mathcal{Q}$  è un paraboloide.
- (c) L'intersezione di  $\mathcal{Q}$  con il piano  $x = 1$  è degenera.
- (d)  $\mathcal{Q}$  è un cono.

**Q3.** Sia data la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = xe^{xy}.$$

Sia poi  $\mathcal{S} = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$  il suo grafico.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  non ammette punti stazionari.
- (b) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo all'asse delle  $z$ .
- (c)  $(0, 0)$  è un punto stazionario di  $f$ .
- (d) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo al piano coordinato  $xy$ .

**Q4.** Sia  $V$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  con  $\dim(V) = 2$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Per ogni sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 si ha che  $V + W = \mathbb{R}^4$ .
- (b) Non esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V + W) = 3$ .
- (c) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V \cap W) = 1$ .
- (d) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$ , di dimensione 3, tale che  $V \cap W = \{ (0, 0, 0, 0) \}$ .

**Q5.** Sia data la funzione  $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$  e sia  $D$  il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $D$  è aperto.
- (b)  $D$  è chiuso.
- (c) La frontiera di  $D$  è vuota.
- (d)  $D$  è limitato.

**Q6.** Sia  $D$  il dominio della funzione definita da

$$f(u, v) = \left( u^2, 2uv, \frac{u}{v} \right).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $D$  è chiuso.
- (b) Esiste  $P \in D$  tale che la matrice jacobiana di  $f$  in  $P$  sia nulla.
- (c) Non è possibile calcolare la matrice jacobiana di  $f$ , perché  $f$  non è lineare.
- (d) La matrice jacobiana di  $f$  in un punto  $P \in D$  è in  $\mathbb{R}^{3,2}$ .

**Q7.** Nello spazio sia  $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  e sia  $\mathcal{B} = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k})$  una base dello spazio dei vettori applicati.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(5, 2, 1)$ .
- (b) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  non si possono determinare.
- (c) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(0, 0, 0)$ .
- (d) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(3, 2, -1)$ .

**Q8.** Nello spazio sia data la curva  $\gamma$  di equazioni

$$(x, y, z) = (2 + \sin t, \cos t, \cos t)$$

$$0 < t < 2\pi.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\gamma$  ammette retta tangente in ogni suo punto.
- (b)  $\gamma$  ha punti in comune con il piano coordinato  $yz$ .
- (c)  $\gamma$  non è una curva piana.
- (d)  $\gamma$  giace su una sfera avente centro in  $(0, 0, 0)$ .

**Q9.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  e si consideri l'applicazione  $f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  definita da  $f(X) = XA$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto a basi opportune è in  $\mathbb{R}^{4,4}$ .
- (b)  $f$  non è lineare.
- (c) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
- (d)  $f$  è un endomorfismo avente matrice in  $\mathbb{R}^{3,3}$  rispetto ad una base opportuna.

**Q10.** Sia data l'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  è lineare ed il suo nucleo ha dimensione 1.
- (b)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto alla base canonica è triangolare.
- (c) L'immagine di  $f$  è contenuta nell'insieme  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 17 \}$ .
- (d)  $f$  non è lineare.

**Q11.** Nello spazio sia dato il piano  $\pi$  di equazione  $2x - 3y + z + 1 = 0$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\pi$  interseca il piano  $z = 0$  in uno ed un solo punto.
- (b)  $\pi$  contiene la retta

$$r : (x, y, z) = (t, t, t - 1).$$

- (c)  $\pi$  passa per il punto  $A$  di coordinate  $(2, -3, 1)$ .
- (d)  $\pi$  è ortogonale alla retta

$$s : (x, y, z) = (2t, \sqrt{5} + 3t, 100 + t).$$

**Q12.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata ad  $A$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $A$  ha almeno un autovalore negativo.
- (b)  $A$  ha l'autovalore 2.
- (c)  $q(x, y, z)$  è definita.
- (d)  $A$  ammette  $-2 + i$  come autovalore.

**Q13.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\det(A^t A) = 0$ .
- (b) Esiste  $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ ,  $B \neq 0$ , tale che  $AB = 0$  (0 denota la matrice nulla).
- (c)  $\det(3A) = 12$ .
- (d)  $\det A^2 = 4 \det(A)$ .

**Q14.** Sia dato il sistema lineare  $S : AX = B$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Il sistema  $S$  non ha soluzioni.
- (b)  $S$  ha una e una sola soluzione.
- (c)  $S$  ha solo la soluzione nulla.
- (d) Le soluzioni di  $S$  dipendono da un parametro libero.

**Q15.** Siano dati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^5$ :

$$v_1 = (0, 2, -1, 3, 0), \quad v_2 = (\sqrt{2}, 0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (\pi, 0, 0, e, \pi), \quad v_4 = (\sqrt{2}, 4, -1, 6, 1).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 5$ .
- (b)  $v_3$  appartiene al sottospazio generato da  $v_1$  e  $v_2$ .
- (c) I vettori sono linearmente indipendenti.
- (d)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 3$ .

**Q16.** Nello spazio siano dati i vettori  $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$  e  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Il prodotto scalare di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.
- (b) Il prodotto vettoriale di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.
- (c)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli.
- (d) L'angolo fra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è in  $] \pi/2, \pi[$ .

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Nello spazio sia data la superficie  $\mathcal{S}$  di equazioni parametriche

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = -v + 1 - 2 \cos u \\ y = 1 + v + \sin u \\ z = 2v. \end{cases}$$

- (i) Verificare che il punto  $P$  di coordinate  $(-4, 4, 6)$  appartiene a  $\mathcal{S}$ .
- (ii) Calcolare l'equazione del piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto corrispondente a  $u = 0$  e  $v = 3$ .
- (iii) Nel piano  $xy$  sia data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0 :$$

calcolare un'equazione canonica di  $\mathcal{C}$ .

- (iv) Verificare che  $\mathcal{C}$  è l'intersezione del piano  $xy$  con  $\mathcal{S}$ .

*Svolgimento dell'esercizio 1:*



*Svolgimento dell'esercizio 1:*

## ESERCIZI

**Esercizio 2.** Per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , sia  $f_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & k \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare  $\dim(\ker(f_k))$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Posto  $k = 2$ , determinare una base di  $\ker(f_2)$ .
- (iii) Posto  $k = 2$ , determinare una base di  $\text{Im}(f_2)$ : è vero o falso che  $(1, 1, 0) \notin \text{Im}(f_2)$ ?
- (iv) Spiegare perché  $\mathcal{B} = ((2, 1, 4), (-1, 3, 5))$  è base di  $\text{Im}(f_2)$ .
- (v) Completare  $\mathcal{B}$  a una base di  $\mathbb{R}^3$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

*Svolgimento dell'esercizio 2:*



# GEOMETRIA

## 14 settembre 2012 – 2 ore

### Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.
- Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE: \_\_\_\_\_

<p><b>Q1</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q2</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q3</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q4</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q5</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q6</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q7</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q8</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p>	<p><b>Q9</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q10</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q11</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q12</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q13</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q14</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q15</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p> <p><b>Q16</b> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>a</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>b</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>c</div></table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 40px; height: 30px;"><div>d</div></table></p>
---	--

Non scrivere in questo spazio

QUIZ



ESERCIZI







TOTALE

## QUIZ

**Q1.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\det(3A) = 12$ .
- (b)  $\det(A^t A) = 0$ .
- (c) Esiste  $B \in \mathbb{R}^{3,3}$  tale che  $AB = 8I$  ( $I$  denota la matrice identità).
- (d)  $\det A^2 = 2 \det(A)$ .

**Q2.** Sia data la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = xe^{xy}.$$

Sia poi  $\mathcal{S} = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$  il suo grafico.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $(0, 0)$  è un punto stazionario di  $f$ .
- (b)  $f$  non ammette punti stazionari.
- (c) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo al piano coordinato  $xy$ .
- (d) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo all'asse delle  $z$ .

**Q3.** Sia  $D$  il dominio della funzione definita da

$$f(u, v) = \left( u^2, 2uv, \frac{u}{v} \right).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La matrice jacobiana di  $f$  in un punto  $P \in D$  è in  $\mathbb{R}^{2,3}$ .
- (b)  $D$  è aperto.
- (c) Non è possibile calcolare la matrice jacobiana di  $f$ , perché  $f$  non è lineare.
- (d) Esiste  $P \in D$  tale che la matrice jacobiana di  $f$  in  $P$  sia nulla.

**Q4.** Sia dato il sistema lineare  $S: AX = B$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Il sistema  $S$  non ha soluzioni.
- (b)  $S$  ha solo la soluzione nulla.
- (c) Le soluzioni di  $S$  dipendono da un parametro libero.
- (d)  $S$  ha una e una sola soluzione.

**Q5.** Sia  $V$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  con  $\dim(V) = 2$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Per ogni sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 si ha che  $V + W = \mathbb{R}^4$ .
- (b) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$ , di dimensione 3, tale che  $V \cap W = \{ (0, 0, 0, 0) \}$ .
- (c) Non esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V \cap W) = 1$ .
- (d) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V + W) = 3$ .

**Q6.** Nello spazio sia data la quadrica  $\mathcal{Q}$  di equazione

$$z = x^2 - 2y^2.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\mathcal{Q}$  è un paraboloide.
- (b) L'intersezione di  $\mathcal{Q}$  con il piano  $x = 1$  è degenera.
- (c)  $\mathcal{Q}$  è un iperboloide.
- (d)  $\mathcal{Q}$  è un cono.

**Q7.** Sia data la funzione  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-xy}}$  e sia  $D$  il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La frontiera di  $D$  è vuota.
- (b)  $D$  è limitato.
- (c)  $D$  è aperto.
- (d)  $D$  è chiuso.

**Q8.** Nello spazio sia data la sfera  $\mathcal{S}$  di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La retta  $s$  di equazione  $(x, y, z) = (0, t, t)$  interseca  $\mathcal{S}$ .
- (b)  $\mathcal{S}$  ha raggio 2.
- (c) La retta  $r$  di equazione  $(x, y, z) = (t, 0, t)$  passa per il centro di  $\mathcal{S}$ .
- (d)  $(1, -1, 0) \in \mathcal{S}$ .

**Q9.** Nello spazio sia dato il piano  $\pi$  di equazione  $2x - 3y + z + 4 = 0$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $\pi$  contiene la retta

$$r : (x, y, z) = (t, t, t - 1).$$

(b)  $\pi$  interseca il piano  $z = 0$  in uno ed un solo punto.

(c)  $\pi$  è ortogonale alla retta

$$s : (x, y, z) = (2t, \sqrt{5} - 3t, 100 + t).$$

(d)  $\pi$  passa per il punto  $A$  di coordinate  $(2, -3, 1)$ .

**Q10.** Siano dati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^5$ :

$$v_1 = (0, 2, -1, 3, 0), \quad v_2 = (\sqrt{2}, 0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (\pi, 0, 0, e, \pi), \quad v_4 = (\sqrt{2}, 4, -1, 6, 1).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 5$ .

(b)  $v_3$  appartiene al sottospazio generato da  $v_1$  e  $v_2$ .

(c)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 3$ .

(d) I vettori sono linearmente indipendenti.

**Q11.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia

$$q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata ad  $A$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $A$  ammette  $1 + 3i$  come autovalore.

(b)  $A$  ha l'autovalore 1.

(c)  $q(x, y, z)$  è definita.

(d)  $A$  ha almeno un autovalore positivo.

**Q12.** Nello spazio sia data la curva  $\gamma$  di equazioni

$$(x, y, z) = (\cos t, \cos t, 2 + \sin t)$$

$$0 < t < 2\pi.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $\gamma$  non è una curva piana.

(b)  $\gamma$  ammette retta tangente in ogni suo punto.

(c)  $\gamma$  giace su una sfera avente centro in  $(0, 0, 0)$ .

(d)  $\gamma$  ha punti in comune con il piano coordinato  $xy$ .



**Q13.** Nello spazio sia  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  e sia  $\mathcal{B} = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k})$  una base dello spazio dei vettori applicati.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(3, 2, -1)$ .
- (b) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(3, 0, -1)$ .
- (c) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(0, 0, 0)$ .
- (d) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  non si possono determinare.

**Q14.** Sia data l'applicazione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  è lineare ed il suo nucleo ha dimensione 1.
- (b) L'immagine di  $f$  è contenuta nell'insieme  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 17 \}$ .
- (c)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto alla base canonica è triangolare.
- (d)  $f$  non è lineare.

**Q15.** Nello spazio siano dati i vettori  $\vec{u} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$  e  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) L'angolo fra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è in  $] \pi/2, \pi[$ .
- (b) Il prodotto scalare di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.
- (c)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli.
- (d) Il prodotto vettoriale di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.

**Q16.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  e si consideri l'applicazione  $f: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  definita da  $f(X) = XA$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  è un endomorfismo avente matrice in  $\mathbb{R}^{3,3}$  rispetto ad una base opportuna.
- (b)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto a basi opportune è in  $\mathbb{R}^{4,4}$ .
- (c)  $f$  non è lineare.
- (d) Nessuna delle altre affermazioni è vera.

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Nello spazio sia data la superficie  $\mathcal{S}$  di equazioni parametriche

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = v + 1 + \cos u \\ y = -1 - v + 2 \sin u \\ z = 3v. \end{cases}$$

- (i) Verificare che il punto  $P$  di coordinate  $(4, -3, 6)$  appartiene a  $\mathcal{S}$ .
- (ii) Calcolare l'equazione del piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto corrispondente a  $u = 0$  e  $v = 2$ .
- (iii) Nel piano  $xy$  sia data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione

$$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 :$$

calcolare un'equazione canonica di  $\mathcal{C}$ .

- (iv) Verificare che  $\mathcal{C}$  è l'intersezione del piano  $xy$  con  $\mathcal{S}$ .

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

## ESERCIZI

**Esercizio 2.** Per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , sia  $f_h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$M_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare  $\dim(\ker(f_h))$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Posto  $h = -2$ , determinare una base di  $\ker(f_{-2})$ .
- (iii) Posto  $h = -2$ , determinare una base di  $\text{Im}(f_{-2})$ : è vero o falso che  $(1, 1, 0) \notin \text{Im}(f_{-2})$ ?
- (iv) Spiegare perché  $\mathcal{B} = ((1, 2, 5), (3, -1, 1))$  è base di  $\text{Im}(f_{-2})$ .
- (v) Completare  $\mathcal{B}$  a una base di  $\mathbb{R}^3$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

*Svolgimento dell'esercizio 2:*



# GEOMETRIA

## 14 settembre 2012 – 2 ore

### Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.
- Per la brutta utilizzare i fogli distribuiti dal docente.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE: \_\_\_\_\_

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%; text-align: right;"><b>Q1</b></td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q2</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q3</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q4</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q5</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q6</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q7</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q8</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> </table>	<b>Q1</b>	a	b	c	d	<b>Q2</b>	a	b	c	d	<b>Q3</b>	a	b	c	d	<b>Q4</b>	a	b	c	d	<b>Q5</b>	a	b	c	d	<b>Q6</b>	a	b	c	d	<b>Q7</b>	a	b	c	d	<b>Q8</b>	a	b	c	d	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 10%; text-align: right;"><b>Q9</b></td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="width: 20%; border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q10</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q11</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q12</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q13</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q14</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q15</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> <tr><td style="text-align: right;"><b>Q16</b></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">a</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">b</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">c</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">d</td></tr> </table>	<b>Q9</b>	a	b	c	d	<b>Q10</b>	a	b	c	d	<b>Q11</b>	a	b	c	d	<b>Q12</b>	a	b	c	d	<b>Q13</b>	a	b	c	d	<b>Q14</b>	a	b	c	d	<b>Q15</b>	a	b	c	d	<b>Q16</b>	a	b	c	d
<b>Q1</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q2</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q3</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q4</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q5</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q6</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q7</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q8</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q9</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q10</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q11</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q12</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q13</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q14</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q15</b>	a	b	c	d																																																																													
<b>Q16</b>	a	b	c	d																																																																													

---

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZI



TOTALE

## QUIZ

**Q1.** Nello spazio sia dato il piano  $\pi$  di equazione  $2x - 3y + z + 1 = 0$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $\pi$  contiene la retta

$$r : (x, y, z) = (t, t, t - 1).$$

(b)  $\pi$  passa per il punto  $A$  di coordinate  $(2, -3, 1)$ .

(c)  $\pi$  è ortogonale alla retta

$$s : (x, y, z) = (2t, \sqrt{5} + 3t, 100 + t).$$

(d)  $\pi$  interseca il piano  $z = 0$  in uno ed un solo punto.

**Q2.** ia dato il sistema lineare  $S : AX = B$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $S$  ha una e una sola soluzione.

(b) Le soluzioni di  $S$  dipendono da un parametro libero.

(c) Il sistema  $S$  non ha soluzioni.

(d)  $S$  ha solo la soluzione nulla.

**Q3.** Sia data l'applicazione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a)  $f$  non è lineare.

(b) L'immagine di  $f$  è contenuta nell'insieme  $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 17 \}$ .

(c)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto alla base canonica è triangolare.

(d)  $f$  è lineare ed il suo nucleo ha dimensione 1.

**Q4.** Siano dati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^5$ :

$$v_1 = (0, 2, -1, 3, 0), \quad v_2 = (\sqrt{2}, 0, 1, 0, 1), \quad v_3 = (\pi, 0, 0, e, \pi), \quad v_4 = (\sqrt{2}, 4, -1, 6, 1).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I vettori sono linearmente indipendenti.

(b)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 5$ .

(c)  $v_3$  appartiene al sottospazio generato da  $v_1$  e  $v_2$ .

(d)  $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 3$ .



**Q5.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\det A^2 = 4 \det(A)$ .
- (b)  $\det(3A) = 12$ .
- (c) Esiste  $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ ,  $B \neq 0$ , tale che  $AB = 0$  (0 denota la matrice nulla).
- (d)  $\det(A^t A) = 0$ .

**Q6.** Nello spazio siano dati i vettori  $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$  e  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli.
- (b) L'angolo fra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è in  $] \pi/2, \pi[$ .
- (c) Il prodotto vettoriale di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.
- (d) Il prodotto scalare di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è nullo.

**Q7.** Nello spazio sia data la curva  $\gamma$  di equazioni

$$(x, y, z) = (2 + \sin t, \cos t, \cos t)$$

$$0 < t < 2\pi.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\gamma$  giace su una sfera avente centro in  $(0, 0, 0)$ .
- (b)  $\gamma$  ammette retta tangente in ogni suo punto.
- (c)  $\gamma$  ha punti in comune con il piano coordinato  $yz$ .
- (d)  $\gamma$  non è una curva piana.

**Q8.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma quadratica associata ad  $A$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $q(x, y, z)$  è definita.
- (b)  $A$  ha almeno un autovalore negativo.
- (c)  $A$  ammette  $-2 + i$  come autovalore.
- (d)  $A$  ha l'autovalore 2.

**Q9.** Sia  $V$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  con  $\dim(V) = 2$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Non esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V + W) = 3$ .
- (b) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 tale che  $\dim(V \cap W) = 1$ .
- (c) Per ogni sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$  di dimensione 2 si ha che  $V + W = \mathbb{R}^4$ .
- (d) Esiste un sottospazio  $W \subseteq \mathbb{R}^4$ , di dimensione 3, tale che  $V \cap W = \{ (0, 0, 0, 0) \}$ .

**Q10.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  e si consideri l'applicazione  $f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  definita da  $f(X) = XA$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $f$  non è lineare.
- (b)  $f$  è un endomorfismo avente matrice in  $\mathbb{R}^{3,3}$  rispetto ad una base opportuna.
- (c) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
- (d)  $f$  è lineare e la sua matrice rispetto a basi opportune è in  $\mathbb{R}^{4,4}$ .

**Q11.** Sia  $D$  il dominio della funzione definita da

$$f(u, v) = \left( u^2, 2uv, \frac{u}{v} \right).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Esiste  $P \in D$  tale che la matrice jacobiana di  $f$  in  $P$  sia nulla.
- (b) Non è possibile calcolare la matrice jacobiana di  $f$ , perché  $f$  non è lineare.
- (c) La matrice jacobiana di  $f$  in un punto  $P \in D$  è in  $\mathbb{R}^{3,2}$ .
- (d)  $D$  è chiuso.

**Q12.** Nello spazio sia data la sfera  $\mathcal{S}$  di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2z + 1 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\mathcal{S}$  ha raggio 2.
- (b) La retta  $s$  di equazione  $(x, y, z) = (0, t, t)$  interseca  $\mathcal{S}$ .
- (c) La retta  $r$  di equazione  $(x, y, z) = (t, 0, t)$  passa per il centro di  $\mathcal{S}$ .
- (d)  $(1, -1, 0) \in \mathcal{S}$ .

**Q13.** Sia data la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = xe^{xy}.$$

Sia poi  $\mathcal{S} = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$  il suo grafico.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $(0, 0)$  è un punto stazionario di  $f$ .
- (b) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo al piano coordinato  $xy$ .
- (c)  $f$  non ammette punti stazionari.
- (d) Il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $(0, 0, 0)$  è parallelo all'asse delle  $z$ .

**Q14.** Sia data la funzione  $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$  e sia  $D$  il suo dominio.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La frontiera di  $D$  è vuota.
- (b)  $D$  è limitato.
- (c)  $D$  è aperto.
- (d)  $D$  è chiuso.

**Q15.** Nello spazio sia data la quadrica  $\mathcal{Q}$  di equazione

$$z^2 = x^2 - 2y^2.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\mathcal{Q}$  è un iperboloide.
- (b) L'intersezione di  $\mathcal{Q}$  con il piano  $x = 1$  è degenera.
- (c)  $\mathcal{Q}$  è un cono.
- (d)  $\mathcal{Q}$  è un paraboloide.

**Q16.** Nello spazio sia  $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  e sia  $\mathcal{B} = (\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k})$  una base dello spazio dei vettori applicati.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(0, 0, 0)$ .
- (b) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  non si possono determinare.
- (c) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(3, 2, -1)$ .
- (d) Le componenti di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  sono  $(5, 2, 1)$ .

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , sia  $f_k: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & k \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare  $\dim(\ker(f_k))$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Posto  $k = 2$ , determinare una base di  $\ker(f_2)$ .
- (iii) Posto  $k = 2$ , determinare una base di  $\text{Im}(f_2)$ : è vero o falso che  $(1, 1, 0) \notin \text{Im}(f_2)$ ?
- (iv) Spiegare perché  $\mathcal{B} = ((2, 1, 4), (-1, 3, 5))$  è base di  $\text{Im}(f_2)$ .
- (v) Completare  $\mathcal{B}$  a una base di  $\mathbb{R}^3$ .

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

## ESERCIZI

**Esercizio 2.** Nello spazio sia data la superficie  $\mathcal{S}$  di equazioni parametriche

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = -v + 1 - 2 \cos u \\ y = 1 + v + \sin u \\ z = 2v. \end{cases}$$

- (i) Verificare che il punto  $P$  di coordinate  $(-4, 4, 6)$  appartiene a  $\mathcal{S}$ .
- (ii) Calcolare l'equazione del piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto corrispondente a  $u = 0$  e  $v = 3$ .
- (iii) Nel piano  $xy$  sia data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0 :$$

calcolare un'equazione canonica di  $\mathcal{C}$ .

- (iv) Verificare che  $\mathcal{C}$  è l'intersezione del piano  $xy$  con  $\mathcal{S}$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

