SPAZI VETTORIALI.

ESERCIZIO 1

1. Mostrare che lo spazio dei polinomi è uno spazio vettoriale.
2. Mostrare che l'insieme dei polinomi di grado 3 (rispettiv. ≤ 3) non è (rispett. è) un sottospazio vettoriale.

ESERCIZIO 2 Mostrare che le matrici triangolari superiori di ordine 3 formano un sottospazio di $\mathbb{R}^{3,3}$.

ESERCIZIO 3 Dimostrare che l'intersezione di due sottospazi è un sottospazio. (Costruire un esempio con l'intersezioni di piani per l'origine e uno con l'intersezione delle matrici triangolari inferiori con quelle superiori (di ordine 3)).

Osservazione. Ripassare la definizione di combinazione lineare di vettori e mostrare che $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \mathcal{L}(\underline{v}_1) + \cdots + \mathcal{L}(\underline{v}_k)$.

Osservazione. Negli esercizi sono utili i seguenti fatti (con la convenzione che, scrivere i vettori all'interno di una matrice, significa mettere per riga le loro componenti rispetto ad una base):

1. $\overrightarrow{v}$ è lin. dipendente $\Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
2. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2} = \alpha \overrightarrow{v_1}$ (o viceversa) $\Leftrightarrow rk \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \end{bmatrix} \leq 1$;
3. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ sono lin. dipendenti $\Leftrightarrow \overrightarrow{v_3} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} \Leftrightarrow rk \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_3} \end{bmatrix} \leq 2$;

ESERCIZIO 4 Sia $V = \mathcal{L}((1, 2, -1), (2, 0, 3)) \subseteq \mathbb{R}^3$.

1. Descrivere geometricamente V, usando l'identificazione di $\mathbb{R}^3$ con i punti dello spazio ordinario (fissato un sistema di riferimento).
2. Verificare se i vettori $(1, 0, 0), (0, 4, -5) \in V$. (*Con la condizione sui ranghi scritta prima*).
3. Per quali $h \in \mathbb{R}$ si ha $(h, 1, 0) \in V$?

4. Trovare la scrittura implicita (cioè le equazioni) di V.

ESERCIZIO 5 Ripetere l'esercizio precedente con $V = \mathcal{L}((0, 8, -10)) \subseteq \mathbb{R}^3$ e $W = \mathcal{L}((1, 2, 1, 0), (3, 1, 1, 1)) \subseteq R^4$.

ESERCIZIO 6 Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi

$$W_1 = \begin{cases} x + y - z & = & 0 \\ 2x + z & = & 0 \end{cases} \qquad W_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Calcolare i generatori di W_1 e W_2.
2. Calcolare le equazioni e i generatori di $W_1 \cap W_2$.
3. Calcolare i generatori e le equazioni di $W_1 + W_2$.

ESERCIZIO 7 Siano dati i vettori $\underline{v}_1 = (2, -1, 1), \underline{v}_2 = (4, -2, 2), \underline{v}_3 = (1, 1, 0), \underline{v}_4 = (0, -3, 1)$, e gli scalari $a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = -2$ e $a_4 = -1$.

1. Calcolare $\sum a_i \underline{v_i}$ e dedurre che sono linearmente dipendenti.
2. Scrivere lo spazio V da essi generato con il minimo numero di generatori.
3. Verificare se $(4, 1, 1) \in V$.
4. Scrivere implicitamente V.

Osservazione. Ricordarsi la definizione di base, la costruzione della base a partire da un sistema di generatori (sia con il metodo degli scarti successivi sia per riduzione) e la definizione di dimensione. In particolare ricordarsi che:

1. $\mathrm{dim R^n = n}$.
2. Se $V \subseteq W \Rightarrow \mathrm{dimV} \leq \mathrm{dimW}$ e vale l'uguale se e solo se $V = W$.

ESERCIZIO 8 In $\mathbb{R}^4$ siano dati i sottospazi $V = \mathcal{L}((1, 2, 0, -1), (2, 1, 1, 0), (0, -3, 1, 2))$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + z + 2t = 0\}$.

1. Determinare la dimensione e una base per V e W.
2. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{v} = (k, 0, 2, 1)$ appartiene a V e per quali k appartiene a W.

3. Per ciascuno di tali k estendere $\underline{v}$ ad una base di V e W, rispettivamente.

ESERCIZIO 9 In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, 1), \underline{v}_2 = (1, 1, 2), \underline{v}_1 = (1, 2, 3)$ e $\underline{v}_4 = (-1, 2, 1)$.

1. Dire perchè sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra essi.
2. Determinare una base dello spazio da essi generato e dire se, in tale sottospazio, c'è un vettore non nullo avente la seconda e la terza componente uguale.

ESERCIZIO 10 Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$, $V = \mathcal{L}((1, -2, 0, 0), (2, -2, 1, 0), (-1, 0, -1, 0))$ e $W = \{(x, y, z, t) \in mathbbR^4 \mid x - y + 2z - 2t = x - 2y = 0, \}$.

1. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ si ha $(1, -4, k, 0) \in V$ e per quale $h \in \mathbb{R}$ si ha $(4, h, -1, 0) \in W$.
2. Calcolare le basi di V e W.
3. Calcolare base e dimensione di $V \cap W$.
4. Calcolare base e dimensione di $V + W$.

Osservazione. Per risolvere i prossimi esercizi, ricordarsi la formula di Grassmann

$$\mathrm{dimV + W = dimV + dimW - dimV \cap W.}$$

ESERCIZIO 11 In $\mathbb{R}^5$ si considerino i sottospazi $V = \{2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\}$ e $W = \{x_3 + x_4 = 0\}$, trovare $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $\underline{v} \in W \cap V$ e un vettore $\underline{w} \neq V \cup W$.

Come $\underline{w}$ si può scegliere un vettore che sta in $V + W$ ma non nell'unione.

ESERCIZIO 12 Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui i vettori

$$(1, a, a - 1), \quad (1, 1, a - 1), \quad (0, a - 1, a)$$

risultano indipendenti. Inoltre:

1. posto $a = 1$ stabilire se $(1, -1, 2)$ appartiene al sottospazio generato dai tre vettori;

2. posto $a = 2$ mostrare che i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare le componenti di $(1, -1, 2)$ rispetto a questa base.

ESERCIZIO 13 Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si considerino i sottosp. $U = \mathcal{L}(A, A^t, A + A^t)$ e $V = \mathcal{L} = (A, B)$. Calcolare le basi per $U, U + V, U \cap V$.

ESERCIZIO 14 Dati i vettori $1 + x, x$ e $x^2 + 1$ di $\mathbb{R}_2[x]$ mostare che formano un base per $\mathbb{R}_2[x]$. Determinare poi le componenti della base standard $\{1, x, x^2\}$ rispetto a questa base.

ESERCIZIO 15 QUIZ
Q1. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i vettori $a = (1, 2, -1, 3), b = (3/2, 0, -\sqrt{3}, 4), c = (-1, 0, 2, 0), d_t = (3, 0, t + 1, 0)$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. Esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $a \in \mathcal{L}(b, c, d_t)$.
2. Esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $d_t \in \mathcal{L}(a, b, c)$.
3. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ i vettori a, b, c, d_t formano una base di $\mathbb{R}^4$.
4. $\mathrm{dim}(\mathcal{L}(\mathrm{a, b, c, d_t})) = 4, \forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$.

Q2. Sia (v_1, v_2, v_3, v_4) una base di $\mathbb{R}^4$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. Se $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ e $W = \mathcal{L}(v_3, v_4)$, allora $V \cap W$ contiene un unico vettore.
2. Si ha sempre $v_1 = (1, 0, 0, 0)$.
3. Se $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ e $W = \mathcal{L}(v_3, v_4)$, allora $V \cap W$ è vuoto.
4. Se $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ e $U = \mathcal{L}(v_2, v_3)$, allora $\mathrm{dim(V + W) = 4}$.

Q3. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio V generato da

$$u = (3, -1, 2), \quad v = (0, -2, 2), \quad w = (3, 0, 1).$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. $\dim(\mathrm{V}) = 3$.
2. Per ogni sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 si ha $\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \geq 1$.
3. $u \notin \mathcal{L}(v, w)$.
4. Nessuna delle precedenti.

Q4. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i vettori $a = (3, -1, 2, 0), b = (3, 0, 1, -1), c = (0, -2, 2, 2)$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera?

1. $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})) = 3$.
2. $\dim(\mathcal{L}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})) = 2$.
3. $a - b + 5c \notin \mathcal{L}(a, b)$.
4. Esiste $d \in \mathbb{R}^4$ tale che (a, b, c, d) sia un abase di $\mathbb{R}^4$.

Q5. Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. Esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\dim(\mathrm{V} + \mathrm{W}) = \dim(\mathrm{W})$.
2. Se $\dim(\mathrm{V}) = 2$, esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ con $\dim(\mathrm{W}) = 2$ tale che $V \cap W$ contenga un solo vettore.
3. Esiste un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $V \cap W$ sia vuoto.
4. Per ogni sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme $V \cap W$ contiene infiniti vettori.