RETTE E PIANI.

Osservazione. Ricordarsi le equazioni parametriche della retta, l'equazione cartesiana del piano e le equazioni cartesiane delle rette con le principali proprietà delle varie scritture.

ESERCIZIO 1 Esercizi di base sulle rette.

1. Ricavare le equazioni parametriche di rette a partire da: 1) due punti; 2) un punto e un vettore direzionale.

2. Scrivere le equazioni di tre rette r, s e t in modo che r, s siano parallele, r, t si intersechino, s, t sghembe e verificare le posizioni reciproche.

3. Data l'equazione di una retta, scrivere la retta parallela ad essa e passante per un punto fissato.

ESERCIZIO 2 Determinare le equazioni del piano che soddisfa, di volta in volta, le seguenti richieste:

1. passa per i punti $A(1,2,1), B(1,3,-1)$ e $C(0,2,-2)$.

2. Passa per il punto $D(2,0,-7)$ ed è ortogonale al vettore $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

3. Passa per il punto $A(1,2,1)$ e contiene la retta $r : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = -3t$.

   Scegliere due punti sulla retta r e ...

4. Passa per il punto A e contiene la retta $s : x + y = 0, -4x + 2y + z = 1$.

   Dato che la retta s è in forma cartesiana, si suggerisce di utilizzare il fascio di piani.

Infine calcolare la distanza di $O(0,0,0)$ e di B dall'ultimo piano.

ESERCIZIO 3 Siano date le rette di equazioni:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases} \quad r : \begin{cases} x = 4 - 2h \\ y = 2h \\ z = 1 - 6h \end{cases} \quad l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

1. Determinare la posizione reciproca di ogni coppia di rette e la loro distanza.

2. Calcolare la distanza tra il punto $A(1,1,1)$ e s.

Attenzione : 1) r ed s hanno vettori proporzionali quindi potrebbero essere parallele e distinte o coincidenti. Mostrare che in questo caso sono distinte e calcolarne la distanza in due modi (piano ortogonale e formula con prodotto vettoriale).

ESERCIZIO 4 Siano date le rette:

$$s : \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2-t \\ z &= -1+3t \end{cases} \quad r : \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 2y-z &= 0 \end{cases} \quad l_a : \begin{cases} ay-z &= 0 \\ 3x+y-z &= 2 \end{cases}$$

1. Calcolare la posizione reciproca di r con s e r con l_a (al variare di $a \in \mathbb{R}$.)

2. Nel caso in cui r e d s risultino complanari, determinare il piano che le contiene.

3. Calcolare gli angoli formati da s e r, da r e l_2 e da r e l_0.

Osservare che, per come sono date r ed s è più semplice verificare l'incidenza. Per la coppia r, l_a utilizzare il metodo dei ranghi.

ESERCIZIO 5 Dati i piani:

$\pi_1 : x-y+3z=1, \quad \pi_2 : -2x+2y-6z=k, \quad \pi_3 : x+y=0, \quad \pi_4 : x-y=0,$

1. verificare quali siano paralleli a coppie e quali ortogonali a coppie;

2. calcolare l'angolo tra le coppie di piani;

3. calcolare la distanza tra le coppie di piani;

4. calcolare l'angolo tra il piano π_4 e la retta s dell'Esercizio 2 e la loro distanza.

ESERCIZIO 6 Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca delle rette:

$$r : \begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+y+2z &= 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x+ky+z &= 0 \\ kx+y &= 0 \end{cases}$$