DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Esercitazione del 27 Marzo 2013

Esercizio 1

Un carrello di massa m=1.8 kg viaggia con velocità v_0=1.3 m/s su un binario rettilineo. Ad esso viene applicata una forza costante che in 9 secondi lo porta alla velocità di 7.5 m/s. Calcolare lo spazio percorso, s, e l'intensità della forza applicata, F.

Il carrello viaggia di moto uniformemente accelerato con velocità iniziale non nulla. Pertanto valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v &= v_0 + at \end{aligned} \qquad [1]$$

Risolvendo il sistema [1] (due equazioni e due incognite, s e a) si ottiene:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = 0.689 \ \mathrm{m/s}; \qquad s = \frac{1}{2}(v + v_0)\,t = 39.6 \ \mathrm{m}$$

La forza viene trovata utilizzando la seconda legge di Newton: F = ma = 1.24 N.

Esercizio 2

Un corpo di massa m = 6.5 kg, inizialmente fermo, è sottoposto ad una forza F = 4.3 N per un tempo Δt_1 = 2.4 s. Successivamente, dopo l'intervallo di applicazione della forza, il corpo prosegue per inerzia. Calcolare lo spazio complessivamente percorso dopo 12 s.

Il problema deve essere risolto individuando due fasi distinte. Nel primo tratto ($\Delta t_1=t_1-t_0=t_1=2.4$ s, avendo posto $t_0=0$) il corpo si muove di moto uniformemente accelerato. Per i restanti $\Delta t_2=t_2-t_1= 9.6$ s (con t_2 = 12 s) il moto è rettilineo e uniforme.

Nel primo tratto valgono quindi le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ s_1 &= \frac{1}{2} a t_1^{\,2} \\ v_1 &= a t_1 \end{aligned}$$

da cui è possibile ricavare accelerazione, spazio percorso e velocità finale del corpo nel primo tratto.

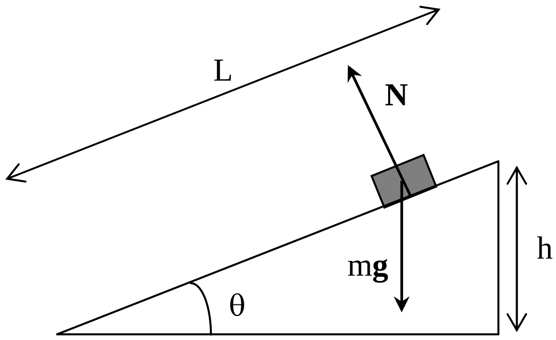
$$a = F/m = 0.662 \ \mathrm{m/s^2} \ ; \qquad s_1 = 1.905 \ \mathrm{m} \ ; \qquad v_1 = 1.588 \ \mathrm{m/s}$$

Nel secondo intervallo il moto è uniforme. Pertanto

$$s_2 = v_1 \Delta t_2 = 15.245 \ \mathrm{m}$$

da cui si ottiene che lo spazio totale percorso è $s = s_1 + s_2 = 17.15$ m.

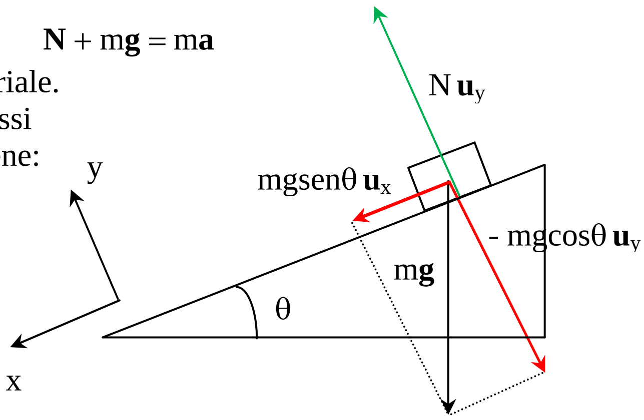
Esercizio 3
Tra le due estremità di un piano inclinato lungo L = 2 m c'è una di differenza di livello di h = 2 cm; un punto materiale parte con velocità nulla dall'estremità più alta e si muove senza attrito. Calcolare il tempo che impiega a raggiungere l'altra estremità ed il valore della sua velocità finale.



Il punto materiale è soggetto sia alla forza di gravità m**g** sia alla reazione vincolare del piano **N**. Applicando la seconda legge di Newton si ottiene:

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

dove **a** è l'accelerazione del punto materiale. Proiettando l'equazione nel sistema di assi cartesiani (x,y) indicato in figura si ottiene:



$$\begin{cases} m\,g\,\mathrm{sen}\theta = ma \\ N - m\,g\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad [1]$$

L'angolo θ può essere determinato come θ = arcsin (h/L) = 0.573°.

Ai fini dello studio del moto è sufficiente la prima equazione del sistema [1]. Risolvendo si ottiene:

$$a = g\,\mathrm{sen}\theta = 0.098 \text{ m/s}^2$$

Il tempo t_1 impiegato dal punto materiale a raggiungere l'estremità inferiore del piano inclinato vale:

$$L = x - x_0 = \frac{1}{2}at_1^{\,2} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2\,L}{a}} = 6.39 \text{ s}$$

mentre la velocità all'estremità inferiore vale: v = a t = 0.62 m/s.
La velocità finale poteva essere ricavata anche dall'equazione $v = \sqrt{2\,a\,L}$.
Si osservi che tale velocità finale è la stessa che il punto materiale avrebbe raggiunto se fosse caduto lungo la verticale per un tratto pari ad h con una accelerazione pari a quella di gravità. Infatti:

$$v = \sqrt{2\,a\,L} = \sqrt{2\,g\,\sin\theta\,L} = \sqrt{2\,g\,h}\ .$$

Esercizio 4

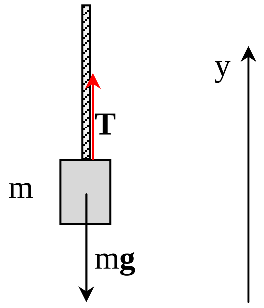
Una massa m = 5 kg viene calata mediate una fune inestensibile e di massa trascurabile il cui carico di rottura è T_0 = 40 N. Determinare se la massa può essere calata a velocità costante e, in caso contrario, quale deve essere la minima accelerazione con cui la massa deve essere calata affinché la fune non si spezzi.

In figura è riportato il diagramma di corpo libero della massa, dal quale si ottiene:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

e proiettando l'equazione su un asse rivolto verso l'alto:

$$T - mg = -ma \qquad [1]$$

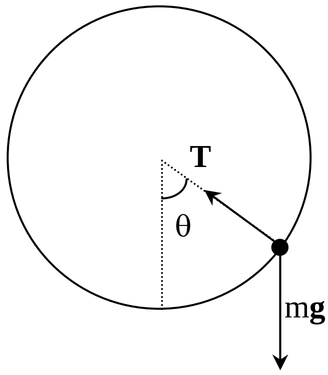


Se la massa venisse calata con velocità costante (a = 0) la tensione della fune sarebbe: T=mg=49 N, valore maggiore di T_0: la fune quindi si spezzerebbe.

Affinché la fune non si spezzi bisogna calare la massa con una accelerazione minima che si ricava direttamente dall'equazione [1] imponendo $T = T_0$. Si ottiene così: $a_{min} = 1.8\ m/s^2$.

Esercizio 5

Una fune inestensibile di lunghezza R = 7 cm e con carico di rottura T_0 pari a 100 N reca ad un estremo un peso di massa m = 1 kg. Il sistema viene posto in rotazione in un piano verticale come indicato in figura. Determinare la massima frequenza imponibile al sistema affinché la fune non si spezzi.



Le forze agenti sulla massa m (indicate in figura) sono la tensione della fune, **T**, e la forza di gravità, m**g**. E' conveniente adottare un S.R. solidale con la direzione della fune: asse x diretto tangenzialmente alla traiettoria descritta e asse y orientato verso il centro della circonferenza.
Occorre dunque scomporre la forza peso per trovarne le componenti nel S.R. appena definito. Si trova:

$$mg_x = mg\,\text{sen}\theta$$
$$mg_y = mg\cos\theta$$

A determinare la condizione di rottura della fune è l'equazione che riguarda la proiezione della seconda equazione di Newton sull'asse y, diretto radialmente:

$$T - mg_y = ma_N \quad \text{ossia} \quad T - mg\cos\theta = ma_N$$

dove a_N è la accelerazione centripeta.
Il punto più alto e quello più basso della traiettoria rappresentano le due condizioni limite: nel punto più alto della traiettoria la tensione e la forza peso sono parallele e dirette nello stesso verso, mentre punto più basso hanno la stessa direzione ma verso opposto.
La tensione cui è soggetta la fune è quindi massima nel punto più basso ($\theta = 0$). In corrispondenza a tale posizione sia ha (poiché $a_N=\omega^2 R$):

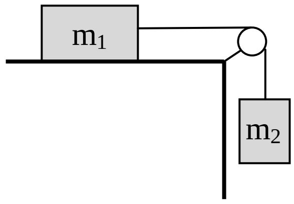
$$T = m\omega^2 R + mg = m(2\pi\nu)^2 R + mg$$

dove ν è la frequenza di rotazione $\nu = \omega/2\pi$. Affinché la fune non si spezzi deve essere $T<T_0$ e quindi:

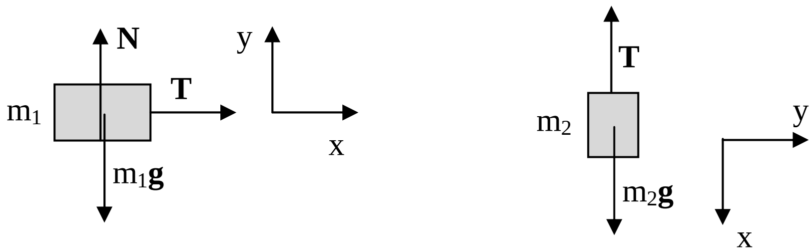
$$\nu < \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T_0 - mg}{mR}} = 5.7\,\text{Hz}$$

Esercizio 6

Si consideri il sistema rappresentato in figura, dove m_1 = 10 kg e m_2 = 5 kg. Trascurando tutte le forze di attrito, considerando la fune inestensibile e senza peso e ipotizzando che la carrucola non sia soggetta a rotazione, trovare l'accelerazione del sistema e la tensione della fune.



E' necessario innanzitutto determinare quali sono le forze che agiscono su ciascun corpo. Si disegna pertanto il diagramma di corpo libero:



dove il sistema di riferimento per il corpo di massa m_2 risulta ruotato rispetto a quello per la massa m_1 per effetto dell'azione della carrucola. In questo modo risulta infatti che sulla fune agiscono le forze $-T\mathbf{u}_x$ (sull'estremo fissato alla massa m_1) e $+T\mathbf{u}_x$ (sull'estremo fissato alla massa m_2) la cui somma è nulla, come deve essere in quanto la massa della fune è trascurabile. Risulta inoltre che l'accelerazione si può scrivere per entrambi i corpi come $\mathbf{a}=a\mathbf{u}_x$.

Per calcolare l'accelerazione del sistema e la tensione della fune si fa uso della seconda legge di Newton:

$$\begin{cases} m_1\mathbf{g}+\mathbf{N}+\mathbf{T}=m_1\mathbf{a} \\ m_2\mathbf{g}+\mathbf{T}=m_2\mathbf{a} \end{cases}$$

Proiettando l'equazione sul sistema di assi cartesiani si ottiene:

$$\begin{cases} T=m_1a \\ N-m_1g=0 \\ -T+m_2g=m_2a \end{cases} \qquad [1]$$

Dove la seconda equazione del sistema [1] è ininfluente per quanto riguarda la soluzione del problema. Mettendo quindi a sistema la prima e la terza equazione si ottiene:

$$\begin{cases} T=m_1a \\ T-m_2g=-m_2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T=32.67 \quad N \\ a=3.27 \quad m/s^2 \end{cases}$$

Esercizio 7

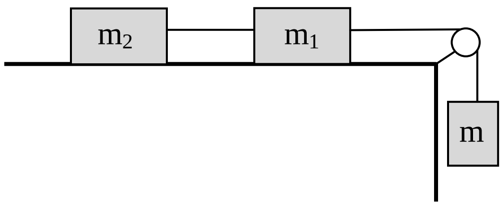
Nel sistema in figura tra il corpo di massa m_1 e il tavolo c'è un coefficiente di attrito dinamico μ_1 e tra il corpo di massa m_2 e il tavolo c'è un coefficiente di attrito dinamico μ_2.

a) Determinare quale valore deve assumere la massa m in funzione di m_1 e m_2 affinché il moto sia uniforme.

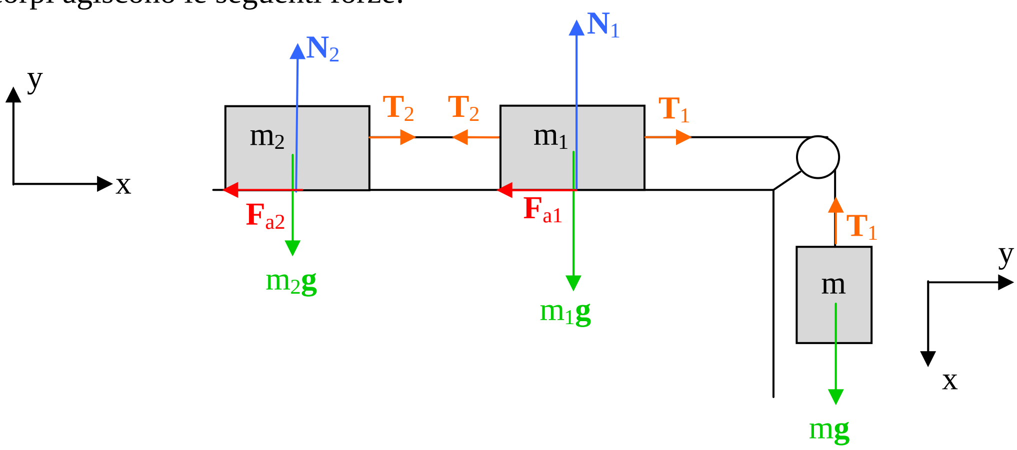
b) Ipotizzando che tale relazione sia soddisfatta, calcolare i valori delle tensioni delle funi che uniscono m_1 con m_2 e m_1 con m, se $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 6$ kg, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.5$.

c) Ad un certo istante m si stacca: il filo tra m_1 ed m_2 resta teso? Quanto vale la sua tensione?

Si ipotizzi che le funi siano inestensibili e di massa trascurabile e che la carrucola non sia soggetta a rotazione.



Sui tre corpi agiscono le seguenti forze:



a) Applicando il secondo principio della dinamica e imponendo che il moto sia uniforme si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1 + m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{F}_{a1} = 0 \\ \mathbf{N}_2 + m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2 + \mathbf{F}_{a2} = 0 \\ m\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 = 0 \end{cases}$$

che proiettato sul sistema di assi cartesiani (x,y) indicato in figura, tenendo conto che $F_{a1} = \mu_1 N_1$ e $F_{a2} = \mu_2 N_2$, diventa:

$$\text{lungo x: } \begin{cases} T_1 - T_2 - \mu_1 N_1 = 0 \\ T_2 - \mu_2 N_2 = 0 \\ -T_1 + mg = 0 \end{cases} \qquad [1]$$

$$\text{lungo y: } \begin{cases} N_1 - m_1 g = 0 \\ N_2 - m_2 g = 0 \\ \text{——} \end{cases} \qquad [2]$$

Usando la [2], la [1] si può riscrivere come:

$$\begin{cases} T_1 - T_2 - \mu_1 m_1 g = 0 \\ T_2 - \mu_2 m_2 g = 0 \\ T_1 = mg \end{cases}$$

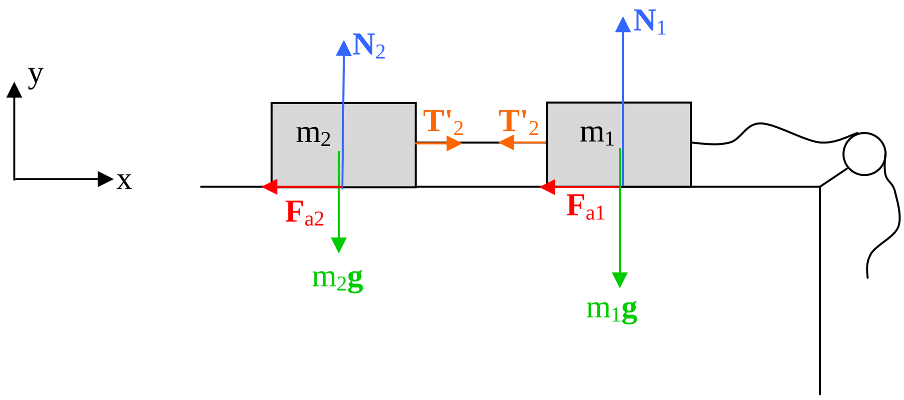
da cui:

$$\begin{cases} mg - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \mu_2 m_2 + \mu_1 m_1 \\ T_2 = \mu_2 m_2 g \\ T_1 = mg \end{cases} \qquad [3]$$

b) I valori della tensione della fune che unisce m_1 con m, T_1, e della fune che unisce m_1 con m_2, T_2, si ottengono direttamente del sistema [3]:

$$T_1 = (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g = 52.92 \text{ N} \qquad\qquad T_2 = \mu_2 m_2 g = 29.4 \text{ N}$$

c) Quando la massa m si stacca il moto non è più uniforme.



Poiché $F_{a2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 29.4$ N > $F_{a1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g = 23.52$ N la forza frenante che agisce sul corpo di massa m_2 è maggiore di quella che agisce sul corpo di massa m_1 e quindi la fune tra m_1 e m_2 rimane tesa.

Applicando il secondo principio della dinamica si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1 + m_1 \mathbf{g} + \mathbf{T}'_2 + \mathbf{F}_{a1} = m_1 \mathbf{a} \\ \mathbf{N}_2 + m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T}'_2 + \mathbf{F}_{a2} = m_2 \mathbf{a} \end{cases}$$

che proiettato nel sistema di assi cartesiani (x,y) indicato in figura, tenendo conto che $F_{a1} = \mu_1 N_1$ e $F_{a2} = \mu_2 N_2$ e che il sistema si sta spostando nel verso delle x crescenti (per effetto della fase precedente del moto) diventa:

lungo x: $\begin{cases} -T'_2 - \mu_1 N_1 = m_1 a \\ T'_2 - \mu_2 N_2 = m_2 a \end{cases}$ [4] lungo y: $\begin{cases} N_1 - m_1 g = 0 \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = m_1 g \\ N_2 = m_2 g \end{cases}$ [5]

(Nella [4] si è genericamente indicata l'accelerazione come fosse nel verso delle x crescenti, cioè con segno positivo. Se dal calcolo risulterà a<0 ciò comporterà che il verso reale è opposto, come peraltro intuitivamente ci si aspetta)

Sostituendo all'interno del sistema [4] i valori di N_1e N_2 ricavati nel sistema [5] si ottiene:

$$\begin{cases} -T'_2 - \mu_1 m_1 g = m_1 a \\ T'_2 - \mu_2 m_2 g = m_2 a \end{cases} \rightarrow \quad -(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g = (m_1 + m_2)a \quad \rightarrow \quad a = -\frac{(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g}{(m_1 + m_2)} = -\ 3.78\ \mathrm{m/s^2}$$

$T'_2 = \mu_2 m_2 g + m_2 a = 6.72\ \mathrm{N} > 0$, a conferma del fatto che il filo tra m_1 e m_2 resta effettivamente teso.