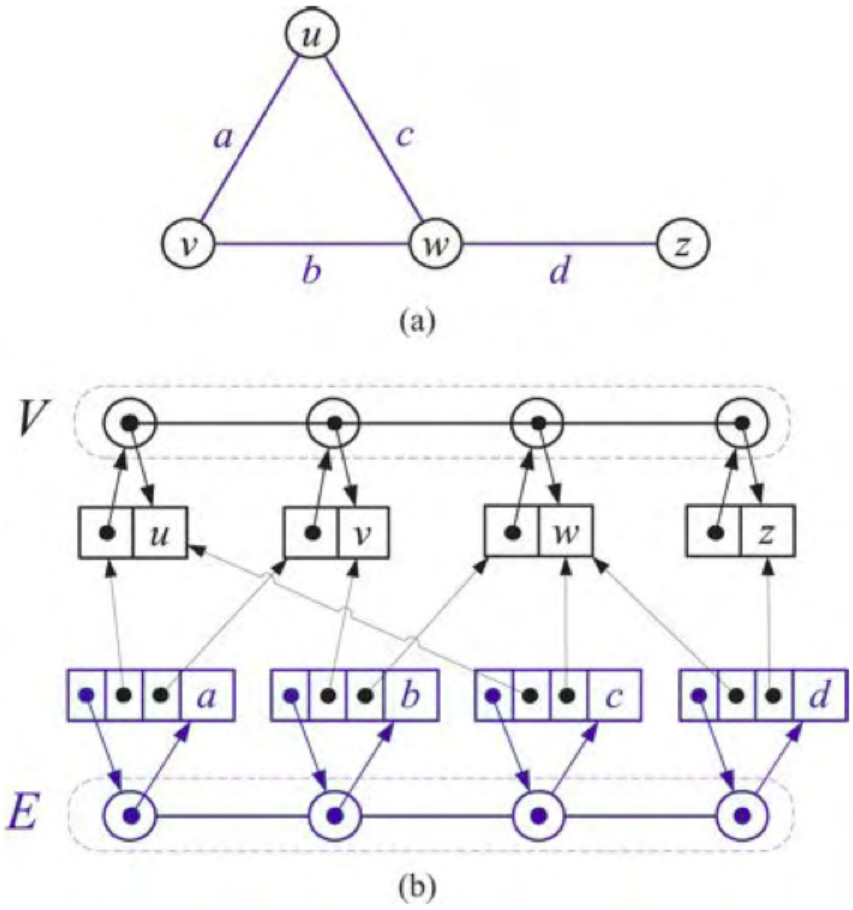
Algorithmique et structures de données : Mission 6

Groupe 1.2: Ivan Ahad - Jérôme Bertaux - Rodolphe Cambier
Baptiste Degryse - Wojciech Grynczel - Charles Jaquet

1 décembre 2014

Question 1 (Baptiste Degryse) Un graphe G comportant n noeuds et m arêtes est représenté par la structure Edge List et les conteneurs V et E sont supposés implémentés par des listes doublement chaînées. Justifiez pourquoi la complexité temporelle de la méthode removeVertex est en O(m) alors que les complexités des méthodes remove-Edge et insertVertex sont en O(1)? Votre réponse à cette question dépend- elle de la structure de données utilisées pour mémoriser les conteneurs V et E? En quoi le concept de location-aware entry est-il important pour justifier certaines de ces complexités ? Le graphe étant stocké dans une structure Edge List, il faut retrouver le Vertex dans une liste d'edges, en vérifiant à chaque fois si l'edge ne contient pas un pointer vers le vertex, si oui, il faut retirer l'edge. C'est une opération de complexité temporelle O(m) parce qu'il faut toujours tout vérifier pour ne pas rater d'edge.



Edge List
source: Data Structures and Algorithms in Java Fourth Edition

RemoveEdge est de complexité O(1) puisqu'il s'agit d'une liste doublement chainée, tout comme insertVertex.

La réponse dépend bien de la structure de données utilisées pour mémoriser les contenus. Si les edges étaient stockées par vertex, il serait possible d'avoir de bien meilleures performances lors de l'opération removeVertex.

Le concept de location aware entry est indispensable pour avoir une complexité O(1) pour la méthode removeEdge.

Question 2 (Grynczel Wojciech) Quelle est la complexité temporelle d'un parcours en largeur d'abord pour un graphe simple comportant n noeuds lorsque ce graphe est représenté par une matrice d'adjacence ? Justifiez votre réponse.

$O(n^2)$ n = nombre de noeuds

Justification: Avec une matrice adjacente on doit vérifier, pour chaque sommet tous les arêtes sortants possibles.

Question 3 (Ivan) Une file peut-elle être utilisée au lieu d'une pile comme structure de données auxiliaire lors du tri topologique d'un graphe? Sinon, pourquoi? Si oui, le résultat du tri topologique est-il différent par rapport au cas où une pile est utilisée? Jamais, parfois, toujours?

On peut utiliser une file, cependant l'ordre des noeuds sera différent étant donné que la pile utilise le principe de LIFO et que la file utilise le principe de FIFO. Donc lorsque l'on stocke les noeuds dans la file, l'élément en tête de file sera le premier noeud visité et ainsi de suite jusqu'à le dernier noeud se trouvant tout derrière. Pour la pile, on commence d'abord par stocker les noeuds visités en dernier étant donné que l'élément au sommet sera le premier à être retourné, s'agissant donc du premier noeud visité.

Question 4 (Cambier Rodolphe) On considère l'algorithme MYSHORTESTPATH pour trouver le plus court chemin entre un sommet start et un sommet destination dans un graphe pondéré connecté. Tous les poids sont supposés positifs et le graphe est supposé simple. (voir ICampus) L'algorithme MYSHORTESTPATH fonctionne-t-il toujours, jamais ou parfois seulement ? Argumentez. Cet algorithme fonctionnera parfois seulement. En effet, considérons les deux graphes simples suivants :

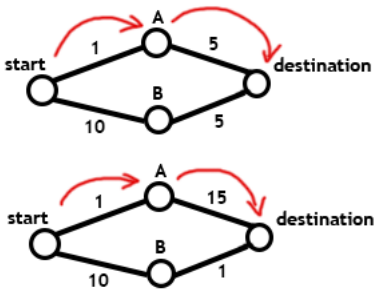


Figure 1: MYSHORTESTPATH sur deux graphes différents

On remarque dans cette figure que la fonction retourne le plus court chemin dans le premier cas, mais pas dans le deuxième cas, où il aurait été plus efficace de passer par 10+1 = 11 que par 1+15 = 16.

Pour être certain d'obtenir le plus court chemin à tous les coups, il faut utiliser l'algorithme de Dijkstra, en parcourant tous les noeuds par niveau et en retenant pour chacun d'entre eux le plus court chemin depuis le start jusqu'à ceux-ci. Lorsqu'on arrivera à destination on connaîtra alors le plus court chemin du start à la destination, ainsi que son poids.

Question 5 (Bertaux Jérôme) On considère un réseau téléphonique qui peut être vu comme un graphe G dont les sommets représentent des terminaux de commutation et les arcs représentent des lignes de communication entre ces terminaux. Chaque arc est étiqueté par la bande passante de la ligne qu'il représente. La bande passante d'un chemin dans le graphe est la bande passante de son arc de bande passante minimale (autrement dit, le maillon faible !...). On s'intéresse à l'algorithme *MaxBandWidth(G, a, b)* qui, étant donné un réseau, représenté par un graphe G, et deux terminaux a et b, renvoie la bande passante maximale d'un chemin entre a et b. Donnez le pseudo- code de l'algorithme *MaxBandWidth(G, a, b)*. Piste de solution : pensez à une variante d'un algorithme bien connu présenté dans le livre de référence. Le principe est qu'il faut parcourir tout le graphe en trouvant l'arc (les lignes de communication entre les terminaux) dont la bande passante est la plus faible. L'algorithme de *MaxBandWidth(G, a, b)* est inspiré de l'algorithme de Dijkstra.

Pseudo-code de *MaxBandWidth(G, a, b)*:
Input: un graphe simple G non dirigé dont chacune des arêtes se voit attribuer une capacité maximale (bande passante maximale), ainsi que deux nœuds a,b de G.

Output: une étiquette D[b], pour chaque nœud b de G, tel que D[b] est la bande passante maximale d'un chemin entre a et b dans G.

Initialize D[a] = 0 et D[b] = ∞ pour chaque noeud b $\neq$ a
Soit Q la file de priorité contenant tous les nœuds de G en prenant les étiquettes D comme étant les clés.

```
Algorithm MaxBandWidth(G, a, b):
     while Q is not empty do
          u = Q.removeMin()
          for each edge (u,b) such that b is in Q do
               if D[u] + w(u,b) < D[b] then
                    D[b] = D[u] + w(u,v)
                    Change the key of vertex b in Q to D[b].
     return the label D[b] of each vertex v
```

Question 6 (Charles Jacquet) Quelle est la complexité temporelle de votre algorithme MaxBandWidth(G, a, b) (décrit à la question 5) ? Précisez notamment les hypothèses éventuelles sur l'implémentation des structures de données utilisées, dans la mesure où ces hypothèses seraient importantes pour justifier la complexité annoncée. L'algorithme présenté à la question 5 est en fait l'algorithme de Dijkstra. Nous avons donc une complexité qui dépend de la manière dont on implémente la "priority queue". Voici les complexités temporelles dans le pire des cas avec n le nombre de sommets :

- **Implémentation avec un tas :** $O(n^2 log(n))$
- **Implémentation avec une séquence non-triée** $O(n^2)$

Notre choix de la structure à implémenter va donc dépendre des cas.

Hypothèses:

- On utilise une liste adjacente ou une map adjacente pour implémenter l'algorithme
- On considère que le temps pour additionner les poids des différents arcs est constant.

Brève explication du calcul de la complexité:

Premièrement, le fait d'utiliser une liste/ map adjacente nous permet d'avoir accès aux éléments adjacents dans un temps proportionnel à son numéro.
La boucle interne s'exécute en O(n).
Vu que le nombre de sommets est de n, le nombre maximal d'insertion est de n.
En prenant le cas d'une implémentation avec un tas, nous avons que chaque opération s'exécute en $O(log(n))$ ce qui nous donne une complexité de $O(n^2 log(n))$.