

# Algorithmique et structures de données : Mission 2 (produit)

Groupe 1.2: Ivan Ahad - Jérôme Bertaux - Rodolphe Cambier  
Baptiste Degryse - Wojciech Grynczel - Charles Jaquet

07 octobre 2014

**Question 1** La profondeur est le nombre de parents qu'un noeud comporte. La racine est donc de profondeur 0, et ses enfants sont de profondeur 1. La hauteur est le nombre maximum de générations en dessous du noeud. Une feuille a une hauteur de 0, et les autres noeuds ont la hauteur de leur enfant le plus haut+1. Le niveau  $n$  est l'ensemble des noeuds de profondeur  $n$ . Ces notions ne dépendent pas du style d'arbre, elles s'appliquent aux arbres en général car il suffit d'avoir la notion de racine, feuille, enfant et parent pour pouvoir appliquer ces définitions. Ces notions ne dépendent pas de la structure de données utilisée car la représentation ne dépend pas de l'implémentation.

## Question 2

**Un arbre dont chaque noeud possède au plus deux noeuds est-il nécessairement binaire?**

Un arbre binaire se définit comme étant un arbre possédant au plus deux fils par noeud. Ceci étant dit, un arbre dont chaque noeud possède au plus deux fils est donc nécessairement un arbre binaire, tant qu'aucun noeud n'ait plus de deux fils.

**Qu'entend-on par arbre ordonné?** On dit qu'un arbre est ordonné si les enfants de chaque noeud sont ordonnés. Il existe trois types d'ordres dans les arbres :

-Ordre préfixe : Un arbre ordonné suivant l'ordre préfixe est un arbre dont la racine précède l'enfant de gauche, et l'enfant de gauche précède l'enfant de droite.

-Ordre infixé : Un arbre ordonné suivant l'ordre infixé est un arbre dont l'enfant gauche précède la racine, et la racine précède l'enfant de droite.

-Ordre postfixé : Un arbre ordonné suivant l'ordre postfixé est un arbre dont l'enfant de gauche précède l'enfant de droite, et l'enfant de droite précède la racine.

**L'ordre dépend-il des valeurs mémorisées dans l'arbre?** Si l'on parle de l'ordre des éléments contenus dans un arbre alors l'ordre dépend en effet des valeurs mémorisées dans celui-ci. Cependant, si l'on parle de la manière dont on parcourt un arbre, cela ne dépendra pas des valeurs mémorisées.

Exemple : Si l'arbre suit un ordre infixé, l'élément de la racine sera plus petit que l'élément du fils gauche, celui-ci étant plus petit que le fils droit, mais on pourrait très bien parcourir l'arbre en postorder traversal, c'est à dire parcourir l'arbre en commençant par l'enfant gauche, puis l'enfant droite, puis par la racine.

**Un arbre binaire impropre est-il désordonné?** Un arbre binaire propre est un arbre dont tous les noeuds internes ont soit aucun ou soit deux enfants chacun. Ceci étant dit, un arbre impropre est un arbre qui possède au moins un noeud n'ayant pas exactement deux fils.

Cependant, un arbre est binaire si et seulement s'il est ordonné et si chaque noeud possède au plus deux fils. Dès lors, un arbre binaire impropre sera d'office ordonné de par le fait qu'il est binaire, peu

importe qu'il soit propre ou impropre.

**Y a-t-il une structure de données particulièrement bien adaptée à ce cas?** Si la profondeur maximale de l'arbre est connue et fixée, les structures chaînées sont adaptées pour représenter un arbre. Les nodes de la structure chaînée peuvent aisément représenter la racine et les enfants d'un arbre, en contenant leur élément, une référence vers leurs enfants, et une référence vers leur parent.

Cela ne dépend pas du fait que l'arbre soit binaire ou non car on peut adapter les nodes de la structure chaînée si chaque noeud de l'arbre possède plus de deux enfants. C'est pourquoi les structures chaînées sont bien adaptées, car elles sont modulables en fonction du degré de chaque noeud de l'arbre. Cela ne dépend pas non plus des opérations effectuées sur l'arbre car les structures chaînées peuvent être adaptées selon les opérations effectuées.

### Question 3

**Qu'est-ce qu'un arbre équilibré?** Un arbre est équilibré si la différence des hauteurs de chaque sous-arbre gauche et droite de chaque noeud est au plus un.

**Un arbre binaire équilibré est-il nécessairement propre?** Un arbre binaire équilibré n'est pas nécessairement propre. Prenons un arbre dont la racine possède deux enfants, l'enfant de gauche possède un enfant et l'enfant de droite possède deux enfants. Dû au fait que l'enfant de gauche n'a qu'un enfant, cet arbre est impropre, et l'arbre reste équilibré.

**Comment définir un arbre binaire essentiellement complet?** Un arbre essentiellement complet est un arbre dont tous les noeuds internes ont exactement deux enfants. On utilise le terme "essentiellement" car tous les noeuds ont exactement deux enfants, sauf les noeuds ayant une hauteur de zéro, soit les noeuds les plus profonds. Ces noeuds, appelés "feuilles" n'ont pas d'enfant.

**Un arbre complet est-il toujours équilibré?** Un arbre complet implique que tous les enfants d'un même parent ont la même hauteur. Dès lors, la différence des hauteurs d'enfants ayant le même parent sera toujours égale à 0, donc un arbre complet est toujours équilibré.

**Un arbre équilibré est-il toujours complet?** Un arbre équilibré peut ne pas être complet. Reprenons l'arbre décrit précédemment. L'enfant gauche possède un enfant, et l'enfant droite possède deux enfants. Cet arbre est équilibré mais n'est pas complet car l'enfant de gauche n'a qu'un seul enfant.

**Question 4** Une implémentation d'un arbre par une structure chaînée signifie que pour réaliser l'arbre on utilise une structure chaînée. C'est-à-dire que chaque noeud de l'arbre contient une référence vers son noeud parent, vers son noeud enfant de gauche et vers son noeud enfant de droite en plus de contenir l'élément. L'arbre contient la référence du noeud racine de l'arbre et la taille de celui-ci.

Cette notion de structure chaînée est plus générale qu'une liste chaînée car chaque noeud de l'arbre contient plus d'une référence. Dans un arbre à partir d'un noeud il est toujours possible de remonter vers le noeud parent ou alors descendre vers un des noeuds enfants alors que dans une liste chaînée on ne peut que se déplacer vers le noeud suivant. Donc la recherche d'un noeud s'effectue plus rapidement dans un arbre en structure chaînée.

Les points communs entre liste et structure chaînée :

- L'objet général (Arbre et liste) contiennent tous les deux la taille et une référence vers le noeud racine.

- Dans les deux implémentations les noeuds contiennent au minimum une référence vers un autre noeud.

La classe qui implémente un arbre par une structure chaînée est `LinkedBinaryTree` (DSAJ-6 page 297). Il est possible d'utiliser une implémentation utilisant une liste chaînée seulement si on utilise une liste double chaînée.

**Question 5** Dans la majorité des cas de parcours, cela ne pose pas de problème, car on parcourt l'arbre depuis la racine jusqu'aux feuilles. Cela peut cependant être handicapant dans certaines situations. Dans le cas où l'on voudrait, par exemple, parcourir tous les noeuds de l'arbre situés à un même niveau, ne pas avoir la possibilité de remonter peut poser problème et ralentir fortement le processus.

Pour réaliser la méthode `parent`, on peut faire comme suit: Garder le pointeur sur le noeud dont on veut le parent. Vérifier si ce noeud n'est pas le root, auquel cas on retourne null. Parcourir l'arbre noeud par noeud, en vérifiant pour chacun si un de ses fils n'est pas le noeud dont on cherche le parent. On finit donc par trouver le parent du noeud de départ. Puisqu'il faut, au pire, parcourir tout l'arbre pour trouver le père, on a une complexité en  $O(n)$ .

**Question 6 (Charles Jacquet)** Définition de la classe `LinkedRBinaryTree` qui implémente l'interface `RBinaryTree`:

## LinkedBinaryTree.java

```
1 import java.util.ArrayList;
2 import java.util.Iterator;
3 import java.util.List;
4
5 /**
6  *
7  * @author charles
8  *
9  * @param <E>
10 */
11 public class LinkedBinaryTree<E> implements RBinaryTree<E>,
    Position<E>{
12     //variable d'instance:
13     private LinkedBinaryTree<E> left;
14     private LinkedBinaryTree<E> right;
15     private E element;
16     private int size;
17
18     //constructeur:
19     public LinkedBinaryTree(E elem, LinkedBinaryTree<E>
        leftChild, LinkedBinaryTree<E> rightChild) {
20         element = elem;
21         left = leftChild;
22         right = rightChild;
23         if (elem == null) size = 0; // pas d'élément dans la
        liste ..
24         else size = 1; // si il y a un element la taille est de 1
25         if(left != null) size+=left.size(); // rajoute de la
        taille des enfants
26         if(right != null) size+=right.size();
27     }
28     /*
29     * @post: implémentation de l'interface position
30     */
31     @Override
32     public E element() {
33         return element;
34     }
35     /*
36     * @post: implémentation de l'interface RBinaryTree, renvoie
        true si l'arbre est vide
37     */
38     @Override
39     public boolean isEmpty() {
```

## LinkedBinaryTree.java

```
40         return (size == 0);
41     }
42     /*
43      * @post: implémentation de l'interface RBinaryTree, renvoie
44      la taille de l'arbre
45      */
46     @Override
47     public int size() {
48         return size;
49     }
50     /*
51      * @post: implémentation de l'interface RBinaryTree, renvoie
52      la position de root.
53      * Mais vu que nous implémentons le fait qu'un arbre
54      est soit vide, soit
55      * il contient un noeud racine avec un fils gauche et
56      un fils droite.
57      * Dès lors, chaque noeud est root, nous utiliserons donc
58      cette fonction pour obtenir
59      * la position d'un élément.
60      */
61     @Override
62     public Position<E> root() {
63         return this;
64     }
65     /*
66      * @post : implémentation de l'interface RBinaryTree, renvoie
67      true si l'arbre ne possède pas d'enfant
68      */
69     @Override
70     public boolean isLeaf() {
71         return ( (left == null) && (right == null));
72     }
73     /*
74      * @post : implémentation de l'interface RBinaryTree, renvoie
75      le fils gauche
76      */
77     @Override
78     public LinkedBinaryTree<E> leftTree() {
79         return left;
80     }
81     /*
82      * @post : implémentation de l'interface RBinaryTree, renvoie
83      le fils droit
84      */
85     @Override
86     public LinkedBinaryTree<E> rightTree() {
87         return right;
88     }
```

## LinkedBinaryTree.java

```
76     */
77     @Override
78     public LinkedBinaryTree<E> rightTree() {
79         return right;
80     }
81     /*
82     * @post : implémentation de l'interface RBinaryTree, permet
de modifier l'élément
83     */
84     @Override
85     public void setElement(E o) {
86         element = o;
87     }
88     /*
89     * @post : implémentation de l'interface RBinaryTree, permet
de remplacer/ ajouter un fils gauche
90     */
91     @Override
92     public void setLeft(RBinaryTree<E> tree) {
93         left = (LinkedBinaryTree<E>) tree;
94     }
95     /*
96     * @post : implémentation de l'interface RBinaryTree, permet
de remplacer/ ajouter un fils droit
97     */
98     @Override
99     public void setRight(RBinaryTree<E> tree) {
100         right = (LinkedBinaryTree<E>)tree;
101     }
102 }
103
104 // Itérateur d'éléments grace a un itérateur de position:
105 public class ElementIterator implements Iterator<E>{
106     Iterator<Position<E>> posIterator =
positions().iterator();
107     public boolean hasNext(){ return posIterator.hasNext();}
108     public E next(){ return posIterator.next().element();}
109     public void remove(){posIterator.remove();}
110 }
111 public Iterator<E> iterator(){ return new ElementIterator();}
112
113 //fonction de "tri" "non ordonné" récursive de la liste:
114 private void inorderSubtree(LinkedBinaryTree<E> p,
List<Position<E>> snapshot){
```

## LinkedBinaryTree.java

```
115         if(p.leftTree() != null)
116             inorderSubtree(p.leftTree(), snapshot);
117         snapshot.add(p.root());
118         if(p.rightTree() != null)
119             inorderSubtree(p.rightTree(), snapshot);
120
121     }
122
123     //traversée non ordonnée de la liste:
124     public Iterable<Position<E>> inorder(){
125         List<Position<E>> snapshot = new ArrayList<>(); // pk
126         rien ds le <> ?
127         if(!isEmpty()){
128             inorderSubtree(this, snapshot);
129         }
130         return snapshot; // pourtant ce n'est pas un itérateur
131         qu'on renvoie ???
132     }
133     /*
134     * @post : implémentation de RBinaryTree, permt de renvoyer
135     un itérateur de positions
136     */
137     @Override
138     public Iterable<Position<E>> positions() {
139         return inorder();
140     }
141
142     public String toString(){
143         Iterator<E> coucou = iterator();
144         StringBuffer buf = new StringBuffer();
145         while(coucou.hasNext()){
146             buf.append(coucou.next() + "\n");
147         }
148         return buf.toString();
149     }
```

### Question 7

Une expression arithmétique peut contenir les quatre opérateurs fondamentaux  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$  et des scalaires, comme par exemple :  $3 * 10 - 2/4$ . Une expression analytique, telle que  $x^2 + x \sin x - 3$  peut contenir également des variables  $x, y, \dots$ , d'autres opérateurs comme la fonction puissance entière  $^$  ou d'autres fonctions mathématiques comme  $\sin$  ou  $\cos$ .

Une expression arithmétique peut être représentée par un arbre. Quelles sont les caractéristiques de cet arbre ?

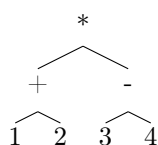
Arbre binaire est un arbre avec une racine, et où chacun des nœuds possède :

- soit aucun successeur,
- soit un successeur, à gauche ou à droite,
- soit deux successeurs.

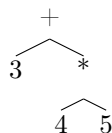
**Pourquoi cette représentation est-elle utile ?**

//TODO Techniques for parsing the common infix notation (where the operator is typically between two operands) and converting it into a binary tree are well known. Expressions are converted into binary trees, where unary operators (i.e., the unary minus or the sine function) are converted into degenerate nodes in the binary trees, with a single son. See Fig. 1 for the arithmetic expression of  $\sin$ . **Citez deux exemples de manipulation d'une expression arithmétique et exprimez comment ces manipulations sont mise en oeuvre à l'aide de cette représentation + Exemple !!!!!!!.**

$((1 + 2) * (3 - 4))$

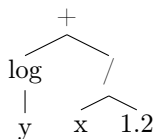


$(3 + (4 * 5))$



Quelles sont les caractéristiques supplémentaires pour un arbre représentant une expression analytique ?.

Une expression analytique peut contenir des opérations unaires, par exemple :



**Question 8** C'est le parcours "inorder traversal" d'un arbre binaire qui permet de parcourir l'arbre dans le bon sens. Voir figure 1

```

1 public String toString(){
2     if ( T.isExternal(v) )
3         return v.getElement().toString();
4     else
5         return "(" + v.left() + v.getElement() + v.right() + ")";
6 }

```

**Question 9 (Charles Jacquet)** Représentation des opérations de dérivation:

1. Addition:

$$\text{dérivée} \left( \begin{array}{c} + \\ \swarrow \quad \searrow \\ 4 \quad X^2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c} + \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{dérivée}(4) \quad \text{dérivée}(X^2) \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c} + \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 2X \end{array} \right)$$



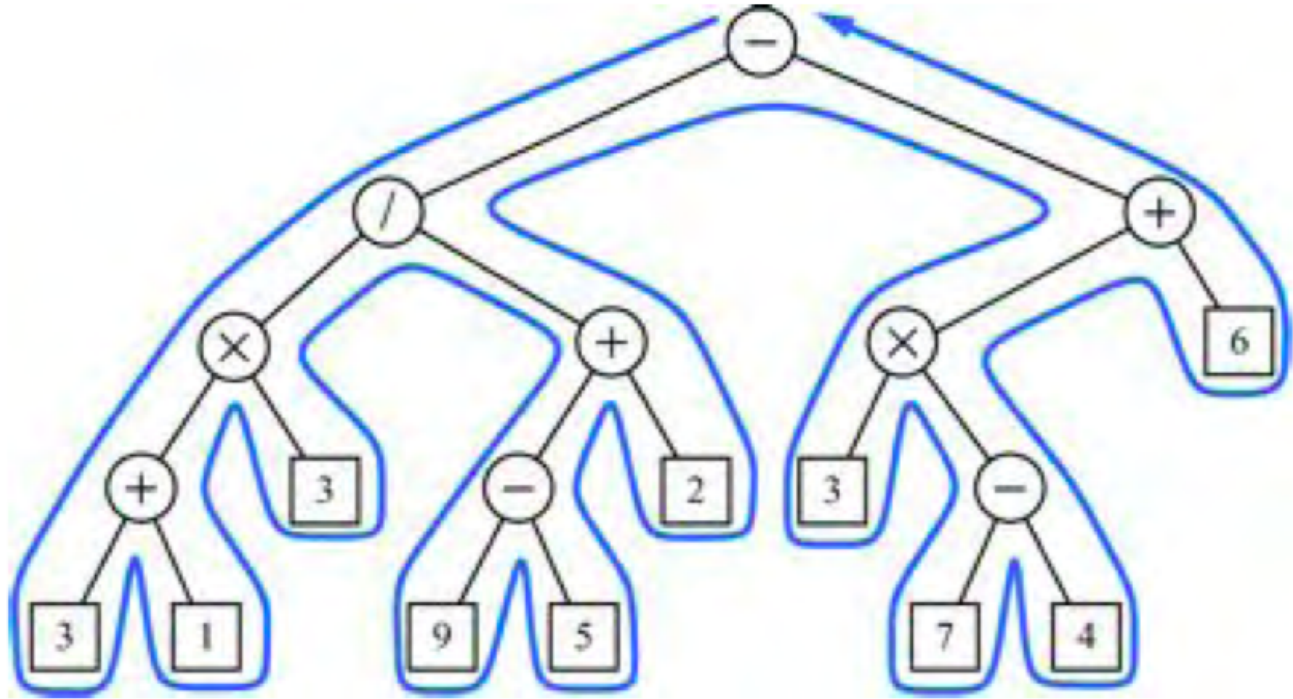


Figure 1: inorder traversal path (from Data Structure And Algorithms in Java p 424)

2. Soustraction:

$$\text{dérivée} \left( \begin{array}{c} - \\ \swarrow \quad \searrow \\ 4 \quad X^2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c} - \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{dérivée}(4) \quad \text{dérivée}(X^2) \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c} - \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad 2X \end{array} \right)$$

3. Multiplication:

$$\text{dérivée} \left( \begin{array}{c} * \\ \swarrow \quad \searrow \\ 4 \quad X^2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c} + \\ \swarrow \quad \searrow \\ * \quad * \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \text{dérivée}(4) \quad X^2 \quad 4 \quad \text{dérivée}(X^2) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} + \\ \swarrow \quad \searrow \\ * \quad * \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad X^2 \quad 4 \quad 2X \end{array} \right)$$

4. Division:

$$\text{dérivée} \left( \begin{array}{c} / \\ 4 \quad X^2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c} / \\ + \quad (x^2)^2 \\ * \quad * \\ \text{dérivée}(4) \quad X^2 \quad 4 \quad \text{dérivée}(X^2) \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c} / \\ + \quad (x^4) \\ * \quad * \\ 0 \quad X^2 \quad 4 \quad 2X \end{array} \right)$$