

# 気体浸透と熱伝導を受ける多孔質体の熱応力について\*

荒井 正行<sup>\*1</sup>

## On Thermal Stresses in Porous Solid under Gas Infiltration and Heat Transfer

Masayuki ARAI<sup>\*1</sup>

<sup>\*1</sup> Materials Science Research Lab., Central Research Institute of Electric Power Industry  
2-6-1 Nagasaka, Yokoshuka-shi Kanagawa-ken, 240-0196, Japan

When a porous solid is subjected to both gas infiltration and heat transfer, thermal stresses are generated in such a solid. This paper presents fundamental theory for a porous solid under such a complex situation. The governing equations for gas and solid phases are used to identify the gas pressure in pores and the solid temperature. The constitutive equation for a porous solid is formulated in terms of the unit cell model in which a pore exists periodically in the matrix. Using the constitutive equation, equilibrium equation of stress tensor and strain tensor obtained by differentiating displacement vector, the partial differential equation of displacement components for obtaining the deformation and stresses occurred in a porous elastic solid is introduced consequentially. As a simple example, the thermal stress problem for an infinite porous solid with a spherical cavity into which coolant gas is injected is considered.

**Key Words** : Elasticity, Porous Solid, Gas Infiltration, Heat Transfer, Thermal Stress

### 1. 緒 言

本論文は、多孔質体中を気体が浸透するとともに、気体と多孔質体中の固相（以下、マトリックスと呼ぶ）の熱が気孔壁面を介して熱交換しながらマトリックスで熱伝導が生じるとき、多孔質体に発生する熱応力を解析するための基礎理論を示したものである。

近年、このような複雑な状態におかれた多孔質体の熱応力問題が工学上重要になってきている。工学的問題の具体例として、ロケットエンジンやガスタービン高温翼を冷却するためのトランスピレーション冷却<sup>(1),(2),(3),(4)</sup>を挙げる。これは、高温に曝される部品を効率的に冷却するための方法である。以下に、この冷却方式について簡単に説明する。多孔質体表面の一部から冷却気体を注入する。この気体は、気孔間を浸透し、高温曝露表面から外部へと放出される。放出された気体により表面近傍ではフィルム冷却が生じる。また、気体が多孔質を浸透する際に、気孔壁面で気体がマトリックスを冷却する。これによって多孔質体の温度も低下する。この時、温度変化に伴って生じる形状変化とともに気体の圧力変化も多孔質体中で生じる。このふたつの形状変化に起因して多孔質体には熱応力が発生する。

これまで、水を含んだ土に生じる応力を解析できるよう、Biot<sup>(5)</sup>によりフックの法則に水の膨張効果を考慮した構成方程式が提案されている。このため、多孔質体の弾性問題には、この方程式が用いられてきた。しかし、縦弾性係数には気孔率の影響は考慮されておらず、構成方程式の適用は圧縮応力状態におかれている多孔質体の問題にのみ限られた。このため、より一般的な応力状態へ拡張するための様々な改良<sup>(6),(7)</sup>がなされてきた。Feng ら<sup>(8)</sup>は、気孔率を考慮するために有効応力概念を導入している。倉茂<sup>(9)</sup>は、Biot の方程式に熱ひずみの項を追加している。しかし、多孔質体の温度の定義にはあいまいさが残る。すなわち、冷却媒体の温度とマトリックスの温度は明確に区別すべきものであるにも関わらず、相互の熱交換は気孔壁面を介して速やかに行われるものとし、媒

\* 原稿受付 2011 年 8 月 18 日

<sup>\*1</sup> 正員, (財)電力中央研究所 材料科学研究所 (〒240-0196 神奈川県横須賀市長坂 2-6-1)  
E-mail: marai@criepi.denken.or.jp



体温度とマトリックス温度は局所的な平衡状態、すなわち温度が等しいものとした。トランスピレーション冷却においては、冷却気体が気孔間をある速さをもって浸透するために、マトリックスと気体の温度は異なる。

本研究では、物質移動が定常状態にあるときの気体浸透と熱伝導を同時に受ける多孔質体の熱応力理論について示す。このために、気体の浸透とマトリックス中の熱伝導を分離して考え、それぞれの場の支配方程式を定式化する。その際、気体とマトリックスの気孔壁面での熱移動は、ふたつの別々の場の間で熱的相互作用を生じているとした。つぎに、多孔質体を規則的に球形状気孔が配置しているようモデル化し、この球面に気体の圧力変化が、マトリックスには温度変化が生じるとしたときの構成方程式（一般化された Hooke の法則）を導出する。ここで示される基礎理論により、多孔質体の問題は、気体の浸透場と熱伝導場を適切な圧力と温度境界条件のもとで解き、この解と表面で与えられた力学的境界条件のもとで熱応力を解くことに帰着される。最後に、三次元多孔質体の簡単な一応用例として、多孔質無限体に埋め込まれた球形状空孔にある温度の気体が圧入されるとき熱応力問題について示す。

## 2. 気体浸透と熱伝導の基礎理論

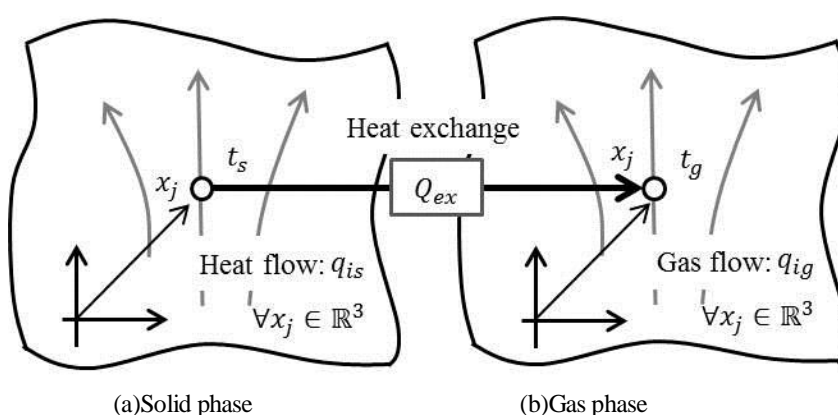


Fig.1 Schematic illustration of heat and gas flows in a porous solid

図 1 に示すように多孔質体をふたつの状態に分離し、それぞれの場の支配方程式について考える。すなわち、マトリックス中の熱伝導（以下、Solid phase と呼ぶ）と多孔質体中を透過する気体流れ（以下、Gas phase と呼ぶ）のふたつの場について考えるものとする。もし、マトリックスの温度（以下、固体温度と呼ぶ）が気体の温度（以下、気体温度と呼ぶ）に比べて高いものと仮定すると、固体から気体への熱の移動（以下、簡単に熱的相互作用と呼ぶ）を生じる（気体温度と固体温度が逆の関係では、逆方向の熱移動となる）。ふたつの場の理論はそれぞれ別々に扱うが、任意点での熱交換を介してふたつの場が相互作用するものとする。

はじめに、Solid phase における場の支配方程式は、

$$\partial_i q_{si}(x_j) = -Q_{ex}(x_j) \quad (1)$$

と表せる。ここで、 $\partial_i = \partial/\partial x_i$ 、 $q_{si}$  は Solid phase での熱流束の  $x_i$  成分、 $Q_{ex}$  は点  $(x_j) \in \mathbb{R}^3$  での単位時間・単位体積当たりの熱交換量であり、気体に奪われた熱量であるためにマイナスの記号が付くことに注意する（気体から熱量が与えられる場合には、プラス記号）。また、下添え字の繰り返しはアインシュタインの総和規約に従う。

熱流束成分は、よく知られている熱伝導理論に従うものとする、

$$q_{si}(x_j) = -k_s \partial_i t_s(x_j) \quad (2)$$

と表される。ここで、 $k_s$  は多孔質体全体のみかけ上の熱伝導率であり、気孔率  $\phi$  の関数  $k_s = k_s(\phi)$ （付録 A 参照のこと）である。また、 $t_s$  は Solid phase 中の点  $(x_j) \in \mathbb{R}^3$  での温度、すなわち固体温度である。

一方、Gas phase においては、式(1)と同様の形式

$$\partial_i q_{gi}(x_j) = Q_{ex}(x_j) \quad (3)$$

(気体から熱量が与えられる場合には、マイナス記号) ならびに、気体の熱流束

$$q_{gi}(x_j) = \rho v_i c_p t_g(x_j) \quad (4)$$

ここで、 $q_{gi}$ は気体の熱流束、 $\rho$ は気体の密度、 $v_i$ は気体の流速、 $c_p$ は定圧比熱、 $t_g$ は点 $(x_j) \in \mathbb{R}^3$ での気体温度をそれぞれ表す。これに加えて、質量保存の法則

$$\partial_i(\rho v_i(x_j)) = 0 \quad (5)$$

ならびに圧力勾配に伴う気体の流速変化を規定する Darcy の法則

$$v_i(x_j) = -\left(\frac{\kappa}{\zeta}\right) \partial_i P(x_j) \quad (6)$$

を採用する。ここで、 $(\kappa/\zeta)$ は多孔質体の気体の透過係数であり、気孔率 $\phi$ の関数 $(\kappa/\zeta) = g(\phi)$ で与えられ、 $P$ は圧力をそれぞれ表す。なお、Darcy の法則の多孔質体への適用性については、著者<sup>(10)</sup>あるいは Zhang ら<sup>(11)</sup>によってそれぞれ有効性が実験的に検証されている。

さらに気体を理想気体とみなすと圧力と温度の関係は次式で関係付けられる。

$$P(x_j) = \rho R t_g(x_j) \quad (7)$$

ここで、 $R$ はガス定数である。以上は、物理的法則を規定する基礎式である。つぎに、以上に示した基礎式からそれぞれの phase に対する場の支配方程式を導出する。

はじめに、式(5)に式(6)を代入し、 $(\kappa/\zeta)$ 項を定数とみなすと、気体の圧力に対する場の支配方程式

$$\partial_i \partial_i P(x_j) = 0 \quad (8)$$

を得る。この方程式は Laplace 方程式と同形式である。

つぎに、式(2)を式(1)に代入し、熱伝導率 $k_s$ は $x_j$ に依存しないものと仮定すると、

$$k_s \partial_i \partial_i t_s(x_j) = Q_{ex}(x_j) \quad (9)$$

また、式(3)に式(4)を代入して、密度 $\rho$ ならびに定圧比熱 $c_p$ は $x_j$ に依存しない物性値であるものと仮定すると、

$$\rho c_p \partial_i (v_i(x_j) t_g(x_j)) = Q_{ex}(x_j)$$

となり、微分公式により左辺の括弧内を変形すると、

$$\rho c_p (v_i(x_j) \partial_i t_g(x_j) + t_g(x_j) \partial_i v_i(x_j)) = Q_{ex}(x_j)$$

さらに、この式に式(5)を代入することで、

$$\rho c_p v_i(x_j) \partial_i t_g(x_j) = Q_{ex}(x_j) \quad (10)$$

を得る。式(10)に式(6)と式(7)を代入して、

$$\rho c_p \left(-\frac{\kappa}{\zeta}\right) \partial_i P(x_j) \partial_i \left(\frac{P(x_j)}{\rho R}\right) = Q_{ex}$$

この方程式を整理すると、

$$\partial_i P(x_j) \partial_i P(x_j) = -\frac{R}{c_p} \left(\frac{\zeta}{\kappa}\right) Q_{ex}(x_j) \quad (11)$$

となる。式(9)と式(11)から熱交換量 $Q_{ex}$ を消去すると、

$$\partial_i \partial_i t_s(x_j) + \frac{c_p}{R k_s} \left(\frac{\kappa}{\zeta}\right) \partial_i P(x_j) \partial_i P(x_j) = 0$$

式(8)を考慮してこの方程式をまとめると、

$$\partial_i \partial_i (t_s(x_j) + \omega P^2(x_j)) = 0 \quad (12)$$

を得る．ここで，

$$\omega := \frac{c_p}{2Rk_s} \left( \frac{\text{K}}{\text{C}} \right)$$

である．この式の被微分項を $\Phi(x_j)$ でまとめることによって，

$$\partial_i \partial_i \Phi(x_j) = 0 \quad (13)$$

なる Laplace 方程式を得る．ここで，

$$\Phi(x_j) := t_s(x_j) + \omega P^2(x_j)$$

である．ここで， $:=$ は定義を表す数学記号である．この方程式は，固体温度と気体の圧力が連成された場の支配方程式である．結局，式(8)の気体の圧力方程式と式(13)の固体温度と気体の圧力が連成された場の支配方程式を適切な境界条件のもとで解けばよい．これらの連立支配方程式からは，多孔質体( $V \in \mathbb{R}^3$ )中の $(x_j)$ 点での気体の圧力 $P(x_j)$ と固体温度 $t_s(x_j)$ のみが得られる．このふたつの状態量から，式(6)により気体の流速 $v_i(x_j)$ ，式(7)により気体温度 $t_g(x_j)$ を得ることで Solid phase と Gas phase における状態量がすべて求められる．

ところで，熱電対により多孔質体の温度を計測することを考えてみる．熱電対先端は有限形状であることから，工学的に計測された温度（以下，計測温度と呼ぶ）は，固体温度と気体温度の平均値になっているであろう．このことから，計測温度 $t(x_j)$ は，

$$t(x_j) = (1 - \phi)t_s(x_j) + \phi t_g(x_j) \quad (14)$$

で与えることができるものと考えられる．

### 3. 多孔質弾性体の基礎理論

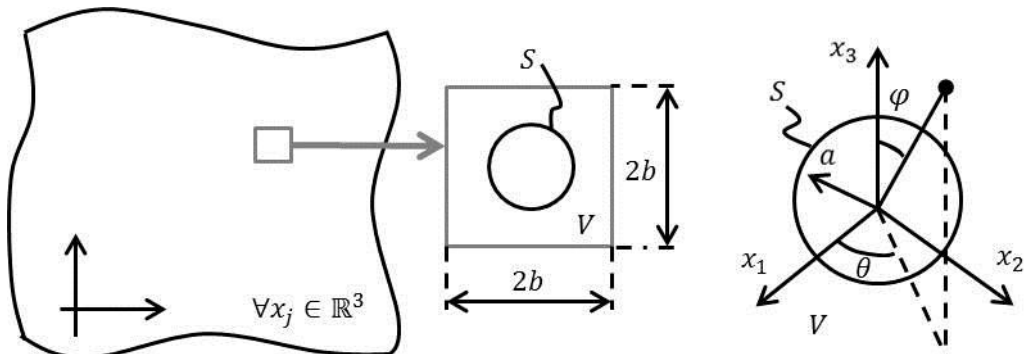


Fig.2 Schematic illustration of a porous solid modeled with spherical cavity spaced regularly

本章では，はじめに図2に示す球形状気孔が規則的に配置した多孔質弾性体に対する一般化された Hooke の法則を導く．球形状気孔は，間隔 $2b$ で三次元的に規則配置しているものとする．このように気孔配置を理想化することにより基礎理論の構築を容易にする．この理想化された多孔質弾性体から気孔を中心として長さ $2b$ の立方体を仮想的に切り出し，一軸引張応力 $\sigma(>0)$ を受けることでこの仮想立方体 ( $V \subset \{|x_i| \leq b\}$ ) に生じるひずみを求めることから始めよう．

仮想立方体に含まれる半径 $a$ の球形状気孔の中心を原点として球座標系 $(r, \theta, \varphi)$ ならびに直角座標系 $(x_i \in \mathbb{R}^3)$ をとる．この仮想立方体が一軸引張応力 $\sigma_{33}$ を受けると，作用させた応力の大きさに応じて多孔質弾性体に生じるひずみは，仮想立方体において球形状気孔がないマトリックス中のひずみテンソル $e_{ij}$ と球形状気孔がゆがむことによって生じた気孔の体積変化に対する仮想立方体の体積の比として定義されるひずみテンソル（以下，

Distortion strain テンソルと呼ぶ)  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  との和によって与えられるものと考えられる. ここで, 前章で論じた気体の圧力を考慮するために, Distortion strain テンソルには, 引張応力によってゆがんだ球の体積変化率に加えて, 気体の基準圧力からの圧力差 (あるいは内圧差)  $\hat{P}$  により膨張した気孔の体積変化率の寄与も含むようにする.

多孔質弾性体に生じるひずみテンソルは,

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \hat{\varepsilon}_{ij} \quad (15)$$

で表される. ここで,

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{S \subset (r=a, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < \pi)} (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (16)$$

であり,  $u_i|_{r=a}$  は球面  $S \subset (r = a, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < \pi)$  上での変位ベクトル,  $n_i$  は多孔質弾性体領域 ( $V$ ) に向けた単位法線ベクトル ( $n_k n_k = 1$ ) をそれぞれ表す.

式(15)の右辺第一項は, よく知られている均質弾性体の一般化された Hooke の法則

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \delta_{ij} \hat{t}_s \quad (17)$$

である. ここで,  $\mu$  は横弾性係数,  $\nu$  は Poisson 比,  $\delta_{ij}$  はクロネッカのデルタ記号である. また,  $\alpha$  は熱膨張係数,  $\hat{t}_s$  は応力ゼロでの温度を基準温度としたときにこの基準温度からの変化量を示す.

一方, Distortion strain テンソル(16)は, 引張応力  $\sigma_{33}$  を無限遠方で受ける球形状気孔の問題の解と無限弾性体に埋め込まれた球形状気孔が内圧差  $\hat{P}$  を受ける問題の解を重ね合わせることで得られる. この結果 (付録 B 参照) は,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{11} &= \frac{(1-\nu)}{4\mu} \left( \frac{1}{1+\nu} - \frac{10}{7-5\nu} \right) \phi \sigma_{33} + \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{P}}{\mu} \right) \phi \\ \hat{\varepsilon}_{22} &= \hat{\varepsilon}_{11} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\hat{\varepsilon}_{33} = \frac{(1-\nu)}{4\mu} \left( \frac{1}{1+\nu} + \frac{20}{7-5\nu} \right) \phi \sigma_{33} + \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{P}}{\mu} \right) \phi$$

となる. ここで,  $\phi$  は気孔率であり

$$\phi = \frac{\pi}{6} \left( \frac{a}{b} \right)^3$$

である.

重ね合わせの原理に基づいて, 一軸引張応力下での結果 (式(18)) を一般の応力場に対応した Distortion strain テンソル  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  に拡張すれば,

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{(1-\nu)}{4\mu} \phi \left\{ \frac{30}{7-5\nu} \sigma_{ij} + \left( \frac{1}{1+\nu} - \frac{10}{7-5\nu} \right) \delta_{ij} \sigma_{kk} \right\} + \frac{3}{2} \left( \frac{\hat{P}}{\mu} \right) \delta_{ij} \phi \quad (19)$$

となる.

最後に, 式(15)に式(17)と式(19)を代入することで多孔質弾性体に対するつぎの一般化された Hooke の法則を得る.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \{ \chi_1 \sigma_{ij} - \chi_2 \delta_{ij} \sigma_{kk} \} + \frac{3}{2} \left( \frac{\hat{P}_{ij}}{\mu} \right) \phi + \alpha_{ij} \hat{t}_s \quad (20)$$

あるいは応力テンソルについて解くと,

$$\frac{\sigma_{ij}}{2\mu} = \frac{1}{\chi_1} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\chi_2}{\chi_1 - 3\chi_2} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) - \frac{1}{\chi_1 - 3\chi_2} \left\{ \frac{3}{2} \left( \frac{\hat{P}_{ij}}{\mu} \right) \phi + \alpha_{ij} \hat{t}_s \right\} \quad (21)$$

となり, 応力に対する一般化された Hooke の法則を得る. ここで,

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad \hat{P}_{ij} = \hat{P} \delta_{ij}$$

$$\chi_1 = 1 + 15 \left( \frac{1-\nu}{7-5\nu} \right) \phi$$

$$\chi_2 = \frac{\nu}{1+\nu} + \frac{3}{2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \left( \frac{1+5\nu}{7-5\nu} \right) \phi$$

である.

最後に, 多孔質弾性体に対する Navier の式を導出しよう. まず, ひずみテンソルは, 変位ベクトルを微分したつぎの形式で与えられる.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (22)$$

ここで,  $u_i(x_i)$  は媒体中の任意点  $x_i \in V$  での変位ベクトルを表す.

また, 応力テンソルのつり合い式は, よく知られるつぎのテンソル方程式

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0 \quad (23)$$

で与えられる.

多孔質体のための一般化された Hooke の法則(21)をつぎのように変形しておく.

$$\left( \frac{1-\bar{\nu}}{\mu} \right) \chi_1 \sigma_{ij} = 2(1-\bar{\nu}) \varepsilon_{ij} + \frac{2}{3} \bar{\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - F_{ij} \quad (24)$$

ここで,

$$\bar{\nu} := 3 \left( \frac{\chi_2}{\chi_1} \right)$$

ならびに,

$$F_{ij} := 3 \left( \frac{\phi}{\mu} \right) \hat{P}_{ij} + 2\alpha_{ij} \hat{t}_s$$

である.

式(24)を式(23)に代入し, これに式(22)を代入することでつぎの Navier の式を得る.

$$(1-\bar{\nu}) \partial_k \partial_k u_i + \left( 1 - \frac{1}{3} \bar{\nu} \right) \partial_i e = \partial_j F_{ij} \quad (25)$$

ここで,

$$e = \partial_k u_k$$

である. なお,  $\phi = 0$  とおくことで, 式(25)は均質弾性体で知られる物体力を含まない Navier の式と完全に一致する.

#### 4. 基礎式と境界条件

本章では, 多孔質体の弾性問題を解くのに必要な基礎式と境界条件をまとめておく. ただし, 微分記号は弾性学でなじみのある微分演算子記号を用いる. 直角座標系( $\forall x_i \in \mathbb{R}^3$ )のもとで, ある境界面( $S \subset V$ )で閉じられた有限体積領域( $V$ )の多孔質体について考える. ある境界面( $S_1 \subset S$ )で圧力分布  $P(S_1)$  が与えられ, 他の境界面( $S_1 \neq S_2 \subset S$ )で圧力勾配  $\partial_n P(S_2)$  あるいは気体の流速  $u_n = -(\kappa/\zeta) \partial_n P(S_2)$  が与えられている混合境界値問題を考えると, つぎの圧力に関する Laplace 方程式

$$\Delta P(x_i \in V) = 0 \quad (26)$$

ならびに圧力と固体温度が連成した Laplace の方程式

$$\Delta \Phi(t_s, P) = 0 \quad (27)$$

ここで,

$$\Phi(t_s, P) = t_s(x_i \in V) + \omega P^2(x_i \in V) \quad (28)$$

であり,

$$\omega := \frac{c_p}{2Rk_s} \left( \frac{\kappa}{\zeta} \right)$$

を解けばよい. なお, 微分方程式(27)を  $x_i \in V$  の関数として考えると, 非線形微分方程式となるが, 圧力  $P$ , 固体温度  $t_s$  を変数にもつ関数  $\Phi$  を導入することで Laplace 方程式に帰着できる点に注意してもらいたい. この方程式の解はよく知られており, 例えば Kellogg<sup>(12)</sup>あるいは Sneddon<sup>(13)</sup>の本に示された解を利用できる.

つぎに多孔質体の弾性問題においては, ある境界面 ( $S_1 \subset S$ ) で圧力分布  $P(S_1)$  が, さらに同じ境界面または別の境界面 ( $S_2 \subset S$ ) で表面力ベクトル  $t_i (S_1 \cup S_2 = S_{12} \subset S) = \sigma_{ij} n_j$  が与えられ, 他の境界面 ( $S - S_{12} = S_3 \subset S$ ) で変位ベクトル  $u_i(S_3)$  が与えられている混合境界値問題において, つぎの Navier の方程式 (非同次偏微分方程式)

$$(1 - \bar{\nu}) \Delta u_i + \left( 1 - \frac{1}{3} \bar{\nu} \right) \frac{\partial e}{\partial x_i} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \quad (29)$$

を解けば, 多孔質体に生じる熱応力を求めることができる.

## 5. 簡単な応用例—多孔質無限体の球空孔内面にある温度の気体が圧入される問題—

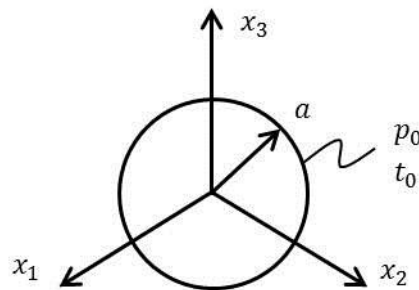


Fig.3 Spherical-shaped hole in a porous infinite solid

本章では, ここで示した基礎理論の応用例として, 多孔質無限体に埋め込まれた球空孔内面にある温度の気体が圧入されているときの熱応力問題について取りあげる. 図 3 に示すように半径  $a$  の球空孔における内面での固体温度が  $t_0$  で, 球空孔内では圧力  $p_0$  の気体が圧入されているものとする. このときの多孔質体中に生じる圧力  $p$  の半径  $r$  方向の変化は, 放射状に減衰するとともに, 固体温度  $t_s$  も同様の傾向となるであろう. 従って,  $r \rightarrow \infty$  にて  $(P, t_s) \rightarrow (p_\infty, t_\infty)$  のように無限遠方でこれらの状態量が基準値に漸近するような解となる. 以下ではこの解を求めてみる.

### 5・1 気体圧力と固体温度の解

この問題の境界条件は,

$$P(a) = p_0$$

$$t_s(a) = t_0$$

$$(P, t_s) \rightarrow (p_\infty, t_\infty) \text{ as } r \rightarrow \infty$$

と書ける.

球座標系  $(r, \theta, \varphi)$  下での Laplacian  $\Delta$  は,

$$\Delta = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r) + r^{-2}\sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + r^{-2}\sin^{-1}\theta\partial_\phi^2$$

のように直角座標系から座標変換される．問題の性質から，状態量は $r$ のみの関数となるので，同演算子 $\Delta$ は，

$$\Delta = r^{-2}d_r(r^2d_r)$$

これにより，各状態量に対する方程式はつぎのようになる．はじめに，圧力の方程式(26)は

$$r^{-2}d_r(r^2d_r)P(r) = 0 \quad (30)$$

つぎに温度・圧力の方程式(27)は

$$r^{-2}d_r(r^2d_r)\Phi(r) = 0 \quad (31)$$

ここで， $\Phi(r) = t_s(r) + \omega P^2(r)$ である．

境界条件を考慮して微分方程式(30)を解くと，その圧力解は，

$$P(r) = (p_0 - p_\infty)\left(\frac{a}{r}\right) + p_\infty \quad (32)$$

つぎに解(32)との類推から微分方程式(31)の解は，

$$\Phi(r) = (\Phi_0 - \Phi_\infty)\left(\frac{a}{r}\right) + \Phi_\infty \quad (33)$$

そして， $\Phi_0 = t_0 + \omega p_0^2$ ， $\Phi_\infty = t_\infty + \omega p_\infty^2$ ， $\Phi(r) = t_s(r) + \omega P^2(r)$ を式(33)に代入することで，固体温度解

$$t_s(r) = (t_0 - t_\infty)\left(\frac{a}{r}\right) + \omega(p_0 - p_\infty)^2\left(\frac{a}{r}\right)\left\{1 - \left(\frac{a}{r}\right)\right\} + t_\infty \quad (34)$$

を得る．

## 5・2 熱応力解

本問題の境界条件は，

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a) &= -\hat{P} \\ &= -p_0 + p_\infty \end{aligned}$$

ならびに基準温度からの温度差

$$\hat{t}_s = t_0 - t_\infty$$

と書ける．

式(24)より，

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{2\mu} &= \frac{1}{\chi_1}\left(\varepsilon_{rr} + \frac{1}{3}\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\varepsilon_{kk}\right) - \frac{1}{2\chi_1}\frac{1}{1-\bar{\nu}}F(r) \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu} &= \frac{\sigma_{\phi\phi}}{2\mu} = \frac{1}{\chi_1}\left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1}{3}\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\varepsilon_{kk}\right) - \frac{1}{2\chi_1}\frac{1}{1-\bar{\nu}}F(r) \end{aligned} \quad (35)$$

ここで，

$$F(r) = \left\{3\left(\frac{\hat{P}}{\mu}\right)\phi + 2\alpha\hat{t}_s\right\}$$

$$\bar{\nu} = 3\left(\frac{\chi_2}{\chi_1}\right)$$



一方、応力テンソルのつりあい式は,

$$r d_r \sigma_{rr} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (36)$$

さらに $r$ 方向の変位 $u$ とひずみテンソル $(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\varphi\varphi})$ の関係は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= d_r u \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\varphi\varphi} = u r^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

式(36)に式(35), (37)を代入することで,

$$d_r \{ r^{-2} d_r (r^2 u) \} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3-2\bar{\nu}} \right) d_r F$$

この変位に関する微分方程式の解は,

$$u = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3-2\bar{\nu}} \right) \frac{1}{r^2} \int_a^r F(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{1}{2} C_1 r + C_2 r^{-2} \quad (38)$$

一方,  $r \rightarrow \infty$ にて $u \rightarrow 0$ より未定係数 $C_1$ はゼロでなければならない. また, 未定係数 $C_2$ を求めるために式(38)を式(35)の第一式に代入することで, 半径方向の応力成分を得る.

$$\frac{\chi_1}{2\mu} \sigma_{rr} = -\frac{3}{(3-2\bar{\nu})} \frac{1}{r^3} \int_a^r F(\xi) \xi^2 d\xi - 2 \frac{C_2}{r^3}$$

球空孔面に作用する気体圧力に関する境界条件を上式に代入することで未定係数 $C_2$ ,

$$C_2 = \frac{\chi_1}{4\mu} a^3 (p_0 - p_\infty)$$

を得る.

結局, 熱応力解は, 気体圧力解と固体温度解(32), (34)を考慮することで,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_1}{2\mu} \sigma_{rr} &= -\frac{3}{(3-2\bar{\nu})} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left( \frac{r}{a} - 1 \right) \left\{ \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{\phi}{\mu} \right) (p_0 - p_\infty) + \alpha(t_0 - t_\infty) \right] \left( \frac{r}{a} + 1 \right) + \alpha\omega(p_0 - p_\infty)^2 \left( \frac{r}{a} - 1 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\chi_1}{2\mu} (p_0 - p_\infty) \left( \frac{a}{r} \right)^3 \end{aligned} \quad (39)$$

ならびに,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_1}{2\mu} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\chi_1}{2\mu} \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{3-2\bar{\nu}} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left\{ \frac{3}{4} \left( \frac{\phi}{\mu} \right) (p_0 - p_\infty) \left( 3 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) + \alpha(t_0 - t_\infty) \left( 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha\omega(p_0 - p_\infty)^2 \left( 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) \right\} + \frac{\chi_1}{4\mu} (p_0 - p_\infty) \left( \frac{a}{r} \right)^3 \end{aligned} \quad (40)$$

となる.

### 5・3 計算結果

気体圧力, 固体温度, 気体温度, 計測温度, 熱応力分布を計算した結果を以下に示す. なお, 各状態量を直接用いる代わりにつぎに示す無次元化量を用いた.

$$(1) \text{ 気体圧力: } \tilde{P} = (\tilde{p}_0 - 1) \frac{1}{\tilde{r}} + 1 \quad (1 \leq \tilde{r} < \infty)$$

$$(2) \text{ 固体温度: } \tilde{t}_s = (\tilde{t}_0 - 1) \frac{1}{\tilde{r}} + 1 + \tilde{\omega} \frac{1}{\tilde{r}} \left( 1 - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \quad (1 \leq \tilde{r} < \infty)$$

$$(3) \text{ 気体温度: } \tilde{t}_g = \frac{p_\infty}{\rho R t_\infty} \tilde{P} \quad (1 \leq \tilde{r} < \infty)$$

$$(4) \text{ 計測温度: } \tilde{t} = (1 - \phi)\tilde{t}_s + \phi\tilde{t}_g \quad (1 \leq \tilde{r} < \infty)$$

(5) 多孔質体の熱応力:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{2\mu} &= \frac{1}{\chi_1} \left[ -\frac{3}{(3-2\nu)} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right)^3 (\tilde{r}-1) \left\{ \left[ \frac{3}{4} \phi \left( \frac{p_0 - p_\infty}{\mu} \right) + \alpha(t_0 - t_\infty) \right] (\tilde{r}+1) + \alpha t_\infty \tilde{\omega} (\tilde{r}-1) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{p_0 - p_\infty}{\mu} \right) \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right)^3 \right] \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{2\mu} = -\frac{3}{2\chi_1} \left( \frac{1}{3-2\nu} \right) \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right)^3 \left\{ \frac{3}{4} \phi \left( \frac{p_0 - p_\infty}{\mu} \right) \left( 3 + \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \right) + \alpha(t_0 - t_\infty) \left( 1 + \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \right) + \alpha t_\infty \tilde{\omega} \left( 1 - \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right)^2 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( \frac{p_0 - p_\infty}{\mu} \right) \left( \frac{1}{\tilde{r}} \right)^3 \end{aligned}$$

ここで,

$$\tilde{r} = \frac{r}{a}, \tilde{P} = \frac{P}{p_\infty}, \tilde{t} = \frac{t}{t_\infty}, \tilde{\omega} = \omega \frac{(p_0 - p_\infty)^2}{t_\infty} = \frac{c_p}{2Rk_s} \left( \frac{\kappa}{\zeta} \right) \frac{(p_0 - p_\infty)^2}{t_\infty}$$

である.

本計算に用いた物性値を表 1 に示す.

Table 1 Physical parameters employed in this calculation

Nomenclature	Symbol	Assumed value
Specific heat	$c_p$ [J/kg K]	1000
Gas density	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1.3
Gas constant	$R$ [J/kg K]	287.03
Thermal conductivity of matrix	$\lambda_s$ [W/mK]	1.0
Elastic modulus	$E$ [GPa]	40.0
Poisson's ratio	$\nu$	0.3
Coefficient of thermal expansion	$\alpha$ [1/K]	$20 \times 10^{-6}$

本問題の境界条件として, 無限遠方での基準温度を $t_\infty = 293$ [K], 基準圧力を $p_\infty = 1.0 \times 10^5$ [Pa]とし, 球空孔内の気体圧力を $p_0/p_\infty = 4.0$ , 球空孔壁面の固体温度を $t_0/t_\infty = 2.0$ と仮定した. ここで仮定した境界条件は, 球空孔内に高温の気体を注入した状態を想定したものである. よって, 球空孔内の気体温度が熱伝達によって球空孔壁面を加熱することになるために気体温度に比べて壁面での固体温度は低くなる. 実際には, 気体からの輻射や Newton の冷却法則によって壁面での固体温度 (あるいは測定温度) が規定されるものと考えられるが, 熱的境界面に対する実験データが不足しているため, ここでは壁面上での気体温度に比べて固体温度が低くなるように適当に仮定した. また本計算においては, 気孔率 $\phi = 0.01, 0.2, 0.3, 0.4$ , ならびに透過係数 $\kappa/\zeta = 5 \times 10^{-11}, 3 \times 10^{-10}, 5 \times 10^{-10}$ が変化したときに多孔質体中の温度, 熱応力に及ぼす影響を調べた.

図 4 に気孔率 $\phi = 0.4$ , 透過係数 $\kappa/\zeta = 5 \times 10^{-10}$ のときに得られる温度分布を示す. 同図には, 気体温度 $\tilde{t}_g$ , 固体温度 $\tilde{t}_s$ , 計測温度 $\tilde{t}$ がそれぞれ示してある. 球空孔から多孔質体中に浸透した気体の気体温度は, 球空孔壁面から遠方になるにつれて低下するとともに, 固体温度ならびに計測温度もそれと対応するようにして低下する.

図 5 に計測温度分布 $\tilde{t}$ を示す. ここでは, 気孔率 $\phi = 0.4$ のもとで透過係数 $\kappa/\zeta$ が変化したときの計測温度分布と透過係数 $\kappa/\zeta = 5 \times 10^{-10}$ のもとで気孔率 $\phi$ が変化したときの計測温度分布をそれぞれ示している. 図より, 透過係数が増加するにつれて計測温度はやや上昇するがその変化量は小さい. これに対して, 気孔率の変化が計測温度に及ぼす影響は大きく, 気孔率の増加に伴って計測温度は上昇する.

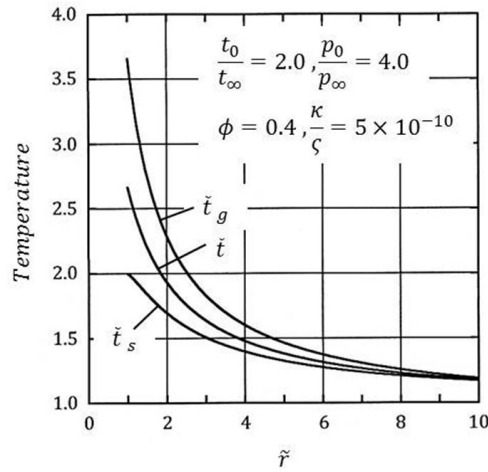


Fig.4 Temperature distribution in a porous infinite solid

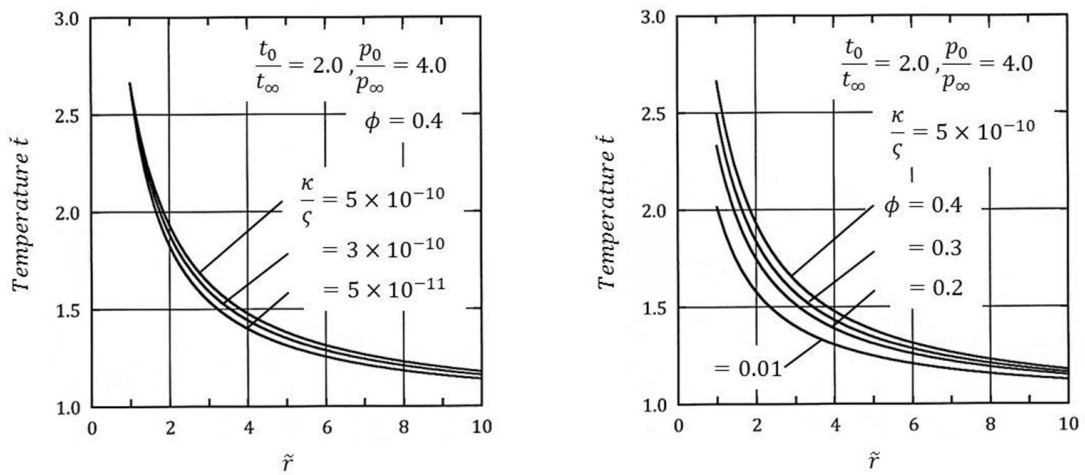


Fig.5 Influence of gas permeability and porosity on temperature in a porous infinite solid

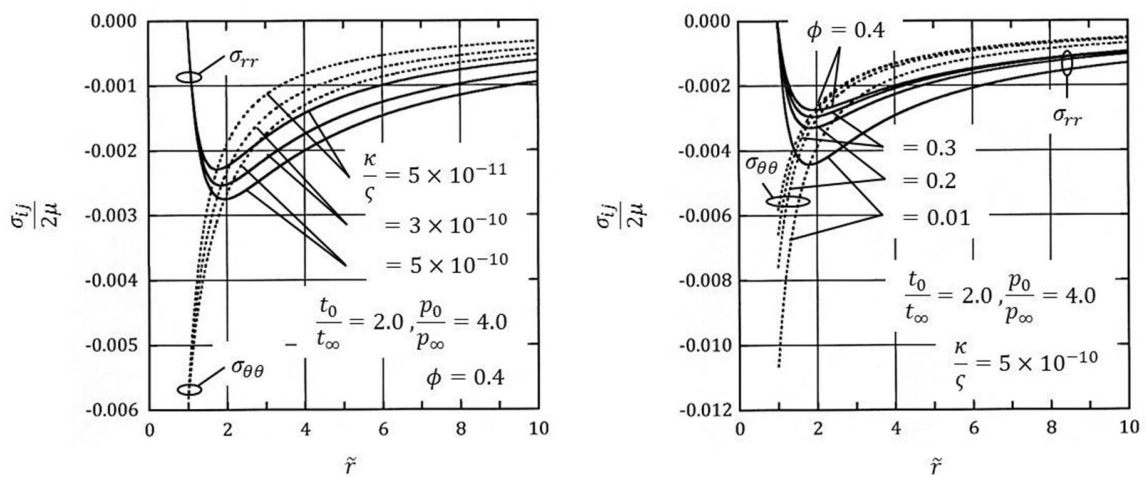


Fig.6 Influence of gas permeability and porosity on stress distribution in a porous infinite solid

図 6 に半径方向と周方向の応力分布 ( $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ) を示す. 先の結果と対応するように, 気孔率  $\phi = 0.4$  のもとで透過係数  $\kappa/\zeta$  が変化したときの応力分布と透過係数  $\kappa/\zeta = 5 \times 10^{-10}$  のもとで気孔率  $\phi$  が変化したときの応力分布

をそれぞれ示した。また、図中の実線は半径方向応力成分 $\sigma_{rr}$ 、破線は周方向応力成分 $\sigma_{\theta\theta}$ をそれぞれ示す。いずれの応力成分も圧縮状態にある。これは球空孔壁面での測定温度が遠方でのそれに比べて高い状態にあることによる。半径方向応力成分は、球空孔壁面で気体圧力に一致し、その後半径方向に沿って圧縮側へ増加、減少する。周方向応力成分は、球空孔壁面で最も高い圧縮応力となり、半径方向に沿って減少する。透過係数、気孔率が応力値に及ぼす影響については、透過係数が増加するにつれていずれの応力成分も圧縮側へ高くなる。一方、気孔率の影響においては、気孔率が低下するにつれて応力成分は圧縮側へ高くなる。よって、先に示した気孔率に対する測定温度の変化傾向とは異なり、気孔率の増加によって低下した弾性係数の影響が熱応力に強く及ぼしたことがわかる。

## 6. 結 言

本論文では、気体の浸透と熱伝導を受けるときの多孔質体に生じる熱応力を解析するための基礎理論を示した。気体の浸透と熱伝導問題は、気体圧力 $P$ に関する Laplace 方程式ならびに固体温度と気体圧力からなる関数 $\phi$ に関する Laplace 方程式を適切な境界条件のもとで解く混合境界値問題に帰着されることを示した。つぎに気孔壁面に働く気体圧力と熱膨張を考慮した多孔質体のための構成方程式を導出した。この方程式に基づき変位ベクトルに関する Navier の方程式を示した。最後に、本理論の簡単な応用例として、多孔質無限体中に埋め込まれた球形状空孔の内面に冷却気体が圧入されたときの問題に対する閉じた解を示した。

## 付 録 A

多孔質体全体のみかけ上の熱伝導率 $k_s$ は、図2に示すように球形状気孔が配置している場合には次式で与えられる。

$$k_s(\phi) = \lambda_s \left( 1 - \frac{\pi}{4} \left( \frac{6\phi}{\pi} \right)^{2/3} \right) \quad (0 \leq \phi < \frac{\pi}{6})$$

ここで、 $\lambda_s$ はマトリックスそのものの熱伝導率である。

## 付 録 B

式(18)の Distortion strain テンソルは、引張応力を無限遠方で受ける球形状気孔の問題の解<sup>(14)</sup>と無限弾性体に埋め込まれた球形状気孔が内圧 $P$ を受ける問題の解を重ね合わせることで得られる球面上での変位ベクトル $u_i|_{r=a}$  ( $i = r, \theta, \varphi$ )を利用することで求めることができる。例えば、 $x_3$ 軸方向への一軸引張応力 $\sigma_{33}$ 下での重ね合わせによる変位ベクトル解は、

$$\begin{aligned} \frac{4\mu u_r|_{r=a}}{(1-\nu)a} &= \left\{ \left( \frac{1}{1+\nu} + \frac{5}{7-5\nu} \right) + \frac{15}{7-5\nu} \cos 2\varphi \right\} \sigma_{33} + \frac{2}{1-\nu} P \\ \frac{4\mu u_\theta|_{r=a}}{(1-\nu)a} &= 0 \\ \frac{4\mu u_\varphi|_{r=a}}{(1-\nu)a} &= -\frac{15\sigma_{33}}{7-5\nu} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (A-1)$$

となる。

一方、直角座標系下での球形状気孔面上の単位法線ベクトル

$$n_1 = \sin\varphi \cos\theta \quad n_2 = \sin\varphi \sin\theta \quad n_3 = \cos\varphi \quad (A-2)$$

球気孔面の微小面積 $dS$

$$dS = a^2 \sin\varphi d\varphi d\theta \quad (A-3)$$

ならびに仮想立方体の体積 $V$

$$V := (2b)^3 = 8b^3 \quad (A-4)$$

さらに直角座標系と球座標系の間での変位ベクトルの変換関係

$$\begin{aligned} u_1 &= u_r \cos \theta \sin \varphi - u_\theta \sin \theta + u_\varphi \cos \theta \cos \varphi \\ u_2 &= u_r \sin \theta \sin \varphi + u_\theta \cos \theta + u_\varphi \sin \theta \cos \varphi \\ u_3 &= u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (A-5)$$

を式(16)に代入して計算すると,

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{11} &= \frac{(1-\nu)}{4\mu} \left( \frac{1}{1+\nu} - \frac{10}{7-5\nu} \right) \phi \sigma_{33} + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{\mu} \right) \phi \\ \hat{\varepsilon}_{22} &= \hat{\varepsilon}_{11} \end{aligned} \quad (A-6)$$

$$\hat{\varepsilon}_{33} = \frac{(1-\nu)}{4\mu} \left( \frac{1}{1+\nu} + \frac{20}{7-5\nu} \right) \phi \sigma_{33} + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{\mu} \right) \phi$$

を得る.

## 文 献

- (1) Polyaev, V.M., Mozhaev, A.P., Galitseysky, B.M., and Lozhkin, A.L., "A Study of Internal Heat Transfer in Non uniform Porous Structures", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 12, No.4 (1996), pp.426-432.
- (2) Lashet, G., "Homogenization of the Fluid Flow and Heat Transfer in Transpiration Cooled Multi-layer Plates", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 168, No.1-2 (2004), pp.277-288.
- (3) Cerri, G., Giovannelli, A., Battisti, L., and Fedrizzi, R., "Advances in Effusive Cooling Techniques of Gas Turbine", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 27, No.4 (2007), pp.692-698.
- (4) Sozer, E., and Shyy, W., "Modeling of Fluid Dynamics and Heat Transfer Through Porous Media for Liquid Rocket Propulsion", *Proceedings of 43<sup>rd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, Paper No. AIAA 2007-5549 (2007).
- (5) Biot, M.A., "General Theory of Three-dimensional Consolidation", *Journal of Applied Physics*, Vol. 12, No.2 (1941), pp.155-164.
- (6) Barry, S.I., Mercer, G.N., and Zoppou, C., "Approximate and Analytic Solutions for Deformation of Finite Porous Filters", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, No.4 (1997), pp.929-934.
- (7) Youssef, H.M., "Theory of Generalized Porothermoelasticity", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.44, No.2 (2007), pp.222-227.
- (8) Feng, Z.C., He, B., and Lombardo, S.J., "Stress Distribution in Porous Ceramic Bodies During Binder Burnout", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, No.4 (2002), pp.497-501.
- (9) 倉茂道夫, "流体を含む多孔質弾性体の熱応力 (基礎式の検討)", 日本機械学会論文集 A 編, Vol.54, No. 507 (1988), pp.1980-1986.
- (10) 荒井正行, "ガスタービン翼高効率冷却のための多孔質セラミック遮熱コーティングの開発—第 1 報:溶射条件の検討—", 電力中央研究所研究報告, Q09004 (2011).
- (11) Zhang, C., Li, W-Y., Planche, M-P., Li, C-X., Liao, H., Li, C-J., and Coddet, C., "Study on Gas Permeation Behavior Through Atmospheric Plasma-Sprayed Ytria Stabilized Zirconia Coating", *Surface & Coatings Technology*, Vol. 202, No.20 (2008), pp.5055-5061.
- (12) Kellogg, O.D., *Foundations of Potential Theory* (1929), Dover Publications, Inc.
- (13) Sneddon, I.N., *Fourier Transforms* (1995), Dover Publications, Inc.
- (14) Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity* (1987), pp.396-398, McGraw-Hill International Edition.