
第一章 自适应滤波引言

- 线性滤波
- 最优滤波
- 自适应滤波
- 自适应滤波应用举例
- 维纳滤波
- 卡尔曼滤波

1.2 维纳滤波

1.2 维纳滤波

一 维纳滤波问题

$y(n)$ ----期望输出(参考信号), $x(n)$ -----输入信号, $e(n)$ -----误差信号

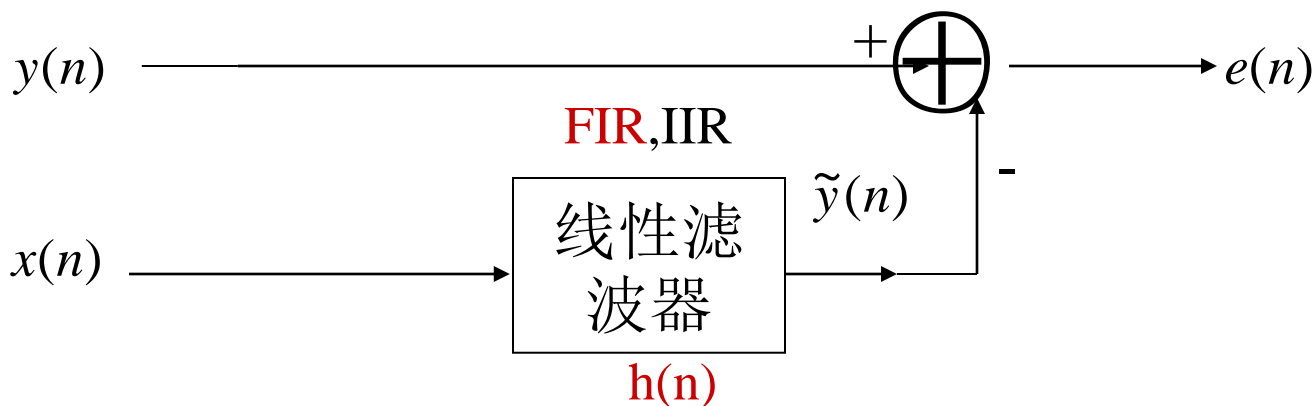
已知条件: $y(n)$, $x(n)$ 是均值为0的平稳离散时间信号,二阶矩(自相关, 互相关)已知.滤波器是线性的(**FIR**,**IIR**)

采用准则:最小均方误差(MMSE, Minimum Mean-Squared Error)

$$J = E[e^2(n)] = E\{[(y(n) - \tilde{y}(n))]^2\} = \min$$

设计滤波器[求 $h(n)$]使在最小均方误差意义下是最优滤波.

-----维纳滤波问题



1.2 维纳滤波

$$J = E[e^2(n)] = \min$$

二 Wiener-Hopf 方程

$$e(n) = y(n) - \tilde{y}(n) = y(n) - \sum_i h_i x(n-i)$$

设滤波器单位取样响应 $h(n) \rightarrow h_n$ 是实数:

$$\tilde{y}(n) = \sum_i h(i)x(n-i) = \sum_i h_i x(n-i)$$

$$\frac{\partial J}{\partial h_j} = 2E[e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial h_j}] = -2E[e(n)x(n-j)] = 0, \forall j, n$$

$$\therefore E[e(n)x(n-j)] = 0, \forall j, n$$

$$E[y(n)x(n-j) - \sum_i h_i x(n-i)x(n-j)] = 0$$

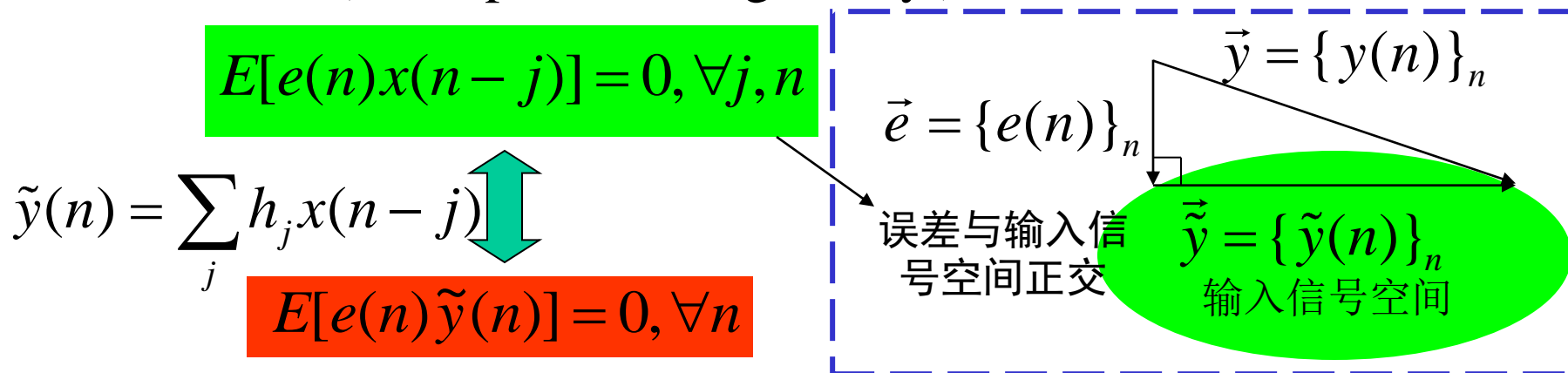
定义: $r_c(j) = E[y(n)x(n-j)]$

$$r(j) = E[x(n)x(n-j)]$$

则: $r_c(j) = \sum_i h_i r(j-i), \forall j \quad \longrightarrow \quad \text{Wiener-Hopf 方程}$

1.2 维纳滤波

三 正交原理(Principle of orthogonality)



正交原理:线性最优滤波(维纳滤波)的充要条件是滤波器的输出(参考信号即期望信号的估计)与误差(估计与参考信号的差)正交.

而: $e(n) = y(n) - \tilde{y}(n) \Rightarrow y(n) = \tilde{y}(n) + e(n), \forall n$

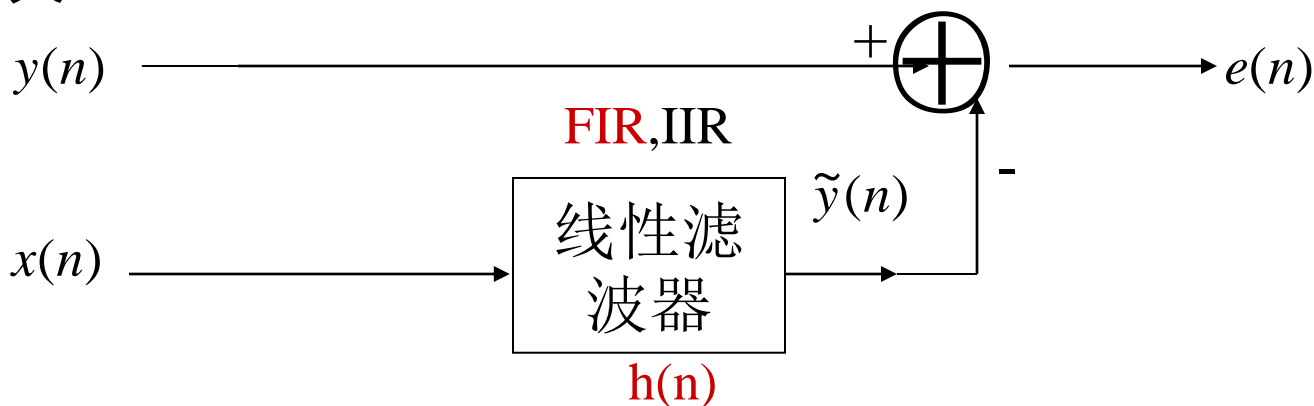
$\tilde{y}(n) = \sum_i h_i x(n-i)$ ← \tilde{y} 是输入信号空间的一个矢量

推论1:线性最优滤波(维纳滤波)的最优估计是参考信号即期望信号在输入信号空间的正交投影.

$$y(n) = \tilde{y}(n) + e(n), \forall n$$

$$E[e(n)\tilde{y}(n)] = 0, \forall n$$

推论2:线性最优滤波(维纳滤波)等价于将参考信号分解为两个正交分量(误差信号分量和滤波器输出信号分量), 误差信号分量与输入信号(正交)不相关, 滤波器输出的信号分量与输入信号(不正交)相关.



1.2 维纳滤波

四 N阶FIR维纳滤波器的解, $0 \leq i \leq N-1$

$$\tilde{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) \quad \xleftarrow{\text{FIR}} \quad \tilde{y}(n) = \sum_i h_i x(n-i)$$

输入: $\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$

系数: $\mathbf{H} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T$

输出: $\tilde{y}(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{X}(n) = \mathbf{X}^T(n) \mathbf{H}$

$$E[e(n)x(n-j)] = 0; 0 \leq j \leq N-1, \forall n \Rightarrow E[e(n)\mathbf{X}(n)] = 0; \forall n$$

$$E\{[y(n) - \mathbf{H}^T \mathbf{X}(n)]\mathbf{X}(n)\}$$

$$= E[y(n)\mathbf{X}(n)] - \underbrace{E[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]}_{\mathbf{R}_{xx}} \mathbf{H} = 0$$

$$\therefore \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{yx} \\ \implies \mathcal{O}(N^2)$$

1.2 维纳滤波

其中:

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(N-2) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r(N-1) & r(N-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$r(p) = E[x(n)x(n-p)]$$

$$\mathbf{r}_{yx} = \begin{bmatrix} r_c(0) \\ r_c(1) \\ \vdots \\ r_c(N-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_{xx}^T = \mathbf{R}_{xx}$ (对称), 且具有 *Toplitz* 性质

$$r_c(p) = E[y(n)x(n-p)]$$

1.2 维纳滤波

五 N阶FIR维纳滤波器的最小均方误差 J_{\min}

$$J = E[e^2(n)] = E\{[(y(n) - \tilde{y}(n))]^2\}$$

$$\tilde{y}(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{X}(n) = \mathbf{X}^T(n) \mathbf{H}$$

$$\begin{aligned} J &= E[y^2(n)] - 2E[y(n)\mathbf{H}^T \mathbf{X}(n)] + E[\mathbf{H}^T \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\mathbf{H}] \\ &= E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\min} &= E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt} \\ &= E[y^2(n)] - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt} \\ &= E[y^2(n)] - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{r}_{yx} \end{aligned}$$

$$* E[y(n)\mathbf{X}^T(n)] = \mathbf{r}_{yx}^T = \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \iff \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{yx}$$

1.2 维纳滤波

六 N阶FIR维纳滤波器的误差性能曲面 (Error-Performance Surface)

$$J(\mathbf{H}) = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} \quad \text{二次曲面}$$



误差性能曲面 (Error-Performance Surface)

$$J(\mathbf{H}) - J_{\min} = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} - \\ \{ E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt} \}$$

$$J(\mathbf{H}) = J_{\min} + (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})^T \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})$$



误差性能曲面 (Error-Performance Surface)

$$\mathbf{r}_{yx} = \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt}; \mathbf{r}_{yx}^T = \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx}$$

$$J(\mathbf{H}) - J_{\min} = E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} -$$

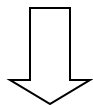
$$\underbrace{\mathbf{H}^T \mathbf{r}_{yx}}_{\text{cloud}} \cdot \{ E[y^2(n)] - 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt} \}$$

$$= -2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} + 2\mathbf{r}_{yx}^T \mathbf{H}_{opt} - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt}$$

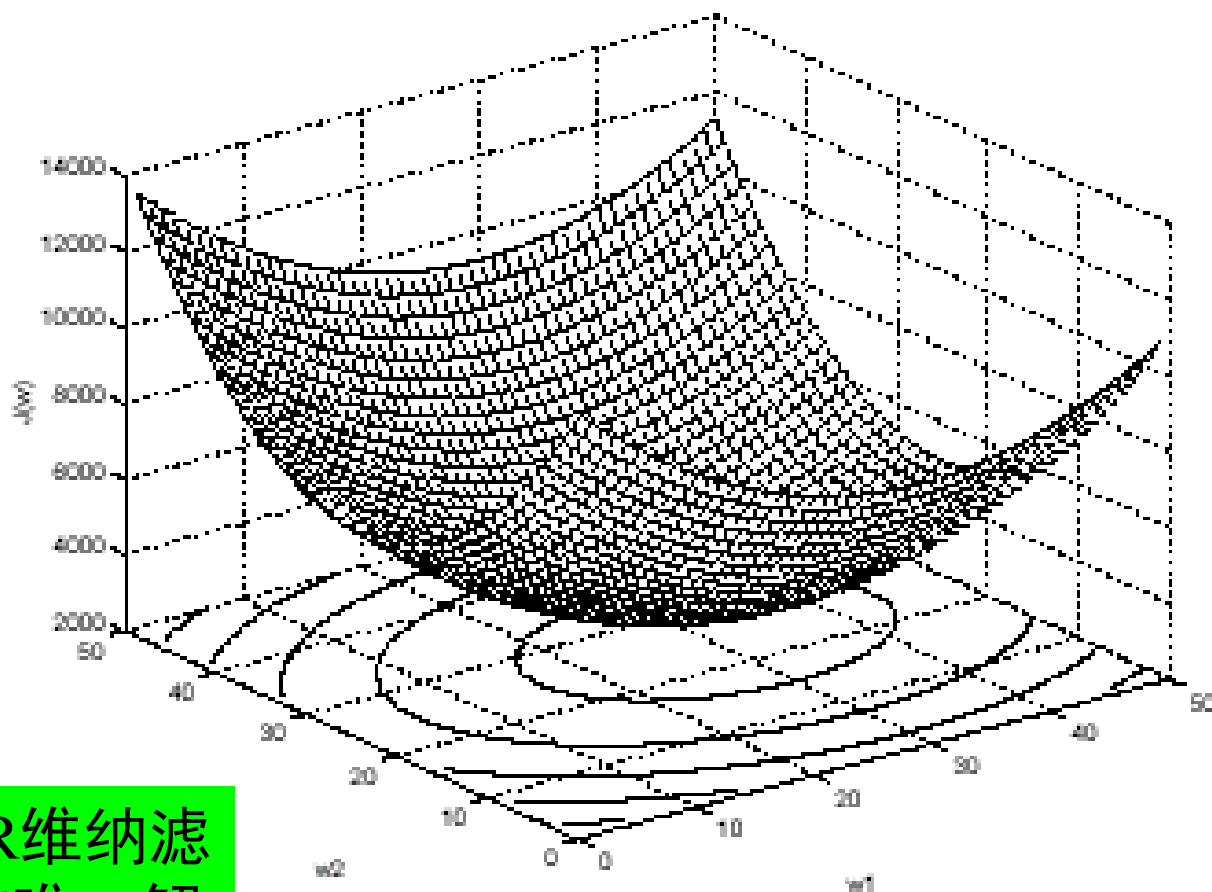
$$J(\mathbf{H}) - J_{\min} = -\mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} +$$

$$2\mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt} - \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt}$$

$$= -\mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} + \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}_{opt}$$



$$J(\mathbf{H}) = J_{\min} + (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})^T \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{opt})$$



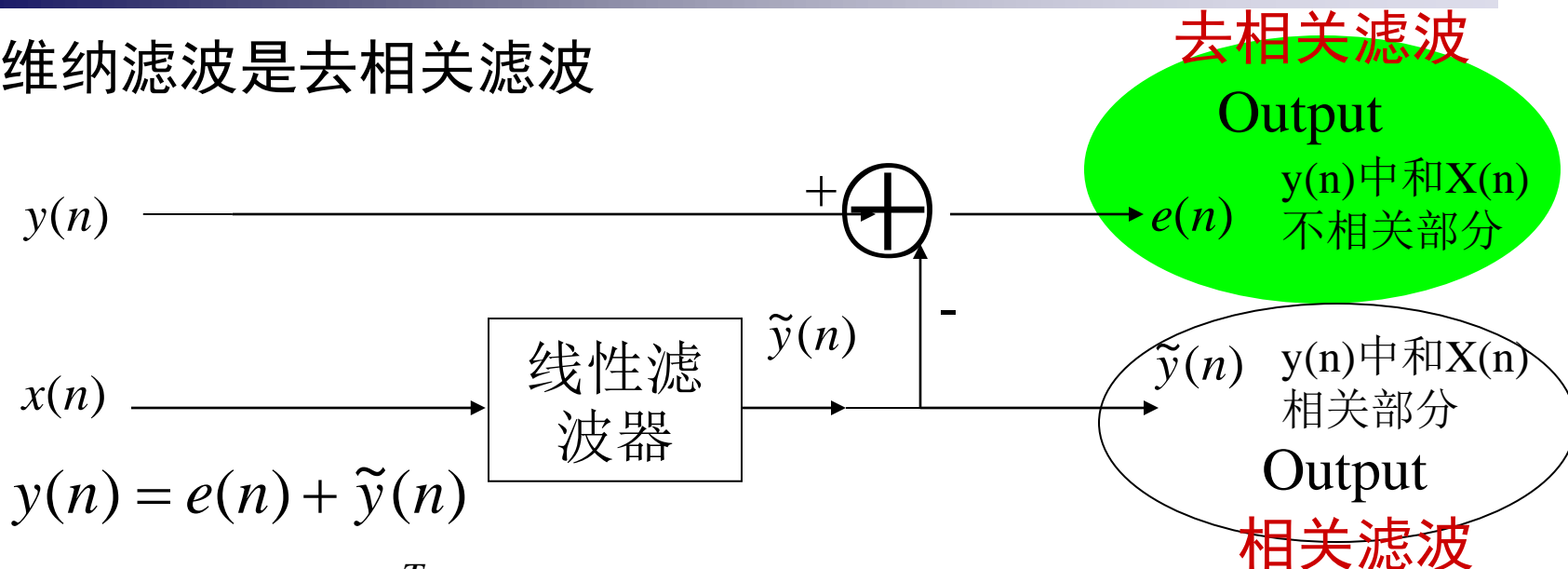
结论：N阶FIR维纳滤波器有解且有唯一解

误差性能曲面（Error-performance surface）

1.2 维纳滤波

$$E[e(n)x(n-j)] = 0, \forall j, n$$

七 维纳滤波是去相关滤波



$$y(n) = e(n) + \tilde{y}(n)$$

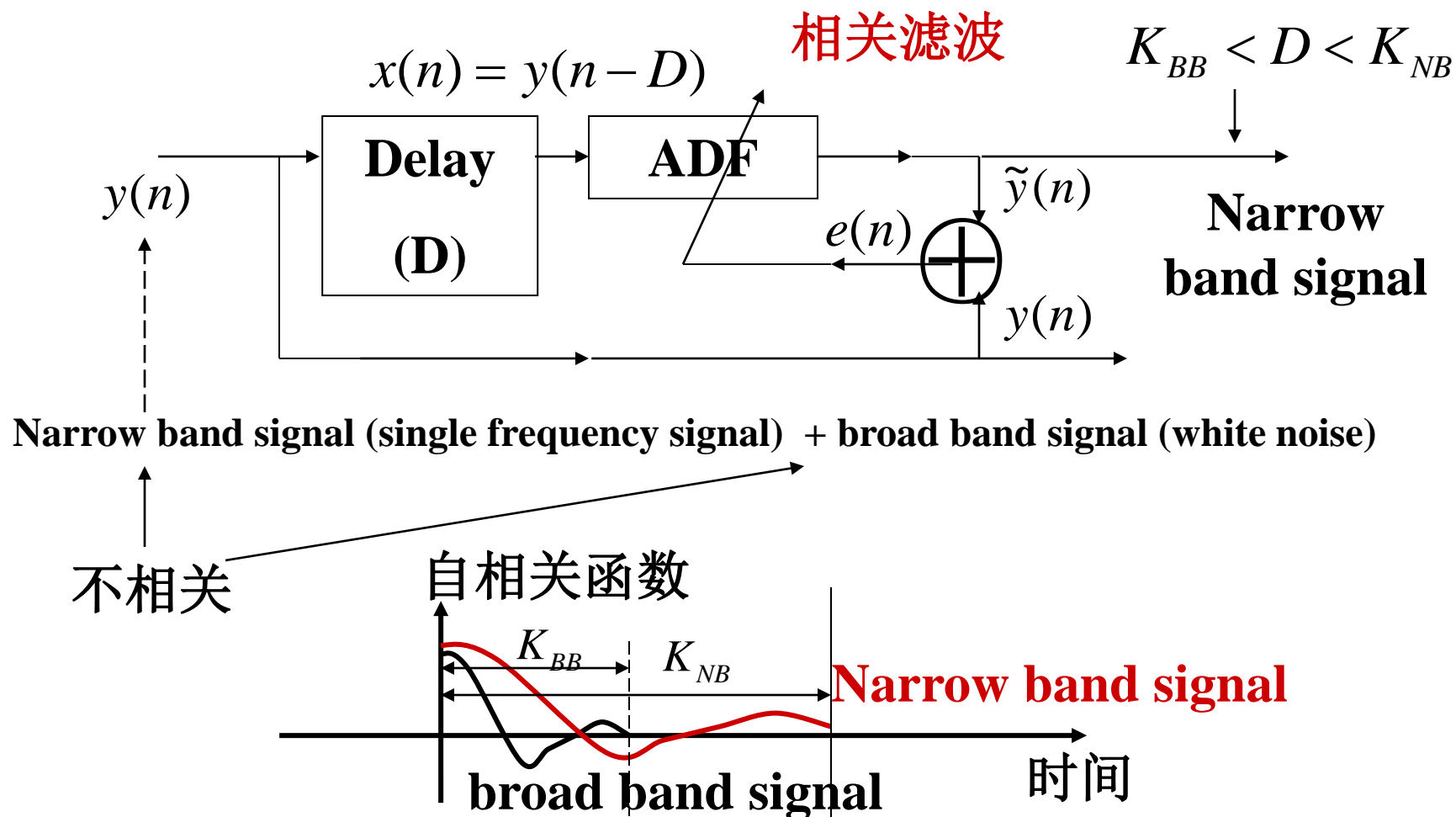
$$= e(n) + \mathbf{H}_{opt}^T \mathbf{X}(n)$$

由正交原理： $e(n)$ 是 $y(n)$ 中和 $\mathbf{X}(n)$ 不相关的部分；

但 $\tilde{y}(n)$ 是 $y(n)$ 中和 $\mathbf{X}(n)$ 相关的部分；

结论： $e(n)$ 作为输出时的维纳滤波（**最优线性滤波**），则是从 $y(n)$ 中移掉和输入 $X(n)$ 相关的部分 $\tilde{y}(n)$ ，输出 $y(n)$ 中和输入 $X(n)$ 不相关的部分

自适应谱线增强(Adaptive line Enhancer)



1.2 维纳滤波

八 维纳滤波和一般线性滤波的比较

Weiner-Hopf方程: $r_c(j) = \sum_i h_i r(j-i), \forall j$

$x(n) = y(n) + v(n)$ $v(n)$: noise 和 $y(n)$ 不相关

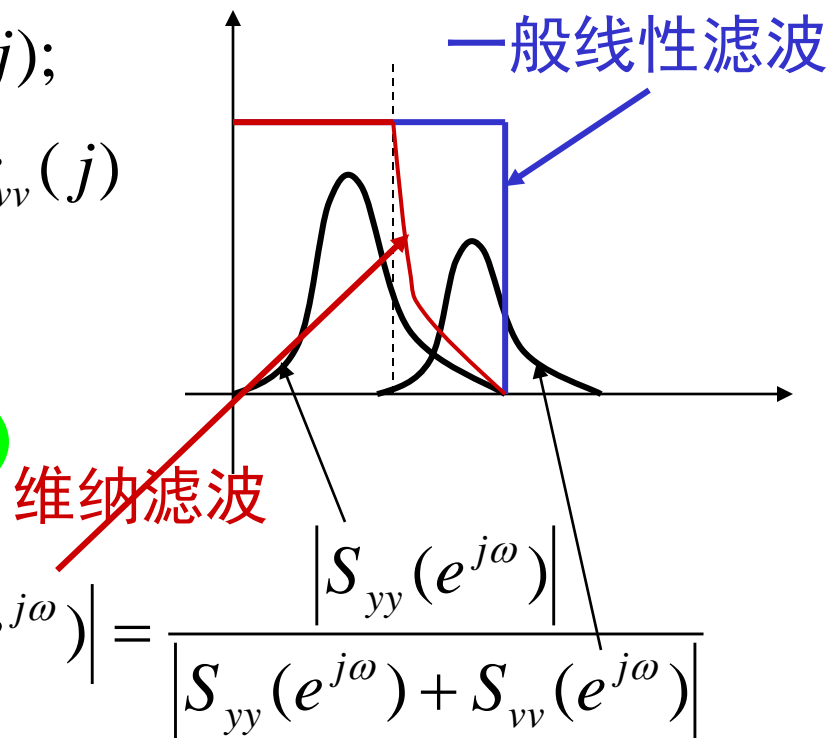
$$r_c(j) = r_{yx}(j) = r_{y(y+v)}(j) = r_{yy}(j);$$

$$r_{xx}(j) = r_{(y+v)(y+v)}(j) = r_{yy}(j) + r_{vv}(j)$$

$$r_c(j) = \sum_i h_i r(j-i), \forall j$$

$$S_{yy}(z) = H(z)[S_{yy}(z) + S_{vv}(z)]$$

$$H(z) = \frac{S_{yy}(z)}{S_{yy}(z) + S_{vv}(z)} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{|S_{yy}(e^{j\omega})|}{|S_{yy}(e^{j\omega}) + S_{vv}(e^{j\omega})|}$$



1.2 维纳滤波

九 Examples

Example 1: Echo cancellation

$$r_c(j) = \sum_i h_i r(j-i), \forall j$$

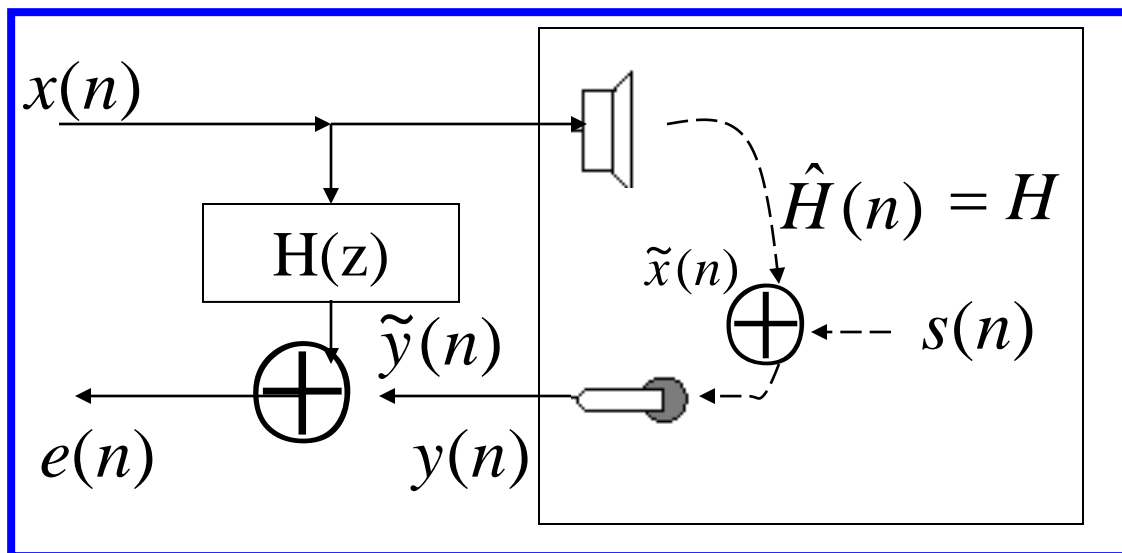
$$S_{yx}(z) = H(z)S_{xx}(z)$$

$$y(n) = \tilde{x}(n) + s(n)$$

$$r_c(j) = r_{yx}(j) = r_{(\tilde{x}+s)x}(j) = r_{\tilde{x}x}(j);$$

$$r_{\tilde{x}x}(j) = \sum_i \hat{h}(i) r(j-i) \iff \tilde{x}(n) = \sum_i \hat{h}(i) x(n-i)$$

$$\hat{H}(z)S_{xx}(z) = H(z)S_{xx}(z) \Rightarrow H(z) = \hat{H}(z)$$



在维纳滤波的情况下, $e(n)$ 是 $s(n)$ 的 MMSE 估计

Example 2: inverse modeling problem

$$r_c(j) = \sum_i h_i r(j-i), \forall j$$

$$S_{yx}(z) = H(z) S_{xx}(z)$$

$$x(n) = \hat{d}(n) + v(n) = h_r(n) * d(n) + v(n)$$

$$y(n) = d(n)$$

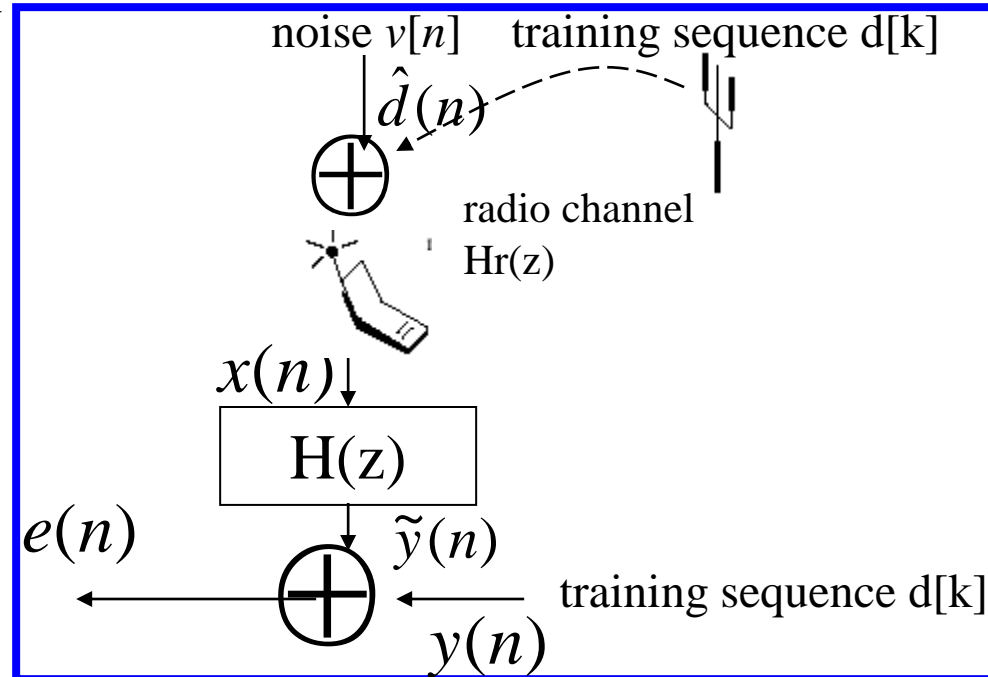
$$r_{yx}(j) = r_{d(h_r * d + v)}(j) = r_{d(h_r * d)}(j)$$

$$S_{yx}(z) = H_r(z^{-1}) S_{dd}(z)$$

$$r_{xx}(j) = r_{(h_r * d + v)(h_r * d + v)}(j) = r_{(h_r * d)(h_r * d)}(j) + r_{vv}(j)$$

$$S_{xx}(z) = H_r(z) H_r(z^{-1}) S_{dd}(z) + S_{vv}(z)$$

$$H(z) = \frac{H_r(z^{-1}) S_{dd}(z)}{H_r(z) H_r(z^{-1}) S_{dd}(z) + S_{vv}(z)} \xrightarrow{S_{vv}(z)=0} H(z) = \frac{1}{H_r(z)}$$



Example 2: inverse modeling problem

$$S_{yx}(z) = H_r(z^{-1})S_{dd}(z)$$



$$r_{yx}(p) = E[y(n)x(n-p)] \quad r_{xx}(p) = E[x(n)x(n-p)]$$

$$\begin{aligned} r_{d(h_r*d)}(p) &= E[d(n) \sum_k h_r(k) d(n-p-k)] \\ &= \sum_k h_r(k) E[d(n) d(n-p-k)] \\ &= \sum_k h_r(k) r_{dd}(p+k) \end{aligned}$$

1.3 卡尔曼滤波(标量)

1.3 卡尔曼滤波

一 问题的提出

在最小均方误差准则下,维纳滤波是一种最优线性滤波,但其要求信号平稳,且由于不是递推算法,计算效率不高.

设:(1)观察信号 $x(1), x(2), \dots, x(n)$;

(2)由 $n-1$ 时刻及此前的观察信号, $x(1), x(2), \dots, x(n-1)$,按最小均方误差准则得到 $y(n-1)$ 的最优估计,记为:

$$\tilde{y}(n-1|n-1)$$

问题:当得到新的观察信号 $x(n)$,估计: $\tilde{y}(n|n)$

途径:1)根据 $x(1), x(2), \dots, x(n)$, 估计 $\tilde{y}(n|n)$;(Weiner Filter)

2) 叠代的方法: $\tilde{y}(n-1|n-1) \xrightarrow{\quad} \tilde{y}(n|n)$

$$x(n)$$

1.3 卡尔曼滤波

二 解决方法:

(1) 一步预测(One-step prediction)

由 $x(1), x(2), \dots, x(n-1) \longrightarrow x(n) \quad \tilde{x}(n|n-1)$

预测误差: $\alpha(n) = x(n) - \tilde{x}(n|n-1) \leftarrow$ 新息(Innovation)

$x(n)$ 中无法预测的信息,
或 $x(n)$ 所提供的新的信息

若真实信号 $y(n)$ 具有信号模型:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n) \quad \text{状态方程}$$

而观察信号 $x(n)$ 是通过如下测量模型获得:

$$x(n) = cy(n) + v(n) \quad \text{测量方程}$$

1.3 卡尔曼滤波

其中 a, c 是绝对值小于1的常数, $w(n), v(n)$ 是方差分别为 Q 和 R 的白噪音. 且 $v(n)$ 和 $y(n), w(n)$ 不相关. 则新息的计算可分为:

(a) 由已有估计 $\tilde{y}(n-1|n-1)$ 通过状态方程对 $y(n)$ 做一步预测:

$$\tilde{y}(n|n-1) = a\tilde{y}(n-1|n-1) \quad \Longleftarrow \quad y(n) = ay(n-1) + w(n)$$

(b) 根据测量方程, 对测量值 $x(n)$ 作一步预测

$$\tilde{x}(n|n-1) = c\tilde{y}(n|n-1) = ca\tilde{y}(n-1|n-1) \quad \Longleftarrow \quad x(n) = cy(n) + v(n)$$

(c) $x(n)$ 到来后, 计算新息

$$\alpha(n) = x(n) - c\tilde{y}(n|n-1) = x(n) - ca\tilde{y}(n-1|n-1)$$

(2) 根据新息, 对预测值 $\tilde{y}(n|n-1)$ 进行修正, 从而得到估计值:

$$\tilde{y}(n|n)$$

$$\tilde{y}(n|n) = \tilde{y}(n|n-1) + G_n \alpha(n)$$

1.3 卡尔曼滤波

其中 G_n 是加权因子(预测增益), G_n 的选取应使根据新息修正所得到的估计 $\tilde{y}(n|n)$ 最佳,即使当前时刻的估计和真实值均方误差最小:

$$J(n) = E[e^2(n)] = E[(y(n) - \tilde{y}(n|n))^2] = \min$$

$$\frac{\partial J(n)}{\partial G_n} = 2E[e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial G_n}] = 0$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial G_n} = -\alpha(n) \quad \downarrow \quad \tilde{y}(n|n) = \tilde{y}(n|n-1) + G_n \alpha(n)$$

$$E[e(n)\alpha(n)] = 0 \quad \text{or} \quad E\{e(n)[x(n) - c\tilde{y}(n|n-1)]\} = 0$$

$$\tilde{y}(n|n) = \tilde{y}(n|n-1) + G_n \alpha(n)$$

$$\alpha(n) = x(n) - c\tilde{y}(n|n-1) = x(n) - ca\tilde{y}(n-1|n-1)$$

(1) 求 G_n

$$E[e(n)\alpha(n)] = 0 \quad \text{or} \quad E\{e(n)[x(n) - c\tilde{y}(n|n-1)]\} = 0$$

令: $e_1(n) = y(n) - \tilde{y}(n|n-1)$ (调整前误差, 一步预测误差)

$p(n) = E[e_1^2(n)]$ (一步预测误差功率)

$e(n) = y(n) - \tilde{y}(n|n)$ (调整后误差)

$$= \underline{y(n) - \tilde{y}(n|n-1)} - G_n[x(n) - c\tilde{y}(n|n-1)]$$

$$= e_1(n) - G_n[cy(n) + v(n) - c\tilde{y}(n|n-1)]$$

$$= (1 - cG_n)e_1(n) - G_nv(n)$$

$$\alpha(n) = x(n) - c\tilde{y}(n|n-1)$$

$$= cy(n) + v(n) - c\tilde{y}(n|n-1)$$

$$= ce_1(n) + v(n)$$

测量方程

$$x(n) = cy(n) + v(n)$$

$$E[e(n)\alpha(n)] = E\{[(1 - cG_n)e_1(n) - G_nv(n)][ce_1(n) + v(n)]\}$$

$$= c(1 - cG_n)p(n) - G_nR \quad v(n) \text{ 和 } e_1(n) \text{ 不相关}$$

$$= 0$$

$$G_n = \frac{cp(n)}{R + c^2p(n)}$$

$$= \frac{c}{R/p(n) + c^2} \quad [p(n) \uparrow \Rightarrow G_n \uparrow]$$

(2)求J(n)

最优线性滤波,由正交原理:

$$E[e(n)\tilde{y}(n|n)] = 0$$

同时: $E[e(n)\alpha(n)] = 0$

$$\tilde{y}(n|n) = \tilde{y}(n|n-1) + G_n \alpha(n)$$

$$0 = E[e(n)\tilde{y}(n|n)] = E[e(n)\tilde{y}(n|n-1) + e(n)G_n \alpha(n)]$$

$$= E[e(n)\tilde{y}(n|n-1)]$$

$$E[e(n)\tilde{y}(n|n-1)] = 0$$

$$E[e(n)\alpha(n)] = 0$$

$$E[e(n)x(n)] = 0$$

$$\alpha(n) = x(n) - c\tilde{y}(n|n-1)$$

$$x(n) = c\tilde{y}(n|n-1) + v(n)$$

$$E[e(n)y(n)] = -\frac{1}{c} E[e(n)v(n)]$$



$$J(n) = E[e^2(n)] = E[e(n)(y(n) - \tilde{y}(n|n))]$$

$$= E[e(n)y(n)]$$

$$= -\frac{1}{c} E[e(n)v(n)]$$

$$E[e(n)y(n)] = -\frac{1}{c} E[e(n)v(n)]$$

$$e(n) = (1 - cG_n)e_1(n) - G_nv(n) \quad v(n) \text{ 和 } e_1(n) \text{ 不相关}$$

$$J(n) = \frac{1}{c} G_n R$$

$$G_n = \frac{cp(n)}{R + c^2 p(n)} \Rightarrow G_n R = cp(n)[1 - cG_n]$$

$$J(n) = [1 - cG_n]p(n)$$

(3)求 $p(n)$

$$p(n) = E[e_1^2(n)] = E\{[y(n) - \tilde{y}(n|n-1)]^2\}$$

$$= E\{[y(n) - a\tilde{y}(n-1|n-1)]^2\}$$

$$= E\{[ay(n-1) + w(n) - a\tilde{y}(n-1|n-1)]^2\}$$

$$= E\{[ae(n-1) + w(n)]^2\}$$

$$e(n) = y(n) - \tilde{y}(n|n)$$

$$= a^2 E[e^2(n-1)] + E[w^2(n)]$$

$w(n)$ 和 $e(n-1)$ 不相关

$$= a^2 J(n-1) + Q$$

1.3 卡尔曼滤波

(4) 综合:

$$\tilde{y}(n|n) = a\tilde{y}(n-1|n-1) + G_n[x(n) - ca\tilde{y}(n-1|n-1)]$$

$$p(n) = a^2 J(n-1) + Q$$

$$G_n = \frac{cp(n)}{R + c^2 p(n)}$$

$$J(n) = \frac{R}{C} G_n = (1 - cG_n)p(n)$$

初始条件: $\tilde{y}(0|0), J(0)$

1.3 卡尔曼滤波

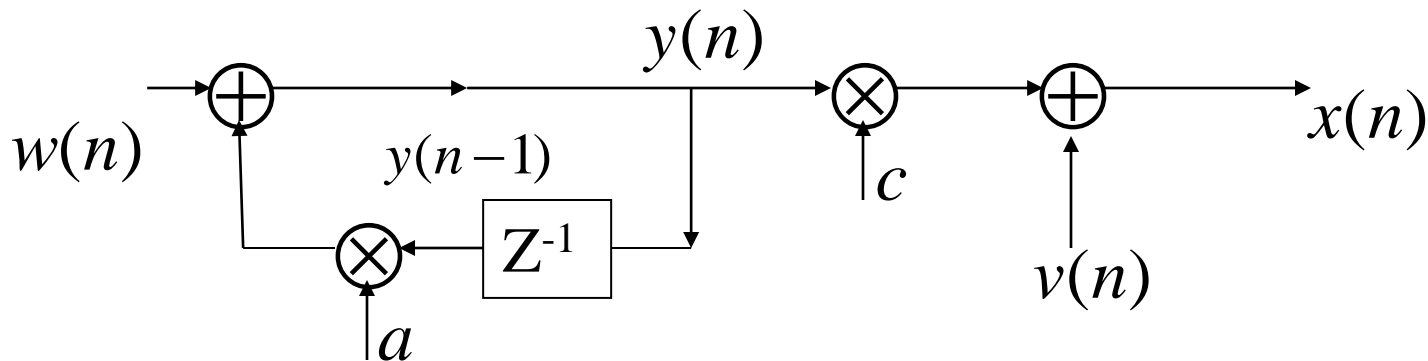
三 Summary of Kalman Filter

已知真实信号 $y(n)$ 具有信号模型:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n) \quad \text{状态方程}$$

及观察信号 $x(n)$ 的测量模型:

$$x(n) = cy(n) + v(n) \quad \text{测量方程}$$



由 n 时刻及此前的观察信号 $x(1), x(2), \dots, x(n)$
估计 n 时刻的真实信号 $y(n)$

1.3 卡尔曼滤波

基于一步预测的Kalman Filter

$$\tilde{y}(n|n) = a\tilde{y}(n-1|n-1) + G_n[x(n) - c\tilde{y}(n-1|n-1)]$$

$$p(n) = a^2 J(n-1) + Q$$

$$G_n = \frac{cp(n)}{R + c^2 p(n)}$$

$$J(n) = \frac{R}{C} G_n = (1 - cG_n) p(n)$$

