
- 第三章 线性预测误差
滤波器

3.1 定义和性质

3.1 定义和性质

一 定义

给定一组过去样本值: $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)$

预测现在或将来值: $x(n) \Leftarrow \hat{x}(n)$

如果预测值是过去值的线性组合:

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^N a_i x(n-i) \longrightarrow \text{线性预测}$$

预测误差:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i x(n-i) \longrightarrow \text{新息}$$

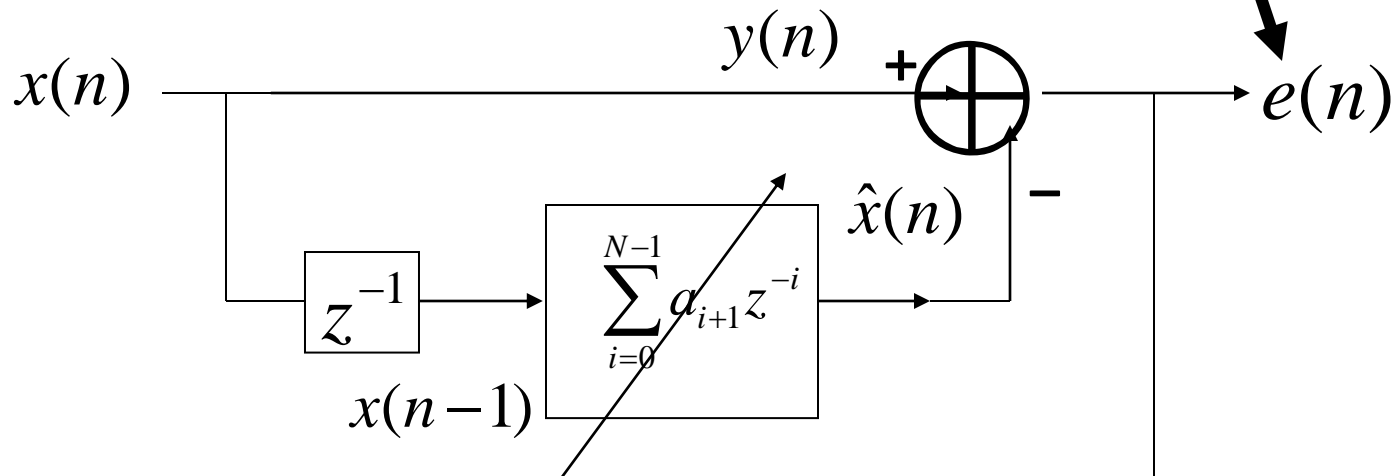
线性预测误差滤波器: $H(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} = A(z)$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z) = A(z)} \longrightarrow e(n)$$

一般地, 线性预测误差滤波器指使均方误差达到最小的。

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)$$

线性预测误差滤波器可看着是一种自适应滤波器：



比较：*参考信号 $x(n) \rightarrow y(n)$

*输入信号 $x(n-1) \rightarrow x(n)$

*估计(预测)： $\hat{x}(n) \rightarrow \hat{y}(n)$

平稳条件下, 均方误差达到最小的线性滤波是最优滤波, 即维纳滤波, 利用维纳滤波结果可求得最佳预测系数

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_N = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$$

$$\mathbf{r}_{yx} = E[y(n)\mathbf{x}(n)] \Rightarrow \mathbf{r}_N^a = E[x(n)\mathbf{x}(n-1)]$$

$$\mathbf{r}_N^a = [r(1) \quad r(2) \quad \dots \quad r(N)]^T$$

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(N-1) & r(N-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$E[e^2(n)] = \min \Rightarrow \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}_{yx}$$



$$\mathbf{r}_N^a - \mathbf{R}_N \mathbf{A} = 0$$

$$r(j) - \sum_{i=1}^N a_i r(j-i) = 0, 1 \leq j \leq N$$

$$E_{aN} = E[e^2(n)] = E[x^2(n)] - \mathbf{A}_{opt}^T \mathbf{r}_N^a$$

$$\mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= r(0) - \sum_{i=1}^N a_i r(i)$$

$$\mathbf{R}_{N+1} = \left[\begin{array}{c|cccc} r(0) & r(1) & \dots & r(N) & \\ \hline r(1) & r(0) & \dots & r(N-1) & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ r(N) & r(N-1) & \dots & r(0) & \end{array} \right]$$

$(\mathbf{r}_N^a)^T$ points to the top row of the right block.
 \mathbf{r}_N^a points to the left column of the right block.
 \mathbf{R}_N is the bottom-right block.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

二 性质

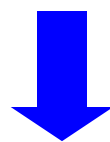
1. 线性预测与信号模型

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 即

$$e(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i x(n-i)$$


当按 $E[e^2(n)]$ 最小设计 a_i 时, 有

$$E[e(n)x(n-i)] = 0, i \geq 1$$

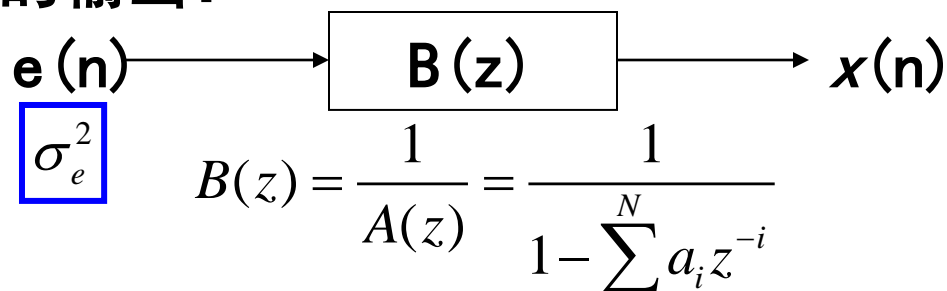


$$e(n-i) = x(n-i) - \sum_{i'=1}^{\infty} a_{i'} x(n-i-i')$$

$$E[e(n)e(n-i)] = 0, i \geq 1$$

所以: 预测误差序列 $e(n)$ 是一个白噪声 (Innovation, 新息)  白化处理 (whitening)

一个特殊情况：当 $x(n)$ 是一个AR过程时，即信号 $x(n)$ 是由一个全极点信号模型通过一个白噪声序列 $e(n)$ 激励产生的输出：



0 $x(n) = e(n) + \sum_{i=1}^N a_i x(n-i) \Rightarrow e(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)$

$E[e(n)x(n-j)] = E[x(n)x(n-j) - \sum_{i=1}^N a_i E[x(n-i)x(n-j)]]$

1) $j \geq 1; r(j) - \sum_{i=1}^N a_i r(j-i) = 0$

2) $j = 0; E[e(n)x(n)] = E[x^2(n)] - \sum_{i=1}^N a_i E[x(n-i)x(n)]$

$E[e(n)x(n)] = E\{e(n)[e(n) + \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)]\} = \sigma_e^2$

$\mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$

$r(0) - \sum_{i=1}^N a_i r(i) = \sigma_e^2$

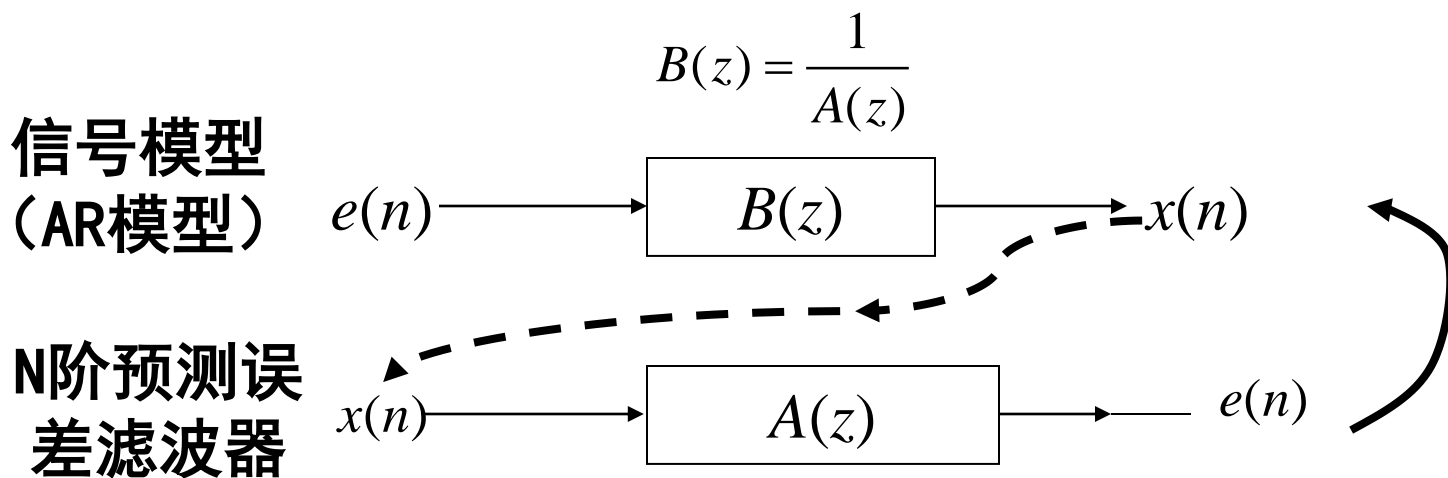
$\sigma_e^2 = E_{aN}$

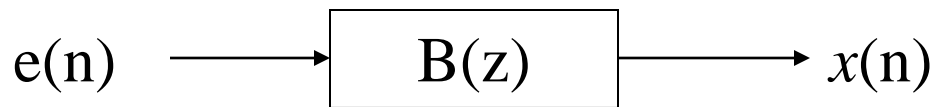
$$B(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

结论：

1) 对于模型阶次已知为N的AR过程, 当正向预测误差按最小均方误差准则求N阶预测误差滤波器预测系数和该AR过程相应的参数有相同的值；

2) 推论：当过程为非自回归时(非AR模型), 或是AR模型的阶次N未知, 则预测误差滤波器提供了对该过程的一个估计, 预测器阶次不断增加是 $e(n)$ 逐渐白化的过程；





$$x(n) = e(n) + \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)$$

3) 由于AR过程 $x(n)$ 的功率谱

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_e^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j\omega i} \right|^2}$$

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} r_x(k) e^{-j\omega k}$$

功率谱定义

所以估计出过程 $x(n)$ 的参数 a_i 后, 就等于估计出信号的功率谱. 因此, 线性预测分析是估计信号功率谱的一种有效的方法。

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}$$

2. 最小相位特性

线性预测误差滤波器 $A(z)$ 是最小相位的, 即其全部零点在 z 平面的单位圆内(包括单位圆).

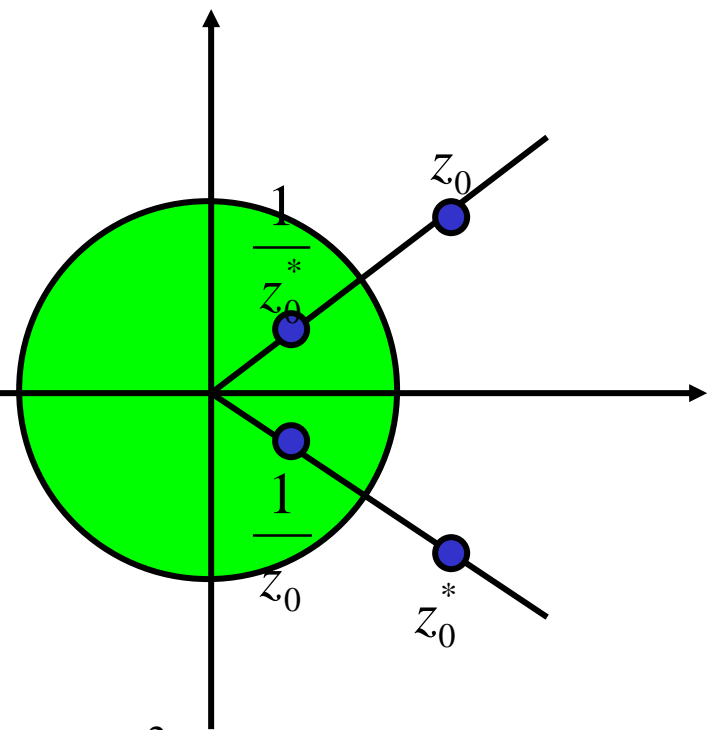
证明(反证法):

$$A'(z) = A(z) \frac{z - 1/z_0^*}{z - z_0} \frac{z - 1/z_0}{z - z_0^*}$$

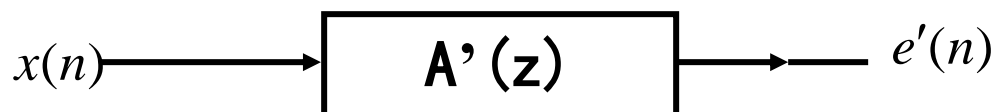
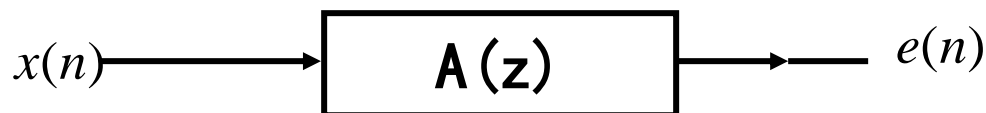
$$\left| \frac{z - 1/z_0^*}{z - z_0} \right|_{z=e^{j\omega}}^2 = \left| \frac{e^{j\omega} - 1/z_0^*}{e^{j\omega} - z_0} \frac{e^{-j\omega} - 1/z_0}{e^{-j\omega} - z_0^*} \right| = \frac{1}{|z_0|^2}$$

$$\left| \frac{z - 1/z_0^*}{z - z_0^*} \right|_{z=e^{j\omega}}^2 = \frac{1}{|z_0|^2}$$

$$|A'(e^{j\omega})|^2 = |A(e^{j\omega})|^2 \frac{1}{|z_0|^4} < |A(e^{j\omega})|^2$$



$$\left| A'(e^{j\omega}) \right|^2 = \left| A(e^{j\omega}) \right|^2 \frac{1}{|z_0|^4} < \left| A(e^{j\omega}) \right|^2$$



1. 功率谱与自相关函数之间是FT的关系

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} r_x(k) e^{-j\omega k} \quad \leftarrow \text{功率谱定义}$$

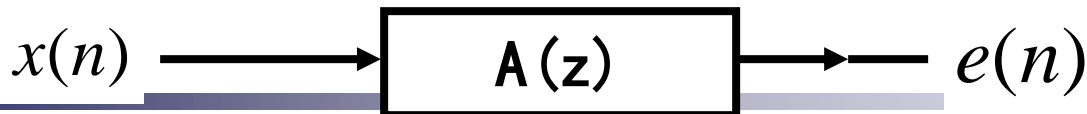
$$r_x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega \quad r_x(0) = E[x^2(n)] = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

2. 由功率谱定义可得线性系统输入和输出信号的功率谱的关系

$$P_e(e^{j\omega}) = \left| A(e^{j\omega}) \right|^2 P_x(e^{j\omega}) \rightarrow E_{aN} = \sigma_e^2 = E[e^2(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| A(e^{j\omega}) \right|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

$$P_{e'}(e^{j\omega}) = \left| A'(e^{j\omega}) \right|^2 P_x(e^{j\omega}) \rightarrow E'_{aN} = \sigma_{e'}^2 = E[e'^2(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| A'(e^{j\omega}) \right|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

与线性预测误差滤波器定义矛盾 $\leftarrow \therefore E'_{aN} < E_{aN} \leftarrow \left| A'(e^{j\omega}) \right|^2 < \left| A(e^{j\omega}) \right|^2$



3. 信号的可预测性

一个信号是N阶可预测的指

$$E_{aN}=0 \quad \text{即} \quad E_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega = 0$$

或时间域有

$$x(n) = \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)$$

唯一满足上述方程的信号是具有线谱特性的信号, 即

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^N |S_i|^2 \delta(\omega - \omega_i), |S_i|^2 \text{ 是 } \omega_i \text{ 线谱的功率}$$

证明: 1) 充分性, 使 $A(z) = \prod_{i=1}^N (1 - e^{j\omega_i} z^{-1}) \longrightarrow E_{aN}=0$

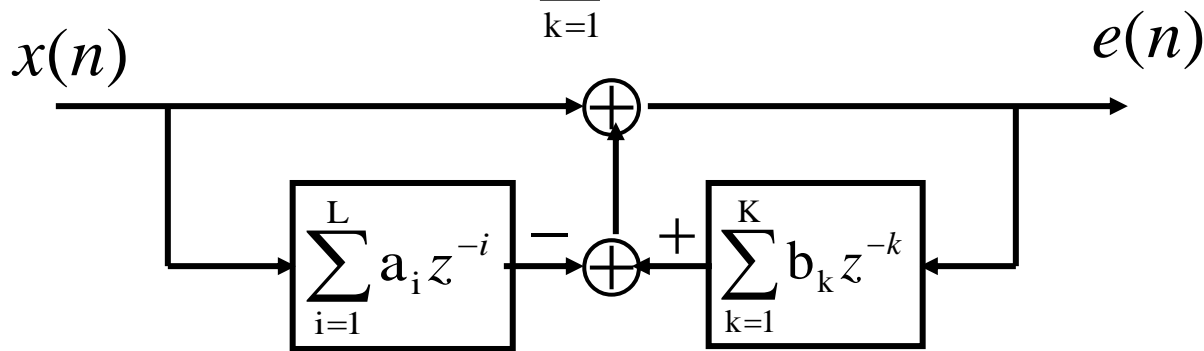
2) 必要性

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega = 0 \longrightarrow \text{而 } A(z) \text{ 最多只有 } N \text{ 个零点} \longrightarrow P_x(e^{j\omega}) \text{ 最多只能有 } N \text{ 个非零值}$$

4. IIR预测器

当预测器阶次是有限整数时, 预测误差滤波器是FIR的; 否则滤波器是IIR的, 因为当 $N \rightarrow \infty$ 时, 等效于分母多项式存在。

$$H(z) = \frac{1 - \sum_{i=1}^L a_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^K b_k z^{-k}}$$



$$e(n) = x(n) - \sum_{i=1}^L a_i x(n-i) + \sum_{k=1}^K b_k e(n-k)$$

3.2 正向与反向预测误差

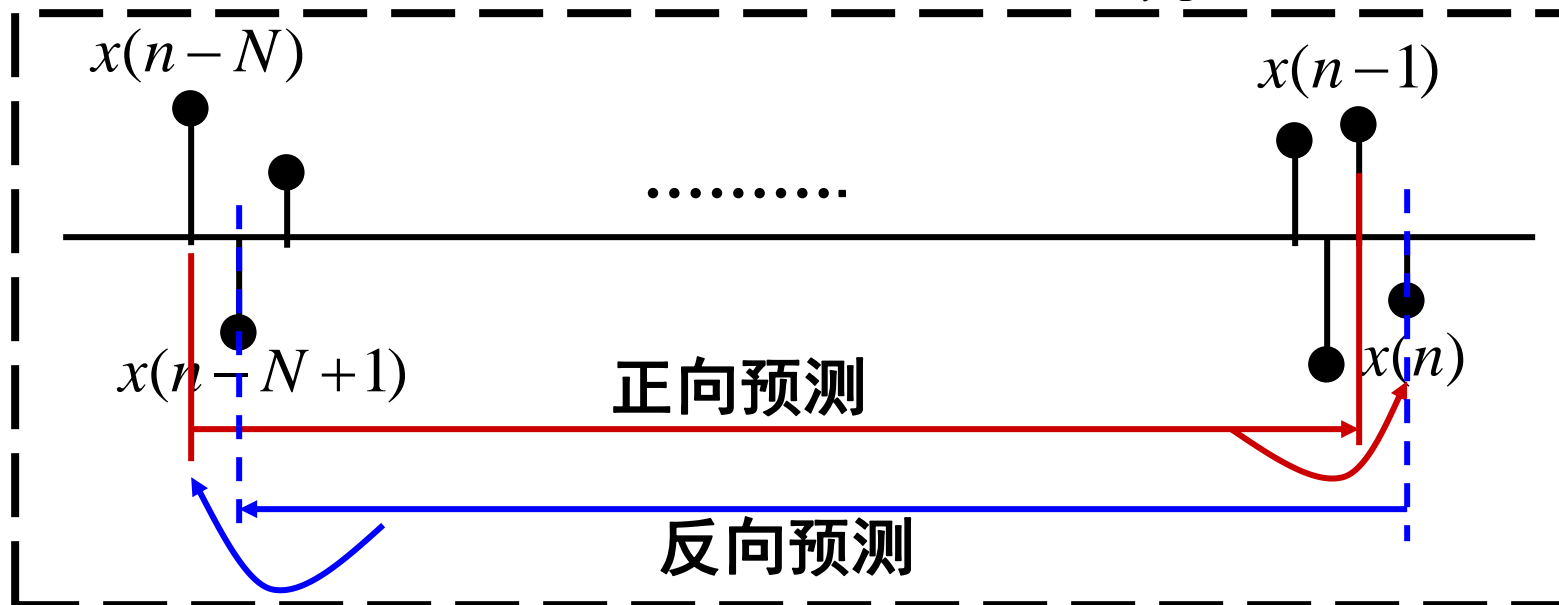
一 定义

正向预测误差:

$$e_a(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)$$

反向预测误差:

$$e_b(n) = x(n-N) - \hat{x}(n-N) = x(n-N) - \sum_{i=1}^N b_i x(n-N+i)$$



物理意义1: 反向预测误差可看着是正向预测时最旧数据丢失所引起的损失。

物理意义2: 反向预测误差反映信号在反向时间上的相关性。

$$e_a(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)$$

$$e_b(n) = x(n-N) - \sum_{i=1}^N b_i x(n-N+i)$$

将正, 反向预测误差表示为矩阵形式:

$$e_a(n) = x(n) - \mathbf{A}_N^T \mathbf{x}(n-1)$$

$$e_b(n) = x(n-N) - \mathbf{B}_N^T \mathbf{x}(n)$$

式中:

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \dots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_N \\ b_{N-1} \\ \dots \\ b_1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{反向预测系数}$$

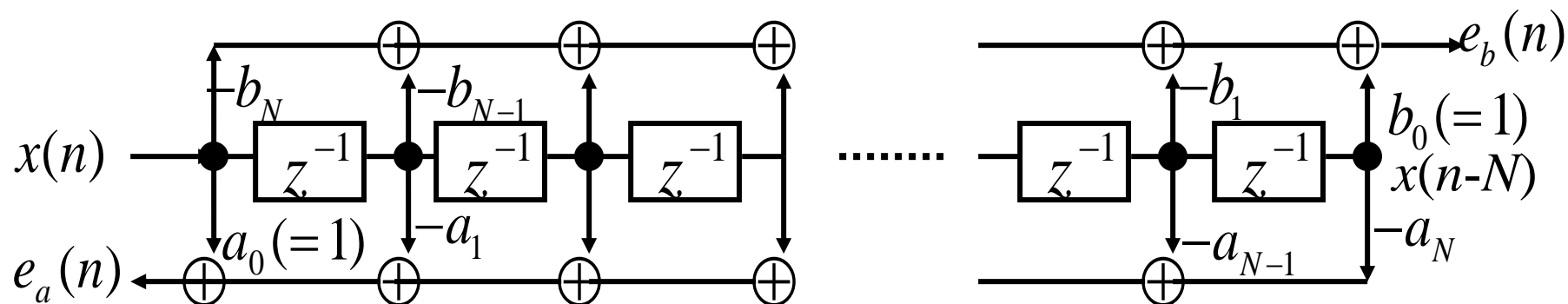
正, 反向预测误差滤波器的传递函数

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}$$

$$B(z) = z^{-N} - \sum_{i=1}^{N-1} b_i z^{-(N-i)} = z^{-N} [1 - \sum_{i=1}^N b_i z^i]$$

$$e_a(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i x(n-i)$$

$$e_b(n) = x(n-N) - \sum_{i=1}^N b_i x(n-N+i)$$



正,反向预测误差滤波器的直接实现结构

二 求解正、反向预测误差滤波器的系数

$$E[e_a^2(n)] \rightarrow \min \Rightarrow \mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E[e_b^2(n)] \rightarrow \min \Rightarrow \mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_N \\ b_{N-1} \\ \dots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

三 正、反向预测误差滤波器的关系

$$\mathbf{J}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & & & 1 \\ & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

矢量元素倒置

$$\mathbf{J}_N \mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{N+1} \times \mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_N \mathbf{R}_N = \mathbf{R}_N \mathbf{J}_N$$

对称
方阵

$$\mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{J}_N \mathbf{B}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{bN} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \quad \mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_i = b_i \quad \leftarrow \quad \mathbf{A}_N = \mathbf{J}_N \mathbf{B}_N, E_{aN} = E_{bN} = E_a$$

结论:

对于**平稳的**输入信号讲, 正反向预测误差功率相同, 系数也相同, 但排列次序是相反的. 因此从理论上讲, 线性预测误差分析可以从正向来完成, 也可以从反向来完成, 但是涉及非平稳时, 或在过渡区 (R_{N+1} 可能会不同), 差别就会显现.

当R阵被估计出来后, 最好的性能是组合这两种方法.

四 反向预测的二个特性

1) 反向预测误差滤波器是最大相位的;

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}$$

$$B(z) = z^{-N} [1 - \sum_{i=1}^N b_i z^i]$$

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{J}_N \mathbf{B}_N$$

\Downarrow

$$a_i = b_i$$

若 z_0 是 $A(z)$ 的零点 $\rightarrow z_0^{-1}$ 是 $B(z)$ 的一个零点;

由于 $A(z)$ 是最小相位的, $|z_0| < 1 \Rightarrow |z_0^{-1}| > 1$,

即 $B(z)$ 是最大相位的

$$e_{bi}(n) = x(n-i) - \sum_{j=1}^i b_j x(n-i+j) \quad e_{bi}(n) = x(n-i) - \mathbf{B}_i^T \mathbf{x}(n) \quad \mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_N \\ b_{N-1} \\ \dots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

2) 各阶反向预测误差提供一组不相关信号, 即不同阶反向预测误差构成一组正交序列, 可作为信号空间的一组正交基.

$e_{bi}(n), 0 \leq i \leq N-1$ i 表示反向预测器的阶次
 ↑
 不相关信号

$$[e_b(n)]^T = [e_{b0}(n) \quad e_{b1}(n) \quad \dots \quad e_{bN-1}(n)] = \mathbf{x}_N^T(n)$$

$$0\text{阶时}: e_{b0}(n) = x(n)$$

$$1\text{阶时}: e_{b1}(n) = x(n-1) - b_1^1 x(n)$$

$$2\text{阶时}: e_{b2}(n) = x(n-2) - b_2^2 x(n) - b_1^2 x(n-1)$$

⋮

$$N-1\text{阶时}: e_{bN-1}(n) = x(n-(N-1)) - b_{N-1}^{N-1} x(n) \dots - b_1^{N-1} x(n-N+2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{B}_1 & & & \\ 0 & 1 & -\mathbf{B}_2 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & -\mathbf{B}_{N-2} & \\ & & & 1 & -\mathbf{B}_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↖
 \mathbf{M}_B

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(N-1) & r(N-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix}$$

$$[e_b(n)]^T = \mathbf{x}_N^T(n) \mathbf{M}_B$$

下三角阵

$$E\{[e_b(n)][e_b(n)]^T\} = \mathbf{M}_B^T E[\mathbf{x}_N(n) \mathbf{x}_N^T(n)] \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_B^T \mathbf{R}_N \mathbf{M}_B$$

对角阵

对称阵

=

下三角阵

$$\mathbf{R}_N \mathbf{M}_B = \mathbf{R}_N \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{B}_1 & & & \\ 0 & 1 & -\mathbf{B}_2 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} -\mathbf{B}_{N-2} \\ 1 \end{matrix}} & -\mathbf{B}_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{b0} & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ * & E_{b1} & 0 & & \\ * & * & E_{b2} & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ E_{bN-2} \end{matrix}} & 0 \\ * & * & * & * & E_{bN-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{N-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{N-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{N-2} \\ E_{bN-2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_N = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{R}_{N-1}} & \begin{bmatrix} r(N-1) \\ r(N-2) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} r(N-1) & r(1) \end{bmatrix} & r(0) \end{array} \right]$$

3.3 阶次叠代关系 (Livinson - Dubin 算法)

$$E[e_a^2(n)] \rightarrow \min \Rightarrow \mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于一个j阶预测器, 目标是求解方程:

$$R^j \begin{bmatrix} 1 \\ -A^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^j \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于一个p阶预测器, 即求j=p时的解.

Levinson求解方法的基本思想: 阶次叠代, 即 A^j, E^j 用j-1阶的解 A^{j-1}, E^{j-1} 递推得到.

$$E_{aj} \Rightarrow E^j$$

$$\mathbf{A}_j \Rightarrow \mathbf{A}^j = [a_1^j, a_2^j, \dots, a_j^j]^T$$

$$\mathbf{R}_{j+1} \Rightarrow \mathbf{R}^j = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(j) \\ r(1) & r(0) & r(j-1) \\ r(j) & r(j-1) & r(0) \end{bmatrix}$$

一些符号的定义:

$$\mathbf{r}_a^j = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \dots \\ r(j) \end{bmatrix}, \mathbf{r}_b^j = \mathbf{J}_j \mathbf{r}_a^j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_a^j = \begin{bmatrix} r(j) \\ r(j-1) \\ \dots \\ r(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^j = \begin{bmatrix} b_j^j \\ b_{j-1}^j \\ \dots \\ b_1^j \end{bmatrix} = \mathbf{J}_j \mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} a_j^j \\ a_{j-1}^j \\ \dots \\ a_1^j \end{bmatrix}$$

$$R^j \begin{bmatrix} 1 \\ -A^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^j \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{j-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -A^{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_b^j = \begin{bmatrix} r(j) \\ r(j-1) \\ \dots \\ r(1) \end{bmatrix}$$

推导:

1) $\rightarrow R^j \begin{bmatrix} 1 \\ -A^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{J}_{j+1} \times$

$$\mathbf{R}^j \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{B}^{j-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_j \\ 0_{j-1} \\ E^{j-1} \end{bmatrix}$$

$$K_j = r(j) - \sum_{i=1}^{j-1} a_i^{j-1} r(j-i)$$

$$k_j = K_j / E^{j-1}$$

2) $R^j \begin{bmatrix} 0 \\ -B^{j-1} \\ 1 \end{bmatrix} k_j = \begin{bmatrix} k_j^2 E^{j-1} \\ 0_{j-1} \\ K_j \end{bmatrix}$

3): 1) - 2)

$$R^j \begin{bmatrix} 1 \\ -A^j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^j \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R^j \begin{bmatrix} 1 \\ -A^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} - R^j \begin{bmatrix} 0 \\ -B^{j-1} \\ 1 \end{bmatrix} k_j = \begin{bmatrix} E^{j-1} \\ 0_{j-1} \\ K_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_j^2 E^{j-1} \\ 0_{j-1} \\ K_j \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} R^{j-1} & \mathbf{r}_b^j \\ \hline (\mathbf{r}_b^j)^T & r(0) \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ -A^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{j-1} \\ 0_{j-1} \\ K_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A^j = \begin{bmatrix} A^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B^{j-1} \\ -1 \end{bmatrix} k_j \\ E^j = E^{j-1} - k_j^2 E^{j-1} \end{cases}$$

$$E_{aN} = r(0) - \sum_{i=1}^N a_i r(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^j = \begin{bmatrix} A^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B^{j-1} \\ -1 \end{bmatrix} k_j \quad K_j = r(j) - \sum_{i=1}^{j-1} a_i^{j-1} r(j-i) \\ E^j = E^{j-1} - k_j^2 E^{j-1} \quad k_j = K_j / E^{j-1} \end{array} \right.$$

Livinson - Dubin 算法:

求解j=p阶预测误差滤波器, 首先计算 $r(0), r(1), \dots, r(p)$

1) 初始化, $E^0 = r(0)$

2) $j=1$

$$a_1^1 = k_1 = r(1) / r(0)$$

$$E^1 = (1 - k_1^2) r(0)$$

3) $2 \leq j \leq p$ 递推

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} a_1^j \\ a_2^j \\ \dots \\ a_{j-1}^j \\ a_j^j \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{j-1} = \begin{bmatrix} a_1^{j-1} \\ a_2^{j-1} \\ \dots \\ a_{j-1}^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{j-1} = \begin{bmatrix} b_{j-1}^{j-1} \\ b_{j-2}^{j-1} \\ \dots \\ b_1^{j-1} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{j-1}^{j-1} \\ a_{j-2}^{j-1} \\ \dots \\ a_1^{j-1} \end{bmatrix}$$

$$k_j = \frac{1}{E^{j-1}} [r(j) - \sum_{i=1}^{j-1} a_i^{j-1} r(j-i)]$$

$$a_j^j = k_j$$

$$b_{j-i}^{j-1}$$

$$a_i^j = a_i^{j-1} - k_j a_{j-i}^{j-1}, i = 1, 2, \dots, j-1$$

$$E^j = (1 - k_j^2) E^{j-1}$$

4) p阶的解

给定: $k_1, k_2, \dots, k_p; a_1^1 = k_1$

For $j=2, \dots, p$ {

$$a_j^j = k_j$$

$$a_i^j = a_i^{j-1} - k_j a_{j-i}^{j-1}, i = 1, 2, \dots, j-1$$

$$E^j = (1 - k_j^2) E^{j-1} \}$$