Równania nieliniowe - projekt

Natalia Wojtania i Grzegorz Chojnacki

18 grudnia 2020

1 Zadanie

1.1 Tytuł

Tytuł zadania to "Przybliżone rozwiązywanie równań nieliniowych".

1.2 Treść

Napisz program, który rozwiązuje równanie:

$$4x^3 + 5x^2 + 6x - 7 = 0$$

metodą siecznych.

1.3 Metoda

W programie należy wykorzystać metodę siecznych.

1.3.1 Opis metody

Metoda siecznych (interpolacji liniowej) polega na przyjęciu, że funkcja ciągła na dostatecznie małym odcinku w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy. Można wtedy na odcinku $[a, b]$ krzywą $y = f(x)$ zastąpić sieczną. Za przybliżoną wartość pierwiastka przyjmuje się punkt przecięcia siecznej z osią odciętych OX. Miejsce prze jest poszerzany.cięcia tej prostej z osią x jest przybliżonym wynikiem szukanego miejsca zerowego, o ile różnica bezwzględna wartości z dwóch ostatnich iteracji jest mniejsza od założonej dokładności. Metoda ta wymaga ustalenia na przedziale $[a, b]$ dwóch punktów startowych

x_0 i x_1.
Metodę siecznych dla funkcji $f(x)$, mającej pierwiastek w przedziale $[a, b]$ można zapisać następującym wzorem rekurencyjnym:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, k \geqslant 1$$

i

$$x_0 = a, x_1 = b,$$

gdzie w każdym kroku x_{k+1} to miejsce zerowe siecznej wykresu $y = f(x)$ w punktach $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ oraz$(x_k, f(x_k))$, czyli prostej

$$y = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

1.3.2 Przykład

Dla równania $x^3 - 2x - 5 = 0$ rozważanego na przedziale $[a, b] = [2, 3]$ przybliżyć rozwiązanie wartością x_k wyznaczoną metodą siecznych z
$x_0 = a, x_1 = b$ oraz dokładnością $\epsilon = 0.5$.

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

Mamy $x_0 = 2$, i $x_1 = 3, f(x_1) = f(3) = 16, f(x_0) = f(2) = -1$
$x_2 = 3 - \frac{16(3-2)}{16-(-1)} = 2\frac{1}{17}, |x_2 - x_1| \approx 0,94 > \epsilon,\ f(x_2) = f(2\frac{1}{17}) \approx -0.39$
$x_3 = 2\frac{1}{17} - \frac{-0.39(-0,94)}{-0.39-16} \approx 2.08, |x_3 - x_2| \approx 0.02 < \epsilon$
Zatem przybliżone rozwiązanie $x_k = 2.08$ oraz $k = 3$

2 Opis implementacji algorytmu

Implementacja realizująca metodę siecznych.

2.1 Dane wejściowe

Na wejściu program pobiera od użytkownika wartość wyrażającą dokładność rozwiązania(epsilon) $\epsilon \in (0, 1)$.

2.2 Przebieg działania

Program wyświetla komunikat: 'Wprowadź dokładność rozwiązania $\epsilon \in (0,1)$ '. Jeśli została wprowadzona prawidłowa wartość dokładności, to program poprzez funkcję *calculate* wylicza przybliżone rozwiązanie i dzięki funkcji *refresh* wyświetla je wraz z liczbą kroków. Próba wprowadzenia nieprawidłowych danych, które weryfikowane są w programie w funkcji *refresh* skutkuje wyświetleniem stosownego ostrzeżenia.

Następnie funkcja *calculate* klasy *SecantMethod* zajmuje się wyliczeniem przybliżonego rozwiązania w oparciu o podaną dokładność i przedział wyszukany za pomocą funkcji *findInterval*. Szukanie przedziału zaczyna się od $[0,1]$ i jeżeli funkcja nie przechodzi w nim przez oś OX, to przedział jest poszerzany.
Funkcja *getNext*, której argumentami są a i b odpowiednio oznaczające x_{k-1} oraz x_k zwraca wartość poszczególnego x_{k+1}.
Funkcja *isGoodEnough* sprawdza czy różnica $|x_k - x_{k-1}|$ jest mniejsza od podanej przez użytkownika dokładności. Jeśli tak, to kończymy przekazując wynik oraz ilość kroków. W przeciwnym wypadku liczone jest kolejne przybliżenie tak długo, aż warunek zostanie spełniony.

Wynikiem działania programu jest przybliżone rozwiązanie równania: x_k oraz liczba wykonanych kroków: k.

2.3 Najważniejsze fragmenty programu

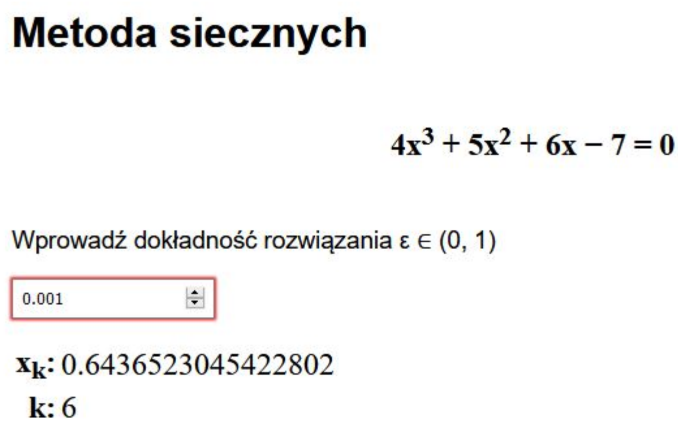
secantMethod.js

```
class SecantMethod {
  f = x => 4*x**3 + 5*x**2 + 6*x - 7

  constructor(precision) {
    this.precision = precision
    this.interval = this.findInterval()
  }

  findInterval = (a = 0, b = 1) => this.f(a) * this.f(b) < 0
    ? [a, b]
    : this.findInterval(a - (b - a), b + (b - a))

  // a = x_{k-1}, b = x_{k}
  getNext = (a, b) => b - (this.f(b) * (b - a)) / (this.f(b) - this.f(a))
  isGoodEnough = (next, prev) => Math.abs(next - prev) < this.precision

  calculate() {
    const g = (a, b, steps = 2) => {
      const next = this.getNext(a, b)
      return this.isGoodEnough(next, b)
        ? ({ result: next, steps })
        : g(b, next, steps + 1)
    }
    return g(this.interval[0], this.interval[1])
  }
}
```

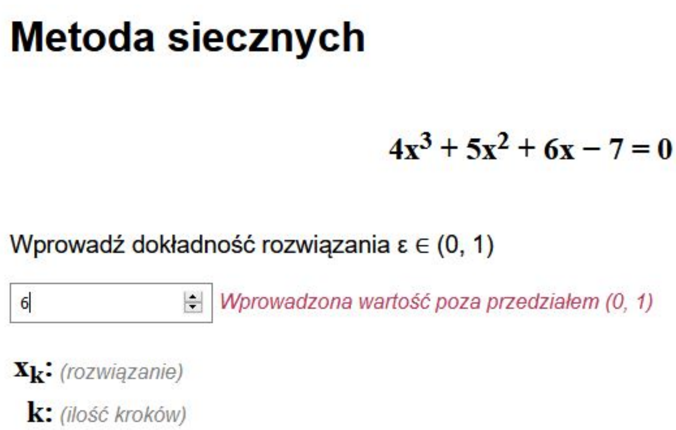
gui.js

```
const gui = new (class {
  input  = document.getElementById('input')
  result = document.getElementById('result')
  steps  = document.getElementById('steps')
  error  = document.getElementById('error')

  refresh() {
    const precision = this.getPrecision()
    if (0 < precision && precision < 1) {
      this.clearError()
      const answer = new SecantMethod(precision).calculate()
      this.result.innerText = answer.result
      this.steps.innerText  = answer.steps
    } else this.setError()
  }

  setError()   { this.error.innerText  = 'Wprowadzona wartość poza przedziałem (0,
  clearError() { this.error.innerText  = '' }

  update = debounce(() => this.refresh(), 10)

  getPrecision = () => Number.parseFloat(this.input.value)

})()
```

2.4 Widok działania programu



Rysunek 1: Prawidłowo wprowadzone dane



Rysunek 2: Nieprawidłowo wprowadzone dane