

# Aproksymacja równań różniczkowych - projekt

Natalia Wojtania i Grzegorz Chojnacki

22 stycznia 2021

## 1 Zadanie

### 1.1 Tytuł

Tytuł zadania to „Metody numeryczne dla zagadnień różniczkowych”.

### 1.2 Treść

Napisz program, który rozwiąże trzema metodami (Eulera, zmodyfikowaną Eulera oraz Heuna) zagadnienie różniczkowe:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(1) = 5,$$

gdzie

$$f(x, y(x)) = -5x^4 + 2\sqrt{y + x^5 - 5} + 5.$$

Program ma również obliczyć dokładność dla każdej z tych metod, porównując je z dokładnym rozwiązaniem:

$$y(x) = -x^5 + x^2 + 5.$$

### 1.3 Metody

W programie należy wykorzystać metodę Eulera, zmodyfikowaną metodę Eulera oraz metodę Heuna (udoskonaloną metodę Eulera).

### 1.3.1 Opis metod

Zagadnienie początkowe:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0$$

na przedziale  $[a, b]$ , gdzie  $f : [a, b] \times R \rightarrow R$  jest daną funkcją, a  $y_0 \in R$  jest daną liczbą. Dla ustalonej liczby naturalnej  $N \geq 1$  definiujemy  $h = \frac{b-a}{N}$  i punkty  $x_k = a + kh, 0 \leq k \leq N$  nazywane węzłami równoodległymi.

#### 1. Metoda Eulera

Jest ona metodą numeryczną do rozwiązywania równań różniczkowych z określoną wartością początkową. Metoda jest pierwszego rzędu co oznacza, że błąd lokalny (błąd na kroku) jest proporcjonalny do kwadratu wielkości kroku, a błąd globalny (błąd w danym czasie) jest proporcjonalny do wielkości kroku. Metoda Eulera często służy jako podstawa do konstruowania bardziej złożonych metod.

Z równania różniczkowego  $y'(x) = f(x, y(x))$  dla  $x = x_k$  mamy  $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$ .

Przybliżając  $y'(x_k)$  za pomocą ilorazu różnicowego mamy  $y'(x_k) \approx \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h}$ .

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)),$$

ponieważ  $x_k + h = x_{k+1}$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), 0 \leq k \leq N-1$$

Punkty  $(x_k, y_k), 0 \leq k \leq N$  wyznaczają przybliżone rozwiązanie  $y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0$ .

#### 2. Zmodyfikowana metoda Eulera

Metoda ta jest szczególną postacią metody Rungego-Kutty, znana popularnie jako metoda punktu środkowego. Należy ona do klasy schematów dwustopniowych. Wyrażona jest zależnością rekurencyjną:

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)\right), 0 \leq k \leq N-1$$

### 3. Metoda Heuna

W metodzie tej zamiast stałej wartości pochodnej obliczonej na początku przedziału, jak to było w metodzie Eulera, oblicza się pochodną również na końcu przedziału. Pierwsze oszacowanie wyniku nazywamy predyktorem, a następne korektorem. Metoda ta, dzięki zabiegowi numerycznemu, daje sporą zmianę w dokładności wyniku i jest znacznie dokładniejsza niż klasyczna metoda Eulera. Wspomniany predyktor:  $y_{k+1}^{Eu} = y_k + hf(x_k, y_k)$  wyrażamy stosując metodę Eulera.  $y' = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} = \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{Eu})}{2}$ ,  $y^{Eu}$  liczone zwykłą metodą Eulera.

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{Eu}))$  opisuje działanie korektora.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))), 0 \leq k \leq N - 1$$

to tzw. metoda Heuna.

Te trzy metody są metodami jednokrokowymi tzn. do wyznaczenia  $y_{k+1}$  potrzebny jest jeden wcześniejszy  $y_k$ .

#### 1.3.2 Przykład

Dla zagadnienia różniczkowego  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $y(0) = 1$  na przedziale  $[0, 4]$  przyjmując krok całkowania  $h = 0.5$  wyznaczyć przybliżenie  $y_1$  trzema metodami oraz obliczyć błąd  $|y_1 - y(x_1)|$  dla każdej z metod na tym kroku, wiedząc, że dokładne rozwiązanie to  $y(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x$  oraz  $f(x, y(x)) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$

Rozwiązanie:

$$x_0 = a = 0, x_1 = 0 + 0.5 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, \dots, x_n = b$$

$$y(0) = 1, y(x_1) = y(0.5) = -\frac{1}{2}(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5 \cdot 0.5 = 3.21875$$

Metoda Eulera:  $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

$$y_1 = 1 + 0.5f(0, 1) = 1 + 0.5 \cdot 8.5 = 5.25$$

$$\text{Błąd: } |5.25 - 3.21875| = 2.03125$$

Metoda punktu środkowego:  $y_1 = y_0 + hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0))$

$$y_1 = 1 + 0.5f(0.25, 1 + 0.25f(0, 1)) = 3.109375$$

$$\text{Błąd: } |3.109375 - 3.21875| = 0.109375$$

Metoda Heuna:  $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)))$   
 $y_1 = 1 + 0.25(f(0, 1) + f(0.5, 1 + hf(0, 1))) = 3.4375$   
Błąd:  $|3.4375 - 3.21875| = 0.21875$

## 2 Opis implementacji algorytmu

Implementacja realizująca metodę Eulera, zmodyfikowaną Eulera oraz Heuna.

### 2.1 Dane wejściowe

Na wejściu program pobiera od użytkownika liczbę  $n$ , określającą podział odcinka  $[a, b]$  oraz liczbę  $b$ , informującą o końcu odcinka  $[a, b]$ .

### 2.2 Przebieg działania

Program wyświetla komunikat: „Wprowadź dane wejściowe”. Jeśli zostały wprowadzone prawidłowe wartości to program poprzez funkcje *applyMethod*, aplikuje po kolei trzy metody numeryczne do danych wejściowych i wylicza przybliżone rozwiązania. Następnie dzięki funkcji *refresh* wyświetla je wraz z błędami przybliżenia. Próba wprowadzenia nieprawidłowych danych, które weryfikowane są przed wykonaniem obliczeń, skutkuje wyświetleniem stosownego ostrzeżenia.

Podczas obliczeń dla każdej metody, funkcja *calculate* wyznacza iteracyjnie węzły  $x_0, x_1, \dots, x_n = b$ , a także przybliżone rozwiązania, w oparciu o podaną liczbę  $n$  i przedział  $[a, b]$ . Na końcu każdej iteracji akumulowany jest także największy błąd danej metody.

Funkcja *euler* implementuje metodę Eulera, a funkcje *eulerModified* i *heun* analogicznie implementują odpowiadające im metody.

Wynikiem działania programu są przybliżone rozwiązania zagadnienia:  $y'(x) = -5x^4 + 2\sqrt{y + x^5} - 5 + 5$ ,  $y(1) = 5$  oraz dokładność rozwiązania dla każdej z metod.

## 2.3 Najważniejsze fragmenty programu

```
method.js

const f          = (x, y) => -5*x**4 + 2*Math.sqrt(y + x**5 - 5) + 5
const step       = (n, b) => (b - 1) / n
const yExact     = x => -(x**5) + x**2 + 5

// Methods
const euler      = h => (x, y) => y + h * f(x, y)
const eulerModified = h => (x, y) => y + h * f(x + h/2, y + h/2 * f(x, y))
const heun       = h => (x, y) => y + h/2 * (f(x, y) + f(x + h, y + h * f(x, y)))

const applyMethod = (method, {n, b}) => {
  const h = step(n, b)
  return calculate(n, h, method(h))
}

const calculate = (n, h, method, x = 1, y = 5, error = 0) => {
  for (let k = 0; k < n; k++) {
    y = method(x, y)
    x = x + h
    error = Math.max(Math.abs(y - yExact(x)), error)
  }
  return { value: y, error }
}
```

gui.js

```
const gui = new (class {
  input = { n: document.getElementById('n'), b: document.getElementById('b') }
  output = document.getElementById('output')
  error = document.getElementById('error')
  output = {
    euler: document.getElementById('euler'),
    eulerModified: document.getElementById('eulerModified'),
    heun: document.getElementById('heun')
  }

  validN = n => Number.isInteger(n) && n >= 1
  validB = b => Number.isFinite(b) && b >= 1

  refresh() {
    const input = this.getInput()

    if (!this.validN(input.n)) return this.setError('Niepoprawna wartość n')
    if (!this.validB(input.b)) return this.setError('Niepoprawna wartość b')

    this.clearError()
    this.setResult(applyMethod(euler, input), this.output.euler)
    this.setResult(applyMethod(eulerModified, input), this.output.eulerModified)
    this.setResult(applyMethod(heun, input), this.output.heun)
  }

  setResult = ({value, error}, handle) => {
    if (Number.isNaN(value))
      return this.setError('Wystąpił błąd podczas obliczeń liczb zmiennoprzecinkowych')
    handle.getElementsByClassName('value')[0].innerText = value.toFixed(2)
    handle.getElementsByClassName('error')[0].innerText = error.toFixed(2)
  }

  setError = e => this.error.innerText = e
  clearError = () => this.error.innerText = ''

  update = debounce(() => this.refresh(), 10)

  getInput = () => ({
    n: Number.parseFloat(this.input.n.value),
    b: Number.parseFloat(this.input.b.value)
  })
})();
```

## 2.4 Widok działania programu

### Metody numeryczne dla zagadnień różniczkowych

Zagadnienie różniczkowe:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(1) = 5$$

gdzie:

$$f(x, y(x)) = -5x^4 + 2\sqrt{y + x^5} - 5 + 5$$

Z dokładnym rozwiązaniem:

$$y(x) = -x^5 + x^2 + 5$$

#### Wprowadź dane wejściowe:

Liczba  $n \geq 1$ , określająca podział odcinka  $[a, b]$ :

Liczba  $b \geq 1$ , informująca o końcu odcinka  $[a, b]$ :

Nazwa metody	Wynik	Błąd
Eulera	-12.75	10.25
Zmodyfikowana Eulera	-16.43	6.57
Heuna	-16.60	6.40

Rysunek 1: Prawidłowo wprowadzone dane

## Metody numeryczne dla zagadnień różniczkowych

Zagadnienie różniczkowe:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(1) = 5$$

gdzie:

$$f(x, y(x)) = -5x^4 + 2\sqrt{y + x^5 - 5} + 5$$

Z dokładnym rozwiązaniem:

$$y(x) = -x^5 + x^2 + 5$$

**Wprowadź dane wejściowe:** *Niepoprawna wartość b*

Liczba  $n \geq 1$ , określająca podział odcinka  $[a, b]$ :

Liczba  $b \geq 1$ , informująca o końcu odcinka  $[a, b]$ :

Nazwa metody	Wynik	Błąd
Eulera		
Zmodyfikowana Eulera		
Heuna		

Rysunek 2: Nieprawidłowo wprowadzona wartość n



## Metody numeryczne dla zagadnień różniczkowych

Zagadnienie różniczkowe:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(1) = 5$$

gdzie:

$$f(x, y(x)) = -5x^4 + 2\sqrt{y + x^5 - 5} + 5$$

Z dokładnym rozwiązaniem:

$$y(x) = -x^5 + x^2 + 5$$

**Wprowadź dane wejściowe:** *Nieprawidłowa wartość b*

Liczba  $n \geq 1$ , określająca podział odcinka  $[a, b]$ :

23

Liczba  $b \geq 1$ , informująca o końcu odcinka  $[a, b]$ :

-6

Nazwa metody	Wynik	Błąd
Eulera		
Zmodyfikowana Eulera		
Heuna		

Rysunek 3: Nieprawidłowo wprowadzona wartość b