Aproksymacja równań różniczkowych - projekt

Natalia Wojtania i Grzegorz Chojnacki

14 stycznia 2021

1 Zadanie

1.1 Tytuł

Tytuł zadania to „Metody numeryczne dla zagadnień różniczkowych".

1.2 Treść

Napisz program, który rozwiąże trzema metodami (Eulera, zmodyfikowaną Eulera oraz Heuna) zagadnienie różniczkowe:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(1) = 5,$$

gdzie

$$f(x, y(x)) = -5x^4 + 2\sqrt{y + x^5 - 5} + 5.$$

Program ma również obliczyć dokładność dla każdej z tych metod, porównując je z dokładnym rozwiązaniem:

$$y(x) = -x^5 + x^2 + 5.$$

1.3 Metody

W programie należy wykorzystać metodę Eulera, zmodyfikowaną metodę Eulera oraz metodę Heuna (udoskonaloną metodę Eulera).

1.3.1 Opis metod

Zagadnienie początkowe:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0$$

na przedziale $[a, b]$, gdzie $f : [a, b] \times R \to R$ jest daną funkcją, a $y_0 \in R$ jest daną liczbą. Dla ustalonej liczby naturalnej $N \geqslant 1$ definiujemy $h = \frac{b-a}{N}$ i punkty $x_k = a + kh, 0 \leqslant k \leqslant N$ nazywane węzłami równoodległymi.

1. Metoda Eulera
   Jest ona metodą numeryczną do rozwiązywania równań różniczkowych z określoną wartością początkową. Metoda jest pierwszego rzędu co oznacza, że błąd lokalny (błąd na kroku) jest proporcjonalny do kwadratu wielkości kroku, a błąd globalny (błąd w danym czasie) jest proporcjonalny do wielkości kroku. Metoda Eulera często służy jako podstawa do konstruowania bardziej złożonych metod.

   Z równania różniczkowego $y'(x) = f(x, y(x))$ dla $x = x_k$
   mamy $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$.

   Przybliżając $y'(x_k)$ za pomocą ilorazu różnicowego mamy
   $y'(x_k) \approx \frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h}$.

   $$y(x_k + 1) \approx y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)),$$

   ponieważ $x_k + h = x_{k+1}$

   $$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), 0 \leqslant k \leqslant N - 1$$

   Punkty $(x_k, y_k), 0 \leqslant k \leqslant N$ wyznaczają przybliżone rozwiązanie
   $y'(x) = f(x, y(x)), y(a) = y_0$.

2. Zmodyfikowana metoda Eulera
   Metoda ta jest szczególną postacią metody Rungego-Kutty, znana popularnie jako metoda punktu środkowego. Należy ona do klasy schematów dwustopniowych. Wyrażona jest zależnością rekurencyją:

   $$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)), 0 \leqslant k \leqslant N - 1$$

3. Metoda Heuna

   W metodzie tej zamiast stałej wartości pochodnej obliczonej na początku przedziału, jak to było w metodzie Eulera, oblicza się pochodną również na końcu przedziału. Pierwsze oszacowanie wyniku nazywamy predyktorem, a następnie korektorem. Metoda ta, dzięki zabiegowi numerycznemu, daje sporą zmianę w dokładności wyniku i jest znacznie dokładniejsza niż klasyczna metoda Eulera. Wspomniany predyktor: $y_{k+1}^{Eu} = y_k + hf(x_k, y_k)$ wyrażamy stosując metodę Eulera. $y' = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} = \frac{f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}^{Eu})}{2}$, y^{Eu} liczone zwykłą metodą Eulera. $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{Eu}))$ opisuje działanie korektora.

   $$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))), 0 \leqslant k \leqslant N - 1$$

   to tzw. metoda Heuna.

   Te trzy metody są metodami jednokrokowymi tzn. do wyznaczenia y_{k+1} potrzebny jest jeden wcześniejszy y_k.

1.3.2 Przykład

Dla zagadnienia różniczkowego $y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = 1$ na przedziale [0,4] przyjmując krok całkowania $h = 0.5$ wyznaczyć przybliżenie y_1 trzema metodami oraz obliczyć błąd $|y_1 - y(x_1)|$ dla każdej z metod na tym kroku, wiedząc, że dokładne rozwiązanie to $y(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x$ oraz $f(x, y(x)) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$
Rozwiązanie:
$x_0 = a = 0, x_1 = 0 + 0.5 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, ..., x_n = b$
$y(0) = 1$, $y(x_1) = y(0.5) = -\frac{1}{2}(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5 \cdot 0.5 = 3.21875$

Metoda Eulera: $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$
$y_1 = 1 + 0.5f(0, 1) = 1 + 0.5 \cdot 8.5 = 5.25$
Błąd: $|5.25 - 3.21875| = 2.03125$

Metoda punktu środkowego: $y_1 = y_0 + hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0))$
$y_1 = 1 + 0.5f(0.25, 1 + 0.25f(0, 1)) = 3.109375$
Błąd: $|3.109375 - 3.21875| = 0.109375$

Metoda Heuna: $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x0, y0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)))$

$y_1 = 1 + 0.25(f(0,1) + f(0.5, 1 + hf(0,1)) = 3.4375$
Błąd: $|3.4375 - 3.21875| = 0.21875$

2 Opis implementacji algorytmu

Implementacja realizująca metodę Eulera, zmodyfikowaną Eulera oraz Heuna.

2.1 Dane wejściowe

Na wejściu program pobiera od użytkownika liczbę n, określająca podział odcinka $[a, b]$ oraz liczbę b, informująca o końcu odcinka $[a, b]$.

2.2 Przebieg działania

Program wyświetla komunikat: „Wprowadź dane wejściowe". Jeśli zostały wprowadzone prawidłowe wartości to program poprzez funkcje *euler*, *eulerModified* i *heun* oparte na metodzie *calculate* wylicza przybliżone rozwiązania i dzięki funkcji *refresh* wyświetla je wraz z błędami przybliżenia. Próba wprowadzenia nieprawidłowych danych, które weryfikowane są w programie w funkcji *refresh* skutkuje wyświetleniem stosownego ostrzeżenia.

Następnie funkcja *calculate* zajmuje się wyliczeniem węzłów $x_0, x_1, ..., x_n = b$ oraz przybliżonego rozwiązania w oparciu o podaną liczbę n i przedział wyznaczony przez $a = 1$dane w zadaniu oraz b wprowadzone przez użytkownika. Funkcja *euler* wylicza poszczególne y_{k+1} metodą Eulera. I analogicznie funkcja *eulerModified* wylicza poszczególne y_{k+1} zmodyfikowaną metodą Eulera. A funkcja *heun* wylicza poszczególne y_{k+1} metodą Eulera.

Wynikiem działania programu są przybliżone rozwiązania zagadnienia: $y'(x) = -5x^4 + 2\sqrt{y + x^5 - 5} + 5, y(1) = 5$ oraz dokładność rozwiązania dla każdej z metod.

2.3 Najważniejsze fragmenty programu

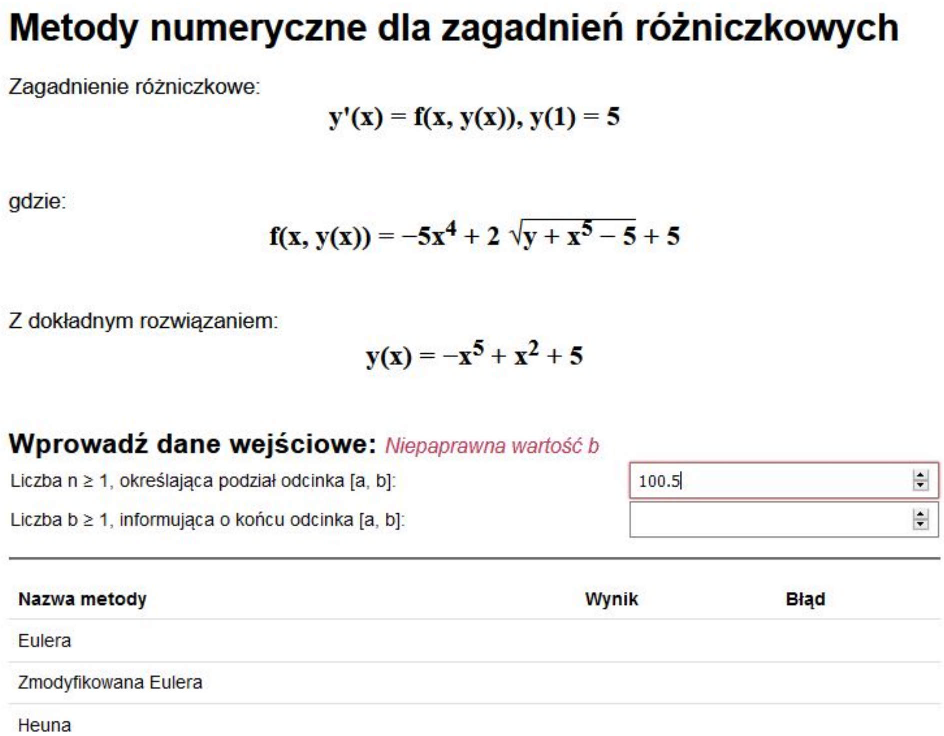
method.js

```
const a      = 1
const f      = (x, y) => -5*x**4 + 2*Math.sqrt(y + x**5 - 5) + 5
const yExact = x => -(x**5) + x**2 + 5
const step   = (n, b) => (b - a) / n

const calculate = (n, h, next, x = a, y = 5, error = 0) => {
  for (let k = 0; k < n; k++) {
    y = next(x, y)
    x = x + h
    error = Math.max(Math.abs(y - yExact(x)), error)
  }
  return { value: y, error: error }
}

const euler = ({n, b}) => {
  const h = step(n, b)
  const fn = (x, y) => y + h * f(x, y)
  return calculate(n, h, fn)
}

const eulerModified = ({n, b}) => {
  const h = step(n, b)
  const fn = (x, y) => y + h * f(x + h/2, y + h/2 * f(x, y))
  return calculate(n, h, fn)
}

const heun = ({n, b}) => {
  const h = step(n, b)
  const fn = (x, y) => y + h/2 * (f(x, y) + f(x + h, y + h * f(x, y)))
  return calculate(n, h, fn)
}
```

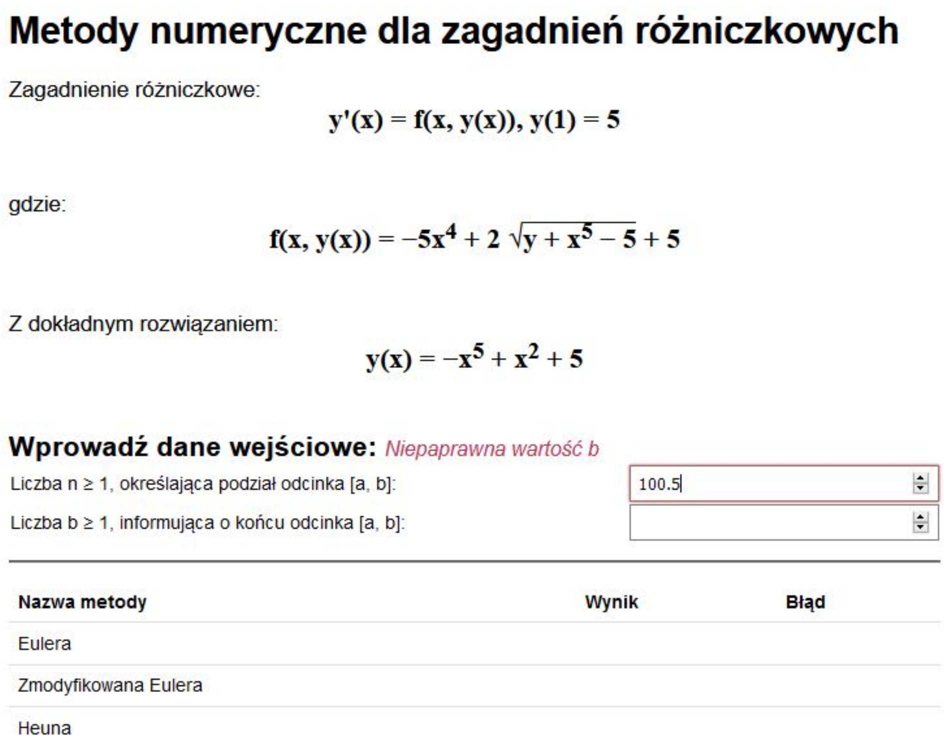
gui.js

```
const gui = new (class {
  input  = { n: document.getElementById('n'), b: document.getElementById('b') }
  output = document.getElementById('output')
  error  = document.getElementById('error')
  output = {
    euler:         document.getElementById('euler'),
    eulerModified: document.getElementById('eulerModified'),
    heun:          document.getElementById('heun')
  }

  validN = n => Number.isInteger(n) && n >= 1
  validB = b => Number.isFinite(b)  && b >= 1

  refresh() {
    const input = this.getInput()
    if (!this.validN(input.n)) this.setError('Niepaprawna wartość n')
    if (!this.validB(input.b)) this.setError('Niepaprawna wartość b')

    if (this.validB(input.b) && this.validN(input.n)) {
      this.clearError()
      this.setResult(euler(input), this.output.euler)
      this.setResult(eulerModified(input), this.output.eulerModified)
      this.setResult(heun(input), this.output.heun)
    }
  }

  setResult = (result, handle) => {
    handle.getElementsByClassName('value')[0].innerText = result.value.toFixed(2)
    handle.getElementsByClassName('error')[0].innerText = result.error.toFixed(2)
  }

  setError   = e  => this.error.innerText  = e
  clearError = () => this.error.innerText  = ''

  update = debounce(() => this.refresh(), 10)

  getInput = () => ({
     n: Number.parseFloat(this.input.n.value),
     b: Number.parseFloat(this.input.b.value)
  })
})()
```

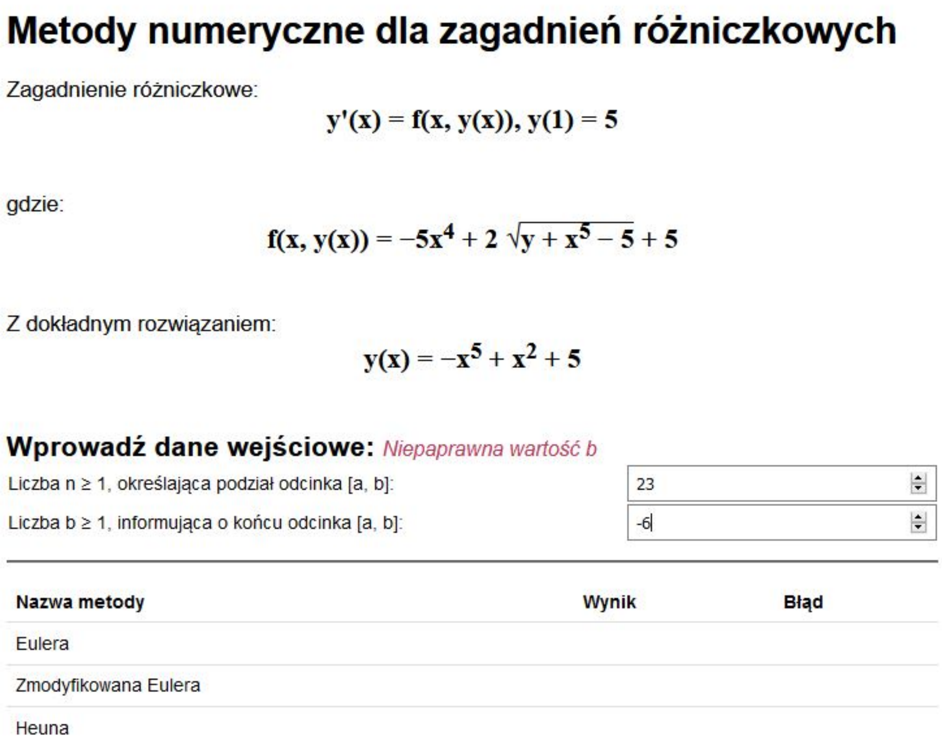
2.4 Widok działania programu



Rysunek 1: Prawidłowo wprowadzone dane



Rysunek 2: Nieprawidłowo wprowadzona wartość n



Rysunek 3: Nieprawidłowo wprowadzona wartość b