

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 2

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Wstęp

Cel ćwiczenia

1. Przeanalizowanie sposobu rozwiązywania układów równań liniowych metodami iteracyjnymi przy pomocy metody Jacobiego.
2. Porównanie dwóch kryteriów stopu, badanie dokładności obliczeń.
3. Zapoznanie się ze sposobem badania zbieżności układu przy pomocy wyliczenia promienia spektralnego macierzy iteracji.
4. Badanie metody nadrelaksacji SOR.

Dane techniczne

Wszystkie zaprezentowane poniżej wyniki otrzymałem w eksperymentach przeprowadzonych na sprzęcie Lenovo y50-70 z procesorem Intel Core i7-4720HQ 2.6 GHz. Rozwiązania zadań oparłem o znajomość algorytmu Jacobiego, pojęcia wartości własnych macierzy, promienia spektralnego oraz metody nadrelaksacji SOR.

Programy napisałem w Python w wersji 3 wykorzystując biblioteki: numpy, matplotlib, scipy. Wykresy wygenerowałem przy pomocy biblioteki matplotlib.

Zadanie indywidualne

Zadaniem indywidualnym było rozwiązanie układu **a)** dla parametrów **$k=10$, $m=1$**

Lista pojęć

1. **Norma wyniku** - norma z różnicy wektora wynikowego obliczonego metodą Jacobiego (y), a wektorem szukanym (x) będącym permutacją ze zbioru {-1, 1}.

Norma ta jest obliczana według wzoru:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

2. **Rozmiar macierzy** - ilość wierszy/kolumn macierzy kwadratowej
3. **Promień spektralny** - największa co do modułu wartość własna macierzy
4. **Wektor początkowy** x_0 - początkowe przybliżenie rozwiązania układu w algorytmie Jacobiego oraz SOR
5. **Pierwsze kryterium stopu** - $\|x^{i+1} - x^i\| < \rho$
6. **Drugie kryterium stopu** - $\|Ax^i - b\| < \rho$

Promień spektralny i zbieżność macierzy.

Promień spektralny wyznaczam wyznaczając maksimum z modułu wartości własnych macierzy iteracji. Wartości własne macierzy obliczam korzystając z funkcji eigvals z biblioteki scipy.linalg. Wartości własne macierzy obliczane są tam w następujący sposób:

Liczba w jest wartością własną macierzy A jeżeli istnieje taki wektor v , że $A * v = w * v$.

Zatem A, w, v spełniają równania $A * v[:,i] = w[i] * v[:,i]$

$\forall i \in \{0, \dots, M-1\}$, gdzie M jest rozmiarem macierzy.

Dla macierzy $A = D + R$, gdzie D to macierz diagonalna macierzy A , a $R = A - D$.

macierz iteracji Jacobiego to $M = R * D^{-1}$ czyli iloczyn macierzy R oraz odwrotności

macierzy D . Metoda jest zbieżna gdy wartość promienia spektralnego jest mniejsza od 1.

Metoda sukcesywnych nadrelaksacji.

Rozważam układ równań liniowych zapisany w postaci macierzowej $Ax = B$.

Macierze L, D, U oznaczają rozkład współczynników A na macierze kolejno:

poddiagonalną, diagonalną, nad-diagonalną, tak, że zachodzi równość: $A = L + D + U$.

Istnieje modyfikacja metody Gaussa-Seidla, która może znacznie przyspieszyć jej zbieżność.

Podstawowy wzór iteracyjny metody Gaussa-Seidla to:

$$D * x^{i+1} = -L * x^{i+1} - U * x^i + b$$

Wzór ten po modyfikacji wygląda następująco:

$$D * x^{i+1} = -L * \omega * x^{i+1} - [\omega * U - (1 - \omega) * D] * x^i + \omega * b.$$

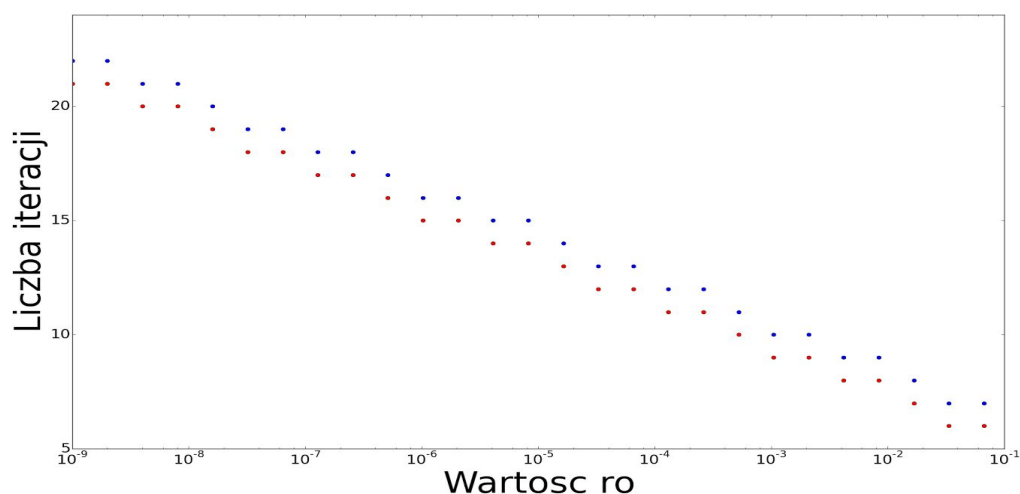
Dokonując przekształceń otrzymuje:

$$x^{i+1} = (D + \omega * L)^{-1} (-\omega * U + (1 - \omega) * D) * x^i + (D + \omega * L)^{-1} * b * \omega,$$

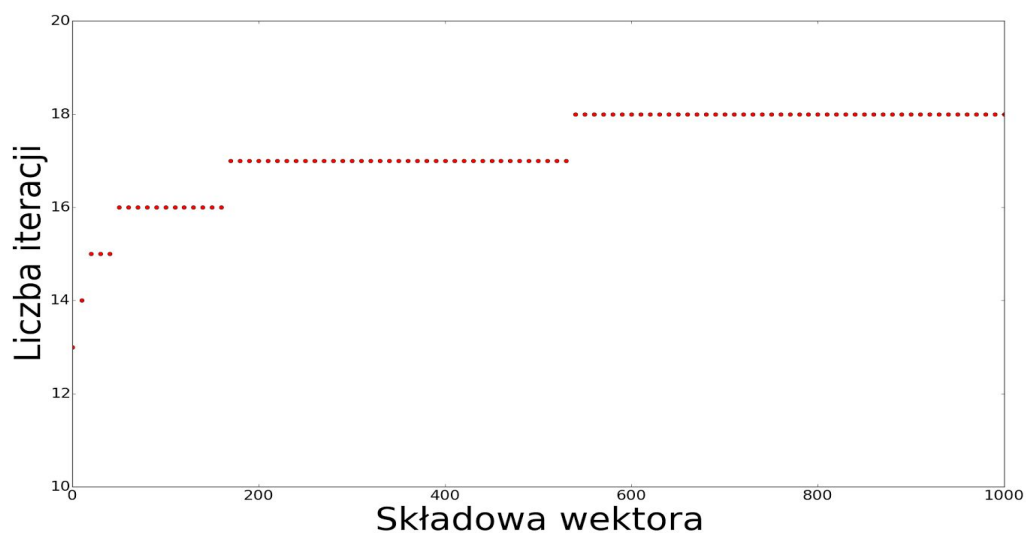
w tym wzorze ω nazywamy współczynnikiem(parametrem) relaksacji. Zmieniając go można wpływać na zbieżność metody iteracji. Gdy $\omega=1$, to metoda upraszcza się do Gaussa-Seidla. Aby zagwarantować zbieżność tak zmodyfikowanej metody - metody relaksacji - do rozwiązania, współczynnik ω może przyjmować jedynie wartości (0,2). Gdy ponadto współczynnik $\omega > 1$, to mówimy o metodzie kolejnych(sukcesywnych) nadrelaksacji(ang. Successive Over-Relaxation : SOR). Takie wartości współczynnika relaksacji przyspieszają metodę Gaussa-Seidla. Dobór parametru ω jest wysoce zależny od problemu.

Zadanie 1

Zależność liczby iteracji od wartości ρ dla stałego rozmiaru macierzy dla pierwszego kryterium stopu(kolor czerwony) i drugiego kryterium stopu(kolor niebieski) x_0 - wektor zerowy, rozmiaru macierzy $n=100$.



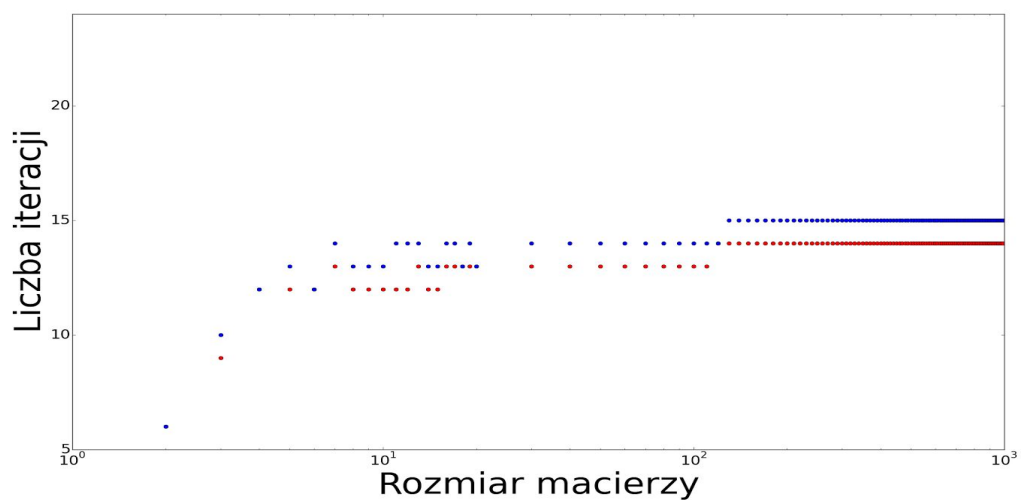
Zależność liczby iteracji od różnych wektorów początkowych(x_0) dla stałego rozmiaru macierzy($n=100$), przy stałej wartości $\rho=0.00001$ dla pierwszego kryterium stopu. x_0 - wektor składający się ze 100 takich samych liczb, przedstawiony na osi OX.



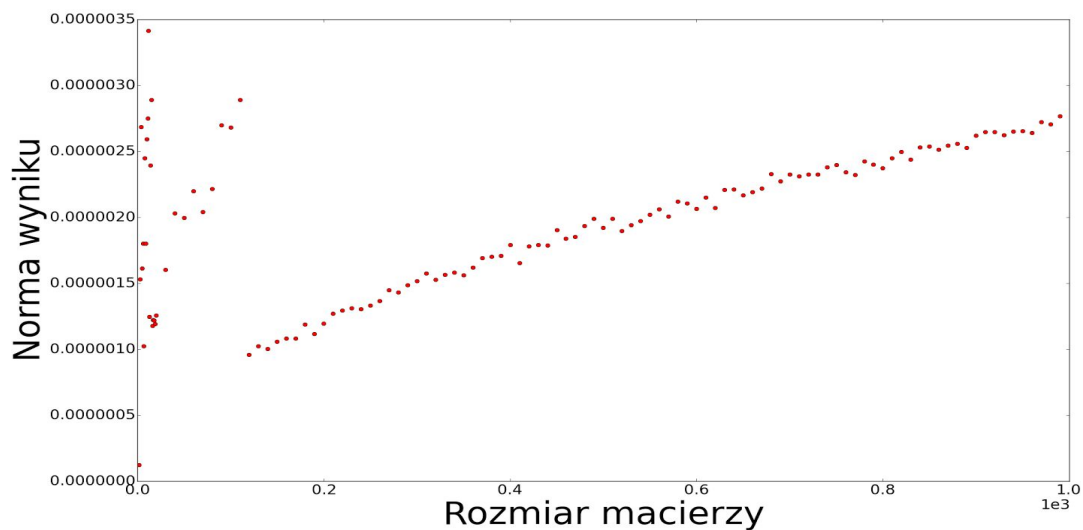
Zależność liczby iteracji od różnych wektorów początkowych(x_0) dla stałego rozmiaru macierzy($n=100$), przy stałej wartości $\rho=0.00001$ dla drugiego kryterium stopu.
 x_0 - wektor składający się ze 100 takich samych liczb, przedstawiony na osi OX.



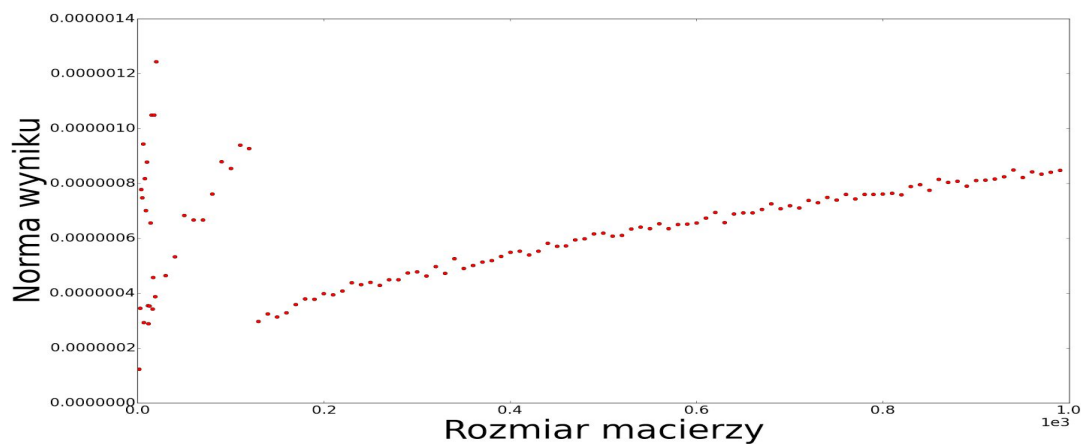
Zależność liczby iteracji od rozmiaru macierzy dla pierwszego(czerwony kolor) oraz drugiego kryterium stopu(niebieski kolor) przy stałej wartości $\rho=0.00001$.



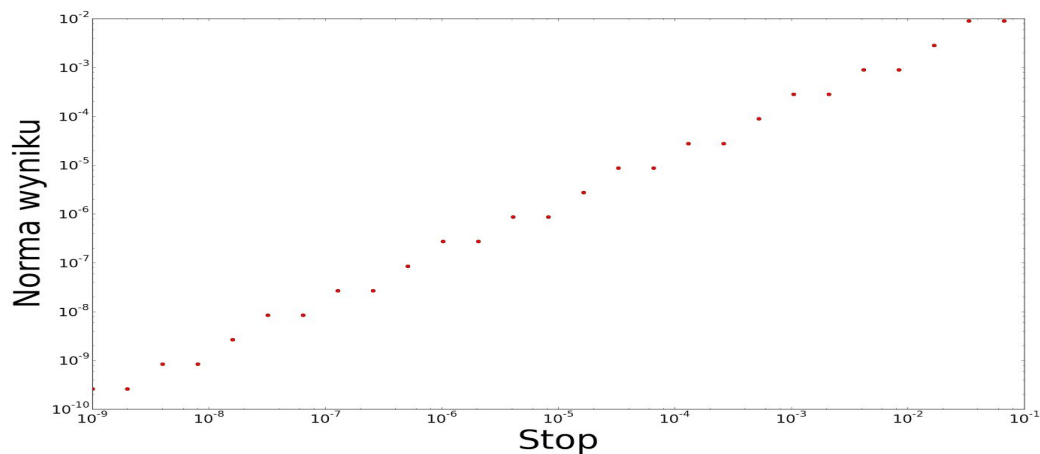
Zależność normy wyniku od rozmiaru macierzy dla pierwszego kryterium stopu, wartość $\rho=0.00001$, x_0 - wektor zerowy



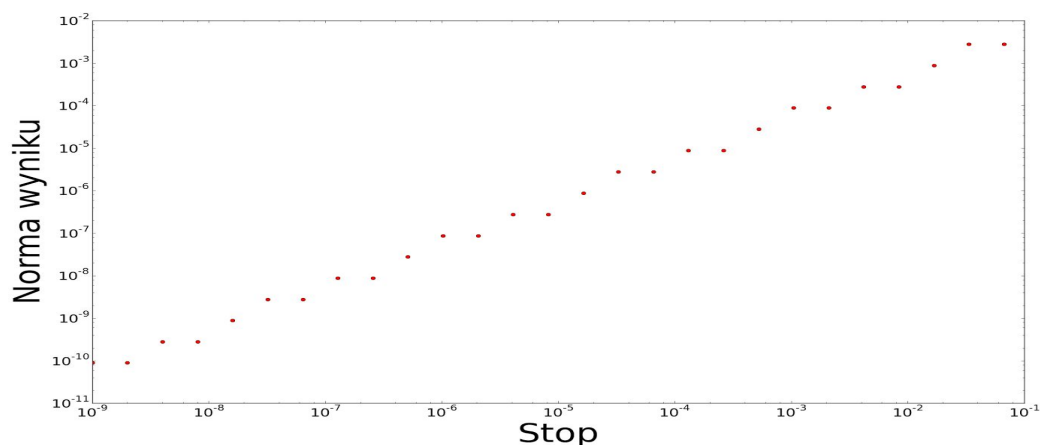
Zależność normy wyniku od rozmiaru macierzy dla drugiego kryterium stopu, wartość $\rho=0.00001$, x_0 - wektor zerowy



Zależność normy wyniku od wartości ρ (na osi zaznaczone jako "Stop") dla stałego rozmiaru macierzy ($n=100$), x_0 - wektor zerowy, dla pierwszego kryterium stopu.



Zależność normy wyniku od wartości ρ (na osi zaznaczone jako "Stop") dla stałego rozmiaru macierzy ($n=100$), x_0 - wektor zerowy, dla drugiego kryterium stopu.



Wnioski z zadania 1.

1. Drugie kryterium stopu wymaga nieco większej ilości iteracji niż kryterium pierwsze.
2. Ilość iteracji rośnie wprost proporcjonalnie do wektora początkowego oraz rozmiaru macierzy. Najbardziej optymalnie wybrać wektor złożony z samych zer jako wektor początkowy.
3. Wzrost wartości ρ powoduje wzrost dokładności metody, ale również czas obliczeń.
4. Drugie kryterium stopu powoduje większą dokładność obliczeń (ok. 2,5 krotnie) niż pierwsze kryterium stopu dla macierzy o tym samym rozmiarze.
5. Metoda Jacobiego daje przewidywalne wyniki dopiero dla odpowiednio dużych macierzy (minimum 100 elementów).

Zadanie 2

Zależność promienia spektralnego od rozmiaru macierzy.

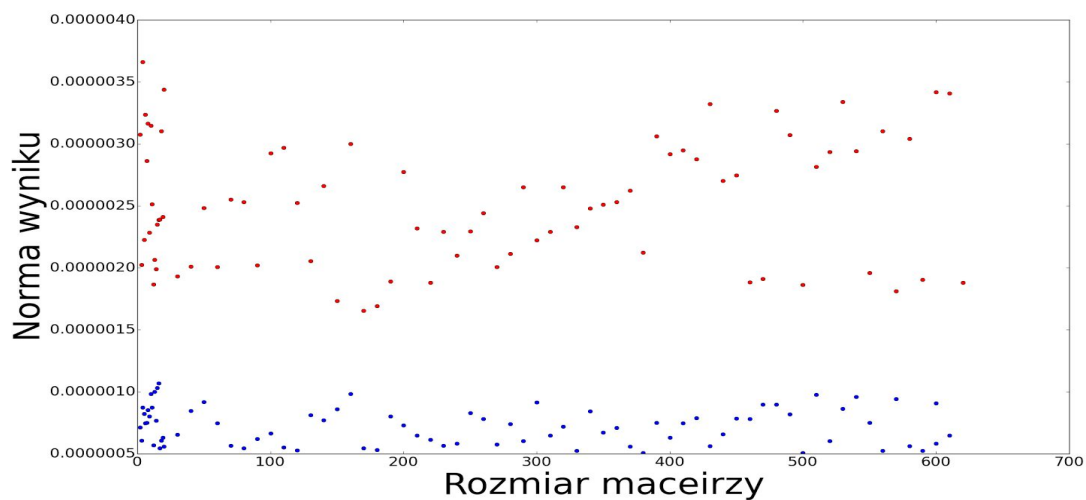


Wnioski z zadania 2.

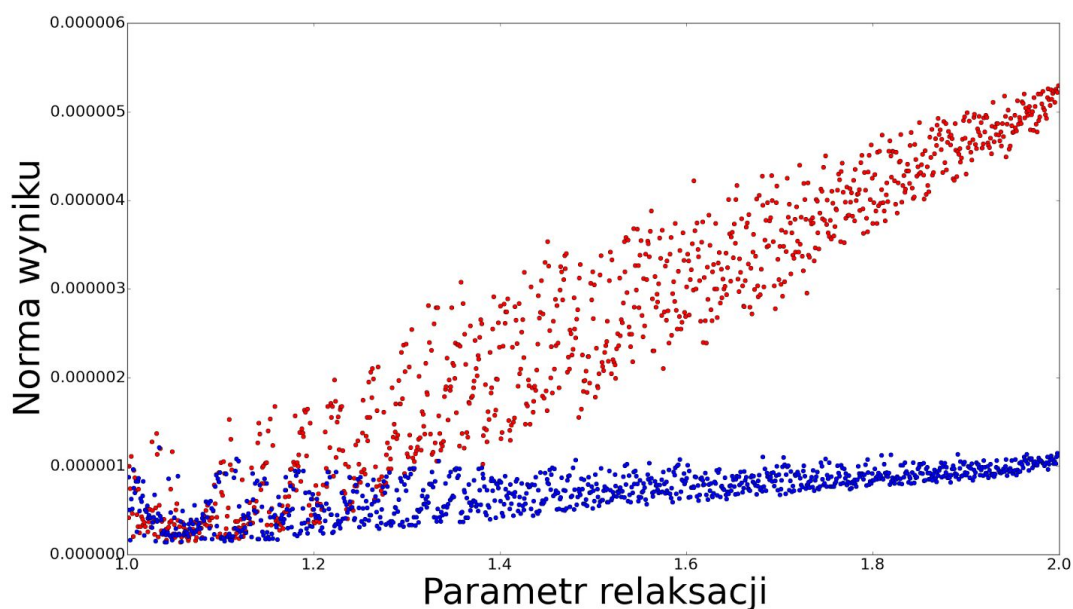
1. Promień spektralny utrzymuje się na stałym poziomie ok. $0.33 < 1$, co implikuje zbieżność metody

Zadanie 3

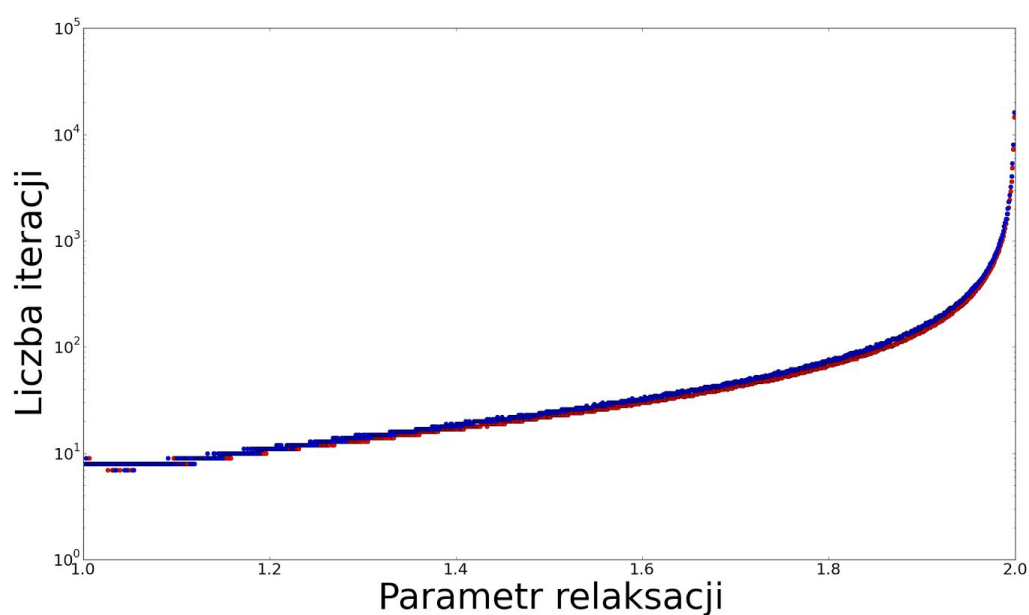
Zależność normy wyniku od rozmiaru macierzy, x_0 - wektor zerowy, parametr relaksacji $\omega = 1.5$, wartość $\rho = 0.00001$ dla pierwszego kryterium stopu (kolor czerwony) oraz drugiego (kolor niebieski.)



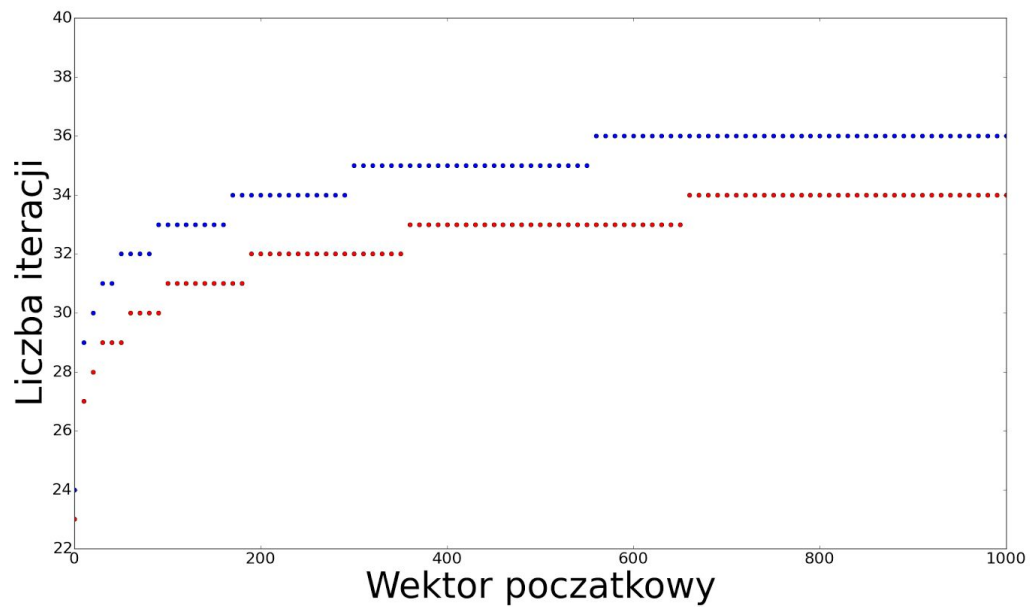
Zależność normy wyniku od parametru relaksacji, x_0 - wektor zerowy, stały rozmiar macierzy($n=100$), wartość $\rho=0.00001$ dla pierwszego kryterium stopu(kolor czerwony) oraz drugiego kryterium (kolor niebieski).



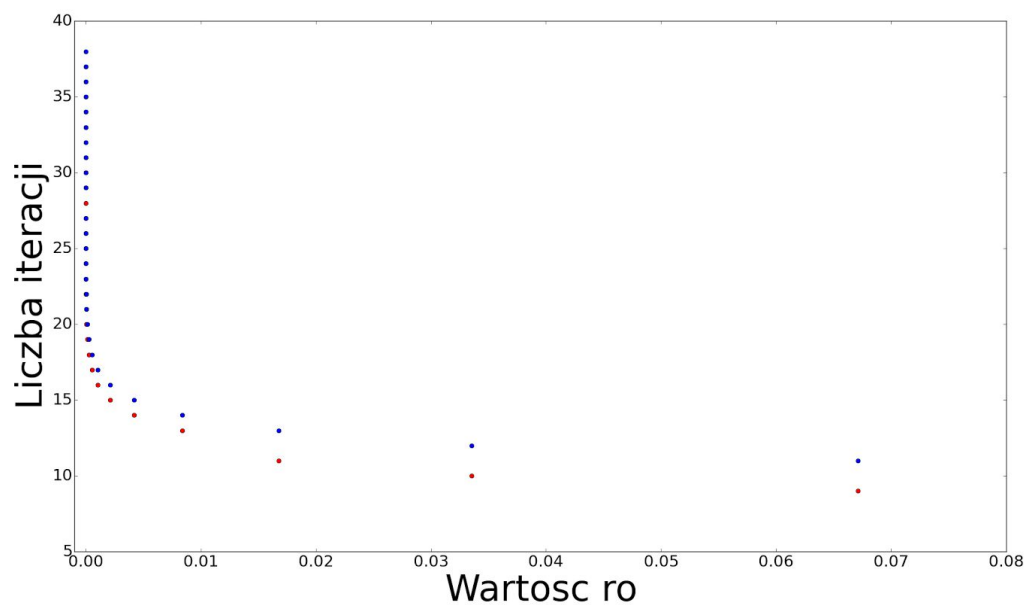
Zależność liczby iteracji od parametru relaksacji, x_0 - wektor zerowy, stały rozmiar macierzy($n=100$), wartość $\rho=0.00001$ dla pierwszego kryterium stopu(kolor czerwony) oraz drugiego kryterium (kolor niebieski).



Zależność liczby iteracji od wektora początkowego dla stałego rozmiaru macierzy($n=100$), wartość $\rho=0.00001$, parametr relaksacji $\omega = 1.5$ dla pierwszego kryterium stopu(czerwone kropki) i drugiego kryterium stopu(niebieski).



Zależność liczby iteracji od wartości ρ , dla stałego rozmiaru macierzy($n=100$), x_0 - wektor zerowy, parametr relaksacji $\omega = 1.5$. Pierwsze kryterium(czerwone), drugie(niebieskie)



Wnioski z zadania 3.

1. Im większy parametr relaksacji, tym więcej iteracji. Kryterium stopu nie ma wpływu na ilość iteracji.
2. Wzrost wartości ρ powoduje obniżenie ilości iteracji. Kryterium stopu praktycznie nie ma wpływu na ilość iteracji (różnica wynosi jeden).
3. Metoda SOR z odpowiednim parametrem relaksacji zmniejsza ilość potrzebnych iteracji (dla rozmiaru $n=100$, z ok. 16-17 do 10).
4. Metoda SOR powoduje zwiększenie dokładności obliczeń.
5. W zależności od parametru relaksacji norma wyniku utrzymuje się na stałym poziomie lub nieznacznie rośnie. Kryterium nr 1 jest bardziej wrażliwe na zaburzenia.
6. Wyznaczenie odpowiedniego parametru relaksacji dla problemu jest bardzo ważne. Tylko wtedy metoda SOR umożliwia obniżenie ilości iteracji w porównaniu do metody Jacobiego.

Podsumowanie.

Zarówno metoda Jacobiego jak i metoda SOR spisują się bardzo dobrze w rozwiązywaniu układów równań liniowych. Metoda SOR pozwala na szybsze uzyskanie dokładniejszych wyników pod warunkiem obliczenia współczynnika relaksacji dla odpowiedniego problemu numerycznego.