Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych

Grzegorz Borkowski,

31.03.2016, czwartek 11.15 - 12.45.

1 Wstęp

1.1 Cele ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zapoznanie się ze sposobem rozwiązywania równań na przykładzie metody Newtona (stycznych), Eulera (siecznych) oraz rozwiązywania układów równań nieliniowych metodą Newtona.

1.2 Dane techniczne

Wszystkie zaprezentowane w tym sprawozdaniu wyniki otrzymałem samodzielnie. Eksperymenty przeprowadziłem na sprzęcie Lenovo y50-70 z procesorem Intel Core i7-4720HQ 2.6 GHz. Programy napisałem w języku Python 3. Obliczenia wykonywano na pojedynczej precyzji.
Sprawozdanie napisane w LaTeX.

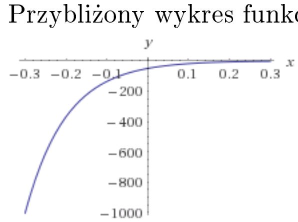
1.3 Zadanie indywidualne

Otrzymane zadanie indywidualne to : 1) $f(x) = mxe^{-m} - me^{-nx} + \frac{1}{n \cdot m}$ dla n=10, m=50, przedział [-0.5,1.5].

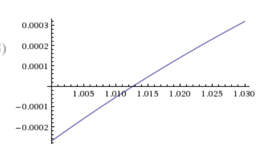
Zadanie 2)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 = 3 \end{cases}$$

Przybliżony wykres funkcji z zadania 1szego (źródło: WolframAlpha).



(x from −0.3 to 0.3)



1.4 Opis metody Newtona

1.4.1 Metoda Newtona

Metoda Newtona(zwana również metodą Newtona-Raphsona lub
metodą stycznych) to algorytm iteracyjny wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji.

1.4.2 Założenia metody

W metodzie Newtona zakłada się o funkcji f:

1. W przedziale $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek.
2. Funkcja ma różne znaki na końcach przedziału, tj: $f(a) * f(b) < 0$
3. Pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w tym przedziale

1.4.3 Algorytm działania

W pierwszym kroku wybieramy punkt startowy x_1(zazwyczaj jest to wartość $0, 1, a, b$) z którego następnie wyprowadzana jest styczna w $f(x_1)$.
Odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania oznaczonym jako x_2. Jeżeli przybliżenie nie jest satysfakcjonujące, jako nowy punkt startowy wybierany jest x_2 i wszystkie czynności są powtarzane. Kolejne przybliżenia są dane wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

1.5 Opis metody Eulera

1.5.1 Metoda Eulera

Metoda Eulera(zwana również metodą siecznych) to algorytm iteracyjny
do rozwiązywania układów równań nieliniowych z jedną niewiadomą.
Metoda siecznych to algorytm interpolacji liniowej. Polega na założeniu,
że funkcja na dostatecznie małym odcinku $< a, b >$ w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy. Możemy wtedy na odcinku $< a, b >$ krzywą $y = f(x)$ zastąpić sieczną. Za przybliżoną wersję pierwiastka przyjmujemy punkt
przecięcia siecznej z osią OX. Metoda siecznych nie potrzebuje znajomości pochodnej funkcji. Metoda zawodzi gdy $f(x_n) = f(x_{n-1})$

1.5.2 Wzory iteracyjne

Metodę siecznych dla funkcji $f(x)$ mająca pierwiastek w przedziale $< a, b >$możemy zapisać:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad n = 1, 2 \dots \end{cases}$$

Wzór na x_{n+1} otrzymujemy ze wzoru z metody Newtona

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

wstawiając przybliżenie pochodnej w punkcie x_n

$$f'(x_n) \approxeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

1.6 Rozwiązywanie układów równań nieliniowych

Opis metody Uogólnieniem metody Newtona na przypadek wielowymiarowy(k równań nieliniowych z k niewiadomymi):

$$\begin{cases} F_1(x_0 + x_1 + ...x_k) = 0 \\ ... \\ F_n(x_0 + x_1 + ...x_k) = 0 \end{cases}$$

to metoda Newtona, którą przez analogię zapisujemy wektorowo jako:

$$P_{k+1} = P_k - [J(P_k)]^{-1} F(P_k)$$

gdzie wektor zmiennych(P_0 to przybliżenie początkowe):

$$P_n = \begin{bmatrix} x_1^n \\ ... \\ x_n^n \end{bmatrix} \tag{1}$$

,

wektor funkcji:

$$F(P) = \begin{bmatrix} F(P_1) \\ ... \\ F(P_n) \end{bmatrix} \tag{2}$$

macierz Jakobianu:

$$J(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial P_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial P_N} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial P_N} \end{bmatrix} \tag{3}$$

1.7 Kryteria stopu

Jako kryteria stopu przyjmowałem:

1. $|x^{i+1} - x^i| < \rho$, zwane dalej pierwszym kryterium stopu.
2. $|f(x^i)| < \rho$, zwane dalej drugim kryterium stopu.

2 Zadanie 1

Dla obu kryteriów stopu, wybierałem punkt startowy z zadanego przedziału i obliczałem liczbę iteracji i rozwiązanie przy zadanym ro ze zbioru $\{1e-05, 2e-05, 4e-05, ...0.16384\}$. Część wyników jest przedstawiona w poniższych tabelach.

2.1 Metoda Newtona

Wybieram pewien punkt startowy i dla określonego ro i kryterium stopu obliczam liczbę iteracji i dokładne rozwiązanie zgodnie z algorytmem w punkcie 1.4.3.

2.1.1 Wyniki dla różnych punktów startowych przy ro=1e-05 Pierwsze kryterium stopu.

Punkt startowy	Liczba iteracji	Rozwiązanie	X	Punkt startowy	Liczba iteracji	Rozwiązanie
1.4	47	1.0126542	X	0.5	8	1.01265891
1.3	18	1.0126627	X	0.4	9	1.01265891
1.2	8	1.0126630	X	0.3	10	1.01265893
1.1	4	1.0126601	X	0.2	11	1.01265891
1.0	2	1.0126601	X	0.1	12	1.0126589
0.9	4	1.0126623	X	-0.1	14	1.0126589
0.8	5	1.0126607	X	-0.2	15	1.012658
0.7	6	1.0126592	X	-0.3	16	1.01265891
0.6	7	1.01265902	X	-0.4	17	1.0126589

2.1.2 Wyniki dla stałego punktu startowego przy różnym ro. Pierwsze kryterium stopu.

Punkt startowy	Ro	Iteracje	Rozwiązanie		Punkt startowy	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
1.2	2e-05	8	1.0126630		1.2	0.00256	7	1.0125674
1.2	4e-05	8	1.0126630		1.2	0.00512	6	1.0082563
1.2	8e-05	8	1.0126630		1.2	0.1024	6	1.0082563
1.2	0.00016	7	1.0125674		1.2	0.02048	6	1.0082563
1.2	0.00032	7	1.0125674		1.2	0.04096	5	0.9814310
1.2	0.00064	7	1.0125674		1.2	0.08192	4	0.9216971
1.2	0.00128	7	1.0125674		1.2	0.16384	1	0.6489808

2.1.3 Wyniki dla różnych punktów startowych dla stałego ro. Drugie kryterium stopu.

Punkt startowy	Ro	Iteracje	Rozwiązanie	X	Punkt startowy	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
1.4	1e-05	46	1.0113271	X	0.5	1e-05	7	1.0117456
1.3	1e-05	16	1.0053682	X	0.4	1e-05	8	1.0117502
1.2	1e-05	6	1.0082856	X	0.3	1e-05	9	1.0117473
1.1	1e-05	3	1.0120246	X	0.2	1e-05	10	1.0117463
1.0	1e-05	1	1.0118941	X	0.1	1e-05	11	1.0117453
0.9	1e-05	2	1.0038729	X	-0.1	1e-05	13	1.0117453
0.8	1e-05	4	1.0119702	X	-0.2	1e-05	14	1.0117453
0.7	1e-05	5	1.0118314	X	-0.3	1e-05	15	1.0117453
0.6	1e-05	6	1.0117778	X	-0.4	1e-05	16	1.0117453

2.1.4 Wyniki dla stałego punktu startowego przy różnym ro. Drugie kryterium stopu.

Punkt startowy	Ro	Iteracje	Rozwiązanie		Punkt startowy	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
1.2	2e-05	6	1.00825635		1.2	0.00256	4	0.9216971
1.2	4e-05	6	1.00825635		1.2	0.00512	3	0.8393744
1.2	8e-05	6	1.00825635		1.2	0.1024	2	0.7463472
1.2	0.00016	5	0.9814310		1.2	0.02048	2	0.7463472
1.2	0.00032	5	0.9814310		1.2	0.04096	1	0.6489808
1.2	0.00064	5	0.9814310		1.2	0.08192	0	1.9999999
1.2	0.00128	4	0.9216971		1.2	0.16384	0	1.9999999

2.2 Metoda Eulera.

Wybieramy dwa punkty startowe i dla pewnego ro i kryterium stopu obliczam liczbe iteracji i rozwiązanie zgodnie z algorytmem w 1.5.2

2.2.1 Wyniki dla stałego ro i różnych punktów startowych. Pierwsze kryterium stopu.

x_o	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie		x_o	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
0.8	1.5	1e-05	0	0.79999999		0.2	1.5	1e-05	17	1.01266284
0.7	1.5	1e-05	0	0.69999999		0.1	1.5	1e-05	18	1.0126596415
0.6	1.5	1e-05	11	1.01266205		-0.1	1.5	1e-05	21	1.01266173
0.5	1.5	1e-05	13	1.01266308		-0.2	1.5	1e-05	22	1.01265370
0.4	1.5	1e-05	14	1.012662542		-0.3	1.5	1e-05	24	1.012662942
0.3	1.5	1e-05	15	1.01265653		-0.4	1.5	1e-05	25	1.01266258

2.2.2 Wyniki dla różnych ro i stałych punktów startowych. Pierwsze kryterium stopu.

x_o	x_1	Ro	Liczba iteracji	Rozwiązanie		x_o	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
0.1	1.5	1e-05	18	1.0126596415		0.1	1.5	0.00032	17	1.012434640
0.1	1.5	2e-05	18	1.012659641		0.1	1.5	0.00064	17	1.012434640
0.1	1.5	4e-05	18	1.01265964		0.1	1.5	0.00128	17	1.01243464
0.1	1.5	8e-05	18	1.0126596		0.1	1.5	0.00256	0	0.09999999
0.1	1.5	0.00016	18	1.01265964		0.1	1.5	0.00512	0	0.09999999

2.2.3 Wyniki dla różnych ro i różnych punktów startowych. Pierwsze kryterium stopu.

x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie		x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
-0.5	0.8	1e-05	0	0.799999		-0.5	1	2e-05	0	1.0000000
-0.5	1	1e-05	0	0.99999		-0.5	1.3	2e-05	0	1.3
-0.5	1.3	1e-05	0	1.3		-0.5	1.4	2e-05	0	1.4
-0.5	1.4	1e-05	0	1.4		-0.5	0.8	0.00032	0	0.8
-0.5	0.8	2e-05	0	0.8		-0.5	1	0.00032	0	1
-0.5	1.4	0.00032	0	1.4		-0.5	1.3	0.00032	0	1.3

2.2.4 Wyniki dla stałego ro i różnych punktów startowych. Drugie kryterium stopu.

x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie		x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
0.8	1.5	1e-05	6	1.01063696		0.3	1.5	1e-05	13	1.00875890
0.7	1.5	1e-05	8	1.0120629		0.2	1.5	1e-05	15	1.0115156
0.6	1.5	1e-05	9	1.01072655		0.1	1.5	1e-05	16	1.00960981
0.5	1.5	1e-05	10	1.00785230		-0.1	1.5	1e-05	19	1.0105227
0.4	1.5	1e-05	12	1.0111373		-0.2	1.5	1e-05	20	1.0081832
-0.4	1.5	1e-05	23	1.0111831		-0.3	1.5	1e-05	22	1.0117052

2.2.5 Wyniki dla różnych ro i stałych punktów startowych. Drugie kryterium stopu.

x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie		x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
0.1	1.5	1e-05	16	1.0096098		0.1	1.5	0.00032	15	0.9972281
0.1	1.5	2e-05	16	1.0096098		0.1	1.5	0.00064	14	0.9690426
0.1	1.5	4e-05	16	1.0096098		0.1	1.5	0.00128	13	0.9253259
0.1	1.5	8e-05	15	0.9972281		0.1	1.5	0.00256	13	0.9253259
0.1	1.5	0.00016	15	0.9972281		0.1	1.5	0.00512	12	0.87044147
0.1	1.5	0.01024	11	0.80880722						

2.2.6 Wyniki dla różnych ro i różnych punktów startowych. Drugie kryterium stopu.

x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie		x_0	x_1	Ro	Iteracje	Rozwiązanie
-0.5	0.8	1e-05	6	1.01063		-0.5	1.3	2e-05	6740	1.00799
-0.5	1	1e-05	2	1.0118943		-0.5	1.4	2e-05	?	brak($f(x_n) = f(x_{n-1})$)
-0.5	1.3	1e-05	6740	1.0079969		-0.5	0.8	0.00032	4	0.97629
-0.5	1.4	1e-05	?	brak($f(x_n) = f(x_{n-1})$)		-0.5	1	0.00032	0	0.99999
-0.5	0.8	2e-05	6	1.0106369		-0.5	1.3	0.00032	6739	1.03144
-0.5	1	2e-05	1	1.0000000		-0.5	1.4	0.00032	?	brak($f(x_n) = f(x_{n-1})$)

2.3 Wnioski z metody Newtona i siecznych.

1. Dla metody Newtona przy odpowiednio dokładnym ro, punkt startowy nie ma dużego wpływu na dokładność rozwiązania, tylko na liczbę iteracji. (2.1.1, 2.1.3).
   Aby ograniczyć liczbę iteracji można najpierw zastosować metodę bisekcji do znalezenia obszarów zbieżności w dziedzinie funkcji, a następnie używając metody Newtona do szybkiego i dokładniejszego obliczenia lokalnego pierwiastka.
2. Dobór odpowiedniego ro jest bardzo istotny. W przypadku wzięcia zbyt dużego ro, metoda nie znajdzie dokładnego pierwiastka. (2.1.2, 2.1.4), (2.2.2).
3. Drugie kryterium stopu przy takim samym ro jest mniej dokładne niż kryterium pierwsze(2.1.2, 2.1.4), (2.2.2, 2.2.5).
4. Metoda Newtona może bywać rozbieżna, gdy punkt startowy jest zbyt daleko od szukanego pierwiastka. Możliwym zabezpieczeniem jest dodanie warunku, że przekroczenie ustalonej liczb iteracji jest równoznaczne z niepowodzeniem algorytmu w zadanym przedziale. (2.1.1, 2.1.3). Dla $x_o = 1.4$, liczba iteracji wynosi 46 lub 47, a dla $x_o = 1.3$ liczba iteracji to 16 lub 18.
5. Dla metody siecznych nieodpowiednie wybranie punktów startowych może spowodować, że obliczenie pierwiastka jest niemożliwe.(2.2.1, 2.2.3).
6. W metodzie siecznych dobór odpowiednich punktów startowych powoduje zmniejszenie liczby potrzebnych iteracji(2.2.4).
7. W metodzie siecznych w pewnych przypadkach niemożliwe jest obliczenie pierwiastka ponieważ zachodzi warunek, że $f(x_n) = f(x_{n-1})$ (2.2.6.)

3 Zadanie 2.

3.1 Przebieg eksperymentu

Rzeczywiste rozwiązania tego układu równań to (znalezione przy pomocy www.wolframalpha.com):

$[x, y, z] = [1, -1, -1]$
$[x, y, z] = [1, 0, 0]$
$[x, y, z] = [0.953156, -0.428689, -0.0922802]$

Przy pomocy algorytmu opisanego w punkcie 1.6 wyznaczałem rozwiązania układu równań dla różnych ro, dwóch kryteriów stopu oraz 200 różnych wektorów początkowych $[x, x, x]$ dla $x\epsilon[-10, 10]$ oraz 200 wektorów postaci $[x, 2 \cdot x, \frac{x}{2}], x\epsilon[-10, 10]$.

3.2 Wyniki eksperymentu

3.2.1 Badanie liczby iteracji w zależności od ro dla stałego wektora początkowego {1,1,1}. Pierwsze kryterium stopu.

Ro	x_1	x_2	x_3	Iteracje	X	Ro	x_1	x_2	x_3	Iteracje
1e-08	1	-1	-1	41	X	2e-06	1	-1	-1	41
4e-06	1	-1	-1	41	X	8e-06	1	-1	-1	41
1.6e-05	1	-1	-1	41	X	3.2e-05	1	-1	-1	41
0.00409	1	-1	-1	40	X	0.00819	0.999	-1	-1	39
0.01638	0.999	-1	-1	39	X	0.0606	0.999	-1	-1	39
0.1677	0.9958	-1.007	-0.995	38	X	0.3355	0.941	-1.0962	-1.014	37

3.2.2 Badanie liczby iteracji w zależności od ro dla wektora początkowego {1,1,1}. Drugie kryterium stopu

Ro	x_1	x_2	x_3	Iteracje	X	Ro	x_1	x_2	x_3	Iteracje
1e-08	1	-1	-1	41	X	2e-06	1	-1	-1	41
4e-06	1	-1	-1	41	X	8e-06	1	-1	-1	41
1.6e-05	1	-1	-1	41	X	3.2e-05	1	-1	-1	41
0.00409	1	-1	-1	40	X	0.01638	0.999	-1	-1	40
0.03276	1	-1	-1	40	X	0.0606553	0.999	-1	-1	39
0.16777	0.999	-1.0	-1.0	39	X	0.3355443	0.9999	-1.0000	-1.00	39

3.2.3 Badanie wyników w zależności od wektora początkowego[x_o,$2x_o$,$0.5\cdot x_o$] dla stałego ro=1e-08. Pierwsze kryterium stopu.

Ro	x_1	x_2	x_3	Iteracje	x_o	X	x_1	x_2	x_3	Iteracje	x_0
1e-08	1	-1	-1	219	-10	X	1	-1	-1	15	-6.7
1e-08	1	-1	-1	148	-9.9	X	1	-1	-1	452	-6.4
1e-08	1	-1	-1	60	-9.8	X	1	8.92e-10	-6.74e-17	319	-1.0
1e-08	1	-1	-1	39	-9.7	X	1	1.2e-08	-2.86e-17	31	0.2
1e-08	1	1.1e-09	6e-17	116	-9.6	X	0.953	-0.43	-0.92	14	0.9
1e-08	1	-1	-1	237	-9.5	X	1	-1	-1	10	1.2
1e-08	0.953	-0.428	-0.0922	78	-8.5	X	1	-1	-1	527	1.5

3.2.4 Badanie wyników w zależności od wektora początkowego [x_o,$2x_o$,$0.5 \cdot x_o$] dla stałego ro=1e-08. Drugie kryterium stopu.

Ro	x_1	x_2	x_3	Iteracje	x_o	X	x_1	x_2	x_3	Iteracje	x_0
1e-08	1	3.55*e-05	-2.38e-13	103	-9.6	X	0.953	-0.428	-0.09	78	-8.5
1e-08	11	4.41e-05	-4.57e-13	18	0.2	X	1	3.42e-05	-2.19e-13	306	-1
1e-08	1	-1	-1	527	1.5	X					

Dla pozostałych wektorów startowych(wypisanych w tabeli 3.2.3) dla kryterium drugiego liczba iteracji i wynik pokrywa się z liczbą iteracji i wynikami dla kryterium pierwszego.

3.2.5 Badania wyników dla różnych wektorów początkowych [x_o,x_o,x_o] i różnych ro. Pierwsze kryterium stopu. (Iter = Liczba iteracji)

Ro	x_1	x_2	x_3	Iter	x_o	X	Ro	x_1	x_2	x_3	Iter	x_o
1e-08	1	-1	-1	11	-10.0	X	1e-08	1	1.4e-08	-1.77e-16	141	-5.1
0.0026	1	-1	-1	10	-10.0	X	1e-08	0.953	-0.428	-0.09	39	-2.3
0.67	1.0549	-1.001	-1.0469	7	-10.0	X	1e-08	1	-1	-1	473	-1.8
1e-08	1	-1	-1	9	-6.2	X	0.1678	1.00	-1.003	-1.007	470	-1.8
0.0026	1	-1	-1	8	-6.2	X	1e-08	1	-1	-1	168	0.1
0.67	0.488	-1.544	-1.23	4	-6.2	X	1e-08	1	-1	-1	12	0.2
1e-08	1	-1	-1	230	-5.2	X	1e-08	1	–1	-1	41	1.0

3.2.6 Badania wyników dla różnych wektorów początkowych [x_o,x_o,x_o] i różnych ro. Drugie kryterium stopu.

Ro	x_1	x_2	x_3	Iter	x_o	X	Ro	x_1	x_2	x_3	Iter	x_0
1e-08	1	-1	-1	11	-10.0		1e-08	1.00	3.34e-05	-2e-13	129	-5.1
0.0026	1	-1	-1	10	-10.0		1e-08	0.953	-0.429	-0.0923	39	-2.3
0.67	1.002	-1.00	-1.004	8	-10.0		1e-08	1	-1	1	474	-1.8
1e-08	1	-1	-1	10	-6.2		0.1678	1	-1.003	-1.007	470	-1.8
0.0026	1	-1	-1	8	-6.2		1e-08	1	-1	-1	169	0.1
0.67	0.999	-1.00	0.999	7	-6.2		1e-08	1	-1	-1	12	0.2
1e-08	1	-1	-1	230	-5.2		1e-08	1	-1	-1	42	1.0

3.3 Wnioski

1. Wybór odpowiedniego punktu startowego ma ogromny wpływ na liczbę iteracji niezależnie od kryterium stopu. Zmiana wektora początkowego o 0.1 może zmienić liczbę iteracji o rząd wielkości(3.2.5, 3.2.6)

2. Niektóre rozwiązania są o wiele częściej znajdywane niż inne - zdecydowanie najczęściej znajdowano wektor [1,-1,-1] (3.2.1 - 3.2.6).

3. Dobór kryterium stopu lub wartości stopu(ro) mało znacząco wpływa na zbieżność metody. Dominujący wpływ ma punkt startowy. (3.2.1-3.2.6)

4 Podsumowanie.

Zarówno metoda Newtona jak i metoda siecznych to efektywne metody rozwiązywania równań. Obie te metody są zbieżne lokalnie. Niewątpliwą zaletą metody siecznych jest fakt, że nie wymaga obliczania pochodnej funkcji. Często koszt obliczenia wartości pochodnej jest bardziej kosztowny od wyznaczenia wartości funkcji w punkcie. W takim przypadku okazuje się, że metoda siecznych choć wolniej zbieżna niż metoda Newtona, dzięki temu, że nie wymaga wyliczenia pochodnej jest bardziej efektywna od metody Newtona.
Wektor początkowy ma bardzo duże znaczenie dla rozwiązywania układów równań nieliniowych. Tylko niektóre wektory wyznaczają poprawne rozwiązania w sensownej liczbie iteracji.