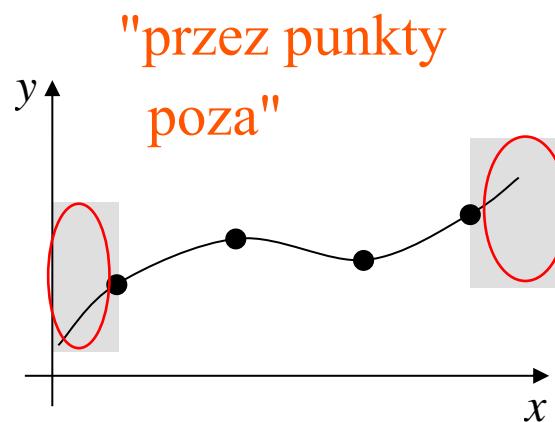
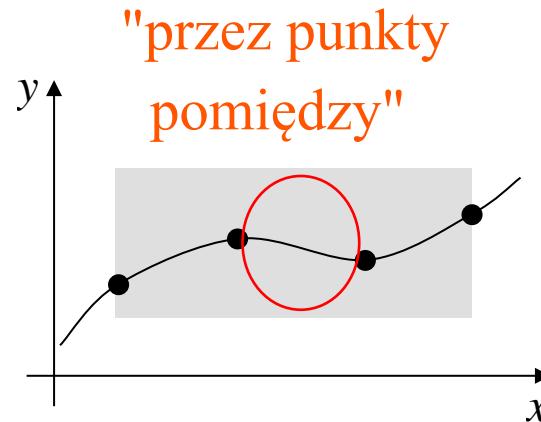


## Wykład IV

### Wielomianowa interpolacja i ekstrapolacja

- Interpolacja wielomianowa z dowolnymi węzłami
- Interpolacja z węzłami równoodległymi
- Interpolacja funkcjami sklejanymi
- Interpolacja 3D
- Ekstrapolacja

## Zadania przybliżenia wielomianowego



### Interpolacja

Wielomian stopnia  $N-1$   
przechodzący przez  $N$  zadanych  
punktów/węzłów  $(x_i, y_i)$ .  
Poszukiwane wartości  $y$  pomiędzy  
węzłami. Rozwiążanie  
**jednoznaczne**.

### Ekstrapolacja

Wielomian stopnia  $N-1$   
przechodzący przez  $N$  zadanych  
punktów/węzłów  $(x_i, y_i)$ .  
Poszukiwane wartości  $y$  poza  
zakresem węzłów. Rozwiążanie  
**jednoznaczne**.

### Aproksymacja

Wielomian stopnia  $<N-1$   
dopasowany do  $N$  zadanych węzłów  
 $(x_i, y_i)$  według określonego  
kryterium. Poszukiwane wartości  $y$   
wg zależności dopasowanej.  
Rozwiążanie **zależne od stopnia**  
**wielomianu i kryterium**  
**dopasowania**.

## Zastosowania interpolacji

### „Odtwarzanie” informacji brakującej

Wstawianie brakujących danych na zasadzie gładkiego przejścia pomiędzy danymi znanyimi. Odtwarzanie w cudzysłowie, gdyż nie jesteśmy pewni charakteru brakujących danych.

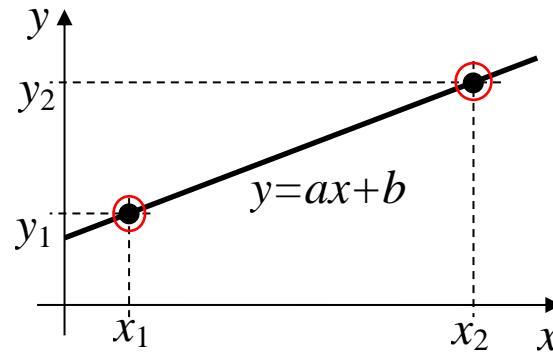
Na przykład:

- 1) Filtry interpolujące w DSP dodające próbki przy zachowaniu pasma sygnału.
- 2) Odtwarzanie momentu przejścia przez zero spróbkowanego sygnału okresowego.
- 3) Odtwarzanie w postaci izoterm rozkładu temperatury na obszarze Polski na podstawie pomiarów temperatury w rozproszonych stacjach meteo (problem trójwymiarowy  $(x_i, y_j, T_{i,j})$ ).

### Redukcja opisu danych (interpolacja w sformułowaniu aproksymacji, temat kolejnych zajęć)

- 1) Opis ciągłej charakterystyki przetwarzania kilkoma współczynnikami wielomianu interpolującego. Np. charakterystyka przetwarzania termorezystora Pt100 jest przedstawiana w normie państowej w alternatywnych postaciach: tabeli wartości lub współczynników wielomianu czwartego stopnia w funkcji temperatury.
- 2) Przybliżenie czasochlonnej obliczeniowo funkcji. Np. funkcja  $erf$  czyli funkcja błędu  $2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  (nie obliczalna analitycznie całka eliptyczna) jest w Matlabie przybliżana przez funkcję wymierną (*rational approximation*) – aproksymacja Padé.

## Najprostsze zadanie interpolacji



Poszukujemy liniowej zależności  $y = ax + b$  (nieznane  $a$  i  $b$ ) między punktami  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ .

W zapisie macierzowym:

$$\begin{array}{cc|c} x_2 & 1 & a \\ x_1 & 1 & b \end{array} = \begin{array}{c} y_2 \\ y_1 \end{array}$$

Układ równań do rozwiązania

Rozwiążanie (np. metodą wyznaczników):

$$a = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \quad b = (x_2 y_1 - x_1 y_2) / (x_2 - x_1).$$

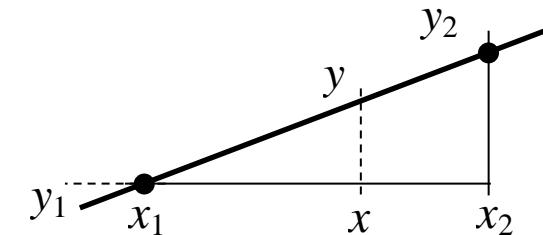
Dwa równoważne zapisy (sprawdź):

Postać przyrostowa (Newtona):

Postać kombinacyjna (Lagrange'a):

Rozwiążanie

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) \\ y &= \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2 \end{aligned}$$



proporcje w trójkącie prostokątnym

## Ogólne sformułowanie zadania interpolacji wielomianowej

Poszukujemy współczynników  $a_i$  wielomianu  $y(x)$ , który w punktach  $x_1, \dots, x_N$  będzie miał wartości  $y_1, \dots, y_N$ :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{N-1} x^{N-1}$$

$$y(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Wynikający z tego sformułowania układ równań :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{N-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{N-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_N^{N-1} & \cdots & x_N & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} a_{N-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \text{równanie dla jednego punktu}$$

można rozwiązać ogólnymi metodami (np. dekompozycja LU macierzy  $\mathbf{T}$  i podstawienia). Jest to układ równań (z macierzą Vandermonde'a) źle uwarunkowany dla dużego  $N$ .

Nieznaczna modyfikacja parametryzacji wielomianu (postać Newtona i Lagrange'a), prowadzi do prostego iteracyjnego algorytmu wyznaczania współczynników wielomianu interpolującego.

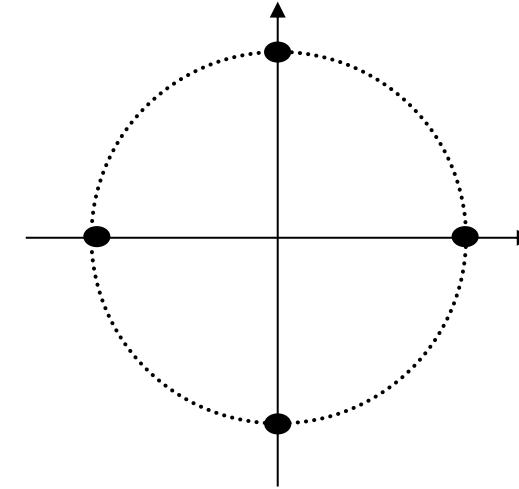
## Przykład (Interpolowane przybliżenie okręgu na małej liczbie węzłów (punktów okręgu))

Problemem ilustrującym kolejne metody interpolacji będzie rysowanie okręgu na podstawie kilku wybranych wartości krzywej zadanej parametrycznie:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t\pi/2) \\ y(t) = \sin(t\pi/2) \end{cases}$$

Interpolację będziemy prowadzić dla tabeli wartości:

t	0	1	2	3	4
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0

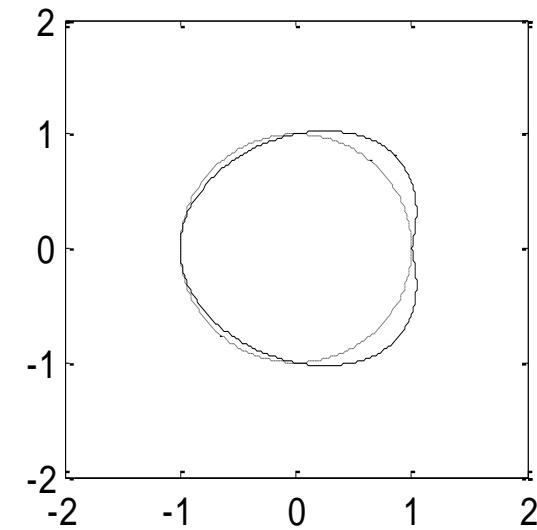


Interpolujemy sinus i kosinus niezależnie. Macierz T jest wspólna:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

kolejne potęgi "t"

```
t=[0;1;2;3;4];
x=[1;0;-1;0;1];
y=[0;1;0;-1;0];
T=vander(t);
ax=inv(T)*x;
ay=inv(T)*y;
td=0:0.01:4;
plot(polyval(ax,td), polyval(ay,td))
```



## Wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a

Uogólniając postać kombinacyjną wielomianu na przypadek interpolacji  $N$ -punktowej uzyskujemy:

$$y(x) = \sum_{k=1}^N y_k L_k(x)$$

gdzie musi zachodzić:  $L_k(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$

Suma wielomianów baz.

Każdy  $L_k$  jest wielomianem stopnia  $N-1$ :

$$L_k(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_N)} = \frac{\prod_{j=1, \dots, N, j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j=1, \dots, N, j \neq k} (x_k - x_j)}$$

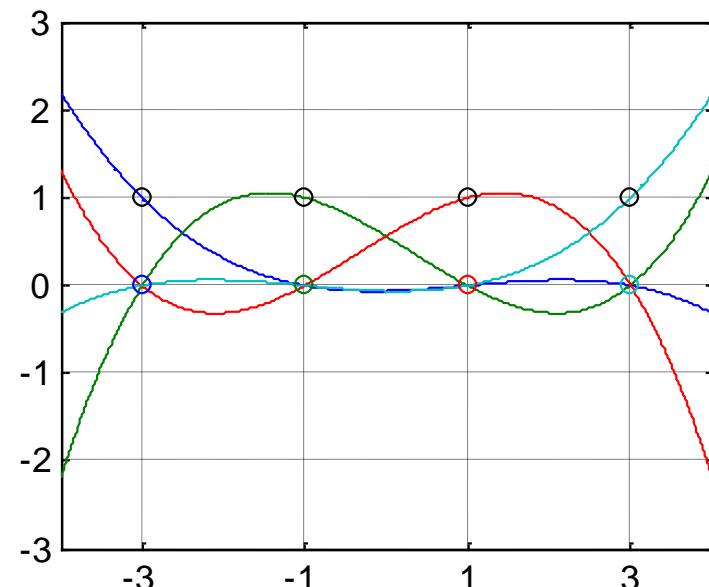
Zaletą takiej reprezentacji jest prosty sposób wyznaczania wartości wielomianu i łatwa interpretacja w kategoriach wielomianów bazowych (wiodąca idea w aproksymacji).

Rysunek obok przedstawia wielomiany bazowe Lagrange'a dla węzłów  $x_1=-3, x_2=-1, x_3=1, x_4=3$ .

Zaznaczono odpowiednie wartości w węzłach (0,1).

Zauważ, że dla dowolnego  $x$  zachodzi  $\sum_{k=1}^N L_k(x) = 1$ .

W wielomianie interpolacyjnym każdy z wielomianów  $L_i$  ma udział z wagą  $y_i$ .



## Wielomian interpolujący w postaci Newtona

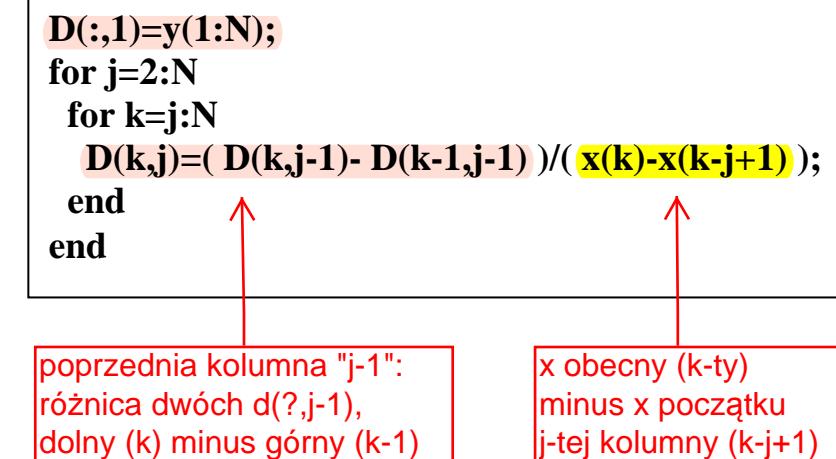
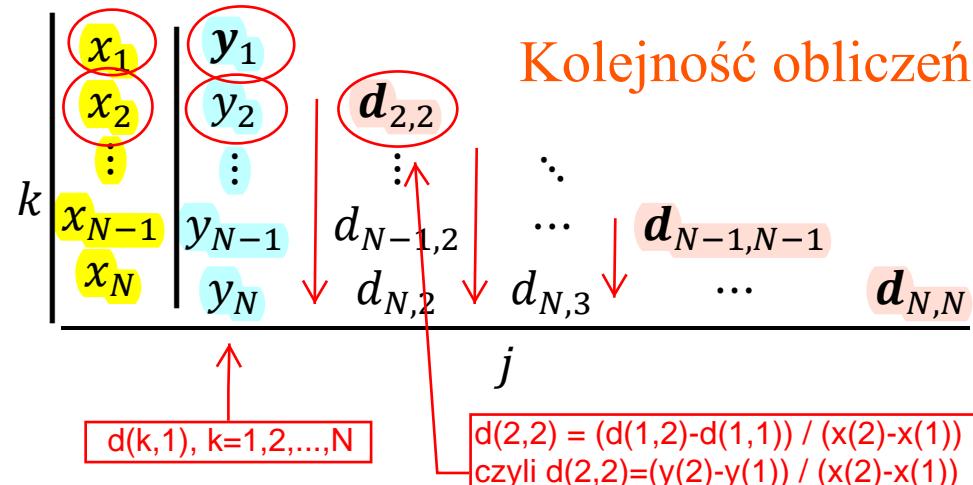
Czasami konstrukcja wielomianu interpolującego jest wykonywana wielokrotnie dla zwiększającej się liczby węzłów interpolacji. Wtedy korzystnie jest przedstawić wielomian w postaci sumy składników, w której dodanie nowego węzła powoduje dodanie nowego składnika bez konieczności przeliczania współczynników poprzednich składników. Uogólniając postać przyrostową wielomianu na przypadek interpolacji  $N$ -punktowej uzyskujemy:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_{N-1}(x - x_1)\dots(x - x_{N-1})$$

Współczynniki  $a_i$  są obliczane jako ilorazy różnicowe kolejnych rzędów (*divided differences*):

$$a_{i-1} = d_{i,i}, \quad d_{k,j} = \frac{d_{k,j-1} - d_{k-1,j-1}}{x_k - x_{k-j+1}}, \quad d_{k,1} = y_k$$

co można zapisać w postaci tabeli i programu:



**Przykład:** Odtwarzanie ciągłego przebiegu temperatury otoczenia na podstawie nierównomiernej sekwencji pomiarów.

Stacja meteorologiczna we wczesnowiosenny dzień dostarczyła pomiarów temperatury w Krakowie w postaci tabeli wartości:

Godzina	$g_1=5:00$	$g_2=6:00$	$g_3=8:00$	$g_4=11:00$
Temperatura [°C]	$T_1=-2$	$T_2=3$	$T_3=7$	$T_4=10$

Przygotuj wielomian interpolacyjny do prezentacji zmian temperatury w sposób „gładki”.

Rozwiążanie w postaci Lagrange'a ( $g$  – godzina jako ulamek dziesiętny):

$$L_1(g) = \frac{(g-6)(g-8)(g-11)}{(5-6)(5-8)(5-11)}, \dots, L_4(g) = \frac{(g-5)(g-6)(g-8)}{(11-5)(11-6)(11-8)}$$

$$T(g) = -2L_1(g) + 3L_2(g) + 7L_3(g) + 10L_4(g)$$

Rozwiążanie w postaci Newtona:

$$d_{1,1} = T_1 = -2, d_{2,2} = \frac{d_{2,1} - d_{1,1}}{6-5} = \frac{3+2}{6-5} = 5, d_{3,3} = \frac{d_{3,2} - d_{2,2}}{8-5} = \frac{d_{3,1} - d_{2,1}}{3} = \frac{\frac{7-3}{2}-5}{3} = -1, d_{4,4} = \frac{4}{30}$$

$$T(g) = -2 + 5(g-5) - (g-5)(g-6) + \frac{4}{30}(g-5)(g-6)(g-8)$$

Pytania: Jaka była wartość temperatury o 7:15? O której godzinie temperatura przekroczyła 1[°C] (problem odwrotny)? O godzinie 14:00 dostarczono świeży pomiar temperatury - jakie zmiany spowoduje on w powyższych współczynnikach interpolacji?

## Przypadek szczególny – węzły równoodległe

Jeśli węzły interpolacji są równoodległe z odstępem  $\Delta x$ , to postać wielomianów upraszcza się.

Ponieważ przy równoodległych węzłach  $x = x_1 + s \cdot \Delta x$ , to stosując podstawienie  $s = \frac{x - x_1}{\Delta x}$  (s w kolejnych węzłach przyjmuje wartości  $0, \dots, N-1$ ) uzyskujemy:

$$y(x) = Y(s) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-N+1)}{(N-1)!} \Delta^{N-1} y_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{s}{i} \Delta^i y_0$$

NEWTON

gdzie, przez analogię do ilorazów różnicowych, różnica w przód (*forward difference*):

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Odmiany tej formuły z różnicami w tył i różnicami centralnymi służą dokładniejszej interpolacji na końcu i w środku przedziału (czego już nie przytaczamy – patrz np. Buchanan „Numerical Methods and Analysis”).

**Przykład:** Mamy sygnał temperatury silnika samochodu  $T$  próbkowany od momentu startu silnika ( $t=0$ ) do nagrzania (10 minut) co 1 minutę w  $T(1:10)$ . Jaka była wartość temperatury silnika  $T_i$  po  $t_i=20$ [s]?

$$s[\text{min}/\text{min}] = \frac{t - t_1}{\Delta t} = t[\text{min}], \quad T(s) = T(t) = \sum_{i=0}^{10} \binom{t}{i} \Delta^i T$$

Funkcja *cumprod()* daje narastający iloczyn elementów.

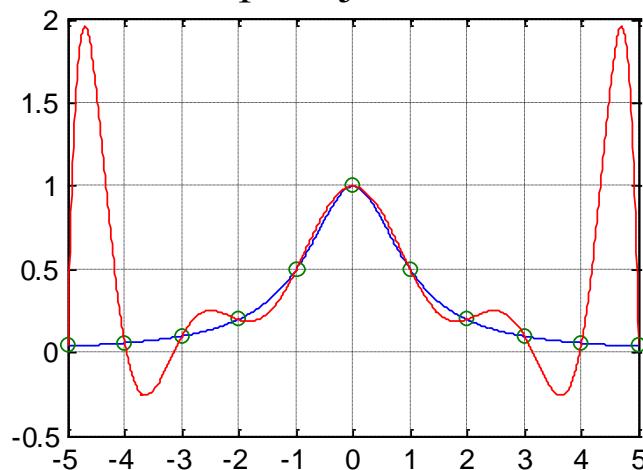
```

fd(:,1)=T(1:N); pierwsza kolumna
for j=1:N-1
    for k=j:N-1
        fd(k+1,j+1)=( fd(k+1,j)- fd(k,j) );
    end
end
kolejna kolumna - różnice
Ti=cumprod([1, ti, (ti-1)/2, (ti-2)/3])*diag(fd)

```

## Efekt Rungego – oscylacje wielomianu interpolacyjnego wysokiego stopnia

Interpolacja na wielu węzłach wymusza stosowanie wielomianu interpolacyjnego wysokiego stopnia. Szczególnie przy równoodległych węzłach prowadzi to do oscylacji wielomianu na końcach przedziału interpolacji.



Zadanie interpolacji wielomianem wysokiego stopnia jest dodatkowo wrażliwe na zaburzenie danych (jest **źle uwarunkowane numerycznie**). Z tych powodów warto stosować interpolację lokalną niższego stopnia – **funkcje sklejane, lub interpolację z narzuconymi węzłami Czebyszewa**, co omówimy przy okazji tematu aproksymacji.

```
% Function
x=(-5:0.01:5)';
y=1./(1+x.^2);
```

NEWTON

dokładnie

```
% Nodes
xk=(-5:1:5)';
yk=1./(1+xk.^2);
N=length(xk);
```

rzadko

```
% Divided differences
D(:,1)=yk(1:N);
for j=2:N
    k=j:N;
    D(k,j)=( D(k,j-1)- D(k-1,j-1) ) ./ ( xk(k)-xk(k-j+1) );
end
```

```
% Interpolating polynomial
yi=[];
for i=1:length(x)
    xi=x(i);
    yi(i)=cumprod([1, (xi-xk(1:N-1))'])*diag(D);
end
```

**(x-x1)(x-x2)... a(k)**

```
% Result
plot(x,y,xk,yk,'o',x,yi,'r')
```

## Funkcje sklejane (splajny) i gładka interpolacja lokalna

Funkcje sklejane są realizacją idei gładkiej interpolacji lokalnej wielomianem niskiego stopnia z gładkim połączeniem (sklejeniem) poszczególnych wielomianów lokalnych. Matlab, poza opcją w podstawowej funkcji interpolacji *interp1*, oferuje zestaw funkcji operujących splajnami w postaci *Spline Toolbox*.

### Przypadek prosty – splajn pierwszego stopnia

Funkcje sklejane pierwszego stopnia to interpolacja liniowa pomiędzy poszczególnymi węzłami (reprezentacja Newtona):

$$y(x_i \leq x \leq x_{i+1}) = S_i(x) = y_i + \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)$$

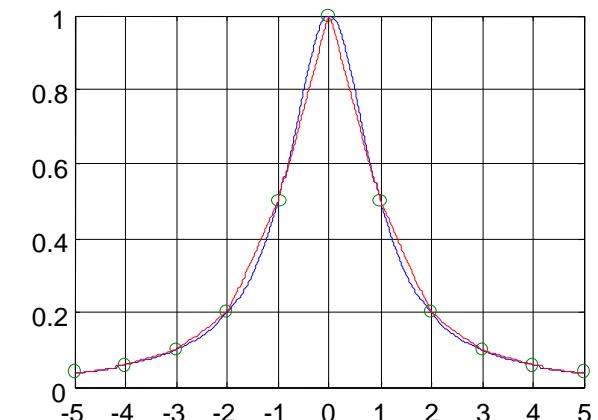
Oczywiście takie postawienie zadania spełnia warunek:

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

Chociaż idea takiej interpolacji jest prosta, to powszechnie się ją wykorzystuje w dwóch wymiarach np. w grafice przy tworzeniu map/wykresów z odwzorowaniem wartości zmiennej ciągłej (np. wysokości czy wartości natężenia pola elektrycznego) przez kolor lub stopień szarości. W taki sposób są kolorowane powierzchnie rysowane przez *surf* przy opcji *shading interp*.

**Pytanie:** Jak będzie wyglądał nasz okrąg z taką interpolacją ?

```
% Przykład interpolacji
% splajnem I-go stopnia
x=(-5:0.01:5);
y=1./(1+x.^2);
xk=-5:1:5;
yk=1./(1+xk.^2);
yi= interp1(xk,yk,x,'linear')
plot(x,y,xk,yk,'o',x,yi,'r');
```



## Przypadek trudniejszy – splajn trzeciego stopnia (*cubic spline*)

Ponieważ wielomian stopnia  $N-1$  jest definiowany jednoznacznie przez  $N$  równań, to kolejne równania możemy uzyskać z narzucenia ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie sklejenia wielomianów. W ten sposób uzyskujemy wygładzenie przebiegu interpolującego.

Dla splajnu trzeciego stopnia w każdym z  $N-1$  przedziałów między sąsiednimi węzłami mamy:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \text{ a więc potrzebujemy } 4(N-1) \text{ różnych warunków.}$$

Podstawowy warunek interpolacji daje 2 równania dla każdego splajnu, łącznie  $2(N-1)$  równań:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, N \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N \quad 2(N-1) \text{ razy}$$

$2(N-2)$  warunki uzyskamy z przyrównania pierwszych i drugich pochodnych w połączeniach:

$$S'_i(x) = \frac{dS_i(x)}{dx} = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$

$$S''_i(x) = \frac{d^2S_i(x)}{dx^2} = 3a_i x + 2b_i$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad i = 2, \dots, N$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i), \quad i = 2, \dots, N$$

2(N-2) razy

Brakujące 2 warunki możemy narzucić na węzły brzegowe w różny sposób uzyskując różny efekt.

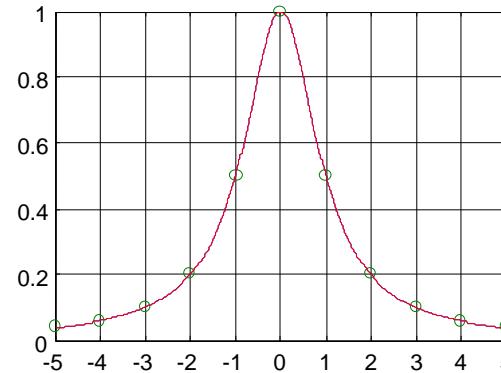
Popularny wybór to  $S''_1(x_1) = S''_{N-1}(x_N) = 0$ , inne to zapewnienie okresowości, określonego nachylenia bądź zakrzywienia.

Układ powyższych  $4(N-1)$  równań tworzy macierz trójkątniową, którą można efektywnie rozwiązać metodami eliminacji, czego tu już nie przedstawiamy (zob. Bjorck, Dahlquist).

**Przykład:** Przedstawiany już poprzednio (przy okazji efektu Rungego i splajnów I-go stopnia) problem interpolacji trudnej dla wielomianu wysokiego stopnia funkcji  $f(x) = 1/(1+x^2)$ .

Użyjemy funkcji dostępnych standardowo w Matlabie poza *Spline Toolbox*.

```
xk = -5:1:5;
yk = 1./(1+xk.^2);
x = -5:0.01:5;
y=1./(1+x.^2);
cs = spline(xk,[0 yk 0]);
yi= ppval(cs,x);
plot(x,y,xk,yk,'o',x,yi,'r--');
```



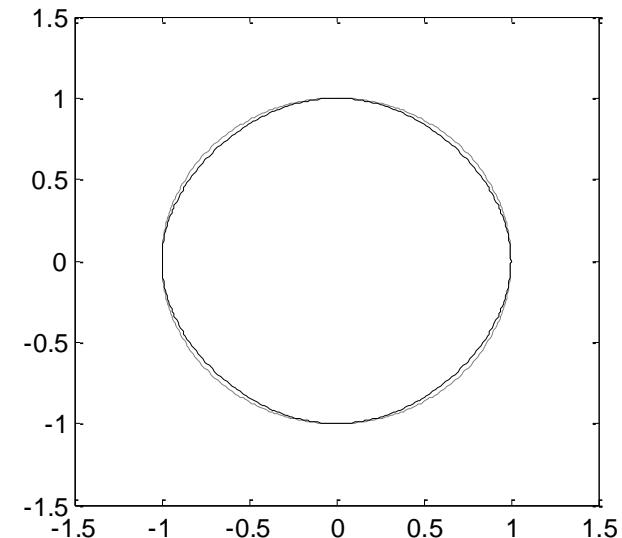
Funkcja *spline* wylicza współczynniki wielomianów interpolujących w strukturze *cs* (postać *pp-value*), która jest następnie przekazywana do funkcji *ppval* wyliczającej wartości interpolowane. Zadano warunki brzegowe na splajny w postaci zerowego nachylenia (pochodnej).

**Przykład:** Interpolowany okrąg

```
t=[0;1;2;3;4];
x=[1;0;-1;0;1];
y=[0;1;0;-1;0];
td=0:0.01:4;
ppx=csape(t,x,'periodic');
ppy=csape(t,y,'periodic');
plot(ppval(ppx,td), ppval(ppy,td), 'k', cos(td*pi/2), sin(td*pi/2), 'k:')
```

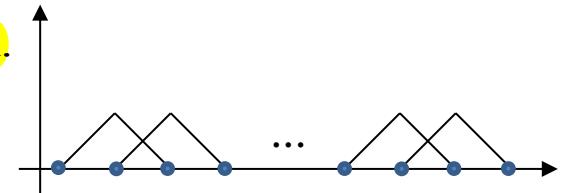
odniesienie

Dobry kształt bo narzuciliśmy warunki okresowości



## B-splajny (postać funkcji bazowych zamiast postaci wielomianów przedziałowych)

Splajny w reprezentacji Lagrange'a to kombinacja splajnów bazowych.  
Przykład splajnów bazowych pierwszego stopnia na rysunku obok.



Ogólny przepis na splajny bazowe kolejnych stopni  $k$ :

$$\begin{aligned} B_{j,0}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{for } x_j \leq x < x_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ B_{j,k}(x) &= \frac{x-x_j}{x_{j+k}-x_j} B_{j,k-1}(x) + \frac{x_{j+k+1}-x}{x_{j+k+1}-x_{j+1}} B_{j+1,k-1}(x) \end{aligned}$$

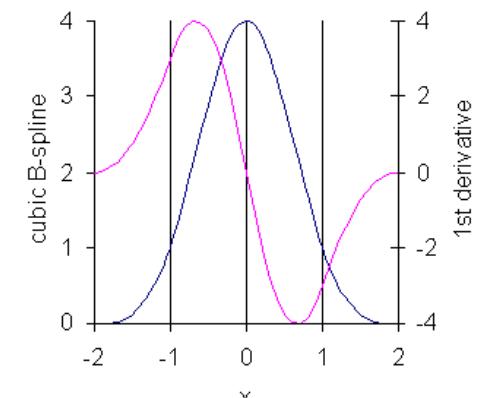
### Szczególny przypadek: Uniform cubic B-splines

Dla stopnia trzeciego i równoodległych węzłów B-splajn ma postać  
( $0 \leq u < 1$  to odległość od początkowego węzła w podprzedziale):

$$B_{j,3}(x) = \begin{cases} (1-u)^3/6 & 1 \leq (x-x_j) < 2 \\ (3u^3 - 6u^2 + 4)/6 & 0 \leq (x-x_j) < 1 \\ (-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)/6 & -1 \leq (x-x_j) < 0 \\ u^3/6 & -2 \leq (x-x_j) < -1 \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{j=0}^{N+1} p(j) B_{j,3}(x)$$

$p(j)$  – wagi (punkty kontrolne) do wyznaczenia, niestety różne od wartości  $y(x)$  w węzłach.



Interpretacja widmowa interpolacji splajnami i zbieżność do funkcji sinc zobacz publikacje Unsera.

## Interpolacja w 3D

Interpolacja w trzech wymiarach to **złożenie interpolacji dwuwymiarowych**. Jej najprostsza wersja to kopiowanie wartości od najbliższego sąsiadującego węzła – metoda *nearest neighbor*. Bardziej wyrafinowana metoda interpolacji **biliniowej (dwu-liniowej)** to iloczyn prostych interpolujących wzdłuż kierunku  $x$  i  $y$ .

$$z = f(x, y) = (a_1x + b_1)(a_2y + b_2)$$

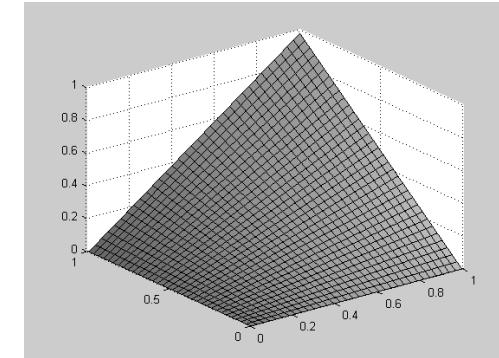
Dla uproszczenia przyjmijmy węzły równoodległe w rogach kwadratu  $(0,0), (1,0), (0,1) (1,1)$ . Wtedy wartości interpolowane nad kwadratem argumentów można zapisać wzorem:

$$z = f(x, y) = f(0,0)(1 - x)(1 - y) + f(1,0)x(1 - y) + f(0,1)(1 - x)y + f(1,1)xy$$

Czy wynikowa powierzchnia jest liniowa (tzn. czy jest płaszczyzną) ?

Sprawdźmy dla wartości  $f(x, y)$  w rogach równych  $\{0, 0, 0, 1\}$

```
[X, Y] = meshgrid(0:.03:1);
Z = X.*Y;
surf(Z);
colormap(gray);
```



Interpolacja 3D trzeciego stopnia i splajnowa ma podobną konstrukcję, czego tu już nie przytaczamy (popatrz np. hasło wyszukiwania *bicubic interpolation*)

## Przykład Interpolacja powierzchni na podstawie danych topograficznych

Z serwisu <http://maps.google.com> i z <http://www.gpsvisualizer.com> możemy uzyskać dane topograficzne powierzchni Ziemi. W ten sposób pozyskano współrzędne geograficzne i wysokość punktów na siatce równomiernej w okolicach Babiej Góry koło Zawoja (plik *babia\_gora.dat*). Przetwórzmy je do postaci modelu powierzchni używając narzędzi interpolacji 3D (*nearest-neighbor, bilinear, bicubic, spline*).

Która z metod daje najlepsze efekty ? Według jakiego kryterium ?

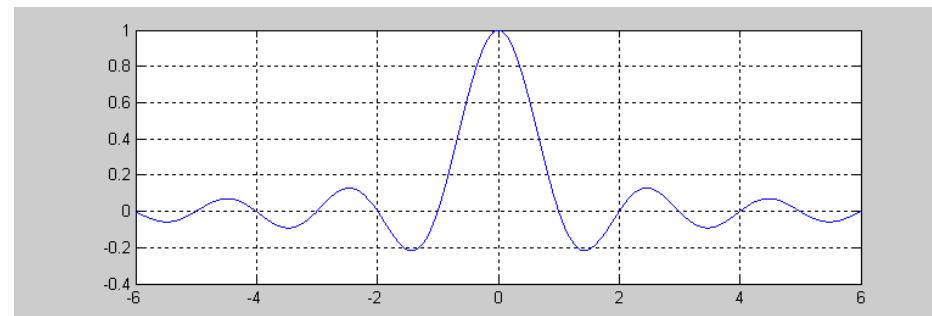
## Przykład Test metod interpolacji na standardowym obrazie testowym *lena512.bmp*

Tym razem nasze dane 3D to **obraz**. Współrzędne  $(x,y)$  opisują szerokość i wysokość obrazu, zaś  $z=f(x,y)$  to wartość koloru (mogą to być 3 wartości RGB lub jedna wartość na skali szarości). Nasz test będzie polegał na **rotowaniu obrazu** przy niezmienionej gęstości pikseli i na obserwacji efektów ubocznych poszczególnych metod interpolacji (*nearest-neighbor, bilinear, bicubic, spline*).

Która z metod daje najlepsze efekty ? Według jakiego kryterium ?

## Interpolacja w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów (DSP)

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów używa metod analogicznych do interpolacji w tzw. *resamplingu* (repróbkowaniu) sygnału. Ogólnie problem polega na wyznaczaniu wartości sygnału pomiędzy znanyimi próbkami czasowymi, najczęściej w celu programowej zmiany częstotliwości próbkowania sygnału. Ponieważ DSP operuje odpowiedziami impulsowymi, splotem i widmem sygnału, to sformułowanie interpolacji różni się od dotychczas przedstawionego. Można jednak wskazać analogie do interpolacji w sformułowaniu Lagrange'a i do B-splajnów. Kształtem bazowym w interpolacji DSP jest funkcja *sinc()*, która widmowo reprezentuje przetwarzanie nieznieksztalcające sygnału. Podobnie jak wielomiany bazowe Lagrange'a, funkcja ta ma korzystne właściwości obliczeniowe: we wszystkich węzłach poza bieżącym ma wartość 0, zaś w węźle bieżącym ma wartość 1.



Jak przy interpolacji Lagrange'a wartość sygnału pomiędzy węzłami to suma kształtów bazowych ważonych wartościami sygnałów w węzłach. W praktyce nieskończony zakres funkcji bazowej *sinc()* ogranicza się do zakresu węzłów o znaczącym oddziaływaniu.  
Więcej zobacz np. w „Cyfrowe przetwarzanie sygnałów”, Zieliński.

## Ekstrapolacja czyli wyjście poza węzły

Wyznaczanie brakujących wartości poza zakresem węzłów jest z natury rzeczy (brak obustronnego odniesienia dla wartości) obarczone **większymi błędami** niż uzupełnianie wartości wewnątrz zakresu. Efekty przy wyjściu poza węzły dla wielomianu wysokiego stopnia są podobne do efektu Rungego (**duża zmienność, złe uwarunkowanie**). Ekstrapolacja w niewielkiej odległości od węzła może dawać przydatne wartości.

W ujęciu czasowym ekstrapolacja jest zadaniem przewidywania przyszłości na podstawie dotychczasowych zdarzeń. Przy powszechnych w naszej dziedzinie zakłócenach danych **lepszym podejściem** niż przewidywanie przyszłych wartości (predykcja) na zasadzie interpolacji **jest predykcja na podstawie aproksymacji, czyli określanie i przedłużanie trendu w danych**.

## Zagadnienia nie poruszane (do doczytania dla zainteresowanych)

Szereg zagadnień, z uwagi na założony profil zajęć, pozostał nie omówiony. Są to m.in.:

- Oszacowanie błędów interpolacji (do omówienia przy całkowaniu i aproksymacji)
- **Interpolacja z węzłami Czebyszewa** (do omówienia przy aproksymacji)
- Interpolacja **Hermite'a** (uwzględnia informację o pochodnej w węzłach)
- Interpolacja **trygonometryczna** (zbieżna z DFT, do omówienia przy aproksymacji)
- Interpolacja **funkcjami wymiernymi** (do omówienia przy aproksymacji)

## Podsumowanie, kluczowe elementy tego wykładu:

- Interpolacja to poszukiwanie krzywej parametrycznej przechodzącej przez zadane węzły
- Klasyczna metoda interpolacji bazuje na wielomianach
- $N$  węzłów definiuje jednoznacznie wielomian stopnia  $N-1$
- Wielomian interpolujący można przedstawić w równoważnych postaciach:
  - funkcji bazowych (Lagrange'a)
  - przyrostowej (Newtona)
- Dla węzłów równoodległych uzyskujemy prostsze wyrażenia na współczynniki wielomianu
- Interpolacja z wieloma węzłami - efekt niepożądanych oscylacji na krańcach przedziału
- Pomysł na gładszą interpolację (bez oscylacji) to stosowanie wielomianów niskiego rzędu łączonych w węzłach w sposób gładki (funkcje sklejane, splajny)
- Interpolacja w trzech wymiarach (i więcej) to złożenie interpolacji w dwóch wymiarach
- Cyfrowe przetwarzanie sygnałów (DSP) stosuje podobne konstrukcje interpolujące do resamplingu sygnałów i obrazów, jednak kształtem bazowym jest funkcja  $\text{sinc}()$