

Wykład XI

Rozwiązywanie zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych

- Postawienie zadania, klasyfikacja problemów brzegowych
- Podstawowe idee dyskretyzacji problemu
- Metoda różnic skończonych (siatek)
- Wprowadzenie do metody elementów skończonych
- PDE (*Partial Differential Equations*) Matlab Toolbox

Równania różniczkowe cząstkowe w technice

Równania różniczkowe cząstkowe opisują zmienność systemów z kilkoma zmiennymi, w zastosowaniach technicznych z czasem i zmiennymi przestrzennymi. Wynikają z zastosowania polowych praw fizyki do modelowania zjawisk dynamicznych zachodzących w systemach z parametrami rozłożonymi. Rozwiążanie polega na wyznaczeniu czasowo-przestrzennej odpowiedzi systemu dynamicznego.

"fala od kropli wody"

Przykłady:

- natężenie pola elektromagnetycznego pod linią przesyłową wysokiego napięcia,
- opis dyfuzji ciepła w silniku spalinowym samochodu,
- rozkład pola magnetycznego w pracującym silniku elektrycznym (problem 2D/3D + czas),
- propagacja sygnału w linii telekomunikacyjnej (1D + czas),
- zmienna z czasem prędkość wzdłuż kolumny samochodów w ruchu miejskim (1D+czas),
- zmienny z czasem rozkład prędkości wiatru i ciśnienia atmosferycznego w układzie współrzędnych biegunkowych (2D+czas).

W praktyce zależności ogólne, jak np. wektorowe równania elektromagnetyzmu Maxwella, sprowadza się do postaci łatwiejszej do obliczeń przez wprowadzenie skalarnej wielkości pochodnej (potencjał elektryczny i magnetyczny w przypadku równań Maxwella), iteracyjną linearyzację problemu (np. histerezy magnetycznej materiału) i pominięcie anizotropii (własności zależnych od kierunku).

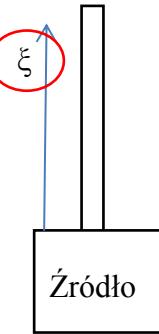
Przykład Dyfuzja ciepła w długim pręcie

"bateria w Samsung Note 7"

Dyfuzja w środowisku o stałych rozłożonych jest opisana równaniem różniczkowym cząstkowym dyfuzji:

$$\frac{\partial V(t, \xi)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V(t, \xi)}{\partial \xi^2} - h(V(t, \xi) - V_0)$$

położenie



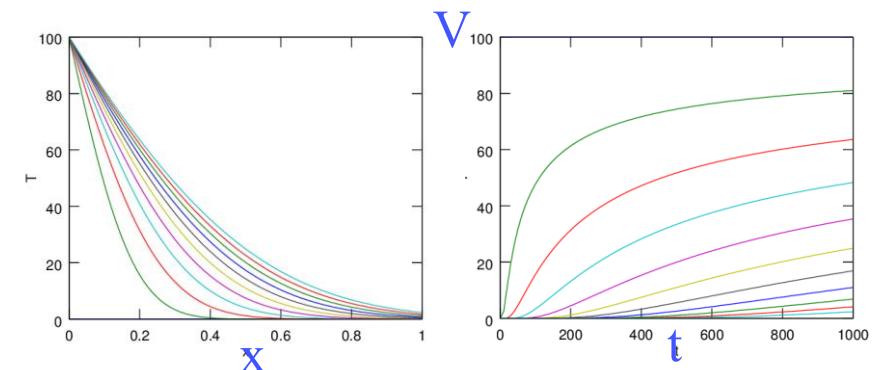
gdzie: D – współczynnik dyfuzyjności,
 h – współczynnik strat do otoczenia,
 V_0 – poziom dyfundującej wielkości w otoczeniu.

CIEPŁO!

Wielkość V może reprezentować np. czasoprzestrzenny rozkład temperatury w jednowymiarowym obiekcie pół-nieskończonym ze stratami bocznymi. Odpowiedź tego obiektu na skok wielkości V o amplitudzie A w punkcie przestrzeni $\xi=0$ wyznaczona metodą splotu z funkcją Greena, czyli z odpowiedzią impulsową w punkcie czasoprzestrzeni (ξ, t) na pobudzenie impulsowe w punkcie (ξ', t') , przy założeniu $V(\xi, 0)=V_0=0$, to:

$$V(t, \xi) = \frac{A}{2} \left(e^{-\xi \sqrt{\frac{h}{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{ht} \right) + e^{\xi \sqrt{\frac{h}{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{ht} \right) \right)$$

Na rysunkach obok przedstawiono jako przykład przebieg dyfuzji temperatury w aluminiowym mieszadle ($D=1e-4$, $h=1e-4$) zanurzonym we wrzątku.



Klasyfikacja problemów brzegowych

Dla ogólnego równania różniczkowego cząstkowego (czas może być wybraną zmienną x lub y):

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

charakter rozwiązania i klasa opisywanych problemów zależy od współczynników A, B, C .

Równanie eliptyczne	Równanie paraboliczne	Równanie hiperboliczne
$B^2 - 4AC < 0$ Np. równanie Poissona $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ Opisujące pole statyczne (temperatury, potencjału) ze źródłem f . Dla $f=0$ jest to równanie Laplace'a.	$B^2 - 4AC = 0$ Przykład: Równanie dyfuzji (ciepła, masy): $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ D – współczynnik dyfuzji	$B^2 - 4AC > 0$ Przykład: Równanie falowe: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v – prędkość propagacji fali

Warunki brzegowe (definiujące warunki na granicy analizowanego obszaru):

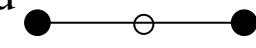
Dirichleta (zadana wartość pola na brzegu) $u = U$	Neumanna (zadana pochodna w kierunku normalnym do brzegu) $\frac{\partial u}{\partial n} = U'$
---	---

Podstawowe idee rozwiązania problemu metodą różnic skończonych

Zależność różniczkową zamienić na zależność różnicową na węzłach i rozwiązać układ równań

Pierwsza pochodna → dwupunktowy iloraz różnicowy centralny pierwszego rzędu

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_i, y=y_j} \approx \Delta_{2c} u_i = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$



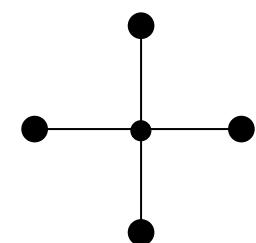
Druga pochodna → trypunktowy iloraz różnicowy w przód drugiego rzędu

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} \approx \Delta_3^2 u = \frac{\Delta_2 u_i - \Delta_2 u_{i-1}}{h} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$



Laplasjan → różnica pięciopunktowa (ten sam przyrost h na zmiennych x i y)

$$\nabla^2 u(x, y) \approx \nabla_5^2 u = \nabla_{3,x} u + \nabla_{3,y} u = \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})$$

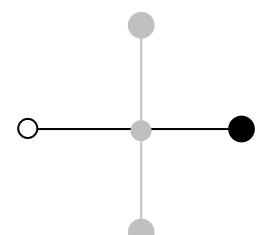


Warunek brzegowy (zakładamy dla prostoty zapisu brzeg wzdłuż $x=x_0$):

Dirichleta: $u(x_0, y) = g(y) \rightarrow u_{0,j} = g(y_j)$ (zadana wartość węzłów brzegowych, bez rysunku)

Neumanna: $\frac{\partial u(x_0, y)}{\partial n} = f(y) \rightarrow \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = f(y_j) \rightarrow u_{-1,j} = u_{1,j} - 2hf(y_j)$

czyli tworzymy sztuczny punkt poza obszarem dla schematu $\nabla_5^2 u$



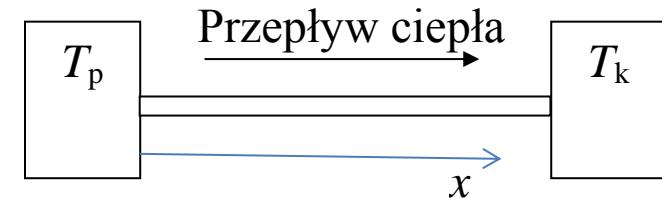
Przykład: Jednowymiarowy ustalony przepływ ciepła – równanie Laplace'a

Rozwiążemy problem ustalonego przepływu ciepła w cienkim metalowym pręcie izolowanym z boku, z jednej strony ($x=0$) nagrzewanym źródłem o stałej temperaturze T_p a z drugiej strony ($x=1$) chłodzonym odbiornikiem ciepła wymuszającym temperaturę T_k .

Równanie Laplace'a opisujące problem:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0$$

Przy warunkach brzegowych: $T(0) = T_p$, $T(1) = T_k$



Stosujemy schemat różnicowy dla dyskretyzacji np. 11-to punktowej ($\Delta x=0.1$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightarrow T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0, \quad i=1, \dots, 9, \quad T_0 = T(x=0) = T_p, \quad T_{10} = T(x=1) = T_k$$

Otrzymujemy układ równań z macierzą trójkątnią:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \ddots \\ \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_0 \\ 0 \\ \vdots \\ -T_{10} \end{bmatrix}$$

Rozwiążanie tego liniowego układu równań daje rozkład temperatury w pręcie w spodziewanej postaci liniowo opadającej temperatury wzdłuż x , co oczywiście spełnia równanie i warunki brzegowe.

```
% sciana.m
N=100; Tp=20; Tk=-20;
D=diag(-2*ones(N,1),0)+diag(ones(N-1,1),1)+diag(ones(N-1,1),-1);
b=zeros(N,1); b(1)=-Tp; b(N)=-Tk;
T=D\b; plot([Tp; T; Tk])
```

Przykład: Jednowymiarowy nieustalony przepływ ciepła - równanie dyfuzji

Przykład jak poprzednio, ale tym razem rozważmy zmiany dynamiczne temperatury pręta po skokowym przyłożeniu temperatury w punkcie początkowym. Warunek brzegowy na końcu tym razem w postaci Neumanna (zakończenie izolowane, brak przepływu ciepła, pochodna zerowa). Równanie dyfuzji ciepła (zależnego od położenia i czasu) i warunki początkowe:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad T(x,t=0) = 0, \quad T(x=0,t) = T_p, \quad \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1,t} = 0$$

Dyskretyzacja równania i warunków początkowych ($i=0, \dots, N, j=0, \dots, M$):

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{k} = D \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2}, \quad k = \Delta t, h = \Delta x, \text{ czyli}$$

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \frac{kD}{h^2} (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) \quad (*)$$

Warunki:

warunki na wartość brzegową:

$$T_{0,j} = T_p, \quad T_{i,0} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

warunek na pochodną ze sztucznym punktem:

$$\frac{T_{N+1,j} - T_{N-1,j}}{2h} = 0, \text{ skąd } T_{N+1,j} = T_{N-1,j},$$

co modyfikuje schemat różnicowy w ostatnim punkcie x do $T_{N,j+1} = T_{N,j} + \frac{kD}{h^2} (2T_{N-1,j} - 2T_{N,j})$.

- 1) Tak zapisany problem możemy przedstawić **w postaci macierzowej** układając kolejne węzły w wektorze, co skutkuje potężną macierzą przekątniową. Możemy też bezpośrednio zastosować **schemat iterowania po czasie (*), czyli sukcesywnie wypełniać siatkę węzłów począwszy od $t=0$.**
- 2) Ten schemat zachowuje się stabilnie tylko dla $2kDh^{-2} \leq 1$ (zob. „Numerical Recipes”).

Obliczenia do kontynuacji na ćwiczeniach laboratoryjnych.

Przykład: dwuwymiarowy rozkład potencjału/ciepła - równanie Poissona

W tym przykładzie wyznaczamy rozkład potencjału/temperatury w przestrzeni dwuwymiarowej. Równanie Poissona opisujące problem (statyczne pole temperatury z punktowym źródłem ciepła lub potencjał pochodzący od ładunku skupionego w punkcie):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad f(x, y) = \begin{cases} Q, & (x, y) = (x_z, y_z) \\ 0, & (x, y) \neq (x_z, y_z) \end{cases}$$

Dyskretyzacja (schemat różnicowy):

dla punktów wewnątrz obszaru:

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f_{i,j}$$

dla brzegu Dirichleta (np. dla $x=x_0$, $u(x_0)=T_p$):

$$u_{2,j} + u_{1,j+1} + T_p + u_{1,j-1} - 4u_{1,j} = h^2 f_{1,j}$$

dla brzegu Neumanna ($x=x_N$) zredukowany:

$$u_{N,j+1} + 2u_{N-1,j} + u_{N,j-1} - 4u_{N,j} = h^2 f_{N,j}$$

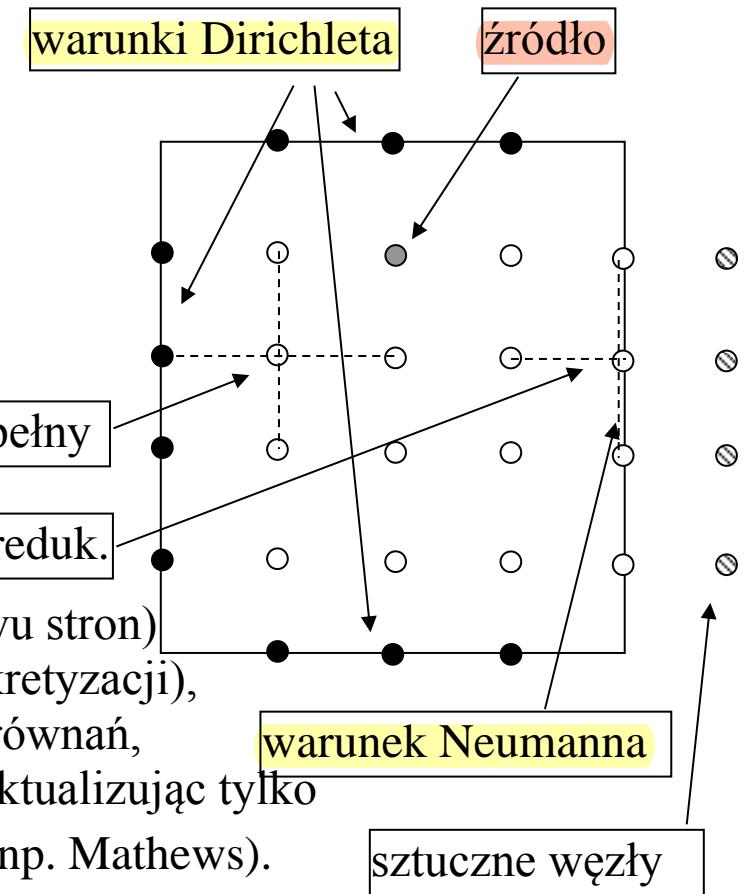
Nie możemy iterować wzduż jednego wymiaru (warunki z dwu stron)

Mogemy zapisać układ równań (duża macierz przy gęstej dyskretyzacji),

lub zastosować metodę iteracyjnego rozwiązywania układów równań,

np. nadrelaksacji SOR (zob. wykład nt. układów liniowych), aktualizując tylko

węzły (poza źródłowym) wg schematu $u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + r_{i,j}^{(n)}$ (zob. np. Mathews).



Przykład Propagacja fali elektromagnetycznej emitowanej przez antenę – równania Maxwella

Równania Maxwella dla szczególnego przypadku propagacji fali elektromagnetycznej w środowisku jednorodnym próżni, bez obecności ładunków i prądów, mają postać eliptyczną:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \nabla^2 H = 0$$

gdzie:

c – prędkość światła w próżni ($3.0e8$ [m/s]),

E – potencjał elektryczny,

H – potencjał magnetyczny.

E i H są wzajemnie prostopadłe i współfazowe.

Dla przestrzeni jednowymiarowej z sinusoidalnym warunkiem brzegowym, rozwiązaniem jest sinusoidalna fala elektromagnetyczna przemieszczająca się w próżni na zasadzie wzajemnej indukcji pól E i H .

$$E(x, t) = E_0 \sin(2\pi ft - 2\pi/\lambda x)$$

[Electromagneticwave3D.gif](#)

Spróbujmy uzyskać ten wynik metodą różnic skończonych. Jaki schemat różnicowy zastosujemy ?

```
% fala.m
nx=500; nt=400; dt_dx=0.2;

c=3e8; f=900e6; w=2*pi*f;
l=c/f; k=2*pi/l;

xx=3*l; dx=xx/nx; dt=dt_dx*dx/c; q=(c*dt/dx)^2;

x=0:dx:xx; t=0;
u0=sin(w*t-k*x);
v0=w*cos(w*t-k*x);

t=dt;
u1=u0+dt*v0;
U=[u0;u1];
for n=1:nt
    t=t+dt;
    u=sin(w*t-k*x);
    for j=2:nx
        u2(j)=q*(u1(j+1)-2*u1(j)+u(j-1))+2*u1(j)-u0(j);
    end
    u2(1)=q*(u1(2)-2*u1(1)+u(nx))+2*u1(1)-u0(1);
    u2(nx+1)=u2(1);
    U=[U;u2];
    u0=u1; u1=u2;
end
plot(x,U);
```

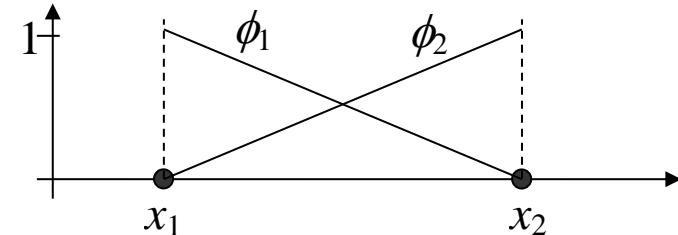
Wprowadzenie do metody elementów skończonych MES (*Finite Element Method*)

Nazwa metody pochodzi od używanych elementów geometrycznych z wyróżnionymi węzłami, np. odcinki dla problemów 1D, trójkąty lub prostokąty dla 2D. Nad elementem aproksymuje się wartości poszukiwanej funkcji tzw. funkcjami węzłowymi (funkcjami kształtu) skojarzonymi z poszczególnymi węzłami. Na rysunku pokazano węzły x_1, x_2 otaczające element (odcinek) i funkcje kształtu ϕ_1, ϕ_2 o wartości 1 nad skojarzonym węzłem i 0 nad innymi węzłami. W przestrzeni 2D dla elementu trójkątnego liniowe funkcje węzłowe nad elementem to trójkątne wycinki płaszczyzn.

Skojarzenie w tym momencie funkcji węzłowych z funkcjami bazowymi dla splajnów jest jak najbardziej uzasadnione.

Rozwiążanie w metodzie MES polega na takim dobraniu wag skojarzonych z funkcjami kształtu, żeby aproksymacja w bazie funkcji kształtu jak najdokładniej przybliżała rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego, tzn. $u \approx \sum_i c_i \phi_i$.

Samo sformułowanie metody ma korzenie wariacyjne, podobnie jak analityczna metoda Galerkina, jednak jej wyprowadzenie wykracza poza ramy wykładu. Pozostajemy zatem przy stwierdzeniu, że jest to alternatywna, do metody różnic skończonych, metoda dyskretyzacji problemu różniczkowego i sprowadzenia go do układu równań liniowych. Jest bardziej elastyczna ze względu na łatwość dopasowania elementu do lokalnej dynamiki (wielkość) i brzegu (kształt).



Przykład (jednowymiarowy): Linia dłuża w stanie statycznym, np. linia telefoniczna

Teoria mówi, że układy dążą do minimalizacji energii traconej.

Równania obwodu:

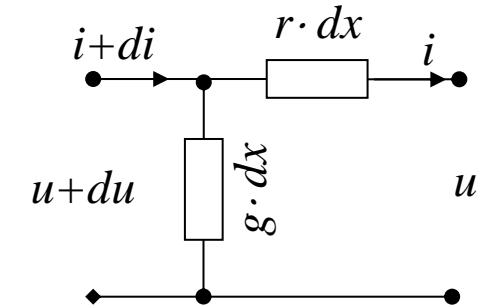
Na długości dx napięcie spada (strata na rezystancji przewodów $r \cdot dx$) i upływa prąd (strata na konduktancji izolacji $g \cdot dx$)

Równania prądowo-napięciowe: $du = i \cdot r \cdot dx$, $di = (u + du) \cdot g \cdot dx$

Strata mocy na długości dx : $dW = (u + du)(i + di) - ui \approx u \cdot di + i \cdot du$

Strata mocy na jednostkowej długości: $\frac{dW}{dx} = -gu^2 - \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dx} \right)^2$

Całkowita moc tracona: $W = - \int_0^L \left(gu^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right) dx$.



Jeśli rozwiązanie $u(x)$ zastąpimy aproksymacją na elementach skończonych, to dla aproksymacji dalej ma zachodzić zasada minimalizacji energii traconej. Ponieważ aproksymacja jest funkcją wartości węzłowych, to przyrównując pochodną traconej energii do zera możemy wyznaczyć wartości węzłowe. Szczegóły tego przykładu z rozwiązaniem w książce Silvester-Ferrari.

Tak więc jakość (dokładność) aproksymacji jest w przypadku MES mierzona odstępem od punktu stacjonarnego funkcjonału (spełnieniem zasady energetycznej).

Środowiska obliczeń MES

Samodzielne programowanie metody MES nie jest konieczne ponieważ istnieją środowiska rozwiązywania tą metodą problemów z różnych dziedzin. Na laboratorium będziemy korzystać z PDE Toolbox Matlaba, istnieją jednak bardziej profesjonalne środowiska obliczeniowe.

Środowiska dostępne na Uczelni w Centrum Obliczeniowym CYFRONET to ANSYS (najpowszechniej stosowany), ABAQUS, OPERA (dedykowany do analizy pól elektromagnetycznych), NASTRAN, z postprocesorami graficznymi do prezentacji wyników obliczeń (http://www.cyfronet.krakow.pl/komputery/13622,artykul,pakiety_naukowe.html).

Kroki w metodzie MES

Niezależnie od środowiska pracy metoda wymaga wykonania (lub wykonuje sama) kolejne kroki:

1. Definicja problemu przez podanie klasy równań różniczkowych i zadanie geometrii
2. Podział obszaru analizy na skończoną liczbę elementów (np. trójkąty).
3. Dyskretyzacja prowadząca do układu równań liniowych
4. Wprowadzenie warunków brzegowych, modyfikujących układ równań
5. Rozwiązywanie układu - wyznaczenie wag związanych z węzłami (funkcjami węzlowymi) i wartości rozwiązania w węzłach
6. Przedstawienie wyników w postaci graficznej

PDE Matlab Toolbox (*Partial Differential Equations*)

PDE Toolbox jest zintegrowanym środowiskiem obliczeń metodą elementów skończonych, zawierającym:

- **preprocesor** - przygotowanie definicji problemu i geometrii, automatyczne przygotowanie siatki elementów skończonych,
- **procesor – rozwiązywanie** problemu,
- **postprocesor – wizualizacja** wyników

Rozwiązuje tylko problemy 2D.

Samo stosowanie narzędzia będzie tematem ćwiczeń i nie ma sensu podawania tutaj szczegółów opcji. Do ćwiczeń można się przygotować, poza czytaniem instrukcji, przez lekturę **User's Guide** dostępnego w instalacji Matlaba w postaci PDF i samodzielne eksperymenty wg wskazówek przy przykładach. Dla ilustracji wykorzystania narzędzia dalej pokazano rozwiązanie dwóch przykładowych problemów z użyciem tego narzędzia.

Przykład: Czujnik temperatury w obudowie zanurzony w gorącym płynie

Kolejne kroki w środowisku PDE Toolbox:

1. **Draw Mode:**

- a. narysować geometrię czujnika

2. **Boundary Mode:**

- a. zadać warunki Dirichleta na brzegu obszaru czujnika – temperaturę mierzonego płynu (np. 200°C)

3. **PDE Mode:**

- a. wybrać typ problemu – przepływ ciepła (*heat transfer*),
- b. problem eliptyczny (stan dynamiczny) lub paraboliczny (stan ustalony),
- c. zadać parametry materiałowe – przewodność cieplną k obudowy czujnika, bez konwekcji, bez wewnętrznych źródeł ciepła

4. **Mesh Mode:**

- a. Zainicjalizować siatkę (+ewentualne „dopieszczenie”)

5. **Solve Mode:**

- a. Wybrać parametry symulacji: czas np. 0:.5:10

PDE Toolbox do użycia na laboratorium.

Książki

Ponieważ problem jest matematycznie złożony a temat obszerny to wykład ten może być tylko wprowadzeniem, polecam dla szczególnie zainteresowanych tematem lekturę dodatkową:

Matematyczny opis problemów techniki równaniami cząstkowymi:

Kącki E. „Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki”, opis problemów elektrotechniki, transportu masy i ciepła, mechaniki, akustyki, trochę o met. numerycznych

Kącki E. „Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice”

Metody numeryczne dla zagadnień brzegowych - zastosowania ogólne:

Mathews J.H. – wprowadzenie do metod różnicowych,

Hoffman D. – jasny opis metod różnicowych, wprowadzenie do metody elementów skończonych,

Numerical Recipes – jak zwykle przystępnie napisany przegląd metod,

Numeryczne rozwiązywanie problemów:

Silverster P.P., Ferrari R.L. "Finite elements for electrical engineers"

Bolkowski S. i inni „Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego”

Szargut J. (redaktor) „Modelowanie numeryczne pól temperatury”

Volakis J., Chatterjee A., Kempel L. “Finite element method for electromagnetics : antennas, microwave circuits, and scattering applications”

Podsumowanie, kluczowe elementy tego wykładu:

- Równania różniczkowe cząstkowe (RRCz) opisują dynamikę systemów przestrzennie rozłożonych (zmienność w czasie i przestrzeni)
- RRCz dzielimy na klasy problemów zależne od natury procesów:
 - eliptyczne (pola statyczne ze źródłami, np. pola temperatury, potencjału),
 - paraboliczne (np.. równanie dyfuzji),
 - hiperboliczne (np. równanie falowe).
- Najprostsza koncepcyjnie metoda numerycznego rozwiązywania RRCz to metoda różnic skończonych z dyskretnym przybliżeniem pochodnych na równomiernej siatce węzłów
- Istnieją również metody wychodzące z równoważnego całkowego sformułowania problemu, jak np. metoda elementów skończonych
- Wypełnianie macierzy opisującej problem (równanie i warunki brzegowe) jest żmudne
- Istnieją specjalizowane pakiety służące rozwiązywaniu złożonych problemów polowych opisanych RRCz