

Wykład IX

Optymalizacja i minimalizacja funkcji

- Postawienie zadania i podstawowe idee jego rozwiązania
- Proste metody minimalizacji
- Metody iteracji z wykorzystaniem pochodnych
- Metody dla problemów sumy kwadratów
- Minimalizacja z ograniczeniami
- Problem minimalizacji globalnej
- Problemy powiązane

Postawienie zadania

Optymalizacja to projektowanie/ ulepszanie rozwiązania (technicznego) wg zadanego kryterium jakości. Np. optymalizacja kształtu kierownicy samochodu dla osiągnięcia największego komfortu kierowcy – zadanie z dziedziny ergonomii, optymalizacja sieci przesyłu energii w celu zmniejszenia strat – problem techniczno-ekonomiczny, optymalizacja rozdziału zadań do wykonania (grafik zadań) w celu maksymalnego wykorzystania zasobów – problem logistyczny.

Zapisanie problemu optymalizacji w postaci kryterium jakości zależnego od parametrów definiuje **zadanie minimalizacji lub maksymalizacji kryterium (funkcji) w przestrzeni parametrów**. Ze względu na łatwość zmiany zadania maksymalizacji na zadanie minimalizacji przez zmianę znaku kryterium, w dalszej części mowa będzie o zadaniu minimalizacji.

Standardowe matematyczne sformułowanie zadania minimalizacji brzmi:

„Dla danej funkcji f i dla danego obszaru $S \subset E^k$

znaleźć punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ taki, że $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in S$ ”.

E^k jest k -wymiarową przestrzenią euklidesową, \mathbf{x} jest punktem tej przestrzeni.

Przestrzeń poszukiwania wartości parametrów może być ograniczona. **Ograniczenia** mają charakter przedziałów (a), ograniczeń równościowych (b) lub nierównościowych (c).

$$\text{a) } \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \quad \text{b) } g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{c) } g_i(\mathbf{x}) \leq 0$$

Podstawowe idee rozwiązań problemu minimalizacji

Problemy optymalizacji **nieliniowej** (*Nonlinear Optimization, Nonlinear Programming*) wymagają użycia **iteracyjnych** metod poszukiwania opartych na informacji o wartościach kryterium w wybranych punktach przestrzeni parametrów.

Minimalizacja lokalna: poszukiwanie **pojedynczego minimum** funkcji. Najbardziej efektywne metody wykorzystują numeryczne **przybliżenia pochodnych** funkcji. W trudnych przypadkach (np. nieciągłości) stosowane są metody, które wykorzystują tylko **wartości funkcji**.

Minimalizacja globalna: **poszukiwanie jednego punktu minimalnego przy wielu minimach lokalnych**. Jest to trudne zadanie obliczeniowe. Pomysły na rozwiązanie to wielokrotne starty metody lokalnej z różnych punktów lub **zasada „błądzenia”** wokół bieżącego oszacowania minimum w nadziei znalezienia sąsiadującego lepszego rozwiązania (np. *Simulated Annealing*).

Szczególne przypadki: dla niektórych postaci zadania minimalizacji opracowano dopasowane do nich metody szybsze niż metody ogólnego przeznaczenia. O tym więcej na końcu wykładu.

Dobre wprowadzenie do metod minimalizacji można znaleźć w Buchanan, Turner „*Numerical Methods and Analysis*” i w dokumentacji do „*Optimization Toolbox*” Matlab.

Proste zadania optymalizacji na początek

Wybieg dla królików

Hodowca królików kupił 24 metry bieżące siatki ogrodzeniowej z zamiarem odgrodzenia prostokątnego terenu przy budynku gospodarczym na wybieg dla zwierząt. Zatem jeden bok już jest gotowy (ściana budynku), pozostaje zaprojektować wymiary boków prostokąta. Jak podzielić 24 mb siatki na trzy boki prostokąta, żeby króliki miały najwięcej miejsca ?

Puszka na napój

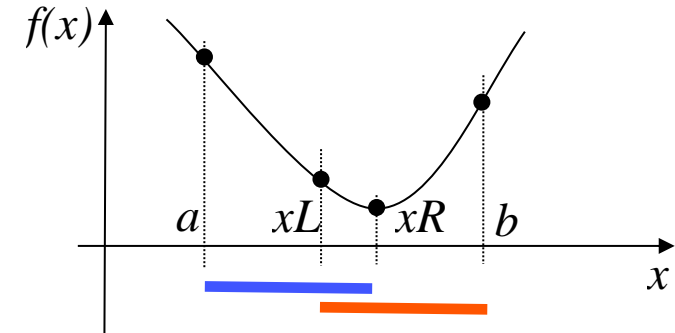
Producent napojów chce je sprzedawać w puszkach o kształcie walca o pojemności 0.33L. Jakie wymiary (średnica i wysokość) powinna mieć puszka, żeby zminimalizować koszty produkcji ? Przyjmij, że materiał na bok i denka jest w tej samej cenie. W drugim wariantcie materiał na denka jest dwa razy droższy od materiału boku walca. Jak wpłynie to na optymalny kształt puszki ?

Strzał z balisty

Nawiązując do poprzedniego wykładu (równania nieliniowe), jak zaprojektować optymalny kąt strzału z balisty dla uzyskania największego zasięgu strzału ?

Proste metody minimalizacji jednowymiarowej

Przez analogię do poszukiwania zera metodą połowienia (bisekcji) możemy podać sposób poszukiwania minimum metodą jego otoczenia i sukcesywnego zawężania przedziału.



Dysponując wartościami funkcji w dwóch punktach xL , xR wewnątrz przedziału poszukiwania $[a, b]$, możemy na ich podstawie (nachylenie siecznej) wnioskować, że minimum leży w podprzedziale $[a, xR]$ lub $[xL, b]$.

Metoda **złotego podziału** (*golden section*) podaje receptę na dobór położenia następnego punktu (jednego!). Najkorzystniejszy dla szybkości zbieżności jest podział w stosunku $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$.

Błąd oszacowania położenia minimum maleje liniowo zgodnie z zależnością: $\varepsilon_k = k\varepsilon_{k-1} = 0.618\varepsilon_{k-1}$

Jeśli dopuścimy zmienność stosunku podziału, to ciąg optymalnych (dla szybkości zbieżności) podziałów jest związany z **ciągami Fibonacciego** (*Fibonacci search*) zdefiniowanym jako:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad F_1 = F_0 = 1$$

Kolejne stosunki podziału są równe: $k = \{F_n/F_{n+1}, \dots, F_1/F_2\}$

Ilość kroków n jest dobrana do założonej dokładności δ :

$$F_{n+1} \geq (b_0 - a_0)/\delta$$

```
k = (sqrt(5)-1)/2;
xL = b-k*(b-a);
xR = a+k*(b-a);
while (b-a)>1e-6
    if f(xL)<f(xR)
        b = xR;    xR = xL;
        xL = b-k*(b-a);
    else
        a = xL;    xL = xR;
        xR = a+k*(b-a);
    end
end
xopt = (a+b)/2;
```

Kontynuując analogie do metod poszukiwania zera, dysponując kilkoma punktami możemy poszukiwać minimum funkcji przybliżającej (interpolującej) funkcję minimalizującą.

Metoda **interpolacji kwadratowej** (*quadratic search*) bazuje w każdym kroku na trzech punktach i buduje na nich wielomian interpolujący $p(x) = ax^2 + bx + c$ o minimum w punkcie $x_{\min} = -\frac{b}{2a}$ co w kategoriach trzech punktów bazowych x_1, x_2, x_3 daje rozwiązanie na nowy punkt:

$$x_4 = x_2 - \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2 [f(x_2) - f(x_3)] - (x_2 - x_3)^2 [f(x_2) - f(x_1)]}{(x_2 - x_1) [f(x_2) - f(x_3)] - (x_2 - x_3) [f(x_2) - f(x_1)]}$$

Mając nowy punkt odrzucamy skrajny punkt przedziału (zawężamy obszar) i powtarzamy iterację.

Metoda **interpolacji sześcienniej** (*cubic search*) jest często wykorzystywana wtedy, kiedy dostępna jest informacja o pochodnej funkcji. Wtedy współczynniki wielomianu interpolującego $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ można wyznaczać z wartości funkcji i jej pochodnej w dwóch punktach. Decyzja o kierunku zawężeniu przedziału jest oparta o pochodną w nowym punkcie.

Implementacja Matlabu *fminbnd* to kombinacja metody złotego podziału i interpolacji kwadratowej

Metody minimalizacji jednowymiarowej są powszechnie wykorzystywane w algorytmach wielowymiarowych, które po oszacowaniu kierunku poszukiwania minimum stosują metodę jednowymiarową wzdłuż kierunku (zob. temat *line search* w Optimization Toolbox User's Guide).

Przykład Optymalna trasa zjazdu narciarskiego

Problemem do rozwiązania jest projekt profilu (kształtu) trasy narciarskiej dla uzyskania **najkrótszego czasu przejazdu** (pominiemy tarcie nart o śnieg i opór powietrza). Ogólne rozwiązanie tego problemu jest znane w technice w postaci krzywej o nazwie *brachistochrona* (lub *cykloida*) i zostało wyznaczone w XVII wieku metodami wariacyjnymi (minimalizacja funkcjonału). My ograniczymy klasę krzywych do parabol (będzie to **rozwiązanie suboptymalne**) i w ten sposób zdefiniujemy zadanie optymalizacji kształtu zadanego pojedynczym parametrem.

Rodzina parabol z parametrem a przedstawiona na rysunku jest dana wzorem: $y(x) = (ax - 1)(x - 1)$

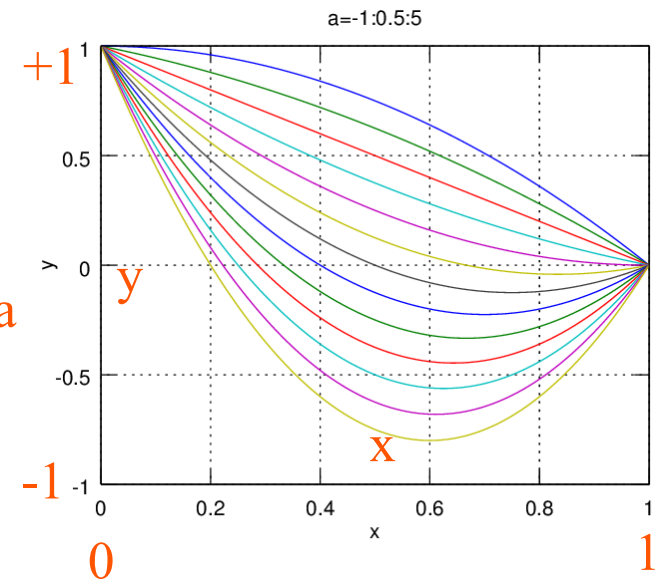
Wzór na czas przejazdu można wyprowadzić z zasady zachowania energii:

eng. kinetyczna $\frac{mv^2}{2} = mg(1 - y(x))$ eng. potencjalna

oraz z całki:

$$t(a) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(1 - y(x))}} dx$$

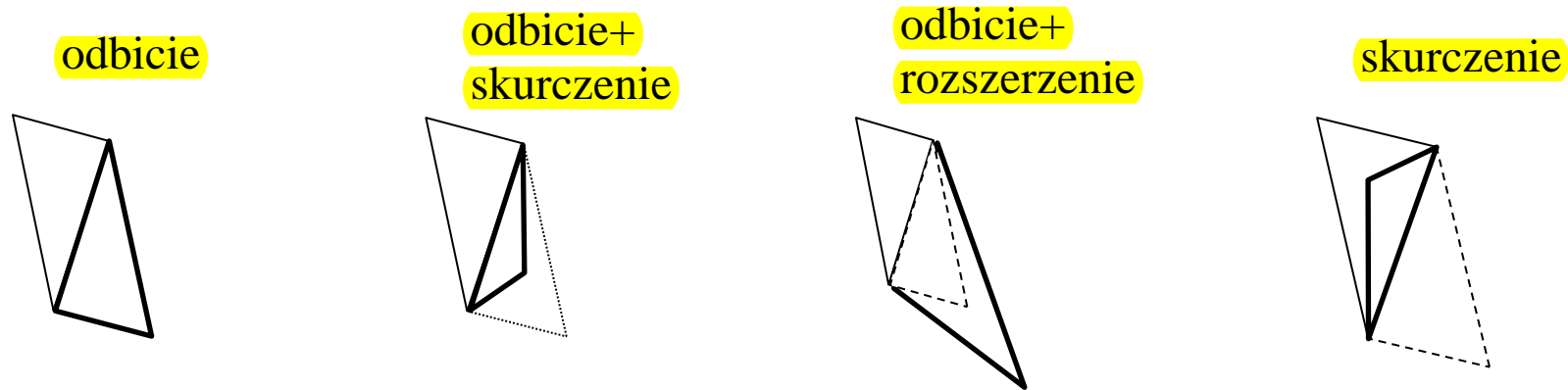
Całka wygląda skomplikowanie, więc użyjemy numerycznej metody całkowania dla wyznaczenia czasu przejazdu dla zadanego a . Testując różne wartości a wg schematu metody minimalizacji znajdziemy kształt dający minimalny czas zjazdu.



Minimalizacja wielowymiarowa bez użycia informacji różniczkowej

Metoda Simplex autorów Nelder-Mead (1965) [zob. Numerical Recipes].

Wykorzystuje ona w działaniu zestaw $N+1$ punktów w przestrzeni N -wymiarowej, które tworzą najprostszą figurę geometryczną w tej przestrzeni (nazywaną simpleksem). Krok metody polega na wyznaczeniu następnego punktu przybliżenia minimum w kierunku wyznaczonym przez symetryczne odbicie punktu najwyżej położonego względem naprzeciwległej ściany simpleksu. Może być przy tym wykonane zawężenie lub rozszerzenie simpleksu. Warunkiem zakończenia w metodzie jest zmniejszenie rozmiarów simpleksu poniżej wartości granicznej.



Zauważmy, że zasady transformacji simpleksu wykorzystują informację o nachyleniu minimalizowanej powierzchni z dostępnych punktów bez jawnego wykorzystania pochodnych.

Implementacja metody Simplex w Matlabie to `fminsearch`.

Minimalizacja z użyciem informacji różniczkowej – metody gradientowe

Metoda największego spadku (*steepest descent*)

Następne przybliżenie minimum jest poszukiwane w kierunku przeciwnym do gradientu:

$$\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x})$$

Wyznaczenie kierunku poszukiwania minimum jest pierwszym etapem pojedynczego kroku metody minimalizacji wielowymiarowej. Drugim etapem jest jednowymiarowe poszukiwanie minimum wzdłuż wyznaczonego kierunku, tzn. minimalizacja względem α zależności:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}$$

Dokonuje się tego omówionymi poprzednio metodami złotego podziału, ciągu Fibonacciego, metodami interpolacji/ekstrapolacji.

Metoda największego spadku w Matlabie to *fminunc*. Nie jest polecana dla ogólnego przypadku, bo dla trudnych funkcji, jak np. funkcja Rosenbrocka (popularna funkcja testowa, nazywana też funkcją bananową) $f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, metoda jest bardzo wolno zbieżna do rozwiązania.

Metody kierunków/gradientów sprzężonych Fletchera-Reevesa, Polaka-Ribiere'a [zobacz szczegóły w książce Fletchera 1987]. Są to metody mniej popularne (słabsze rozpowszechnienie źródeł gotowych procedur) ale zachowujące się porównywalnie z metodami dalej omawianymi.

Przykład Minimalizacja funkcji w dwóch wymiarach

Spróbujmy zminimalizować prostą funkcję dwóch argumentów:

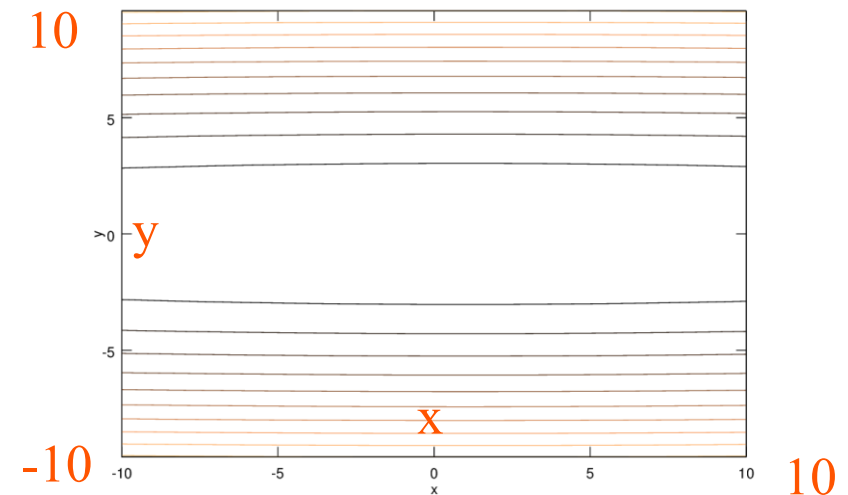
$$f(x, y) = (x - 1)^2 + 100y^2$$

Jej minimalna wartość to $f(1,0) = 0$

Potrąfimy również wyliczyć pochodną (gradient) tej funkcji dla dowolnego x i y . Wykres konturowy (izolinie) jest pokazany obok.

```
% bez użycia analitycznego gradientu
[x,fx,info,output]=fminunc('fxy',[1 1]);
x =
    1.0000e+000   -2.1219e-012
output =
    iterations =    5
    successful =    4
    funcCount =   24
```

```
% informacja dla algorytmu, że gradient jest dostępny
opt=optimset('GradObj','on');
[x,fx,info,output]=fminunc('fxy',[1 1],opt);
x =
    1.0000e+000    5.5511e-017
output =
    iterations =    5
    successful =    4
    funcCount =    9
```



```
function [f,fp]=fxy(x)
f=(x(1)-1).^2+100*x(2).^2;
fp=[2*(x(1)-1); 200*x(2)];
```

Metody różniczkowe drugiego rzędu – metody Newtona i quasi-Newtona

Metoda gradientowa używała modelu pierwszego rzędu (liniowego) zachowania się funkcji w okolicy bieżącego punktu. Dokładniejsze wyznaczenie kierunku poszukiwania minimum otrzymuje się przy uwzględnieniu informacji różniczkowej drugiego rzędu. Model otoczenia bieżącego punktu ma wtedy postać kwadratową, z zastępczym problemem minimalizacji:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \right\},$$

przyrównanie pochodnej wzg. \mathbf{x} do 0

gdzie \mathbf{H} jest symetryczną i dodatnio określoną macierzą hesjanu aproksymowanej funkcji, \mathbf{b} wektorem gradientu w bieżącym punkcie, c stałą. Z przyrównania pochodnej modelu względem \mathbf{x} do 0 otrzymuje się kierunek \mathbf{d} poszukiwania minimum (kierunek Newtona) z układu równań:

$$\mathbf{H} \mathbf{d} = -\mathbf{b}$$

Metody z bezpośrednim wyznaczaniem hesjanu są nazywane **metodami Newtona**. Wyznaczanie macierzy hesjanu jest jednak kosztowne obliczeniowo. Z tego względu opracowano metody z iteracyjną aktualizacją tej macierzy nazywane **metodami quasi-Newtona** (lub **metodami zmiennej metryki**). Najpopularniejsze formuły aktualizacji to BFGS (pokazana dla przykładu):

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^T \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k}$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{q}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

i DFP aktualizująca bezpośrednio odwrotność macierzy hesjanu. Obydwie są do wyboru w Matlabie w funkcjach *fminunc*, *fmincon*.

Minimalizacja z ograniczeniami - wprowadzenie

Stosowana do niedawna metoda uwzględniania ograniczeń przez stosowanie funkcji kary (czyli gwałtownego zwiększenia wartości kryterium po przekroczeniu ograniczeń) jest przestarzała. Obecnie definiuje się problem minimalizacji z ograniczeniami z użyciem mnożników Lagrange'a w postaci:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad \leftarrow \text{ograniczenia}$$

Warunkami koniecznymi optymalności rozwiązania zadania z ograniczeniami równościowymi i nierównościowymi są równania Kuhna-Tuckera, które są warunkami wystarczającymi dla problemu wypukłego, tj. przy funkcji celu i ograniczeniach w postaci funkcji wypukłych.

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i=1, \dots, m$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i=m_e+1, \dots, m$$

Poszukujemy rozwiązania w przestrzeni \mathbf{x} i dodatkowo $\boldsymbol{\lambda}$. Pierwsze równanie ma być spełnione z niezerowymi współczynnikami λ tylko przy aktywnych ograniczeniach (m_e to liczba ograniczeń równościowych, pozostałe są nierównościowe).

Takie postawienie problemu jest podstawą implementacji w funkcji `fmincon`.

Przykład Dopasowanie krzywej do danych pomiarowych wg zasady najmniejszej sumy modułów **LM (*least-moduli*)**.

Zmierzono charakterystykę $U(I)$ żarówki wolframowej. Ponieważ prąd płynący przez włókno żarówki rozgrzewa je (i dzięki temu żarówka świeci) to opór elektryczny włókna zwiększa się i wynikowa charakterystyka jest nieliniowa. Przyjmij model wielomianowy stopnia trzeciego tej zależności i wyznacz współczynniki dopasowania krzywej modelowej do pomiarów przy kryterium dopasowania w postaci najmniejszej sumy modułów (mniejsza wrażliwość na pojedyncze duże odchyłki pomiarów od modelu).

x

I [A]	U [V]
0.0	0
0.2	30
0.4	60
0.6	110
0.8	175
1.0	270

y

```
function kryt=kryt_zar(a,i,u)
kryt=sum(abs(u - mod_zar(a,i)));
```

```
function m=mod_zar(a,i)
m=a(3)*i.^3+a(2)*i.^2+a(1)*i;
```

```
i=[0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0]; u=[0 30 60 110 175 270];
x=fminsearch('kryt_zar', [0 0 0], [], [], i, u);
f=mod_zar(x,i);
plot(i,f,'-',i,u,'*')
```

Kryterium LM nie daje zamkniętego wzoru, jak to było w przypadku kryterium LS i modelu liniowego względem parametrów. Dlatego stosujemy podejście iteracyjne z poszukiwaniem wartości parametrów, dla których kryterium ma najmniejszą wartość.

Algorytmy dla problemu nieliniowej najmniejszej sumy kwadratów (NLS)

Problem najmniejszej sumy kwadratów czynników nieliniowych względem parametrów powstaje przy wszelkich dopasowaniach typu *least-squares*, np. w identyfikacji obiektów dynamicznych metodą dopasowania odpowiedzi modelu do pomiarów. Ponieważ jest to problem z określoną strukturą, to możemy się spodziewać uproszczeń w obliczeniach.

Kryterium minimalizacji ma w tym przypadku postać (F_i jest i -tą odchylką pomiaru od modelu):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_i F_i(\mathbf{x})^2 = \mathbf{F}(\mathbf{x})^T \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Licząc gradient \mathbf{b} i hesjan \mathbf{H} kryterium uzyskamy:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \text{gdzie } \mathbf{J} \text{ jest jacobianem wektora } \mathbf{F},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}), \quad \text{gdzie } \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_i F_i(\mathbf{x}) \mathbf{H}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_i \text{ jest hesjanem } i\text{-tej składowej.}$$

Pomijając \mathbf{Q} unikamy obliczania macierzy drugich pochodnych, korzystamy tylko z jacobianu.

Metoda Gaussa-Newtona

Stosując kierunek Newtona z użyciem wielkości uzyskamy jego wersję dla problemu NLS.

Skutkuje to kierunkiem będącym rozwiązaniem problemu liniowego LS:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{d} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

czyli równoważnego równania normalnego LS:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{d} = -\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Metoda Levenberga-Marquardta

Jest to ulepszenie metody Gaussa-Newtona dla przypadku kiedy czynnik $Q(\mathbf{x})$ nie może być pominięty z powodu dużego udziału w hesjanie. Rozsądne wyjście, to nie korzystać wtedy w ogóle z hesjanu tylko wybrać krok metody największego spadku.

Takie zachowanie można zapewnić dobierając współczynnik λ w uogólnionej regule wyznaczania kierunku:

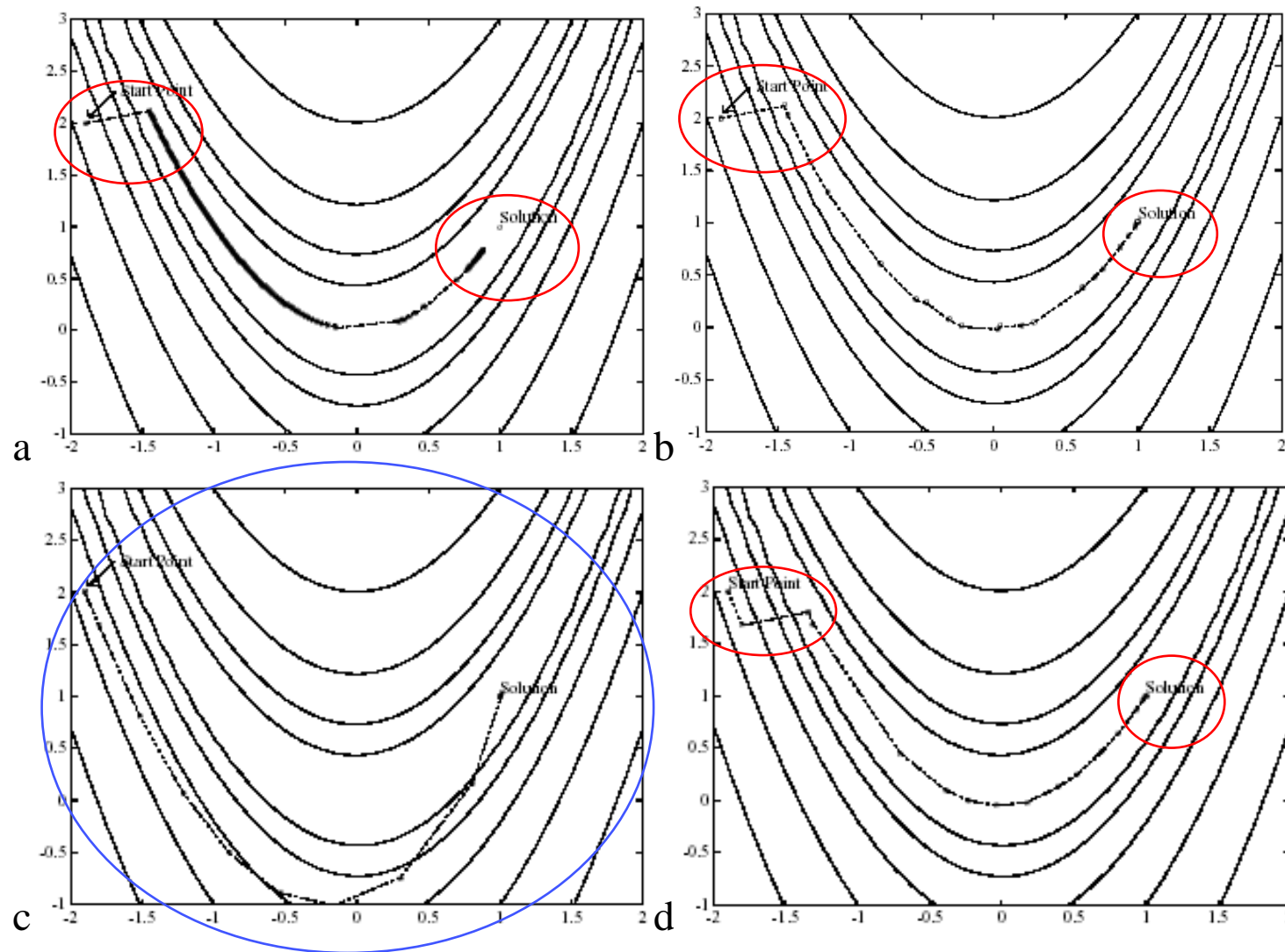
$$[\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{I}] \mathbf{d} = -\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Dla α równego zero jest to kierunek Gaussa-Newtona natomiast dla dużego α pierwszy czynnik związany z hesjanem traci na znaczeniu i o kierunku decyduje prawa strona związana z gradientem.

Implementacją tej metody jest funkcja Matlab *lsqnonlin*.

WAŻNE !

Jest to metoda polecana np. do identyfikacji ponieważ dobrze zachowuje się z dala od minimum (od dobrego dopasowania do pomiarów) - wtedy korzysta z modelu liniowego największego spadku, jak i w okolicy minimum gdzie modeluje kryterium funkcją kwadratową.

Przykład Porównanie efektywności poszczególnych metod na funkcji Rosenbrocka

Przykład Jeszcze raz o żarówce

Co należy zmienić w poprzednim ujęciu dopasowania modelu do charakterystyki żarówki $U(I)$, żeby wykorzystać metodę Gaussa-Newtona lub Levenberga-Marquardta ?

Rozwiązania problemu minimalizacji globalnej

Metoda pokrycia siatką prostokątną lub nierównomierną

Poszukiwanie minimum globalnego funkcji jest w tym przypadku zastąpione zadaniem poszukiwania minimum dyskretnego i skończonego zbioru wartości. Konieczność wyznaczania wartości kryterium w wykładniczo rosnącej (wraz z wymiarem problemu) liczbie punktów.

Proste metody poszukiwania losowego

Pokrycie siatką losową. Ulepszanie rozwiązania przez minimalizację lokalną z najlepszego z wylosowanych punktów lub minimalizacja lokalna z każdego z wylosowanych punktów z wyborem najlepszego rozwiązania.

Zaawansowane metody losowe

Wprowadzenie czynnika losowego do efektywnych metod minimalizacji lokalnej (simpleksów, największego spadku, quasi-Newtona) zaburza kierunek poszukiwania umożliwiając przejście do sąsiedniego „dołka”. Zmienny udział czynnika losowego w kierunku powoduje, że w początkowej fazie optymalizacji przeszukiwana jest cała przestrzeń parametrów dla znalezienia otoczenia punktu minimum globalnego, a faza końcowa wyznacza z większą dokładnością położenie tego punktu. Przykładem takiej implementacji jest metoda **Simulated Annealing** – analogia do procesu chłodzenia w termodynamice [zob. Numerical Recipes].

Algorytmy genetyczne – poszukiwanie minimum wg zasad ewolucji biologicznej, stosowane głównie w problemach optymalizacji dyskretniej.

Problemy pokrewne

Ogólne zadanie optymalizacji, które dotąd omawialiśmy ma przypadki szczególne z metodami rozwiązania dopasowanymi do struktury problemu (nie omawiamy szczegółów):

Problemy LP (Linear Programming) - kryterium i ograniczenia są liniowymi funkcjami parametrów, tj.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Ponieważ powierzchnia kryterium jest hiperpłaszczyzną, to rozwiązanie leży na przecięciu z hiperpłaszczyzną ograniczeń. Metoda rozwiązania to poszukiwanie minimum wzdłuż ograniczeń. Implementacja w Matlabie to *linprog* (metoda Simplex, nie mylić z Nelder-Mead Simplex).

Problemy QP (Quadratic Programming) - kwadratowe kryterium i liniowe ograniczenia, tj.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{Ex} = \mathbf{d}$$

Jak wyżej, ale optimum może leżeć też wewnątrz przestrzeni poszukiwania (ekstremum hiperparaboli). Implementacja w Matlabie to *quadprog*.

Problemy optymalizacji dyskretnej (całkowitoliczbowej, kombinatorycznej)

Parametry optymalizacji przyjmują tylko dyskretne wartości (np. całkowite). Przykłady:

- **Najkrótsza droga w grafie** (np. wyznaczanie trasy w Google Maps). Rozwiązanie np. algorytmem Dijkstry wędrówki wzdłuż krawędzi i wyboru najkrótszej ścieżki do sąsiadów.
- **Problem komiwojażera** – przejazd przez zbiór miast (każde miasto odwiedzane dokładnie raz) wzdłuż najkrótszej drogi.

Podsumowanie, kluczowe elementy tego wykładu:

- Problemy optymalizacji można zunifikować jako problemy minimalizacji
- Minimalizacja względem jednego parametru przypomina podejścia z otaczaniem i otwartego przedziału w problemie poszukiwania zera. Tutaj mamy analogiczne algorytmy, np. *golden-section*, *quadratic-interpolation*
- Minimalizacja jednowymiarowa jest podstawą działania algorytmów w wielu wymiarach przy poszukiwaniu minimum wzdłuż wyznaczonego kierunku
- Algorytmy wielowymiarowe korzystają z informacji o krzywiznie minimalizowanej powierzchni w postaci pochodnej i hesjanu lub ich przybliżeń. Kierunek minimum wynika z zastosowania modelu krzywizny
- Problemy LS pozwalają na uproszczenie struktury obliczeń
- Optymalizacja globalna wymaga specjalnego podejścia z uwagi na możliwość wystąpienia wielu minimów lokalnych
- Problemy dyskretne (w szczególności kombinatoryczne) mają specyf. algorytmy rozwiązań