

Wykład II

Macierze w obliczeniach technicznych

- Od układu fizycznego do równania macierzowego
- Istotne obliczeniowo własności macierzy
- Uwarunkowanie numeryczne obliczeń macierzowych
- „Szkolne” rozwiązania układów równań liniowych

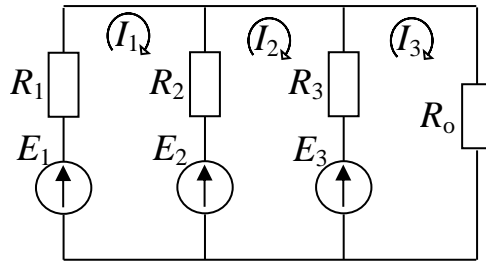
Macierzowy opis układów fizycznych

Obwody stałoprądowe - metoda prądów oczkowych i potencjałów węzłowych

Dla każdego węzła/oczka obwodu układamy bilans napięć/prądów wg. praw Kirchhoffa. Ponieważ wszystkie węzły/oczka w obwodzie tworzą sieć „naczyni połączonych”, jesteśmy w stanie wyznaczyć stan równowagi w obwodzie przez wyznaczenie nieznanych napięć/prądów na podstawie wartości elementów rezystancyjnych i źródeł prądów/napięć.

Przykład - Metoda prądów oczkowych (II prawo Kirchhoffa o sumie napięć w oczku)

Obwód trzech akumulatorów połączonych równolegle i obciążonych rezystancją.



$$\begin{cases} E_1 - I_1(R_1 + R_2) + I_2 R_2 - E_2 = 0 \\ E_2 - I_2(R_2 + R_3) + I_1 R_2 + I_3 R_3 - E_3 = 0 \\ E_3 - I_3(R_3 + R_0) + I_2 R_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_0 \end{bmatrix}}_{\text{macierz rezystancyjna}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ E_2 - E_3 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

I=?

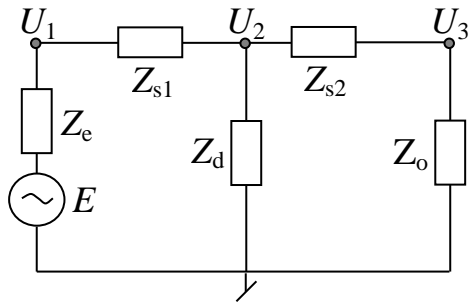
Przykłady i reguły wypełniania macierzy w tych metodach np. w [Guziak, Kamińska].

Obwody zmiennoprądowe w stanie ustalonym, napięcia harmoniczne

Metody jak dla prądu stałego, ale wszystkie parametry opisane liczbami zespolonymi

Przykład - Metoda potencjałów węzłowych (I prawo Kirchhoffa o sumie prądów w węźle)

Linia przesyłu energii elektrycznej zamodelowana elementami skupionymi, ze źródłem napięcia sieciowego E o impedancji wyjściowej Z_e , impedancją szeregową linii Z_{s1} , Z_{s2} , impedancją doziemną Z_d i impedancją odbiornika Z_o .



$$\begin{cases} (U_1 - E)/Z_e + (U_1 - U_2)/Z_{s1} = 0 \\ (U_2 - U_1)/Z_{s1} + (U_2 - U_3)/Z_{s2} + U_2/Z_d = 0 \\ (U_3 - U_2)/Z_{s2} + U_3/Z_o = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_e} + \frac{1}{Z_{s1}} & -\frac{1}{Z_{s1}} & 0 \\ -\frac{1}{Z_{s1}} & \frac{1}{Z_{s1}} + \frac{1}{Z_{s2}} + \frac{1}{Z_d} & -\frac{1}{Z_{s2}} \\ 0 & -\frac{1}{Z_{s2}} & \frac{1}{Z_{s2}} + \frac{1}{Z_o} \end{bmatrix}}_{\text{Macierz admitancyjna}} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{Z_e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$U=?$

Rozwiązanie w postaci zespolonych wartości napięć, dające informację o wartościach skutecznych tych napięć i ich fazach względem źródła napięcia.

Obwody/układy/systemy w stanach dynamicznych - Odpowiedź impulsowa i macierz splotowa.

Operacja splotu dyskretnego (oznaczana przez $*$) może być zapisana w postaci macierzowej, co jest jednak rzadko wykorzystywane w obliczeniach numerycznych z powodu dużej zajętości pamięci nadmiarową (redundantną) informacją. Interesująca z punktu widzenia analizy jest budowa tych macierzy.

Splot dyskretny: $y(n) = u(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{L-1} u(n-k)h(k)$

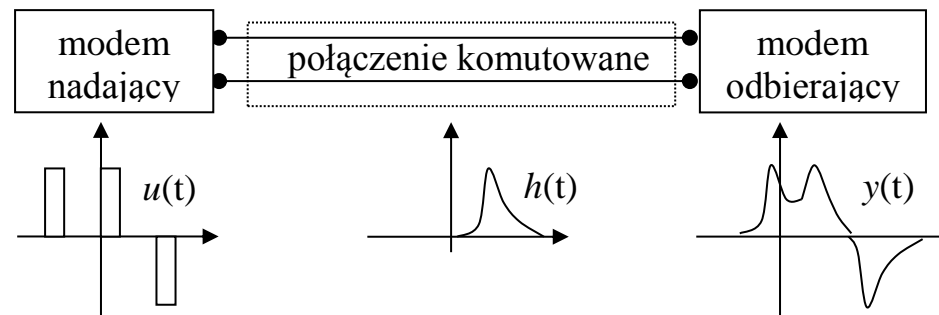
Splot dyskretny w zapisie macierzowym (dla y w zakresie $\langle 0, N \rangle$):

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_{-1} & \cdots & u_{0-(L-1)} \\ u_1 & u_0 & \cdots & u_{1-(L-1)} \\ u_2 & u_1 & \cdots & u_{2-(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-2} & \cdots & u_{N-1-(L-1)} \\ u_N & u_{N-1} & \cdots & u_{N-(L-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{L-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{h}$$

Macierz \mathbf{U} o strukturze Toeplitza. \mathbf{U} nie musi być macierzą kwadratową. Jeśli \mathbf{y} jest poszukiwane to mamy równanie typu transformacji danych. Jeśli \mathbf{h} jest poszukiwane - układ równań liniowych.

Problem możemy zapisać równoważnie wypełniając macierz odpowiednimi wartościami h a wektor po prawej stronie wartościami u ($\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{u}$).

Przykład – odpowiedź impulsowa kanału telekomunikacyjnego (np. linii telefonicznej)
Krytyczną charakterystyką linii transmisyjnej jest, obok zakłóceń, jej odpowiedź impulsowa. Decyduje ona o minimalnym możliwym odstępach transmitowanych symboli (impulsów), przy którym kolejne symbole rozmyte przez linię transmisyjną nie nakładają się na siebie. Przeanalizujemy transmisję w prymitywnym modemie z binarną modulacją amplitudy (zmianą polaryzacji) impulsu prostokątnego.



Odtwarzanie sygnału nadanego u przez przetworzenie (np. filtrację) sygnału odebranego y przy znanej odpowiedzi impulsowej linii h – zadanie korekcji (*equalization*, *deconvolution*).

W zapisie macierzowym $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{u}$. Ale nie można odtworzyć wejścia \mathbf{u} na podstawie wyjścia przez proste $\mathbf{u} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}$, bo \mathbf{H} nie musi być macierzą kwadratową. Przy uwzględnieniu zakłóceń sygnału \mathbf{y} powstaje zadanie projektowania korektora, które ma wiele rozwiązań wg różnych kryteriów.

Obwody w stanach dynamicznych - Macierzowe równania stanu.

W poprzednim przykładzie dynamika elementu została opisana macierzą splotową. Było to możliwe dzięki ograniczeniu czasu próbkowania odpowiedzi impulsowej. W automatyce i dziedzinach pokrewnych popularny jest zwarty opis dynamiki w postaci równań stanu.

Wprowadzenie zmiennych stanu eliminuje konieczność operowania na historii sygnału wejściowego. Pamięć przeszłych zdarzeń jest zawarta w zmiennych stanu, dzięki czemu **przyszłe zachowanie** elementu możemy przewidzieć **na podstawie bieżącego stanu i bieżącego wejścia**.

Przykład – obwód R-L-C ($a_1=(LC)^{-1}$, $a_0=(RC)^{-1}$, $b_0=(LRC)^{-1}$) lub drgający układ mechaniczny

Zapis **w postaci równania różniczkowego**:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u$$

Równoważny zapis **w postaci równań stanu**:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ogólnie: $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ $y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$

Zadanie (zasadnicze): wyznaczenie przebiegu (trajektorii) stanu w funkcji czasu.

Rozwiązanie analityczne (zob. np.: Kaczorek T., „Macierze w automatyce i Elektrotechnice”):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau, \text{ gdzie } e^{\mathbf{A}t} - \text{macierz tranzycji zależna od wartości własnych } \mathbf{A}.$$

Rozwiązanie numeryczne: metody symulacji systemów dynamicznych/całkowania równań stanu.

Obwody w stanach dynamicznych - Dyskretyzowane w czasie równanie różniczkowe/stanu.

Równanie stanu nie jest klasycznym układem równań liniowych z uwagi na występującą w nim pochodną stanu względem czasu. Rozwiązaniem nie jest jedna wartość wektora stanu, a jego wartości zmieniające się czasem. Klasyczny układ równań liniowych możemy uzyskać dyskretyzując równanie różniczkowe i przyjmując za niewiadome kolejne wartości zmiennej stanu.

Przykład – obwód elektryczny R-C ($a_0=(RC)^{-1}$, $b_0=(RC)^{-1}$) lub nagrzewany czujnik temperatury

Równanie różniczkowe: $y' + a_0 y = b_0 u$

Po dyskretyzacji z przybliżeniem pochodnej ilorazem różnicowym (jedna z możliwości):

$$y((i+1) \cdot dt) - y(i \cdot dt) [1 - a_0 \cdot dt] = b_0 \cdot dt \cdot u(i \cdot dt)$$

W zapisie macierzowym ($\tilde{a}_0 = 1 - a_0 \cdot dt$, $\tilde{b}_0 = b_0 dt$, $y_i = y(i \cdot dt)$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \tilde{a}_0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 u_0 + \tilde{a}_0 y_0 \\ \tilde{b}_0 u_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_0 u_{N-1} \end{bmatrix}$$

Ze względu na rzadką strukturę macierzy wygodniej jest korzystać bezpośrednio z zależności iteracyjnej w postaci równania różnicowego.

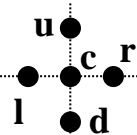
Układy z parametrami rozłożonymi - Dyskretyzowane w przestrzeni równania różniczkowe cząstkowe

Przykład: Nagrzewana z jednej i chłodzona z drugiej strony płyta (np. ściana domu w zimie)

Równanie Laplace'a (T – temperatura):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \text{warunki brzegowe np: } T(x_p) = T_p, T(x_k) = T_k, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y_p} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y_k} = 0$$

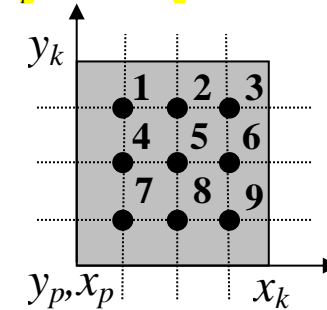
Dyskretyzacja przestrzeni metodą siatek i numeracja węzłów siatki:
Dla każdego węzła równanie Laplace'a ma postać dyskretną:

$$T_l + T_r + T_u + T_d - 4T_c = 0$$


Wynikowe równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \dots \\ T_5 \\ \dots \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_p \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ T_k \end{bmatrix}$$

Macierz o dużych rozmiarach ale stosunkowo niewielu elementach (macierz rzadka).



Macierz autokorelacji

Macierz autokorelacji opisuje dynamikę sygnału dyskretnego poprzez zależność bieżącej wartości sygnału od jego wartości wcześniejszych i późniejszych. Sygnał o niskich wartościach autokorelacji jest podobny w charakterze do szumu białego. W telekomunikacji celowo konstruuje się sygnały (sekwencje) o niskim skorelowaniu (PRBS) do celów synchronizacji, identyfikacji kanału i rozpraszania widma (np. GPS, CDMA).

Spójrzmy na przykład macierzy autokorelacji dla powtarzalnej pseudolosowej sekwencji binarnej PRBS (pseudo-random binary sequence):

$$x_k \in \{0,1\}, \quad n=0,\dots,N-1, \quad m - \text{liczba niezerowych bitów}$$

Ogólna definicja: $C(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{k+n} x_{l+n}$

Dla PRBS: $C(k, l) = \begin{cases} m, & \text{jeśli } k = l \\ m(m-1)/(N-1), & \text{jeśli } k \neq l \end{cases}$

Macierz autokorelacji C jest kwadratowa i symetryczna względem diagonal. W ogólnym przypadku posiada tylko N różnych wartości (czyli jest zdefiniowana przez jeden wiersz), a w przypadku sygnału PRBS jest zdefiniowana przez dwie wartości (na diagonal i poza nią).

Przykład sygnału PRBS: dyskusja własności

Prostym przykładem sygnału PRBS jest sekwencja bitów z tylko jednym bitem niezerowym. Np. dla 5-cio bitowej sekwencji mamy:

$$\mathbf{x}=[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Wg podanych wzorów elementy na diagonalu macierzy autokorelacji mają dla tej sekwencji wartość 1 a poza diagonalą wartość 0.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

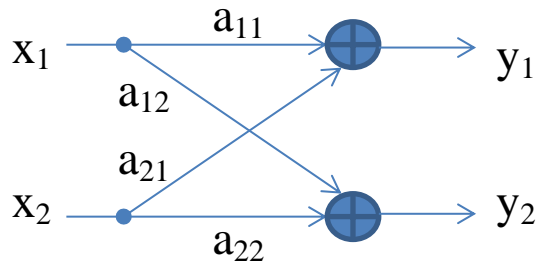
Możemy to sprawdzić bezpośrednio z definicji autokorelacji.

Taka sekwencja ma szerokie widmo (krótki impuls, brak korelacji) ale ma małą zmienność. Można zaprojektować lepszą sekwencję z większą ilością niezerowych bitów kosztem zwiększonej autokorelacji.

Więcej o sekwencjach PRBS na ćwiczeniach, na wykładzie z generatorów liczb losowych i innych zajęciach z telekomunikacji.

Macierzowe transformacje liniowe – prosty przypadek dwuwymiarowy

Macierzowa transformacja liniowa dla przypadku dwóch zmiennych (wektora dwuelementowego) jest zapisem matematycznym poniższego schematu (wagi przy gałęziach):



Transformację zapiszemy macierzowo:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Taki zapis może reprezentować problem np.:

- dystrybucji zasobów
- transformacji geometrycznej na płaszczyźnie
- mieszania sygnałów losowych dla uzyskania sygnałów skorelowanych

Problem odwrotny polega na wyznaczeniu wektora \mathbf{x} przy znanym \mathbf{y} (np. dekokorelacja). Przy powyższym zapisie wymaga to rozwiązania układu równań (o czym na następnym wykładzie).

Rotacja punktu na płaszczyźnie o kąt φ wokół punktu zerowego może być zapisana macierzowo z elementami:

$$a_{11} = \cos\varphi$$

$$a_{21} = -\sin\varphi$$

$$a_{12} = \sin\varphi$$

$$a_{22} = \cos\varphi$$

Sprawdźmy to w Matlabie.

Macierzowe transformacje liniowe

Przykładem macierzowej transformacji liniowej jest Dyskretna Transformata Fouriera (DFT). Transformata DFT rozkłada sygnał dyskretny na sumę składowych sinusoidalnych wg. zależności:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} - \text{wektor } N\text{-elementowy}$$

$$F(n, m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N} nm\right) - j \frac{1}{\sqrt{N}} \sin\left(\frac{2\pi}{N} nm\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nm\right) \quad n, m = 0, \dots, N - 1$$

Macierz \mathbf{F} jest ortonormalna (ortogonalna i unormowana), tzn.

$$\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad H - \text{operator sprzężenia macierzy (transpozycja i sprzężenie elementów)}$$

Zatem:

$$\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{F}^H \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{F}^H \mathbf{X}$$

Sprawdzić w Matlabie

Stąd wniosek, że macierz odwrotnej transformaty DFT \mathbf{F}^{-1} jest macierzą sprzężoną do \mathbf{F} . Do jej wyznaczenia wystarczy transpozycja i sprzężenie zespolone elementów macierzy \mathbf{F} .

Do obliczenia DFT używa się w praktyce szybkiej wersji powyższych obliczeń w postaci Szybkiej Transformaty Fouriera FFT. Do przyśpieszenia obliczeń wykorzystuje ona regularność macierzy DFT wynikającą ze wspólnego czynnika $2\pi/N$. Więcej o tym na kursie DSP.

Własności macierzy

Przegląd podstawowych pojęć, których będziemy używali:

Macierze specjalne:

jednostkowa, zerowa, diagonalna, trójkątna, symetryczna, ortogonalna, ortonormalna

Operacje macierzowe i ich własności (łączność, przemienność):

dodawanie, mnożenie, transpozycja, sprzężenie
skalar \times macierz, iloczyn skalarny wektorów

Wyznacznik i osobliwość macierzy, rząd macierzy

DEFINICJE !

Formy kwadratowe i dodatnia określoność macierzy

Wektory ortogonalne i ortonormalne

Wartości i wektory własne

Pochodna funkcji wielu zmiennych - wektor gradientu

Macierz drugich pochodnych funkcji wielu zmiennych - macierz hesjanu

Gradient wektora funkcji wielu zmiennych - macierz jacobianu

Uwarunkowanie obliczeń macierzowych

Zgodnie z ogólną definicją uwarunkowania zadania obliczeniowego, wskaźnik uwarunkowania to mnożnik, z którym zaburzenia danych wejściowych przenoszą się na wynik obliczeń. Ponieważ wprowadzanie pojęcia normy macierzy nie pasuje do profilu naszych zajęć, ograniczymy się do podania końcowego rezultatu analizy uwarunkowania problemów macierzowych.

Jak można wykazać (zob. np. Jennings A., „Matrix computation”, lub Fortuna Z. „Metody numeryczne”) w przypadku układu równań liniowych **wskaźnik uwarunkowania** dla zadania rozwiązywania układu równań liniowych **$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$** (wg normy Euklidesa) jest wyrażony stosunkiem modułu największej do najmniejszej wartości własnej macierzy \mathbf{A} , tzn. **$\kappa = |\lambda_{\max}(\mathbf{A})| / |\lambda_{\min}(\mathbf{A})|$** .

Wyznaczanie wartości własnych macierzy jest kosztowne obliczeniowo, więc w praktyce stosuje się mniej kosztowne oszacowanie wskaźnika uwarunkowania w postaci **pierwiastka stosunku sumy kwadratów wszystkich elementów macierzy i macierzy odwrotnej**. Niestety ta definicja (wg. normy Frobeniusa macierzy) przeszacowuje wskaźnik uwarunkowania.

Przykład: W wyniku np. analizy obwodu metodą prądów oczkowych przy dominującej rezystancji między oczkami uzyskano układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{bmatrix} \mathbf{i} = \mathbf{e}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2001. \quad \text{Wskaźnik uwarunkowania jest rzędu 2000,}$$

czyli grozi nam niebezpieczeństwo **wzmocnienia błędu** reprezentacji na poziomie $\text{eps}/2$ ($\sim 10^{-16}$) **o 3 miejsca po przecinku** (nie tragedia przy powszechnej dokładności pomiarów napięć rzędu $10^{-2} - 10^{-3}$).

„Szkolne” metody rozwiązywania układów równań liniowych

Metody tzw. „szkolne” rozwiązywania układów równań liniowych polegają bądź na obliczaniu wyznaczników (metoda Cramera), bądź na metodzie eliminacji zmiennych i kolejnych podstawieniach. W praktycznych obliczeniach numerycznych ta ostatnia metoda w postaci algorytmicznej jest powszechnie wykorzystywana, co będzie omówione na następnym wykładzie. Teraz przypomnimy pierwszą, nieefektywną i trudną w implementacji metodę.

Metoda Cramera:

$$\text{Dla układu równań } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}: \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & b_N & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ma postać:

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \text{ gdzie macierz } \mathbf{A}_i \text{ jest utworzona z } \mathbf{A} \text{ przez wymianę } i\text{-tej kolumny wektorem } \mathbf{b}.$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \frac{5 \cdot 4 - 11 \cdot 2}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} = 1, \quad x_2 = \frac{1 \cdot 11 - 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} = 2$$

Podsumowanie, kluczowe elementy tego wykładu:

- Szereg problemów techniki w opisie matematycznym sprowadza się do zapisu macierzowego
- W niektórych przypadkach jest to wyrażenie macierzowe do obliczenia typu $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$
- W innych przypadkach jest to równanie macierzowe do rozwiązania typu $\mathbf{AY} = \mathbf{X}$
- Macierze opisujące wiele problemów techniki mają regularną strukturę :
 - diagonalną
 - pasmową
 - rzadką
 - symetryczną
 - ortogonalną
 - ortonormalną
 - ze wspólnym czynnikiem
- Regularność struktury macierzy można wykorzystać w algorytmie numerycznym rozwiązującym problem dla uproszczenia/przyśpieszenia obliczeń