Pakiety matematyczne MAT1349 - 2021

Lista 2: Układy dynamiczne i symulacje sekwencyjne

1. **Odwracanie funkcji.** Załóżmy, że ciągła funkcja f jest rosnąca na danym odcinku $[a, b]$. W takiej sytuacji odwrotność funkcji f^{-1} możemy opisać jako $f^{-1}(y) = \max\{x \in [a, b] \colon f(x) \leq y\} = \min\{x \in [a, b] \colon f(x) \geq y\}$.

   Napisz algorytm, który sekwencyjnie szuka owego minimum/maksimum i na tej podstawie szacuje $f^{-1}(y)$. Dla wybranych prostych f zweryfikuj jego dokładność. Sprawdź, co będzie się dziać dla f niespełniających powyższych założeń.

2. **Modele populacyjne.** Załóżmy, że $t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ to chwile czasu co określoną jednostkę (np. 1 dzień), a N_t odpowiada liczebności pewnej populacji w momencie t. Dla różnych warunków początkowych N_0 oraz parametrów przeanalizuj zachowanie modeli zadanych regułami:

   a) **Dyskretny model wykładniczy (dyskretny model Malthusa).**

   $$N_{t+1} = (1 + r)N_t$$

   b) **Dyskretny model logistyczny (dyskretny model Verhulsta).**

   $$N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{L}\right)$$

   c) **Model Rickera.**

   $$N_{t+1} = \frac{N_t}{a + bN_t}, \quad a = (1 + r)^{-1}, b = \frac{1 - a}{L}$$

   Czym różni się zachowanie tych modeli? Jakie jest znaczenie ich parametrów?

3. **Chaos oraz bifurkacja.** Układ dynamiczny z zad. 2 punktu b) można bez utraty ogólności sprowadzić do postaci

   $$N_{t+1} = \lambda N_t(1 - N_t).$$

   Wyjaśnij dlaczego.

   a) Sprawdź stabilność symulacji dla małych (poniżej 3) i dużych (blisko 4) wartości λ. W tym celu podczas iteracji celowo zaokrąglij N (wystarczy pojedynczy raz) np. do 3 miejsca po przecinku. Sprawdź też, czy użyty typ zmiennych (`Float16`, `Float32`, `Float64`, `BigFloat`) wpływa na wyniki. W **ciele funkcji** typ zmiennej możemy deklarować składnią `x::Float16 = 42.0`.

b) Stwórz tzw. *wykres bifurkacyjny*, w którym na osi x będą użyte w symulacji $\lambda \in [2.5, 4]$, a na osi y zbiory wartości osiąganych przez N_t dla odpowiednio dużych t, tzn. dla każdego λ pomijamy odpowiednią dużą liczbę początkowych iteracji, po czym nanosimy jako punkty na wykresie pewną ilość następnych. Omów, co obserwujemy.

4. **Kasyno.** Załóżmy, że odbywasz grę hazardową polegającą na rzutach symetryczną monetą, w których zależności od obstawionego wyniku wygrywasz lub przegrywasz postawioną stawkę. Znana jest następująca „błyskotliwa" strategia - po każdym rzucie stawiasz 2 razy więcej i przerywasz grę po pierwszej wygranej. Sprawdź, że strategia ta niestety nie działa, gdy nie masz dostępu do nieskończonego kredytu.

5. **Zaraza. Ile jeszcze?** W elementarnym modelu rozwoju choroby zakaźnej stosowanym w epidemiologii przyjmujemy, że mając zarażone N_t osobników, w każdej jednostce czasu każdy zarażony osobnik z prawdopodobieństwem p zdrowieje (przez co rozumiemy, że osiąga stan, w którym przestaje zakażać i zagrażać innym), ale też z prawdopodobieństwem q zaraża nowego osobnika. Liczbę $R = (1-p)(q+1)$ nazywamy *współczynnikiem reprodukcji.*

   Przeprowadź analizę dynamiki tego modelu w zależności od p, q, R podobną do tej z zad. 2. Ponieważ rozwój liczby zakażonych jest tu w pewnym stopniu losowy warto rozpatrzyć średnią liczbę zakażonych.

   Spróbuj uwzględnić czynnik odporności populacji, na skutek której próba zarażenia może się nie udać w stopniu zależnym od tego jaka część populacji została zaszczepiona/uodporniła się na skutek wcześniejszego przejścia choroby.

   Uwaga: Do asymetrycznych rzutów monetą można wykorzystać wyrażenie `rand() < p`, czy to jasne dlaczego?