Pakiety matematyczne MAT1349 - 2021

Lista 8: Optymalizacja

1. **Maksima i minima funkcji wielu zmiennych.** Znajdź minima i maksima zadanych funkcji na podanych obszarach

   a) $f(x, y) = 2x + y$, obszar między krzywymi $y = x^2 + 3x - 5, y = -(x + 1)^2 + 1$;

   b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ obszar $x^2y^2 \geq 1$;

   c) $f(x, y) = (x + y)^2$ obszar to część wspólna elipsy $x^2 + 2y^2 \leq 1$ oraz tej samej elipsy obróconej o $\pi/4$ prawoskrętnie.

   Zaznacz oszacowane punkty na wykresach funkcji.

   Opcjonalne: Sprawdź też dla wybranych przykładów z listy standardowych funkcji do testowania optymalizacji.

2. **Łańcuch.** Oblicz numerycznie, jaki kształt przyjmuje łańcuch zawieszony luźno za prawy i lewy koniec. Łańcuch składa się z n identycznych sztywnych ogniw długości 1. Jego kształt możemy opisać tablicą współrzędnych łączeń ogniw $x_k, y_k, k \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Podwieszamy go w punktach $x_1 = -L/2, y_1 = 0, x_{n+1} = L/2, y_{n+1} = 0$, oczywiście $L \leq n$.

   Napisz odpowiednie ograniczenia na x_k, y_k po czym znajdź kształt łancucha wiedząc, że minimalizuje on **łączną** grawitacyjną energię potencjalną. Jak wiemy dla punktu blisko powierzchni Ziemi wynosi ona mgh.

   Opcjonalne: Dla łańcucha o długościach ogniw dążących do 0 (innymi słowy to luźny elastyczny sznur) znamy dokładny wynik analityczny. Jest nim funkcja postaci $a \cosh(x/a) + b$. Dofituj ją do znalezionych współrzędnych.

3. **Maksymalna wiarygodność.** Korzystając z pakietu `Distributions` wygeneruj ciągi zmiennych dla podanych niże rozkładów o wybranych przez ciebie parametrach. Następnie zasymuluj sytuację, że są to dane rzeczywiste, tzn. nie znamy parametrów rozkładu i staramy się je numerycznie oszacować (*wyestymować*) korzystając z *metody maksymalnej wiarygodności* (*maximal likelihood*).

   Załóżmy, że losujemy daną X z prawdopodobieństwem zadanym funkcją $\Pr(X = k) = p(k)$ zależną od pewnych parametrów rozkładu. Wtedy, dla ciągu niezależnie losowanych zmiennych prawdopodobieństwo się mnoży

$$\Pr(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) = \prod_{j=1}^{n} p(k_j).$$

   Metoda maksymalnej wiarygodności polega na tym, że kiedy znamy wylosowane wartości $X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots$, to szukamy wartości parametru/ów, dla którego prawdopodobieństwo (czyli powyższy iloczyn) jest maksymalne. Rozkłady:

   - Poisson(λ), parametr to $\lambda \geq 0$,

- Exponential(λ), parametr to $\lambda \geq 0$,
- Bernoulli(p), paramter to $0 \leq p \leq 1$,
- *Opcjonalne:* Beta(α, β), parametry to $\alpha, \beta > 0$.

Postać $p(k)$ sczytaj z tablic matematycznych lub użyj komendy `pdf` z `Distributions`. Przykładowe dane są na http://prac.im.pwr.edu.pl/ slezak/pm21/dataML.jld2.

Uwaga: Problem jest nieliniowy. Ponieważ $p(k)$ łatwo przyjmuje wartości bliskie zeru, powyższy iloczyn bywa niestabilny numerycznie. Aby tego uniknąć, najczęściej rozważa się jego logarytm, tj. $\sum_{j=1}^{n} \ln p(k)$.