



Politechnika Wrocławska

Wykonawcy: Julia Grzegorzewska 262314, Wiktoria Fimińska 262283

Prowadzący: dr Michał Balcerek

Termin zajęć: Wtorek 9:15

Symulacje komputerowe laboratorium

Proces ryzyka i ruch Browna

26 czerwca 2022

Spis treści

1. Zadanie 1	3
1.1. Wstęp	3
1.2. Teoria	3
1.3. Obliczenia i wyniki	3
1.3.1. Rozkład X_i	3
1.3.2. Estymowanie pozostałych parametrów	5
1.3.3. Symulowanie procesu Ryzyka	7
1.3.4. Prawdopodobieństwo ruiny	8
1.4. Podsumowanie	9
2. Zadanie 2	10
2.1. Wstęp	10
2.2. Teoria	10
2.3. Obliczenia i wyniki	11
2.3.1. Estymowanie średniego czasu wyjścia z przedziału	11
2.3.2. Prawdopodobieństwo wyjścia przez b	12
2.4. Podsumowanie	12

1. Zadanie 1

1.1. Wstęp

Celem zadania jest dopasowanie modelu klasycznego procesu Ryzyka do posiadanego zbioru danych oraz oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny otrzymanego procesu dla skończonego oraz nieskończonego horyzontu czasowego. Zbiór danych zawiera 50 trajektorii pewnego procesu, wysymulowanego z krokiem czasowym $h = 10^{-2}$ na odcinku $[0, 100]$. Kapitał początkowy wynosi 50.

1.2. Teoria

Proces Ryzyka to proces stochastyczny opisujący kapitał firmy ubezpieczeniowej. Wyraża się następującym wzorem:

$$R(t) = u + c(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdzie $u > 0$ to kapitał początkowy, $c(t)$ to zazwyczaj funkcja deterministyczna oznaczająca premię, czyli przychody ze sprzedaży polis, X_i to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie reprezentujące wysokość wypłacanych odszkodowań oraz $N(t)$ to jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, który zlicza ile szkód pojawiło się do momentu t .

Jednorodny proces Poissona to proces stochastyczny $N(t)$ spełniający następujące warunki:

1. $N(0) = 0$;
2. $N(t)$ ma niezależne przyrosty;
3. $N(t)$ ma stacjonarne przyrosty;
4. $N(t) \sim Poiss(\lambda t)$.

Test Kołmogorowa-Smirnowa to nieparametryczny test statystyczny używany do testowania zgodności rozkładu, czyli sprawdzania, czy rozkład pewnej zmiennej losowej różni się od założonego rozkładu teoretycznego. Oparty jest na dystrybucji empirycznej $F_n(x) = \frac{\#\{x_i \leq x\}}{n}$, gdzie n to długość próby. W *Pythonie* przeprowadza się go za pomocą funkcji `scipy.stats.kstest`, która zwraca między innymi p-wartość, na podstawie której przyjmuje się (p-wartość > 0.1) lub odrzuca (p-wartość < 0.01) zakładaną hipotezę o równości rozkładów. W przypadku, gdy $0.01 < \text{p-wartość} < 0.1$ decyzja zależy od preferencji.

1.3. Obliczenia i wyniki

1.3.1. Rozkład X_i

Aby dopasować proces Ryzyka do posiadanych danych należy najpierw znaleźć rozkład zmiennych X_i , korzystając z poniższego algorytmu:

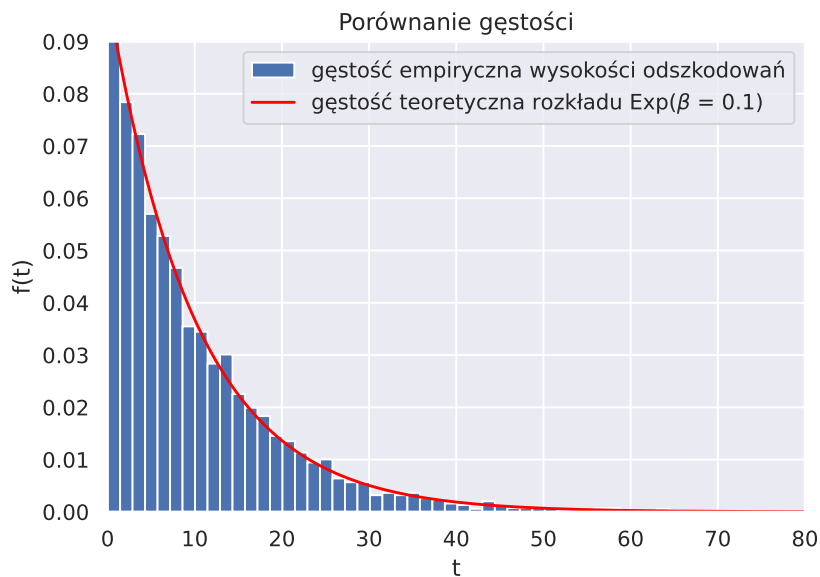
Algorytm:

- 1.) stwórz pustą listę
- 2.) za pomocą pętli szukaj w każdej trajektorii takich danych, że $y_{j+1} \neq y_j + c \cdot h$, $j = 1, \dots, 1000$, gdzie y_j to kolejne punkty trajektorii, c to premia, natomiast h to krok czasowy równy 10^{-2}
- 3.) jeśli punkt 2.) prawdziwy to dodaj do stworzonej listy różnicę $y_j - y_{j+1} + c \cdot h$
- 4.) zwróć stworzoną listę

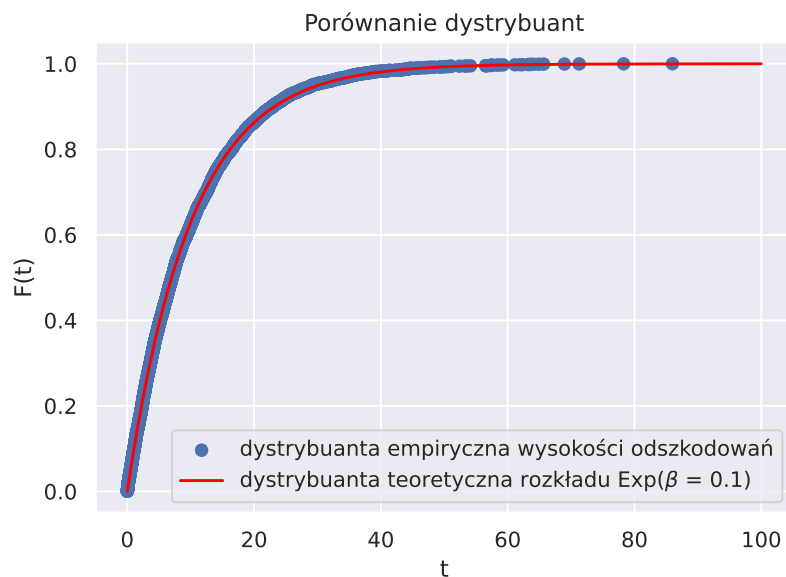
Premia c jest współczynnikiem funkcji liniowej występującej w trajektorii procesu Ryzyka,

więc może być wyliczona jako różnica wartości pomiędzy dwoma punktami podzielona przez odległość między nimi. Rozkład X_i zobrazowano za pomocą wykresów gęstości, dystrybuanty oraz kwantylowego, a następnie zweryfikowano założoną hipotezę o postaci odpowiadającego mu rozkładu teoretycznego za pomocą testu Kołmogorowa-Smirnowa.

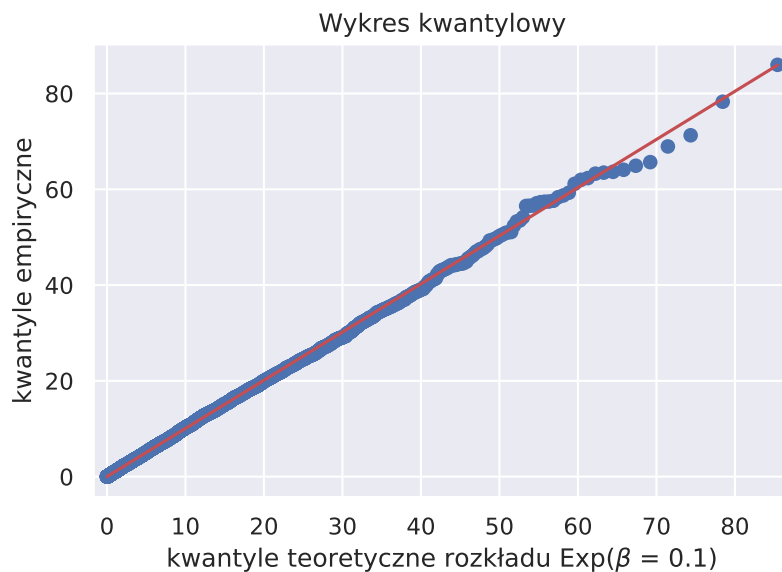
Prezentując wysokości wypłacanych odszkodowań na histogramie (rysunek 1), można zauważyć, że przypomina on gęstość rozkładu wykładniczego. Aby określić parametr tego rozkładu, wystarczy policzyć średnią analizowanych zmiennych i wziąć jej odwrotność. Wyniosła ona około 10, a więc hipotezą jest, że zmienne X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem $\beta = 0.1$. W celu wizualnego sprawdzenia poprawności hipotezy naniesiono na histogram gęstość postulowanego rozkładu, a także wykonano teoretyczny i empiryczny wykres dystrybuanty (rysunek 2) oraz wykres kwantylowy (rysunek 3).



Rysunek 1: Histogram wysokości wypłacanych odszkodowań



Rysunek 2: Dystrybuanta wysokości wypłacanych odszkodowań



Rysunek 3: Wykres kwantylowy wysokości wypłacanych odszkodowań

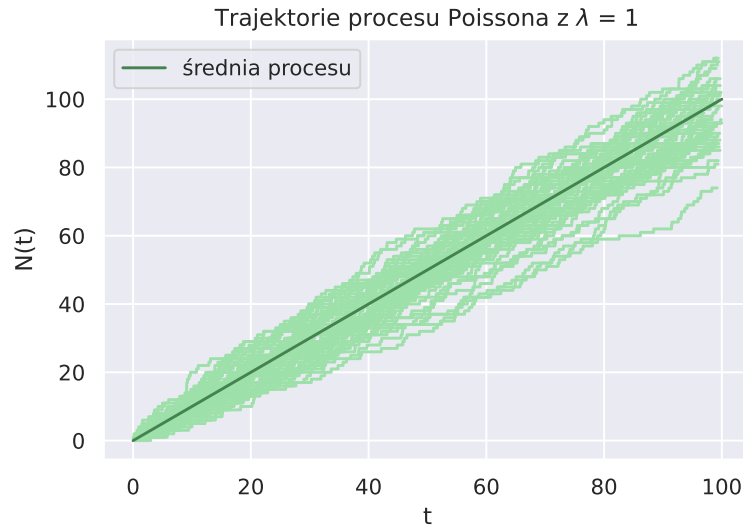
Zaprezentowane wykresy sugerują poprawność założonej hipotezy o pochodzeniu zmiennych X_i z rozkładu wykładniczego o średniej równej 10, jednak aby precyzyjniej zweryfikować tę hipotezę wykonano test Kołmogorowa-Smirnowa za pomocą funkcji `scipy.stats.kstest` i uzyskano p-wartość równą około 0.37, co zdecydowanie pozwala na przyjęcie hipotezy, ponieważ wartość ta jest większa niż 0.1.

1.3.2. Estymowanie pozostałych parametrów

Aby móc dopasować model Ryzyka do posiadanych danych należy także wyestymować pozostałe parametry tj. λ oraz θ , gdzie $\lambda > 0$ to intensywność jednorodnego procesu Poissona, a $\theta > 0$ jest narzutem, czyli parametrem odpowiedzialnym za wysokość premii. Wiadomo, że λ jest parametrem rozkładu wykładniczego, z którego pochodzą czasy oczekiwania T_i na kolejny skok w jednorodnym procesie Poissona oraz że średnia tych czasów jest równa $\frac{1}{\lambda}$. Wystarczy więc wyliczyć tę średnią. Natomiast aby wyznaczyć zmienne T_i należy odejmować kolejno momenty skoków w procesie Poissona, które pokrywają się z momentami występowania zmiennych X_i , czyli z momentami wypłacania odszkodowań.

Obliczona średnia z czasów oczekiwania na kolejny skok wyniosła około 1, a więc parametr λ wynosi $\frac{1}{1} = 1$. Aby sprawdzić poprawność otrzymanego parametru przeprowadzono ponownie test Kołmogorowa-Smirnowa. Otrzymana p-wartość wyniosła około 0.2, co zdecydowanie pozwala przyjąć dobrany rozkład.

Wykonano także wykres 50 trajektorii jednorodnego procesu Poissona na odcinku $[0, 100]$ (rysunek 4). W momentach skoków, które pokrywają się z momentami występowania X_i wykonano wykres schodkowy, ponieważ proces Poissona jest procesem zliczającym i jego przyrost w momencie skoku zawsze wynosi 1. Naniesiono także na niego średnią procesa równą λt dla obliczonej wartości intensywności λ .



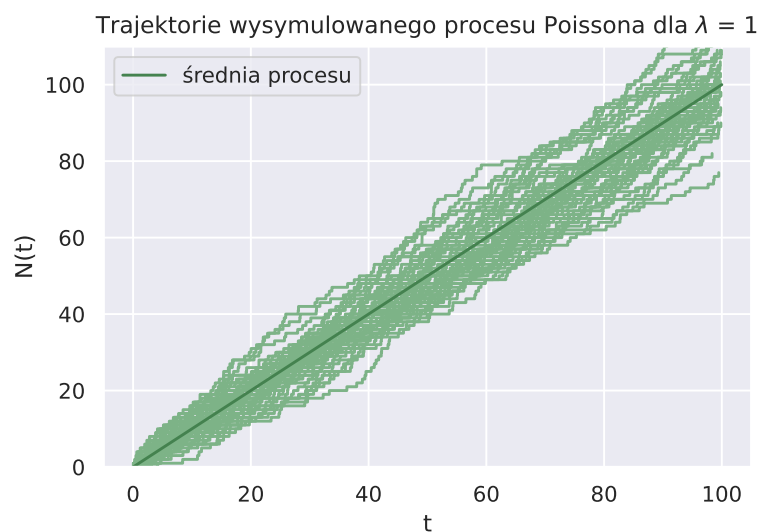
Rysunek 4: Trajektorie wygenerowanego za pomocą funkcji schodkowej procesu Poissona

Zaprezentowany wykres świadczy o poprawności wyestymowanej wartości parametru λ – średnia analizowanego procesu Poissona przebiega zgodnie z przypuszczeniem. By móc jeszcze bardziej upewnić się w przekonaniu, że wygenerowany proces Poissona ma parametr $\lambda = 1$, wykonano symulację tego konkretnego procesu, korzystając z następującego algorytmu:

Algorytm:

- 1.) stwórz pustą listę S_I
- 2.) wstaw $I = 0, t = 0$
- 3.) generuj $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$
- 4.) wstaw $t = t - \frac{1}{\lambda} \log(U)$
- 5.) jeśli $t > T$ stop, w przeciwnym razie $I = I + 1, S_I = t$
- 6.) wróć do 3.)
- 7.) zwróć otrzymaną listę S_I

Otrzymany przebieg procesu Poissona prezentuje się następująco:



Rysunek 5: Trajektorie wysymulowanego za pomocą algorytmu procesu Poissona

Zaprezentowane trajektorie zachowują się bardzo podobnie jak te wygenerowane wcześniej, co utwierdza w przekonaniu o poprawności obliczeń – proces Poissona ma parametr intensywności równy 1.

Aby wyznaczyć parametr θ należy skorzystać z następującego wzoru:

$$\theta = \frac{c}{\mu\lambda} - 1,$$

gdzie μ to średnia z X_i , λ to wyznaczona uprzednio intensywność jednorodnego procesu Poissona, a c jest już wcześniej wspomnianą premią, czyli współczynnikiem funkcji liniowej występującej w trajektorii Procesu ryzyka, który może być wyliczony jako różnica wartości pomiędzy dwoma punktami podzielona przez odległość między nimi. Podstawiając otrzymane wyniki do wzoru otrzymuje się

$$\theta = \frac{15}{10 \cdot 1} - 1 = 0.5.$$

1.3.3. Symulowanie procesu Ryzyka

Po wyznaczeniu wszystkich potrzebnych do dopasowania modelu parametrów i rozkładów wysymulowano 100 trajektorii uzyskanego procesu Ryzyka za pomocą poniższego algorytmu:

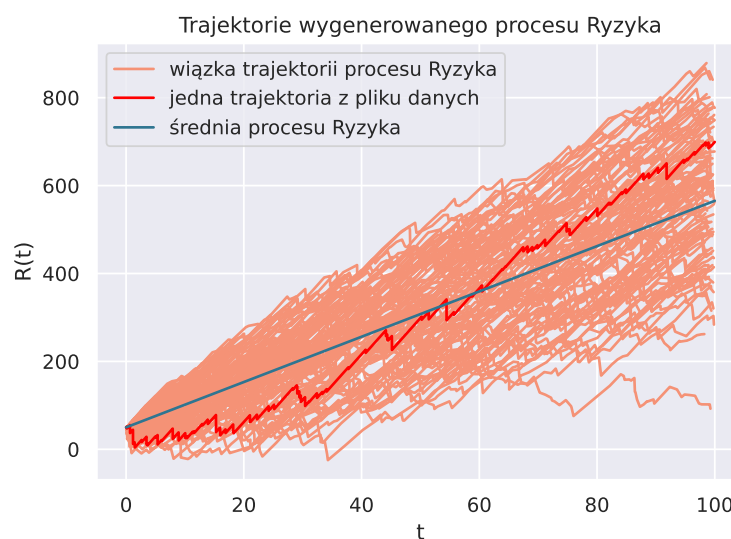
Algorytm:

- 1.) generuj $N(t)$ na $[0, T]$
- 2.) generuj $X_1, \dots, X_{N(t)}$
- 3.) wstaw $R(t) = u + c(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$

Wygenerowaną wiązkę trajektorii zestawiono ze średnią procesu równą

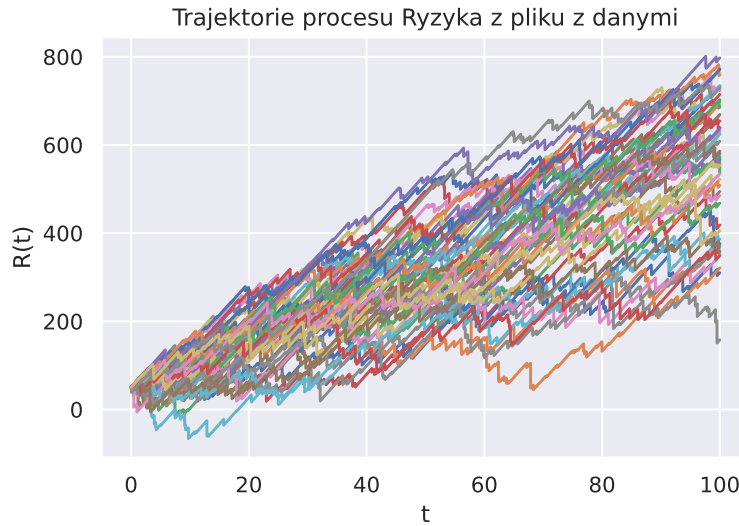
$$E[R(t)] = u + ct - \mu\lambda t$$

oraz zaznaczono również jedną trajektorię z posiadanego zbioru danych.



Rysunek 6: Porównanie 100 wygenerowanych trajektorii procesu Ryzyka z jego średnią teoretyczną oraz jedną trajektorią z pliku z danymi

Dla porównania wykonano również wykres trajektorii z pliku z danymi.



Rysunek 7: Wiązka trajektorii pochodzących z pliku z danymi

Przedstawione wykresy trajektorii świadczą o poprawności dopasowania odpowiedniego procesu Ryzyka do posiadanych danych. Oba zestawy trajektorii prezentują się bardzo podobnie. Ponadto wyliczona średnia procesu przebiega zgodnie z przypuszczeniami przez środek tychże trajektorii. Także jedna trajektoria z pliku danych pokrywa się z wygenerowanymi. Otrzymaliśmy zatem proces Ryzyka z parametrami $u = 50, c = 15, X_i \sim \text{Exp}(0.1)$ oraz intensywności procesu Poissona $\lambda = 1$.

1.3.4. Prawdopodobieństwo ruiny

Kolejnym etapem zadania jest oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny otrzymanego procesu Ryzyka. Prawdopodobieństwo to dla skończonego horyzontu czasowego T wyraża się następującym wzorem:

$$\Psi(u, T) = P(\tau(u) < T),$$

czyli jest to prawdopodobieństwo tego, że ruina, inaczej bankructwo, nastąpiła przed czasem T . Występujące we wzorze $\tau(u)$ jest momentem ruiny, czyli najmniejszym momentem czasowym takim, że proces Ryzyka spada poniżej 0, $\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}$. Jest to zmienna losowa. Aby je oszacować należy wykorzystać metodę Monte Carlo, czyli wielokrotnie, np. 1000 razy, sprawdzić ile trajektorii wygenerowanego procesu Ryzyka spadło poniżej zera i podzielić tę ilość przez liczbę powtórzeń, czyli 1000. Algorytm wygląda następująco:

Algorytm:

- 1.) generuj N trajektorii $R^{(1)}(t), \dots, R^{(N)}(t)$ procesu Ryzyka na $[0, T]$
- 2.) wyznacz $n = \{i \in \{1, \dots, N\} : \min_{t \in [0, T]} R^{(i)}(t) < 0\}$
- 3.) wstaw $\Psi(u, T) = \frac{n}{N}$

Symulacje wykonano dla dwóch horyzontów czasowych $T_1 = 100, T_2 = 200$ oraz dla kapitału początkowego $u = 50$. Dla obu horyzontów prawdopodobieństwo to wychodzi bardzo zbliżone, $\Psi(50, 100) \approx 0.1$, natomiast $\Psi(50, 200) \approx 0.09$. Może to świadczyć, o tym, że bankructwo, jeśli następuje, to następuje w początkowej fazie procesu i dlatego też nie zależy od horyzontu czasowego. W celu sprawdzenia poprawności otrzymanego wyniku policzone zostało prawdopodobieństwo ruiny dla danych z pliku dla $T = 100$. Wyniosło ono 0.08, a więc jest zbliżone do poprzednich wyników.

Następnie oszacowano prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym czasie korzystając ze wzoru Pollaczka–Chinczyna, który wygląda następująco;

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n \cdot B_n(u),$$

gdzie $B_n(u) = P(Y_1 + \dots + Y_n > u)$ oraz Y_i to niezależne zmienne losowe z rozkładu o gęstości $f(x) = \frac{1-F_{X_i}(x)}{\mu}$ dla $EX_i = \mu$. W symulacji tego prawdopodobieństwa korzysta się z faktu, że $\Psi(u) = P(Y_1 + \dots + Y_K > u)$, gdzie $K \sim Geo\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$, więc $P(K = i) = \frac{\theta}{1+\theta} \left(1 - \frac{\theta}{1+\theta}\right)^i$ dla $i = 0, 1, \dots$. Dokładny algorytm symulacji prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym czasie wygląda więc następująco:

Algorytm:

- 1.) utwórz listę Z o długości N składającą się z zer
- 2.) utwórz pętlę od 1 do N
- 3.) generuj $K \sim Geo\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$
- 4.) generuj Y_1, \dots, Y_K iid o gęstości $f(x) = \frac{1-F_{X_i}(x)}{\mu}$
- 5.) jeśli $Y_1 + \dots + Y_K > u$ wstaw $Z(i) = 1$
- 6.) zakończ pętlę
- 7.) wstaw $\Psi(u) = \frac{Z(1)+\dots+Z(N)}{N}$

W przypadku, gdy $X_i \sim Exp(\beta)$, to Y_i również mają rozkład wykładniczy z parametrem β , ponieważ

$$f(x) = \frac{1 - (1 - e^{-\beta x})}{\frac{1}{\beta}} = \beta e^{-\beta x}.$$

Po przeprowadzeniu symulacji dla otrzymanego wcześniej procesu Ryzyka otrzymano wynik, że prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym czasie wynosi $\Psi(u) \approx 0.124$. Wynik ten porównano z wartością teoretyczną, dla której wzór analityczny to:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\beta u \frac{\theta}{1+\theta}}.$$

Podstawiając uprzednio otrzymane wartości parametrów otrzymuje się

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+0.5} e^{-0.1 \cdot 50 \cdot \frac{0.5}{1+0.5}} \approx 0.126,$$

czyli wynik bardzo zbliżony do tego otrzymanego symulacyjnie, co potwierdza jego poprawność. Analizując otrzymane prawdopodobieństwa ruiny dla skończonego i nieskończonego czasu można zauważyć niewielką różnicę pomiędzy nimi, co może świadczyć o tym, że odcinek $[0, 100]$ jest kluczowy dla tego procesu. W nieskończonym czasie zauważalny jest lekki wzrost prawdopodobieństwa, co wskazuje na występowanie rzadkich przypadków ruiny w późniejszej fazie procesu.

1.4. Podsumowanie

Celem zadania było dopasowanie modelu klasycznego procesu Ryzyka do posiadanych danych, a następnie oszacowanie prawdopodobieństwa Ruiny w skończonym i nieskończonym czasie. Aby to osiągnąć wyznaczono rozkład zmiennych X_i , będących wysokościami wypłacanych odszkodowań. Okazało się, że są to zmienne z rozkładu wykładniczego o średniej równej 10. Następnie wyestymowano, że parametr intensywności jednorodnego procesu Poissona wynosi

$\lambda = 1$ oraz parametr odpowiedzialny za wysokość premii jest równy $\theta = 0.5$. Pozwoliło to na wygenerowanie trajektorii procesu Ryzyka i stwierdzenie, że są one zbliżone do trajektorii procesu z pliku z danymi. W dalszej kolejności oszacowano i porównano prawdopodobieństwa ruiny otrzymanego procesu dla różnych horyzontów czasowych oraz stwierdzono, że najbardziej istotnym odcinkiem dla tego zagadnienia był odcinek $[0, 100]$, dla którego prawdopodobieństwo to wyniosło około 0.1. Wszystkie otrzymane wyniki są porównywalne z wynikami dla danych z pliku, więc można na tej podstawie stwierdzić, że symulacje i obliczenia zostały wykonane poprawnie.

2. Zadanie 2

2.1. Wstęp

Celem tego zadania jest oszacowanie średniego czasu wyjścia z przedziału $[a, b]$, bazując na procesie, który jest ruchem Browna oraz prawdopodobieństwa, że wyjście to nastąpiło przez górną granicę. Należy rozważyć odpowiednie granice dolną a i górną b oraz pamiętać o dyskretyzacji.

2.2. Teoria

Proces Wienera, zwany czasem ruchem Browna, jest jednym z najbardziej znanych procesów o rozkładach skończenie wymiarowych - *gaussowskich* i dodatkowo szczególnym przypadkiem procesu Levy'ego. Wykorzystuje się go w matematyce teoretycznej i stosowanej, w fizyce, a także w finansach. Jest to proces stochastyczny $(B_t)_{t \geq 0}$ spełniający następujące warunki:

1. $B(0) = 0$;
2. $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$;
3. ma niezależne i stacjonarne przyrosty;
4. ma ciągłe trajektorie.

W zadaniu tym stosuje się oznaczenie procesu Wienera startującego z $x \in \mathbb{R}$ jako:

$$B_t^x = B_t^0 + x,$$

gdzie B_t^0 to klasyczny ruch Browna startujący z 0.

Do generowania tego procesu wykorzystuje się jego własność $\frac{1}{2}$ -samopodobieństwa, która wyraża się następującym wzorem:

$$B(ct) \stackrel{\text{def}}{=} c^{\frac{1}{2}} B(t), \quad \forall c > 0.$$

Algorytm do generowania procesu Wienera wygląda tak:

Algorytm:

- 1.) ustal horyzont czasowy T oraz przyrost czasu Δ
- 2.) wstaw $B(t_0 = 0) = 0$
- 3.) generuj $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- 4.) wstaw $B(t_{i+1}) = B(t_i) + \Delta^{\frac{1}{2}} X_i$
- 5.) jeśli $t_i \geq T$ zatrzymaj, jeśli nie to $i = i + 1$ i wróć do 3.)

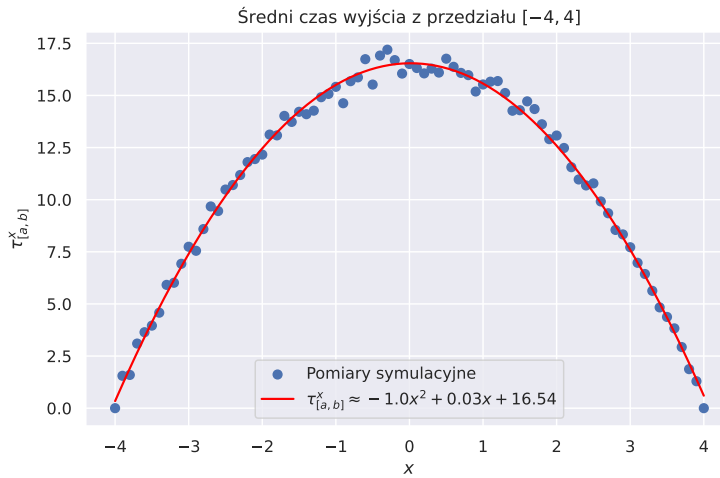
2.3. Obliczenia i wyniki

2.3.1. Estymowanie średniego czasu wyjścia z przedziału

Czas wyjścia z przedziału $[a, b]$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$\tau_{[a,b]}^x \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : B_t^x \notin [a, b]\}.$$

Dla uproszczenia analizy przyjęto $a = -b$. Wybrano przedział $[-4, 4]$, ponieważ jest on wystarczający do pokazania relacji, a jednocześnie symulacje nie trwają zbyt długo. Estymowanie średnich czasów wyjścia zostało wykonane za pomocą metody Monte Carlo dla różnych parametrów x , od których rozpoczynały się trajektorie procesu. Gdy wychodził on poza zadany przedział, zapisywano ten moment, a na końcu wyniki uśredniano przy pomocy biblioteki *numpy* w *Pythonie*. Tak uzyskany rezultat można zaobserwować na wykresie, gdzie przedstawiono zależność parametru x od szukanego czasu wyjścia.



Rysunek 8: Średni czas wyjścia trajektorii procesu Wienera z przedziału $[a, b]$ wraz z dopasowaną parabolą

Bardzo łatwo dostrzec, że punkty układają się symetrycznie względem $x = 0$. Analizując kształt wykresu można wysnuć wniosek, że widoczna zależność jest kwadratowa. Aby zbadać tę hipotezę wykorzystuje się funkcję *optimize.curve_fit*, która dla zadanych parametrów a, b, c paraboli $y = ax^2 + bx + c$ wylicza ich optymalne wartości, wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów, którą można opisać poniższym równaniem

$$\min_{a,b,c} \sum_{i=1}^{\text{ilość próbek}} (\tau_{[a,b]}^{x_i} - (ax_i^2 + bx_i + c))^2.$$

Użyte parametry to: $[-1.00, 0.03, 16.54]$. Otrzymana krzywa została nałożona na wykres (rysunek 8) dla porównania z danymi symulacyjnymi. Zależność między punktami a wykresem wydaje się poprawna. Widać, że w przypadkach granicznych, tj. gdy punkt startowy x jest równy granicy przedziału a lub b (w tym przypadku $x = -4$ lub $x = 4$) wtedy czas opuszczenia jest niemalże równy 0. Wynika to z charakterystyki ruchu Browna. Dla przedziału $[0, \epsilon]$, $\epsilon \ll 1$ proces Wienera przecina swój punkt startowy nieskończoną ilość razy (wynika to z samopodobieństwa procesu). Dlatego $\tau_{[a,b]}^x$ następuje prawie natychmiast.

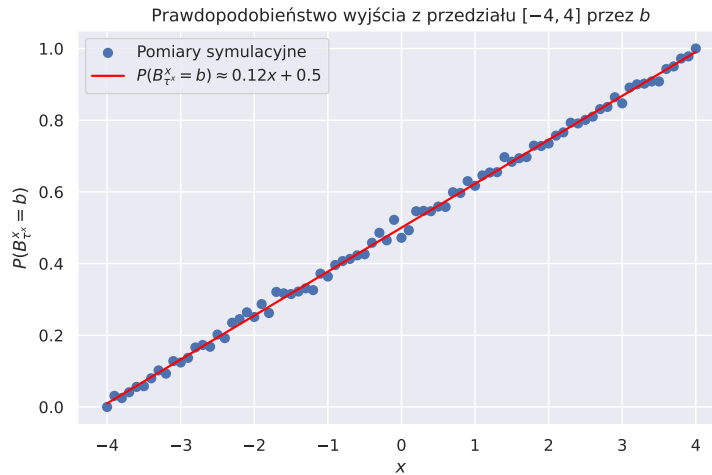
Wyniki są najmniej stabilne w okolicy punktu $x = 0$, ponieważ punkt startowy procesu Wienera jest wtedy najdalej oddalony od granic przedziału. Proces musi wtedy wygenerować średnio dłuższą trajektorie (na dłuższym horyzoncie czasowym), aby nastąpił moment $\tau_{[a,b]}^0$, co niesie za sobą większą niepewność.

Analizując uzyskane parametry a, b, c :

- $a = -1$ implikuje, że wraz ze wzrostem lub zmniejszeniem x , moment $\tau_{[a,b]}^x$ następuje szybciej w zależności kwadratowej.
- $b = 0.03$ jest bliskie zeru, co wynika z symetrii procesu Wienera. Zwiększając ilość kroków Monte Carlo można uzyskać wartość jeszcze bardziej bliską zeru.
- $c = 16.54$ jest wartością zbliżoną do 4^2 , czyli do odchylenia przedziału od punktu symetrii (w tym przypadku $x = 0$). Ponownie, zwiększając ilość kroków Monte Carlo można uzyskać wartość jeszcze bardziej bliską 16. Wynik ten mówi, że startując z punktu symetrii ($x = 0$), moment opuszczenia przedziału $[a, b]$ przez proces Wienera nastąpi średnio po wielkości odchylenia przedziału od punktu symetrii podniesionego do kwadratu.

2.3.2. Prawdopodobieństwo wyjścia przez b

Aby obliczyć prawdopodobieństwo wyjścia przez górną granicę przedziału $P(B_{\tau^x}^x = b)$ należało odróżnić od siebie wyjścia przez a oraz wyjścia przez b . Następnie ponownie dobrać krzywą dopasowania, którą uzyskuje się analogicznie jak przy estymowaniu średniego czasu wyjścia - poprzez metodę najmniejszych kwadratów. Tym razem krzywa jest prostą $y = ax + b$ o parametrach $[0.12, 0.5]$. Prawdopodobieństwo wyjścia przez granicę górną, jak i dolną są sobie równe. Jest to spowodowane tym, że ich odległości od $x = 0$ są takie same. Wiadome jest też, że jeśli założono, że dla $b \geq 4$ prawdopodobieństwo ma przyjmować wartość 1, to funkcja musiała być rosnąca, a co za tym idzie współczynnik przy x krzywej musiał być dodatni. Im bliżej jest się punktu b , tym prawdopodobieństwo wyjścia z przedziału jest większe.



Rysunek 9: Prawdopodobieństwo wyjścia trajektorii procesu Wienera z przedziału $[a, b]$ przez b wraz z dopasowaną prostą

2.4. Podsumowanie

Do osiągnięcia uzyskanych wyników wykorzystano własności procesu Wienera oraz do oszacowania prawdopodobieństwa wykorzystano metodę Monte Carlo. Przedział został wybrany tak, aby odzwierciedlał odpowiednio otrzymane wyniki. Do dobierania współczynników dopasowanych krzywych skorzystano z metody najmniejszych kwadratów i zgadzają się one z założeniami. Intuicyjny jest fakt, że w przypadku średnich czasów wyjścia oddalanie się od punktów granicznych wydłuża czas opuszczenia przedziału - stąd charakter danych jest paraboliczny. Podobnie w przypadku prawdopodobieństwa wyjścia z przedziału. Gdyby granicą było tylko a , a nie samo b , to prosta byłaby symetryczna, ale malejąca.