Metodi di Integrazione

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx$$

Se il grado di *N(x)* $\geq$ *D(x)* si effettua la divisione tra polinomi, in seguito indichiamo con Q(x) il risultato della divisione e con R(x) il resto. A questo punto possiamo dire che:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\, dx$$

Se invece il grado di N(x) < *D(x),* scomponiamo *D(x)* e se $\Delta > 0$:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \frac{A}{x\ - x1} + \frac{B}{x - x2} \dots$$

Se invece $\Delta = 0$ con molteplicità algebrica n:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \frac{A}{(x - x1)^1} + \frac{B}{(x - x1)^2} \dots + \frac{C}{(x - 1)^n}$$

Se invece $\Delta < 0$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \frac{Ax + B}{D(x)}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\left[\int f(x)\right] = \int f\big(g'(t)\big)\, dt$$

Numeri complessi

Questi numeri nascono dalla necessita di risolvere radici pari di numeri negativi. A questo proposito si introduce un'unità immaginaria chiamata $i = \sqrt{-1}$. Facendo questa uguaglianza abbiamo la possibilità di risolvere tutte le radici negative. Per esempio $\sqrt{-25} = (\sqrt{-1})(\sqrt{25})$.

La forma di un numero complesso si può scrivere in diverse forme:

1. **Algebrica**: Z = a (parte reale) + ib (parte immaginaria)
2. **Trigonometrica**: $Z = \rho (\cos\theta + i\sin\theta)$ dove ρ è $|Z|$ (modulo di Z) = $\sqrt{a^2+b^2}$

Formule **per conoscere l'angolo conoscendo a e b**:

- $\mathbf{Cos\theta} = a/\sqrt{a^2+b^2} = a/\rho$
- $\mathbf{Sin\theta} = b/\sqrt{a^2+b^2} = b/\rho$

Ovviamente riformulandole in modo opportuno di permettono di fare anche il contrario e di conoscere anche per esempio il valore della tangente

$\mathbf{Tg\theta} = (b/\rho) / (a/\rho)$

Nel campo dei numeri complessi si definisce **complesso coniugato** un numero complesso che differisce da un altro solo nel segno della parte immaginaria.

Operazioni:

- **Somma/Differenza** : Si effettuano le somme/differenze delle a e delle b.
- **Prodotto**: Si effettua il prodotto tra i due numeri.
- **Rapporto**: Si moltiplica il denominatore per il suo complesso in modo da avere un numero reale sotto la frazione.
- **Potenza**: Si eleva il modulo alla potenza e poi nella sua forma trigonometrica si moltiplica la radice per l'angolo.
- **Radice**: Si fa la radice del modulo e sempre nella forma trigonometrica a $(\theta + 2k\pi)/n$,dove n è la radice e k sono tutti i numeri da 0 a n-1;

Serie numeriche

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_n$

$a_1 = S_1$
$a_1 + a_2 = S_2$
$a_1 + \cdots + a_n = S_n$

Si definisce serie la sommatoria di una successione $\{a_n\}$ $n \in N$. Si indica con S_n la somma parziale della successione che parte da uno ed arriva a n. Il $\lim_{n\to\infty} Sn$ ovvero $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ equivale alla somma delle serie. Con il limite che può essere finito, infinito o indeterminato.

- Se è finito la serie si dice convergente, se il limite fa 0 inoltre la successione si dice infinitesima.
- Se è $\pm\infty$ la serie si dice divergente
- Se il limite non esiste si dice indeterminata

Teorema:
La condizione necessaria affinché la serie converga è che il suo termine generale sia infinitesimo.

Tralasciare un numero finito di termini in una successione non fa cambiare il carattere della serie.

Serie geometrica

$\sum x^n = 1 + x + x^2 \ldots + x^n$

Se converge allora sarà uguale ad $\frac{1}{1-x}$, se è uguale ad 1 allora sarà n + 1
- Converge se $|x| < 1$
- Diverge se $x \geq 1$
- Indeterminata se $x \leq -1$

Serie telescopica

$\sum = a_n - a_{n+k}$

Se il limite a_n esiste ed è finito allora la serie converge ed ha per somma $a_1 + \cdots + a_k$.
Un esempio è la serie $\frac{1}{n^2}(a_n) - \frac{1}{(n+2)^2}(a_{n+2} = a_{n+k})$ il suo limite fa 0 e quindi la sua serie converge.

Serie di Mengoli

$\sum = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

La somma di questa serie dato che ogni numero si semplifica con il successivo è quindi: $1 - \frac{1}{n+1}$, facendone poi il limite di questa osserviamo che fa 1 e di conseguenza converge. Questa è una tipologia di serie telescopica.

Proprietà delle serie numeriche

- Se due serie convergono anche la somma delle due converge
- Se almeno una delle due diverge, la serie diverge
- Se K è un numero reale e la serie $\sum a_n$, $\sum k \, x \, a_n$ hanno lo stesso carattere (divergenza o convergenza)
- Se la somma delle serie $\sum a_n$ è uguale ad L la seconda serie convergerà a k x L
- Per le serie vale la proprietà distributiva
- La proprietà associativa vale solo per le convergenti o divergenti.
- Il prodotto di due serie è diverso dalla serie formata dal prodotto dei valori.
- Una serie $\sum a_n$ a termini definitivamente non negativi ($a_n \geq 0$) converge o diverge ($+\infty$), non può essere indeterminata.

Serie armoniche e numeri primi.

$\sum(x) \frac{1}{n^x}$

La serie armonica generalizzata:
Converge per $x > 1$
Diverge invece per $x \leq 1$

Questa funzione è continua e derivabile infinite volte, inoltre si può scriver come prodotto di numeri primi

Serie numerica a termini positivi e criteri di confronto

Criterio condensazione Cauchy: Per serie a termini non negativi può:
- Converge positivamente
- Diverge positivamente

Sia $\{an\}$ $n \in N$ una successione di termini positivi e sia decrescente, allora $\sum a_n$ è convergente se solo se $\sum 2^n a_{2^n}$ è convergente.

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$, $\sum b_n$, *due serie con* $0 \leq a_n \leq b_n$

- Se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge
- Se $\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ diverge

Criterio degli infinitesimi

Siano $a_n \geq 0$ e Lim $n^p a_n = L$:

- Se $0 < L < +\infty$ allora: se $p > 1$ la serie converge , se $p \leq 1$ diverge
- Se $L = 0$ allora la serie converge se $p > 1$
- Se $L = +\infty$ allora la serie diverge se $p \leq 1$

Criterio del confronto asintotico

Siano $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ con $\frac{a_n}{b_n} = L$

- Se $0 < L < +\infty$ allora: $\sum a_n$, $\sum b_n$ o sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.
- Se $L = 0$ se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge
- Se $L = +\infty$ allora se $\sum b_n$ diverge allora $\sum a_n$ diverge

Criterio della radice

Sia $\sum a_n$ la serie di termine generale $a_n \geq 0$ e sia $Lim \sqrt[n]{a_n} = L$

- Se $L < 1$ allora la serie converge
- Se $L > 1$ allora la serie diverge

Criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ la serie di termine generale $a_n > 0$ e $Lim \frac{a_{n-1}}{a_n} = L$

- Se $L < 1$ allora la serie converge
- Se $L > 1$ allora la serie diverge
- $L = 1$ non da informazioni

Criterio di Raebe

Sia $\sum a_n$ di termine generale $a_n \geq 0$ e il $Lim\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$

- Se $L > 1$ allora la serie converge
- Se $L < 1$ allora la serie diverge

Serie assolutamente convergente solo se:

La serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente se risulta convergente la serie dei moduli a_n cioè $\sum |a_n|$
L'assoluta convergenza implica la convergenza ma ovviamente non il contrario.

Serie e segni alterni

$\sum (-1)^n an\ (an \geq 0)$

Criterio di Leibniz: Sia questa la serie a segni alterni con $Lim = 0$, $\{ a_n \}$ $n \in N$ e decrescente allora la serie converge.

TEOREMI ANALISI 1
GIULIO SACRESTANO

- Invertibilità Delle Funzioni Monotone

- Limitatezza delle successioni convergenti
- Unicità Del Limite
- Teorema Regolarità
- Teorma Permanenza del segno
- Teorema Bolzano-Weierstrass
- Teorema del confronto

- Punti di accumulazione

- Continuità Delle Funzioni Derivabili

- Teorema degli zeri
- Teorema Dei Valori Intermedi
- Teorema Weierstrass

- Terorema Fermat
- Teorema Di Rolle
- Teorema Di Lagrange e conseguenze
- Teorema di Cauchy

- Criterio Di Monotonia

- Intergrabilità secondo Riemann
- Teorema Della Media
- Teorma Fondamentale del Calcolo integrale con formula

INVERTIBILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

Data F(x) strettamente monotona, allora è invertibile.

Presi x1 e x2, appartenenti al dominio della funzione se x1 <x2 allora:

- F(x1) < F(x2) (funzione strettamente crescente)
- F(x1) > F(x2) (funzione strettamente decrescente).

Quindi, in entrambi i casi possiamo dire che, in una funzione strettamente monotona si avrà che con x1≠ x2 → F(x1) ≠ F(x2)
Ma questa non è altro che la definizione di funzione iniettiva, dunque è invertibile.

DEFINIZIONE LIMITE (TEOREMA PONTE)

$$\lim_{x \to x0} f(x) = l \;\Leftrightarrow$$

- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in X \setminus [\{x0\}] = 0 < |x - x0| < \; \delta$, |f(x) - l| < ε

- $\forall I \in I(l) \;\; \exists I \; I(x0)$: $\forall x \in X \; \cap \; [x0]$

UNICITÀ DEL LIMITE

Enunciato: Consideriamo una funzione f(x) con dom(f) e un punto di accomulazione x0 nel dominio. Se il $\lim_{x \to x0} f(x) = l \; \in R$ allora l è unico.

L'unica ipotesi della dimostrazione riguarda l'esistenza del limite che deve essere finito o infinito.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che il limite assuma almeno due valori distinti, l e m diversi tra loro, inoltre possiamo supporre m < l in modo che la differenza tra l ed m sia positiva.:

$$\lim_{x \to x0} f(x) = l; \;\; \lim_{x \to x0} f(x) = m, con \; l > m$$

A questo punto per giungere all'assurdo facciamo in modo che la ε assuma un valore: $0 < \; \varepsilon < \frac{l-m}{2}$, questo è lecito poiché abbiamo precedentemente supposto che l>m quindi quel rapporto è positivo. Dalla definizione di limite, per il valore di ε fissato riusciamo a determinare:

- |f(x)-m |< ε per ogni x ∈ I
- |f(x) - l| < ε per ogni x ∈ I'

I ∩ I' è un intorno di x0 dove valgono contemporaneamente le disequazioni:

$$\begin{cases} |f(x) - m| < \varepsilon \\ |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$

Che grazie alla teoria sulle disequazioni con valore assoluto diventa:

$$\begin{cases} m-\varepsilon < f(x) < m+\varepsilon \\ l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \end{cases}$$

Affinchè f(x) soddisfi il sistema dovrà dunque essere maggiore del max(m – ε, l- ε) e minore del min(m + ε , l + ε). Sempre considerando la relazione iniziale m < l allora avremo:

l – $\varepsilon < f(x) < m+\varepsilon$, da cui otteniamo l – $\varepsilon < m+\varepsilon$, da cui abbiamo $\varepsilon > \frac{l-m}{2}$, con questo siamo giunti ad un assurdo poichè avevamo posto $\varepsilon < \frac{l-m}{2}$

LIMITATEZZA DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI

Il teorema afferma che ogni successione convergente è limitata.

Una successione è limitata se $\exists M \in R\ tale\ che\ |a_n| < M\ \forall n\ \in N$

Dimostrazione:

La nostra ipotesi è quindi che la successione è convergente ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\ \in R$$

La nostra tesi è che la successione è limitata ovvero $\exists M > 0$ tale che $|a_n|$ < M, $\forall n\ \in N$

Partendo dalla tesi scriviamo la definizione di limite: Ora dato che possiamo scegliere arbitrariamente il valore di ε a patto che sia positivo poniamolo uguale ad 1 ed avremo: $|a_n$- l| < 1. Inoltre, partendo da $|a_n|$ = $|a_n + l - l|$ che per la disuguaglianza triangolare è ≤ $|a_n - l|$ + |l|≤ 1 + l. Ora se prendiamo M = max$\{a_1, a_2, \ldots a_{v,} 1 + |l|\}$ avremo$|a_n|$ < M per ogni n ∈ N ovvero che a_n è limitata.

TEOREMA REGOLARITÀ

Sia $(a_n)_n$ una succesione reale monotona. Allora esiste il $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in particolare se $(a_n)_n$ è:

- crescente il valore del limite coincide sup a_n
- decrescente il valore del limite coincide inf a_n.

Supponendo sia crescente

- Se sup a_n = L < $+\infty$
  a_n < L < L + ε $\forall n \in N$. Però $\exists n_0 \in N$: a_{n0} > L - ε Per ipotesi la successione è crescente quindi avremo $a_n \geq a_{n_0} \geq$ L$-\ \varepsilon\ \forall n > n0$, quindi $L-\ \varepsilon\ \ \leq a_n \leq L+\ \varepsilon\ \ \forall n > n0$ Dalla definizione si ha che $\lim\limits_{n\to\infty} an = L = \sup a_n$.

- Se invece sup a_n= + ∞ Allora per M ∈ R $\exists n0 \in N$: $a_{n0} > M$ e dato che la successione è crescente allora $a_n > a_{n0} > M \;\; \forall n >$ n0 quindi $\lim_{x\to\infty} a_n = +\infty = \sup a_n \;\Leftrightarrow\; \forall M \,\epsilon\, R \;\exists n0$: a_n>M, $\forall n > n_0$.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Consideriamo una funzione f(x) e un punto di accumulazione c per il dominio. Se il limite di x che tende a c è uguale a l, allora esiste un intorno di c contenuto nel dominio di f(x) in cui la funzione assume lo stesso segno del limite. Le ipotesi sono dunque l'esistenza del limite e che sia diverso da 0.

Dimostrazione:

Dalla definizione di limite, scelto qualsiasi ε positivo deve essere |f(x) - l| < ε, ovvero l - $\varepsilon < f(x) < l + \;\varepsilon$. Posto allora $\varepsilon = |l|$, abbiamo l - |l| < f(x) < l + |l|:

- se l> 0 allora 0 < f(x) < 2l
- se l < 0 allora 2l < f(x) < 0.

Corollario 1 : Se $a_n \geq 0 \;\forall n > v, v \,\epsilon\, R$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = l \geq 0$.

Dimostrazione per assurdo: Se l < 0 → esiste v1 : $a_n < 0, \forall n > v1$, preso M > max{v1,v} si ha che $a_n \geq\; 0\;\; che$ è $assurdo\ perch$è $an < 0$

Corollario 2: Se il lim a_n = a e lim b_n = b, $a_n \geq\;\; b_n \;\forall n > v \to a \geq b$.

Dimostrazione: $a_n - b_n \geq 0 \;\forall n > v \to\;\; (a - b \geq 0) \to a \geq b(corollario\ 1)$

TEOREMA DI BOLZANO WEISTRASS

Da ogni successione limitata se ne può estrarre una convergente.

TEOREMA DEL CONFRONTO

Siano h(x), f(x), g(x) tre funzioni definite in uno stesso intorno H di x0, escluso al più il punto x0. Se in ogni punto di H diverso da x0, risulata h(x)≤ f(x) ≤ g(x) e il limite delle due funzioni h(x) e g(x), per x che tende a x0, è uno stesso numero l, allora anche il limite di f(x) per x che tendea a x0 è uguale a l.

Dimostrazione:

Fissiamo $\varepsilon > 0$ a piacere. È vero che:

- |h(x) - l| < ε per ogni x $\epsilon\; I1 \cap H$ escluso al più x0(lim h = l).
- |g(x) - l| < ε per ogni x $\epsilon\; I2 \cap H$ escluso al piu x0 (lim g = l).

Le disuguaglianze valgono entrambe per ogni x appartenente all'intorno I = I1 ∩ I2, escluso al più x0.Quindi per ogni punto appartenente a questo intorno abbiamo:

l - ε < h(x) < l + ε

l - ε < g(x) < l + ε

Per l'ipotesi possiamo quindi scrivere:

l - ε < h(x) <f(x)<g(x)< l + ε che implica proprio |f(x) - l| < ε , che significa proprio che il suo limite è uguale agli altri.

SOTTOSUCCESSIONE

Si dice che b_n è una sottosucessione o successione estratta da a_n se esiste una successione strettamente cerscente k_n tale che $b_n = a_{k_n}$

TEOREMA WEIRSTRASS

Se f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a;b] allora essa assume, in tale intervallo, il massimo ed il minimo assoluto.

TERoREMA DEGLI ZERI

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] e negli estremi di tale interavallo assume valori di segno opposto allora esiste almeno un punto c]a;b[i cui f si annulla ossia f(c) = 0.

TEOREMA VALORI INTERMEDI

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] allora essa assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo ed il minimo.

Dimostrazione: presi x1,x2 tali che f(x1) = y1 e f(x2) = y2 supponiamo x1<x2 per ipotesi la funzione è continua in [a,b] quindi lo sarà anche nell' intervallo [x1,x2]. A questo punto prendiamo un generico punto y0 tale che y1 < y0 < y2, da cui y1-y0<0 e y2 -y0>0. Considerata ora una funzione g(x)= f(x) – y0 definita nell'intervallo [x1,x2] avremo che:

g(x1) =f(x1) – y0 = y1 – y0.

g(x2) =f(x2) – y0 = y2 – y0.

Ora questa funzione negli estemi assume valori di segno opposto; quindi, esisterà un punto in cui vale zero per il teorema degli zeri. Da cui g(c) =f(c) – y0=0, overo f(c) = y0.

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Si dice che che x0 è un punto di accumulazione per f se in ogni intorno di x0 cade almeno un punto diverso da x0.

Dato un numero reale x0 un intorno completo di x0 è qualunque intervallo aperto I(x0) contentente x0.

Enunciato Teorema: In un intorno di un punto di accumulazione cadono infiniti punti.

Dimostrazione per assurdo: x0 punto di accumulazione {x1,x2…,xr} |x0-xr| I(x0,xr).

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Quando i due limiti per x che tende a x_0 **esistono** ma sono **diversi** tra loro allora è x_0 è discontinuità di **prima** specie.

Quando **almeno uno** dei due limiti di x che tende a x_0 **non esiste o** è **infinito** allora x_0 è una discontinuità di **seconda** specie.

Quando il limite per x che tende a x_0 è **uguale** a **l** ma questo **valore** è **diverso da** quello che la **funzione** assume in x_0 allora , x_0è una discontinuità detta **eliminabile.** Esempio $\frac{x^2}{x}$ con x che tende a 0 meno e più

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Se una funzione f(x_0) è derivabile nel punto x0, in quel punto la funzione è anche continua. Quindi $\lim_{x \to x_0} f(x)$ = f(x_0).

Dimostrazione:

Scriviamo la seguente identità f(x_0 + h)- f(x_0) = $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ h. Calcoliamo ora il limite per h che tende a 0 dei due membri ricordando che f(x_0) è derivabile. f(x_0) tende a f(x_0) , il rapporto incrementale tende a f'(x0) mentre h tende a 0. Posto ora x0 + h = x se h tende a 0 si ha che x tende a x0. Sostituendo nella relazione precedente, concludiamo che la funzione f(x) è continua in x0. Quindi $\lim_{x \to x_0} f(x)$ = f(x_0). Non vale però il contrario, infatti, la funzione $\sqrt[3]{x-1}$ è continua in x = 1 ma non derivabile.

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Punto **angoloso**: se le derivate destra e sinistra **esistono** sono finite ma **non coincidono**

Punti di **cuspide**: Se le derivate sono **infinite** di **segno diverso**

Punto a **tangente verticale** : Se le derivarte sono **infiniti** con lo **stesso segno**.

TEOREMA DI FERMAT

Data una funzione f(x) definita in un intervallo [a;b] e derivabile in]a;b[se f(x) ha un massimo o minimo relativo nel punto x0, interno all'intervallo, la derivata in quel punto si annulla.

Dimostrazione:

Supponiamo che x0 sia un punto di massimo relativo, allora per definzione esiste un intorno completo I di xo tale che: f(x)≤ f(x0) ossia f(x0 + h) ≤ f(x0) quindi:

$$\frac{f(x0+h)-\ f(x0)}{h} \geq 0\ per\ h < 0;\ \frac{f(x0+h)-\ f(x0)}{h} \leq 0\ per\ h > 0$$

Questi due limiti rappresentano rispettivamente la derivata destra e sinistra che devono coincidere e quindi f'(x0) = 0.

TEOREMA ROLLE

Data una funzione f(x) definita in un intervallo chiuso e limitato [a;b] tale che:

f(x) è continua in [a;b]

f(x) è derivabile in]a;b[

f(a) = f(b)

allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo per il quale risulta f '(c) = 0.

Poiché f(x) per ipotesi è continua nell'intervallo chiuso, per il teorema di Weierstrass essa ammette massimo e minimo nell'interevallo.

- Nel caso il m = M allora f è una costante e la sua derivata è 0 e il teorema è confermato.
- Nel caso m < M. La funzione non è una costante e poichè f(a) = f(b), per ipotesi o il massimo o il minimo deve essere nell'intervallo. Supponiamo che il minimo c sia interno all'intervallo. Essendo f(c) il valore minimo per ogni incremento h si avrà sempre che f(c + h) ≥ f(c) ovvero, f(c + h) – f(c) ≥ 0, considerando poi i limiti dei rapporti incrementali relativi a c risulta:

$$\frac{f(c+h)-\ f(c)}{h} \geq 0\ per\ h > 0;\ \frac{f(c+h)-\ f(c)}{h} \leq 0\ per\ h < 0.$$

I due limiti rappresentano rispettivamente la derivata destra e sinistra di f(x) in c e poichè f(x) è derivabile allora devono essere coincidenti pertanto f '(c) = 0.

TEOREMA LAGRANGE

Se una funzione f(x) è continua nell'intervallo [a;b] derivabile in ogni punto interno ad esso, allora esiste alemeno un punto c , interno all'intervallo, per cui vale la relazione $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = f'(c)

Dimostrazione:

Consideriamo la funzione F(x) = f(x)- kx con k reale:

F(x) è continua in [a;b] perché somma di funzioni continue in [a;b]

F(x) è derivabile in]a;b[perché somma di funzioni derivabili in]a;b[

Determiniamo ora k in modo che soddisfi il teorema di Rolle e cioè F(a)=F(b), ovvero f(a) – ka = f(b) – kb da cui $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, sostitiuamo ora questa k nella F(x) = $f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Poiche F(x)soddisfa il teorema di Rolle esiste almeno un punto c tale che F'(c) = 0 ovvero che f'(c) - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = 0, che conferma la tesi iniziale.

Conseguenze

- Se una funzione f(x) è continua nell'intervallo [a;b] derivabile in]a;b[tale che f'(x) è nulla in ogni punto dell'intervallo, allora f(x) è una costante in tutto [a;b].

Dimostrazione: Applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo [a,x], dove x è un punto qualsiasi di [a,b] diverso da a, esiste quindi un punto c per cui vale il teorema di Lagrange. $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = f'(c), ma essendo che la derivata prima è sempe 0, avremo che f(x) – f(a) =0 ovvero f(x) = f(a).

- Se f(x) e g(x) sono due funzioni continue nell'intervallo [a;b] e derivabili in]a;b[e tali che f'(x) = g'(x) per ogni x ∈ $]a;b[$ allora esse differiscono per una costante.

Dimostrazione: Chiamiamo z(x) la differenza tra f(x) e g(x), avremo quindi che z'(x) = f'(x) – g'(x). Per ipotesi f'(x) = g'(x), da cui z'(x) = 0 e per il la conseguenza precedente z(x) = k e quindi le due funzioni differiscono di una costante.

TEOREMA DI CAUCHY

Se le funzioni f(x) e g(x) sono tali che

f(x) e g(x) sono continue nell'intervallo [a;b]

f(x) e g(x) sono derivabili in ogni punto interno a questo intervallo

g'(x) $\neq$0 per ogni x interno all'intrevallo.

Allora esiste alemno un punto c, interno ad [a;b], in cui si ha:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Cioè il rapporto fra gli incrementi delle funzioni f(x) e g(x) nell'intervallo[a;b] è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto c dell'intervallo.

Dimostrazione:

Consederiamo la funzione F(x) = f(x) – kg(x) con k reale.

Per ipotesi F(x) è continua poiché differnza di due funzioni continue e derivabile per lo stesso motivo. Determiniamo quindi k in modo che soddisfi Rolle, F(a) = F(b) da cui f(a) – kg(a) = f(b) – kg(b) da cui $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k$, osserviamo che g(b) ≠ g(a), infatti se fossero uguali sarebbero soddisfatte le ipotese del teorema di Rolle e quindi g'(x) dovrebbe annullarsi in almeno un punto dell'intervallo]a;b[contro le ipotesi del teorema. Possiamo quindi dividere per loro ed ottenere il valore di k. Sostituendolo alla F(x) = f(x) - $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ g(x)$ e dato che soddisfa il terorema di Rolle esiste in punto c in cui la derivata si annulla per cui f '(c) - $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ g'(c)$ = 0 da cui ancora $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ la tesi risulta quindi dimostrata.

CRITERIO DI MONOTONIA

Sia f una funzione reale e continua in [a;b] e derivabile in (a;b), la funzione f è strettamente crescente (decrescente) se e solo se f'(x) > 0 (< 0) ∀x ∈ [a,b].

Dimostrazione:

Consideriamo due punti x1 e x2 dell'intervallo (a;b) tali che x1<x2. Se la funzione d è strettamente crescente nell'intervallo (a;b) deve risultare che f(x1) < f(x2). Per il teorema di lagrange deve esistere nell'intervallo [x1,x2] ,incluso in (a;b), un punto x0 tale che: $f'(x0)=\frac{f(x2)-f(x2)}{x2-x1}\rightarrow$ $f'(xo)(x2-x1)=f(x2)-f(x1)$, dato che la derivata è positiva per ipotesi e anche la differenza tra x2 e x1 lo sarà, necessariamente anche f(x2)-f(x1) deve essere positiva, da cui f(x2)>f(x1)

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Date due funzioni f(x) e g(x) definite nell'intorno I di un punto x0, se

f(x)e g(x) sono continue in x0 e f(x0)= g(x0) = 0

f(x) e g(x) sono derivabili in I eccetto al più x0

g'(x) ≠ 0

esiste il limte del rapporto delle loro derivate

allora risulta che $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$

INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN

Una funzione f(x) limitata in [a,b] è integrabile secondo Rieman ↔ V$\epsilon > 0$ esiste una partizione p di [a;b] tale che S(p)-s(p) < ∈. Dove con S(p) indichiamo la sommatoria ottenuta dall'area dei rettagoli calcolati con altezza massima della partizione p considerata. Mentre con s(p) la stessa ma con le altezze minime della stessa partizione p. Quando queste sarano uguali diremmo che f è integrabile secondo Riemamn.

TEOREMA DELLA MEDIA

Se f è una funzione continua in [a;b], allora esiste x0 ∈ [a;b] tale che $\int_a^b f(x)dx = f(x0)(b-a)$

Dimostrazione:

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo della funzione, denotati con M e m e si ha che m ≤ f(x) ≤ M da cui:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

$$m\int_a^b 1dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b 1dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Per il teroma dei valori intermedi esiste x0 ∈ [a,b] tale che $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x0)$ da cui $\int_a^b f(x)dx = f(x0)\,(b-a)$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se una funzione f(x) è continua in [a,b] allora esiste la derivata della sua funzione integrale F(x) = $\int_a^x f(t)dt$, per ogni punto x dell'intervallo [a,b] ed è uguale a f(x) cioè

F'(x) = f(x), ovvero F(x) è una primitiva di f(x)

Dimostrazione:

Dimostriamo che esiste la derivata di F(x) e calcoliamo tale derivata applicando la definizione. Incrementiamo la variabile x di un valore $h \neq 0$ e tale che a < x + h<b e calcoliamo la differenza F(x+h) – F(x) utilizzando l'espressione della funzione integrale: F(x + h) – F(x) = $\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$. Applichiamo la proprietà di additività dell'integrale: F(x + h) – F(x) = $\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$.

Per il teorema della media, il valore dell'integrale è uguale al prodotto dell'ampiezza h dell'intervallo di integrazione per il valore f(z), dove z è un particolare punto dell'intervallo [x,x+h], nel caso in cui sia h > 0, oppure dell'intervallo [x+h, x], se h < 0 pertanto possiamo scrivere F(x + h) -F(x) = h f(z), dividiamo ora i due membri per h:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(z)$$

Analizziamo ora il comportamento di f(z) al tendere a 0 di h. Sia h > 0; poiché z è compreso fra x e x+h , se tende a 0 (da destra) allora z tende a x (da destra) e

$$\lim_{x\to 0^+} f(z) = \lim_{x\to x^+} f(z) = f(x)$$, perché f è continua per ipotesi.

Con ragionamento analogo se h < 0 si deduce che

$$\lim_{x\to 0^-} f(z) = \lim_{x\to x^-} f(z) = f(x).$$

Dunque $\lim_{x\to 0} f(z) = \lim_{x\to x} f(z) = f(x)$.Possiamo quindi concludere che esiste il limite per h che tende a 0 dell'espressione al primo membro, cioè del rapporto incrementale della funzione F nel punto x, e:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} f(z) = f(x)$$

la funzione è derivabile e di conseguenza è anche continua e risulta: F'(x) = f(x). La derivata coincide con il valore che la funzione integranda f(t) assume nell'estremo superiore x di integrazione, ossia:

F'(x) = D$\int_a^x f(t)dt = f(x)$

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia f una funzione continua in [a,b] e G una primitiva di f , allora $\int_a^b f(x)dx = G(x)]_b^a = G(b) - G(a)$

Dimostrazione:

Sia F(x) la funzione integrale di f(x) sappiamo dal teorema del calcolo integrale che F(x) è una primitiva di f(x) inoltre sappiamo che date due primitive queste differiscono per una costante. Essendo F(x) e G(x) due primitive di f(x) possiamo scrivere G(x)= F(x) + c = $\int_a^x f(t)dt + c$

Valutiamo ora G(a) = F(a) +c = $\int_a^a f(t)dt + c$ = c, quindi G(a) = c sostituiamo ed abbiamo G(x) = $\int_a^x f(t)dt + G(a)$, ora valutiamo G(x) in b ed abbiamo G(b) = $\int_a^b f(t)dt + G(a)$, cioè $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$

POLINOMIO DI TAYLOR

Sia f continua in [xo,x] e derivabile in (x0,x) allora vale il teorema di Lagrange da cui f(c) = f(x0) + f'(c)(x-x0). Se f ha la derivata prima e seconda consideriamo le funzioni:

- g(x) = f(x) – f(x0) – f'(x0)(x-x0),
- h(x) = (x-x0)^2.

Calcolandone la derivata seconda avremo che

g''(x) = f''(x) e h''(x) = 2.

Applichiamo ora il teorema di cauchy e osserviamo che g(x0) = h(x0) = 0. Da cui $\frac{g(x)-g(x0)}{h(x)-h(x0)} = \frac{g\prime(d)}{h\prime(d)}$ osserviamo che g(x0) = h(x0) = 0. Pertanto si ha g(x)h'(x) = h(x)g'(x) da cui $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g\prime(d)}{h\prime(d)}$