

## 离散数学第三次作业

作业提交方式：2022 年 11 月 24 前将电子版作业上传到 bb 系统

- 一. (1 分) 设  $G$  为群,  $H \triangleleft G$ , 且  $[G : H] = m$ . 证明: 对每个  $x \in G$ , 都有  $x^m \in H$
- 二. (1 分) 设  $H, K$  为群  $G$  的两个正规子群. 证明: 如果  $H \cap K = \{e\}$ , 则对任意的  $h \in H, k \in K$ , 有  $hk = kh$ .
- 三. (2 分) 证明以下结论:
1. 任何至少由两人构成的群体中, 其中有两个人, 他们的朋友数量一样多。
  2.  $2n(n \geq 2)$  人中, 每个人至少与其中的  $n$  个人认识, 则其中至少有四个人, 使得这四个人围桌而坐时, 每个人旁边都是他认识的人。
- 四. (2 分) 以分量为 0 或 1 的  $k$  维向量集为顶集, 仅当两向量只有一个同位分量相异时, 在相应二顶间连一边, 所得之图称为  $k$  维立方体,  $k \in \mathbf{N}$ .
1. 证明:  $k$  维立方体是  $2^k$  个顶,  $k \cdot 2^{k-1}$  条边的二分图。
  2. 构造一个二分图  $G$ , 使得  $G$  不与任何  $k$  维立方体的子图同构。其中  $k$  为任意正整数。
- 五. (2 分) 我们将图  $G$  中所有顶点的度数按照从大到小的顺序排列, 称为图  $G$  的度数序列。证明:
1. 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2 和 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1 都不是简单图的度数序列。
  2. 设  $d_1, d_2, \dots, d_n$  是简单图的度数序列, 则  $\sum_{i=1}^n d_i$  是偶数, 且对任意  $1 \leq k \leq n$ , 都有
- $$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$$
- 六. (2 分) 证明以下结论:
1. 如果一棵树只有两片树叶, 则这棵树是一条轨。
  2. 如果  $T$  是树, 且  $\Delta(T) \geq n$ , 则  $T$  至少有  $n$  片树叶。其中  $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$ 。