离散数学第一次作业

Xiaoma

2022 年 10 月 24 日

题目 1.

解答. 1. 已知集合 G 非空，且 $ac \neq 0, ad+b \in \mathbb{R},$，则封闭性成立。

由 $(a,b) \times_G (c,d) \times_G (e,f) = (a,b) \times_G ((c,d) \times_G (e,f))$ ，可知满足结合律。

对于 $(1,0)$ 对 $\forall (a,b) \in G, (a,b) \times_G (1,0) = (a,b), (1,0) \times_G (a,b) = (a,b)$ ，可知其存在单位元。

对于 G 中的每个元素 (a,b)，都存在 $(a^{-1}, b^{-1}) = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ 使得 $(a,b) \times_G (a^{-1}, b^{-1}) = (1,0)$，可知每个元素都存在一一对应的逆元。

可知 $(G, \times_G)$ 构成一个群。

2. 对于 G 中的每个元素 (a,b)，$(c,d) \times_G (1,b) \times_G (c^{-1}, d^{-1}) = (cc^{-1}, cd^{-1} + bc + d)$，由 1. 可知，$cc^{-1} = 1, cd^{-1} + d = 0$，则原式变为 $(1, bc) \in K$，则 K 为 G 的正规子群。

题目 2.

解答. 1. 有理数加法群和非零有理数群为 $\{Q, +\}, \{Q^*, \times\}$。

设 $\{Q, +\}, \{Q^*, \times\}$ 同构。

则存在 $\{Q, +\} \to \{Q^*, \times\}$ 的双射

使得 $f(x+y)=f(x)\times f(y)$，
则 $f(x)=f^2(\frac{x}{2})$，
显然结论不成立，则有理数加法群和非零有理数乘法群不同构。
2. 实数加法群和正实数乘法群为 $\{\mathbb{R},+\},\{\mathbb{R}^+,\times\}$。
设 $\{\mathbb{R},+\},\{\mathbb{R}^+,\times\}$ 同构。
则存在 $\{\mathbb{R},+\}\to\{\mathbb{R}^+,\times\}$ 的双射
使得 $f(x+y)=f(x)\times f(y)$，
设 $f(x)=e^x$，根据图像可知，两群元素一一对应。
则实数加法群和正实数乘法群同构。

题目 3.

解答. 设 G 为 6 阶群，根据拉格朗日定理可知，其子群的阶必为 6 的因数，则 G 有三阶子群。
若 G 有多个三阶子群，则 G 至少有 4 个两两不同的三阶元素，由此产生的新元素超过 6 个，故其最多有一个三阶子群。
则 G 有且仅有一个 3 阶子群。

题目 4.

解答. 对于群中的每个元素都有逆元，对于阶数大于 2 的元素，其逆元与其同阶，可一一配对，有偶数个。
而对于阶等于 2 的元素，需要考虑 1 与其逆元相同，故在偶数阶群 G 中, 阶数为 2 的元素有奇数个。

题目 5.

解答. 假设 m 是使 a^m 包含于非平凡子群 H 的最小整数。如果 H 中包含 a^n，且 n 不是 m 的倍数，则 $a^{(m,n)}$ 也包含于 H，且 $(m,n)<m$ 与假设矛

盾，所以 H 由 a^m 生成，H 一定是无限的，所以无限循环群的极大子群也为无限循环群。

题目 6.

解答. 1. 已知 $Z(G)=\{g\in G:\forall x\in G,xg=gx\}$，
则 $\forall x\in G,xgx^{-1}=gxx^{-1}=g$，则 $Z(G)$ 是 G 的正规子群。
2. 设 $xH,yH\in G$，且 $xH=a^s*H,y=a^t*H$，则 $\exists p,q\in H$ 使得 $x=a^s*p,y=a^t*q$，已知 $Z(G)$ 为交换群，则 $xy=yx$，则 G 是交换群。