离散数学第三次习题课

2022 年 11 月

一. 求解下列同余方程组:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\bmod 10) \\ x \equiv 10(\bmod 12) \\ x \equiv 1(\bmod 15) \end{cases}$$

二. 求解下面的同余方程:

$$x^3 - 2x + 6 \equiv 0(\bmod 25)$$

三. p 为素数, 用 $V_p(n)$ 表示 n 的标准分解中素数 p 的幂次. 设 $(2, ab) = 1$ 若 $p = 2$, 且 n 为偶数, 证明:$V_2(a^n - b^n) = V_2(a^2 - b^2) + V_2(n) - 1$

四. $H = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \cdots\}$, 判别下列各对陪集是否相同.

1. $8 + H$ 和 $17 + H$;
2. $-1 + H$ 和 $8 + H$;
3. $4 + H$ 和 $20 + H$;

五. 设 H 是群 G 的非空有限子集. 证明 H 是 G 的子群的充分必要条件是 H 关于群 G 的运算封闭.

六. 设群 $G = (\mathbb{R}, +)$. 证明: 对于 G 中任意两个非零元 a, b , 存在从 G 到 G 的同构映射 ϕ, 使得 $\phi(a) = b$.

七. 设 G 是交换群. 证明: G 的所有阶数有限的元素的集合 H 是 G 的正规子群, 且商群 G/H 的元素除单位元外, 其余元素 (如果有的话) 的阶数都是无限的.

八. 设 k 是 m 的正因子,$\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$. 证明: $\mathbb{Z}_m / \langle \bar{k} \rangle \cong \mathbb{Z}_k$.