

离散数学习题课

集合与数论

2022 年 9 月

一. A, B, C 为三个集合。证明:

1. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

二. 记 $A \Delta B$ 表示集合 A, B 的对称差, 即 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. 证明: 对任意集合 A, B , 若存在集合 K , 满足 $A \Delta K = B \Delta K$, 则 $A = B$

三. 一名会议有 500 名代表参加, 已知每位代表至少认识其他 401 人, 求证: 一定能找到 6 名代表互相认识

四. 求整数 x 和 y , 使得 $3141x + 1592y = 1$ 。

五. 求下列同余方程组的所有解:

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{5} \\ 3x \equiv 2 \pmod{7} \\ 4x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

六. p 为素数, $(m, n) = p$, 则 $\phi(mn)$ 和 $\phi(m)\phi(n)$ 之间是什么关系?

七. 证明:

1. 如果 $6 \mid n$, 则 $\phi(n) \leq \frac{n}{3}$;
2. 如果 $n - 1$ 和 $n + 1$ 均为素数, $n > 4$, 则 $\phi(n) \leq \frac{n}{3}$.

八. 对于正整数 a 以及质数 p , 若 $p \mid (a^3 + 1)$, $p \nmid (a + 1)$, 且正整数 r 满足 $p \mid a^r - 1$ 证明: r 的最小值为 6.

九. 对于正整数 a 以及质数 p , 若 $p \mid (a^3 - 1)$, $p \nmid (a - 1)$, 且正整数 r 满足 $p \mid (a + 1)^r - 1$ 证明: r 的最小值为 6.

十. 编写函数 $C(n, m, p)$ 计算组合数 $C_m^n \bmod p$ 的值