第一题:

证：1. 先证 $A\cap(\bar{A}\cup B)\subseteq A\cap B$

设 $x\in A\cap(\bar{A}\cup B)\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in\bar{A}\cup B$

又 $x\in\bar{A}\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\in B$

故 $x\in A$ 且 $x\in B$ 即 $x\in A\cap B$

再证 $A\cap B\subseteq A\cap(\bar{A}\cup B)$

设 $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B$

故 $x\in A$，$x\in\bar{A}\cup B\Rightarrow x\in A\cap(\bar{A}\cup B)$

综上 $A\cap B=A\cap(\bar{A}\cup B)$

2. 先证 $A\cup(A\cap B)\subseteq A$

设 $x\in A\cup(A\cap B)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$

再证 $A\subseteq A\cup(A\cap B)$

设 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup(A\cap B)$

综上 $A=A\cup(A\cap B)$

3. (1) 先证 $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}$

设 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$

① $x\notin A\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in\overline{A\cap B}$

② $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in\overline{A\cap B}$

$\Rightarrow\bar{A}\cup\bar{B}\subseteq\overline{A\cap B}$

设 $x\in\overline{A\cap B}\Rightarrow x\notin A\cap B$

① $x\notin A$，$x\in B\Rightarrow x\in\bar{A}\Rightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$

② $x\in A$，$x\notin B\Rightarrow x\in\bar{B}\Rightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$

③ $x\notin A$，$x\notin B\Rightarrow x\in\bar{A}$，$x\in\bar{B}\Rightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$

$\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cup\bar{B}$

设 $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\bar{A}_i$ 对 $k\le n$ 成立，下证对 $k=n+1$ 成立 $n\ge 2$

有 $\bar{A}_1\cup\cdots\cup\bar{A}_n\cup\bar{A}_{n+1}=(\overline{A_1\cap\cdots\cap A_n})\cup\bar{A}_{n+1}=\overline{A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}}$

(2) 先证 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

设 $x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$，$x\notin B\Rightarrow x\in\bar{A}\cap\bar{B}$

设 $x\in\bar{A}\cap\bar{B}\Rightarrow x\in\bar{A}$ 且 $x\in\bar{B}\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

设 $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\bar{A}_i$ 对 $k\le n$ 成立，下证对 $k=n+1$ 成立 $n\ge 2$

有 $\bar{A}_1\cap\cdots\cap\bar{A}_n\cap\bar{A}_{n+1}=(\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n})\cap\bar{A}_{n+1}=\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}}$

第二题:

映射法:

二、解：i 当 $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 为奇数，

$\forall C \in S$，令 $C' = C_A C$，

有 C' 的元素和与 C 的元素和之和为奇数

知 C' 的元素和为偶数，$C' \in T$；而每个 C' 也只对应一个 C 且 T 中每个集合也在 S 中有原象

有 S 与 T 两集合元素间可建立一一对应关系，

$|S| = |T|$

ii 当 $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 为偶数，

令 $A' = \{2, 3, \cdots, n\}$，有 $A' \subseteq A$。

对于 A 的子集，可分为含元素 1，不含元素 1 两类。

$\forall C \in S$，分类讨论如下：

① 若不含元素 1，有 $\cancel{C_{A'}C \in T}$ 令 $C' = C_{A'}C$，有 $C' \in T$。

且每个 C' 只对应一个 C。

② 若含元素 1，令 $C' = \{1\} \cup C_{A'}(C - \{1\})$。

同样有 $C' \in T$，且每个 C' 只对应一个 C，T 中每个集合也在 S 中有原象

则 S 与 T 也能建立元素一一对应关系，同理，

有 $|S| = |T|$。

综合 i，ii，知 $|S| = |T|$

由 1. 的证明过程，对任一元素为整数的集合，

只要它至少有一个奇数，它满足奇子集数 = 偶子集数

$\forall a \in A$，当 $n \geq 3$ 时，$A - \{a\}$ 都至少有一个奇数，

即 $A - \{a\}$ 奇偶子集个数相等，不妨用 $P_i, P_j \cdots$ 表示，

而当 P_i、P_j 奇偶性不同，有 $P_i \cup \{a\}$、$P_j \cup \{a\}$ 奇偶性不同。

所有含 a 的 S_i，T_i 均可用 $P_i \cup \{a\}$ 来表示。

有含 a 的 A 的子集中，奇子集偶子集个数相同。

在原式左右，a 出现次数相同。

由于所有 A 中元素在原式左右出现次数均相同，

有原式左 = 原式右。

第二问用归纳法:

2. 记 $S^{(n)}=\sum_{S_i\in S}\sum_{x\in S_1} x$ $T^{(n)}=\sum_{T_i\in T}\sum_{y\in T_i} y$ 有 $T^{(3)}=S^{(3)}=12$

设 $S^{(k)}=T^{(k)}$ 对 $3\le k\le n-1$ 成立 下证 对 $k=n$ 成立

① 若 n 为奇数.

$$S^{(n)}=S^{(n-1)}+n\cdot 2^{n-1}+T^{(n-1)}$$
$$T^{(n)}=T^{(n-1)}+n\cdot 2^{n-1}+S^{(n-1)}$$
$$\Rightarrow S^{(n)}=T^{(n)}$$

② 若 n 为偶数,

$$S^{(n)}=S^{(n-1)}+n\cdot 2^{n-1}+S^{(n-1)}$$
$$T^{(n)}=T^{(n-1)}+n\cdot 2^{n-1}+T^{(n-1)}$$
$$\Rightarrow S^{(n)}=T^{(n)}$$

综上 $\sum_{S_i\in S}\sum_{x\in S_1} x=\sum_{T_i\in T}\sum_{y\in T} y$

第三题

三. 设座位编号为 $1,2,\cdots 2a$

假设可以使同一国家的两位代表之间夹 $b-1$ 人

设座位编号 1 与 $1+b$ 来自同一国家

则 $1+2b$ 与 $1+3b$ 来自同一国家

$1+4b$ 与 $1+5b$ 来自同一国家

$\vdots$

设 $m\in\mathbb{Z}$，则 $1+2mb \pmod{2a}$ 与 $1+b+2mb \pmod{2a}$ 来自同一国家

由题知，$\frac{2a}{(2a,b)}\equiv 1 \pmod 2$，则 $\exists\, m$ s.t. $2m+1=\frac{2a}{(2a,b)}$，$m\in\mathbb{Z}$

则 $1+b+2mb=1+(2m+1)b=1+2a\frac{b}{(2a,b)}$

$\equiv 1 \pmod{2a}$

$1+2mb\equiv -b \pmod{2a}\equiv 2a-b \pmod{2a}$.

则 $2a-b$ 与 1 来自同一国家

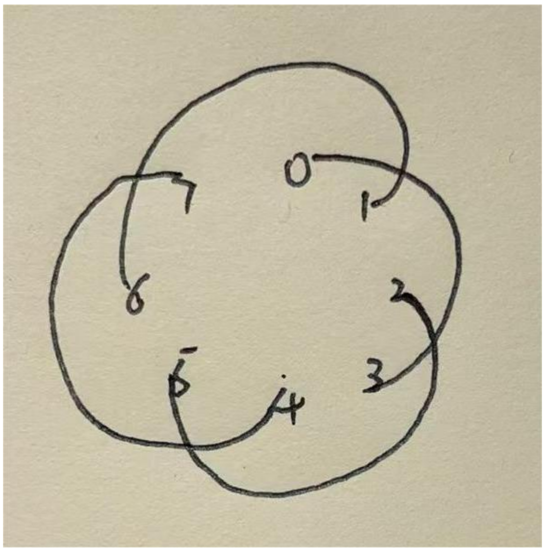
但是 1 与 $1+b$ 来自同一国家

且 $2a-b\not\equiv 1+b \pmod{2a}$

矛盾

$\therefore$ 不可能使任国两位代表之间都恰好夹 $b-1$ 个人

这里给出一个 b 不整除 a 的例子:



这里 a=4,b=3

第四题:

证：若为有限个，设为 $4n_1+3$，…，$4n_m+3$

记 $p = 4(4n_1+3)\cdots(4n_m+3)+3$，不妨设 $n_1 \geq 1$ 显然 $3 \nmid p$

p 为奇数，故只有形如 $4n+1$，$4n+3$ 的素因子

注意到 $4n_i+3 \nmid p$，故 p 只有形如 $4n+1$ 的素因子

而 $4n+1$ 形式的素数之积仍为模4余1，而 $p \equiv 3 \pmod 4$

$\therefore$ p 为形如 $4n+3$ 的素数 $\Rightarrow$ 形如 $4n+3$ 的素数有无穷多个

第五题:

五.1. $4x\equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2x\equiv 1 \pmod{5}$

由 $(2,5)=1$ 得 该方程有模5唯一解

$2x\equiv 1\equiv 6 \pmod{5} \Rightarrow$ 得 $x\equiv 3 \pmod{5}$

$(3,7)=1$ 则 $3x\equiv 2 \pmod{7}$ 有模7唯一解

$3x\equiv 2\equiv 9 \pmod{7}$.

由 $(3,7)=1 \Rightarrow x\equiv 3 \pmod{7}$

$$\begin{cases} 4x\equiv 2 \pmod{10} \\ 3x\equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 8 \pmod{5} \\ x\equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

因 $(5,7)\mid(8-3)$，该方程组有解且模35唯一.

由 $x\equiv 8 \pmod{5}$ 知 $x=3+5k_1$，代入 $x\equiv 3 \pmod{7}$ 得 $5k_1\equiv 0 \pmod{7}$

$k_1\equiv 0 \pmod{7}$，$k_1=7k_2$ 则 $x=3+35k_2$，解为 $x\equiv 3 \pmod{35}$

2. $$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod{12} \\ x\equiv 7 \pmod{30} \\ x\equiv 7 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 1 \pmod{12} \\ x\equiv 7 \pmod{30} \end{cases}$$

因 $(12,30)\mid(7-1)$，该方程组有解且模 $[12,30]=60$ 唯一.

由 $x\equiv 1 \pmod{12}$ 知 $x=1+12k_1$，代入 $x\equiv 7 \pmod{30}$ 得 $12k_1\equiv 36 \pmod{30}$

化简为 $k_1\equiv 3 \pmod{5}$，即 $k_1=5k_2+3$，$x=37+60k_2$，

解为 $x\equiv 37 \pmod{60}$

第六题:

证：1. 取 $(n+1)!+2$，$(n+1)!+3$，$\cdots$，$(n+1)!+n+1$

这 n 个连续数分别有真因数 $2,3\cdots,n+1$，均不是素数

2. 取 n 个素数 $p_1,\cdots,p_n$ 则 $p_1^2,\cdots,p_n^2$ 互质

$$\begin{cases} x\equiv -1 \pmod{p_1^2} \\ \vdots \\ x\equiv -n \pmod{p_n^2} \end{cases}$$

由中国剩余定理必有解，则 $x+1,\cdots x+n$ 为连续 n 个正整数且有平方因子 $p_1^2\cdots p_n^2$