第一题:

证明: 1. ① 结合律

对于 $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in R$

有 $[(a_1, b_1) \times_G (a_2, b_2)] \times_G (a_3, b_3)$

$= (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1) \times_G (a_3, b_3) = (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 + b_1)$

而 $(a_1, b_1) \times_G [(a_2, b_2) \times_G (a_3, b_3)]$

$= (a_1, b_1) \times_G (a_2 a_3, b_2 + a_2 b_3) = (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 + b_1)$

$\therefore [(a_1, b_1) \times_G (a_2, b_2)] \times_G (a_3, b_3) = (a_1, b_1) \times_G [(a_2, b_2) \times_G (a_3, b_3)]$

② 单位元 $e = (1, 0)$ 对 $\forall (a, b) \in G$

有 $(1, 0) \times_G (a, b) = (a, b) = (a, b) \times_G (1, 0)$

③ 逆元 对于 $\forall (a, b) \in G$, $\exists$ 逆元 $(a, b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$

有 $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \times_G (a, b) = (1, 0) = (a, b) \times_G (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$

$\therefore \langle G, \times_G \rangle$ 构成一个群

2. $K = \{(1, b) \mid b \in R\}$ 是 G 的一个子群

(结合律由1.知满足, 单位元 $(1, 0)$, 逆元 $(1, b)^{-1} = (1, -b)$)

对 $\forall (a, b) \in G$, $(1, c) \in K$

有 $(a, b)^{-1} \times_G (1, c) \times_G (a, b)$

$= (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \times_G (1, c) \times_G (a, b)$

$= (\frac{1}{a}, \frac{c-b}{a}) \times_G (a, b)$

$= (1, \frac{c}{a}) \in K$

$\therefore K$ 是 G 的正规子群

第二题:

证明：1. 假设存在 $Q \to Q/\{0\}$ 的双射 φ，使得 $\forall a, b \in Q$

有 $\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

注意到 φ 为满射，$2 \in R/\{0\}$，故 $\exists\, a \in Q$ 使 $\varphi(a) = 2$

由 $a \in Q \Rightarrow \frac{a}{2} \in Q$ 故 $\varphi(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = 2 = \varphi^2(\frac{a}{2})$

显然，$\varphi(\frac{a}{2}) \notin Q/\{0\}$，说明 φ 不是双射

故 $\langle Q, + \rangle$ 与 $\langle Q/\{0\}, \times \rangle$ 不同构

2. 取 $R \to R^+$ 的双射 $\varphi(x) = e^x$

对于 $\forall\, x_1, x_2 \in R$ 且 $x_1 \neq x_2$ 有 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ 为单射

对于 $\forall\, y \in R^+$ $\exists\, x = \ln y \in R$ 为满射

注意到 对于 $\forall\, x_1, x_2 \in R$，有

$\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$

$\therefore \langle R, + \rangle \cong \langle R^+, \times \rangle$

第三题:

存在性:

设G为6阶群，由拉格朗日定理的推论知，G中元素的阶必为6的因子，即1,2,3,6.

（1）若G中某个元素阶为6，不妨设|a| = 6,可知G=<a>为6阶循环群，a^2就是它的一个3阶元，H=<a^2>就是它的一个三阶子群;

（2）若G中不含6阶元，则:

采用反证法。若G中不含3阶元，则G中所有元素的阶均为1或者2。即所有元素x都满足x^2=e,所以x=x^(-1),于是任取x,y属于G，成立xy = (xy)^(-1) = y^(-1)x^(-1) = yx，故G为Abel群。取G中的非单位元a和b且a不等于b，容易验证H={e,a,b,ab}可构成一个群，它是G的子群，但它的阶为4，不能被6整除，与拉格朗日定理矛盾！故假设不成立，G中必含3阶元z，取<z>即为所求的三阶子群。

唯一性：若 G 有 2 个不同的三阶子群 $\langle a \rangle$ $\langle b \rangle$

则 G 至少有 4 个 3阶元素 a, a^2, b, b^2 （若 $a = b^2 \Rightarrow \langle a \rangle = \langle b \rangle$）

则可构造 7 个互异元素、$e, a, a^2, b, b^2, a*b, a^2*b^2$，与 $|G| = 6$ 矛盾

（显然，$a*b$, a^2*b^2 不与 e, a, a^2, b, b^2 相等，若 $a*b = a^2*b^2 \Rightarrow a*b = e$ 矛盾）

第四题:

分析：阶为的元素只有一个，是单位元e。要证明阶为2的元素有奇数个，只要证明阶大于2的元素有偶数个即可。

证明：

设a的阶为k＞2，则a的逆元的阶也是k，且a≠a逆。若a＝a逆，则a^2＝e，与a的阶k＞2矛盾。所以阶大于2的元素一定是成对出现，有偶数个。

阶为1的元素只有一个，是单位元e。

G的元素个数是偶数，所以阶为2的元素一定有奇数个。

第五题:

∵无限循环群与整数加法群 Z 同构.

同构映射 $\varphi(a^n) = n$.

∴确定 Z 的极大子群即可.

下证：kZ 是极大子群 $\Leftrightarrow$ k 是素数.

①"$\Rightarrow$"：若 k 不是素数，则有 $k = k_1k_2$，$k_1>1$，$k_2>1$.

则 $kZ \subseteq k_1Z \subseteq Z$.

与 kZ 是极大子群矛盾. 即 k 是素数.

②"$\Leftarrow$"：若 $\exists$ 子群 mZ. s.t. $kZ \subseteq mZ \subseteq Z$.

则 $k \in mZ$. 即 $k = mn$ $(n \in Z)$

与 k 是素数矛盾. 即 kZ 是极大子群.

即 kZ 是 Z 的极大子群.

第六题:

引理. 设 G 为有限群, 若 $G/Z(G)$ 为循环群, 则 G 为 Abel 群. ($Z(G) := \{g \in G : \forall x \in G, xg = gx\}$ 为 G 的中心)

引理的证明. 设 $a \in G$ 使得 $aZ(G)$ 是 $G/Z(G)$ 的一个生成元, 设 $r = |G/Z(G)|$. 假设 G 不是 Abel 群, 即 $G(Z) \neq Z$, 那么 $r \geq 2$, G 被划分为 $G(Z)$ 的左陪集 $a^i G(Z)$ $(0 \leq i \leq r-1)$. 特别地, $a \notin G(Z)$. 我们将证明 a 与 G 中所有元素可交换导出矛盾. 对任意 $g \in G$ 存在 $0 \leq i \leq r-1$ 与 $z \in Z(G)$ 使得 $g = a^i z$, 于是 $ga = a^i za = a^i az = aa^i z = ag$. □