离散数学第一次作业

葛淞铂 PB20061376

2022 年 10 月 7 日

题目 1.

解答.

(1). 证明：

$\Rightarrow$ 任何 $A \cap (\bar{A} \cup B)$ 中的元素 x，我们知道 $x \in A$ 且 $x \in (\bar{A} \cup B)$，即 $x \in A$ 且 $x \in ((U - A) \cup B)$

如果 $x \in (U - A)$，因为 $x \in A$，则 $x = \varnothing$

如果 $x \in B$，因为 $x \in A$，则 $x \in A \cap B$

$\Leftarrow$ 任何 $A \cap B$ 中的元素 x，我们知道 $x \in A$ 且 $x \in B$，故 $x \notin \bar{A}$，则 $A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$

(2). 证明：

已知 $(A \cap B) \subseteq A$，则 $A \cup (A \cap B) = A$ 恒成立

(3). 证明：

任何 $\overline{\bigcap_i A_i}$ 中的元素 x，我们知道 $x \notin A_1$ 或 $x \notin A_2 \cdots$，即 $\bigcup_i \overline{A_i}$，反之同理。

任何 $\overline{\bigcup_i A_i}$ 中的元素 x，我们知道 $x \notin A_1$ 且 $x \notin A_2 \cdots$，即 $\bigcap_i \overline{A_i}$，反之同理。

题目 2.

解答. (1). 设 $\mathbf{A}$ 的奇子集个数为 a_n，偶子集个数为 b_n。

1. 当 $n=3$ 时，$a_3=4$
2. 设当 $n=k$ 时，$a_k=2^{k-1}$。
3. 若 $k+1$ 为偶数，则 a_k 中子集加上该偶数仍为奇数，则 $a_{k+1}=2a_k$。
4. 若 $k+1$ 为奇数，前 k 个数一共有 2^k 个子集，和为偶数的子集有 2^{k-1} 个，加上该奇数后和变为奇数，则 $a_{k+1}=a_k+2^{k-1}$。

1. 当 $n=3$ 时，$b_3=4$。
2. 设当 $n=k$ 时，$b_k=2^{k-1}$。
3. 若 $k+1$ 为偶数，则 b_k 中子集加上该偶数仍为偶数，则 $b_{k+1}=2b_k$。
4. 若 $k+1$ 为奇数，前 k 个数一共有 2^k 个子集，和为奇数的子集有 2^{k-1} 个，加上该奇数后和变为偶数，则 $b_{k+1}=b_k+2^{k-1}$

则 $|\mathbf{S}|=|\mathbf{T}|$。
(2). 由 (1) 可知，当 $n\geq 3$ 时，$|\mathbf{S}|=|\mathbf{T}|$。
对于 $\mathbf{S}$

1. 当 $n=3$ 时，集合中每个数字出现的次数 $c_3=2$
2. 设当 $n=k$ 时，集合中前 $k-1$ 个数字出现的次数 $c_k=2^{k-2}$，第 k 个数字出现的次数为 2^{k-3} 次。
3. 若 $k+1$ 为偶数，$b_{k+1}=2b_k$，那么集合中前 k 个数字出现的次数 $c_{k+1}=2c_k$，第 $k+1$ 个数字出现的次数为 2^{k-2} 次

4. 若 $k+1$ 为奇数，$b_{k+1} = 2b_k$，那么集合中前 k 个数字出现的次数 $c_{k+1} = 2c_k$，第 $k+1$ 个数字出现的次数为 2^{k-2} 次

对于 $\mathbf{T}$ 同理。
那么对集合 $\mathbf{A}$ 中的任意数,在 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{T}$ 中出现的次数都相等。则 $\sum_{\mathbf{S}_1\in\mathbf{S}}\sum_{x\in\mathbf{S}_1} x = \sum_{\mathbf{T}_1\in\mathbf{T}}\sum_{y\in\mathbf{T}_1} y$

题目 3.

解答.

$$\frac{2a}{\gcd(2a,b)} \equiv 1(\mod 2)$$
$$\frac{2a}{\gcd(a,b)} \equiv 1(\mod 2)$$

若要使任何一国的两个代表之间都恰好夹了 $b-1$ 人,则 $k(b-1)=a-1, k\in\mathbb{Z}$，则 $\gcd(a,b)=b$，即 a 可被 b 整除，左侧 $\frac{2a}{b}$ 为偶数，右侧 $1(\mod 2)$ 为奇数，等式矛盾。

题目 4.

解答. 假设形如 $4n+3$ 的素数的个数有限 $(p_1,...,p_n)$。
记 $q=p_1p_2...p_n+2$，q 显然是奇数，p_i 都不是 q 的因子。
若 q 为 $4k+3$ 型奇数，则 q 的因子中必然有 $4k+3$ 型素数 p'，然而在 $p_1,p_2,...,p_n$ 中没有 p'，与命题矛盾。
若 q 为 $4k+1$ 型奇数，则 $q'=q+2$ 为 $4k+3$ 型奇数，然而在 $p_1,p_2,...,p_n$ 中没有 p'，与命题矛盾。
综上 $4k+1$ 型素数有无数个。

题目 5.

解答. 1. $\begin{cases} 4x \equiv 2(\mod 10) \\ 3x \equiv 2(\mod 7) \end{cases}$ 方程组等价为 $\begin{cases} x \equiv 3(\mod 10) \\ x \equiv 3(\mod 7) \end{cases}$

$$x \equiv 3(\mod 70)$$
$$x = 3 + 70t$$

2. $\begin{cases} x \equiv 1(\mod 12) \\ x \equiv 7(\mod 30) \\ x \equiv 7(\mod 15) \end{cases}$ 方程组等价为 $\begin{cases} x \equiv 1(\mod 4) \\ x \equiv 1(\mod 3) \\ x \equiv 1(\mod 2) \\ x \equiv 1(\mod 3) \\ x \equiv 2(\mod 5) \\ x \equiv 1(\mod 3) \\ x \equiv 2(\mod 5) \end{cases}$

进一步化简 $\begin{cases} x \equiv 1(\mod 4) \\ x \equiv 1(\mod 3) \\ x \equiv 2(\mod 5) \end{cases}$

$$M = 60, M_1 = 15, M_2 = 20, M_3 = 12$$
$$15b_1 \equiv 1(\mod 4) \Rightarrow b_1 = 3$$
$$20b_2 \equiv 1(\mod 3) \Rightarrow b_2 = 5$$
$$12b_3 \equiv 1(\mod 5) \Rightarrow b_3 = 3$$
$$15 \times 3 \times 1 + 20 \times 5 \times 1 + 12 \times 3 \times 2 = 217 \equiv 37(\mod 60)$$

$x = 37 + 60t$

题目 6.

解答. 1. 令 $a=(n+1)!$，则 a 能被任意 $k\in[2,n+1],k\in\mathbb{Z}$ 整除。
已知 $(a+2),(a+3),...,(a+n+1)$ 为连续的 n 个正整数，均可被分解为两个正整数相乘的形式，故这 n 个数不是素数。
2. 假设有 n 个素数 $p_1,p_2,...,p_n$，那么 $p_1^2,p_2^2,...,p_n^2$ 两两互素。
同余方程组 $\begin{cases} x\equiv -1(\mod p_1^2) \\ x\equiv -2(\mod p_2^2) \\ \vdots \\ x\equiv -n(\mod P_n^2) \end{cases}$ 则存在连续 n 个正整数 $x+1,x+2,...,x+n$，都有一个平方因子。