离散数学第四次作业

作业提交方式：2022 年 12 月 17 前将电子版作业上传到 bb 系统

一．（2 分） 证明：

1. 每棵树都是一个二分图。
2. 如果一棵树存在完备匹配，那么这个完备匹配是唯一的。

答：

1. 树没有圈，因此没有奇圈，是二分图。
2. 考虑每个叶子结点，如果存在完备匹配，由于叶子结点只有一个邻居，那么和他和他匹配的只能是他的邻居，删掉所有叶子结点和他的邻居后得到一个森林，同理可以继续上述操作。因此如果存在完备匹配，我们可以**唯**一的构造出这个匹配，言之有理即可。方法二：若有两个相异的完备匹配 M_1 与 M_2，考虑 $M_1 \oplus M_2$ 中每个顶的次数都是 0 或者 2，又因为 M_1 与 M_2 不同，所以不会都是 0，顶点次数都是 2 的图有圈，与树矛盾。

二．（3 分） 我们首先定义一个图 G 的**覆盖**：

设 G 是一个图，C 是其顶点集合的子集，即 $C \subseteq V(G)$，若 G 中任意一条边都有一个端点属于 C，则称 C 是 G 的一个覆盖。若 C 是 G 的**覆盖**，但 C 的任何真子集都不是 G 的覆盖，则称 C 是 G 的**极小覆盖**。若 C^* 是 G 的覆盖，且不存在 G 的覆盖 C，使得 $|C| < |C^*|$，则称 C^* 是 G 的**最小覆盖**，且称 $|C^*|$ 是 G 的覆盖数，记作 $\beta(G)$ 。

设 G 是顶点集合划分为 X 与 Y 的二分图，$V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$，证明如下结论：

1. G 的每个极小覆盖可以表示为 $S \cup N(X - S), S \subset X$，其中 $N(S)$ 表示 S 的邻居集合。
2. $\beta(G) = |X| - \max\limits_{S \subset X}(|S| - |N(S)|)$。
3. $\beta(G) = |X|$，当且仅当任给 $S \subseteq X$，都有 $|N(S)| \geq |S|$。

答：

1. 任取一个极小覆盖 C，显然 C 可以表示为 $(X \cap C) \cup (Y \cap C)$ 只需证明 $N(X - (X \cap C)) = (Y \cap C)$（细节略）。注意这里要证的只是每个极小覆盖能表示为 $S \cup N(X - S), S \subset X$，而不是每个这样的点集都是极小覆盖。
2. $\beta(G) = \min\limits_{S \subset X} |S \cup N(X-S)| = \min\limits_{S \subset X} |X - S \cup N(S)| = \min\limits_{S \subset X} |X| - |S| + |N(S)| = |X| - \max\limits_{S \subset X}(|S| - |N(S)|)$。
3. 由上一问可得 $\beta(G) = |X| \Leftrightarrow \max\limits_{S \subset X}(|S| - |N(S)|) = 0$，也就是任给 $S \subseteq X$，都有 $|N(S)| \geq |S|$，当 $S = \emptyset$ 时，显然有 $|S| - |N(S)| = 0$，$\max\limits_{S \subset X}(|S| - |N(S)|)$ 能取到 0。

三. （1 分） 假设 f 是网络 $N=(G,s,t,c)$ 上的流函数。证明:

$$\sum_{v\in V} f(s,v)=\sum_{v\in V} f(v,t)$$

答： 首先回顾一下符号的定义。

定义 9 网络 $N=(G,s,t,c)$ 上的流函数为 $f:V(G)\times V(G)\to \mathbf{R}$, 要求满足:

- 任给 $u,v\in V(G)$, 都有 $c(u,v)\geqslant f(u,v)$;
- 斜对称，$f(u,v)=-f(v,u)$;
- 任给 $u\in V(G)-\{s,t\}$, 都有 $\sum_{v\in V(G)} f(u,v)=0$

由于斜对称，我们有

$$\sum_{u\in V}\sum_{v\in V} f(u,v)=0$$

再由于第三条性质，我们有

$$\sum_{u\in V(G)-\{s,t\}}\sum_{v\in V} f(u,v)=0$$

相减可以得到

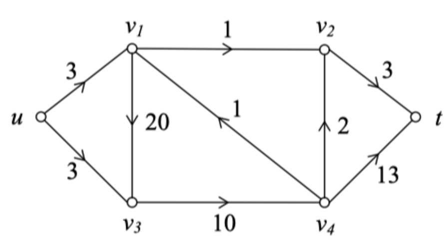
$$\sum_{v\in V} f(s,v)+f(t,v)=0$$

再由于斜对称就可以得到

$$\sum_{v\in V} f(s,v)=\sum_{v\in V} f(v,t)$$

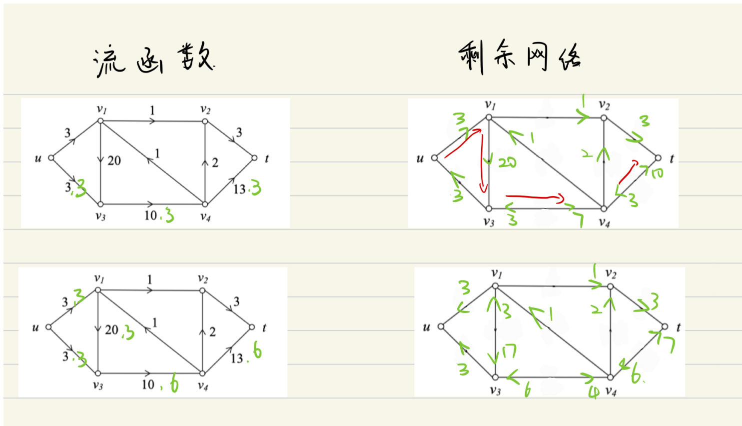
四. （2 分） 有向图 G 如图所示

1. 在图中模拟 ford-fulkerson 算法求出网络的最大流，要求给出过程。
2. 如果边权重表示流函数下界，即 $f(u,v)\geq c(u,v)$，求网络的最小流。

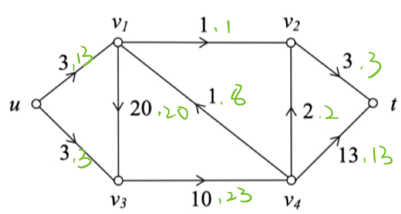


答：

1. 计算过程如下，最大流为 6.



2. 由于汇入 t 的两条边流量之和至少是 16，因此最小流大于等于 16，我们可以构造如下流函数使得流量恰好为 16，因此最小流等于 16。



五．（2 分） 对于有向图 $G = (V, E)$，我们可以定义**强连通分量图** $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$，假设 G 有强连通分量 $C_1, \dots, C_k$，那么 $V^{SCC} = \{v_1, \dots, v_k\}$，$V^{SCC}$ 中的点 v_i 对应 G 中强连通分量 C_i，$(v_i, v_j) \in E^{SCC}$ 当且仅当存在 $u, v \in V$ 使得 $(u, v) \in E, u \in C_i, v \in C_j$。

1. 证明：分量图 G^{SCC} 是一个有向无环图。
2. 定义 $G^T = (V, E^T)$，这里 $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$。证明：$((G^T)^{SCC})^T = G^{SCC}$

答：

1. 由定义可得显然 G^{SCC} 有向，若 G^{SCC} 有环，我们取环上两点 v_i, v_j，显然会存在一条 v_i 到 v_j 的路径，也存在一条 v_j 到 v_i 的路径，这说明他们对应的 C_i, C_j 强连通，这与强连通分量的定义相矛盾（所有强连通的点会在同一个强连通分量里）。

2. 首先，将 G 中所有边反向，G 的强连通分量不变，显然若 v_i, v_j 在 G 中强连通，那么 v_i, v_j 在 G^T 中强连通，又有 $(G^T)^T = G$，因此 v_i, v_j 在 G^T 中强连通等价于 v_i, v_j 在 G 中强连通，所以强连通分量不变，也就是 $V((G^T)^{SCC}) = V(G^{SCC})$。
   其次，$(v_i, v_j) \in E(G^{SCC}) \Leftrightarrow \exists u \in C_i, v \in C_j, (u, v) \in E(G)$，在 G^T 中我们有
   $u \in C_i, v \in C_j, (v, u) \in E(G^T) \Rightarrow (v_j, v_i) \in E((G^T)^{SCC})$，反方向同理，也就是说
   $(v_i, v_j) \in E(G^{SCC}) \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in E((G^T)^{SCC})$ 也就是 $E((G^T)^{SCC})^T = E(G^{SCC})$
   综上，我们有 $V((G^T)^{SCC}) = V(G^{SCC})$，$E((G^T)^{SCC})^T = E(G^{SCC})$，也就是 $((G^T)^{SCC})^T = G^{SCC}$。