离散数学第一次作业

2022 年 9 月

作业提交方式:2022 年 10 月 6 日周四上课交纸质版（同时在上课前请将作业拍成照片或扫描，将电子版作业上传到 bb 系统）

一. 证明下列等式:

1. $A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$;
2. $A \cup (A \cap B) = A$;
3. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合, 证明

$$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}.$$

二. 设集合 $A_n = \{1, 2, \cdots, n\}, (n \geq 3)$, 对任意 A 的子集 B, 若 B 的元素之和为奇数，则称 B 为 A 的奇子集，并且类似地定义偶子集，记所有奇子集构成的集合为 S, 所有偶子集构成的集合为 T, 证明:

1. $|S| = |T|$
2. S_1, T_1 分别表示集合 S, T 中的元素, 则

$$\sum_{S_1 \in S} \sum_{x \in S_1} x = \sum_{T_1 \in T} \sum_{y \in T_1} y$$

三. 有 a 个国家参加的一次国际会议，每个国家有两名代表。求证：若 $2a/gcd(2a, b) \equiv 1(\mathrm{mod} 2)$, 不可能将 $2a$ 位代表安排在一张圆桌的周围就坐，使得任国的两位代表之间都恰好夹有 $b - 1$ 个人.

四. 证明：形如 $4n + 3$ 的素数有无穷多个.

五. 1. 求解下面同余方程组

$$\begin{cases} 4x \equiv 2(\mathrm{mod} 10) \\ 3x \equiv 2(\mathrm{mod} 7) \end{cases}$$

2. 求解下面同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv 1(\mathrm{mod} 12) \\ x \equiv 7(\mathrm{mod} 30) \\ x \equiv 7(\mathrm{mod} 15) \end{cases}$$

六. 1. 证明：对任意给定的正整数 n, 一定存在连续 n 个正整数，使得它们中的每一个都不是素数.

2. 证明：对任意给定的正整数 n, 一定存在连续 n 个正整数，使得它们中的每一个都有一个平方因子.