assignment7

Xiaoma

2022 年 11 月 12 日

题目 1.

解答. 使用桶排序，基于元素的位数对元素进行分组，每个分组的排序方法为基数排序。

Algorithm 1: SORT

Input: The array : $A[0...A.length-1]$; The decimal of elements : r

Output: The array sorted : $C[0...C.length-1]$;

Initialized $d[0...d.length-1]$;

$d_{max} = 0$;

for *i = 0; i < A.length; ++i* **do**

  $d[i]$ = -1;

  t = $A[i]$;

  while *t != 0* **do**

    ++$d[i]$;

    t = t / r;

  if $d[i] > d_{max}$ **then**

    $d_{max} = d[i]$;

create a new array $B[0...d_{max}]$;

for *i = 0; i < d_{max}; ++i* **do**

  make $B[i]$ an empty list;

for *i = 0; i < A.length; ++i* **do**

  insert $A[i]$ into list $B[d[i]]$;

for *i = 0; i < d_{max}; ++i* **do**

  RADIX-SORT($B[i]$);

concatenate lists $B[0]...B[d_{max}-1]$ together in C;

return C

第 i 个操作的代价为

$$d_i \begin{cases} i & if\ i = 2^k, k \in \mathbb{N} \\ 1 & else \end{cases}$$

n 个操作序列的总代价为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

1. 聚合分析：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^i + n \leq 5n \in O(n)$$

摊还代价为 $O(1)$

2. 核算法：

假设每个操作的摊还代价为 3

(a) 第一个操作的代价为 1，剩余信用为 2

(b) 假设在前 2^i 次操作后，信用不为负值，那么在进行后续 $2^{i+1}-1$ 次操作时，每次操作的代价为 1，在进行第 2^{i+1} 次操作时，信用值至少为 $2^{i+1}+1$，代价为 2^{i+1}，信用为 1。

摊还代价为 $O(1)$

3. 势能法：

设 k 为满足 $2^k \leq i$ 的最大整数，则势函数为

$$\Phi(D_i) = \begin{cases} k+3 \quad i = 2^k \\ \Phi(D_{2^k}) + 2(i-2^k) \quad else \end{cases}$$

则

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \begin{cases} -2^k+3 \quad i = 2^k \\ 2 \quad else \end{cases}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 3n = O(n)$$

摊还代价为 $O(1)$

题目 2.

解答.

Algorithm 2: My_Queue

Initialized : deque as d

Initialized : queue as q

Algorithm 3: ENQUEUE

Input: The number : *value*;

while *!d.empty() d.back()* $>$ *value* **do**
 d.pop_back();
d.push_back(value);

q.push(value);

Algorithm 4: DEQUEUE

Output: The number : *value*;

if *q.empty()* **then**
 return *ERROR*
value = q.front();

if *value* $==$ *d.front()* **then**
 d.pop_front();
q.pop();

return *value*;

Algorithm 5: FIND_MIN

Output: The min number : *value*;

if *d.empty()* **then**
  return *ERROR*;
value = d.front();

return *value*;