

# assignment2

Xiaoma

2022.09.16

**1. 对于一个按升序排列的包含  $n$  个元素的有序数组  $A$  来说, HEAPSORT 的时间复杂度是多少? 如果  $A$  是降序呢, 请简要分析并给出结果。**

降序排列: 建堆时调用  $n$  次 MAX-HEAPIFY( $A, i$ ), 初始序列为降序, 故每次时间复杂度为  $O(1)$ , 故建堆时间复杂度为  $O(n)$ , 排序时, 调用  $(n-1)$  次 MAX-HEAPIFY( $A, i$ ), 若发生交换, MAX-HEAPIFY( $A, i$ ) 还要进行  $\log n$  次, 故排序的时间复杂度为  $O(\log n)$ , 整体时间复杂度为  $O(\log n)$ 。

升序排列: 建堆时调用  $n$  次 MAX-HEAPIFY( $A, i$ ), 每次都发生交换, 时间复杂度为  $O(\log n)$ , 排序时, 调用  $(n-1)$  次 MAX-HEAPIFY( $A, i$ ), 若发生交换, MAX-HEAPIFY( $A, i$ ) 还要进行  $\log n$  次, 故排序的时间复杂度为  $O(\log n)$ , 整体时间复杂度为  $O(\log n)$ 。

2. 快速排序: (a) 假设快速排序每一层所做的划分比例都是  $1 - \alpha : \alpha$ , 其中  $0 < \alpha \leq 1/2$  且是一个常数。试证明: 在相应的递归树中, 叶节点的最小深度大约是  $-\lg n / \lg \alpha$ , 最大深度约是  $-\lg n / (1 - \alpha)$  (无序考虑舍入问题)。(b) 试证明: 在一个随机输入数组上, 对于任何常数  $0 < \alpha \leq 1/2$ , PARTITION 产生比  $1 - \alpha : \alpha$  更平衡的划分的概率约为  $1 - 2\alpha$ 。

- (a) 若要求最小深度则选择划分比例小的一侧, 不断迭代  $k$  次直至剩余一个元素, 即  $n\alpha^k = 1$ , 则  $k = \frac{-\lg n}{\lg \alpha}$   
 若要求最大深度则选择划分比例大的一侧, 不断迭代  $k$  次直至剩余一个元素即  $n(1 - \alpha)^k = 1$ , 则  $k = \frac{-\lg n}{\lg(1 - \alpha)}$

- (b) 若要产生比  $1 - \alpha : \alpha$  更平衡的划分, 那么划分点应该在  $n\alpha$  与  $n(1 - \alpha)$  之间, 又因为划分点的选取服从均匀分布, 则

$$\mathbf{P} = \frac{(1 - \alpha)n - \alpha n}{n} = 1 - 2\alpha$$