

assignment3

Xiaoma

2022 年 10 月 17 日

题目 1. 设 T 是一棵二叉搜索树，其关键字互不相同；设 x 是一个叶结点， y 为其父结点。证明： $y.key$ 或者 T 树中大于 $x.key$ 的最小关键字，或者是 T 树中小于 $x.key$ 的最大关键字。

解答. 如果 $x=y.left$ ，则调用 $TREESUCCESSOR(x)$ 时 while 循环不会执行，故返回 y 。

如果 $x=y.right$ ，则调用 $TREEPREDECESSOR(x)$ 时 while 循环不会执行，故返回 y 。

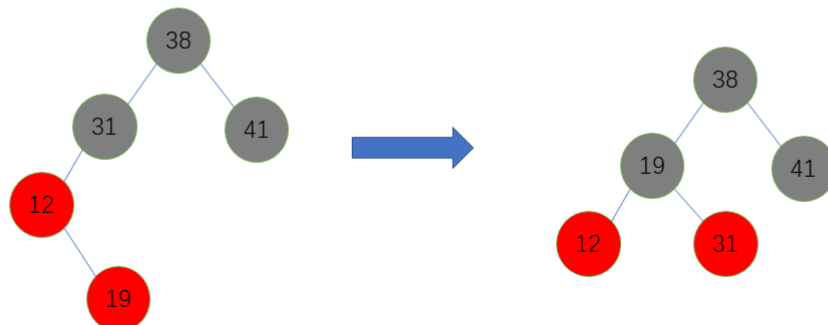
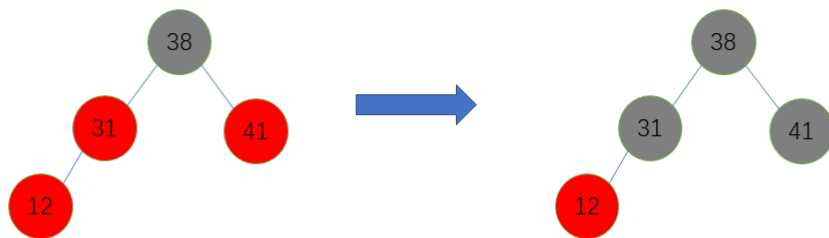
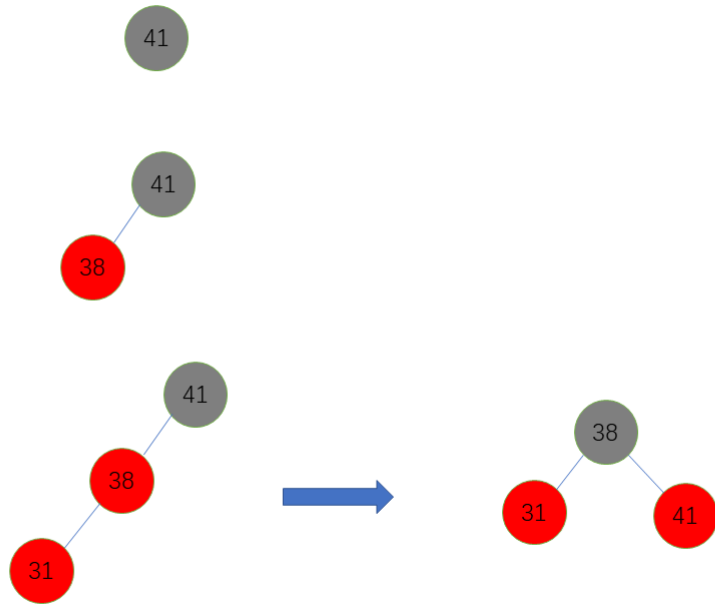
可证 $y.key$ 或者是 T 树中大于 $x.key$ 的最小关键字，或者是 T 树中小于 $x.key$ 的最大关键字。

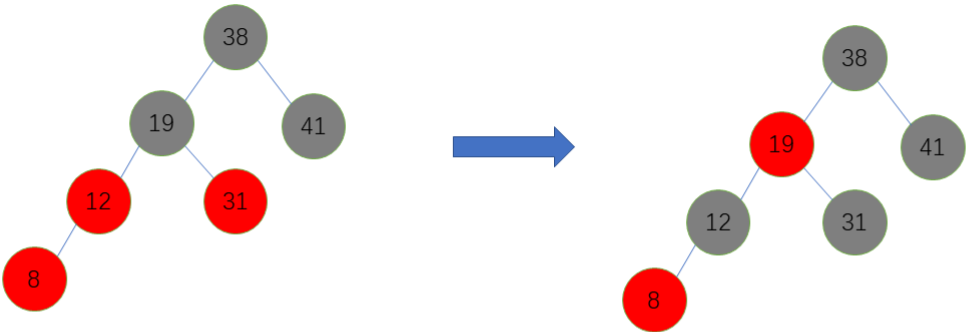
题目 2. 红黑树：

(a) 将关键字 41,38,31,12,19,8 连续地插入一棵初始为空的红黑树之后，试画出该结果树。

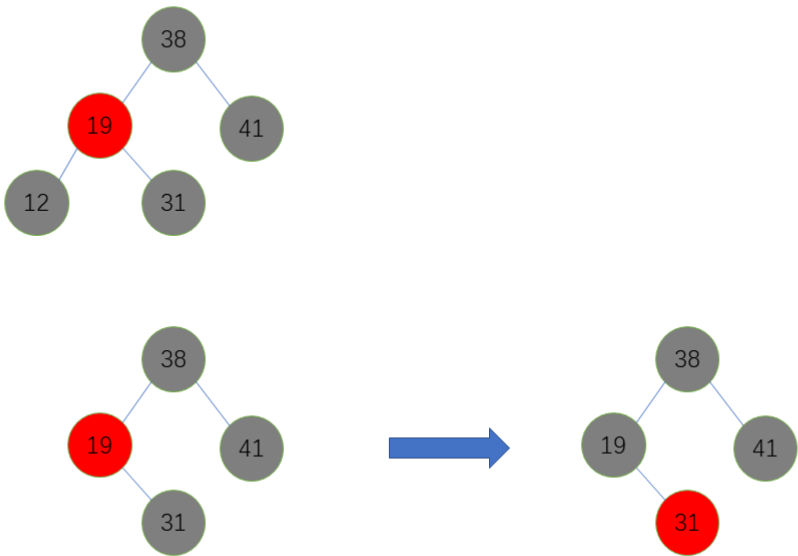
(b) 对于 (a) 中得到的红黑树，依次删除 8,12,19，试画出每次删除操作后的红黑树。

解答. a.





b.





题目 3. 区间树：

假设我们希望记录一个区间集合的最大重叠点，即被最多数目区间所覆盖的那个点。

- (a) 证明：在最大重叠点中，一定存在一个点是其中一个区间的端点。
- (b) 设计一个数据结构，使得它能够有效地支持 INTERVAL-INSERT、INTERVAL-DELETE, 以及返回最大重叠点的 FIND-POM 操作。

解答. a. 设最大重叠点中不存在点是其中一个区间的端点。

那么将该点右移直到遇到一个区间端点，这时该端点所在区间数目要么不变，要么增加。如果增加，那么该点成为新的最大重叠点，与原命题矛盾。

可证在最大重叠点中，一定存在一个点是其中一个区间的端点。

b.

1. 选择基础数据结构：

红黑树

2. 数据结构扩增:

每个节点的附加信息:

$p(x)$: 左侧端点为 +1, 右侧端点为-1

$v(x)$: 以 x 为根的所有节点的 p 的和

3. INTERVAL-INSERT :

使用红黑树的插入方式, 附加操作: 将插入时经过的每个节点的 v 值加上被插入节点的 p 值。

4. INTERVAL-DELETE :

使用红黑树的删除方式, 附加操作: 将删除时经过的每个节点的 v 值减去被插入节点的 p 值。

5. FIND-POM :

设 $s(i, j)$ 为重叠的区间数, 则

$$s(i, j) = p(v_i) + p(v_{i+1}) + \cdots + p(v_j)$$

设以 x 为根节点的子树的最小元素为 $l(x)$, 最大元素为 $r(x)$, 设 $m(x)$ 为以为 x 为根节点的数的最大重叠点的重叠数, 则

$$m(x) = \max\{s(l(x), i)\} i \in [l(x), r(x)]$$

那么可以使用分治思想求解最大重叠点问题, 重叠点可能在根节点, 左子树中, 右子树中三种情况, 分别求三种情况的 $m(x)$, 其子树又可以继续进行递归调用, 则

$$m(x) = \max \begin{cases} m(l(x)) & \text{最大值在左子树} \\ v(l(x)) + p(x) & \text{最大值在根节点} \\ v(l(x)) + p(x) + r(x) & \text{最大值在右子树} \end{cases}$$