

assignment8

Xiaoma

2022 年 11 月 20 日

题目 1.

解答.

1. 若要计算 a^n , 已知当 $n = 0$ 时, $a^n = 1$, 当 $n = 1$ 时, $a^n = a$, 当 n 为奇数时 $a^n = (a^{\frac{n}{2}})^2 \times a$, 当 n 为偶数时, $a^n = (a^{\frac{n}{2}})^2$, 故可将计算 a^n 拆分为以上子问题。子问题的最坏运行时间为 $O(\log n)$ 。
2. 合并过程仅需将子问题得到的数字相乘, 最坏运行时间为 $O(1)$ 。
3. 由上述可知, 原问题划分出的子问题是相同的, 故只需要计算一个子问题然后进行合并, 故不用重复其划分子问题和合并步骤。
4. $a^n = (a^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}})a^{n\%2} = (a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{2}\%2})(a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{2}\%2})a^{n\%2} = \dots = (\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a)(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a)a^{n\%2}$, 故该算法一定能得到正确的计算解。
5. 算法共需要递归 $\log n$ 次, 故时间复杂度为 $O(\log n)$ 。

Algorithm 1: myPow

Input: The base : a ; The exponent : n ;

Output: a^n ;

if $n == 0$ **then**

return 1;

if $n == 1$ **then**

return a ;

$temp = myPow(a, n/2)$;

if $n \% 2 == 0$ **then**

return $temp * temp$;

return $temp * temp * a$;

题目 2.

解答. 设两个数据库中数字的中位数分别为 $A[a]$, $B[b]$, 数据库 A 的首尾分别为 s_1, d_1 , 数据库 B 的首尾分别为 s_2, d_2 , 所以 $a = (s_1 + d_1)/2, b = (s_2 + d_2)/2$ 。

1. 若 $A[a] = B[b]$, 则 $A[a]$ 为两个数据库的中位数。
2. 若 $a < b$
 - 若数据库 A 中元素个数为奇数, 数据库 A 将 s_1 移动到 a , 数据库 B 将 d_2 移动到 b
 - 若数据库 A 中元素个数为偶数, 数据库 A 将 s_1 移动到 $a + 1$, 数据库 B 将 d_2 移动到 b
3. 若 $a > b$
 - 若数据库 A 中元素个数为奇数, 数据库 A 将 d_1 移动到 a , 数据库 A 将 s_2 移动到 b

- 若数据库 A 中元素个数为偶数，数据库 A 将 d_1 移动到 a ，数据库 A 将 s_2 移动到 $b+1$
4. 重复 2,3 直至 1 成立，或当两数据库的首尾范围均只包含一个数时，较小的数为所求中位数。

每次迭代都舍弃一半的数据，故该算法的时间复杂度为 $O(\log n)$ 。

题目 3.

解答.

Algorithm 2: mySearch

Input: Database A : A; Database B : B; The size of database : n;

Output: The median of A and B;

$s1 = 0, d1 = n - 1, s2 = 0, s2 = n - 1;$

while $s1 \neq d1 \parallel s2 \neq d2$ **do**

$a = (s1 + d1) / 2;$

$b = (s2 + d2) / 2;$

if $A[a] == B[b]$ **then**

return $A[a];$

if $A[a] < B[b]$ **then**

if $(s1 + d1) \% 2 == 0$ **then**

$s1 = a;$

$d2 = b;$

else

$s1 = a + 1;$

$d1 = b;$

else

if $(s1 + d1) \% 2 == 0$ **then**

$d1 = a;$

$s2 = b;$

else

$d1 = a;$

$s2 = b + 1;$

if $A[a] > B[b]$ **then**

return $B[b];$

return $A[a];$
