

assignment3

Xiaoma

2022 年 10 月 8 日

题目 1. 下面的排序算法中哪些是稳定的：插入排序、归并排序、堆排序、快速排序和计数排序？给出一个能使任何排序算法都稳定的方法。你所给出的方法带来的额外时间和空间开销是多少？

解答. 稳定排序：插入排序，归并排序，计数排序

排序前为长度为 n 的序列设置长度为 n 的标签，若在排序时遇到值相同的数，则比较其标签，小标签在前。额外的时间复杂度为 $O(n)$ ，空间复杂度为 $O(n)$

题目 2. 给定一个整数数组，其中不同的整数所包含的数字的位数可能不同。但该数组中，所有整数中包含的总数字位数为 n 。设计算法使其可以在 $O(n)$ 时间内对该数组进行排序。

解答. 采用基数排序的方法，按位从低到高排序，RADIX-SORT 使用计数排序，每位取值共有 10 种可能，设数组中数的位数为 d_i ，数组中共有 x 个数，则 $\sum_{i=1}^x d_i = n$ ，则数组每一位排序的时间复杂度为 $O(x + 10)$ ，则总时间复杂度为 $O(d_{\max}(x + 10)) = O(n)$

题目 3. SELECT 算法 (找第 i 小的元素) 最坏情况下的比较次数 $T(n) = \Theta(n)$, 但是其中的常数项使非常大的。请对其进行优化, 使其满足:

- 在最坏情况下的比较次数为 $\Theta(n)$ 。
- 当 i 是小于 $n/2$ 的常数时, 最坏情况下只需要进行 $n + O(\log n)$ 次比较。

解答. 当 $i \geq n/2$ 时, 仍使用原算法。

当 $i \leq n/2$ 时, 使用算法:

1. 设输入数组为 $A[0, \dots, n-1]$, $m = \frac{n}{2}$, 将数组分为两份, 若 n 为奇数, 则将第 n 个数暂时分出, 此时得到两个等长数组 $B_l[0, \dots, m-1]$, $B_r[m, \dots, 2m-1]$, 对左右两侧的数组建立一一对应的映射 $B_l[x] \leftrightarrow B_r[x+m]$ $x = 0, \dots, m-1$, 依次对每对映射对应的数字进行比较, 若 $B_l[x] > B_r[x+m]$, 则交换两数。最终映射左侧的数小于映射右侧的数, 保持该映射关系不变。
2. 递归进行操作 1 直至 $i > m/2$, 注意在递归过程中, 若映射对出现交换, 上层分组仍应保持左侧小于右侧的规则, 故可能进行多次交换。
3. 对最终的 B_r 进行 SELECT 算法, 得到 B_r 中最小的 i 个数, 则 B_l, B_r 中最小的 i 个数在两数组前 i 个数共 $2i$ 个数中产生, 对此 $2i$ 个数进行 SELECT 算法, 若 n 为奇数则将剩余的一个数放入, 得到最小的 i 个数, 返回上一层。
4. 在上一层同理, 对左右两数组前 i 个数进行 SELECT 得到该层最小的 i 个数, 直至返回结束, 得到 A 中最小的 i 个数, 即得到目标值。

时间复杂度分析:

当 $i < n/2$ 时

$$\begin{aligned}
 & \text{COMPETITION}(n) \\
 &= n/2 + \text{COMPETITION}(n/2) + T(2i) \\
 &= n/2 + n/2 + f(T(2i) \log(n/2i)) + T(2i) \\
 &= n + O(T(2i) \log(n/i)) \\
 &= n + O(\log n)
 \end{aligned}$$

当 $i \geq n/2$ 时,

$$\begin{aligned}
 & \text{COMPETITION} \\
 &= T(n) \\
 &= \Theta(n)
 \end{aligned}$$