

# assignment3

Xiaoma

2022 年 11 月 10 日

## 题目 1.

**解答.** 使用桶排序，基于元素的位数对元素进行分组，每个分组的排序方法为基数排序。

---

**Algorithm 1:** SORT
 

---

**Input:** The array :  $A[0...A.length - 1]$ ; The decimal of elements :  $r$

**Output:** The array sorted :  $C[0...C.length - 1]$ ;

Initialize  $d[0...d.length - 1]$ ;

$d_{max} = 0$ ;

**for**  $i = 0; i < A.length; ++i$  **do**

$d[i] = -1$ ;

$t = A[i]$ ;

**while**  $t \neq 0$  **do**

$++d[i]$ ;

$t = t / r$ ;

**if**  $d[i] > d_{max}$  **then**

$d_{max} = d[i]$ ;

create a new array  $B[0...d_{max}]$ ;

**for**  $i = 0; i < d_{max}; ++i$  **do**

$\_ \text{make } B[i] \text{ an empty list}$ ;

**for**  $i = 0; i < A.length; ++i$  **do**

$\_ \text{insert } A[i] \text{ into list } B[d[i]]$ ;

**for**  $i = 0; i < d_{max}; ++i$  **do**

$\_ \text{RADIX-SORT}(B[i])$ ;

concatenate lists  $B[0]...B[d_{max} - 1]$  together in  $C$ ;

**return**  $C$

---

第  $i$  个操作的代价为

$$d_i \begin{cases} i & \text{if } i = 2^k, k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

$n$  个操作序列的总代价为

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

## 1. 聚合分析:

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^{\lceil \log n \rceil} 2^i + n \leq 5n \in O(n)$$

摊还代价为  $O(1)$

## 2. 核算法:

假设每个操作的摊还代价为 3

(a) 第一个操作的代价为 1, 剩余信用为 2

(b) 假设在前  $2^i$  次操作后, 信用不为负值, 那么在进行后续  $2^{i+1} - 1$  次操作时, 每次操作的代价为 1, 在进行第  $2^{i+1}$  次操作时, 信用值至少为  $2^{i+1} + 1$ , 代价为  $2^{i+1}$ , 信用为 1。

摊还代价为  $O(1)$

## 3. 势能法:

设  $k$  为满足  $2^k \leq i$  的最大整数, 则势函数为

$$\Phi(D_i) = \begin{cases} k + 3 & i = 2^k \\ \Phi(D_{2^k}) + 2(i - 2^k) & else \end{cases}$$

则

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \begin{cases} -2^k + 3 & i = 2^k \\ 2 & else \end{cases}$$

所以

$$\sum_{i=1}^n a_i = 3n = O(n)$$

摊还代价为  $O(1)$

题目 2.

解答.