assignment3

Xiaoma

2022 年 11 月 5 日

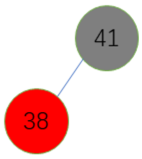
题目 1. 设 T 是一棵二叉搜索树，其关键字互不相同；设 x 是一个叶结点，y 为其父结点。证明：y.key 或者 T 树中大于 x.key 的最小关键字，或者是 T 树中小于 x.key 的最大关键字。

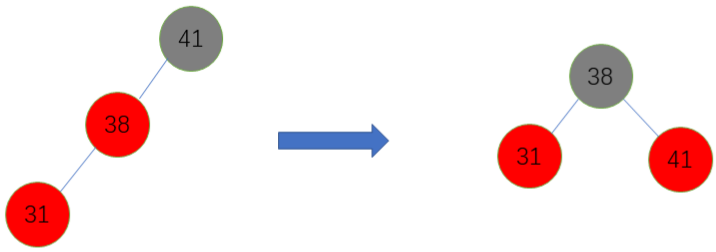
解答. 如果 x=y.left，则调用 TREESUCCESSOR(x) 时 while 循环不会执行，故返回 y。
如果 x=y.right，则调用 TREEPREDECESSOR(x) 时 while 循环不会执行，故返回 y。
可证 y.key 或者是 T 树中大于 x.key 的最小关键字，或者是 T 树中小于 x.key 的最大关键字。

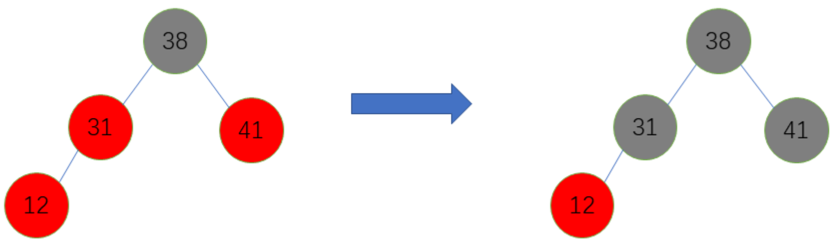
题目 2. 红黑树：
(a) 将关键字 41,38,31,12,19,8 连续地插入一棵初始为空的红黑树之后，试画出该结果树。
(b) 对于 (a) 中得到的红黑树，依次删除 8,12,19，试画出每次删除操作后的红黑树。

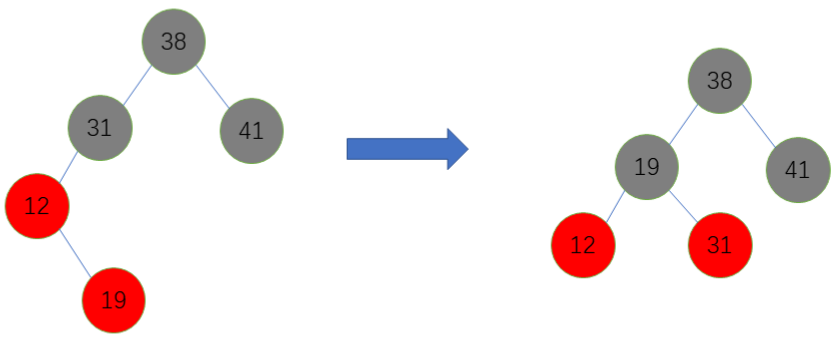
解答. a.

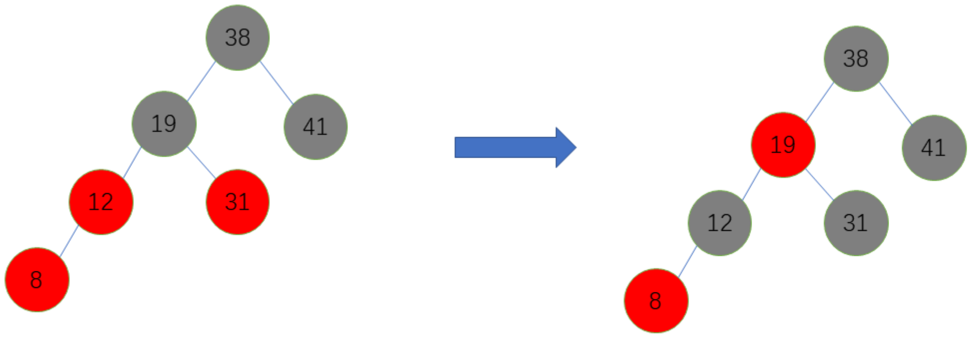

41


41
38

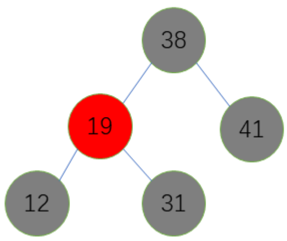

41
38
31
38
31
41

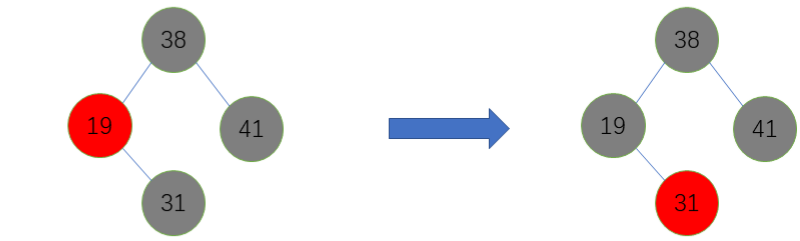

38
31
41
12
38
31
41
12


38
31
41
12
19
38
19
41
12
31



b.





题目 3. 区间树：
假设我们希望记录一个区间集合的最大重叠点，即被最多数目区间所覆盖的那个点。
(a) 证明：在最大重叠点中，一定存在一个点是其中一个区间的端点。
(b) 设计一个数据结构，使得它能够有效地支持 INTERVAL-INSERT、INTERVAL-DELETE, 以及返回最大重叠点的 FIND-POM 操作。

解答. a. 设最大重叠点中不存在点是其中一个区间的端点。
那么将该点右移直到遇到一个区间端点，这时该端点所在区间数目要么不变，要么增加。如果增加，那么该点成为新的最大重叠点，与原命题矛盾。
可证在最大重叠点中，一定存在一个点是其中一个区间的端点。
b.

1. 选择基础数据结构：

红黑树

2. 数据结构扩增：

   每个节点的附加信息：

   p(x) : 左侧端点为 +1，右侧端点为-1

   v(x) : 以 x 为根的所有节点的 p 的和

3. INTERVAL-INSERT :

   使用红黑树的插入方式，附加操作：将插入时经过的每个节点的 v 值加上被插入节点的 p 值。

4. INTERVAL-DELETE :

   使用红黑树的删除方式，附加操作：将删除时经过的每个节点的 v 值减去被插入节点的 p 值。

5. FIND-POM :

   设 s(i, j) 为重叠的区间数，则

$$s(i,j) = p(v_i) + p(v_{i+1}) + \cdots + p(v_j)$$

   设以 x 为根节点的子树的最小元素为 l(x)，最大元素为 r(x)，设 m(x) 为以为 x 为根节点的数的最大重叠点的重叠数，则

$$m(x) = \max\{s(l(x), i)\} i \in [l(x), r(x)]$$

   那么可以使用分治思想求解最大重叠点问题，重叠点可能在根节点，左子树中，右子树中三种情况，分别求三种情况的 m(x)，其子树又可以继续进行递归调用，则

$$m(x) = \max \begin{cases} m(l(x)) & \text{最大值在左子树} \\ v(l(x)) + p(x) & \text{最大值在根节点} \\ v(l(x) + p(x) + r(x)) & \text{最大值在右子树} \end{cases}$$