

# assignment8

Xiaoma

2022 年 11 月 22 日

## 题目 1.

解答.

1. 若要计算  $a^n$ , 已知当  $n = 0$  时,  $a^n = 1$ , 当  $n = 1$  时,  $a^n = a$ , 当  $n$  为奇数时  $a^n = (a^{\frac{n}{2}})^2 \times a$ , 当  $n$  为偶数时,  $a^n = (a^{\frac{n}{2}})^2$ , 故可将计算  $a^n$  拆分为以上子问题。子问题的最坏运行时间为  $O(\log n)$ 。
2. 合并过程仅需将子问题得到的数字相乘, 最坏运行时间为  $O(1)$ 。
3. 由上述可知, 原问题划分出的子问题是相同的, 故只需要计算一个子问题然后进行合并, 故不用重复其划分子问题和合并步骤。
4.  $a^n = (a^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}})a^{n\%2} = (a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{2}\%2})(a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{4}}a^{\frac{n}{2}\%2})a^{n\%2} = \dots = (\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a)(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a)a^{n\%2}$ , 故该算法一定能得到正确的计算解。
5. 算法共需要递归  $\log n$  次, 故时间复杂度为  $O(\log n)$ 。

---

**Algorithm 1:** myPow
 

---

**Input:** The base :  $a$ ; The exponent :  $n$ ;

**Output:**  $a^n$ ;

**if**  $n == 0$  **then**

**return** 1;

**if**  $n == 1$  **then**

**return**  $a$ ;

$temp = myPow(a, n/2)$ ;

**if**  $n \% 2 == 0$  **then**

**return**  $temp * temp$ ;

**return**  $temp * temp * a$ ;

---

## 题目 2.

**解答.** 设两个数据库中数字的中位数分别为  $A[a]$ ,  $B[b]$ , 数据库 A 的首尾分别为  $s_1, d_1$ , 数据库 B 的首尾分别为  $s_2, d_2$ , 所以  $a = (s_1 + d_1)/2, b = (s_2 + d_2)/2$ 。

1. 若  $A[a] = B[b]$ , 则  $A[a]$  为两个数据库的中位数。
2. 若  $a < b$ 
  - 若数据库 A 中元素个数为奇数, 数据库 A 将  $s_1$  移动到  $a$ , 数据库 B 将  $d_2$  移动到  $b$
  - 若数据库 A 中元素个数为偶数, 数据库 A 将  $s_1$  移动到  $a + 1$ , 数据库 B 将  $d_2$  移动到  $b$
3. 若  $a > b$ 
  - 若数据库 A 中元素个数为奇数, 数据库 A 将  $d_1$  移动到  $a$ , 数据库 A 将  $s_2$  移动到  $b$

- 若数据库 A 中元素个数为偶数，数据库 A 将  $d_1$  移动到  $a$ ，数据库 A 将  $s_2$  移动到  $b+1$
4. 重复 2,3 直至 1 成立，或当两数据库的首尾范围均只包含一个数时，较小的数为所求中位数。

每次迭代都舍弃一半的数据，故该算法的时间复杂度为  $O(\log n)$ 。

---

**Algorithm 2:** mySearch

---

**Input:** Database A : A; Database B : B; The size of database : n;

**Output:** The median of A and B;

$s1 = 0, d1 = n - 1, s2 = 0, s2 = n - 1;$

**while**  $s1 \neq d1 \parallel s2 \neq d2$  **do**

$a = (s1 + d1) / 2;$

$b = (s2 + d2) / 2;$

**if**  $A[a] == B[b]$  **then**

**return**  $A[a];$

**if**  $A[a] < B[b]$  **then**

**if**  $(s1 + d1) \% 2 == 0$  **then**

$s1 = a;$

$d2 = b;$

**else**

$s1 = a + 1;$

$d1 = b;$

**else**

**if**  $(s1 + d1) \% 2 == 0$  **then**

$d1 = a;$

$s2 = b;$

**else**

$d1 = a;$

$s2 = b + 1;$

**if**  $A[a] > B[b]$  **then**

**return**  $B[b];$

**return**  $A[a];$

---

### 题目 3.

**解答.** 假设每次随机选择一个方向，若前进  $i$  ( $i$  递增) 米后，未找到宝藏，则回到出发点选择剩余未选择的方向，将每个方向都选择一次后，重新开始循环，直到找到宝藏。

$$\text{cost}(OPT) = 2^j + \varepsilon > 2^j$$

$$\text{cost}(ON) = m(2 + 4 + \dots + 2^j) + 2^j + \varepsilon = (m + 1)2^j + \varepsilon < (m + 1)\text{cost}(OPT)$$

则算法竞争比为  $O(m)$ 。