第五章

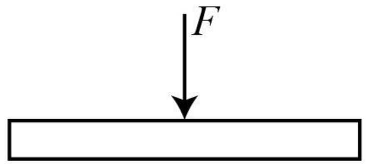
材料力学

弯曲内力

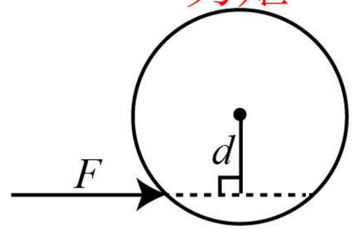
主讲：王帅，机电学院

回顾1：静力学

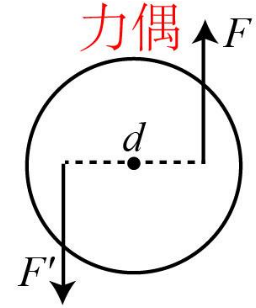
力



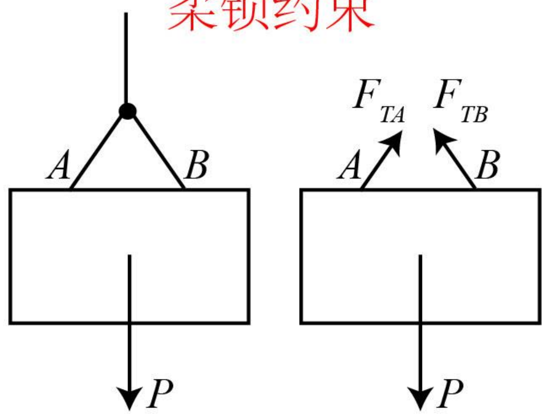
力矩



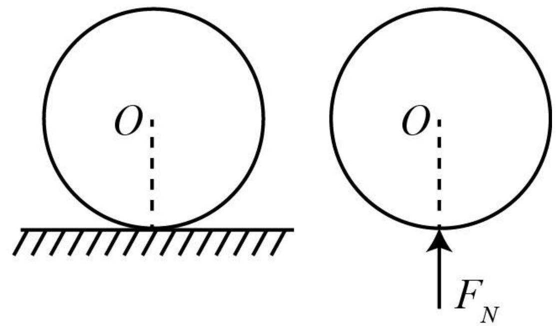
力偶



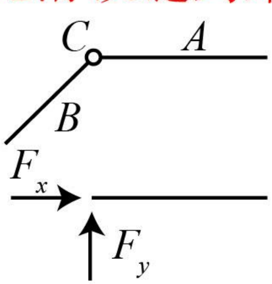
柔锁约束



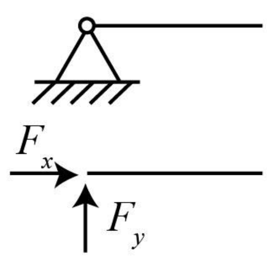
光滑接触面约束



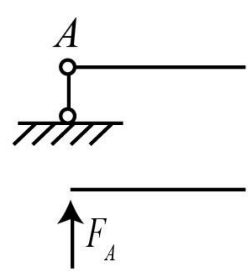
光滑铰链约束



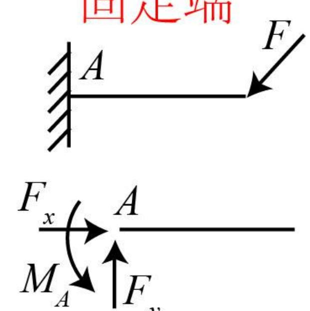
固定铰支座



可动铰支座



固定端



回顾1：静力学

力在轴上的投影：力的大小与力与该轴夹角余弦的乘积。

$$F_x = F\cos\alpha$$

合力投影定理：合力在任一轴上的投影，等于它的各分力在同一轴上的投影的代数和。

$$R_x = \sum F_{ix}$$

力线平移定理：作用在刚体上的力，可以平移至任意一点，但须增加附加力偶。

$$M = \pm Fd$$

合力矩定理：合力对某一点之矩等于力系中各力对同一点之矩的代数和。

$$M_O\left(\vec{F}_R\right) = \sum M_O\left(\vec{F}\right)$$

空间力系的平衡：

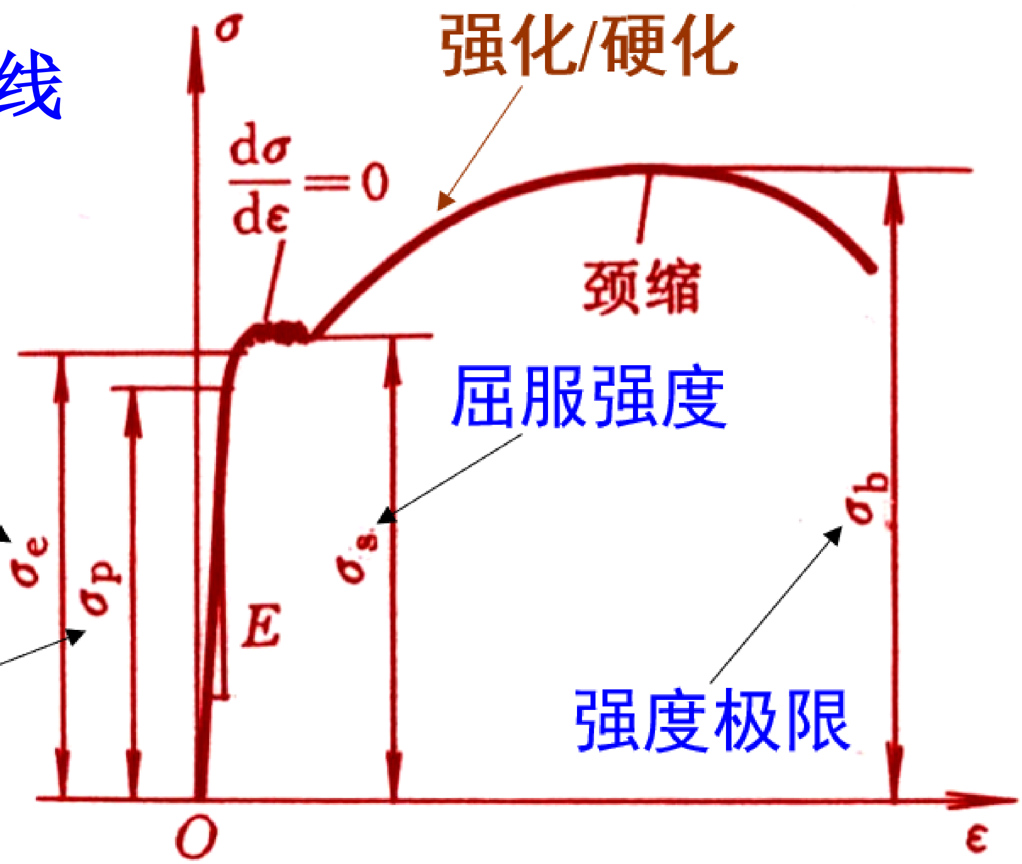
$$\boxed{\vec{F}_R = \sum_1^n \vec{F}_i = 0,\quad \vec{M}_O = \sum_1^n \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = 0}$$

回顾2：轴向拉压和剪切

1. **轴力**——截面法、轴力图

2. **平面假设**——杆件变形前的各横截面在变形后仍为平面且与杆的轴线垂直。

3. **应力应变曲线**



回顾2：轴向拉压和剪切

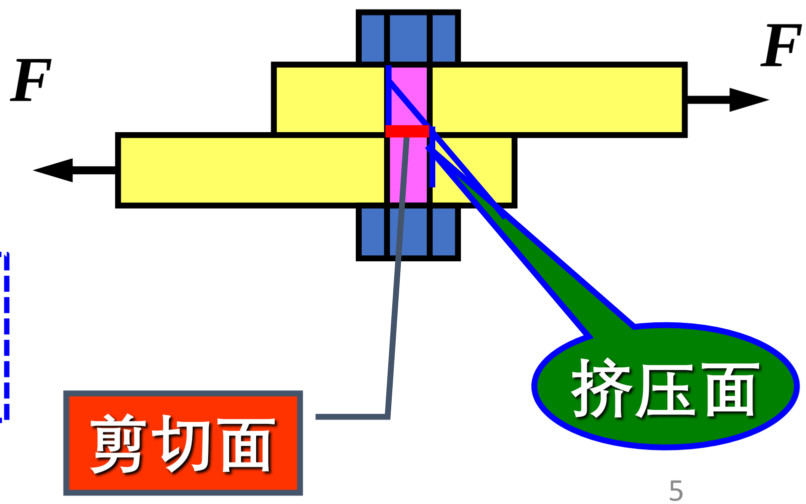
强度条件：$\boxed{\sigma_{\max} = \dfrac{N_{\max}}{A} \le [\sigma]}$

胡克定律：$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon = \Delta l / l]{\sigma = F/A} \boxed{\Delta l = \dfrac{Fl}{EA}}$

泊松比：$\upsilon = -\varepsilon' / \varepsilon$

剪切强度条件：$\boxed{\tau = \dfrac{F_S}{A} \le [\tau]}$

挤压强度条件：$\boxed{\sigma_{bs} = \dfrac{F}{A_{bs}} \le [\sigma_{bs}]}$



回顾3：扭转

薄壁圆筒：$\boxed{\tau = T / 2\pi r^2 \delta}$

切应力互等定理：两相互垂直平面上切应力同时存在，大小相等，指相或背离交线

剪切胡克定理：$\tau = G\gamma$ $\qquad G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$

强度条件：

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_{\mathrm{t}}} \le [\tau]}$$

刚度条件：

$$\boxed{\phi = \frac{Tl}{GI_P} \le [\phi]}$$

或 $\boxed{\phi' = \dfrac{T}{GI_P} \le [\phi']}$

回顾3：扭转

任意切应力：$\boxed{\tau_{\rho}=\dfrac{T\rho}{I_{\mathrm{P}}}}$

极惯性矩：$\boxed{I_{\mathrm{p}}=\int_{A}\rho^{2}\mathrm{d}A}$

最大切应力：$\boxed{\tau_{\max}=\dfrac{T}{W_{\mathrm{t}}}}$

扭转截面系数：$\boxed{W_{\mathrm{t}}=\dfrac{I_{\mathrm{p}}}{\rho_{\max}}}$

	极惯性矩：	扭转截面系数：
圆截面：	$I_{\mathrm{p}}=\dfrac{\pi d^{4}}{32}$	$W_{\mathrm{t}}=\dfrac{\pi d^{3}}{16}$
空心圆截面：	$I_{\mathrm{p}}=\dfrac{\pi(D^{4}-d^{4})}{32}$	$W_{\mathrm{t}}=\dfrac{\pi}{16D}(D^{4}-d^{4})$

5-1：概述

1. 工程实例

5-1：概述

1. 工程实例

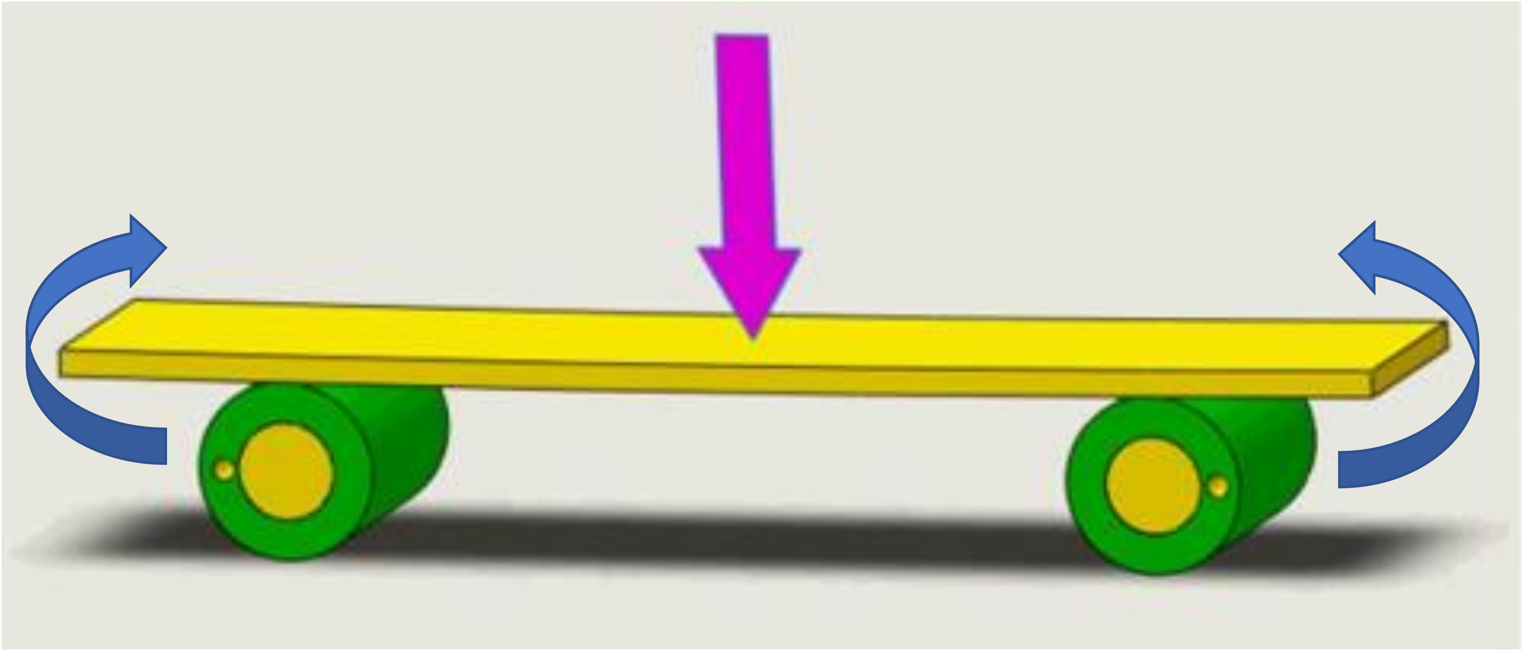
5-1：概述

5-1：概述

2. 基本概念

受力特征：外力（包括力偶）的作用线垂直于杆轴线。

变形特征：变形前为直线的轴线，变形后成为曲线。

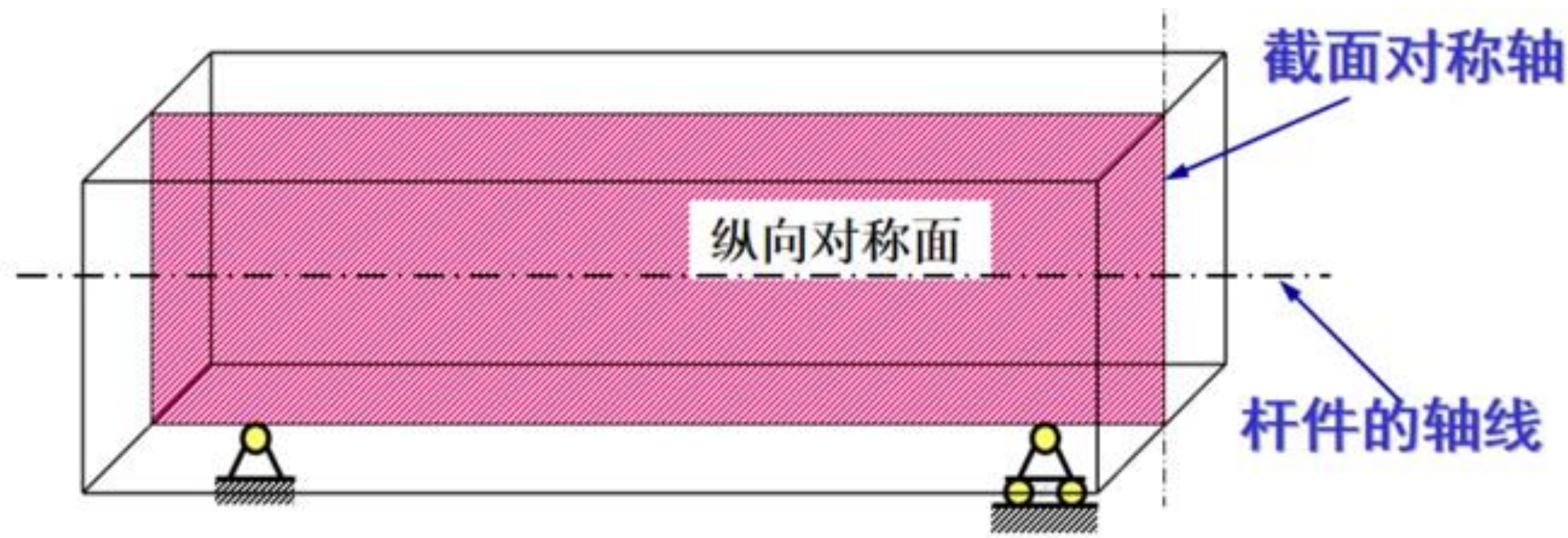


5-1：概述

2. 基本概念

梁：以弯曲变形为主的杆件。

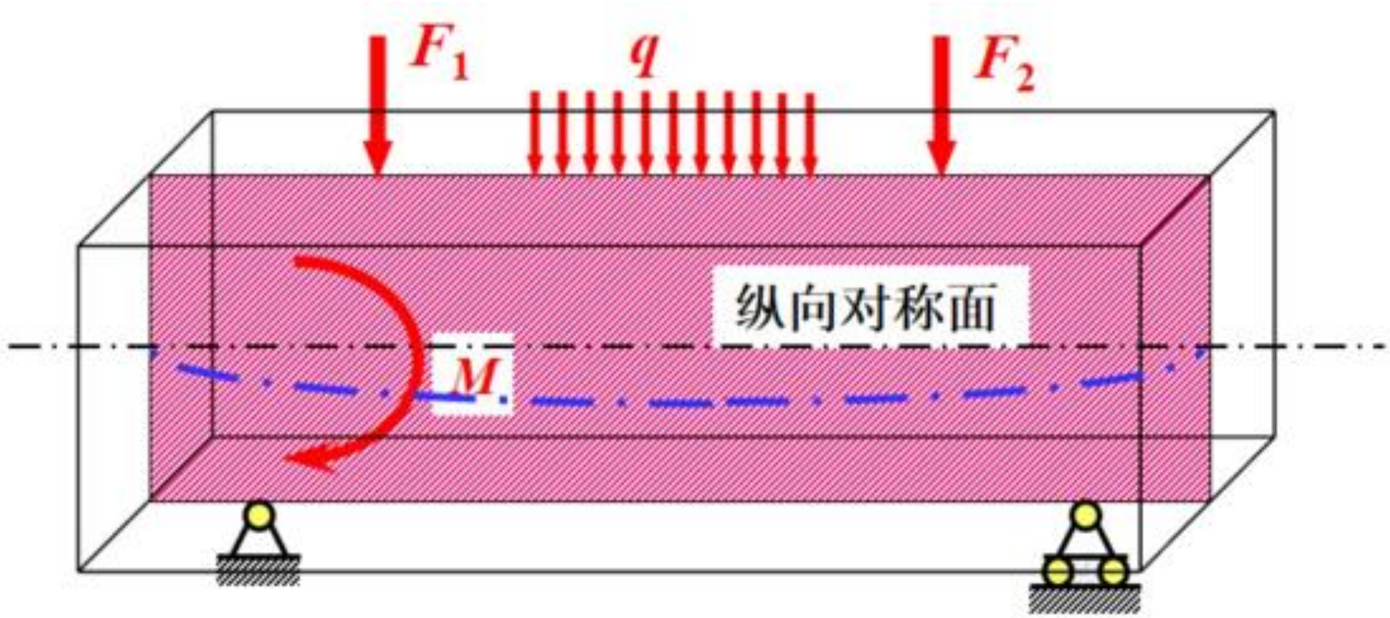
纵向对称面：由横截面的对称轴与梁轴线所构成的平面称为梁的纵向对称面



5-1：概述

2. 基本概念

平面弯曲：梁弯曲变形后的轴线是位于纵向对称面内的一条曲线，这种弯曲称为平面弯曲。

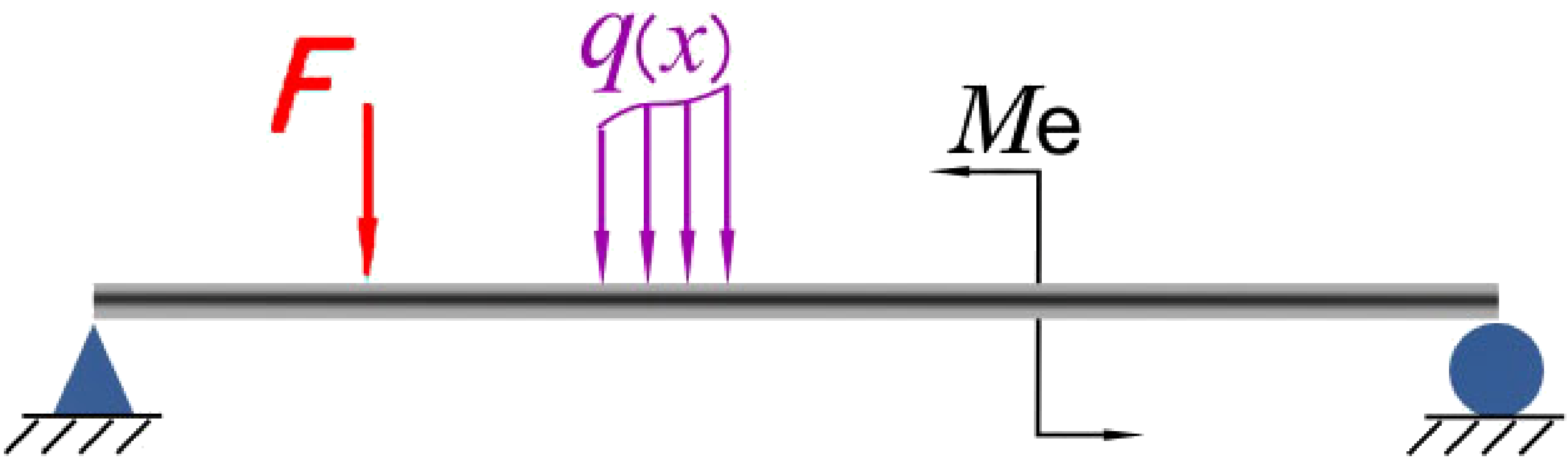


1. 有纵向对称面；2. 外力都在纵向对称面内；3. 弯曲变形后的轴线还在纵向对称面内。

3. 梁的计算简图和分类

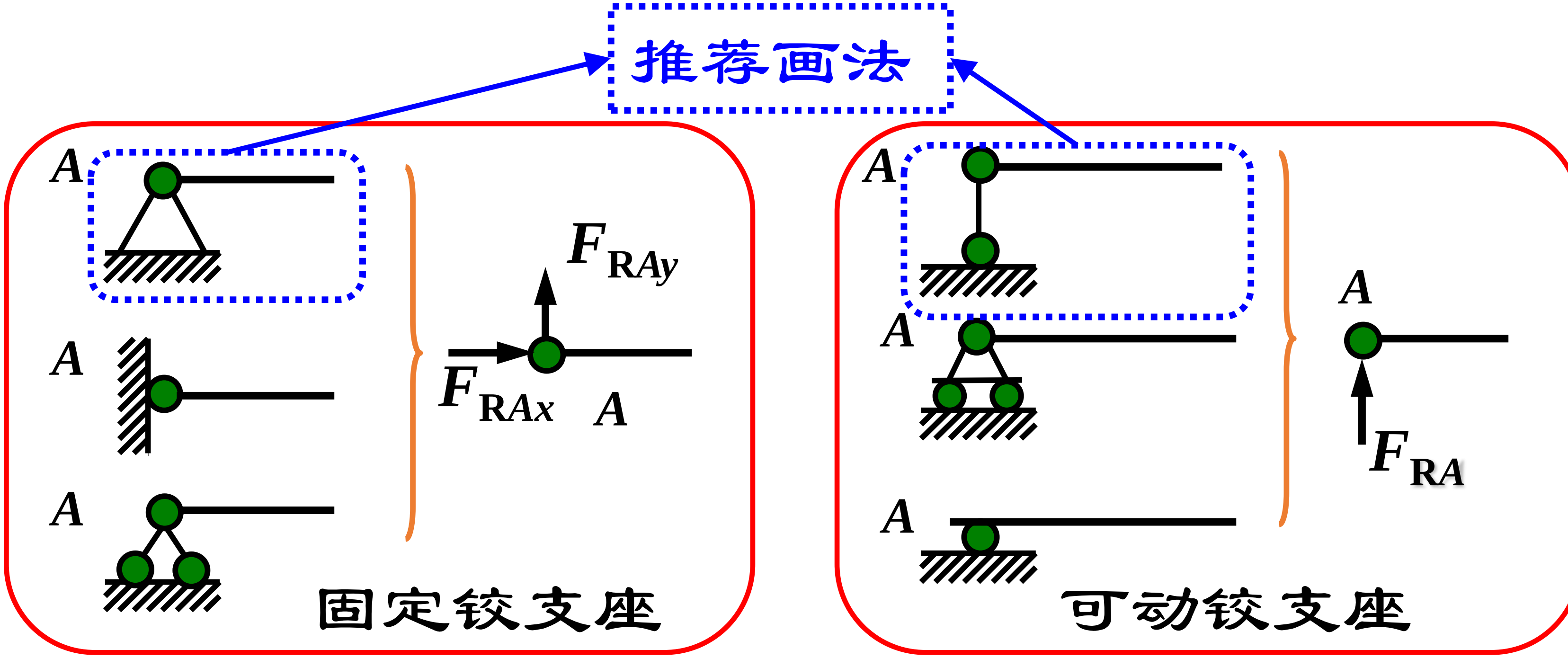
梁的简化：用轴线代替杆件。

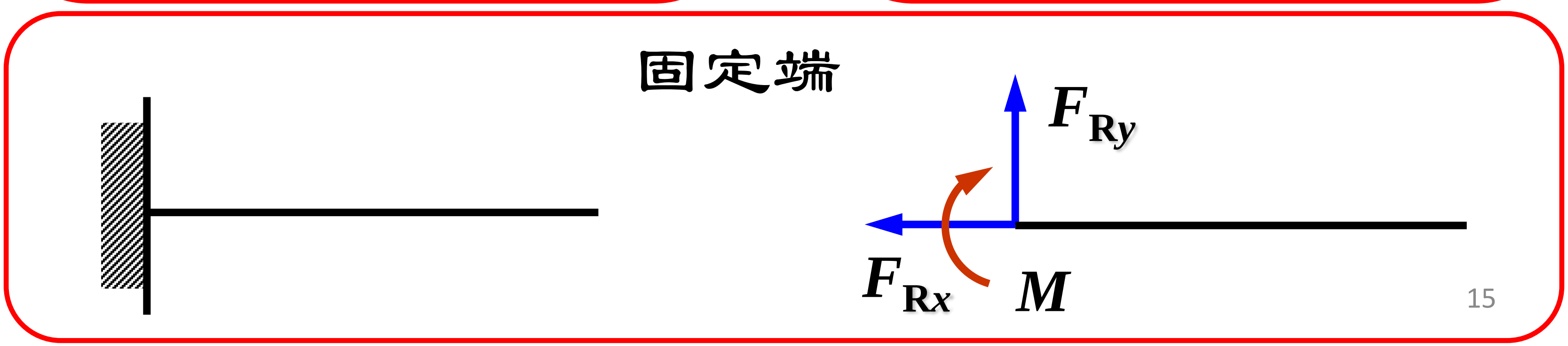
载荷类型：集中力、集中力偶、分布载荷。



3. 梁的计算简图和分类

支座简化：固定铰支座、可动铰支座、固定端。

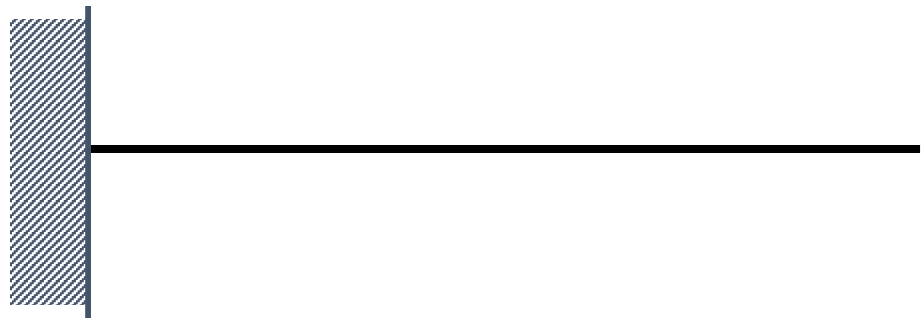




3. 梁的计算简图和分类

梁的分类：悬臂梁、简支梁、外伸梁。

悬臂梁



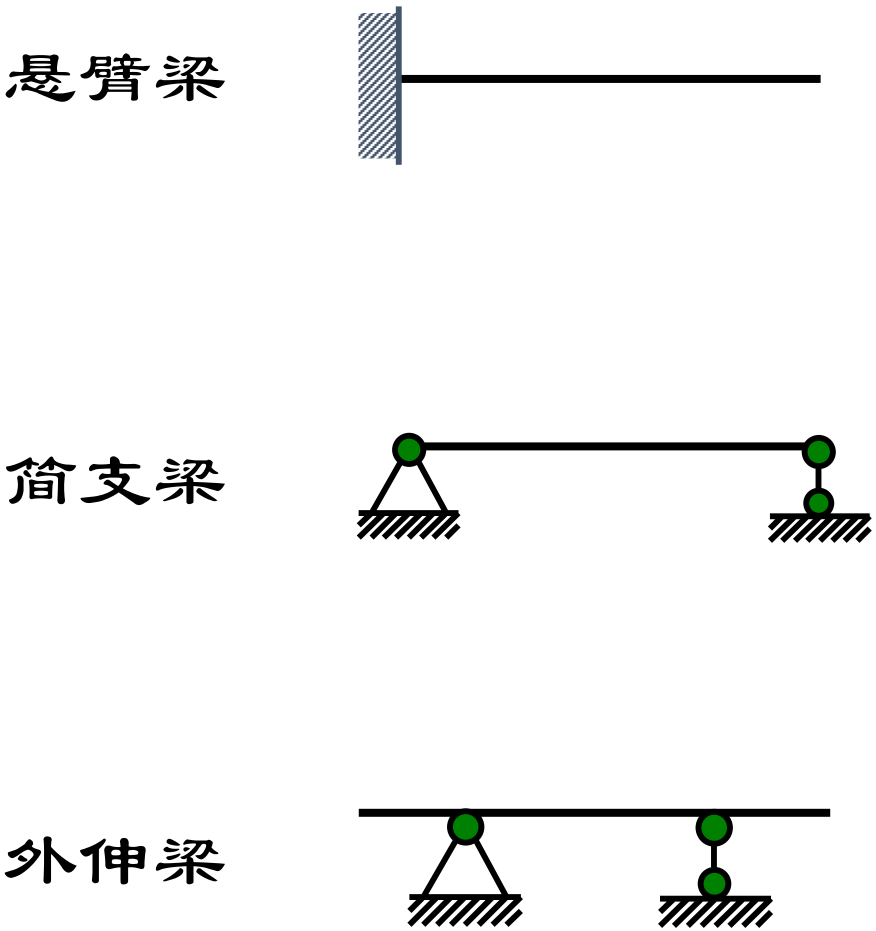
简支梁

外伸梁

单选题 1分

设置

有图中属于超静定问题的是?



A 悬臂梁

B 简支梁

C 外伸梁

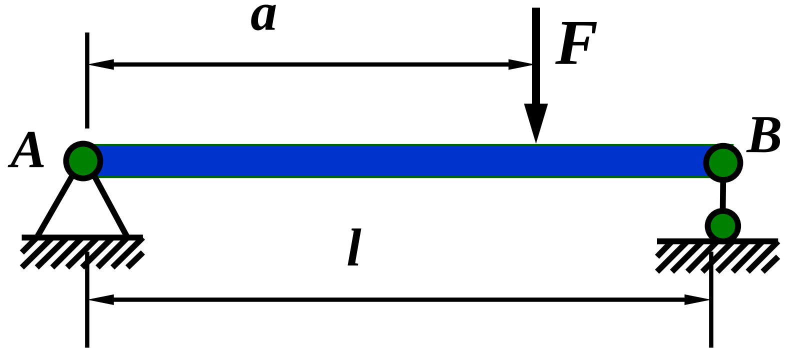
D 都不是

提交

5-2：剪力和弯矩

1. 梁的内力

右图所示简支梁，已知F，a，l，求距离A端x处的m-m截面的内力。



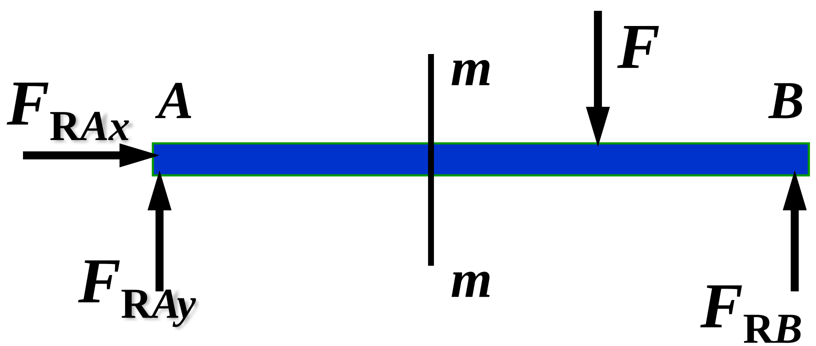
求支座反力

所有的外力 ⇐ 平衡方程 ⇐ 截面法 ⇐ 内力

$$\sum F_x = 0\,, \quad F_{RAx} = 0$$

$$\sum M_A = 0\,, \quad F_{RB} = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum F_y = 0\,, \quad F_{RAy} = \frac{F(l-a)}{l}$$



铰支座A水平方向支反力为0.

m-m截面的内力？

5-2：剪力和弯矩

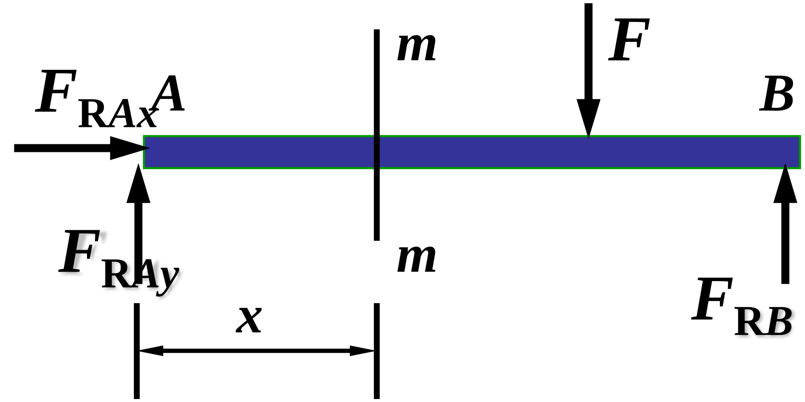
1. 梁的内力

求内力-截面法

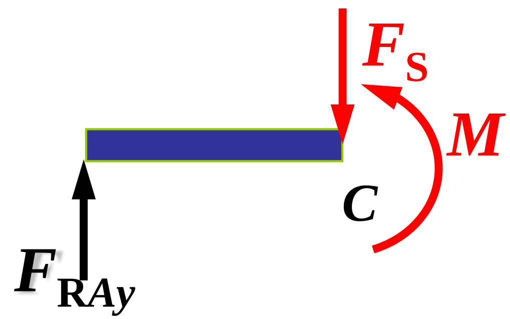
$$\sum F_y = 0, \quad F_S = F_{RAy} = \frac{F(l-a)}{l}$$

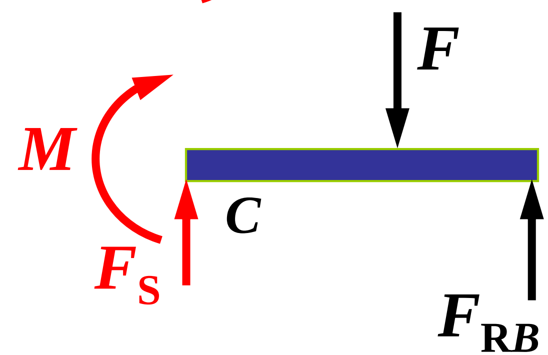
$$\sum M_C = 0, \quad \boxed{M = F_{RAy} \cdot x}$$

与坐标有关。



弯曲构件内力 $\begin{cases} \text{剪力} \\ \text{弯矩} \end{cases}$





1. 剪力F_S：构件受弯时，横截面上其作用线平行于截面的内力。

2. 弯矩M：构件受弯时，横截面上其作用面垂直于截面的内力偶矩。

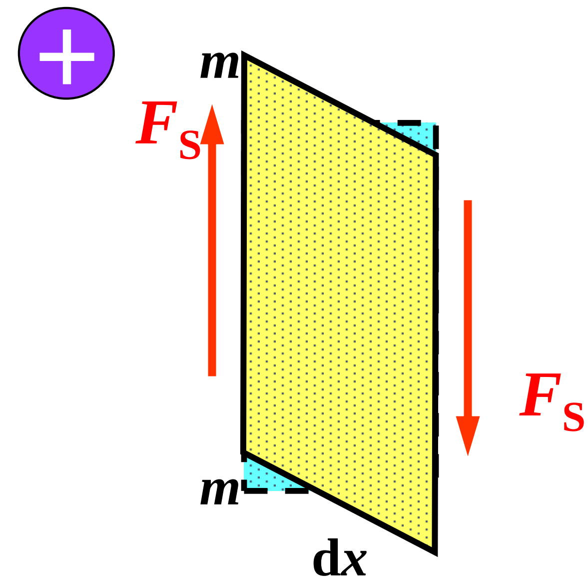
5-2：剪力和弯矩

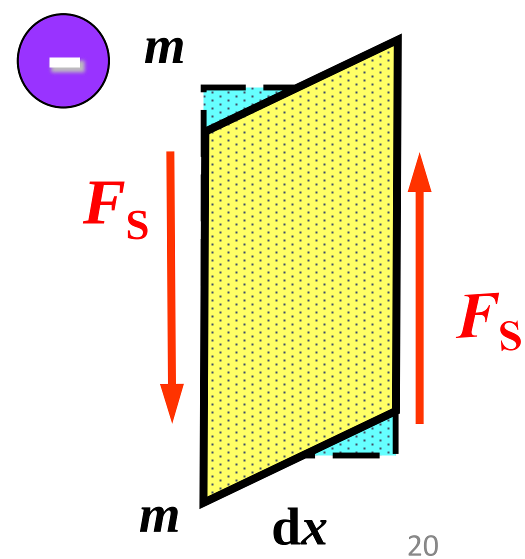
2. 梁内力的符号规定

剪力符号

使dx 微段有左端向上而右端向下的相对错动时，横截面m-m上的剪力为正。或使dx微段有顺时针转动趋势的剪力为正。

使dx微段有左端向下而右端向上的相对错动时，横截面m-m上的剪力为负。或使dx微段有逆时针转动趋势的剪力为负。



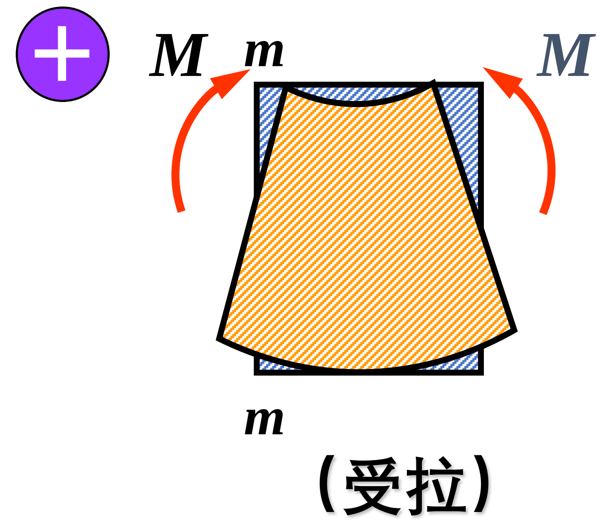


5-2：剪力和弯矩

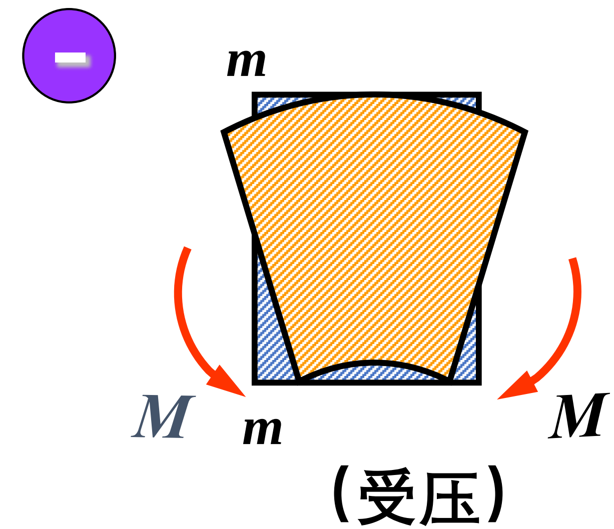
2. 梁内力的符号规定

弯矩符号

当dx 微段的弯曲下凸（即该段的下半部受拉）时，横截面m-m上的弯矩为正；

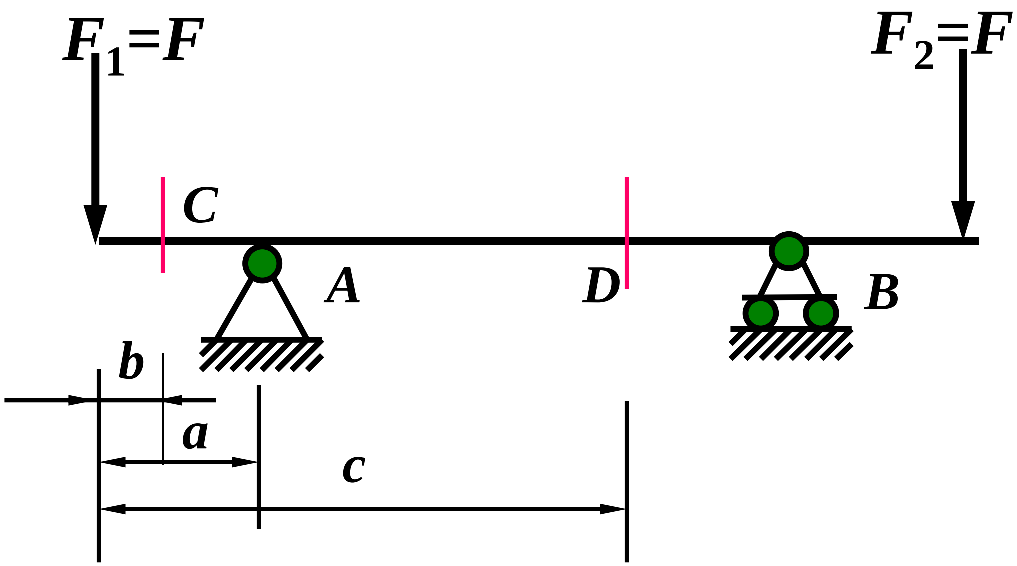


当dx 微段的弯曲上凸（即该段的下半部受压）时，横截面m-m上的弯矩为负。



5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

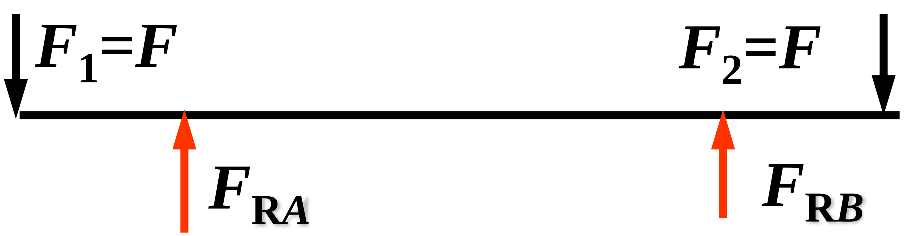
例题 如图所示外伸梁，在距A和B等距的端部分别作用 $F_1 = F_2 = F = 60\text{kN}$；$a = 230\text{mm}$，$b = 100\text{mm}$ 和 $c = 1000\text{ mm}$. 求 C 、D 点处横截面上的剪力和弯矩.



(1) 求支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = F = 60\text{kN}$$

$$F_{RAx}?$$



水平方向的支反力自动满足。

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

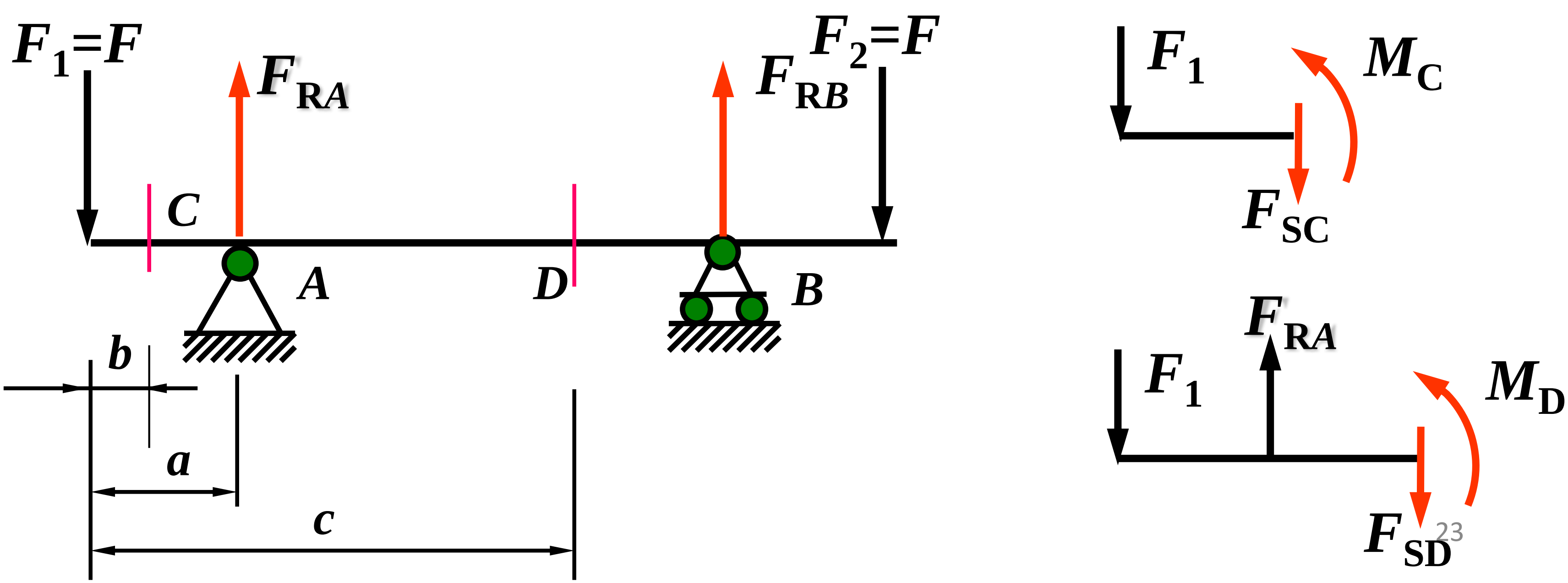
（2）计算C横截面上的剪力F_{SC}和弯矩M_C

$$F_{SC} = -F_1 = -60\text{kN} \qquad M_C = -F_1 b = -6.0\text{kN}\cdot\text{m}$$

（3）计算D横截面上的剪力F_{SD}和弯矩M_D

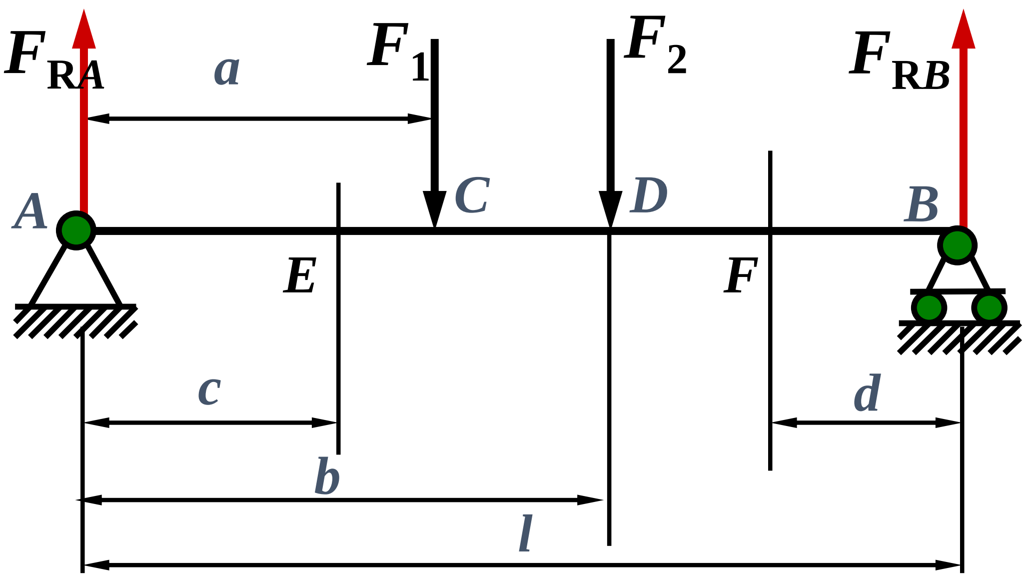
$$F_{SD} = F_{RA} - F_1 = 60 - 60 = 0$$

$$M_D = F_{RA}(c-a) - F_1 c = -Fa = -13.8\text{kN}\cdot\text{m}$$



5-2：剪力和弯矩

例题 图示梁的计算简图。已知 F_1、F_2,且 $F_2 > F_1$，尺寸a、b、c和 l 亦均为已知。试求梁在 E 、 F 点处横截面处的剪力和弯矩。



解: (1)求梁的支反力 F_{RA} 和 F_{RB}

$$\sum M_A = 0$$

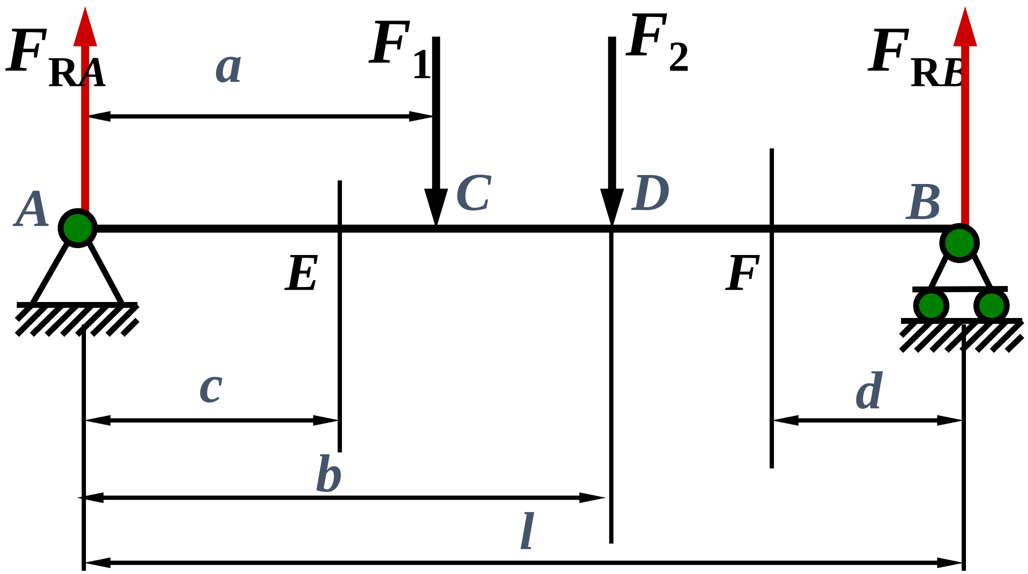
$$F_{\mathrm{RB}} l - F_1 a - F_2 b = 0$$

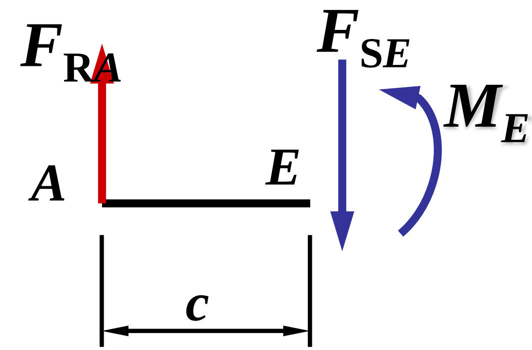
$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{\mathrm{RA}} l + F_1(l-a) + F_2(l-b) = 0$$

$$F_{\mathrm{RA}} = \frac{F_1(l-a)+F_2(l-b)}{l} \qquad F_{\mathrm{RB}} = \frac{F_1 a + F_2 b}{l}$$

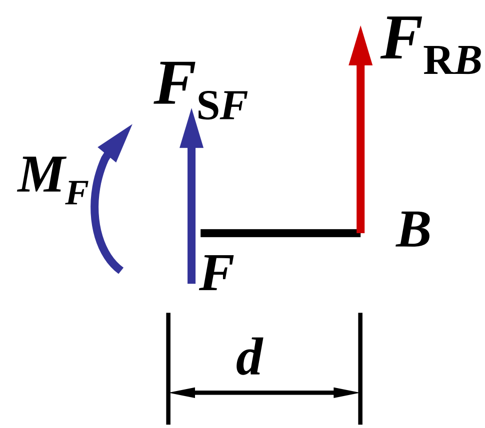
5-2：剪力和弯矩





$$\sum F_y = 0,\quad F_{RA} - F_{SE} = 0 \qquad F_{SE} = F_{RA}$$

$$\sum M_E = 0,\quad M_E - F_{RA}c = 0 \qquad M_E = F_{RA}c$$



$$\sum F_y = 0,\quad F_{SF} + F_{RB} = 0 \qquad F_{SF} = -F_{RB}$$

$$\sum M_F = 0,\quad -M_F + F_{RB}d = 0 \qquad M_F = F_{RB}d$$

E和F点的弯矩，和坐标有关！

内力方程

和内力图

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

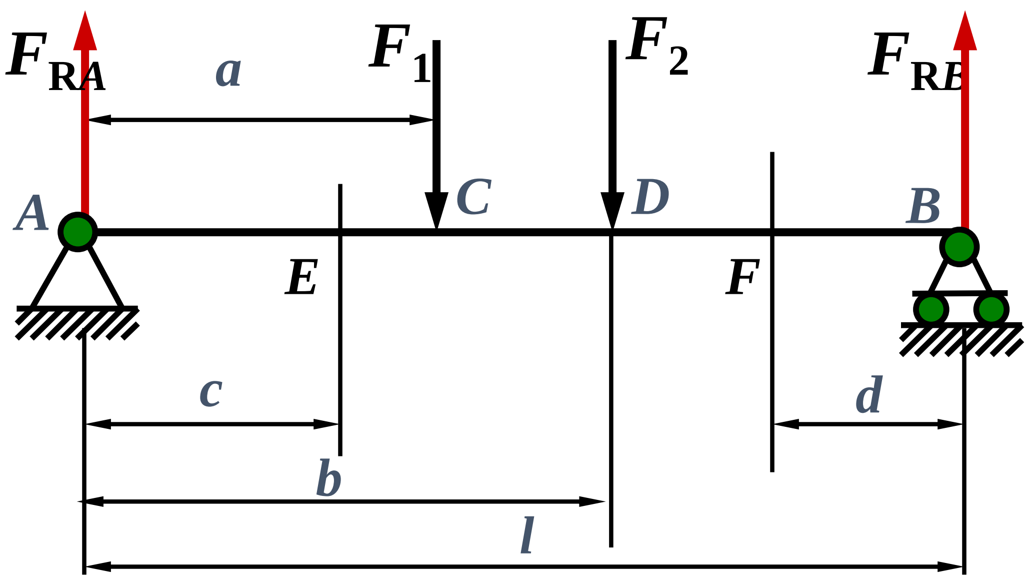
一、剪力方程和弯矩方程

用函数关系表示沿梁轴线各横截面上剪力和弯矩的变化规律，分别称作剪力方程和弯矩方程。

1. 剪力方程 $F_S = F_S(x)$

2. 弯矩方程 $M = M(x)$

通常需用分段函数表示



$$F_{SE} = F_{RA}$$

$$M_E = F_{RA}c$$

$$F_{SF} = -F_{RB}$$

$$M_F = F_{RB}d$$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

二、剪力图和弯矩图

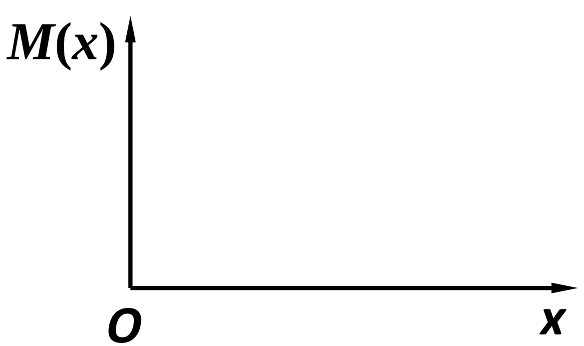
以平行于梁轴的横坐标x表示横截面的位置,以纵坐标表示相应截面上的剪力和弯矩.这种图线分别称为剪力图和弯矩图。

剪力图为正值画在 x 轴上侧，负值画在x 轴下侧

弯矩图为正值画在 x 轴上侧，负值画在x 轴下侧

⇨ 不做强制要求，建议用正负号表示。

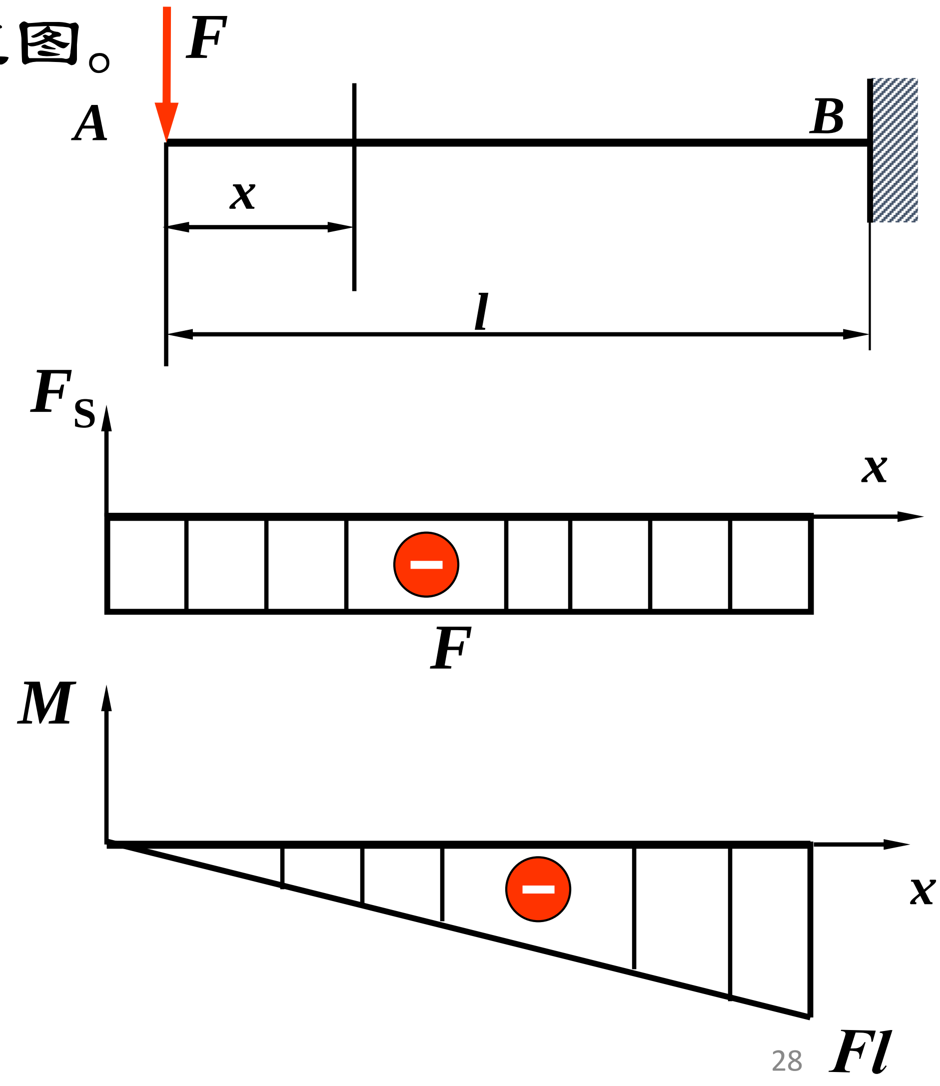
F_S 图的坐标系



M 图的坐标系

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题 如图所示的悬臂梁在自由端受集中荷载 F 作用，试作此梁的剪力图和弯矩图。



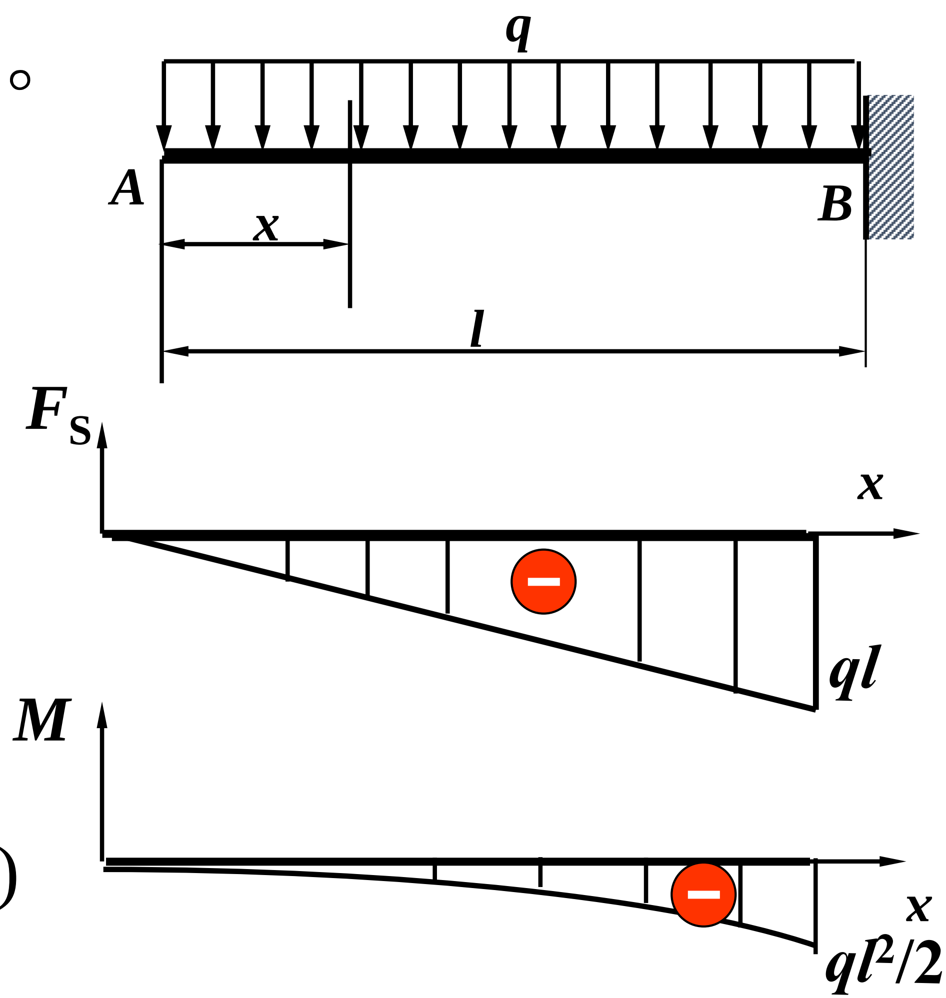
解：列出梁的剪力方程和弯矩方程

$$F_S(x) = -F \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = -Fx \quad (0 \le x < l)$$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题 如图所示的悬臂梁在自由端受均布力q 作用，试作此梁的剪力图和弯矩图。



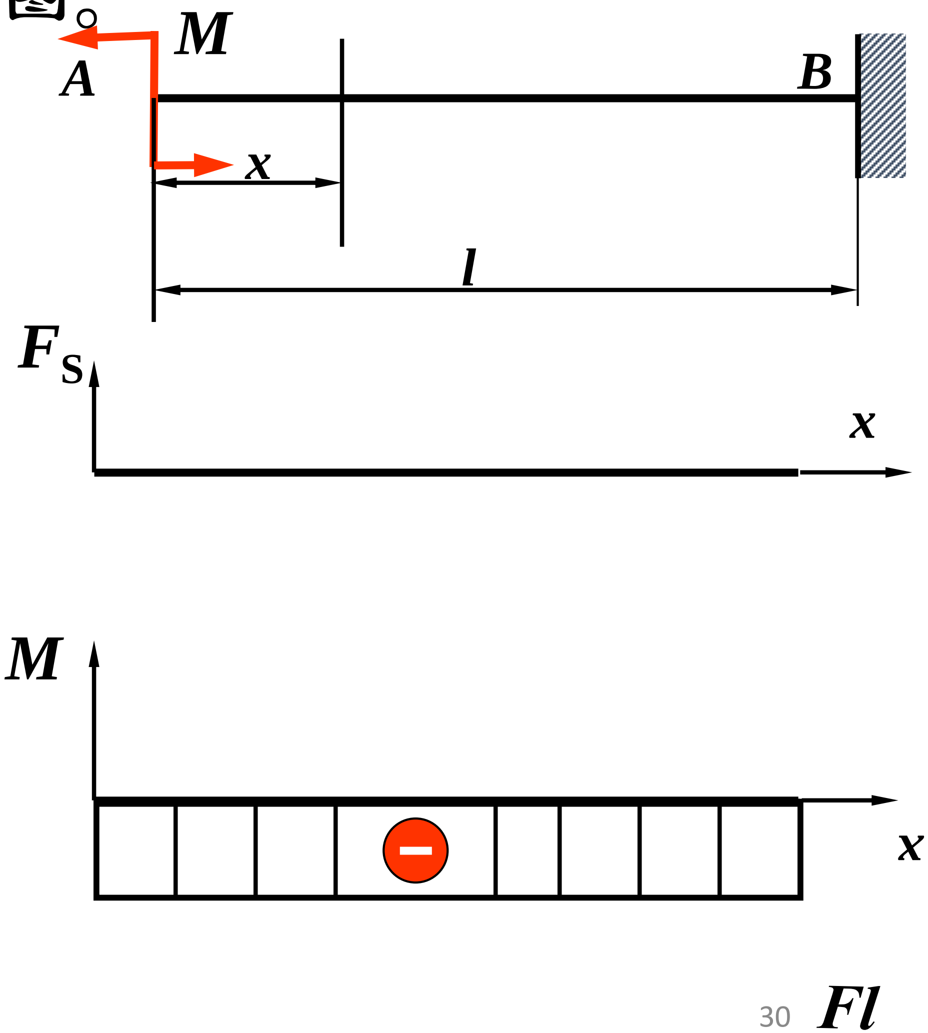
解： 列出梁的剪力方程和弯矩方程

$$F_S(x) = -qx \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = -qx^2/2 \quad (0 \le x < l)$$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题 如图所示的悬臂梁在自由端受集中力偶M作用，试作此梁的剪力图和弯矩图。



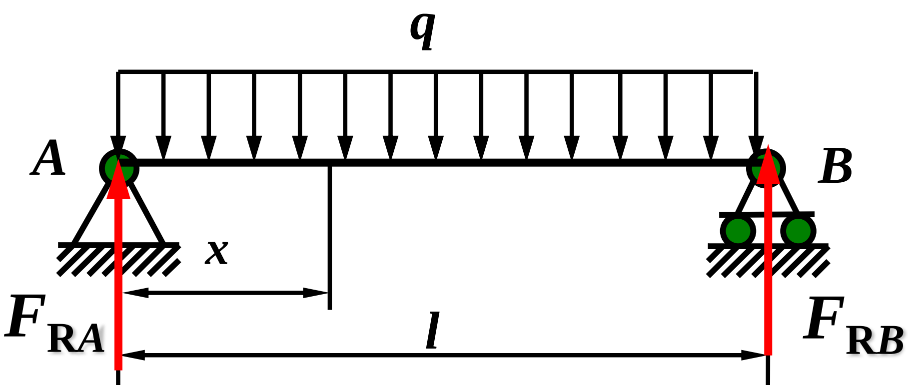
解： 列出梁的剪力方程和弯矩方程

$$F_S(x) = 0 \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = -M \quad (0 \le x < l)$$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题 图示的简支梁,在全梁上受集度为q的均布荷载用。试作此梁的剪力图和弯矩图。



解：

（1） 求支反力

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{ql}{2}$$

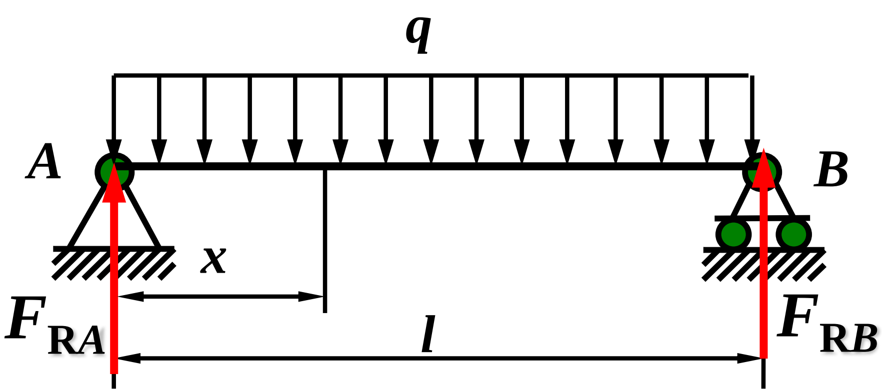
（2） 列剪力方程和弯矩方程。

$$F_S(x) = F_{RA} - qx = \frac{ql}{2} - qx \qquad (0 < x < l)$$

$$M(x) = F_{RA}x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \qquad (0 \le x \le l)$$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

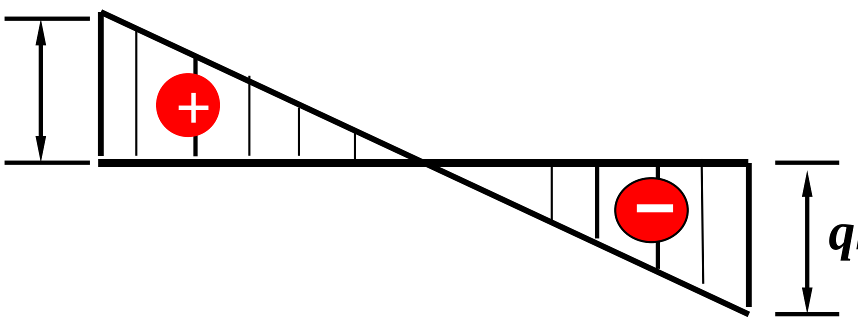
$$F_S(x)=\frac{ql}{2}-qx \quad (0<x<l)$$



剪力图为一倾斜直线

x=0 处， $F_S=\dfrac{ql}{2}$

x= l 处， $F_S=-\dfrac{ql}{2}$

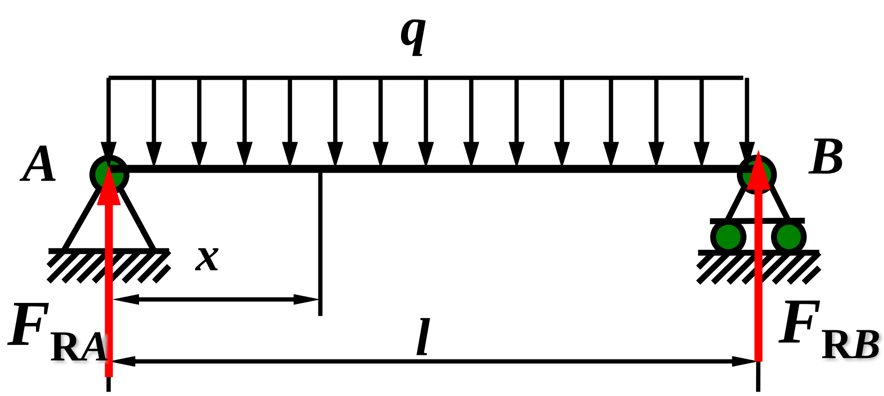


绘出剪力图

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

$$M(x)=F_{RA}x-qx\cdot\frac{x}{2}=\frac{qlx}{2}-\frac{qx^2}{2}\qquad(0\le x\le l)$$

弯矩图为一条二次抛物线

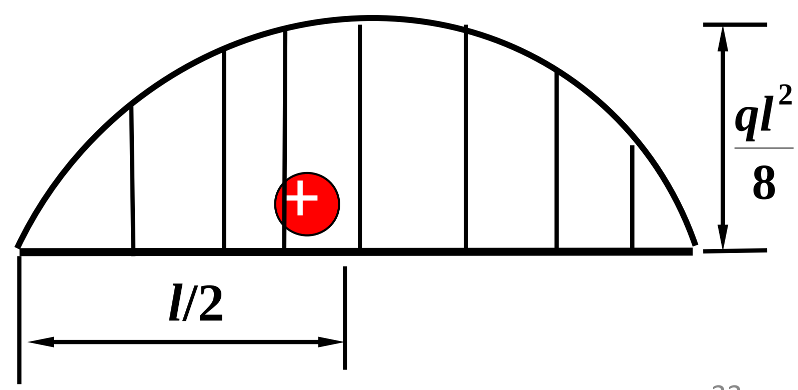


$$x=0,\quad M=0$$

$$x=l,\quad M=0$$

令 $$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{ql}{2}-qx=0$$

绘出弯矩图

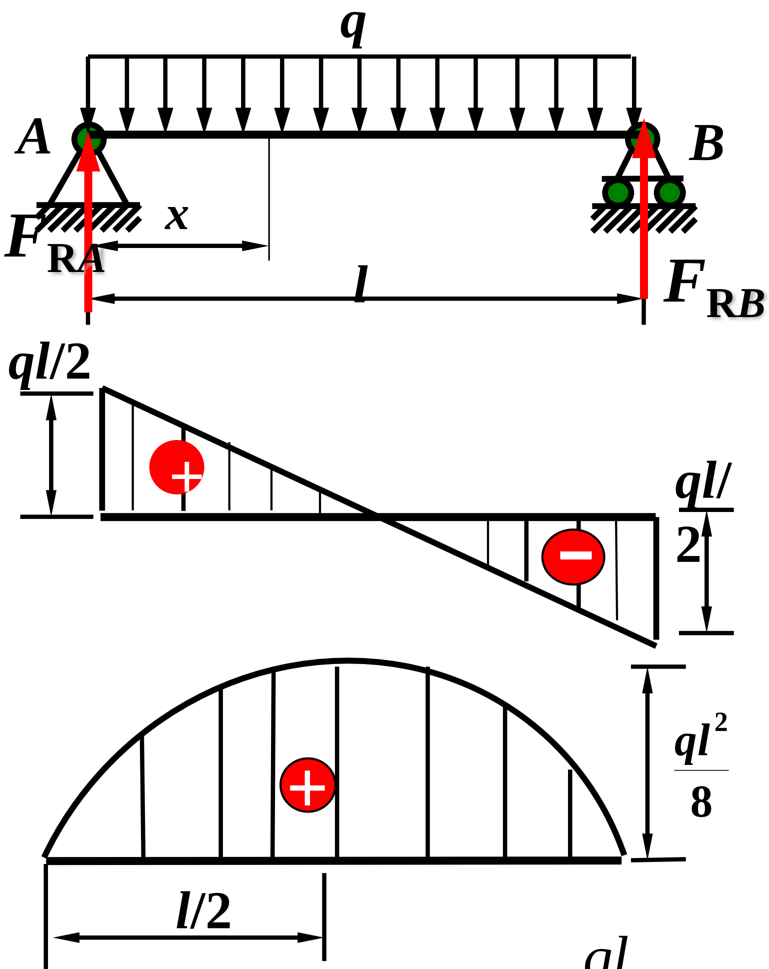


得驻点 $$x=\frac{l}{2}$$

弯矩的极值

$$M_{\max}=M_{x=\frac{l}{2}}=\frac{ql^2}{8}$$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图



$$F_S(x)=\frac{ql}{2}-qx$$

$$M(x)=\frac{qlx}{2}-\frac{qx^2}{2}$$

梁在跨中截面上的弯矩值为最大 $M_{\max}=\dfrac{ql^2}{8}$

但此截面上 $F_S=0$

两支座处内侧横截面上剪力绝对值为最大

$$F_{S\max}=\frac{ql}{2}$$

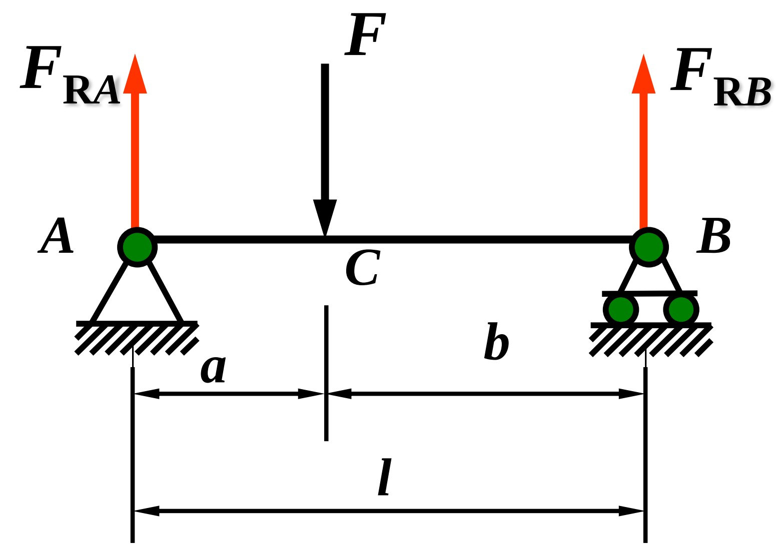
$$\frac{dM(x)}{dx}=\frac{ql}{2}-qx=F_S(x)$$

剪力和弯矩的导数，恰好相等。

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题 图示的简支梁在C点处受集中荷载 F 作用.

试作此梁的剪力图和弯矩图.



解：（1）求梁的支反力

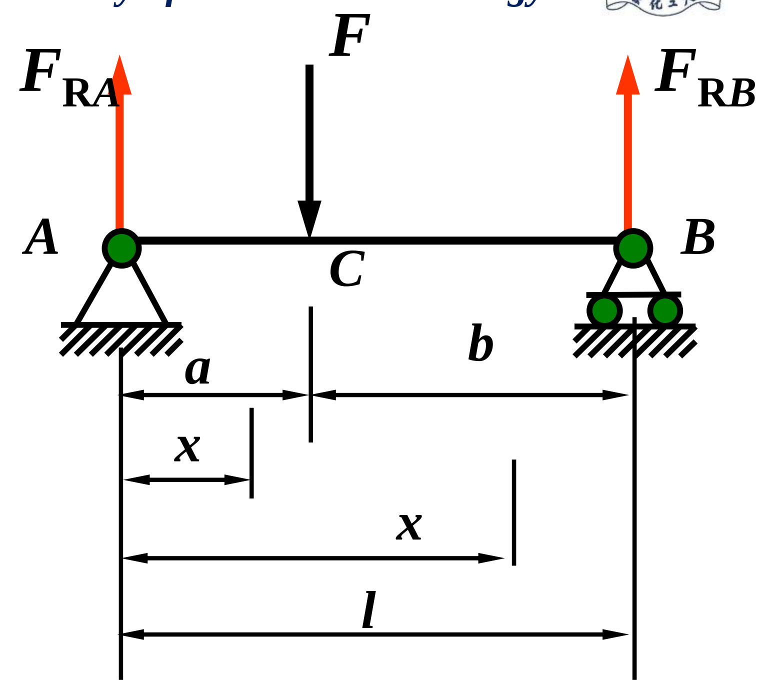
$$F_{RA}=\frac{Fb}{l}\qquad F_{RB}=\frac{Fa}{l}$$

因为AC段和CB段的内力方程不同，所以必须分段列剪力方程和弯矩方程.

将坐标原点取在梁的左端

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

将坐标原点取在梁的左端



AC段

$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} \qquad (0 < x < a) \qquad (1)$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l}x \qquad (0 \le x \le a) \qquad (2)$$

CB段

$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} - F = -\frac{F(l-b)}{l} = -\frac{Fa}{l} \qquad (a < x < l) \qquad (3)$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l}x - F(x-a) = \frac{Fa}{l}(l-x) \qquad (a \le x \le l) \qquad (4)$$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

$$F_S(x)=\frac{Fb}{l}\quad(0<x<a)\quad(1)$$

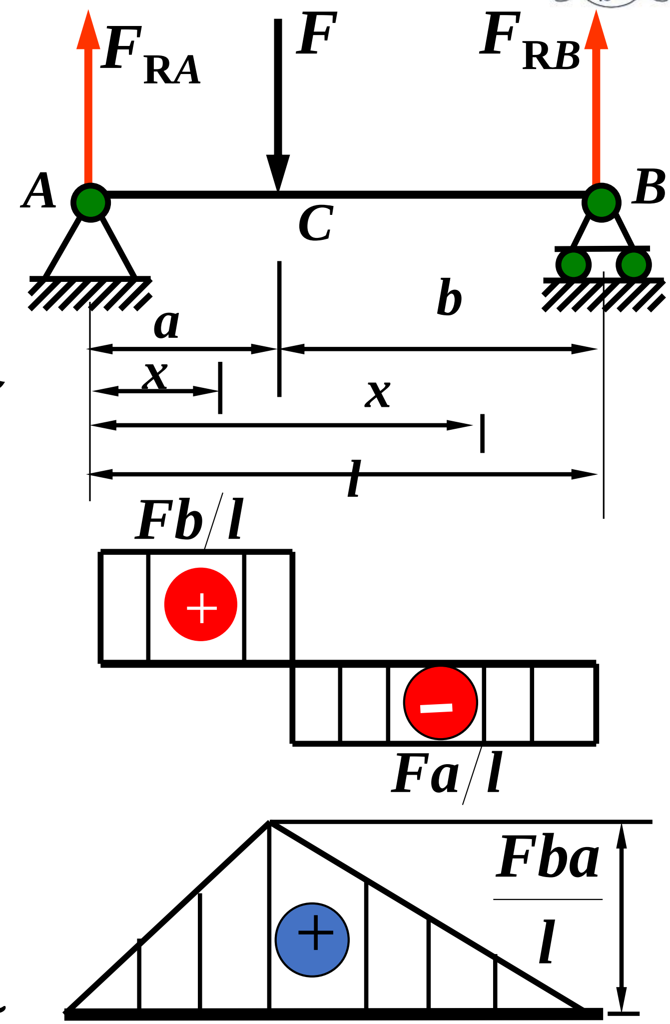
$$F_S(x)=-\frac{Fa}{l}\quad(a<x<l)\quad(3)$$

由(1),(3)两式可知，AC、CB两段梁的剪力图各是一条平行于 x 轴的直线.

$$M(x)=\frac{Fb}{l}x\quad(0\le x\le a)\quad(2)$$

$$M(x)=\frac{Fa}{l}(l-x)\quad(a\le x\le l)\quad(4)$$

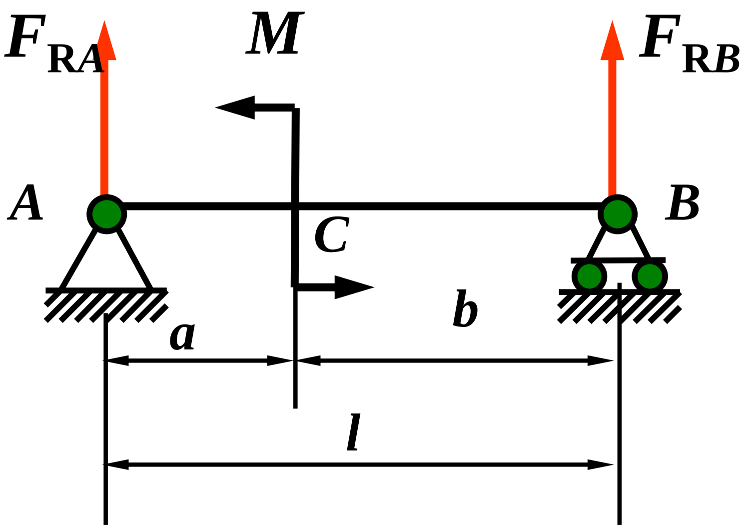
由(2)，(4)式可知，AC、CB 两段梁的弯矩图各是一条斜直线.



M斜率和F_S

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

例题 图示的简支梁在 C 点处受矩为 M 的集中力偶作用.试作此梁的的剪力图和弯矩图.



解：求梁的支反力

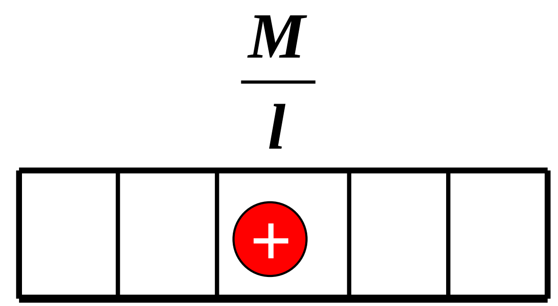
$$F_{RA}=\frac{M}{l} \qquad F_{RB}=-\frac{M}{l}$$

将坐标原点取在梁的左端.

因为梁上没有横向外力，所以全梁只有一个剪力方程

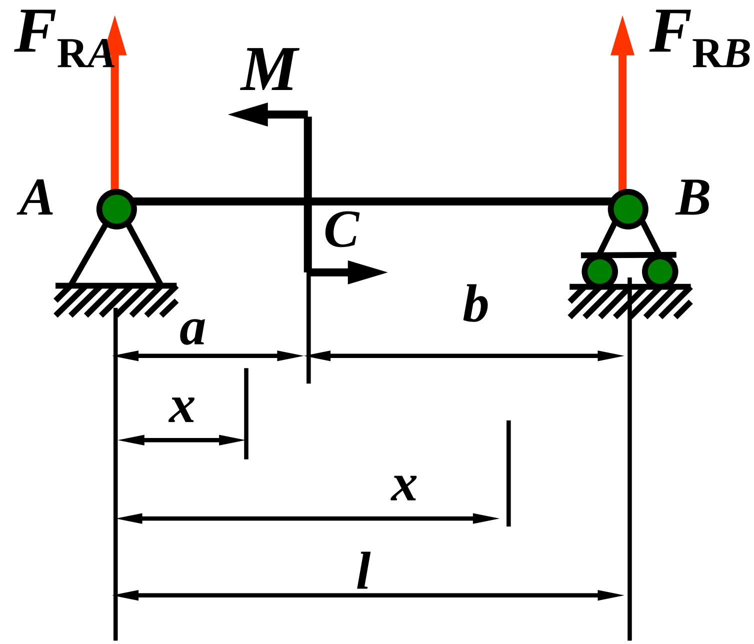
$$F_S(x)=\frac{M}{l} \quad (0<x<l) \quad (1)$$

由(1)式画出整个梁的剪力图是一条平行于 x 轴的直线.



5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

AC 段和 BC 段的弯矩方程不同



AC段

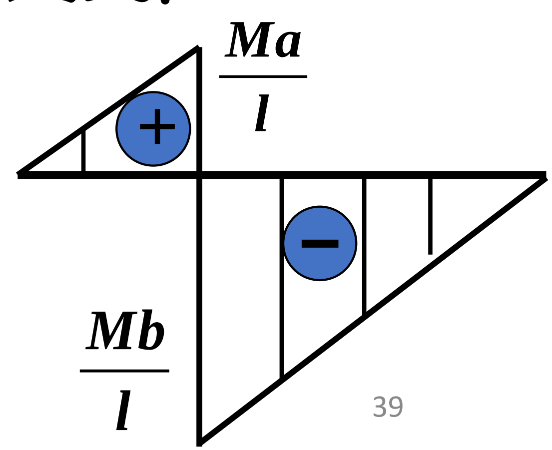
$$M(x)=\frac{M}{l}x \quad (0 \le x < a)$$

CB段

$$M(x)=\frac{M}{l}x-M=-\frac{M}{l}(l-x)$$

$$(a < x \le l)$$

AC,CB 两梁段的弯矩图各是一条倾斜直线.



AC段 $x=0\,,\quad M=0$

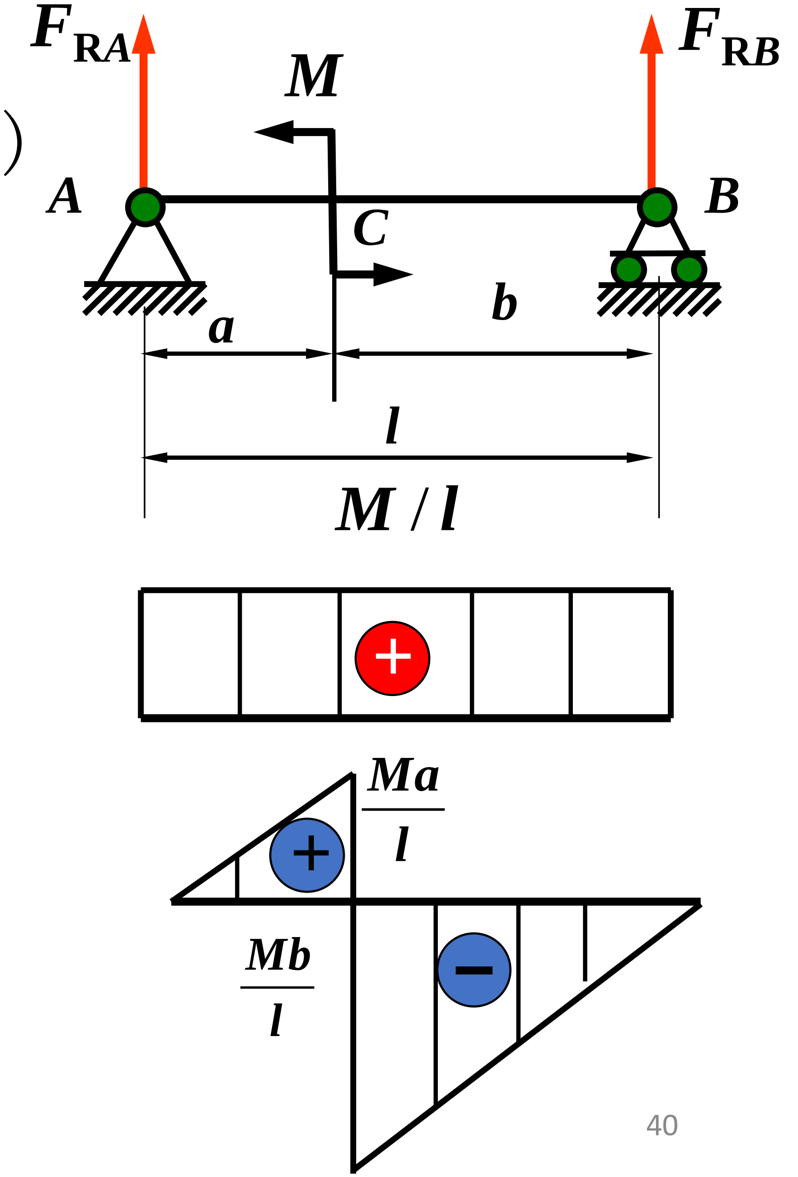
$x=a\,,\quad M_{C左}=Ma/l$

CB段 $x=a,\quad M_{C右}=-Mb/l$

$x=l,\quad M=0$

5-3：剪力和弯矩方程 剪力图和弯矩图

梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩值(图)发生突变，其突变值等于集中力偶矩的数值. 此处剪力图没有变化.

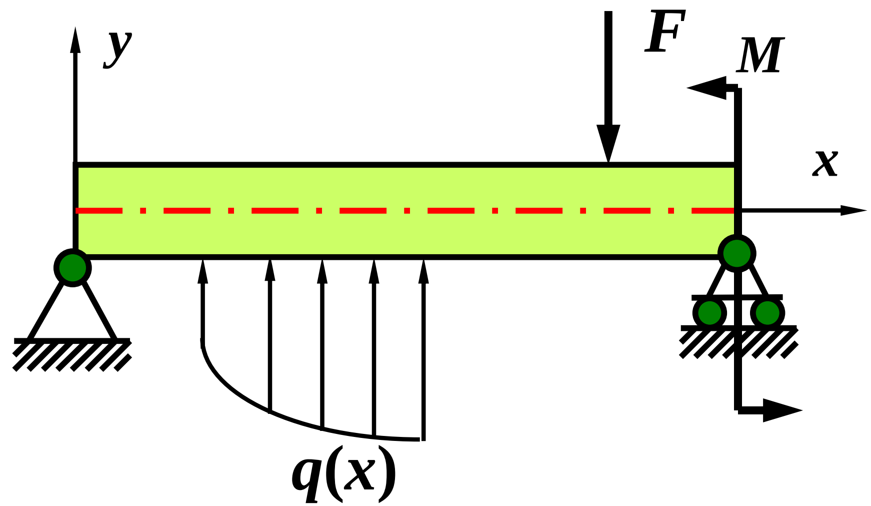


M斜率和F_S

q、M和F_S的关系？

一、弯矩、剪力与分布荷载集度间的微分关系

设梁上作用有任意分布荷载其集度$q = q(x)$

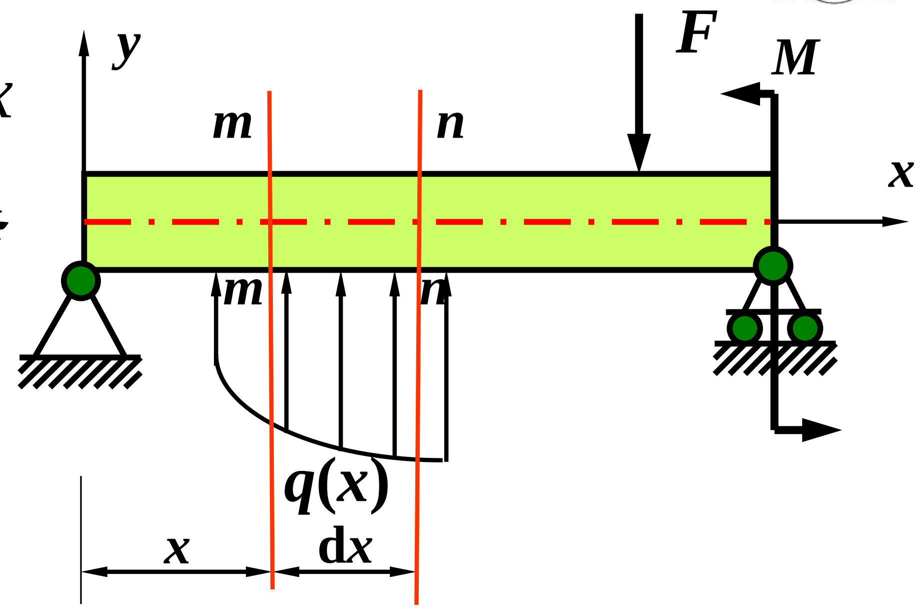


规定 $q(x)$向上为正。

将 x 轴的坐标原点取在梁的左端。

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

假想地用坐标为 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 的两横截面 m-m 和 n-n 从梁中取出 $\mathrm{d}x$ 微段。



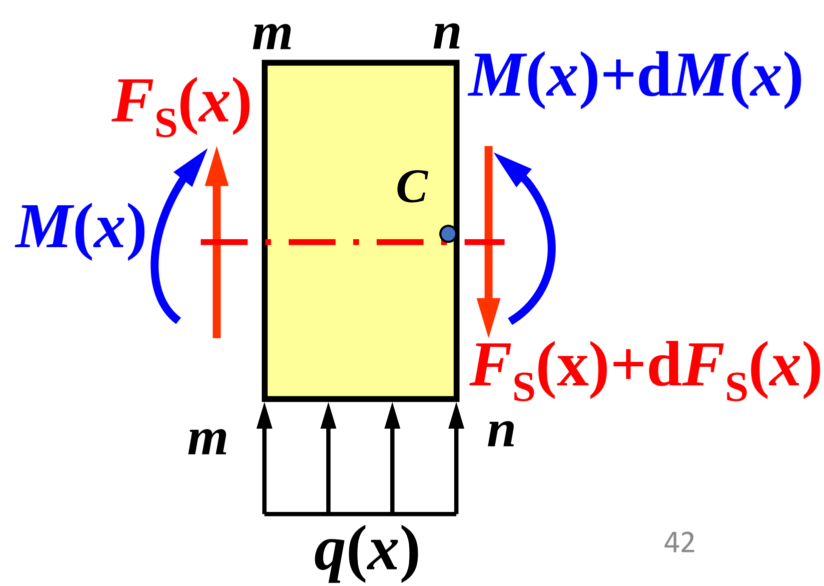
m-m 截面上内力为：

$F_S(x)$， $M(x)$

$x+\mathrm{d}x$ 截面处则分别为

$F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x)$, $M(x)+\mathrm{d}M(x)$

由于 $\mathrm{d}x$ 很小，略去 $q(x)$ 沿 $\mathrm{d}x$ 的变化。



5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

写出微段梁的平衡方程

$$\sum F_y = 0 \qquad F_S(x) - [F_S(x) + dF_S(x)] + q(x)dx = 0$$

得到 $\boxed{\dfrac{dF_S(x)}{dx} = q(x)}$

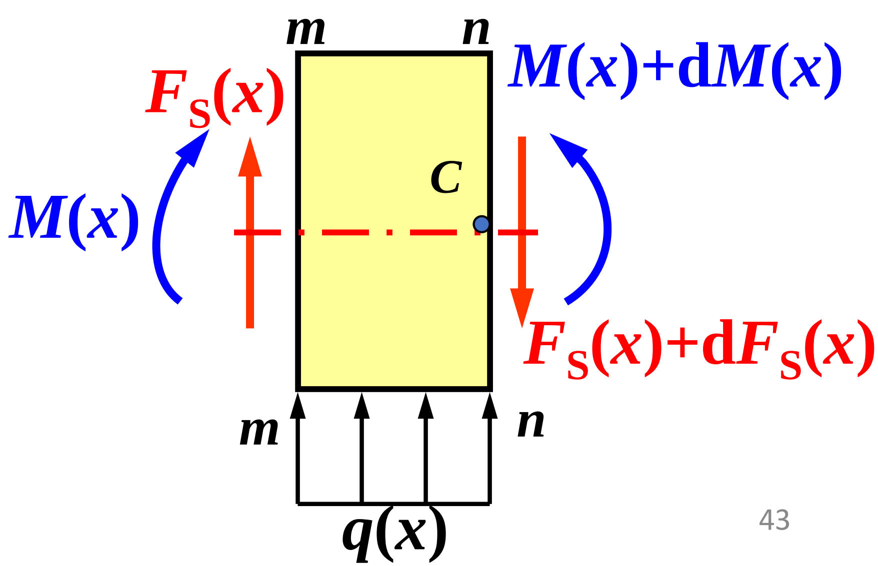
$$\sum M_C = 0$$

$$[M(x) + dM(x)] - M(x) - F_S(x)\,dx - q(x)dx\frac{dx}{2} = 0$$

小变形假设！

略去二阶无穷小量即得

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)}$$



5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{S}}(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_{\mathrm{S}}(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x)}$$

公式的几何意义

（1）剪力图上某点处的切线斜率等于该点处荷载集度的大小;

（2）弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小;

（3）根据$q(x)>0$或$q(x)<0$来判断弯矩图的凹凸性。

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

二、$q(x)$、$F_S(x)$图、M（x）图三者间的关系

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)}$$

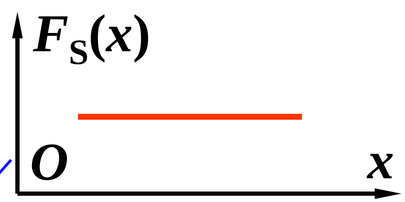
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x)}$$

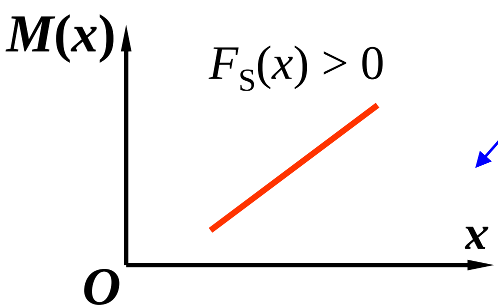
1. 梁上无分布荷载的区域（无集中力和集中力偶），$q(x) = 0$

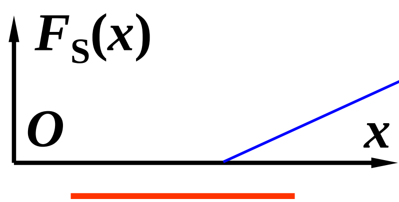
剪力图为一条水平直线，弯矩图为一斜直线

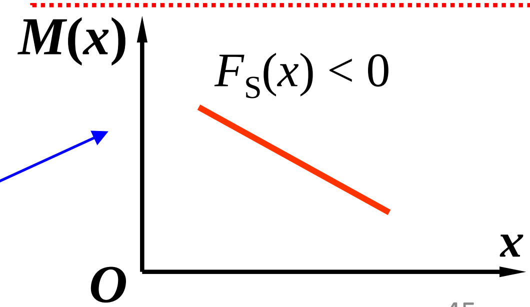
当 $F_S(x) > 0$ 时；向右上方倾斜。



当 $F_S(x) < 0$ 时；向右下方倾斜。







二、$q(x)$、$F_S(x)$图、M（x）图三者间的关系

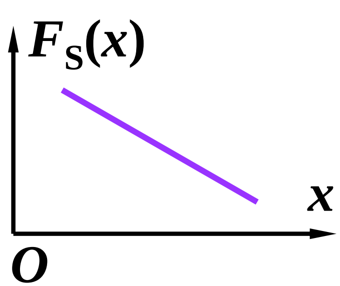
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x)}$$

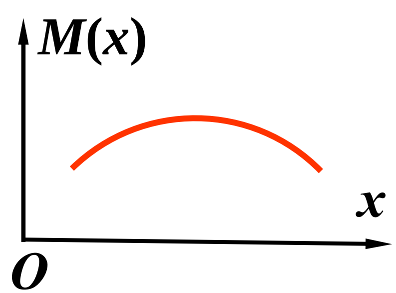
2. 梁上只有均布荷载的区域

$q(x)<0$，方向向下

$F_S(x)$：右下方倾斜的直线。

$M(x)$：上凸的二次抛物线。

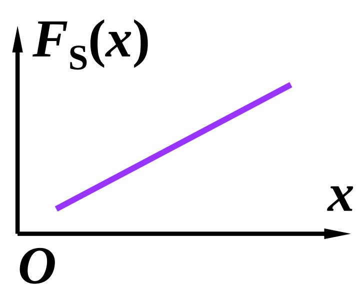


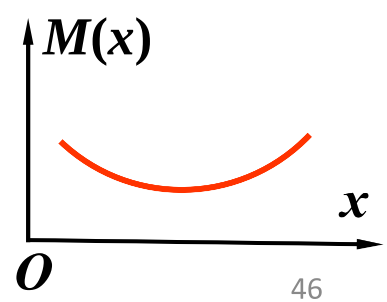


$q(x)>0$，方向向上

$F_S(x)$：右上方倾斜的直线。

$M(x)$：下凸的二次抛物线。



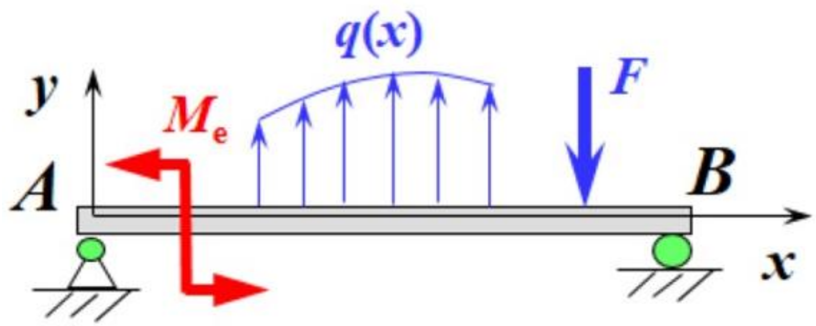


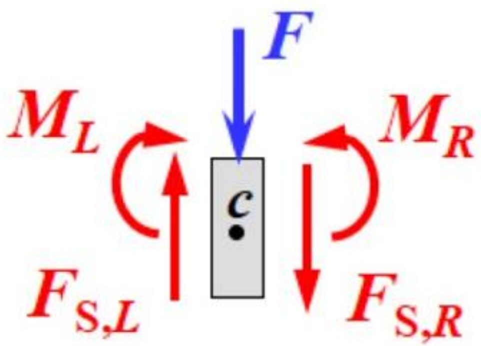
5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

二、$q(x)$、$F_S(x)$图、M（x）图三者间的关系

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)}\qquad\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)}\qquad\boxed{\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x)}$$

3. 在**集中力**作用处，剪力有突变，其突变值等于集中力的值，弯矩无变化，但弯矩图有转折。





$$\sum F_y=0,\qquad F_{S,L}=F+F_{S,R}$$

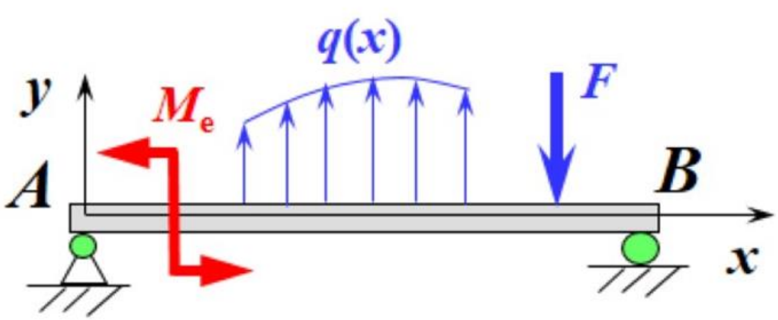
$$\sum M_C(F)=0,\qquad M_L=M_R$$

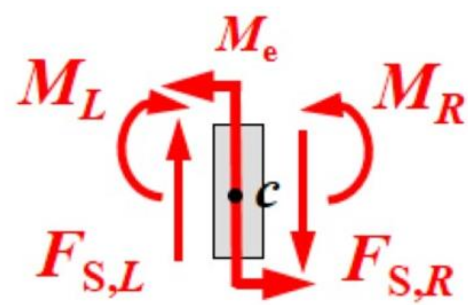
5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

二、$q(x)$、$F_S(x)$图、M（x）图三者间的关系

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)}\qquad\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)}\qquad\boxed{\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x)}$$

4. 在**集中力偶**作用处，弯矩图突变，其突变值等于集中力偶的值，但剪力无变化。





$$\sum F_y=0,\qquad F_{S,L}=F_{S,R}$$

$$\sum M_C(F)=0,\qquad M_L=M_R+M_e$$

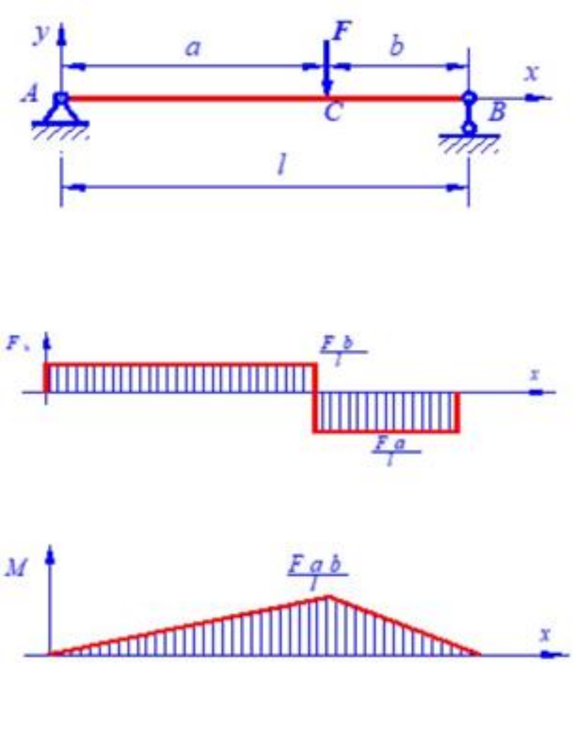
5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

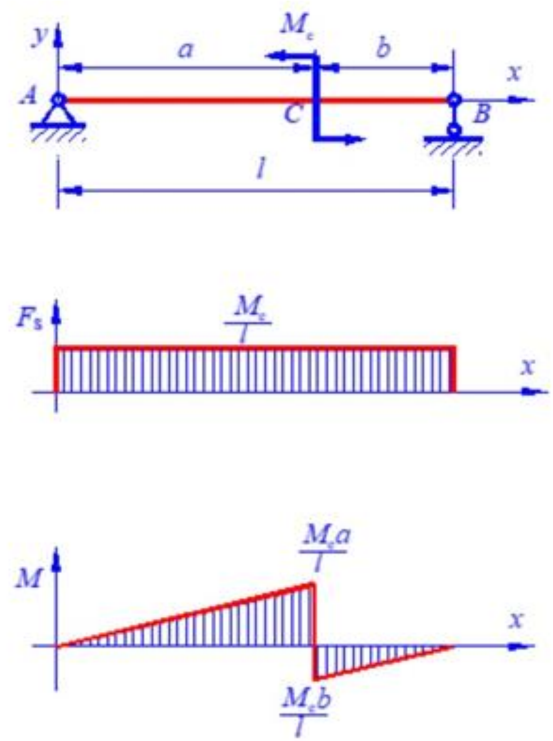
二、$q(x)$、$F_S(x)$图、M（x）图三者间的关系

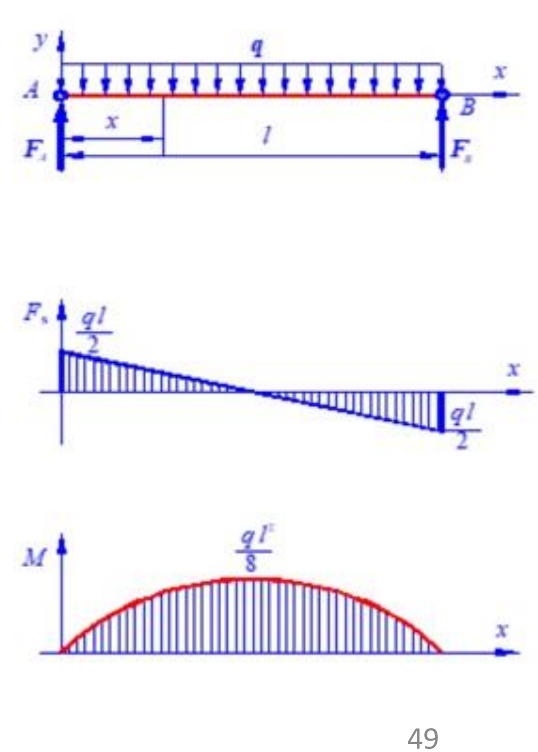
$$\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x)$$

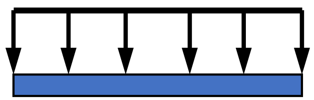
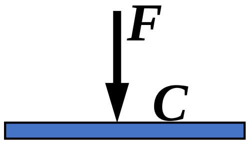
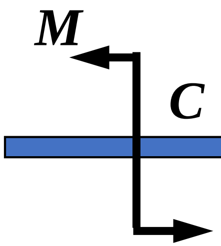
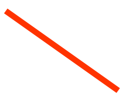
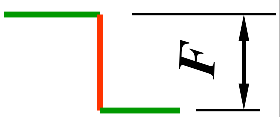
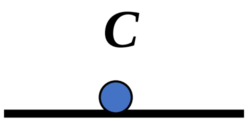
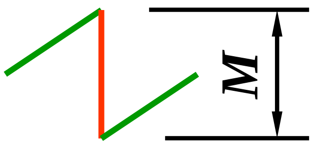




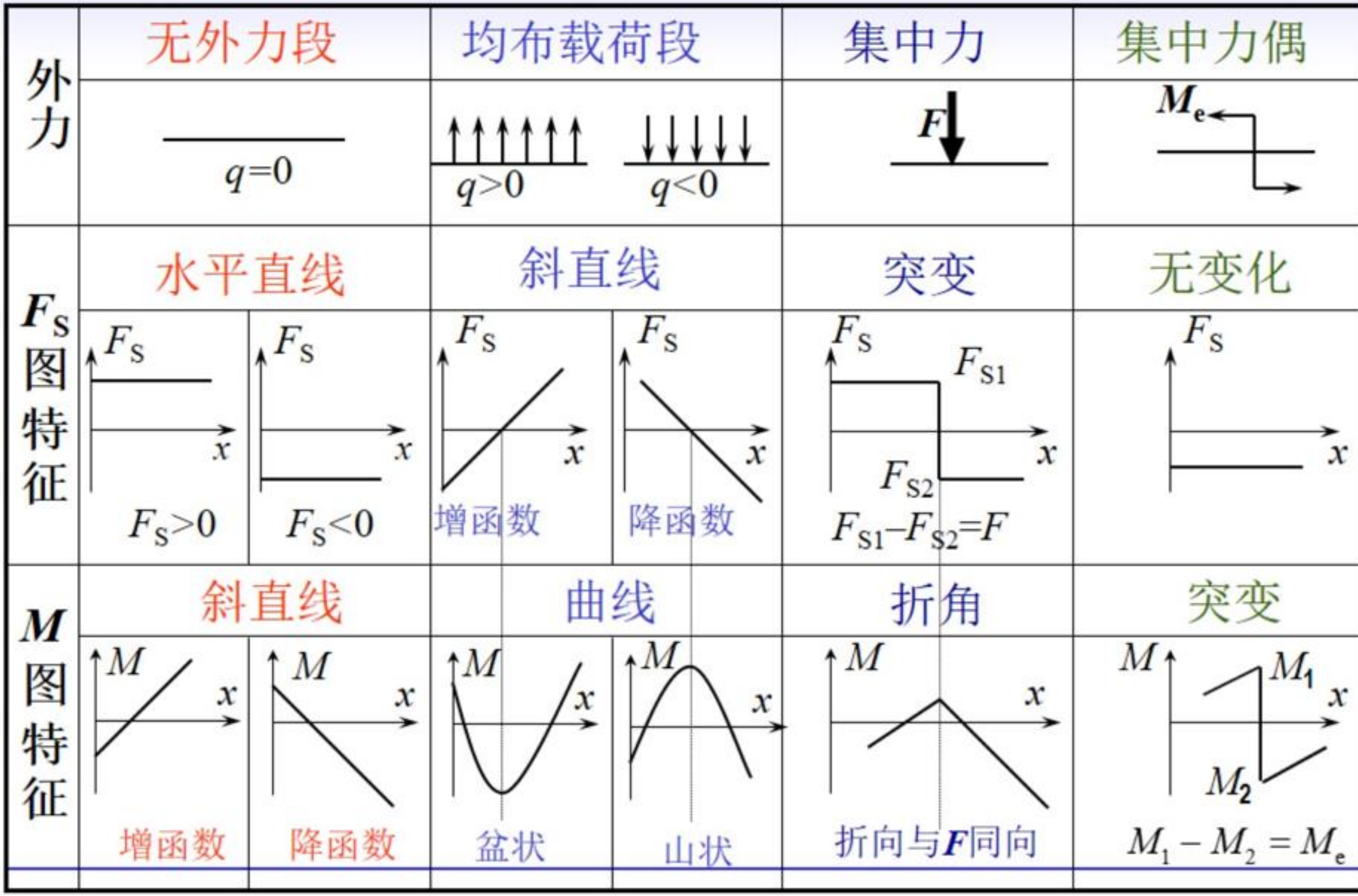


5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

在几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上的外力情况	向下的均布荷载 $q<0$ 	无荷载 	集中力 	集中力偶 
剪力图的特征	向下倾斜的直线 	水平直线	在C处有突变 	在C处无变化 
弯矩图的特征	上凸的二次抛物线 	一般斜直线 	在C处有转折 	在C处有突变 
M_{max}所在截面的可能位置	在$F_S=0$的截面		在剪力突变的截面	在紧靠C的某一侧截面

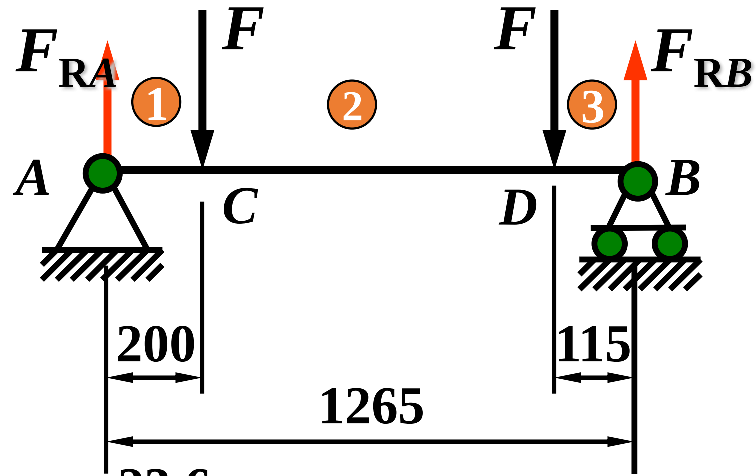
5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系



其他课本或教材上的总结。

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

例题 简支梁受两个力$F = 25.3\text{kN}$的作用，有关尺寸如图所示。试作剪力图和弯矩图，并计算最大值。



解：（1）求梁的支反力

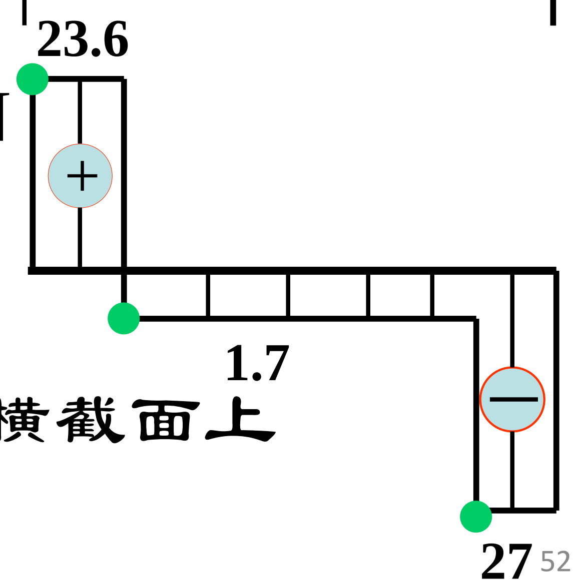
$$F_{\text{RA}} = 23.6\text{kN} \qquad F_{\text{RB}} = 27\text{ kN}$$

（2）剪力图

AC段：$F_{SAC} = F_{\text{RA}} = 23.6\text{kN}$

CD段：$F_{SCD} = F_{\text{RA}} - F = -1.7\text{kN}$

DB段：$F_{SDB} = -F_{\text{RB}} = -27\text{kN}$



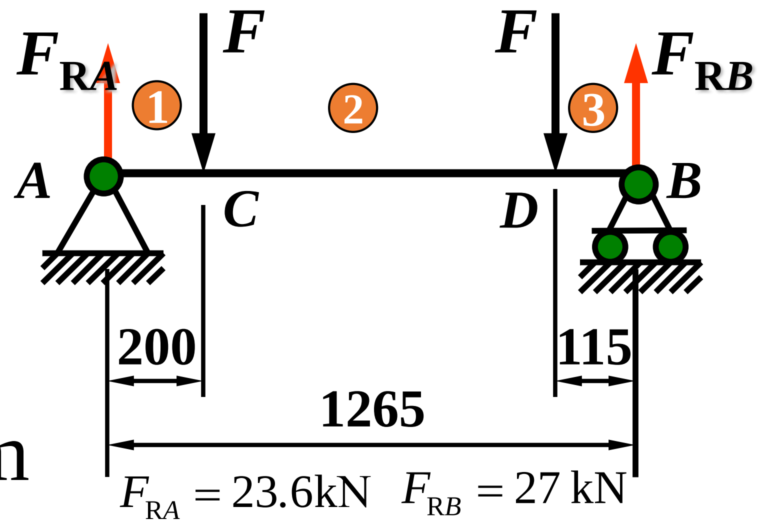
最大剪力发生在DB段中的任一横截面上

$$F_{\text{Smax}} = 27\text{kN}$$

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

例题 简支梁受两个力$F=25.3\text{kN}$的作用，有关尺寸如图所示。试作剪力图和弯矩图，并计算最大值。

(3) 弯矩图



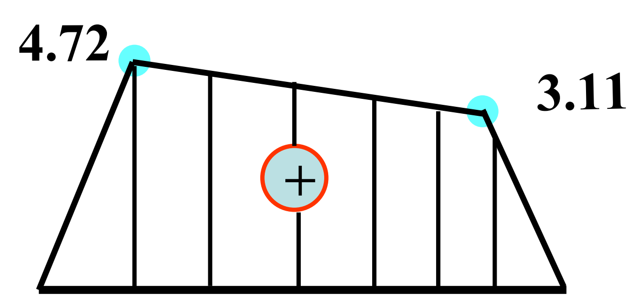
每段梁的弯矩图均为斜直线。且梁上无集中力偶。

$$M_A=0$$

$$M_C=F_{RA}\times 0.2=4.72\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_D=F_{RB}\times 0.115=3.11\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B=0$$



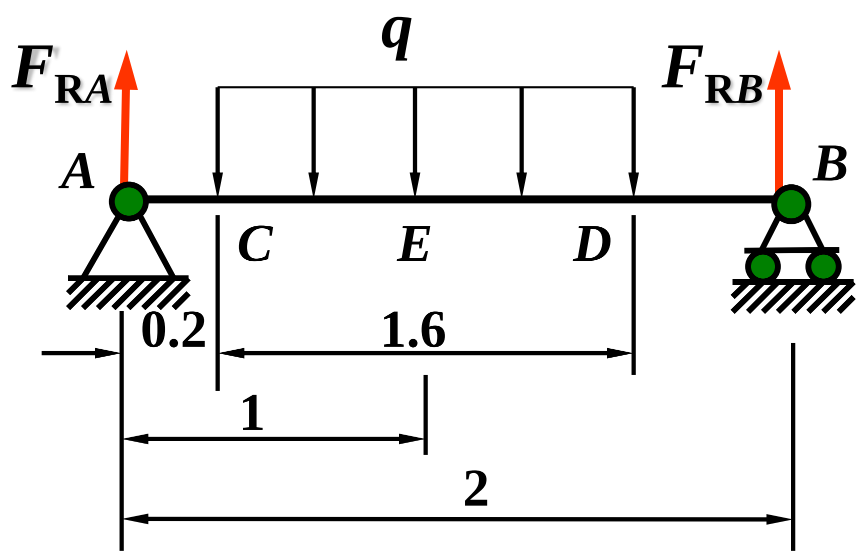
最大弯矩发生在 C 截面

$$M_{max}=4.72\text{kN}\cdot\text{m}$$

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

例题 一简支梁受均布荷载作用，其集度 q=100kN/m ,如图所示.试用简易法作此梁的剪力图和弯矩图.

(1) 计算梁的支反力



$$F_{RA} = F_{RB}$$

$$= 0.5 \times 100 \times 1.6 = 80\text{kN}$$

将梁分为 AC、CD、DB 三段.

AC和DB上无荷载，CD 段有向下的均布荷载.

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

（2）剪力图

AC段 水平直线

$$F_{SA右} = F_{RA} = 80\text{kN}$$

CD段 向右下方的斜直线

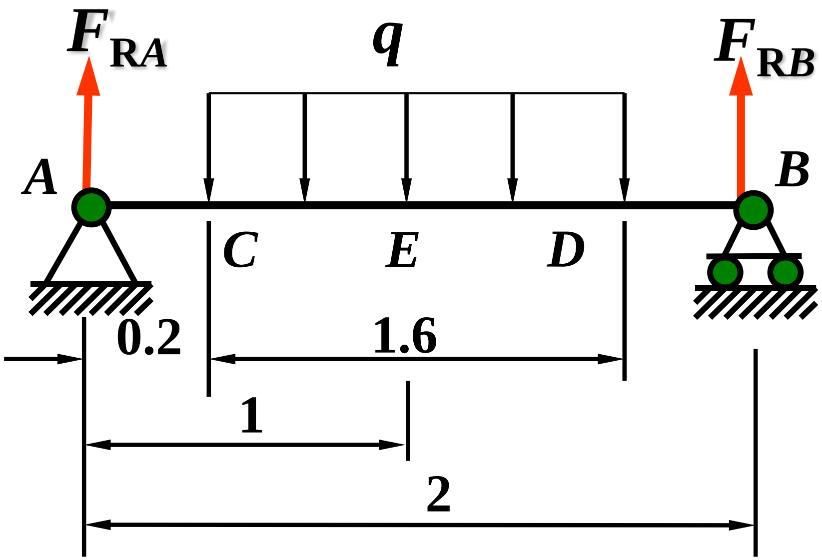
$$F_{SC} = F_{RA} = 80\text{kN}$$

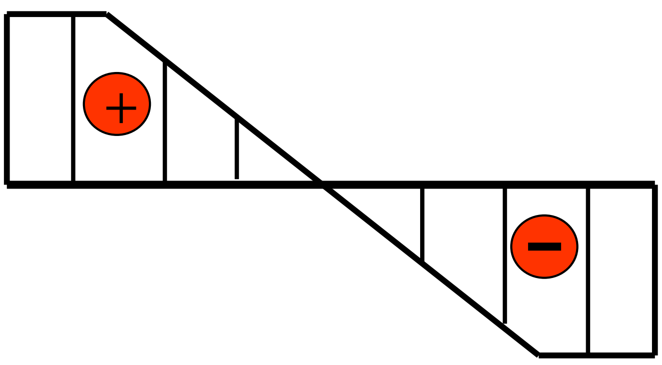
$$F_{SD} = -F_{RB} = -80\text{kN}$$

DB段 水平直线

$$F_{SB左} = -F_{RB} = -80\text{kN}$$

$$F_{SB右} = 0\text{kN}$$



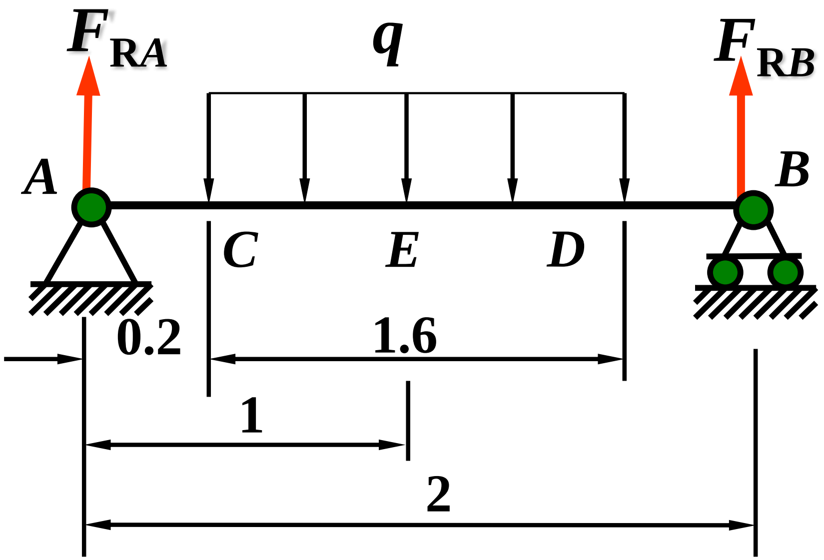


最大剪力发生在 AC 和 DB 段的任一横截面上.

$$F_{S\max} = 80\text{kN}$$

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

(3) 弯矩图



AC段 斜直线

$$M_A = 0$$

$$M_C = F_{RA} l_{AC} = 16kNm$$

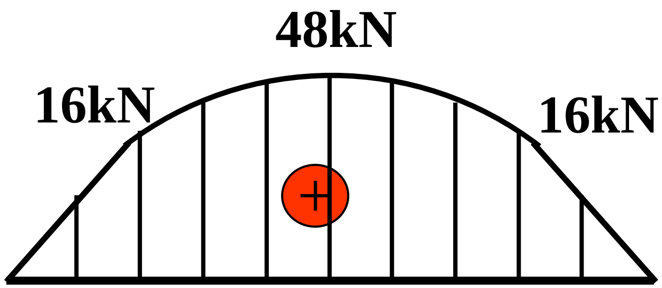
CD段 抛物线

$$M_E = F_{RA} l_{AE} - q l_{CE} \frac{l_{CE}}{2} = 48kNm$$

DB段 斜直线

$$M_B = 0$$

$$M_C = F_{RB} l_{DB} = 16kNm$$



5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

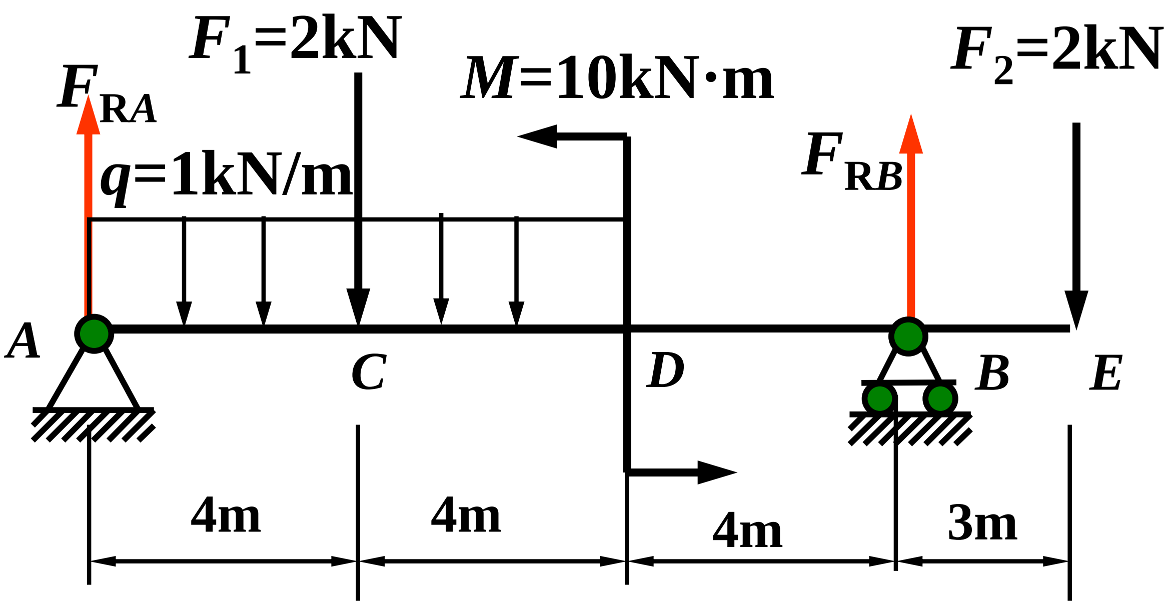
例题12　作梁的内力图.

(1) 支座反力为

$$F_{RA} = 7\text{kN}$$

$$F_{RB} = 5\text{kN}$$

将梁分为AC、CD、DB、BE 四段.



(2) 剪力图

AC段 向下斜的直线(↘)

$$F_{SA右} = F_{RA} = 7\text{kN} \qquad F_{SC左} = F_{RA} - 4q = 3\text{kN}$$

CD段 向下斜的直线 (↘)

$$F_{SC右} = F_{RA} - 4q - F_1 = 1\text{kN} \qquad F_{SD} = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$$

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

*AC*段 向下斜的直线(↘)

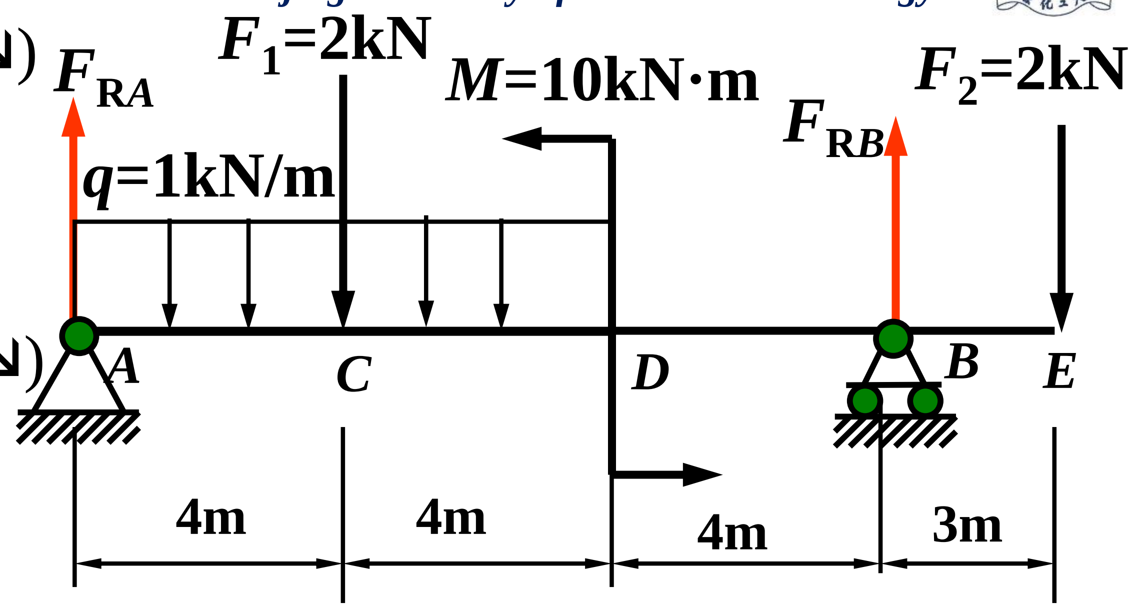
$$F_{SA右} = 7\text{kN}$$

$$F_{SC左} = 3\text{kN}$$

*CD*段 向下斜的直线(↘)

$$F_{SC右} = 1\text{kN}$$

$$F_{SD} = -3\text{kN}$$

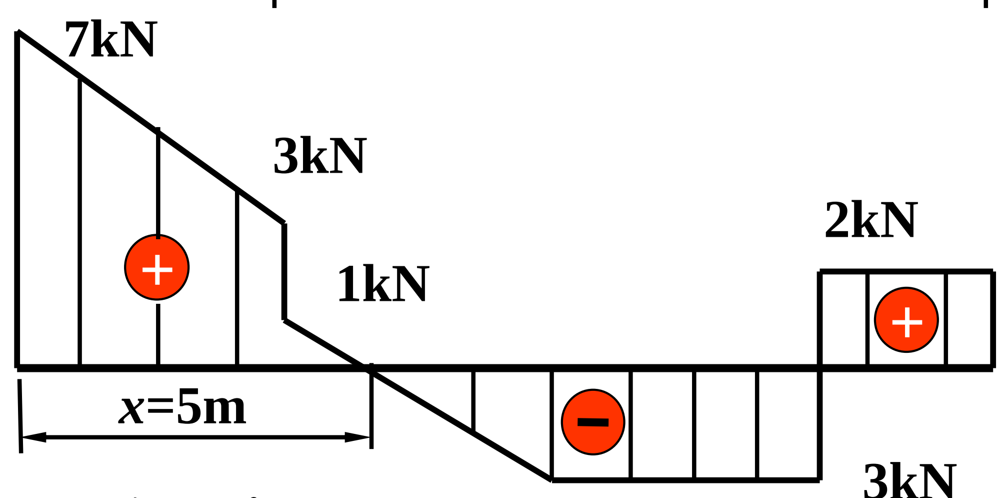


*DB*段 水平直线 (-)

$$F_{SB左} = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$$

*EB*段 水平直线 (-)

$$F_{SB右} = F_2 = 2\text{kN}$$

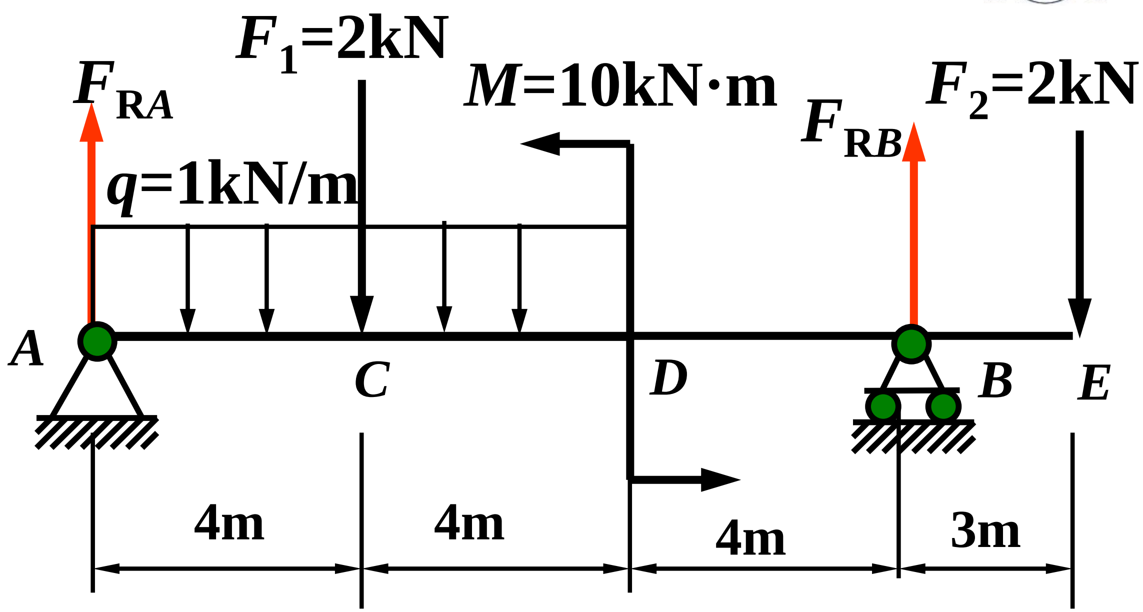


*F*点剪力为零,令其距 *A*截面的距离为*x*

$$F_{Sx} = F_{RA} - qx - F_1 = 0$$

5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

(3) 弯矩图



AC段 $M_A = 0$

$$M_C = 4F_{RA} - \frac{q}{2}4^2 = 20$$

CD段

$$M_{D左} = -7F_2 + 4F_{RB} + M = 16$$

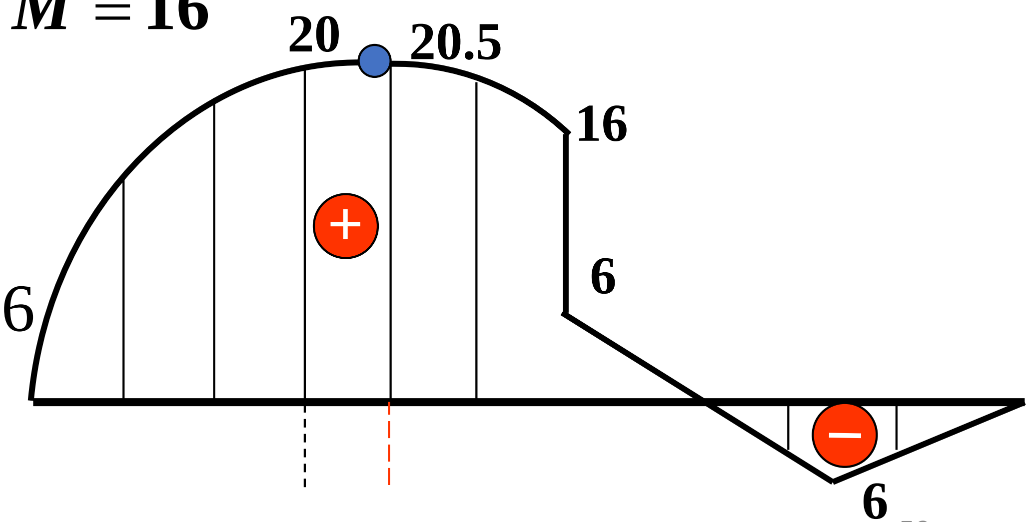
$$M_{\max} = M_F = 20.5$$

DB段

$$M_{D右} = -7F_2 + 4F_{RB} = 6$$

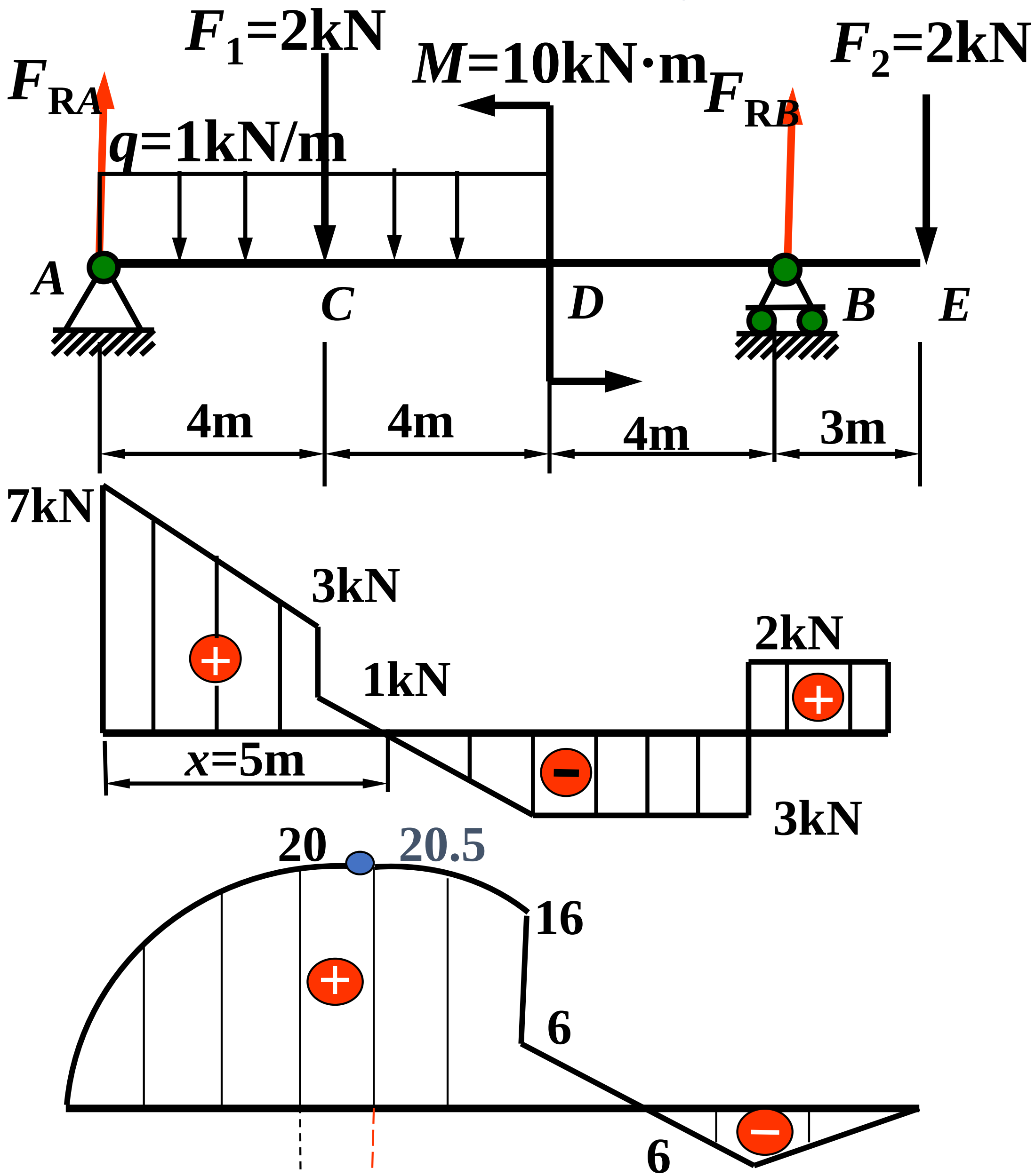
$$M_B = -3F_2 = -6$$

BE段 $M_E = 0$



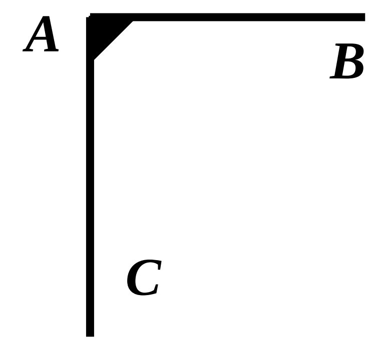
5-4：弯矩、剪力与分布载荷之间的关系

（4）校核



5-5：平面刚架的内力图

平面刚架是由在同一平面内，不同取向的杆件，通过杆端相互刚性连结而组成的结构。



1、平面刚架的内力

剪力、弯矩、轴力。

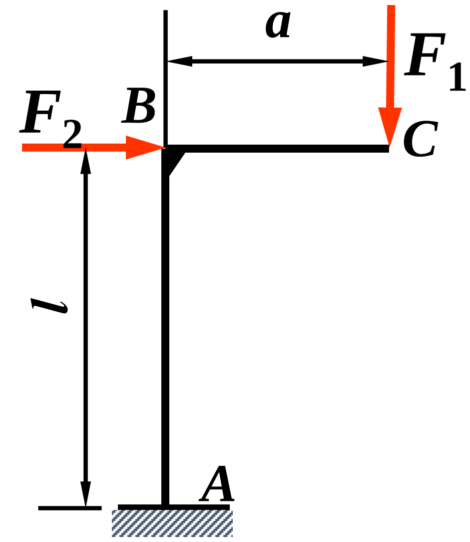
2、内力图符号的规定

弯矩图：画在各杆的受压侧，不注明正、负号。

剪力图及轴力图：可画在刚架轴线的任一侧(通常正值画在刚架的外侧)。注明正，负号。

5-5：平面刚架的内力图

例题　图示为下端固定的刚架.在其轴线平面内受集中力F_1 和 F_2 作用，作此刚架的弯矩图和轴力图。

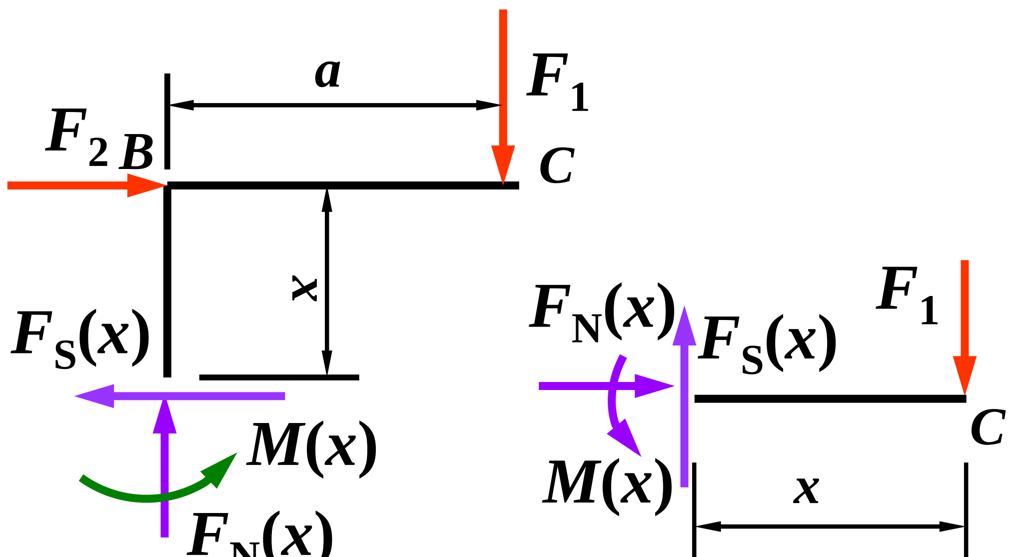


解：将刚架分为 CB，AB 两段

CB 段 $F_N(x)=0$

$F_S(x)=F_1(+)$

$M(x)=F_1 x$



BA 段 $F_N(x)=F_1\ (-)$

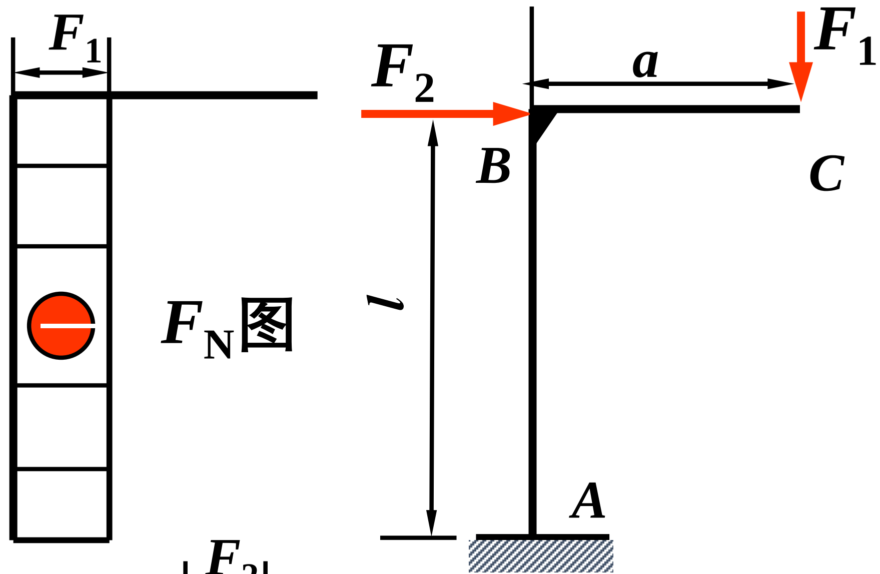
$F_S(x)=F_2\ (+)$

$M(x)=F_1 a+F_2 x$

5-5：平面刚架的内力图

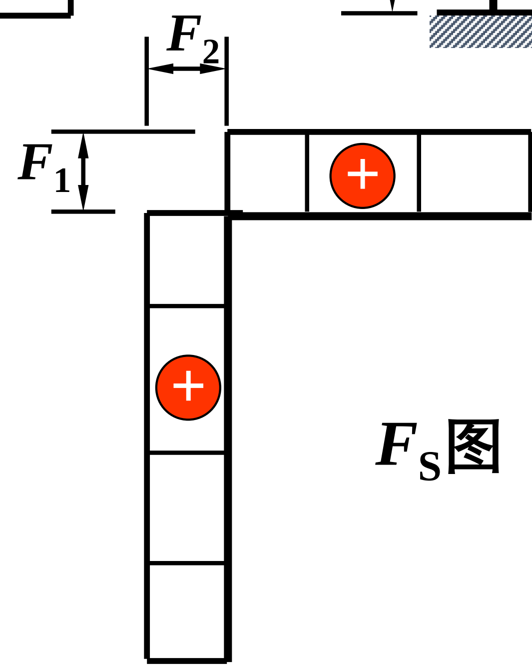
CB段 $F_N(x)=0$

BA段 $F_N(x) = F_1$ (-)



CB段 $F_S(x) = F_1$ (+)

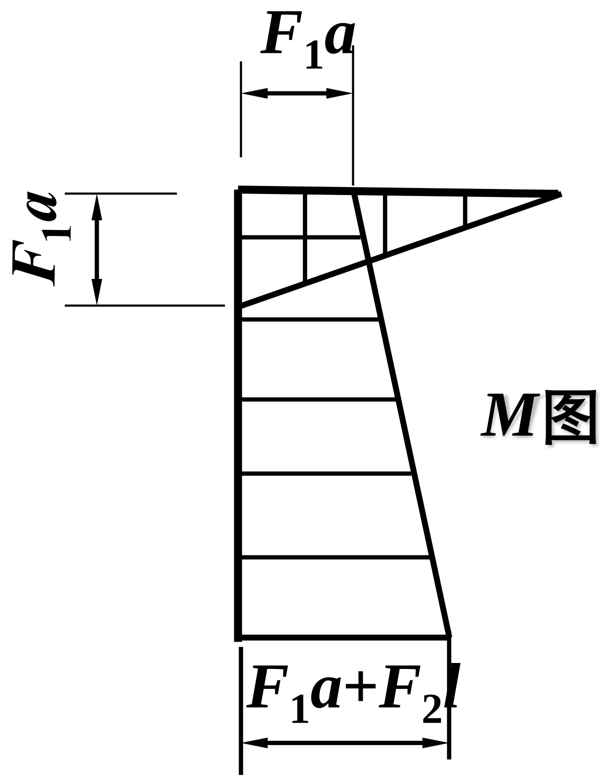
BA段 $F_S(x) = F_2$ (+)

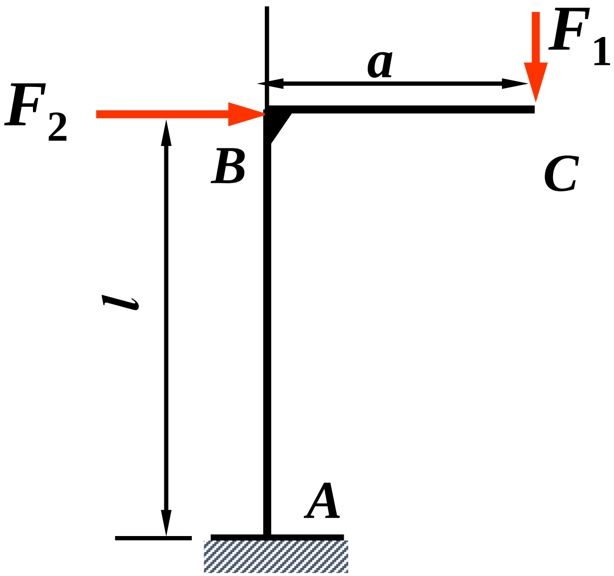


5-5：平面刚架的内力图

CB段 $M(x)= F_1x \quad (0\le x \le a)$

BA段 $M(x) = F_1a+F_2 x \quad (0\le x \le l)$



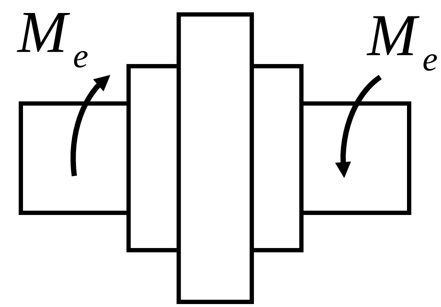


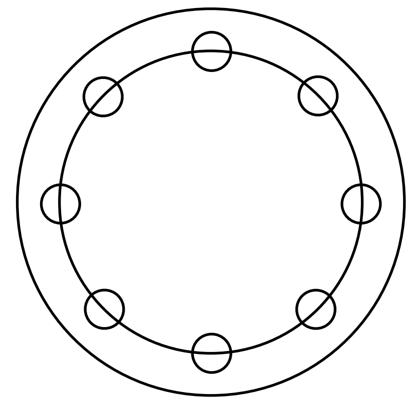
作业

必做题：5.3c, 5.3f, 5.4b

参考答案：作业3.39

Me=50kNm，用8个直径450mm的螺栓连接，螺栓许用切应力是[τ]=80MPa,求直径。





求剪力

$$M_e = 8F_S\frac{d}{2}$$

$$F_S = \frac{M_e}{4d}$$

由强度条件可知

$$\frac{F_S}{A} \le [\tau]$$

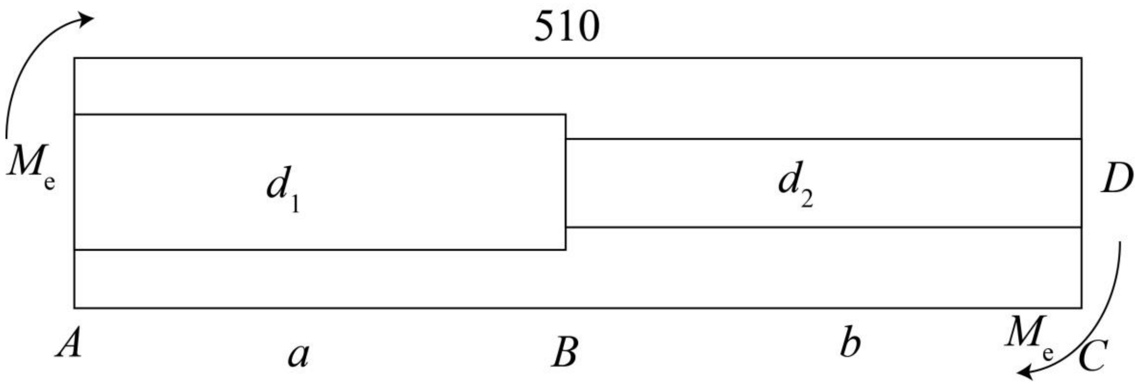
$$\frac{M_e}{4d\frac{1}{4}\pi d^2} \le [\tau]$$

所以： $d \ge \sqrt{\frac{M_e}{\pi d[\tau]}} = 0.021m$

螺栓是标准件，直径大于0.021m的最小螺栓的直径是0.022m

参考答案：作业4. 16

D=50mm, d_1=25mm, d_2=38mm, 许用切应力70MPa, 求许用扭转外力偶M_e；若两扭转角相同，求各段长



公式

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$$

$$W_d = \frac{\pi}{16D}\left(D^4 - d^4\right)$$

$$M_e \le [\tau]W_{d1} = [\tau]\frac{\pi}{16D}\left(D^4 - d_1^4\right) = 1610\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_e \le [\tau]W_{d2} = [\tau]\frac{\pi}{16D}\left(D^4 - d_2^4\right) = 1144\mathrm{N\cdot m}$$

$$[M_e] = 1144\mathrm{N\cdot m}$$

$$\frac{M_e a}{GI_{p1}} = \frac{M_e b}{GI_{p2}}$$

$$a + b = 0.51$$

可以求得a、b长度