

材料力学

轴向拉伸和压缩



材料力学基本假设:

1. 连续性假设——材料连续无孔隙
2. 均匀性假设——材料各处性质相同
3. 各向同性假设——任意方向材料性质相同
4. 小变形假设——变形远小于构件尺寸, 便于用变形前的尺寸和几何形状进行计算
5. 线弹性假设——变形可恢复, 且力与变形成正比。



内力：构件内部相连部分之间的相互作用力；

应力：由外力引起的内力的集度

正应力 σ ：垂直于横截面的应力

剪应力 τ ：位于横截面内的应力

位移：物体内各点坐标的改变量

线位移：物体上一点位置的改变

角位移：物体上一条线段或一个面转动的角度

应变：衡量各点处的变形程度

线应变： $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$ **角应变：** $\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \theta$

应力和应变是
材料力学最核
心的概念！

3-1：概述

Beijing University of Chemical Technology



1. 工程实例：



3-1：概述

Beijing University of Chemical Technology



1. 工程实例：



3-1：概述

Beijing University of Chemical Technology



1. 工程实例：

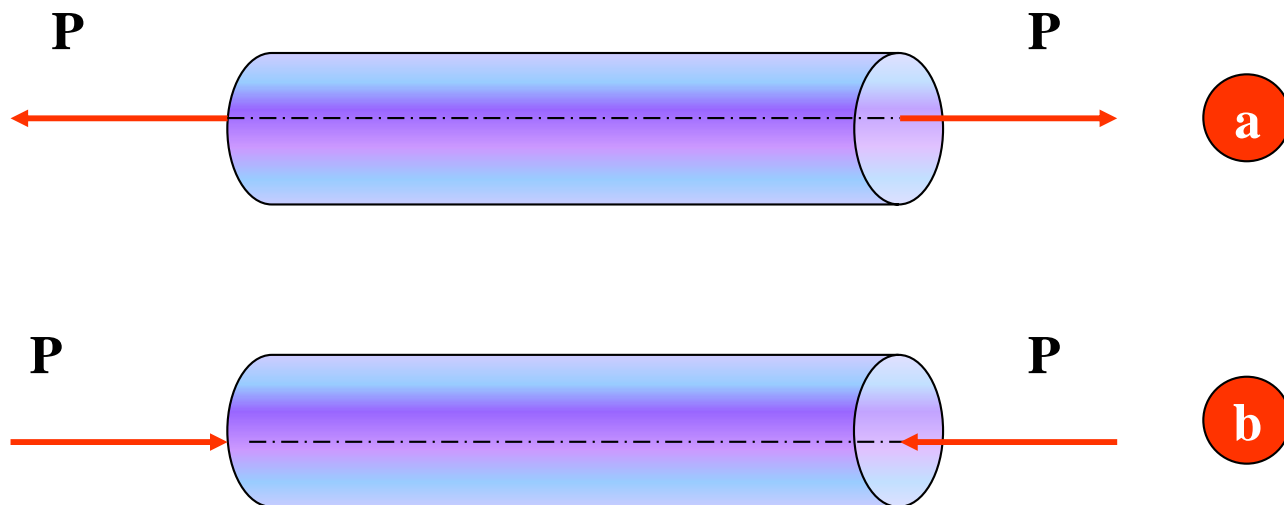


太空电梯



杆件过于细长时，易产生失稳，不可以只考虑轴向压缩。

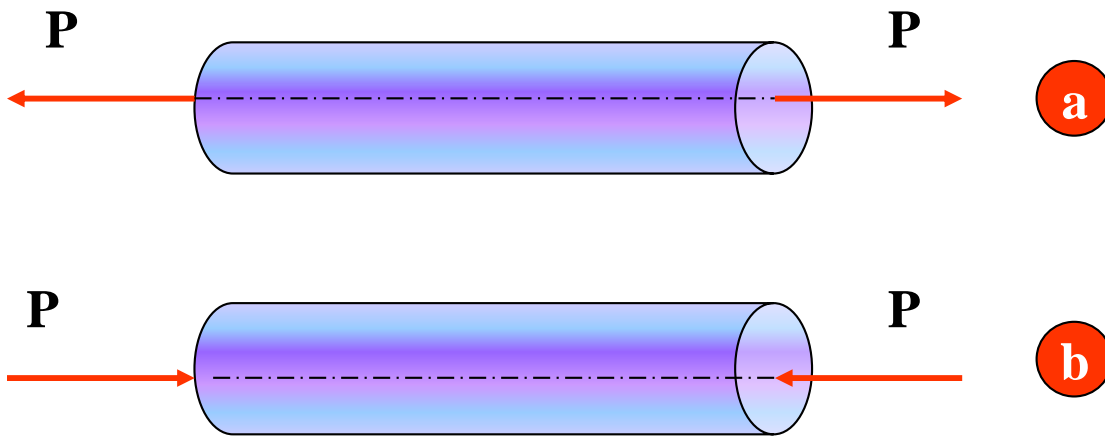
2. 特征:



受力特征：作用于杆上的外力（或外力合力）的作用
线与杆的轴线重合。 **只有线应变和线应力**

变形特征：杆件的变形是沿轴线方向伸长或缩短

2. 特征：



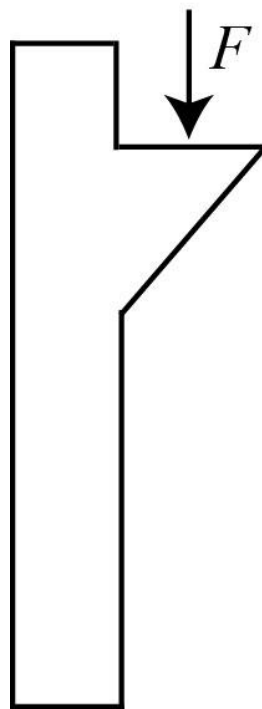
轴向载荷：作用于杆上的外力，如果其作用线与杆的轴线重合，称为轴向载荷。

轴向拉伸：杆件发生纵向拉伸， a 杆件则称为**拉杆**。

轴向压缩：杆件发生纵向压缩， b 杆件则称为**压杆**。

右图哪个属于轴向拉压？

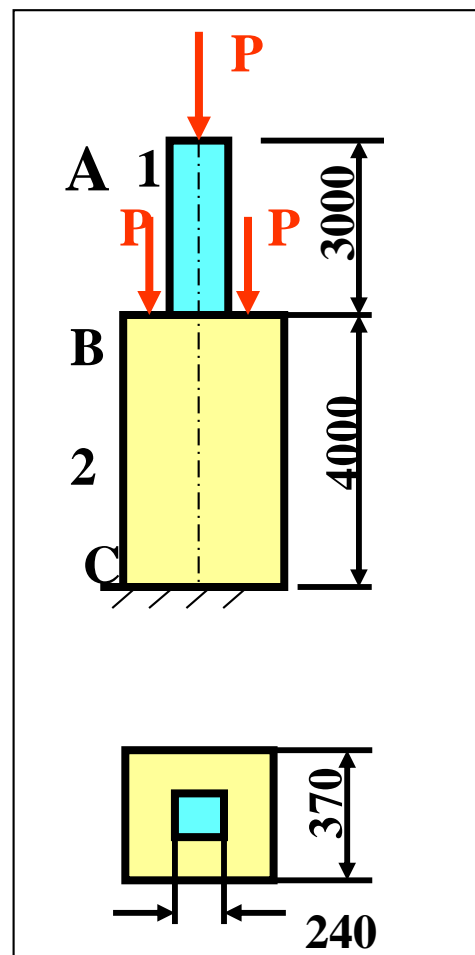
- ☐ A 都属于
- ☐ B 都不属于
- ☐ C 只有a属于
- ☐ D 只有b属于
- ☒ E 只有c属于



(a)



(b)



(c)

提交

3-2: 轴力 轴力图

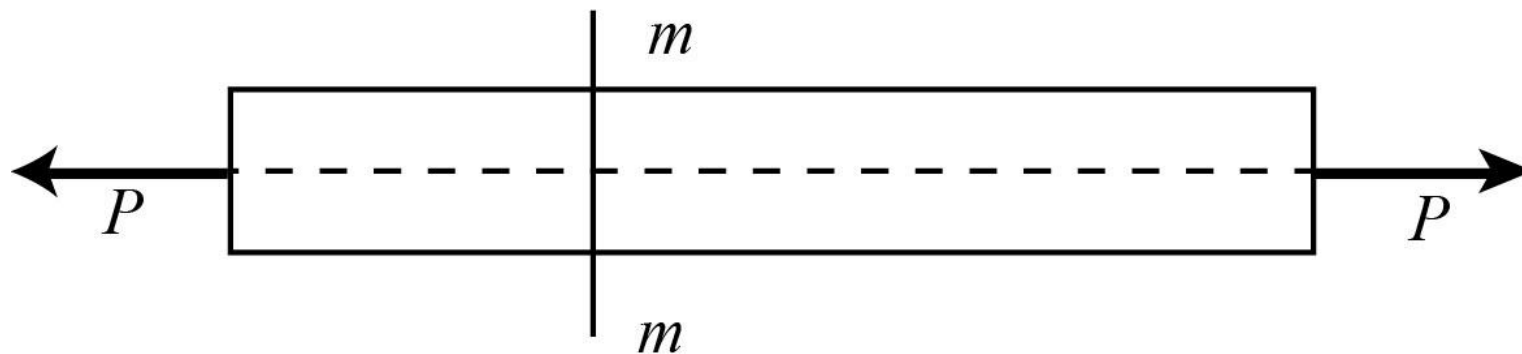
Beijing University of Chemical Technology



研究力和
变形的关系

1. 截面法求轴力:

求图示等直杆件 横截面 mm 上的内力。



轴向拉压时的内力是轴力，如何求该内力？

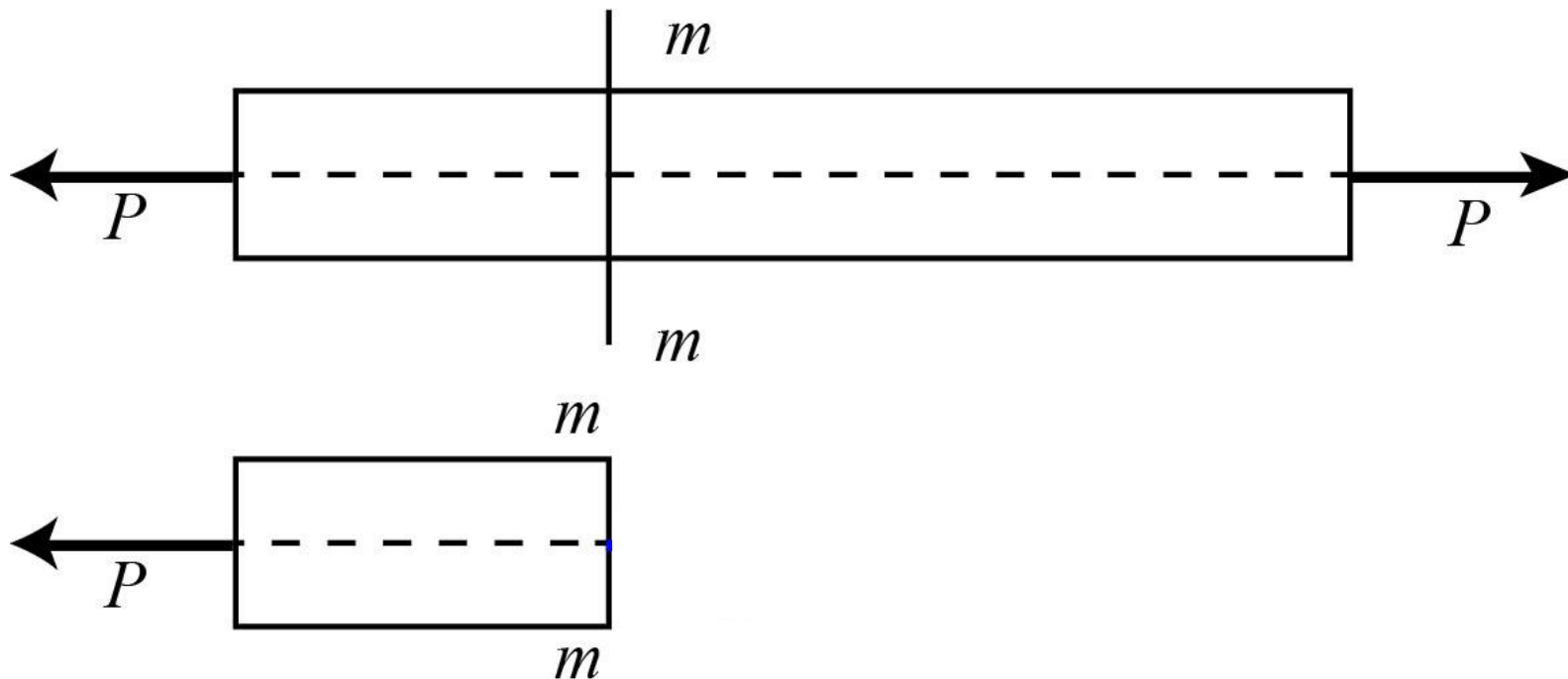
截面法：截面法是求内力的一般方法。

3-2: 轴力 轴力图



1. 截面法求轴力:

截开： 在求内力的截面 mm 处，假想地将杆截为两部分。



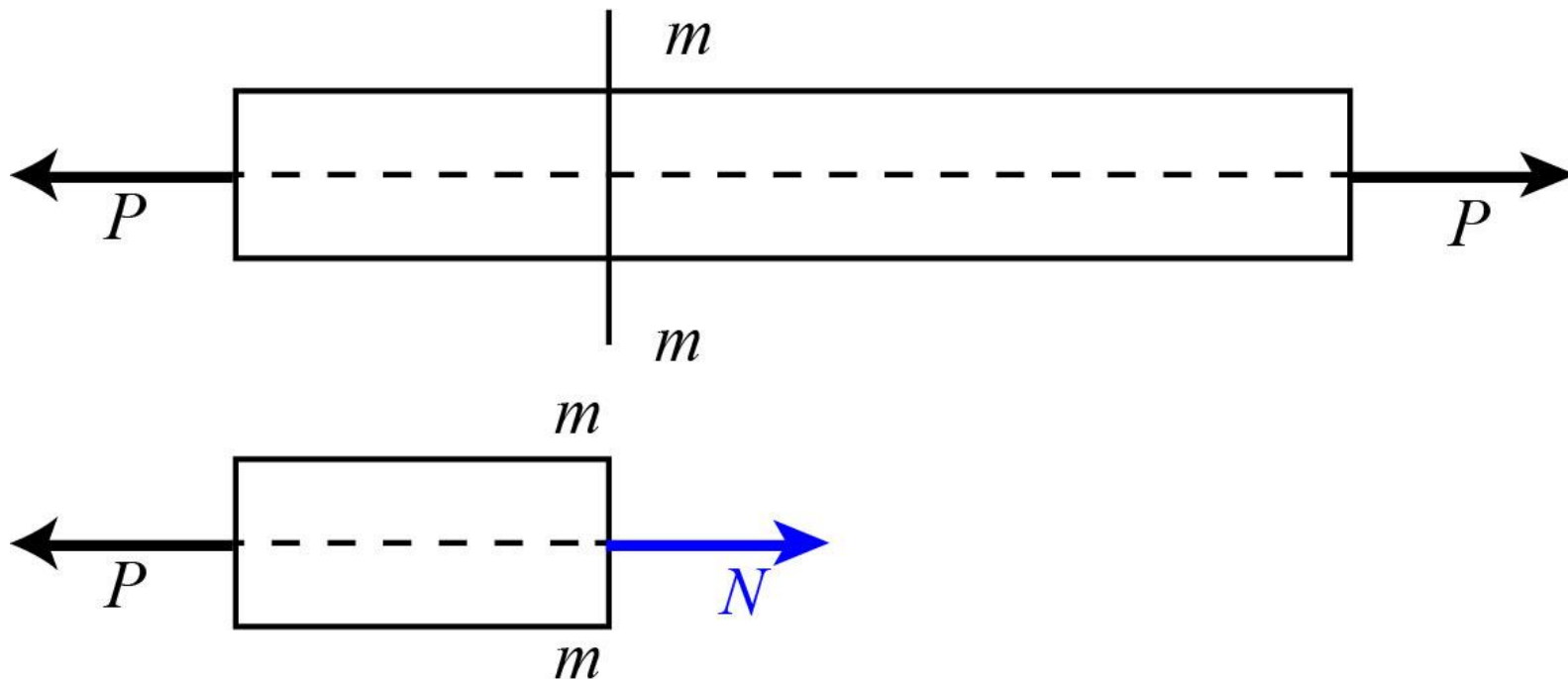
3-2: 轴力 轴力图

Beijing University of Chemical Technology



1. 截面法求轴力:

代替： 取左部分部分作为研究对象。弃去部分对研究对象的作用以截开面上的内力代替。合力为 N 。



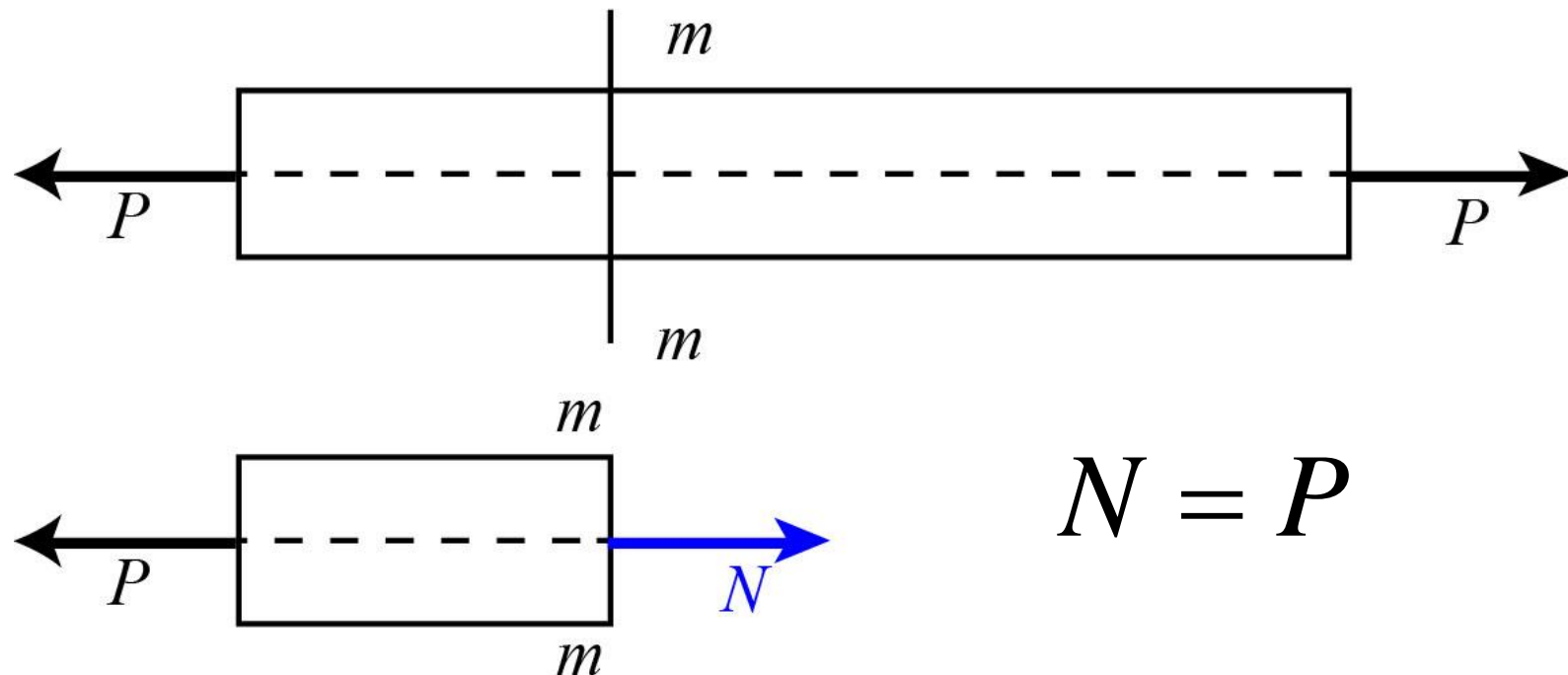
3-2: 轴力 轴力图

Beijing University of Chemical Technology



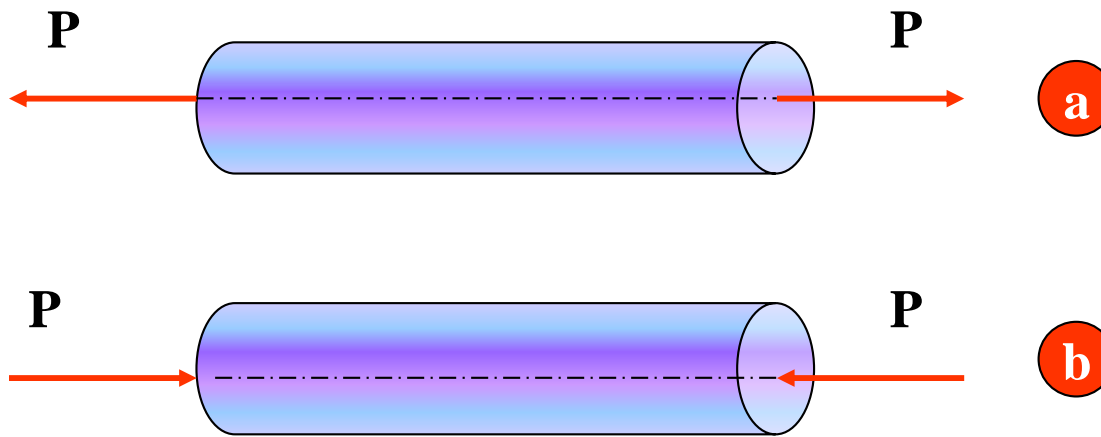
1. 截面法求轴力:

平衡： 对研究对象列平衡方程。



式中： N 为杆件任一横截面 $m—m$ 上的内力。与杆的轴线重合，即垂直于横截面并通过其形心。称为**轴力**。

2. 特征:



轴向载荷 P 是不是轴力？

轴向载荷是外力，轴力是内力！

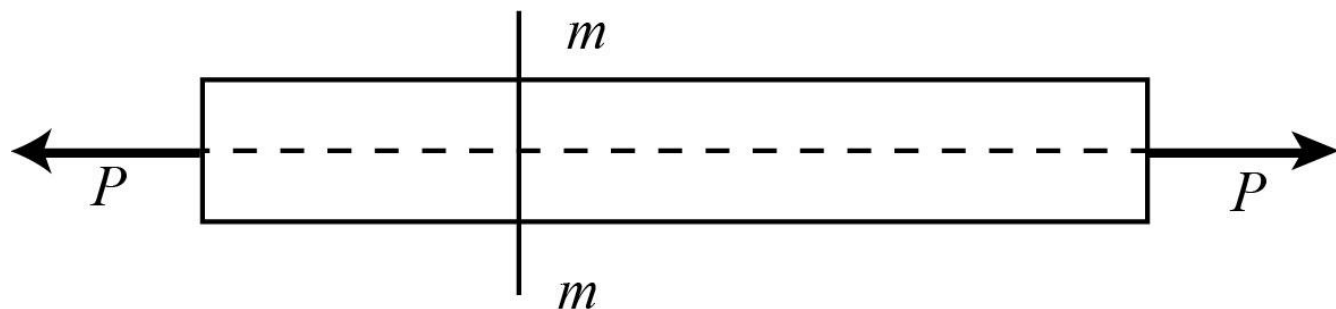
3-2: 轴力 轴力图

Beijing University of Chemical Technology

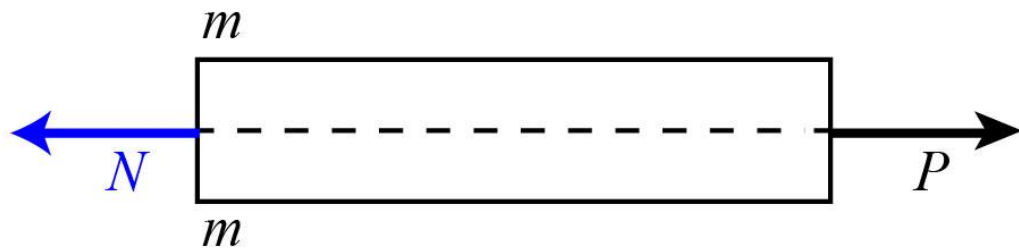
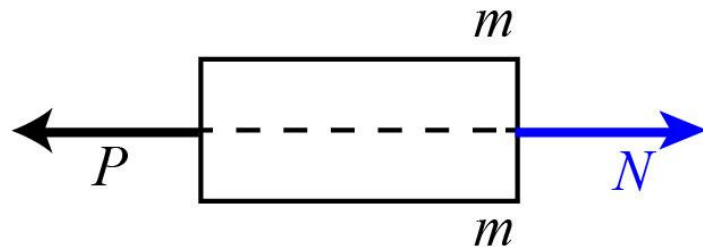


1. 截面法求轴力:

平衡：对研究对象列平衡方程。



若取右侧为研究对象，
则在截开面上的轴力
与部分左侧上的轴力
数值相等而指向相反



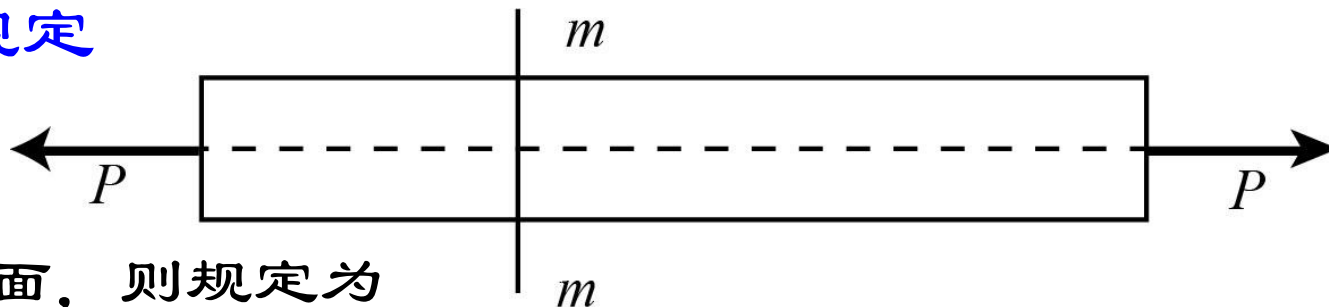
3-2: 轴力 轴力图

Beijing University of Chemical Technology



1. 截面法求轴力:

轴力符号的规定

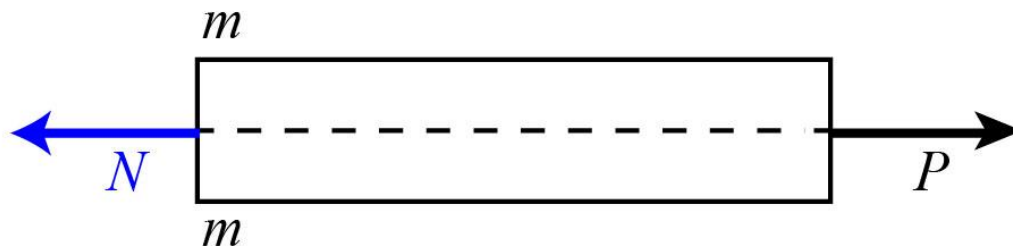
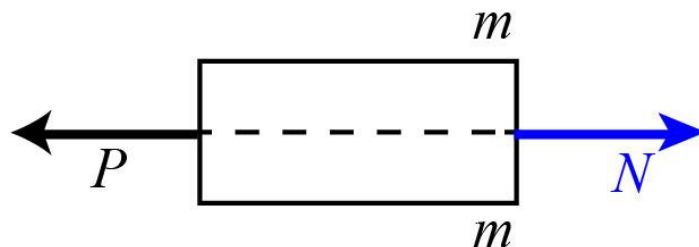


若轴力背离截面，则规定为

正号，称为**拉力**。

若轴力指向截面，则规定为

负号，称为**压力**。



轴力是否始终等

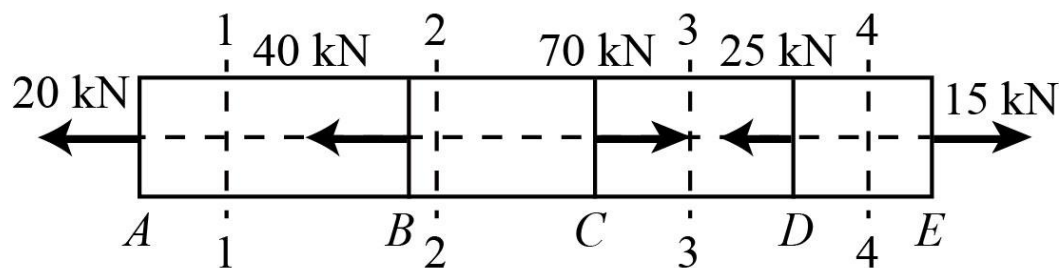
于轴向载荷？

3-2: 轴力 轴力图

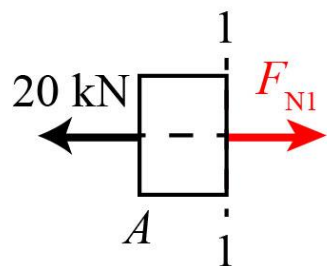


3. 例题:

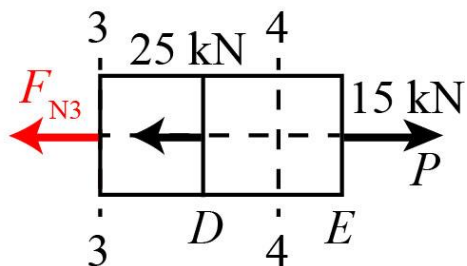
计算下图中1-1、2-2、3-3、4-4位置处的轴力。



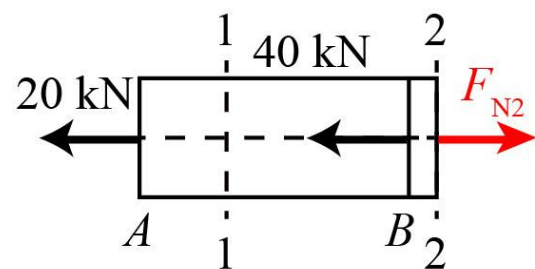
$$F_{N1} = 20\text{kN (拉)}$$



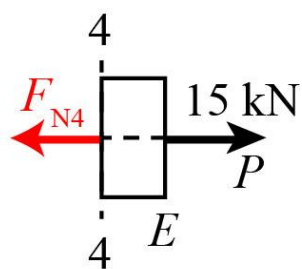
$$F_{N2} = 60\text{kN (拉)}$$



$$F_{N3} = -10\text{kN (压)}$$



$$F_{N4} = 15\text{kN (拉)}$$

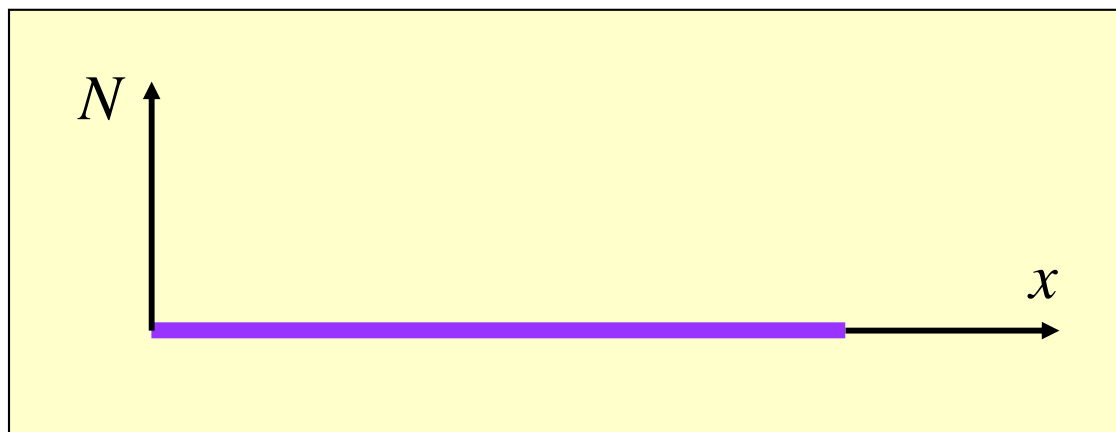


3-2: 轴力 轴力图



2. 轴力图:

用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置，用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上的轴力数值，从而绘出表示轴力与横截面位置关系的图线，称为**轴力图**。将正的轴力画在上侧，负的画在下侧。

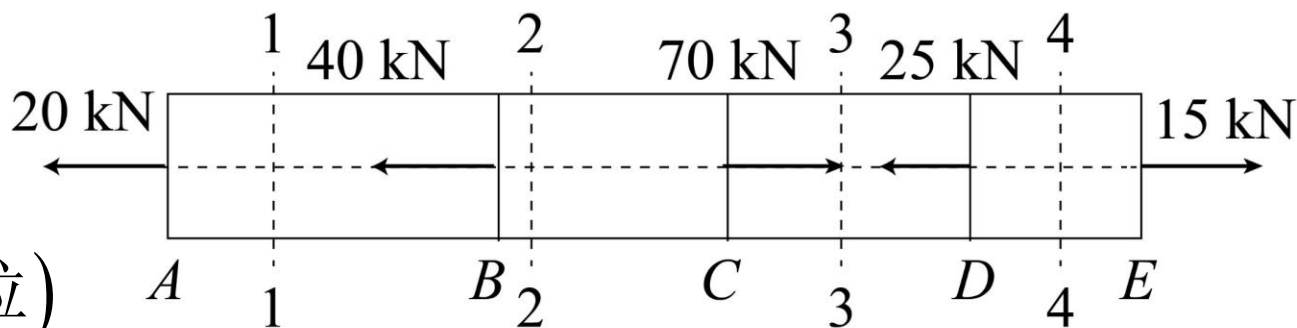


3-2: 轴力 轴力图

Beijing University of Chemical Technology



3. 例题:

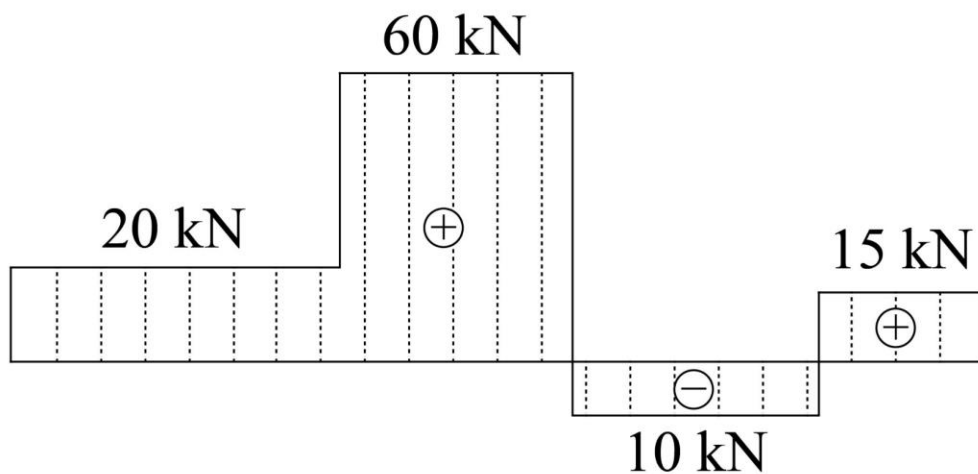


$$F_{N1} = 20\text{kN} \text{ (拉)}$$

$$F_{N2} = 60\text{kN} \text{ (拉)}$$

$$F_{N3} = -10\text{kN} \text{ (压)}$$

$$F_{N4} = 15\text{kN} \text{ (拉)}$$



注意： 计算横截面上的轴力时，一般先假设轴力为正值，则轴力的实际符号与其计算符号一致。

计算内力时，一般选取计算简便的部分计算内力。

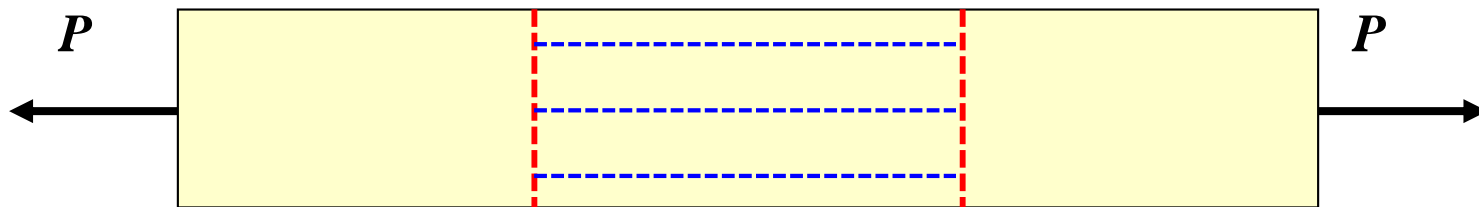
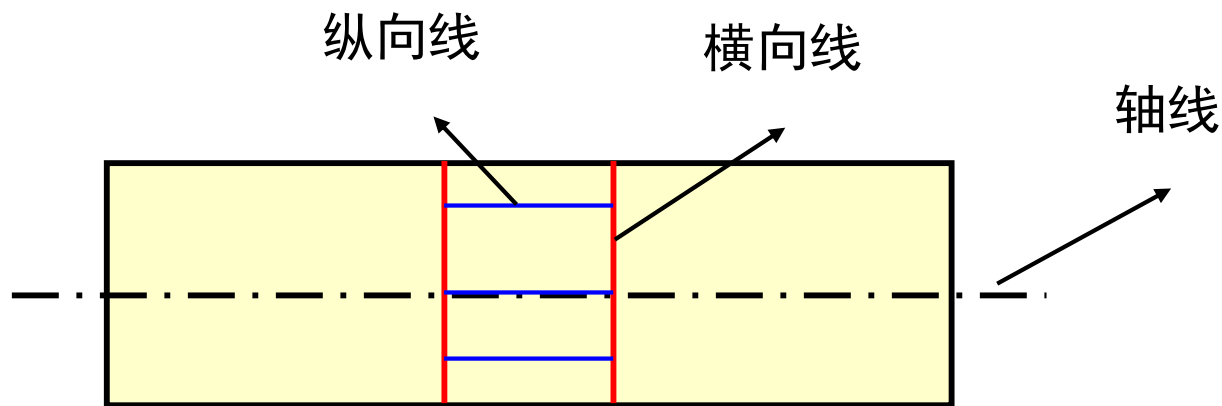
3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



研究力和

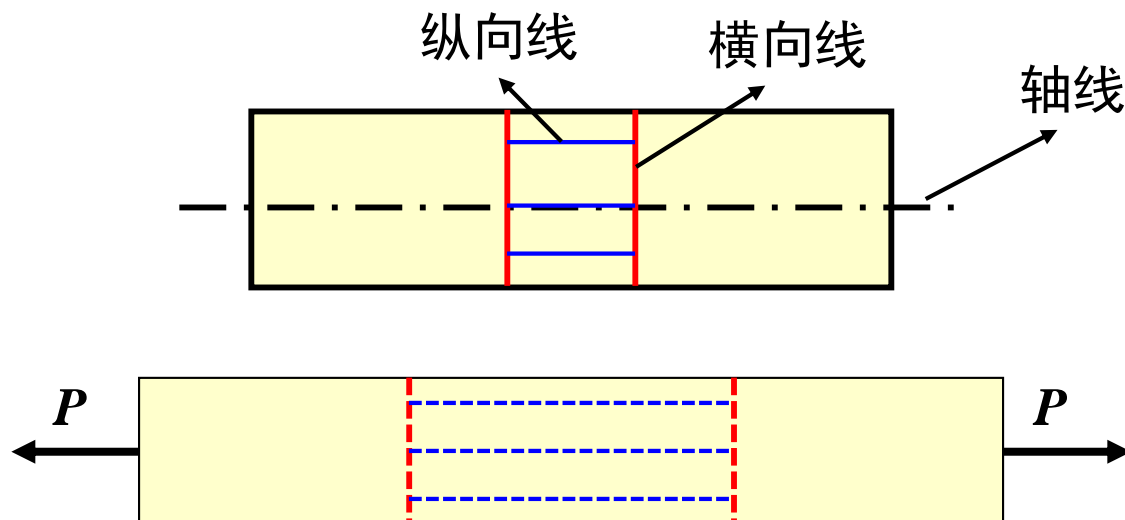
变形的关系

纵向线：平行于轴线；**横向线**：位于横截面，垂直于轴线。

如何变形？

3-3：拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



两端施加一个轴向拉力 P ，变形后。

纵向线：仍然平行于轴线，伸长相等；

横向线：保持为直线，且依然垂直于轴线。

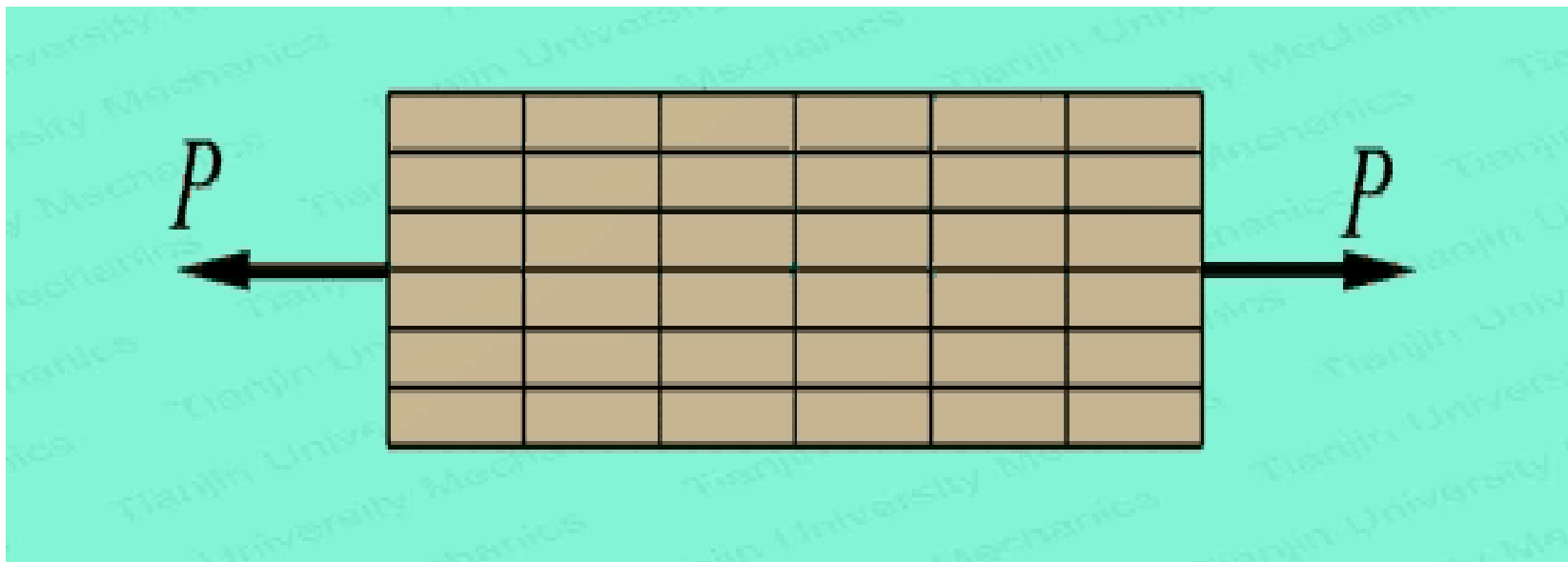
平面假设：杆件变形前的各横截面在变形后仍为平面且与杆的轴线垂直。

3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



平面假设：直杆在轴向拉压时横截面仍保持为平面。



物理关系：杆件的变形和受力之间的关系。

杆件内部各点变形相同——**线应变**； **没有角应变**

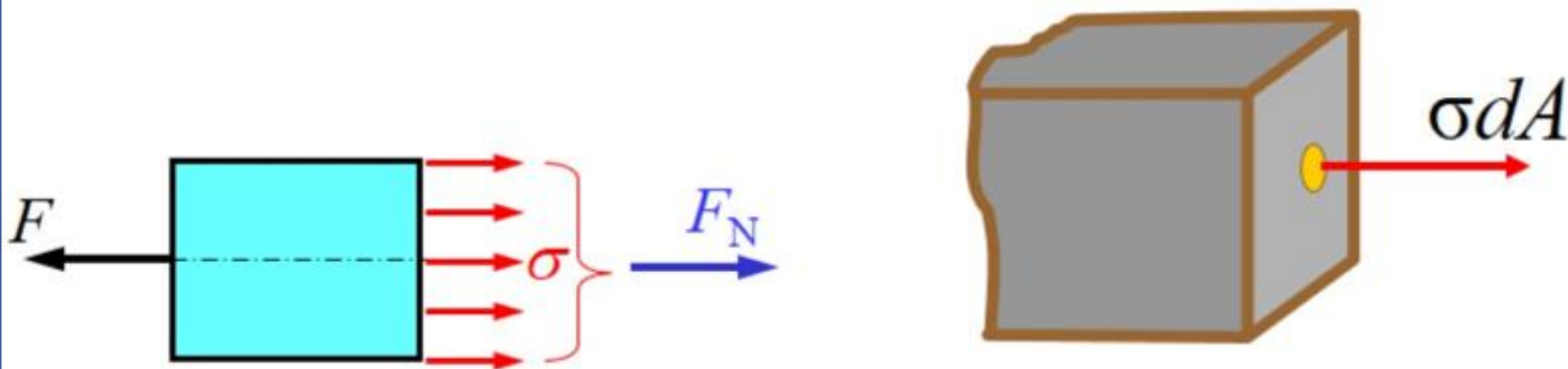
杆件内部各点受力相同——**正应力**； **和切应力！**

3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



正应力：由平面假设可知，轴向拉压时，横截面上的正应力处处相等。



$$F_N = \int \sigma dA = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{F_N}{A}$$

3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



正应力：

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

式中， F_N 为轴力， A 为横截面面积， σ 的符号与轴力相同；

当轴力为正时(拉伸)，正应力也为正号，称为拉应力；

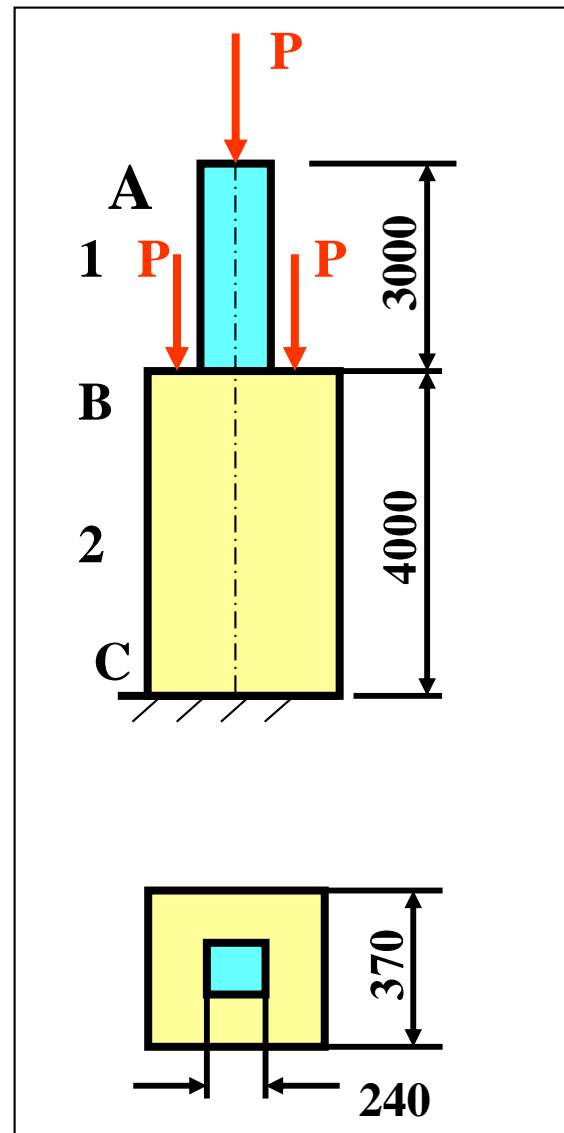
当轴力为负时(压缩)，正应力也为负号，称为压应力。

3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



一横截面为正方形的砖柱分上、下两段，其受力情况、各段长度及横截面面积如图所示。已知 $P=50\text{KN}$ ，试求荷载引起的最大工作应力。



3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

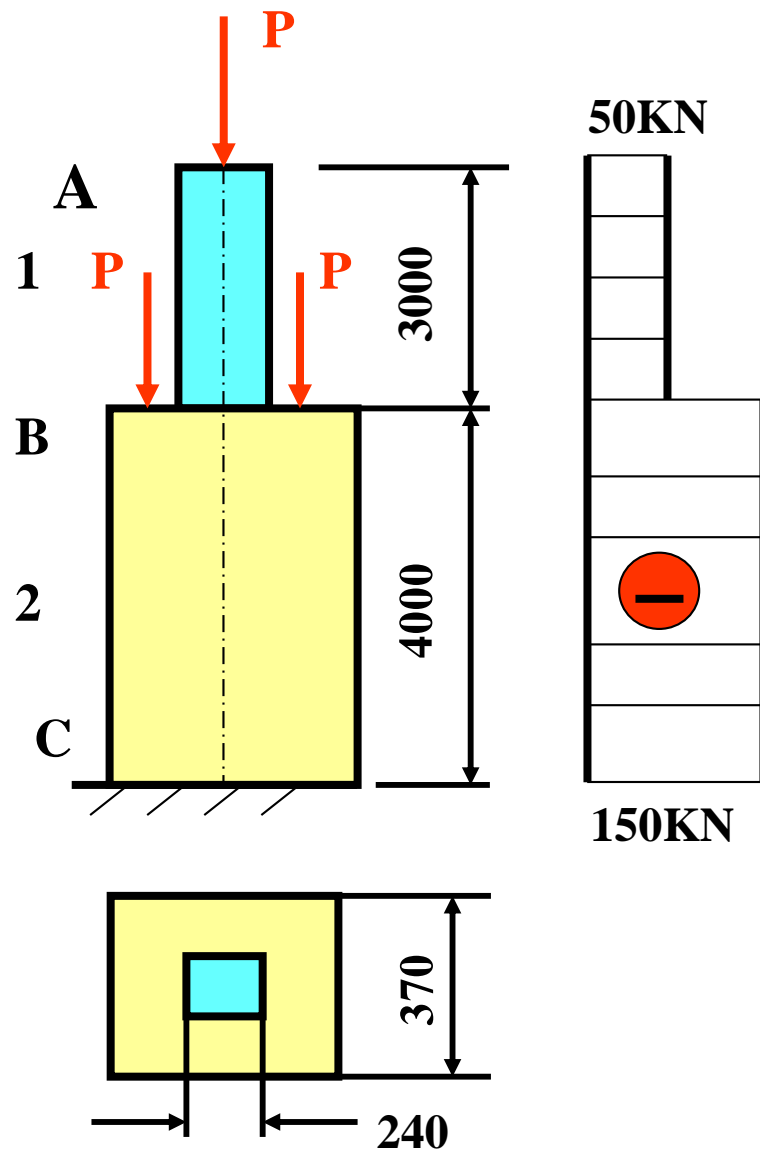
Beijing University of Chemical Technology



解：作轴力图，如图所示

$$N_1 = -P = -50\text{KN}$$

$$N_2 = -3P = -150\text{KN}$$



3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



上部分应力：

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-50000}{0.24 \times 0.24}$$

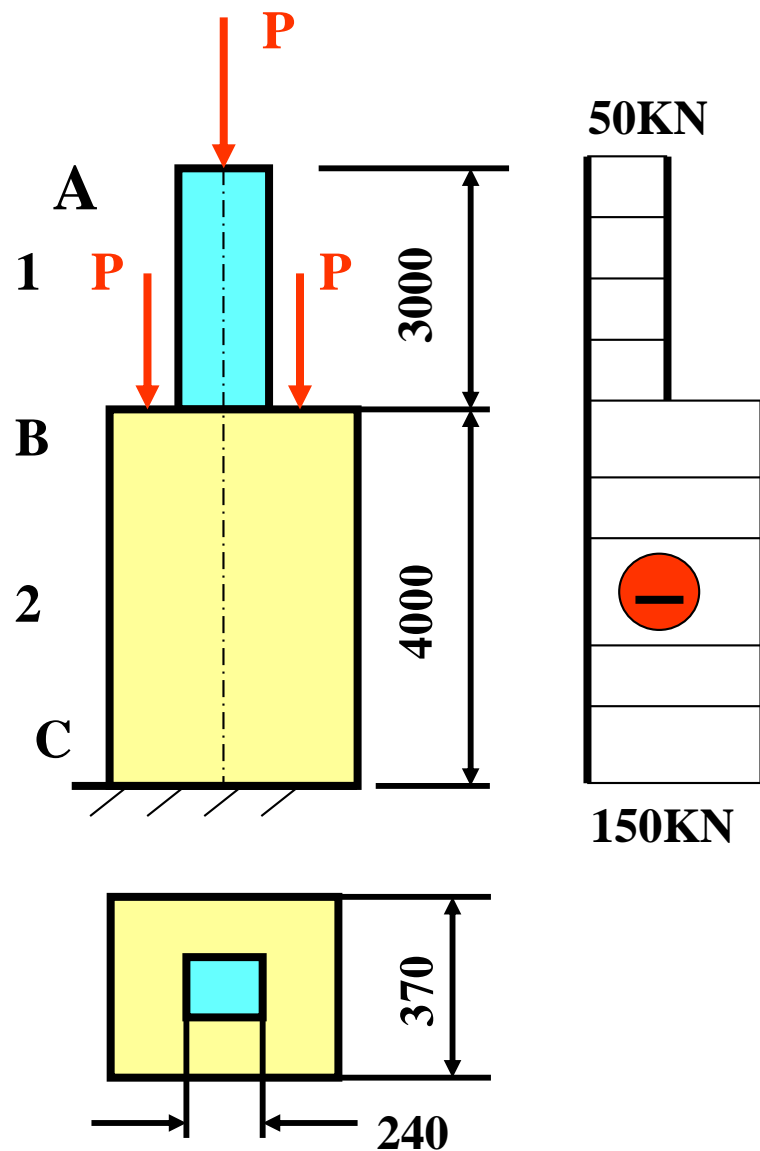
$$= -0.87 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -0.87 \text{ MPa}$$

下部分应力：

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-150000}{0.37 \times 0.37}$$

$$= -1.1 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -1.1 \text{ MPa}$$

σ_{\max} 在柱的下段，其值为
1.1 MPa，是压应力。



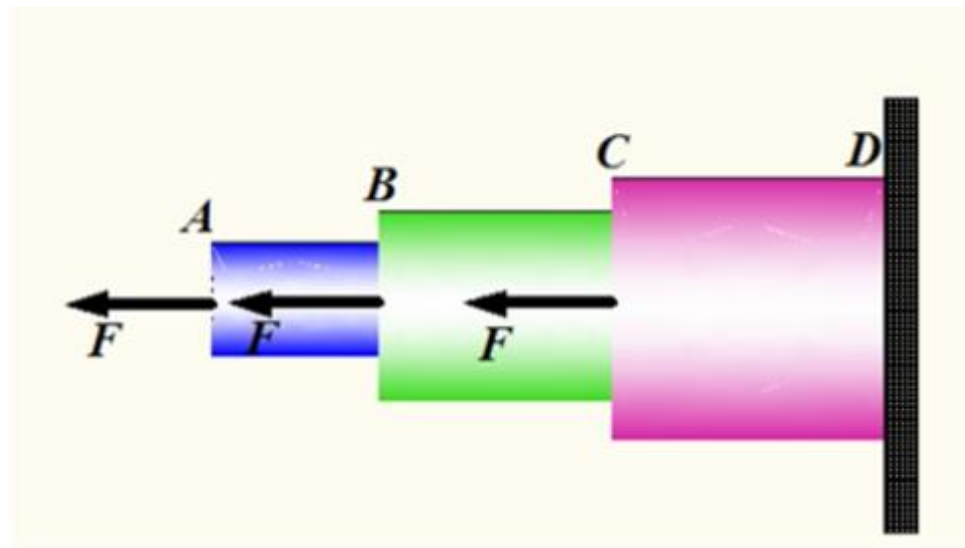
图示阶梯杆 AD 受三个集中力 F 作用，设 AB 、 BC 、 CD 段的横截面面积分别为 A 、 $2A$ 、 $3A$ ，则在三段杆的横截面上：

A 轴力不等，应力相等；

B 轴力相等，应力不等；

C 轴力和应力都相等；

D 轴力和应力都不等。



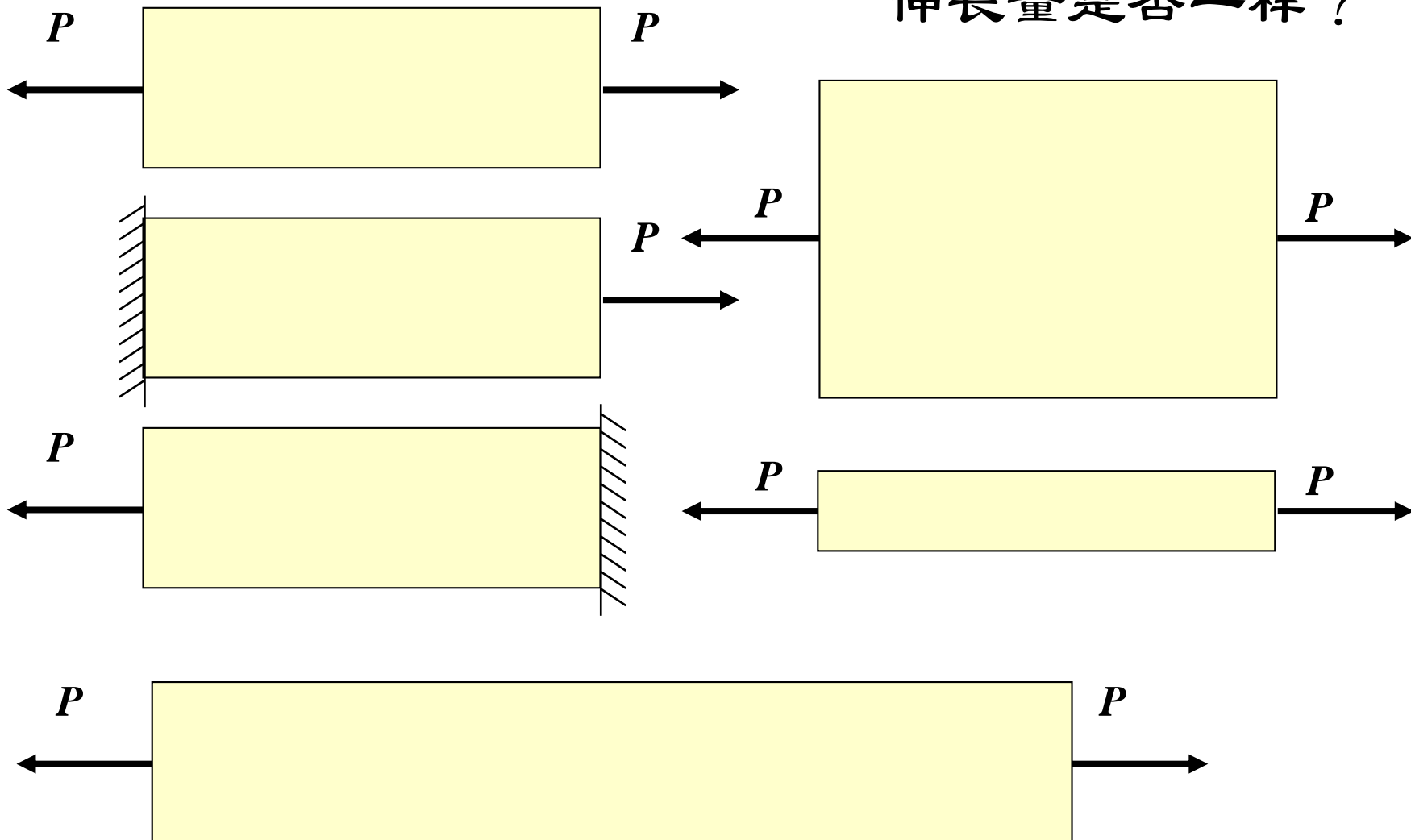
提交

3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

Beijing University of Chemical Technology



伸长量是否一样？

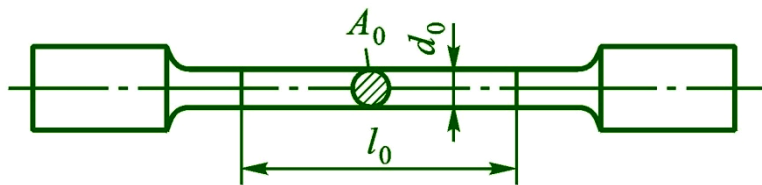


3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

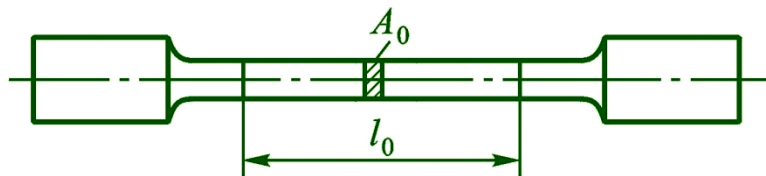
Beijing University of Chemical Technology



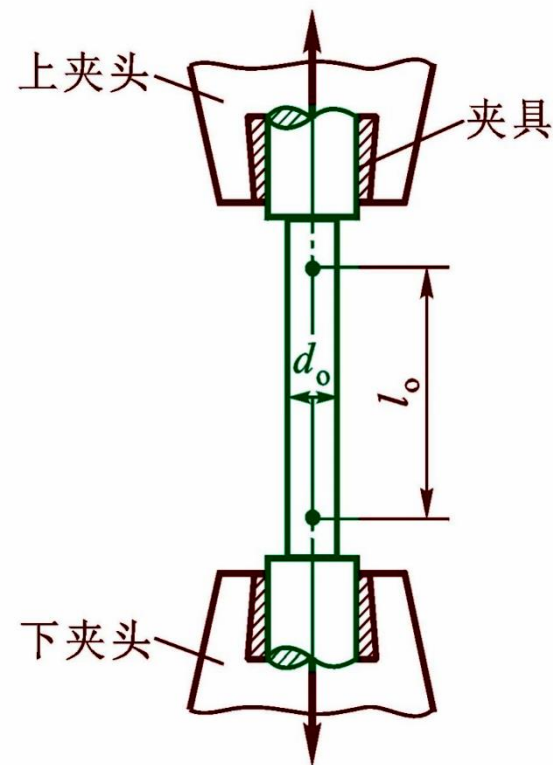
1. 碳素钢的拉伸试验



棒材——圆柱形试样



板材——板状试样



在试样中间等直部分上划两条横线，这一段杆称为工作段

l_0 --- 标准长度或称标距

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



1. 碳素钢的拉伸试验

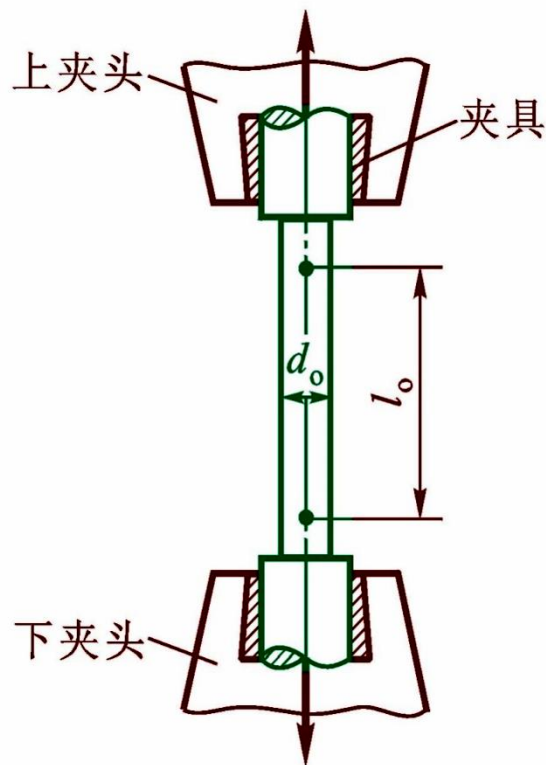
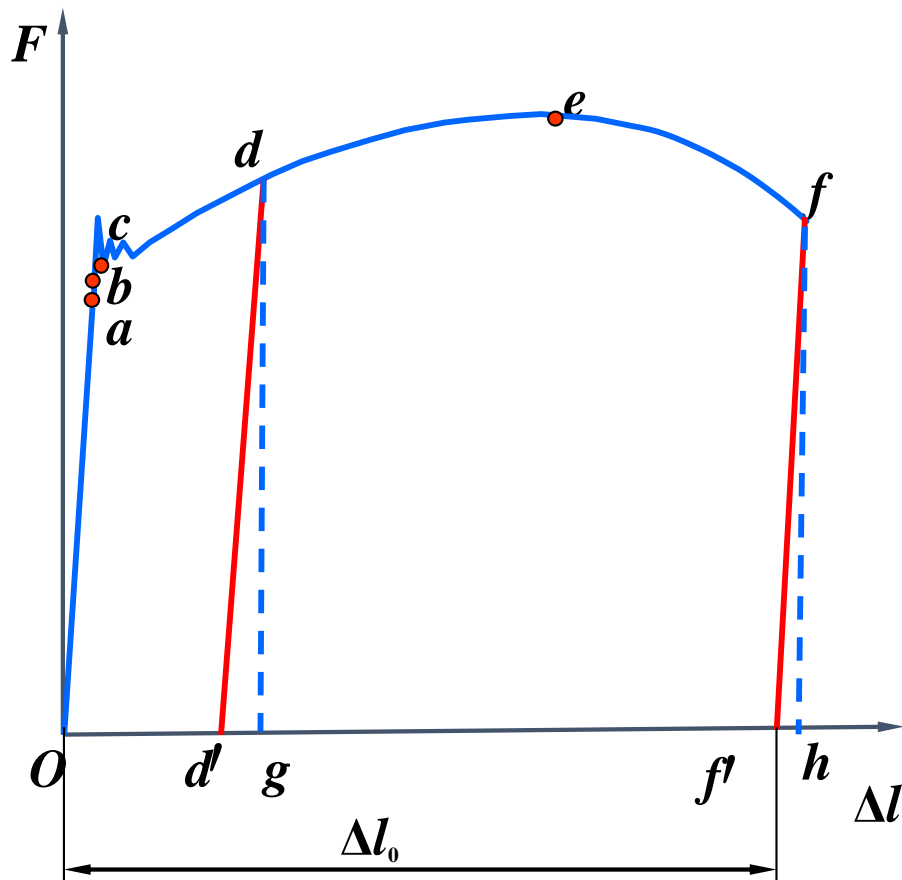


3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



1. 碳素钢的拉伸试验-拉伸图



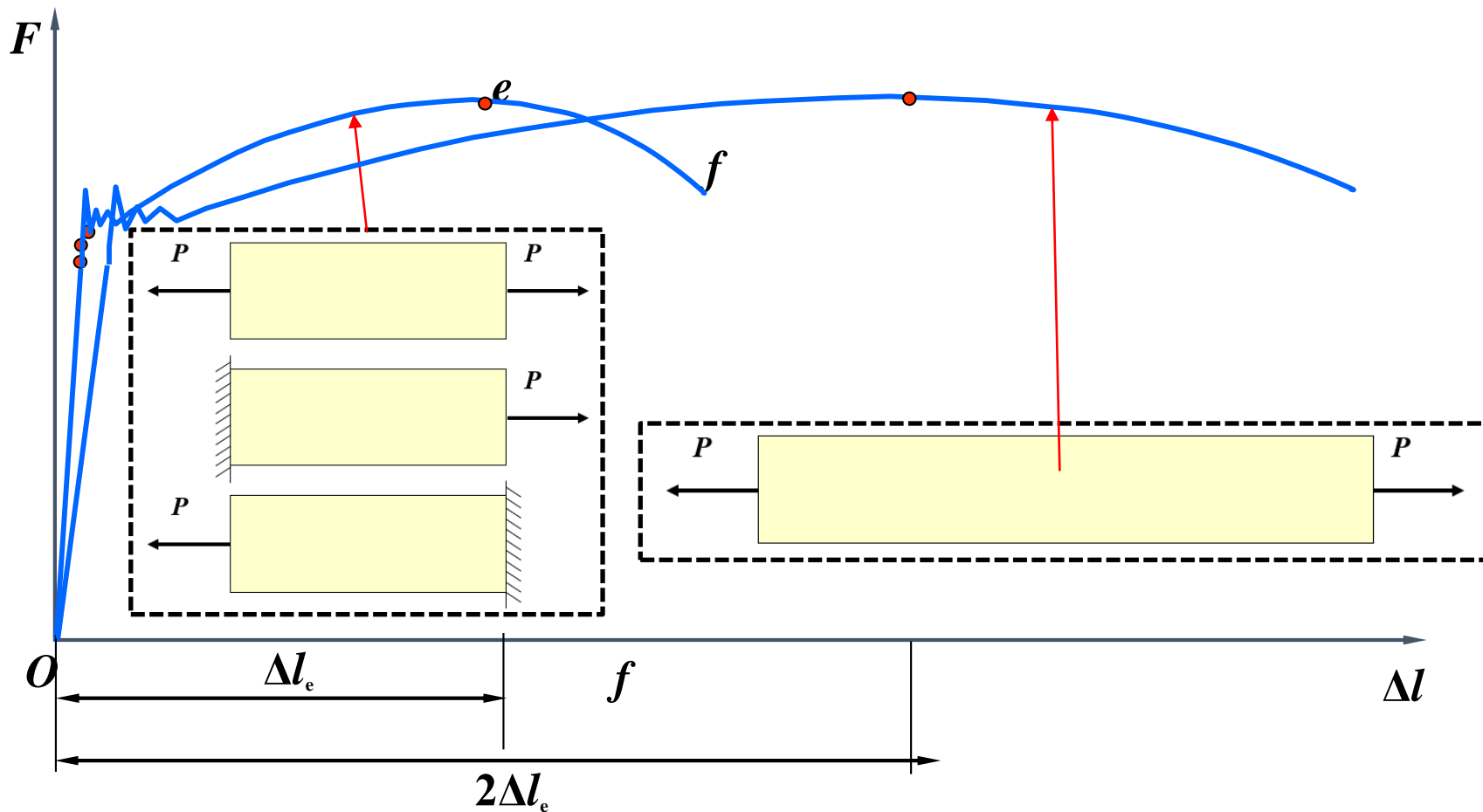
拉伸图：拉力 F 和伸长量 Δl 关系的曲线。

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



1. 碳素钢的拉伸试验-拉伸图



拉伸图与试样尺寸有关。

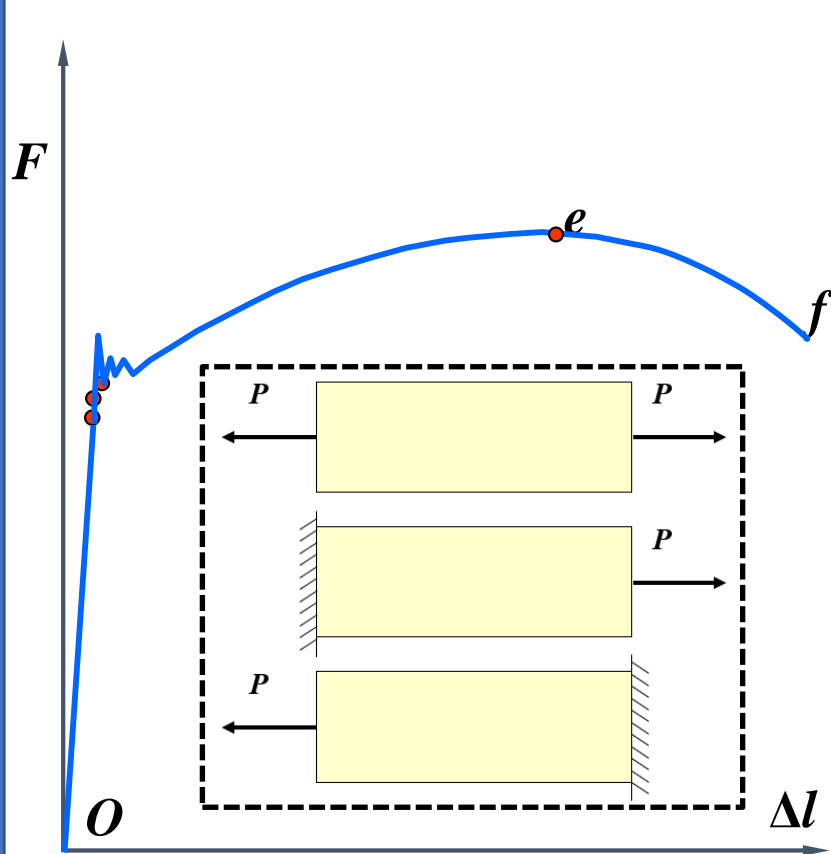
应力-应变关系

3-3: 拉（压）杆横截面上的应力

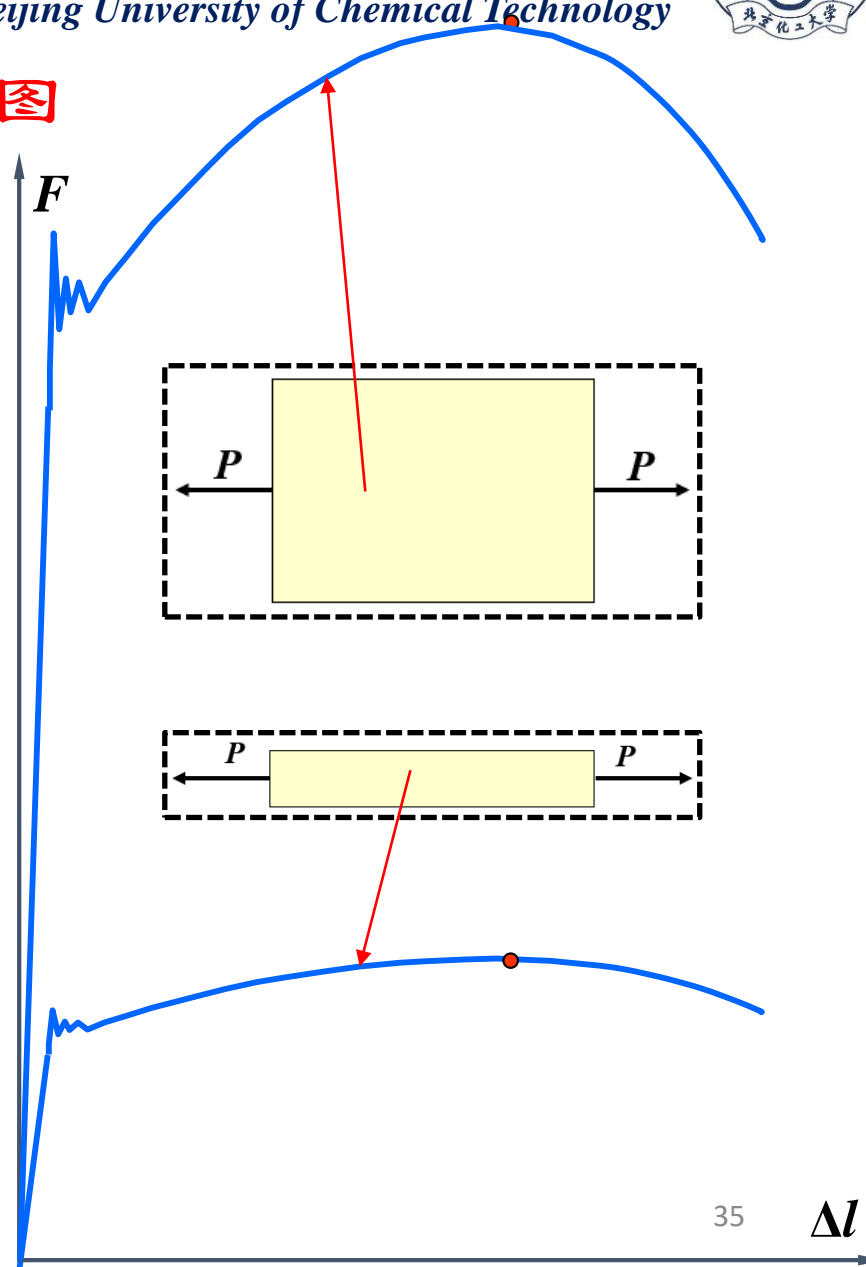
Beijing University of Chemical Technology



1. 碳素钢的拉伸试验-拉伸图



拉伸图与试样尺寸有关。

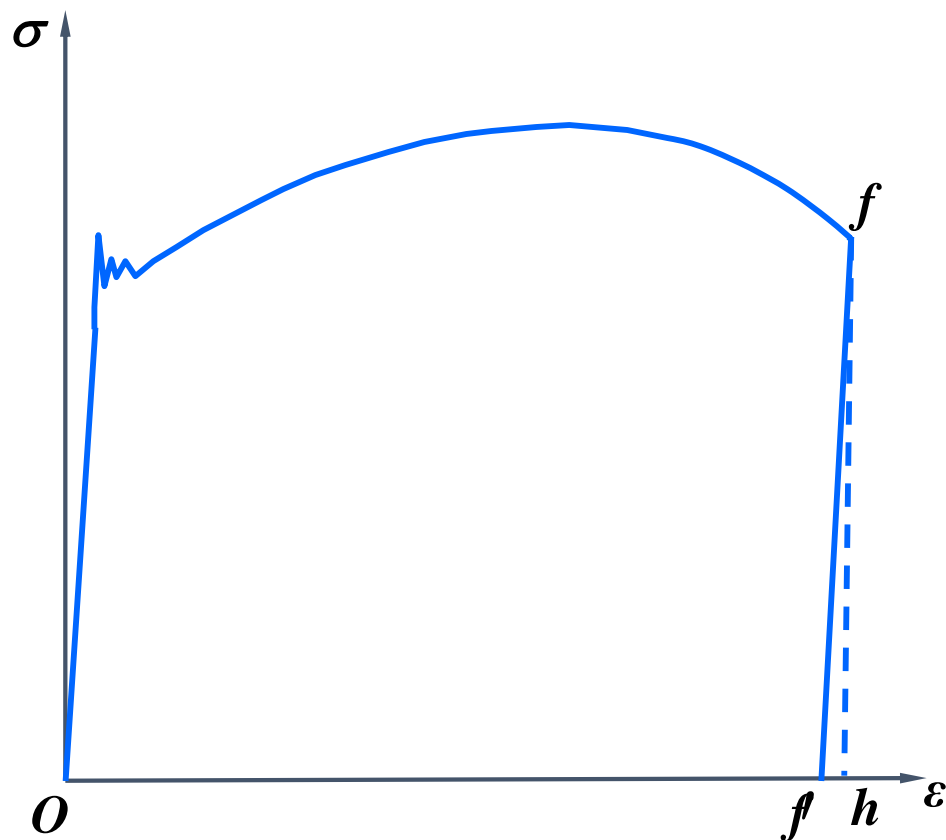


3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



1. 碳素钢的拉伸试验-应力应变图



$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{2\Delta l}{2l_0}$$

前面几种情况的应力应变曲线重合；与尺寸无关

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



1. 碳素钢的拉伸试验-应力应变图

(a) 弹性阶段

试样的变形完全弹性的
(Ob)。此阶段内的直线
段材料满足胡克定律:

$$\sigma = E\varepsilon$$

重点

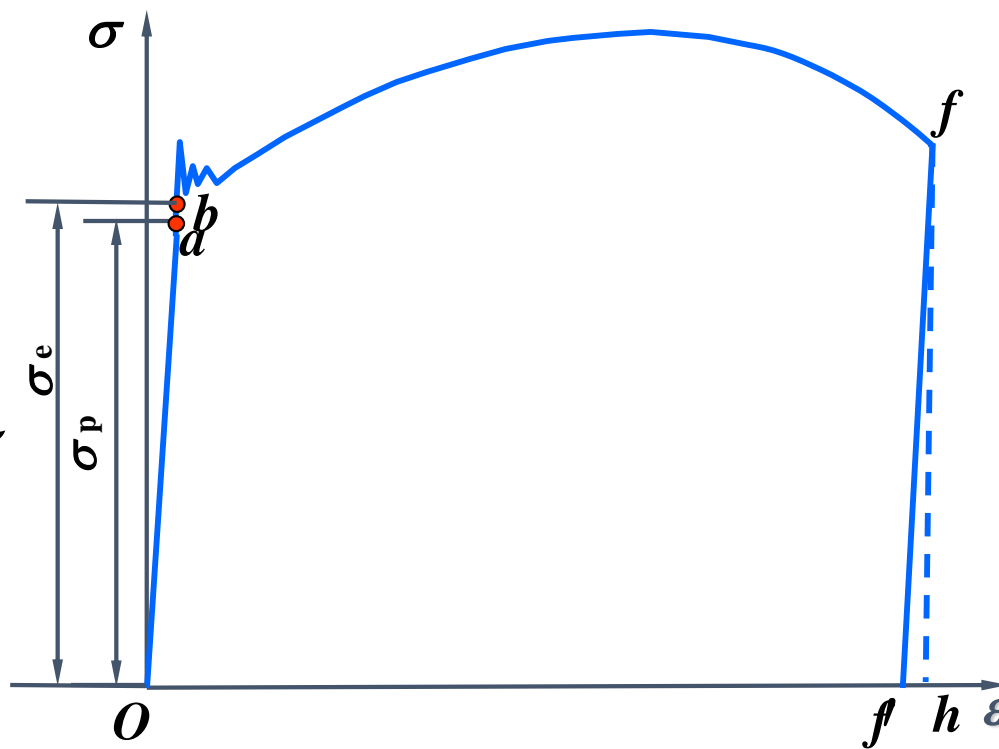
σ_p —— 比例极限

线性关系

b 点是弹性阶段的最高点

σ_e —— 弹性极限

弹性



3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



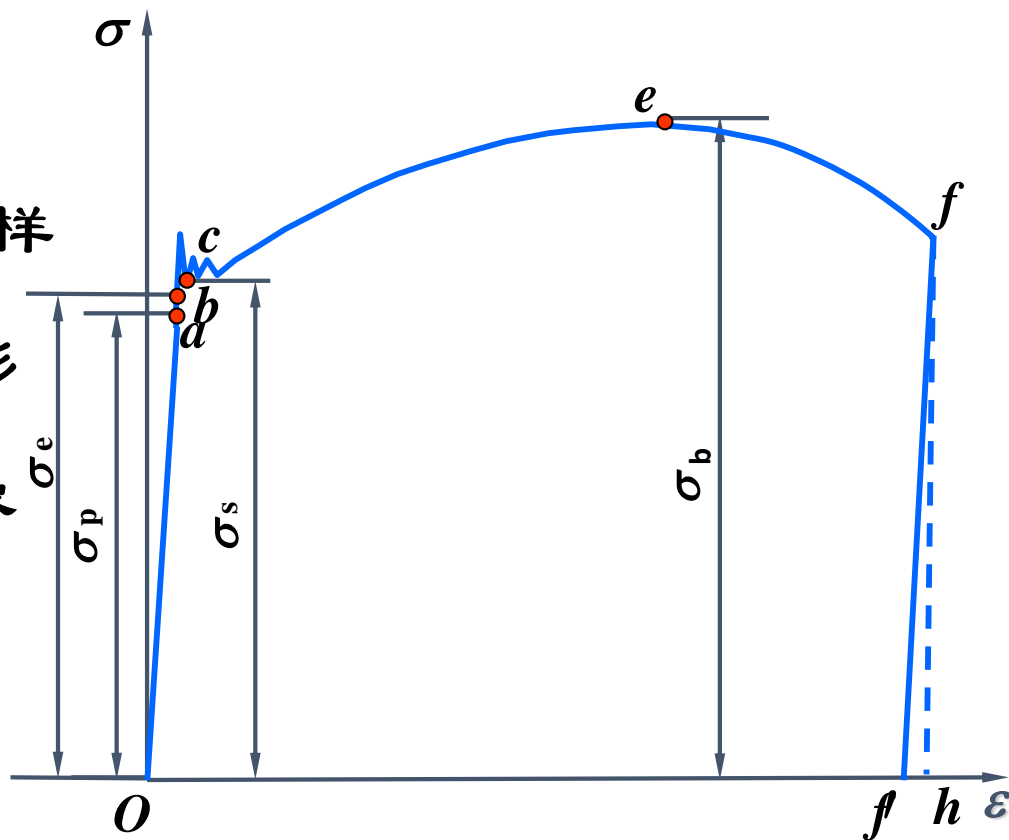
1. 碳素钢的拉伸试验-应力应变图

(b) 屈服阶段

当应力超过 **b** 点后，试样的荷载基本不变而变形却急剧增加，这种现象称为**屈服**。

σ_s —— 屈服极限

屈服阶段的**最低点**



比例极限、弹性极限、屈服极限三者之间数值相近，但要区分概念。

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

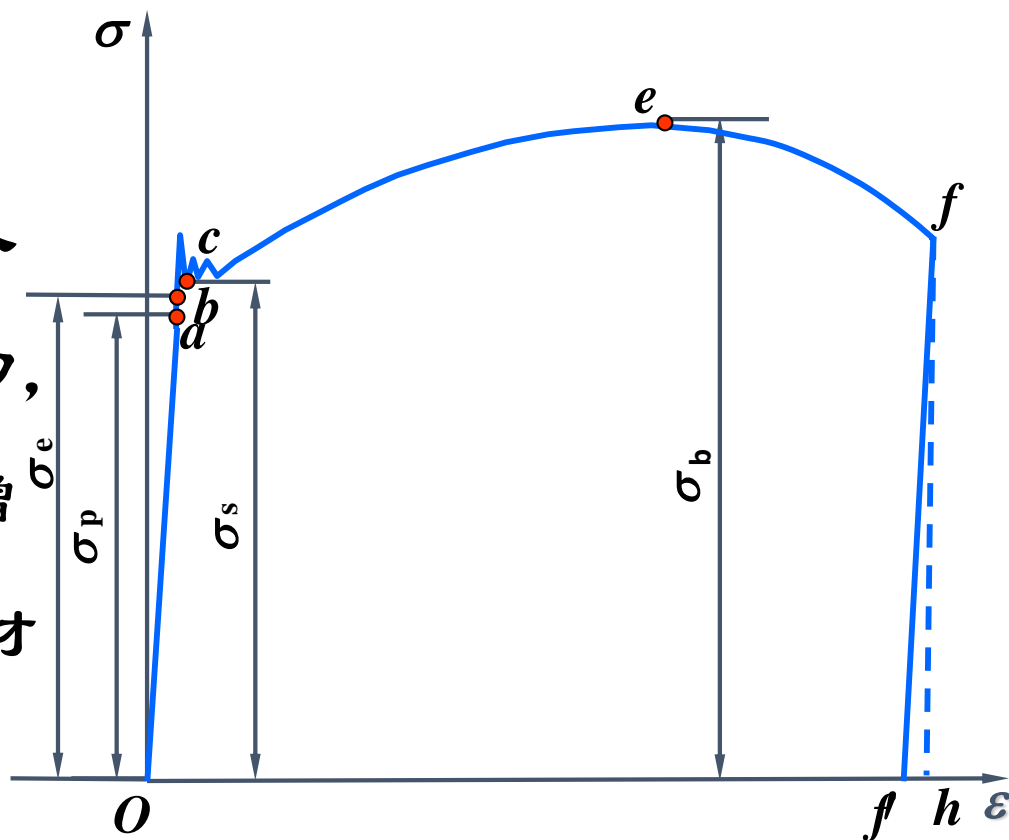
Beijing University of Chemical Technology



1. 碳素钢的拉伸试验-应力应变图

(c) 强化阶段

过屈服阶段后，材料又恢复了抵抗变形的能力，要使它继续变形必须增加拉力。这种现象称为材料的**强化**。

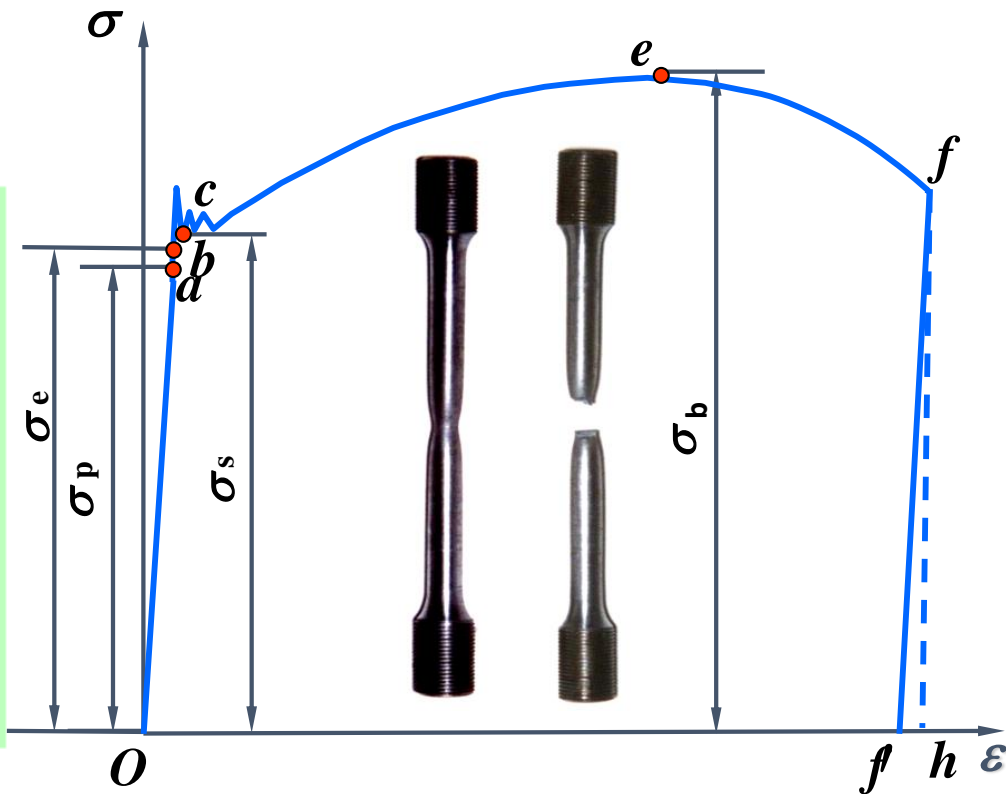
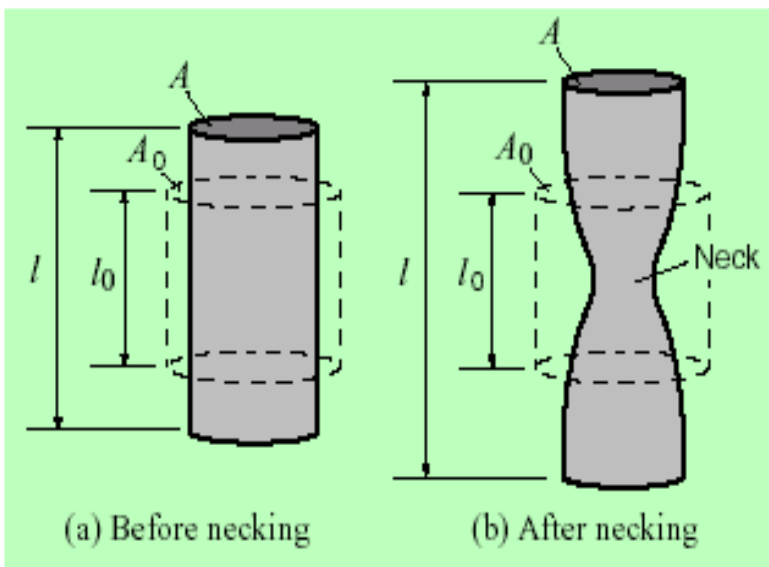


σ_b —— 强度极限

e点是强化阶段的**最高点**

1. 碳素钢的拉伸试验-应力应变图

(d) 局部变形阶段



过e点后，试样在某一段内的横截面面积显著地收缩，出现**颈缩**现象，一直到试样被拉断。

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



2. 断后伸长率和断面收缩率

试样拉断后，弹性变形消失，塑性变形保留，试样的长度由 l 变为 l_1 ，横截面积原为 A ，断口处的最小横截面积为 A_1 。

伸长率

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$

断面收缩率

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$



$\delta \geq 5\%$ 的材料，称作**塑性**材料

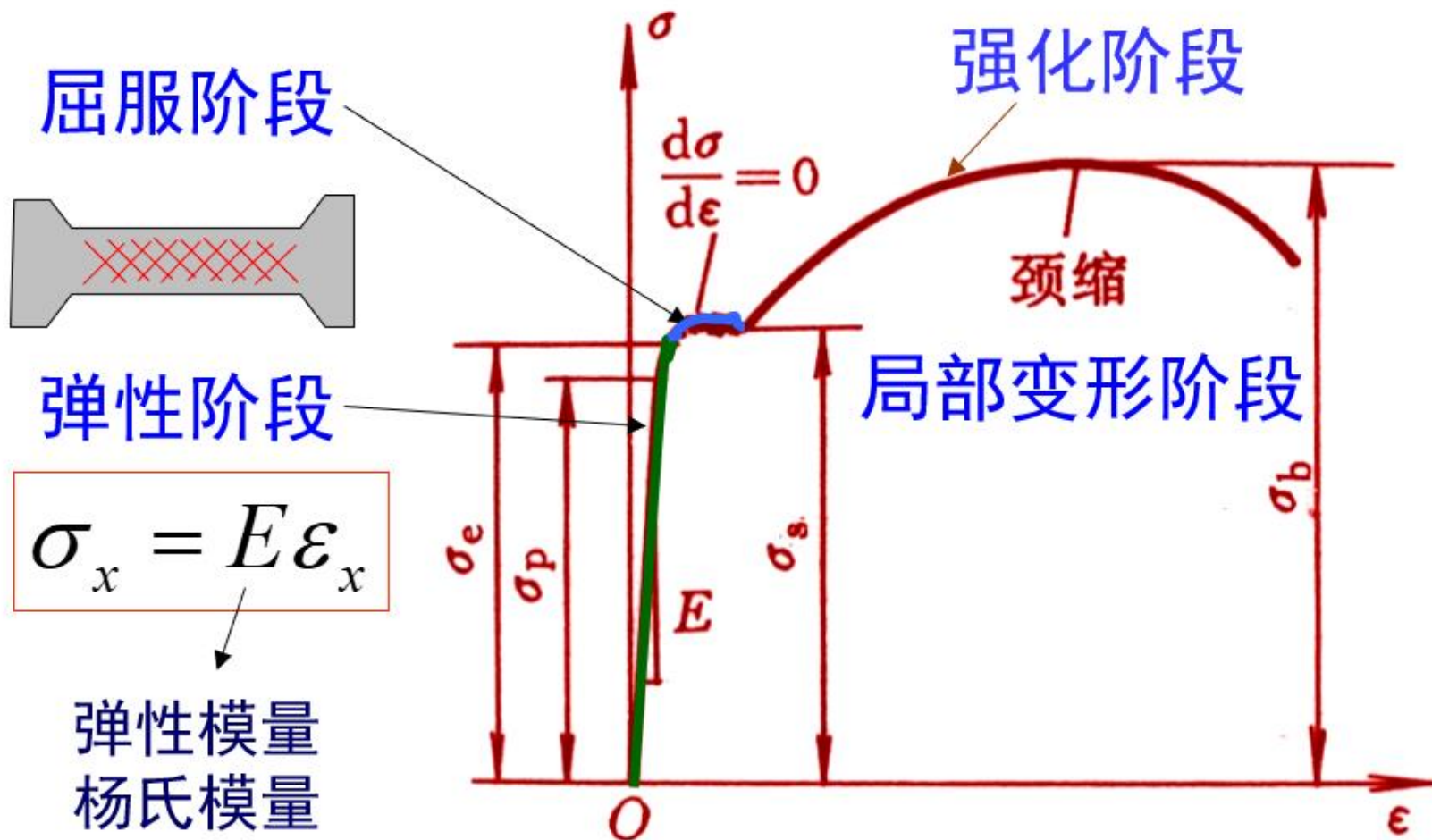
$\delta < 5\%$ 的材料，称作**脆性**材料

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



3. 典型韧性金属材料的拉伸曲线

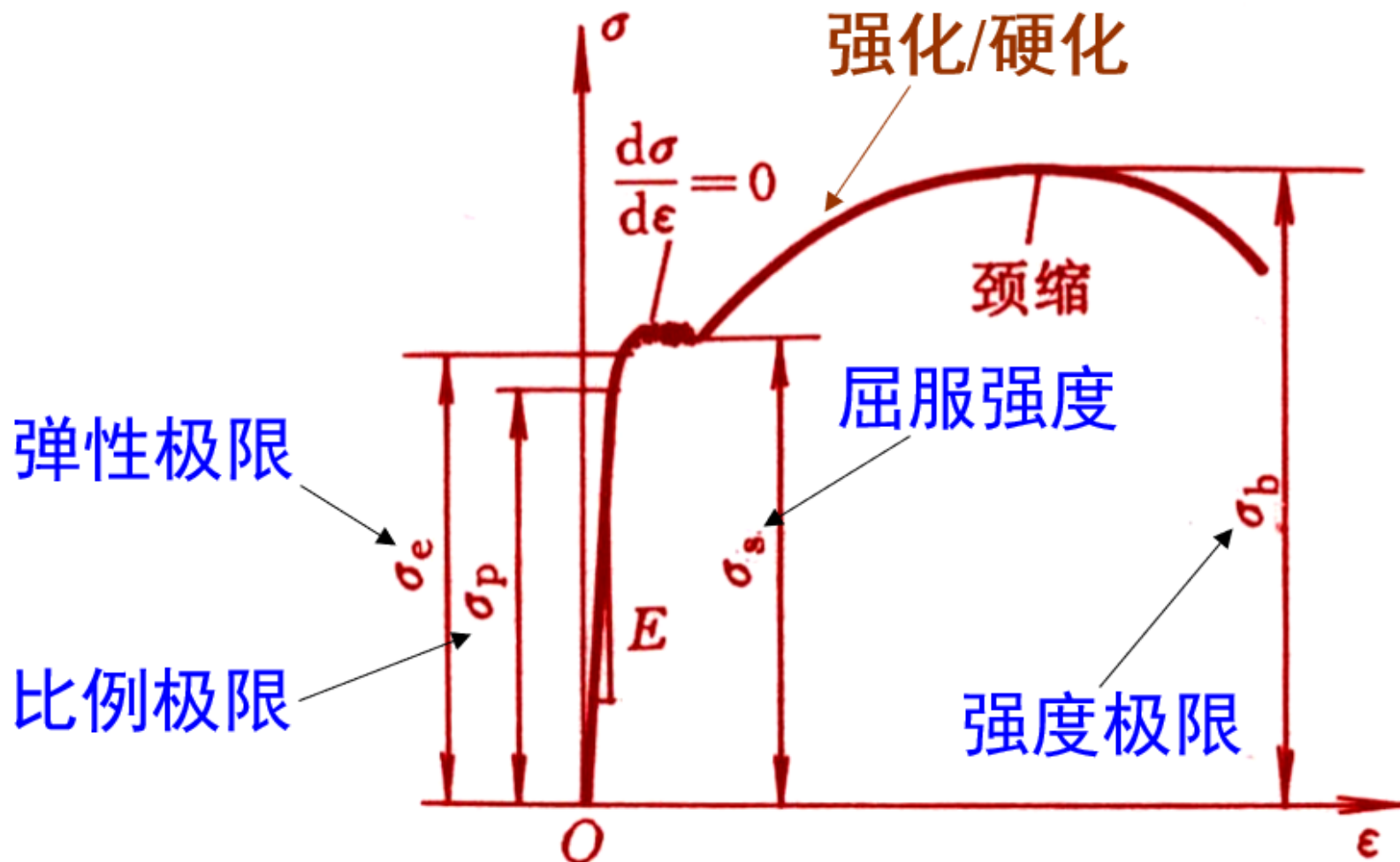


3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



3. 典型韧性金属材料的拉伸曲线



3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

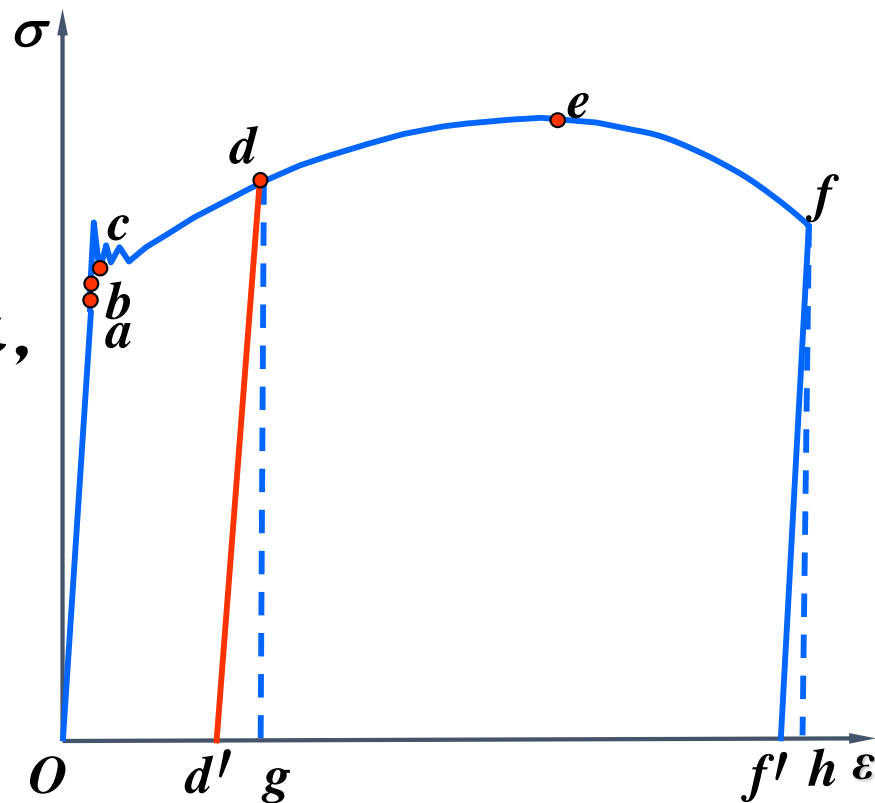
Beijing University of Chemical Technology



4. 卸载定律及冷作硬化

卸载定律：

若加载到强化阶段的某一点 d 停止加载，并逐渐卸载，在卸载过程中，荷载与试样伸长量之间遵循直线关系的规律称为材料的卸载定律。



3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

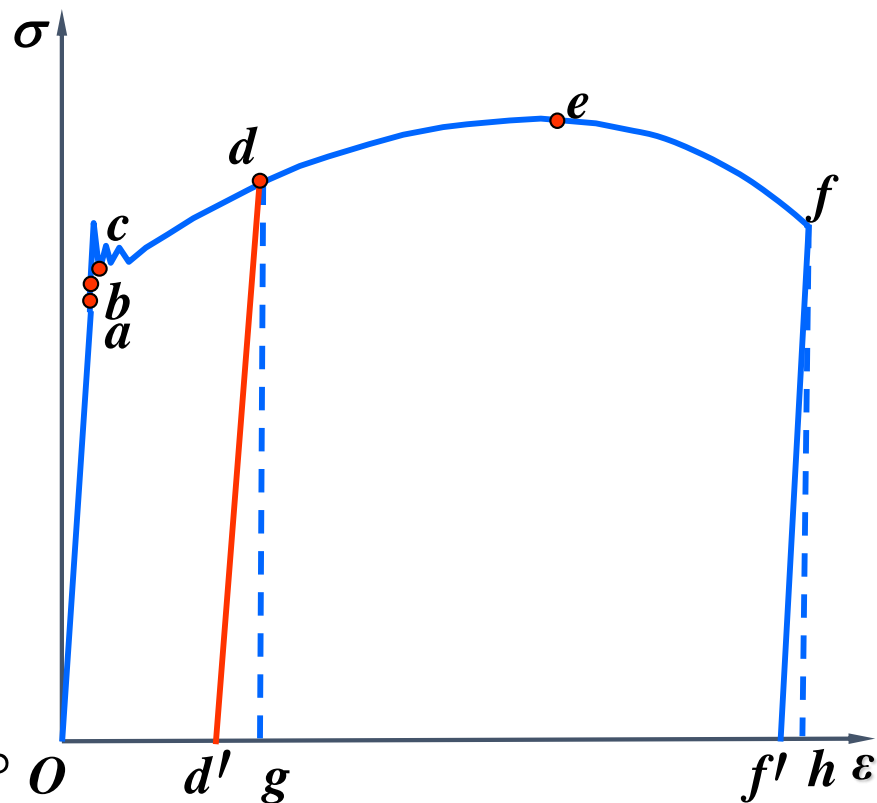
Beijing University of Chemical Technology



4. 卸载定律及冷作硬化

冷作硬化:

在常温下把材料预拉到强化阶段然后卸载,当再次加载时,试样在线弹性范围内所能承受的最大荷载将增大.这种现象称为冷作硬化。

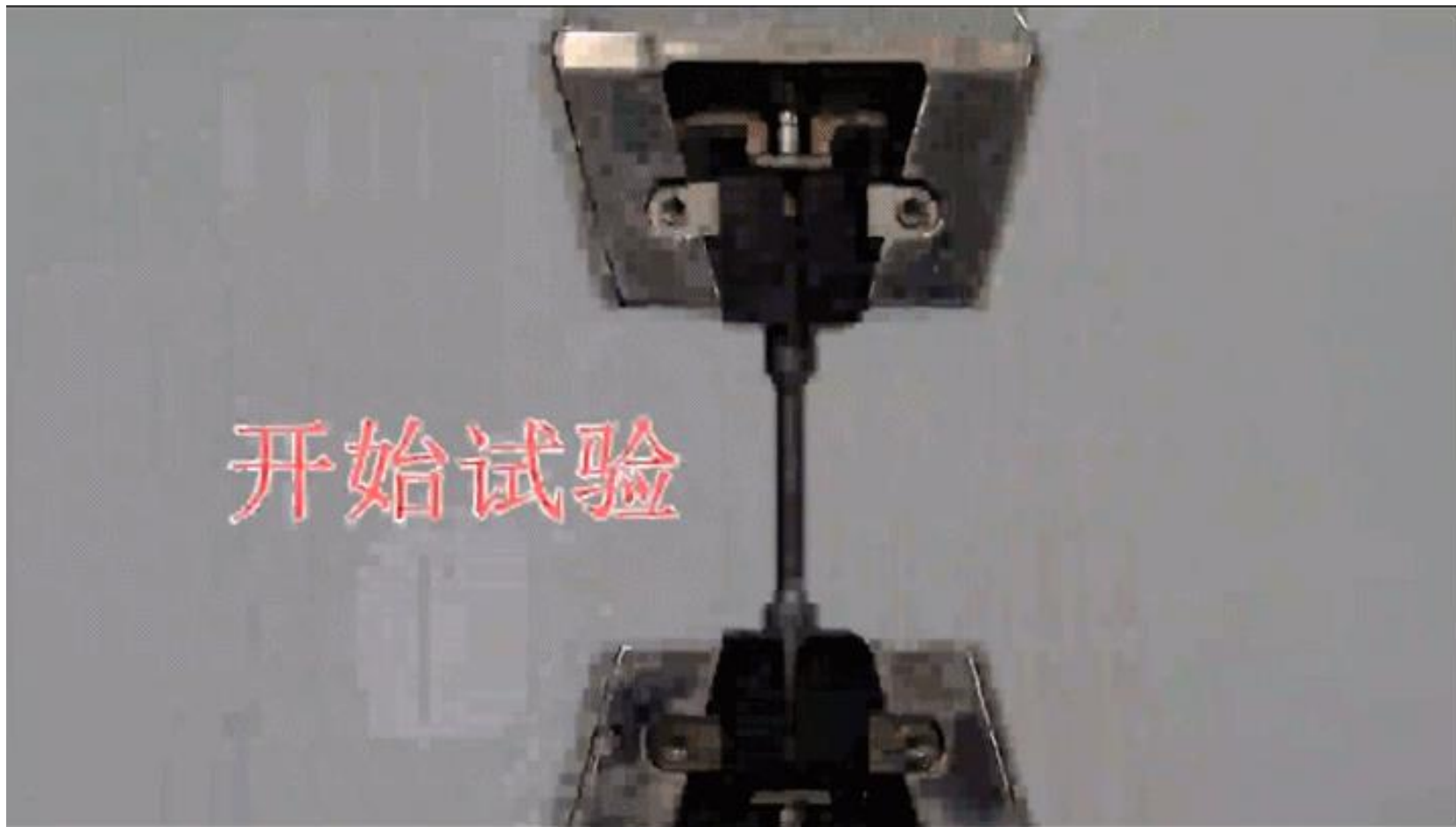


3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



5. 铸铁的拉伸试验



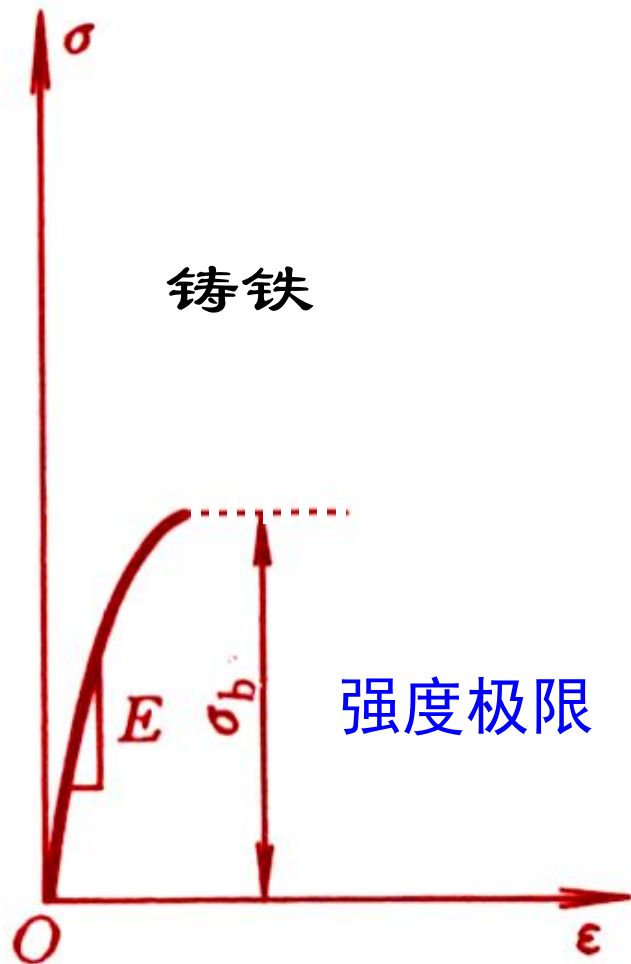
脆性材料，没有颈缩

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

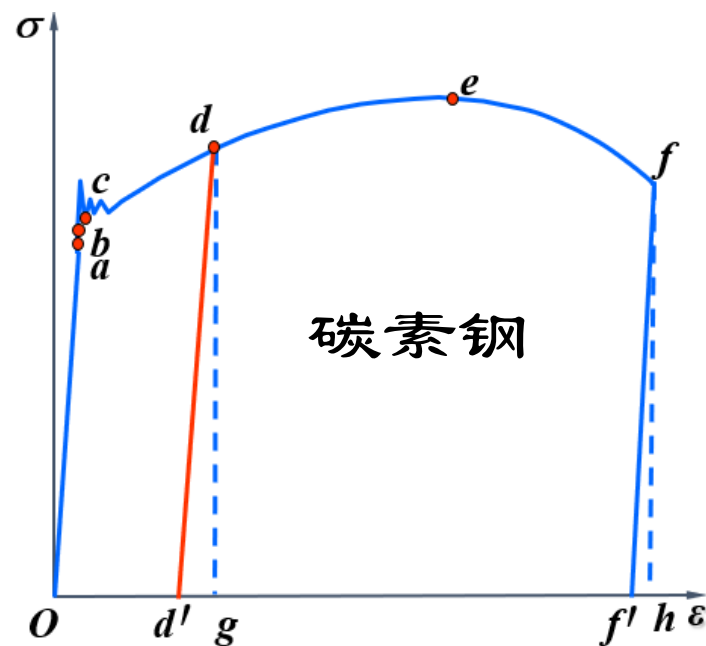
Beijing University of Chemical Technology



5. 铸铁的拉伸试验



脆性材料



塑性材料

强度：抵抗破坏的能力。

设计要求：不因发生断裂或显著塑性变形而失效。



脆性



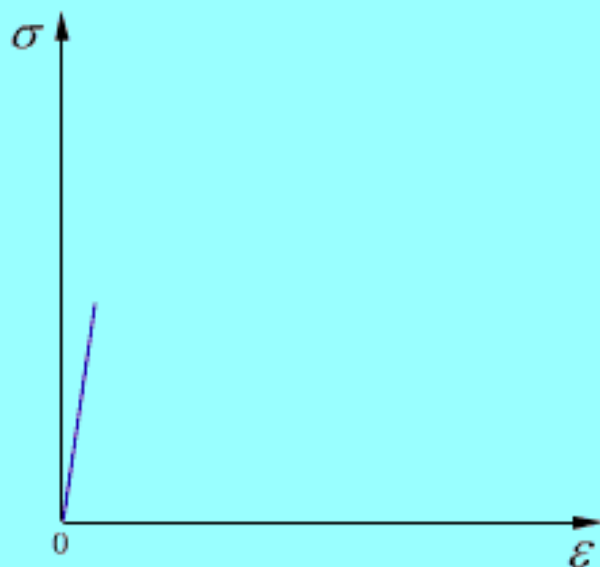
塑性

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

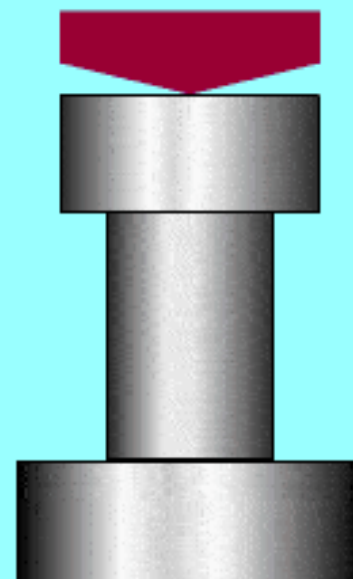
Beijing University of Chemical Technology



6. 材料压缩时的力学性能



应力—应变曲线



低碳钢压缩实验演示图

START

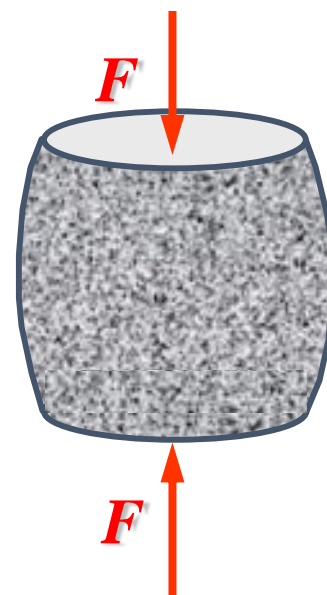
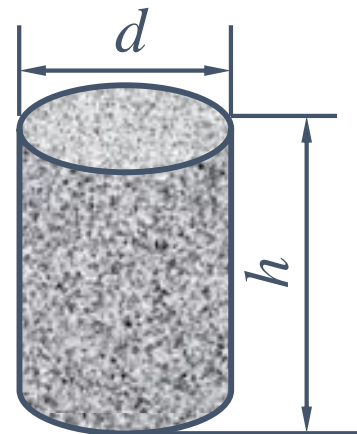
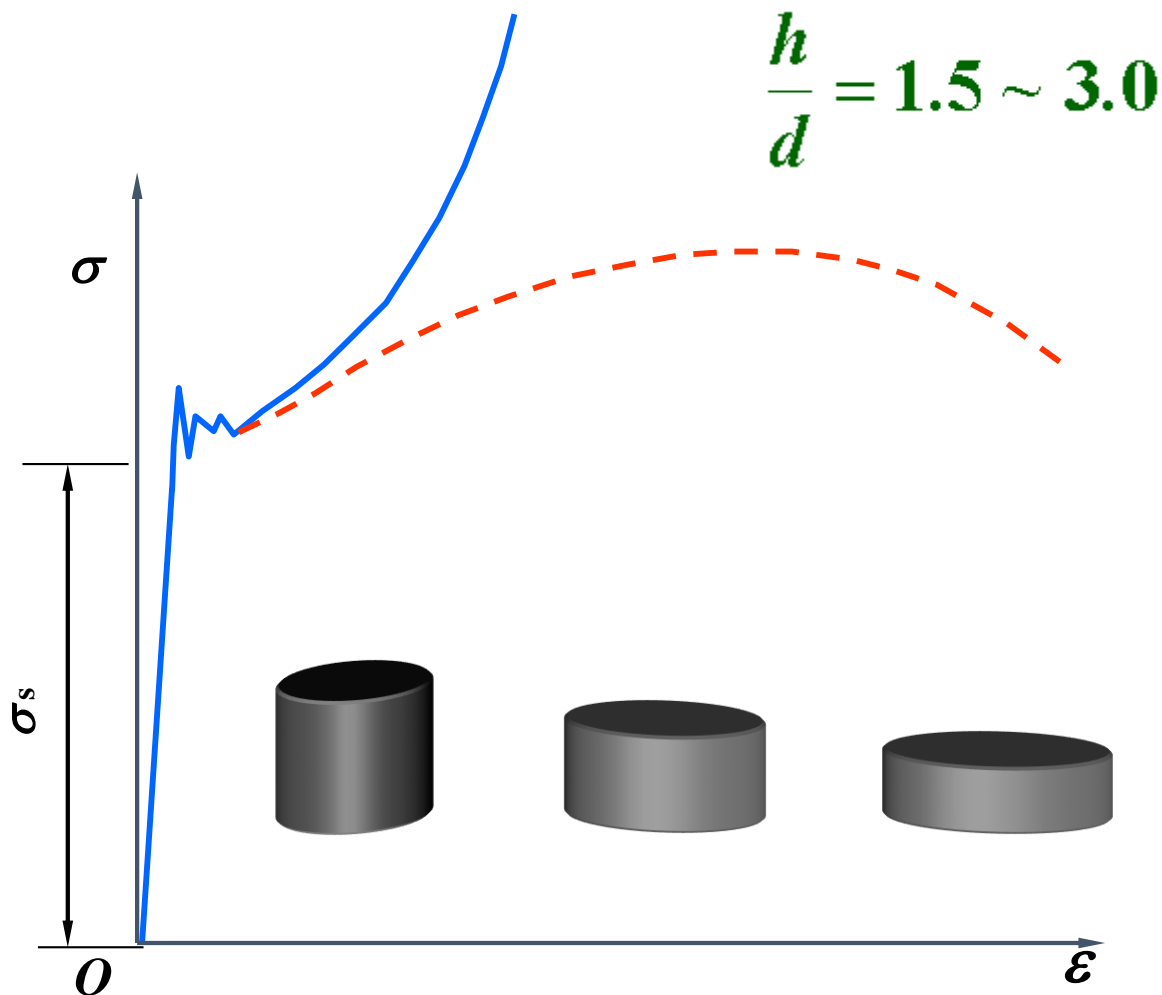
STOP

3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



6. 材料压缩时的力学性能

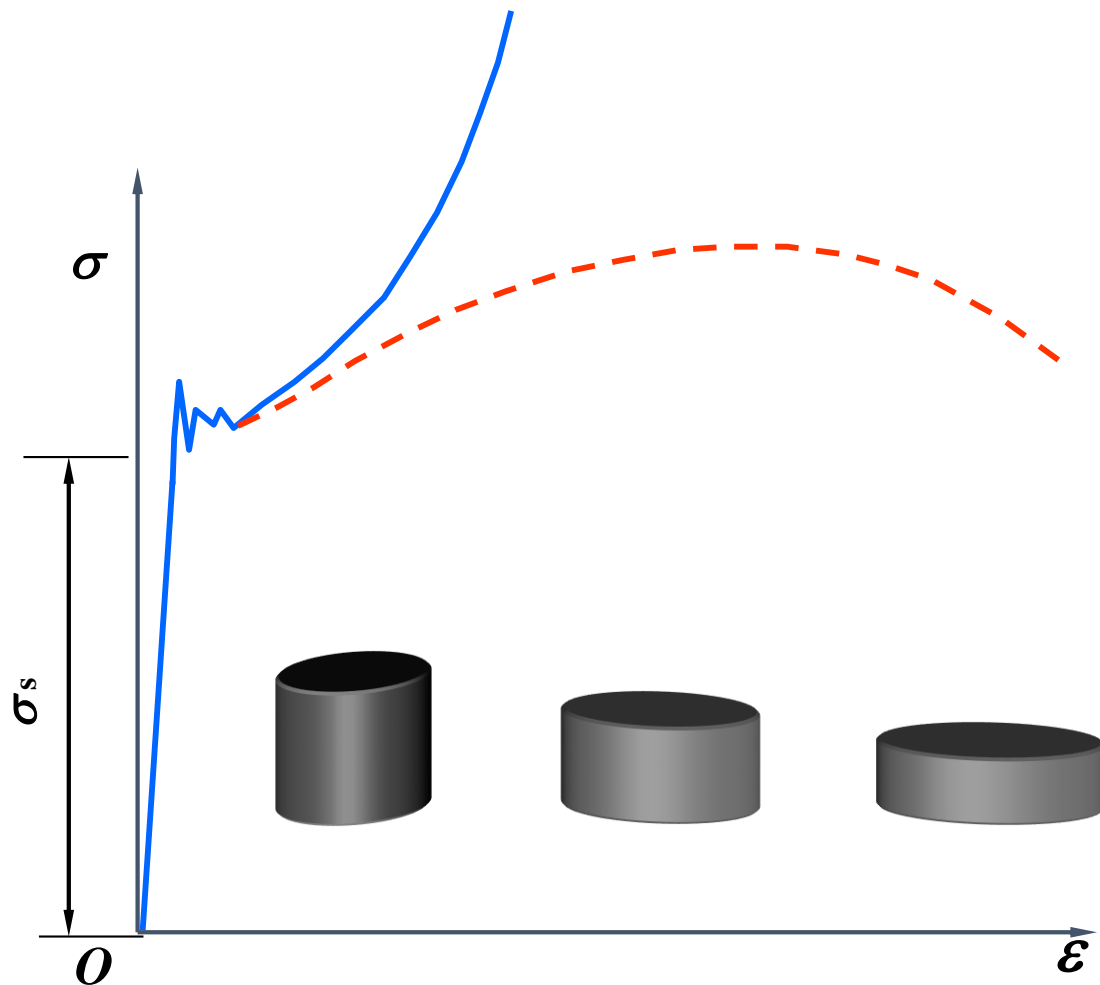


3-4: 材料在拉伸和压缩时的力学性能

Beijing University of Chemical Technology



6. 材料压缩时的力学性能



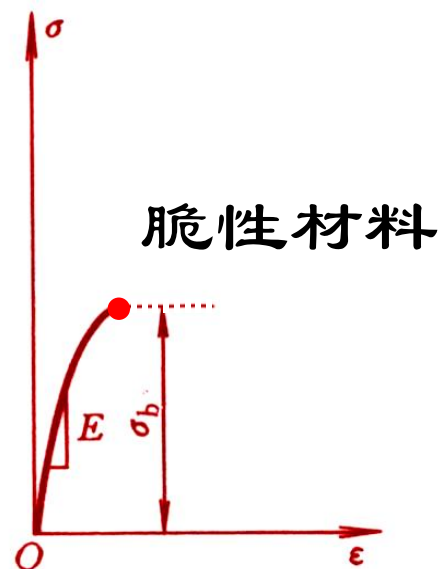
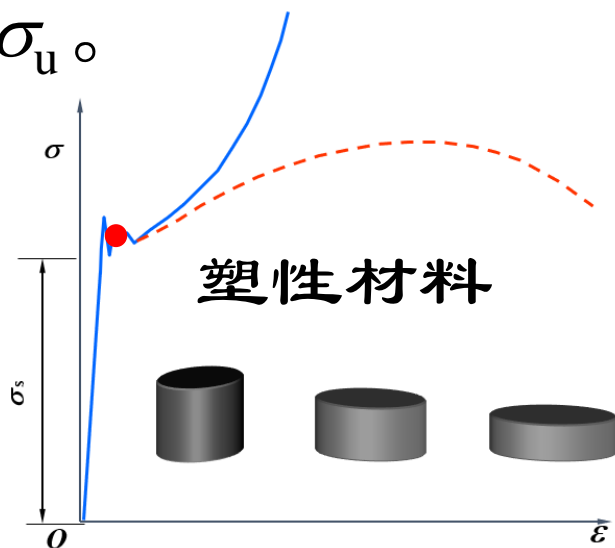
低碳钢压缩时的弹性模量 E 和屈服极限 σ_s 都与拉伸时大致相同。屈服阶段后,试样越压越扁,横截面积不断增大,试样不可能被压断,因此得不到压缩时的强度极限。

3-5: 许用应力 强度条件

Beijing University of Chemical Technology



对于某种材料，应力的增加是有限度的，超过这一限度材料就要破坏，这一限度称为材料极限应力 σ_u 。



杆件能安全工作的应力最大值，称为许用应力 $[\sigma]$ 。

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n} \quad n > 1, \text{ 称为安全系数,}$$

$$n = \begin{cases} 1.2 \sim 2.5 & \text{塑性材料} \\ 2 \sim 3.5 & \text{脆性材料} \end{cases}$$

n 越大越安全

3-5: 许用应力 强度条件

Beijing University of Chemical Technology



强度条件：杆内的最大工作应力不超过材料的许用应力

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

等直杆内最大正应力发生在最大轴力所在的横截面上。

该截面称为**危险截面**。

危险截面上的正应力称为**最大工作应力**。

3-5: 许用应力 强度条件

Beijing University of Chemical Technology



(1) 强度校核

$$\frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

(2) 设计截面

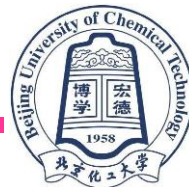
$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$$

(3) 确定许可核载

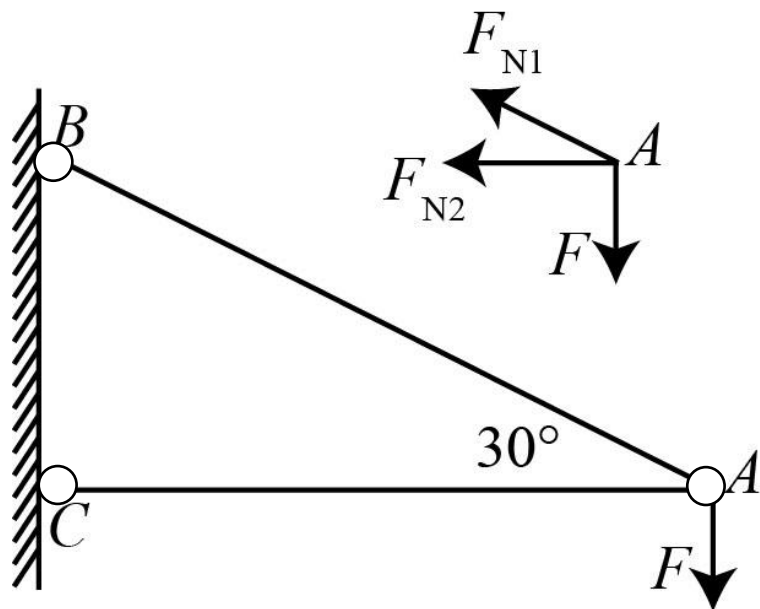
$$N_{\max} \leq A[\sigma]$$

3-5: 许用应力 强度条件

Beijing University of Chemical Technology



例题3.2: AB : $[\sigma]_1=160 \text{ MPa}$, $A_1=6\text{cm}^2$, AC : $[\sigma]_2=7 \text{ MPa}$, $A_2=100\text{cm}^2$, 如果 $F=40\text{kN}$, 试强度其校核。



1. 内力计算: **强度校核**

$$\sum F_y = 0, F_{N1} \sin 30^\circ - F = 0$$

$$\sum F_x = 0, -F_{N1} \cos 30^\circ - F_{N2} = 0$$

$$F_{N1} = 80\text{kN} \text{ (拉)}$$

$$F_{N2} = -69.3\text{kN} \text{ (压)}$$

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = 133\text{MPa} < [\sigma]_1$$

2. 强度校核:

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = 6.93\text{MPa} < [\sigma]_2$$

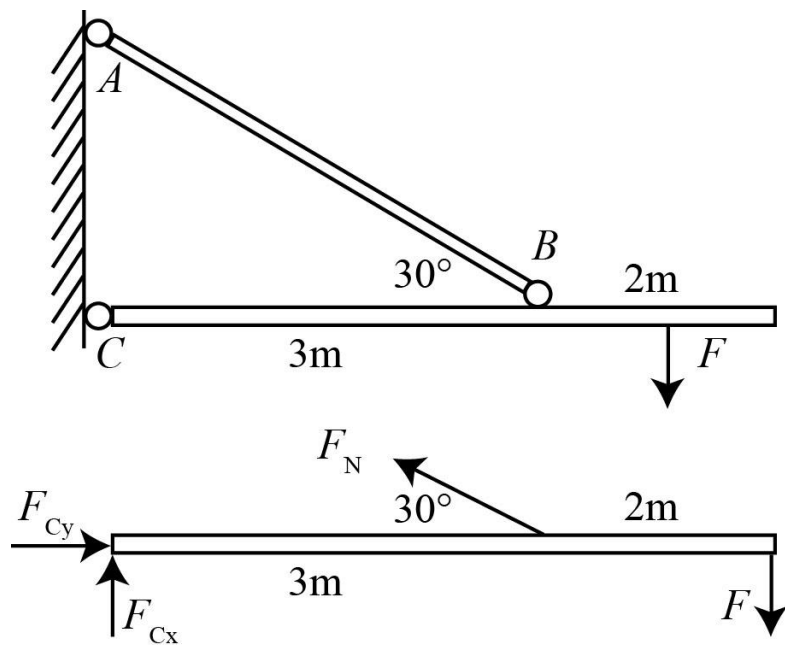
均满足强度条件!

3-5: 许用应力 强度条件

Beijing University of Chemical Technology



例题3.3: 滑轮在CD移动, $F=20\text{kN}$, AB 拟采用两根等边角钢, $[\sigma]=140\text{ MPa}$, 选择角钢型号。 **设计截面**



1. 内力计算:

$$\sum M_C = 0, 3F_N \sin 30^\circ - Fx = 0$$

$$F_N = \frac{Fx}{3 \sin 30^\circ} \leq \frac{5F}{3 \sin 30^\circ} = 66.7\text{kN (拉)}$$

2. 截面选择:

$$A \geq \frac{F_N}{2[\sigma]} = 2.381\text{cm}^2$$

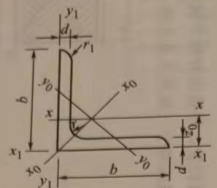
由P197型钢表查询, 40-40-3等边角钢横截面 2.359cm^2 , 比较接近:

$$\sigma = \frac{F_N}{2A} = 141\text{MPa}$$

不超过许用应力1%。工程上认为
不超过5%, 仍认为满足强度条件。

3-5: 许用应力 强度条件

Beijing University of Chemical Technology

符号意义: b — d — r — r_1 —

角钢号数	尺寸 /mm			截面 面积 /cm ²	理论 重量 / (kg /m)	外表 面积 / (m ² /m)	参				
	b	d	r				x-x			x ₀ -x ₀	
							I _x /cm ⁴	i _x /cm	W _x /cm ³	I _{x₀} /cm ⁴	i _{x₀} /cm
2	20	3	3.5	1.132	0.889	0.078	0.40	0.59	0.29	0.63	0.75
		4		1.459	1.145	0.077	0.50	0.58	0.36	0.78	0.73
2.5	25	3	3.5	1.432	1.124	0.098	0.82	0.70	0.46	1.29	0.93
		4		1.859	1.459	0.097	1.03	0.74	0.59	1.62	0.99
3.0	30	3	4	1.749	1.373	0.117	1.46	0.91	0.68	2.31	1.11
		4		2.276	1.786	0.117	1.84	0.90	0.87	2.92	1.11
3.6	36	3	4.5	2.109	1.656	0.141	2.58	1.11	0.99	4.09	1.33
		4		2.756	2.163	0.141	3.29	1.09	1.28	5.22	1.33
		5		3.382	2.654	0.141	3.95	1.08	1.56	6.24	1.36

角钢号数	尺寸 /mm			截面 面积 /cm ²	理论 重量 /(kg /m)	外表 面积 /(m ² /m)	参				
	b	d	r				x—x			x ₀ —x ₀	
							I _x /cm ⁴	i _x /cm	W _x /cm ³	I _{x₀} /cm ⁴	i _{x₀} /cm
4.0	40	3	5	2.359	1.852	0.157	3.59	1.23	1.23	5.69	1.55
		4		3.086	2.422	0.157	4.60	1.22	1.60	7.29	1.54
		5		3.791	2.976	0.156	5.53	1.21	1.96	8.76	1.52
4.5	45	3		2.659	2.088	0.177	5.17	1.40	1.58	8.20	1.76
		4		3.486	2.736	0.177	6.65	1.38	2.05	10.56	1.74
		5		4.292	3.369	0.176	8.04	1.37	2.51	12.74	1.72
		6	5.076	3.985	0.176	9.33	1.36	2.95	14.76	1.70	
5	50	3	5.5	2.971	2.332	0.197	7.18	1.55	1.96	11.37	1.96
		4		3.897	3.059	0.197	9.26	1.54	2.56	14.70	1.94
		5		4.803	3.770	0.196	11.21	1.53	3.16	17.92	1.92

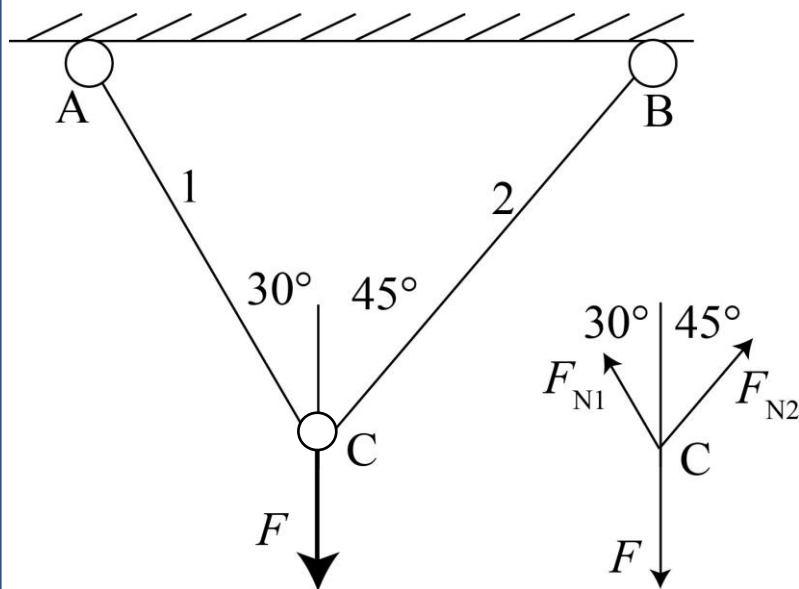
角钢号数	尺寸/mm			截面面积 /cm ²	理论重量 /(kg/m)	外表面积 /(m ² /m)
	b	d	r			
4.0	40	3	5	2.359	1.852	0.157
		4		3.086	2.422	0.157
		5		3.791	2.976	0.156
4.5	45	3	5	2.659	2.088	0.177
		4		3.486	2.736	0.177
		5		4.292	3.369	0.176
		6		5.076	3.985	0.176

3-5: 许用应力 强度条件



Beijing University of Chemical Technology

例题3.4: AB和BC的许用应力均为 $[\sigma]=115\text{MPa}$, 横截面 $A_1=200\text{mm}^2$, $A_2=150\text{mm}^2$, 求许用载荷 $[F]$ 。



1. 内力计算: **确定许用载荷**

$$\sum F_x = 0, -F_{N1} \sin 30^\circ + F_{N2} \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{N1} \cos 30^\circ + F_{N2} \cos 45^\circ - F = 0$$

$$F_{N1} = 0.732F (\text{拉}), F_{N2} = 0.518F (\text{拉})$$

2. 许用载荷:

$$\frac{F_{N1}}{A_1} \leq [\sigma] \Rightarrow F \leq 31.4\text{kN}$$

$$\frac{F_{N2}}{A_2} \leq [\sigma] \Rightarrow F \leq 33.3\text{kN}$$



$$[F] = 31.4\text{kN}$$

3-6: 拉压杆的变形 胡克定律

Beijing University of Chemical Technology



1. 轴向变形



弹性模量

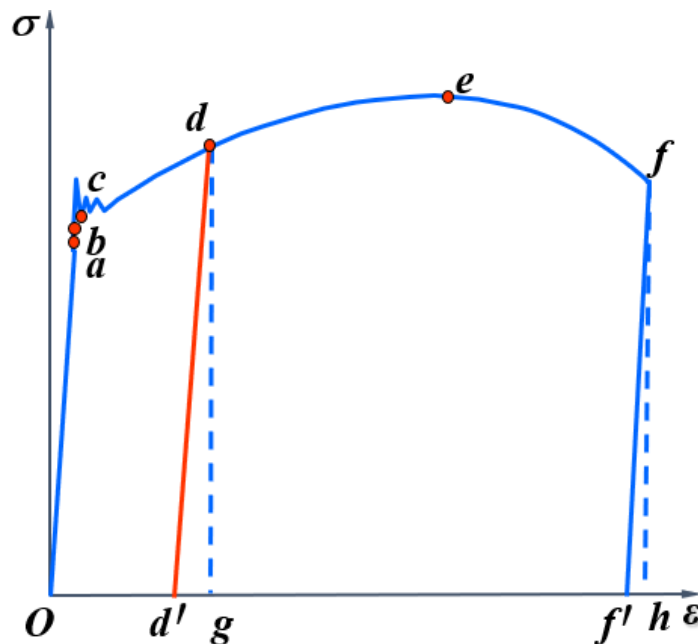
$$\sigma = E \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

$\sigma = \frac{F}{A}$
 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

抗拉刚度

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad \text{应用的前提条件}$$

- ☒ A 应力小于比例极限
- ☐ B 应力小于弹性极限
- ☐ C 应力小于屈服极限
- ☐ D 应力小于强度极限



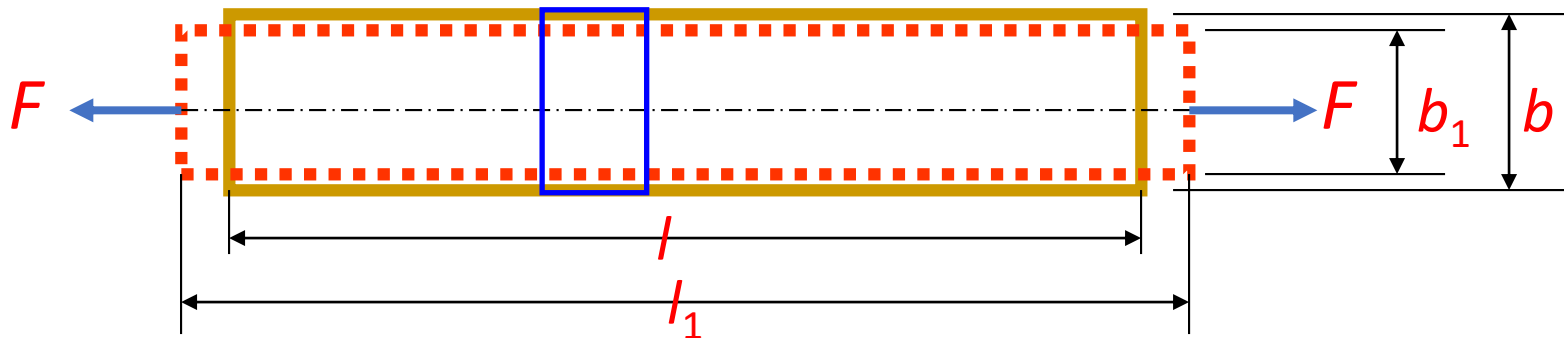
提交

3-6: 拉压杆的变形 胡克定律

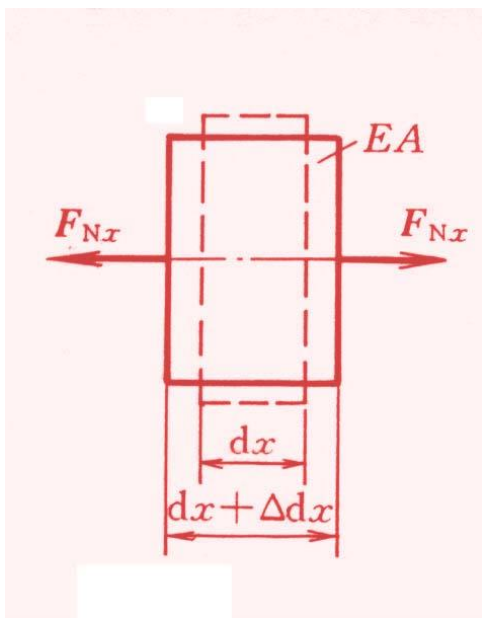
Beijing University of Chemical Technology



1. 轴向变形



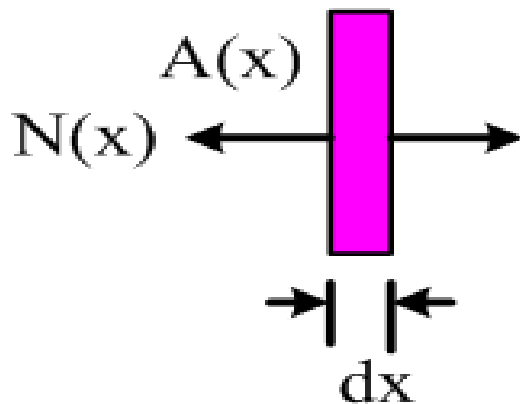
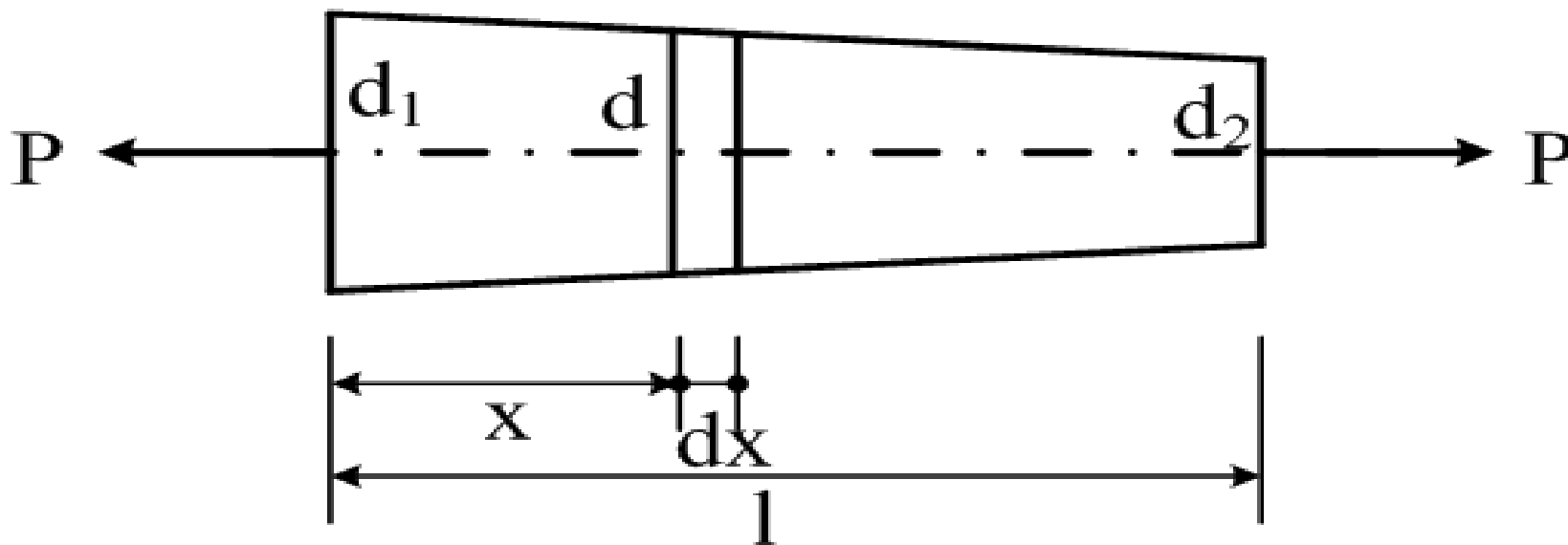
$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$



$$\Delta dx = \frac{F}{EA} dx$$

3-6: 拉压杆的变形 胡克定律

Beijing University of Chemical Technology



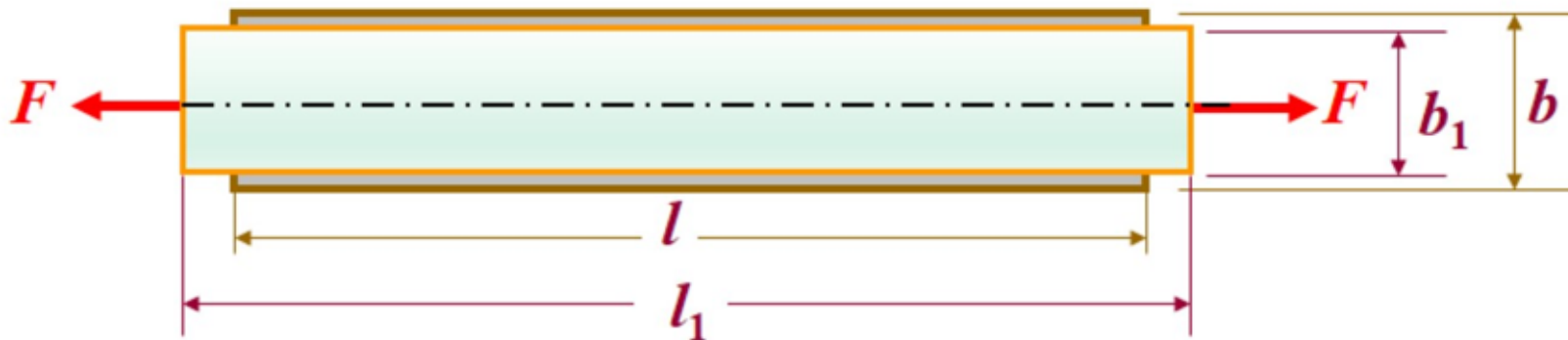
$$\Delta l = \int \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

3-6: 拉压杆的变形 胡克定律

Beijing University of Chemical Technology



2. 横向变形



1、轴向变形和轴向应变

$$\Delta l = l_1 - l \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

3、泊松比

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon$$

2、横向变形和横向应变

$$\Delta b = b_1 - b \quad \varepsilon' = \frac{b_1 - b}{b} = \frac{\Delta b}{b}$$

~~$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \geq 0$$~~

过时了!

3-6: 拉压杆的变形 胡克定律

Beijing University of Chemical Technology



3. 负泊松比材料



3-6: 拉压杆的变形 胡克定律



Beijing University of Chemical Technology

3. 负泊松比材料



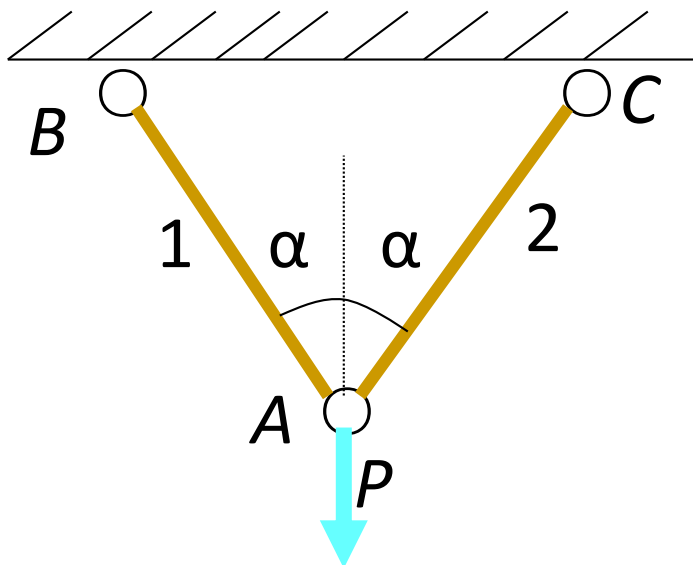
泊松比有可能小于0。

3-6: 拉压杆的变形 胡克定律



Beijing University of Chemical Technology

例题：已知：1, 2 两杆相同, EA, l, P, α 均已知,
求：A 点位移



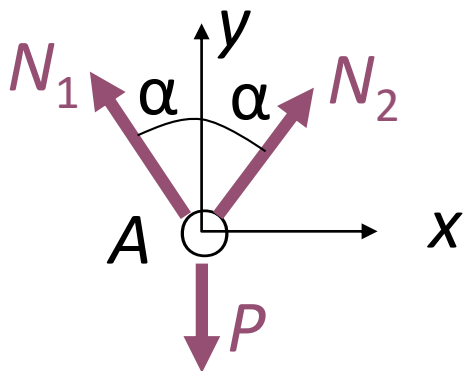
1. 内力计算：取节点A

$$\sum F_x = 0, N_1 = N_2$$

$$\sum F_y = 0, N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - P = 0$$

$$N_1 = N_2 = P / 2 \cos \alpha$$

2. 变形计算：



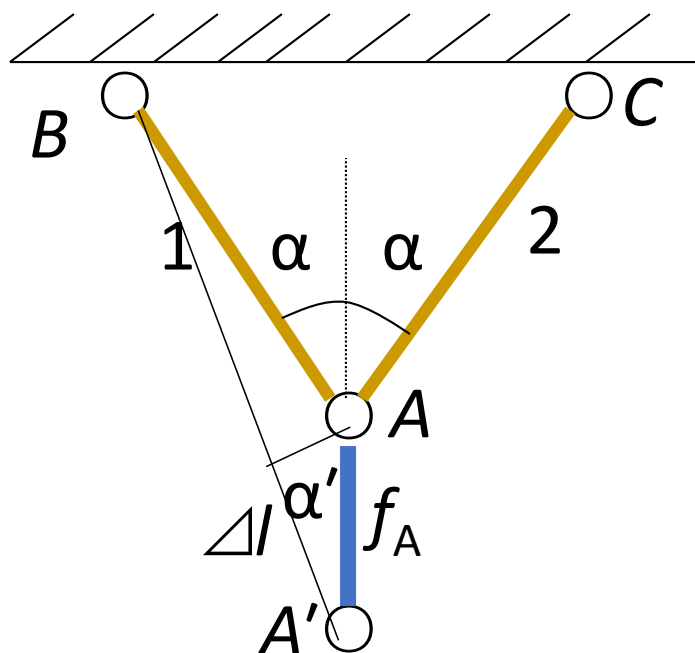
$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Pl}{2EA \cos \alpha}$$

3-6: 拉压杆的变形 胡克定律

Beijing University of Chemical Technology



例题：已知：1, 2 两杆相同, EA, l, P, α 均已知,
求：A 点位移



3. 变形计算:

$$f_A = \frac{\Delta l}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{Pl}{2EA \cos^2 \alpha}$$

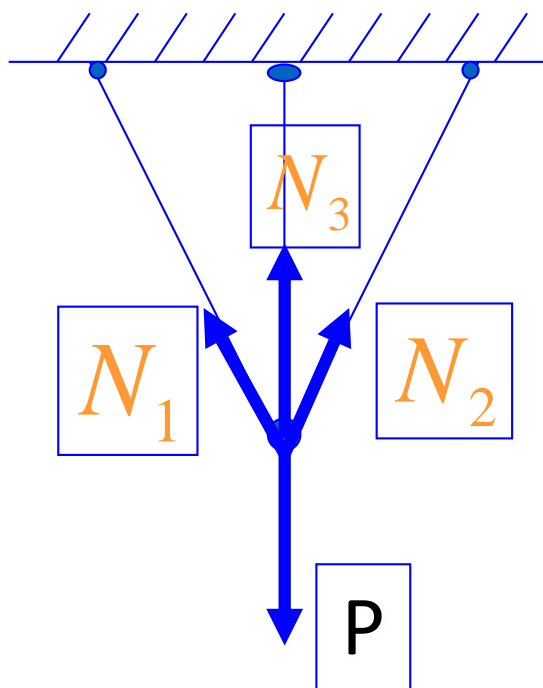
小变形假设

变形远小于尺寸,
可用变形前的尺寸
进行计算。

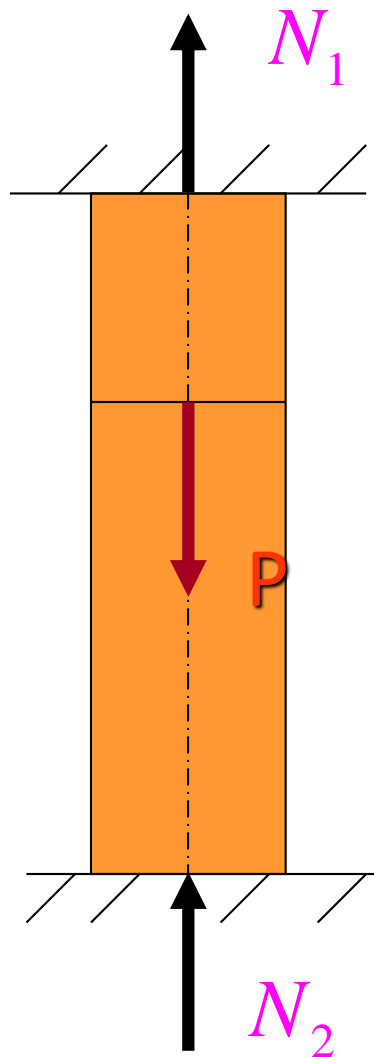
小应变情况下, $\alpha' = \alpha$; 切线可以代替弧线

3-7: 拉压静不定问题

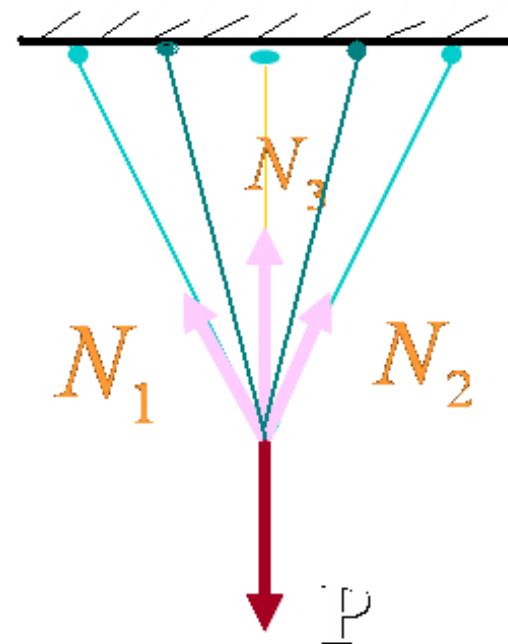
Beijing University of Chemical Technology



1次静不定



1次静不定



3次静不定

3-7: 拉压静不定问题



一. 静定静不定概念

1. **静定问题**——仅用静力平衡方程就能求出全部未知力，这类问题称为静定问题。

实质：未知力的数目等于静力平衡方程的数目。

2. **静不定问题**——仅用静力平衡方程不能求出全部未知力。又称**超静定问题**。

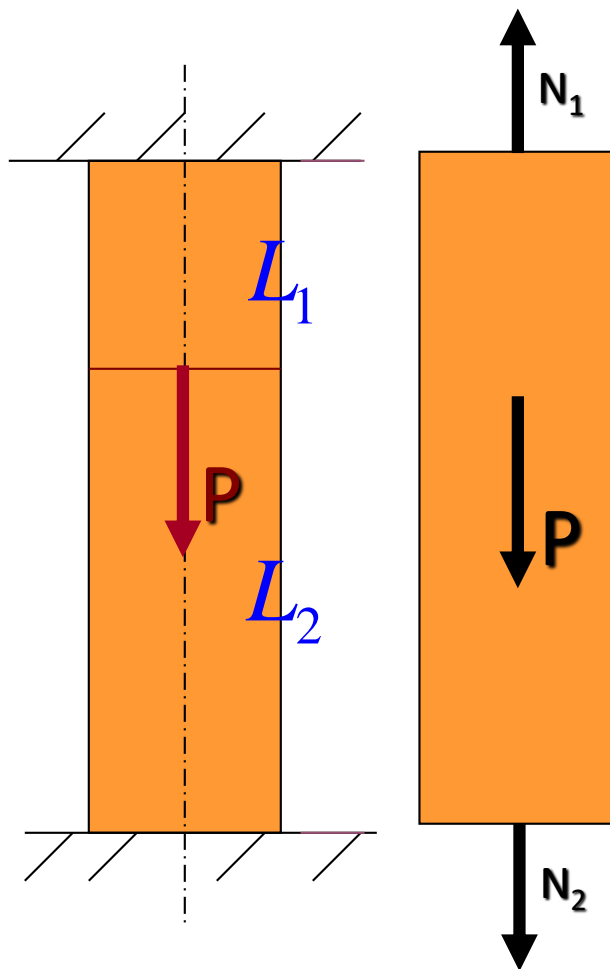
实质：未知力的数目多于静力平衡方程的数目。

3-7: 拉压静不定问题

Beijing University of Chemical Technology



例题：求支反力



1. 平衡方程：

$$\sum Y = 0, N_1 - N_2 - P = 0$$

2. 几何方程：

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

3. 物理方程：

$$\Delta L_1 = N_1 L_1 / EA$$

$$\Delta L_2 = N_2 L_2 / EA$$

4. 补充方程：

$$N_1 L_1 / EA + N_2 L_2 / EA + = 0$$

求解：

$$N_1 = PL_2 / L, N_2 = -PL_1 / L$$



静不定问题的解法:

1.判断静不定次数:

方法: 未知力数目 - 平衡方程数目

2.列平衡方程

3.列几何方程:

反映各杆变形之间的关系, 需要具体问题具体分析。

4.列物理方程: 变形与力的关系。

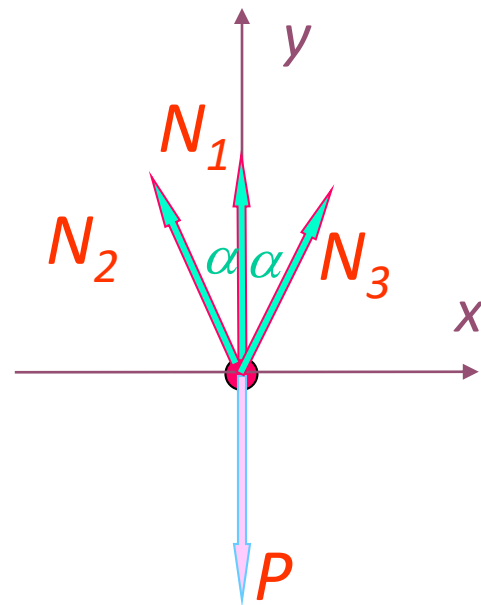
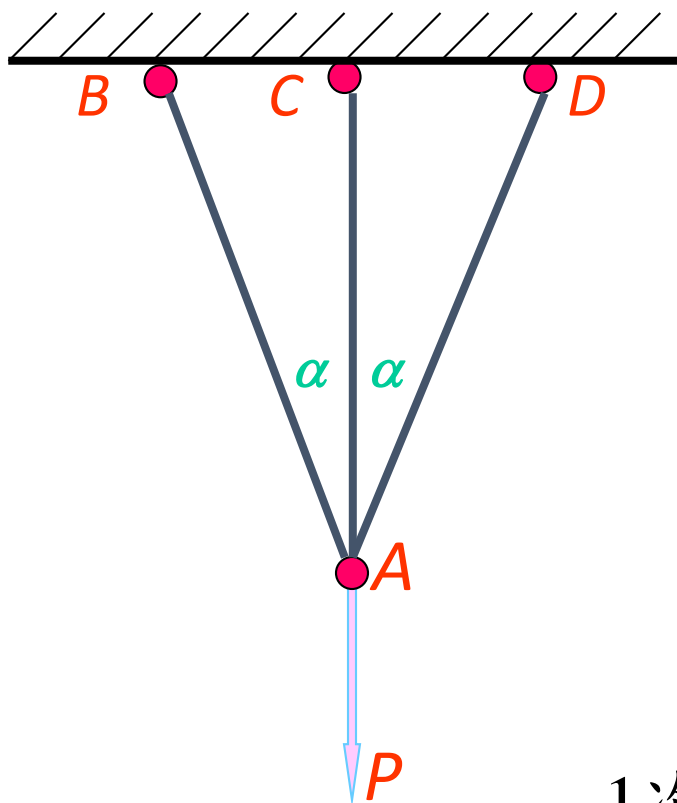
5.列补充方程: 物理方程代入几何方程即得。

3-7: 拉压静不定问题

Beijing University of Chemical Technology



例题：已知： $E_1=E_2=E_3$ ， $A_1=A_2=A_3$ ， $l_1=l_2=l_3$ ，求：
各杆轴力。



1次静不定问题

3-7: 拉压静不定问题

Beijing University of Chemical Technology



例题：已知： $E_1=E_2=E_3$ ， $A_1=A_2=A_3$ ， $l_1=l_2=l_3$ ， 求：
各杆轴力。

1. 受力分析：

$$\sum F_x = 0, -N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \sigma = 0$$

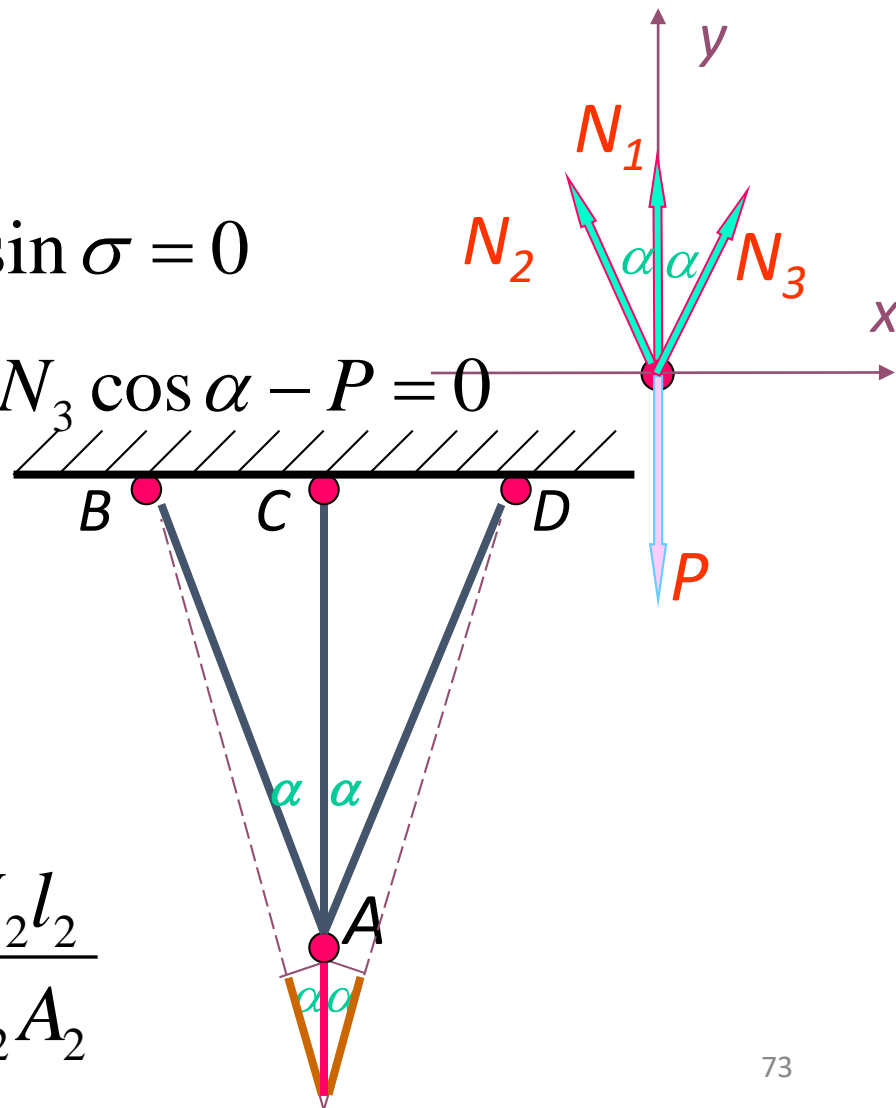
$$\sum F_y = 0, N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0$$

2. 几何方程：

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha$$

3. 物理方程：

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}, \Delta l_2 = \Delta l_3 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$



3-7: 拉压静不定问题

Beijing University of Chemical Technology



例题：已知： $E_1 A_1$, l_1 , $E_2 A_2 = E_3 A_3$, $l_2 = l_3$, 求：
各杆轴力。

1. 平衡方程：

$$\sum F_x = 0, -N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \sigma = 0$$

$$\sum F_y = 0, N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0$$

4. 补充方程： $\frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \cos \alpha$ 3个未知量
3个方程

求解：

$$N_1 = \frac{P}{1 + \frac{2E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2} \cos^2 \alpha}, N_2 = N_3 = \frac{P}{2 \cos \alpha + \frac{E_1 A_1 l_2}{E_2 A_2 l_1 \cos \alpha}}$$



必做题： 3.1b 3.11

选做题： 3.2 3.30