



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Trabajo Práctico 1

Informe y análisis de resultados.

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Integrante	LU	Correo electrónico
Benitti, Raul	592/08	raulbenitti@gmail.com
Mengarda, Lucas	787/10	l.j.mengarda@gmail.com
Scarpino, Gino	392/08	gino.scarpino@gmail.com
Vallejo, Nicolás	500/10	nico_pr08@hotmail.com

Reservado para la cátedra

Instancia	Docente	Nota
Primera entrega		
Segunda entrega		



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

## Índice

<b>1. Problema 2: Sensores defectuosos</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Desarrollo . . . . .	3
1.2.1. Correctitud . . . . .	4
1.2.2. Análisis de complejidad . . . . .	5
1.3. Resultados . . . . .	5
1.4. Conclusiones . . . . .	8
<b>2. Problema 4: Puzzle de casilleros</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Desarrollo . . . . .	9
2.2.1. Correctitud . . . . .	10
2.2.2. Análisis de complejidad . . . . .	11
2.3. Resultados . . . . .	15
2.4. Conclusiones . . . . .	16

## 1. Problema 2: Sensores defectuosos

### 1.1. Introducción

Se tiene un conjunto de sensores con sus respectivos intervalos de tiempo de medición y se conoce el número de la medición que falla. Se desea conocer el id del sensor que falló.

### 1.2. Desarrollo

Encaramos este problema rearmando la secuencia de mediciones de los sensores. Consiguiendo ésto, la solución al problema sería fijarse en esta secuencia, el id que figura en la posición de medición que falló.

Para armar la secuencia de mediciones, decidimos ir guardando para cada sensor en que instante de tiempo tendría que volver a realizar una medición. A medida que determinamos el sensor que va a medir, calculamos su siguiente tiempo de medición.

Teniendo un diccionario donde para cada sensor se puede obtener en qué momento le toca realizar una medición, se puede conocer al próximo que le toca medir, ya que es el mínimo de los tiempos.

En el momento inicial todos los sensores miden, por lo que la secuencia inicial no es vacía, sino que contiene todos los números de sensores ordenados por su id ya que desempatan por éste.

En cada paso de nuestro algoritmo, agregamos a la secuencia el siguiente sensor que midió y calculamos su próxima medición actualizando la tabla de próximas mediciones

Cuando la secuencia alcanza el tamaño igual al número de medición que falló, terminamos y el resultado es la última posición de esa secuencia.

**Aclaración:** en la implementación del diccionario se usa directamente un min-Heap. Más adelante se explica el motivo de tal decisión.

#### Pseudocódigo:

---

**Algoritmo 1.1** Entero sensorDefectuoso(Conjunto sensores, Entero medDefectuosa)

---

```
1: Diccionario diccTiempos = sensores
2: Entero medicion = | sensores |
3: for all Sensor s in sensores do
4:   agregar(mediciones,id(s))
5: end for
6: while medicion != medDefectuosa do
7:   proximo = proxSensor(diccTiempos,sensores)
8:   agregar(mediciones,proximo)
9:   medicion = medicion + 1
10: end while
```

---

**Donde**

medDefectuosa es el número de medición que falla.

diccTiempos es el diccionario que para cada sensor guarda el tiempo de su próxima medición.

sensores es el conjunto de sensores.

medicion es el número de medición parcial. Como al inicio hubo la cantidad de sensores, se inicializa con esa cantidad.

mediciones es la secuencia de mediciones con los ids de los sensores.

proxSensor es la funcion que devuelve el id del mínimo de los tiempos que están presentes en el diccionario, y además actualiza el tiempo para la próxima medición.

**1.2.1. Correctitud**

En alguna instancia del problema, si tuviéramos la siguiente tabla con los momentos  $t_i$  para la siguiente medición de cada sensor  $s_i$  con  $(1 \leq i \leq n)$  donde  $n$  es la cantidad total de sensores:

$s_1$	$s_2$	$\dots$	$s_{n-1}$	$s_n$
$t_1$	$t_2$	$\dots$	$t_{n-1}$	$t_n$

determinar el siguiente sensor que le toca realizar su medición, sería elegir el de menor  $t$ . Caso contrario, se estaría eligiendo un sensor con tiempo mayor, por lo que haría una medición anterior cuando en realidad le correspondería a un sensor con menos tiempo, generando una incongruencia en el orden de mediciones.

Por lo que alcanzaría con ver que nuestro algoritmo genera esa tabla/diccionario de forma correcta.

En el instante inicial, el diccionario contendrá los tiempos de intervalos de medición ya que todos midieron de entrada. Para el primero, elegimos el mínimo de esos tiempos. Una vez que sabemos el id, lo agregamos a la secuencia de mediciones, y redefinimos en el diccionario su tiempo de la siguiente forma:

$$t'_i = t_i + \text{intervalo}(s_1)$$

es decir, que al tiempo que ya figuraba en el diccionario, se le agrega el tiempo de intervalo para determinar el tiempo de su próxima medición. Por lo que, en cada

paso donde se elige el sensor que mide, se actualiza el diccionario. De esta forma, se mantiene la correctitud del significado del diccionario una vez elegido el próximo sensor a medir.

Se repite este proceso hasta llegar a la medición que falla inclusive, con lo que el id del sensor quedaría guardado en la secuencia de mediciones.

### 1.2.2. Análisis de complejidad

Se cargan los datos de los sensores en vectores. En uno, el tiempo de intervalo entre mediciones. En otro, una tupla que representaría la primer componente el id del sensor y la segunda componente el tiempo de próxima medición. A la vez que se cargan los datos, ya se colocan los ids por orden en el vector de mediciones ya que todos miden en el instante inicial.

La complejidad de lo anterior es  $O(n)$ , donde  $n$  es la cantidad de sensores.

En el caso que el número de medición sea menor a la cantidad de sensores, el algoritmo termina devolviendo el valor del vector de mediciones según la posición correspondiente a la medición que falla.

Caso contrario, calculamos la secuencia de mediciones. Para ello necesitamos el ya mencionado diccionario. Decidimos utilizar un min-Heap como diccionario. Esto nos permitiría obtener el mínimo valor de tiempo de próxima medición en  $O(\log n)$  siendo  $n$  la cantidad de sensores. Crear el minHeap tiene un costo de  $O(3 * n)$ .<sup>1</sup>

Una vez creado el minHeap, comenzamos un ciclo donde se busca el siguiente sensor que mide. Al ser un minHeap, tiene costo  $O(1)$  pero luego hay que actualizar el valor y el diccionario utilizando *push\_heap* y *pop\_heap*, ambas con costo  $O(\log n)$ <sup>2</sup>,<sup>3</sup>. Como ya dijimos, al usar un minHeap, éste tiene un costo de  $O(\log n)$ . Luego, se agrega el id del sensor a la secuencia de mediciones con un costo constante.

La cantidad de iteraciones del ciclo es el número de medición que falla menos la cantidad de sensores existentes. Ésto se debe a que, en el momento inicial, todos los sensores realizan una medición. Por lo que de entrada se tienen  $n$  mediciones.

Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo termina siendo:

$$\sum_{i=k}^n \log n = (k - n) * \log n \leq k * n$$

Termina siendo estrictamente menor a  $O(k * n)$  como se pedía en la consigna.

## 1.3. Resultados

Para analizar el comportamiento del nuestro algoritmo, decidimos generar tests aleatorios donde en uno se va ir variando la cantidad de sensores mientras que el

<sup>1</sup>[http://www.sgi.com/tech/stl/make\\_heap.html](http://www.sgi.com/tech/stl/make_heap.html)

<sup>2</sup>[http://www.sgi.com/tech/stl/push\\_heap.html](http://www.sgi.com/tech/stl/push_heap.html)

<sup>3</sup>[http://www.sgi.com/tech/stl/pop\\_heap.html](http://www.sgi.com/tech/stl/pop_heap.html)

número de falla va a depender de esa cantidad. En el mismo nos queda una gráfica:

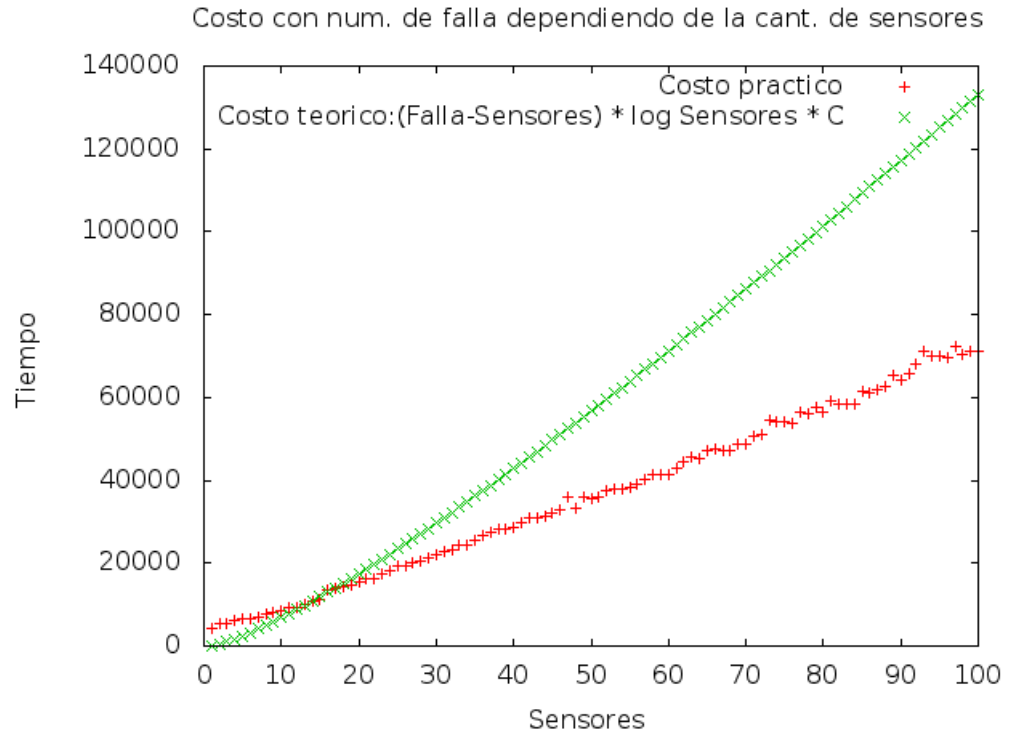


Figura 1: Se compara el tiempo que tardó en promedio en obtener un resultado contra el tiempo teórico del peor caso

Armamos el test de la siguiente manera. Vamos a hacer instancias que vayan de 1 sensores a 100 y por cada cantidad de sensores realizamos 1000 repeticiones. Decidimos que la falla se produzca en la medición:  $4 * n + r$ . Donde  $n$  es la cantidad de sensores y  $r$  un valor aleatorio entre 1 y  $n$ .

Para cada ejecución guardamos el tiempo que tardó usando la función *clock\_gettime* y luego contrastamos con la cota teórica calculada anteriormente.

Para los dos siguientes test, fijamos la cantidad de sensores. En uno poca cantidad de sensores y en otro una cantidad considerable. El número de falla lo fuimos variando desde 1 hasta  $n * 50$  donde  $n$  es la cantidad de sensores utilizados.

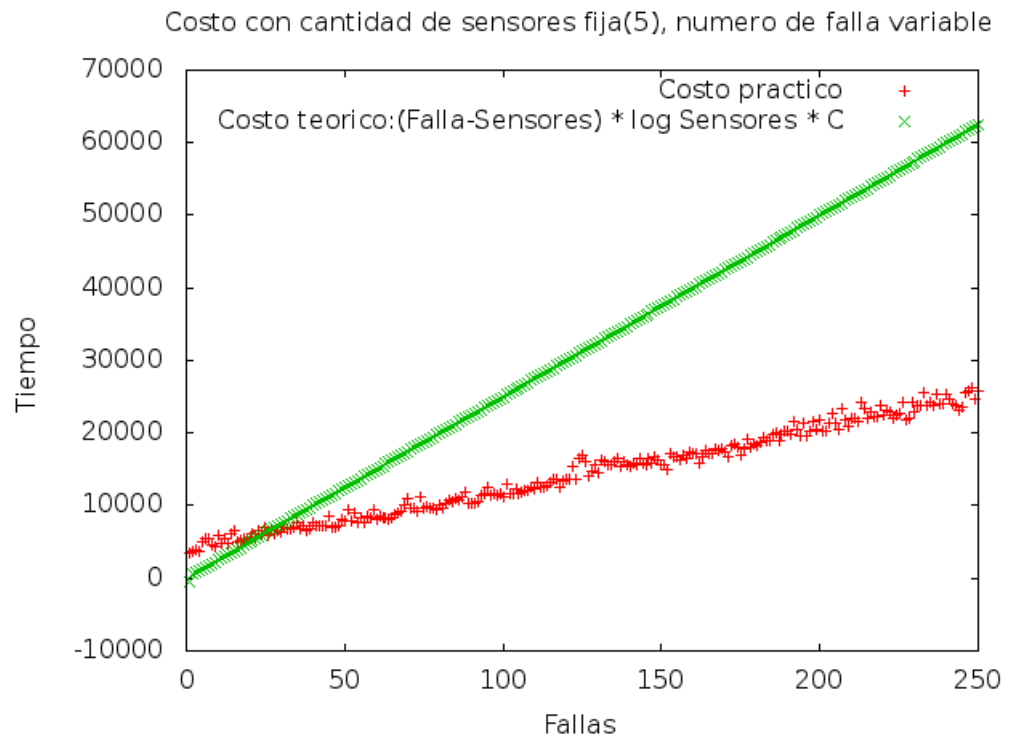


Figura 2

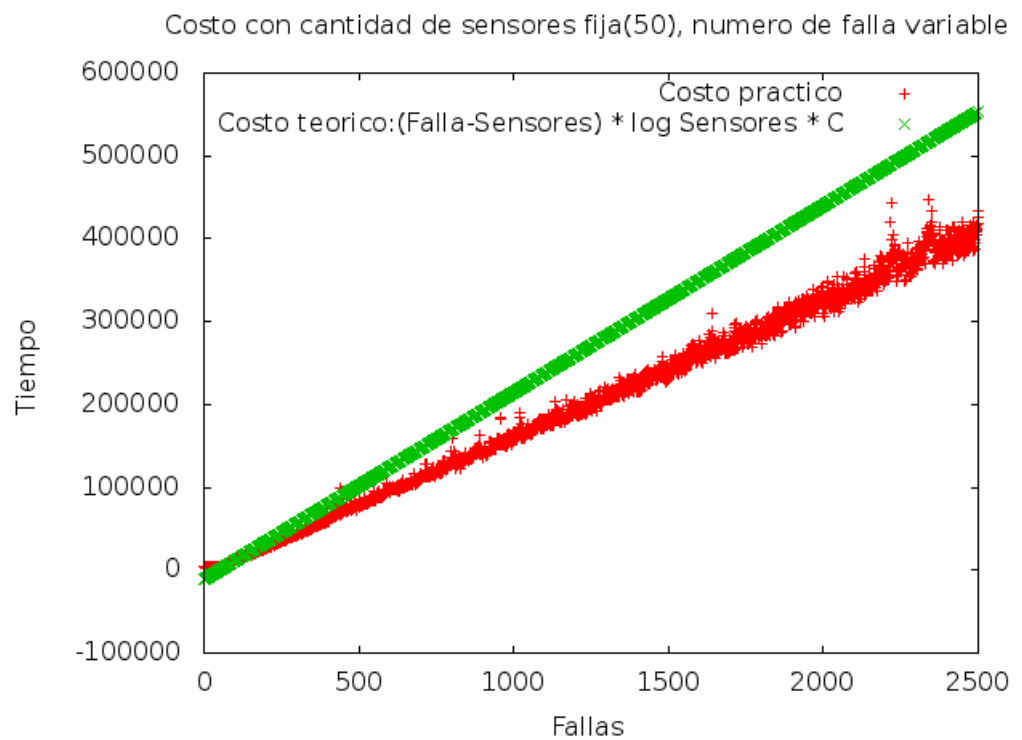


Figura 3

Se decidió arbitrariamente que los tiempos de los sensores entre 1 y 20 elegidos aleatoriamente.

#### 1.4. Conclusiones

Como era de esperar, los resultados mostraron que el tiempo de ejecución es asintóticamente menor al tiempo teórico calculado para el peor caso. Siendo ese tiempo, menor al pedido por la consigna del trabajo práctico.

Analizar bien las posibles estructuras de datos a utilizar fue fundamental para volver más eficiente el algoritmo. El problema de obtener en cada instante el mínimo de un conjunto de valores utilizando un minHeap logró bajar la complejidad lineal a logarítmica.

Luego, también era necesario considerar la parte del problema en que todos los sensores realizan una medición en el momento inicial. Lo que permite realizar  $n$  iteraciones menos de nuestro algoritmo, donde  $n$  es la cantidad de sensores.

La implementación se podría mejorar evitando construir el vector de mediciones de los sensores. Basta con llevar un contador, que con cada medición se incrementa. Determinando así el sensor que midió erróneamente cuando el contador alcance el número de medición fallida.



## 2. Problema 4: Puzzle de casilleros

### 2.1. Introducción

Para este tipo de problemas, se suele usar la técnica de *backtracking*. No se conocen algoritmos polinomiales para resolver el problema. También se podría resolver con fuerza bruta pero la ventaja de esta técnica es que se busca armar e ir probando posibles soluciones. A medida de que se van construyendo, se puede determinar ciertos casos que no son posible solución, por lo que no se intentaría resolver el problema en esos casos evitando ejecuciones innecesarias. En el peor caso, *backtracking* es igual a intentar resolverlo por fuerza bruta. Se nos pide encontrar, si existe, alguno de los menores subconjuntos de piezas de tal forma que cubran todo el tablero. Donde cada casillero del tablero es de color negro o blanco, y cada pieza de forma rectangular, posee casilleros de los mismos colores. La pieza para poder ubicarse en cierta posición del tablero tiene que coincidir exactamente en el tablero y se la puede rotar.

### 2.2. Desarrollo

Este ejercicio contiene varios problemas. Para empezar, nos encontramos con el requerimiento de dado un conjunto armar todos los subconjuntos posibles. Se conoce como *power set*. La complejidad de este problema es exponencial, no se conocen algoritmos polinomiales hasta el momento.

La primera implementación del problema de power set consistía en usar una máscara de bits para determinar si un elemento estaba presente o no en un conjunto. Se recorrían los números desde el 1 hasta  $2^{|piezas|}$  formando así todas las posibles combinaciones de subconjuntos. Era simple pero tenía el problema de que podía producir overflow en arquitecturas donde  $|piezas|$  sea mayor a la cantidad máxima de bits para algún registro que sea utilizado como contador del procesador. Ej: con 40 piezas y un procesador de 32 bits.

Por lo tanto, decidimos implementar este problema mediante la recursión. La función recursiva sería:

$$P(\emptyset) = \{\{\}\}$$

$$P(S) = P(T) \cup f(e, P(T))$$

siendo  $e$  un elemento de  $S$  y  $T = S \setminus \{e\}$

donde  $f(e, T) = \{X \cup \{e\} \mid X \in T\}$

En nuestra implementación el caso base lo único que hace es crear un vector de vectores con dos vectores vacíos. En los pasos recursivos, se obtiene el elemento  $e$ , se duplica el vector de vectores, y a la primera mitad se agrega  $e$ . Duplicar el vector

haría la unión y agregar el elemento  $e$  a la primera mitad sería la función  $f$ .

Implementando estas funciones pudimos generar todas las posibles combinaciones de subconjuntos de piezas.

Lo primero que hace el algoritmo antes de comenzar a probar con ubicaciones es realizar una poda. Esta primera poda que se realiza es para descartar piezas que no podrían ubicarse en ninguna parte del tablero. Por ejemplo, en un caso extremo, si el tablero es completamente negro, una pieza con alguna parte blanca no puede ubicarse y por lo tanto no podría pertenecer jamás a la solución. Esta primera poda es clave, porque ya desde el principio nos evitamos analizar ramas que no son solución del problema.

Una vez eliminadas estas piezas, se prosigue buscando todos los subconjuntos del conjunto de piezas, es decir se calcula el conjunto de partes (o powerset) del conjunto de piezas. De esta manera obtenemos todas las combinaciones posibles de las piezas que no fueron descartadas hasta el momento. A continuación, ordenamos el conjunto de partes, poniendo en primer lugar a los subconjuntos de menor cantidad de elementos.

Luego, se iterará sobre la cantidad de subconjuntos, y apenas se encuentre una solución se dejará de ciclar y se la devolverá. Como el conjunto está ordenado, se garantiza de esta manera que se encontró la solución con la menor cantidad de piezas, que es la que queríamos devolver (esto es porque todos los conjuntos que se evaluaron antes no solucionaron el problema).

Para determinar si cierto subconjunto de piezas es solución, determinamos una nueva poda. Esta consiste en que, al buscar una solución óptima, el subconjunto de piezas debe de cubrir exactamente el tablero. Si la superficie de las piezas del subconjunto es menor al del tablero, entonces no puede ser solución porque no cubriría el tablero. En cambio, si es mayor, podría ser solución, pero si lo era, no era óptima porque sobraba alguna pieza.

Luego implementamos una función recursiva en la cual para cada pieza se busca sus posibles posiciones en el tablero. Para cada posición, se crea una instancia del tablero en la cual se ubica dicha pieza. Luego se llama recursivamente a la función con ese tablero y sin esa pieza.

El caso base de la función es cuando no quedan más piezas por ubicar. Entonces se chequea si el tablero está completamente cubierto, en caso afirmativo, se encontró una solución al problema.

La función tiene en cuenta las rotaciones de las piezas. Por lo que si no se encontrón solución, se rota la pieza. Si es idéntica a la original, se poda esa rama. Caso contrario, se busca todas las posibles posiciones para esa pieza rotada, y se repite lo anterior.

Una vez que se encuentra solución, si existe, se devuelve el vector con la información de las piezas colocadas en el tablero. Éste vector, lo maneja la clase *Tablero* que hicimos, al cual agrega una pieza cada vez que es posible ubicarla en el tablero.

En todo momento del desarrollo tuvimos que tener en cuenta generar todas las podas posibles para evitar ejecuciones innecesarias debido al tipo de problema.

Creamos las clases *Tablero* y *Pieza* para que cada se encargue de las funciones

que les competen propiamente a dicha abstracción.

En la clase *Tablero*, podemos crear un tablero con el tamaño deseado, obtener las posibles posiciones de una pieza, si encaja la pieza en cierta posición, si está completo o no. Si cierto conjunto de piezas puede llegar a cubrir todo el tablero, obtener las piezas ubicadas, etc.

En la clase *Pieza*, podemos crear una pieza de cierto tamaño, rotarla, etc.

Utilizamos top-down y clases porque nos pareció la mejor forma de organizar el programa para resolver el ejercicio. Haciendo más prolijo el código y *tirar* los problemas del tablero se encarga su clase y el de la pieza el de ella misma.

### 2.2.1. Correctitud

Recorremos todas las posibles combinaciones de las fichas. Luego para cada subconjunto nos fijamos si es solución. En caso de existir solución, es esperable que esta supere todas las podas que hemos determinado. Es decir que el tamaño de la suma de las piezas del subconjunto coincide con el tablero y que cada pieza del subconjunto puede ubicarse en el tablero, que en el fondo son propiedades necesarias pero no suficientes que debe cumplir una solución. Es decir que no estamos podando piezas que podrían pertenecer al conjunto solución. Esta es la ventaja del backtracking, que se podría caracterizar como fuerza bruta un poco más inteligente, al ahorrarse operaciones que no tiene sentido realizar. Teniendo en cuenta que a lo mejor se nos escapó agregar alguna otra poda, lo que queremos remarcar es que estamos recorriendo subconjuntos que pueden o no ser solución y que recortamos ramas con potencial para serlo. De esta manera, aunque se pudiesen agregar podas, se estarían analizando todas las potenciales soluciones.

Como además recorremos los subconjuntos de menor a mayor cantidad de elementos y dado que el algoritmo deja de iterar en los subconjuntos una vez que halle una solución, se está garantizando que la solución devuelta (en caso de existir) es una solución óptima en el sentido de que se completa el tablero con la menor cantidad de piezas posibles, que es lo que efectivamente se debe devolver.

### 2.2.2. Análisis de complejidad

Las funciones que utilizamos del tablero son:

- **getColor:** dada una posición del tablero, devuelve el color, negro o blanco. Tiene un costo  $O(1)$  debido a que solo tiene que devolver un valor accediendo a una posición de una matriz.
- **posiblesPosiciones:** recorre todo el tablero, fijándose en cada posición, si es posible ubicar la pieza ahí. Para esto llama a la función encaja. Guarda en un vector resultado las posiciones posibles de ubicar la pieza. La complejidad termina siendo la cantidad de posiciones del tablero (filas por columnas) iteraciones de la función encaja:  $O(\text{filas} * \text{columnas} * \text{filasPieza} * \text{columnasPieza})$

- **encaja:** dada una pieza y una posición, devuelve verdadero si es posible ubicar esa pieza en la posición pasada por parámetro. Para esto, recorre toda la superficie de la pieza, por lo que cuesta  $O(\text{filasPieza} * \text{columnasPieza})$
- **ocupado:** dada una posición, devuelve si ya está ocupada por una pieza o no. Se tiene que acceder a una matriz, por lo que cuesta  $O(1)$ .
- **completo:** determina si el tablero está totalmente cubierto por piezas. Para ello, tiene que recorrer todas las posiciones y llamar a la función ocupado. Tiene coste  $O(\text{filas} * \text{columnas})$
- **ubicarFicha:** dada una pieza y una posición modifica la instancia de tablero, seteando las posiciones correspondientes para considerarlas ocupadas. Además, guarda en un vector el id de la pieza, el grado de rotación de la misma, y la posición del extremo superior izquierdo. Tiene un costo  $O(\text{filasPieza} * \text{columnasPieza})$
- **obtenerPiezas:** la clase tablero guarda un vector con las piezas ubicadas en el mismo. Esta función devuelve una copia de ese vector. Tiene costo  $O(n)$  donde  $n$  es la cantidad de piezas.
- **cubreTodo:** es una función para podar casos no posibles de ser solución como se explicó anteriormente. Calcula la superficie del tablero. Recorre todas las piezas, restando a la superficie del tablero la superficie de la pieza. Para cubrirlo exactamente tiene que quedar en 0. Caso contrario, se poda. Tiene un costo de  $O(n)$  donde  $n$  es la cantidad de piezas.

Vistas estas consideraciones, analicemos la complejidad de *resolverJuego*. Lo haremos en función de la cantidad de piezas.

Primero hagamos una aclaración: si bien es cierto que muchas de las funciones que usa este métodos basan su complejidad en el tamaño de la pieza que está probando en ese momento, hemos decidido acotar la cantidad de filas de una pieza por la cantidad de filas del tablero y lo mismo para la cantidad de columnas. Esto es porque al momento de ejecutar *resolverJuego* es esperable que todas las piezas que se analizan tienen dimensiones menores o iguales a las del tablero. Por lo tanto, la cota de complejidad que mostraremos en esta sección es quizá burda.

Para esta análisis definiremos  $k$  como las dimensiones del tablero. Es decir que  $k$  es la cantidad de filas del tablero por la cantidad de columnas del tablero.

Además, definiremos  $n$  como la cantidad de piezas.

Como se puede observar, *resolverJuego* es una función recursiva en la cantidad de piezas. En el caso en que la cantidad de piezas sea nula, lo único que se chequea es si el tablero está completo en tiempo  $O(k)$ . Si, en cambio, quedan piezas por analizar, el algoritmo chequea si se puede agregar al tablero alguna de las rotaciones de la pieza y luego se llama recursivamente a la función pero sin esa pieza. En el peor caso, lo que puede ocurrir es que se tenga que chequear las cuatro rotaciones de la

pieza.

Además de llamarse recursivamente el algoritmo realiza algunas operaciones. Por cada rotaciones, se fija las posibles posiciones con un costo de  $O(k * filasPieza * columnasPieza)$ . Hemos dicho que vamos a acotar las filas y las columnas de la piezas por las del tablero. Luego, supongamos que buscar las posibles posiciones cuesta  $O(k^2)$ .

Copiar la pieza que vamos a analizar cuesta  $O(filasPiezas * columnasPieza)$  y lo mismo para calcular cada rotación. Con la cota que dijimos antes cada una de estas operaciones cuesta  $O(k)$ . Notemos que en el peor caso para cada pieza habría que chequear las cuatro rotaciones.

En el peor caso, las posibles posiciones de la pieza son todas las del tablero, es decir  $k$ . Se va a iterar en la cantidad de posibles posiciones. El costo de lo que está adentro del ciclo es  $O(k + T(n-1))$ , siendo  $T(n-1)$  el costo de la siguiente llamada recursiva a la función.

Es decir que el costo de una llamada a la función con cantidad de piezas no nulas es de  $4 * [k + k^2 + k * (k + T(n-1))]$ , o lo que es lo mismo:  
 $4 * [k + k^2 + k^2 + k * T(n-1)]$

Pasando en limpio de manera más formal:

$$T(0) = k$$

$$T(n) = 4 * [k + k^2 + k^2 + k * T(n-1)]$$

Veamos más detenidamente  $T(n)$ :

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n) = 4 * [k + k^2 + k^2 + k * T(n-1)] = 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4 * k * T(n-1) = \\ &= 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4 * k * [4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4 * k * T(n-2)] = \\ &= 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4^2 * k^2 + 4^2 * k^3 + 4^2 * k^3 + 4^2 * k^2 * T(n-2) = \\ &= 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4^2 * k^2 + 4^2 * k^3 + 4^2 * k^3 + 4^2 * k^2 * [4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4 * k * T(n-3)] = \\ &= 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4^2 * k^2 + 4^2 * k^3 + 4^2 * k^3 + 4^3 * k^3 + 4^3 * k^4 + 4^3 * k^4 + 4^3 * k^3 * T(n-3) = \\ &= \dots = \\ &= (4 * k)^n * T(0) + \sum_{i=1}^n (4 * k)^i + 2 * (4^i * k^{i+1}) = \\ &= (4 * k)^n * k + \sum_{i=1}^n (4 * k)^i + 2 * (4^i * k^{i+1}) \end{aligned}$$

Es decir que :

$$T(0) = k$$

$$T(n) = 4^n * k^{n+1} + \sum_{i=1}^n (4 * k)^i + 2 * (4^i * k^{i+1})$$

Conjeturamos que esto cuesta  $O(4^n * k^{n+1})$ . Veámoslo por inducción:

Queremos ver que existe un  $d$  real positivo y  $n_0$  natural positivo tales que para todo  $n \geq n_0$  vale que  $T(n) \leq d * 4^n * k^{n+1}$ .

Caso base:  $n=1$

$$T(1) = 4 * k^2 + 4 * k + 2 * 4 * k^2 \leq 4 * k^2 + 4 * k^2 + 2 * 4 * k^2 \leq 4 * (4 * k^2)$$

Es decir que para  $n = 1$  considerando un  $d \geq 4$  alcanza.

Paso inductivo: Supongo que  $T(n-1) \leq d * 4^{n-1} * k^n$ . Quiero ver que esto implica que  $T(n) \leq d * 4^n * k^{n+1}$

$$\begin{aligned} T(n) &= 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4 * k * T(n-1) \leq 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4 * k * 4^{n-1} * k^n \leq \\ &\leq 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4 * k * 4^{n-1} * k^n \leq 4 * k + 4 * k^2 + 4 * k^2 + 4^n * k^{n+1} \leq \\ &\leq 4^n * k^{n+1} + 4^n * kn + 1 + 4^n * k^{n+1} + 4^n * k^{n+1} \leq 4 * 4^n * k^{n+1} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos ver.

Luego, *resolverJuego* cuesta  $O(4^n * k^{n+1})$ .

Veamos ahora la complejidad de *buscarSol*.

Esta función lo que hace es llamar a *descartarPiezas*, que se encarga de eliminar del vector de piezas a aquellas que no podrían entrar en el tablero porque no coinciden con ningún área de este. Esta función se vale de la función de Tablero *cabe* que chequea si una pieza en particular entra en el tablero y que tiene una complejidad de  $O(k * \text{filasPiezas} * \text{columnasPieza})$ . Acotándolo como mencionamos anteriormente nos queda  $O(k^2)$ .

Luego, *descartarPiezas* cuesta  $O(n * k^2 + n^2)$ .

Además, se genera el power set del vector luego de descartar las piezas. En el peor caso, no se descartó ninguna pieza. Entonces generar el conjunto de partes tiene un costo de  $O(n * 2^n)$ .

Ordenar este subconjunto tiene un costo de  $O(n * 2^n)$ , que se obtiene de la cota  $O(2^n * \log(2^n))$  que cuesta ordenar un vector de  $2^n$  elementos (que es la cantidad de elementos que tiene el conjunto de partes o power set).

Luego, *buscarSol* itera en la cantidad de elementos del conjunto de partes. En el peor caso dijimos que son  $2^n$  subconjuntos. Por cada iteración se llama a *esSolucion* que chequea si las piezas cubren todo el tablero con un costo de  $O(n)$ . Si lo hacen se llama a *resolverJuego*.

Es decir que *esSolucion* tiene una complejidad de  $O(n + 4^n * k^{n+1})$ , que es  $O(4^n * k^{n+1})$  puesto que  $k$  es entero positivo.

Luego la complejidad total de *buscarSolucion*, que es la función que resuelve el problema es  $O(n * k^2 + n^2 + n * 2^n + 2^n * 4^n * k^{n+1})$ . O lo que es lo mismo:

$$O( \max[ (n * k^2 + n^2) , (n * 2^n) , (2^n * 4^n * k^{n+1}) ] ).$$

donde  $k$  es  $\text{filasTablero} * \text{columnasTablero}$  y  $n$  es la cantidad de piezas.

### 2.3. Resultados

Decidimos hacer casos de test donde se varíe el tamaño del tablero y la cantidad de piezas quede fija, y otros casos de test donde las longitudes del tablero no varíe y la cantidad de piezas sí. Este último, dado la complejidad del problema, no se pudo hacer con cantidades grandes de piezas.

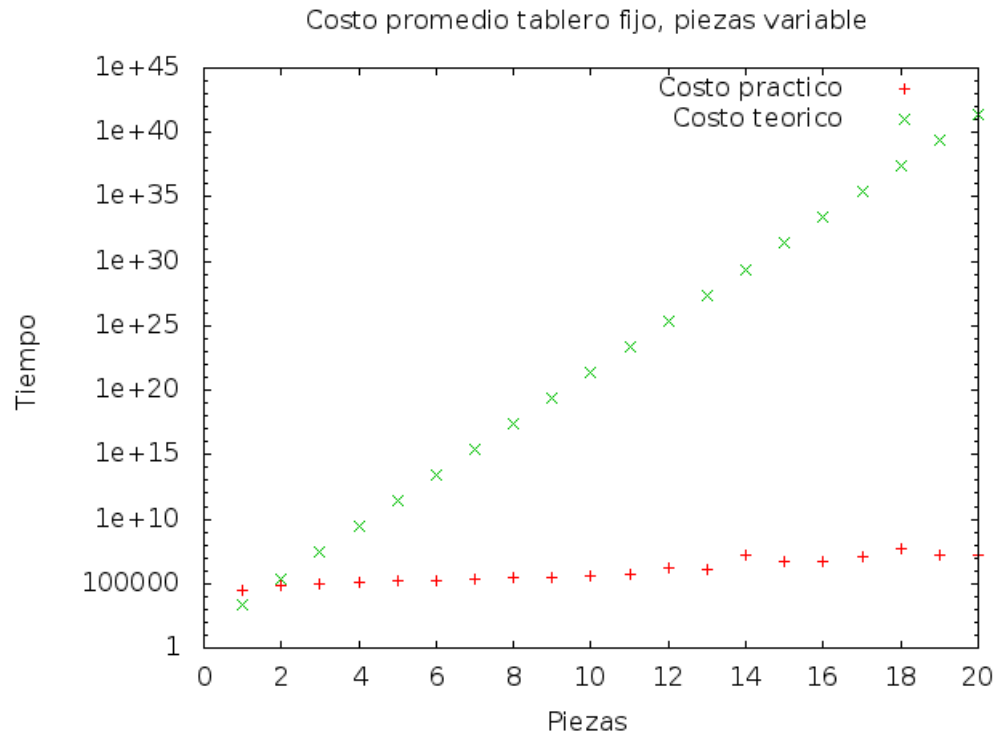


Figura 4: En escala logarítmica

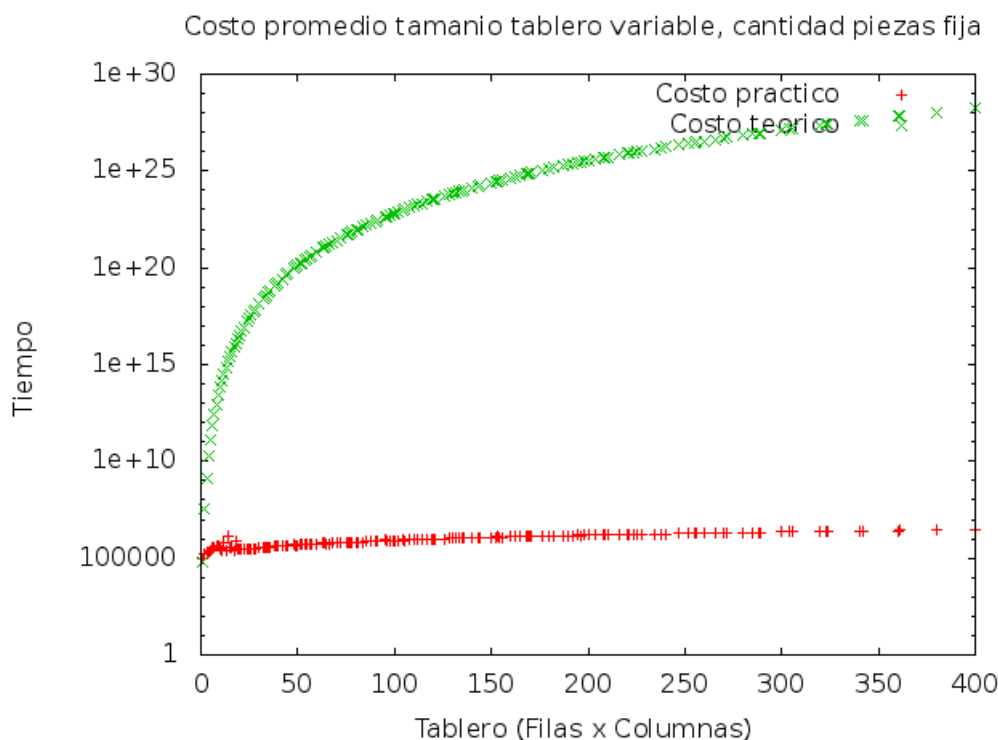


Figura 5: En escala logarítmica

Como se puede observar, los puntos tienen una tendencia lineal y creciente de ambos sets de datos. Al estar en escala logarítmica esto significa que crecen muy rápido, corroborando la complejidad teórica calculada anteriormente.

## 2.4. Conclusiones

Considerando posibles mejoras sería que en vez de buscar *linealmente* cual es la menor cantidad de piezas necesarias, se podría utilizar una búsqueda binaria. Con *linealmente* nos referimos en el sentido de que probamos con una pieza, luego dos, y así sucesivamente hasta probar con todas las piezas. En cambio, con búsqueda lineal, se prueba con la mitad de piezas, si es solución, entonces existe una solución menor o igual a esa. Por lo que se busca una nueva solución entre la 1era mitad en cantidad de piezas. Sino, entonces era necesario más piezas y se busca en la 2da mitad en cantidad de piezas.

Hay que tener en cuenta que al ser un problema que no se resuelve polinomialmente, intentar resolver con un valor grande en cantidad de piezas puede demorar demasiado en comparación si se hubiese hecho búsqueda lineal. Si se pudiera hacer un estudio sobre las piezas y el tablero y se conociera una estadística sobre la entrada del problema, se podría determinar casos donde conviene utilizar uno u otro.

Con este problema, pudimos notar la importancia de determinar buenas podas o puntos de corte para tratar de realizar un backtracking eficiente. De esta forma, se puede llegar a resolver problemas difíciles muchísimo más eficiente que si se hubiese realizado fuerza bruta.