Temas Tratados en el Trabajo Práctico 5

- Comportamiento y operaciones bajo incertidumbre.
- Teorema de Bayes.
- Representación de la información incierta en Redes Bayesianas.
- Inferencia por enumeración.
- Redes de Markov y matrices de transición.
- Tiempo esperado y probabilidad de absorción.

Ejercicios Teóricos

1. ¿Cuáles son los tres axiomas de Kolmogorov?

Los axiomas de Kolmogorov son los siguientes:

1. $0 <= P(a) <= 1$
2. $P(cierto) = 1 P(falso) = 0$
3. $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$

1. Una fábrica de clavos dispone de 2 máquinas que elaboran el 30% y 70% de los clavos que producen respectivamente. El porcentaje de clavos defectuosos de cada máquina es del 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona al azar un clavo de la producción y este fue defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina?

$P(A) = 0,3$

$P(B) = 0,3$

$P(D|A) = 0,02$

$P(D|B) = 0,03$

Por Teorema de Bayes:

$P(A|D) = P(D|A) \cdot \frac{P(A)}{P(D)}$

$P(B|D) = P(D|B) \cdot \frac{P(B)}{P(D)}$

Primero calculamos $P(D)$:

$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) = 0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,7 = 0,027$

Así:

$P(A|D) = 0,02 \cdot \frac{0,3}{0,027} = 0,2222 \rightarrow 22,22\%$

$P(B|D) = 0,03 \cdot \frac{0,7}{0,027} = 0,7777 \rightarrow 77,77\%$

Entonces:

- La probabilidad de que el clavo defectuoso venga de la máquina A es 22,22%.
- La probabilidad de que el clavo defectuoso venga de la máquina B es 77,77%.

1. La probabilidad de que un motor que sale de una fábrica con una *avería eléctrica* es de 10^{-3}, y la probabilidad de que salga con una *avería mecánica* es de 10^{-5}. Si existe un tipo de avería no se producen averías del otro tipo.

   Si el motor presenta *temperatura elevada* se enciende un *piloto luminoso* el 95% de las veces, cuando la *temperatura es reducida* el *piloto luminoso* se enciende el 99% de las veces, y a veces cuando la *temperatura se encuentra en un rango normal* el *piloto luminoso* se enciende erróneamente en un caso por millón.

   Cuando *no hay averías*, la *temperatura se eleva* en el 17% de los casos y es *reducida* el 5% de las veces. Si hay una *avería eléctrica*, la *temperatura se eleva* en el 90% de los casos y es *reducida* en el 1% de los casos. Finalmente cuando la *avería es mecánica*, la *temperatura está elevada* el 10% de los casos y *reducida* el 40% de las veces.

   Construya una Red Bayesiana y utilice inferencia por enumeración para calcular:

   ```
    3.1 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si se
   enciende el piloto.

    3.2 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si se
   enciende el piloto y la temperatura es elevada.
   ```

   Variables (nodos):

- Avería: tipo de avería (ninguna, eléctrica, mecánica)

- Temperatura: alta, normal, reducida

- Piloto: encendido, apagado

Probabilidades conocidas

A) Probabilidades de Avería (prior)

Como las averías son mutuamente excluyentes:

- P(Avería = eléctrica) = 10^{-3}

- P(Avería = mecánica) = 10^{-5}

- P(Avería = ninguna) = 1 - 10^{-3} - 10^{-5} ≈ 0.998989

B) Probabilidades de Temperatura según tipo de avería

Avería	Alta	Normal	Reducida
Ninguna	0.17	1 - 0.17 - 0.05 = 0.78	0.05
Eléctrica	0.90	0.09	0.01
Mecánica	0.10	0.50	0.40

C) Probabilidades del piloto según temperatura

Temperatura	P(Piloto = encendido)
Alta	0.95
Normal	0.000001
Reducida	0.99

Estructura de la red
Avería → Temperatura → Piloto

3.1 ¿P(Avería = mecánica | Piloto = encendido)?

$$P(\text{mecánica} \mid \text{piloto encendido}) = \frac{P(\text{piloto encendido} \wedge \text{mecánica})}{P(\text{piloto encendido})}$$

Para calcular **numerador** sumamos sobre los 3 valores de temperatura: P(mecánica) × [P(temp | mecánica) × P(piloto = encendido | temp)]

- Alta: 0.10 × 0.95 = 0.095
- Normal: 0.50 × 0.000001 = 0.0000005
- Reducida: 0.40 × 0.99 = 0.396

Total = 0.095 + 0.0000005 + 0.396 = **0.4910005**

P(piloto encendido ∧ mecánica) = 0.00001 × 0.4910005 = **4.91 × 10^{-6}**

Para calcular el **denominador** hacemos lo mismo para las 3 causas posibles:

Ninguna:

- Alta: 0.17 × 0.95 = 0.1615
- Normal: 0.78 × 0.000001 = 0.00000078
- Reducida: 0.05 × 0.99 = 0.0495

Total = 0.21100078 × P(ninguna) ≈ 0.998989 × 0.21100078 ≈ 0.210787

Eléctrica:

- Alta: 0.90 × 0.95 = 0.855
- Normal: 0.09 × 0.000001 = 0.00000009
- Reducida: 0.01 × 0.99 = 0.0099 Total ≈ 0.86490009 × P(eléctrica) = 0.001 × 0.86490009 = 0.000865

Mecánica: ya calculada = 4.91×10^{-6}

Finalmente

$$P(\text{mecánica} \mid \text{piloto encendido}) = \frac{4.91 \times 10^{-6}}{0.211657} \approx 2.32 \times 10^{-5}$$

3.2 ¿Cuál es la probabilidad de que el motor tenga avería mecánica dado que el piloto está encendido y la temperatura es elevada?

Utilizamos una versión directa de la regla de Bayes:

$$P(\text{mecánica} \mid \text{temperatura alta, piloto encendido}) = \frac{P(\text{temperatura alta, piloto encendido}}{P(\text{temperatura alta, pilot}}$$

Comenzamos calculando el numerador:

$$P(\text{piloto encendido} \wedge \text{temperatura alta} \wedge \text{mecánica}) = P(\text{mecánica}) \cdot P(\text{temperatura alta} \mid$$

- P(mecánica) = 0.00001
- P(temp = alta | mecánica) = 0.10
- P(piloto = encendido | temp = alta) = 0.95

Numerador = 0.00001 × 0.10 × 0.95 = 9.5×10^{-7}

Ahora calculamos el denominador

$$P(E_1, E_2) = \sum_h P(h) \cdot P(\text{temperatura alta} \mid h) \cdot P(\text{piloto encendido} \mid \text{temperatura alta})$$

Avería = ninguna

- P(none) = 0.998989
- P(temp alta | none) = 0.17
- P(piloto encendido | alta) = 0.95

0.998989 × 0.17 × 0.95 = 0.1613

Avería = eléctrica

- P(eléctrica) = 0.001
- P(temp alta | eléctrica) = 0.90
- P(piloto encendido | alta) = 0.95

0.001 × 0.90 × 0.95 = 0.000855

Avería = mecánica → 9.5 × 10−7

Denominador final = 0.1613 + 0.000855 + 9.5 × 10−7 = **0.162155**

Finalmente

$$P(\text{mecánica} \mid \text{piloto encendido} \wedge \text{temperatura alta}) = \frac{9.5 \times 10^{-7}}{0.162155} \approx 5.86 \times 10^{-6}$$

1. Cada día se procesa un producto en secuencia en dos máquinas, M1 y M2. Una inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en cualquiera de las máquinas.

   Hay un 5% de probabilidades de que una unidad sea desechada antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay un 3% de probabilidades de que la unidad sea desechada y un 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. Si una unidad pasa la inspección en ambas máquinas es buena.

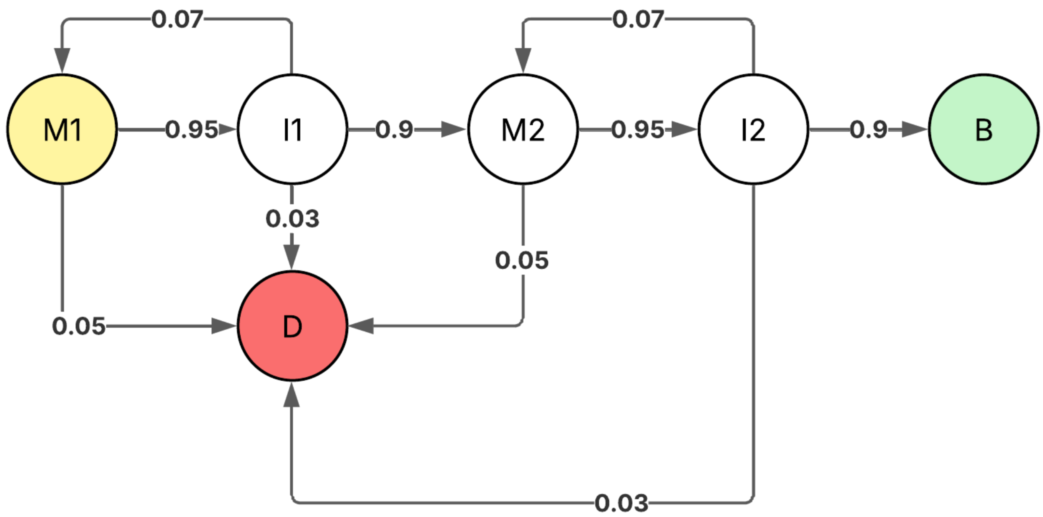
```
 4.1 Dibuje la cadena de Markov que representa este problema y describa
para cada estado si es transitorio, recurrente, o absorbente.

 4.2 Arme la matriz de transición

 4.3 Calcule la probabilidad de que una pieza que inicia el proceso en la
máquina M1 sea desechada.

 4.4 Calcule la probabilidad de que una pieza de la máquina M2 sea
terminada.

 4.5 Si los tiempos de procesamiento en las máquinas M1 y M2 son
respectivamente de 20 y 30 minutos y los tiempos de inspección son
respectivamente de 5 y 7 minutos, ¿cuánto tiempo tarda en ser procesada
una pieza que inicia en la máquina M1?
```



1.

- $M1$, $I1$ son recurrentes entre si
- $M2$ e $I2$ son recurrentes entre si
- B y D son absorbentes

1. $$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} M1 & I1 & M2 & I2 & D & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} M1 \\ I1 \\ M2 \\ I2 \\ D \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0.07 & 0 & 0.9 & 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.07 & 0 & 0.03 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3.y 4. A partir de las matrices seleccionadas, se tienen las dos submatrices siguientes para analizar absorbencia:

$$N = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} M1 & I1 & M2 & I2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M1 \\ I1 \\ M2 \\ I2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 \\ 0 & 0 & 0.07 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} D & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} M1 \\ I1 \\ M2 \\ I2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0.03 & 0 \\ 0.05 & 0 \\ 0.03 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calculo la matriz de absorbencia

$$(I-N)^{-1}.A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} D & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} M1 \\ I1 \\ M2 \\ I2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.1611 & 0.8389 \\ 0.1170 & 0.8830 \\ 0.0841 & 0.9159 \\ 0.0359 & 0.9641 \end{bmatrix} \end{array}$$

A partir de esta matriz sabemos que:

1. La probabilidad de que una maquina que inicia el proceso en M1 sea desechada es del 16,11%

2. La probabilidad de que una pieza en la maquina 2 sea terminada es del 91,59%

3. Se calcula la matriz de tiempo esperado y se la multipica por los tiempos individuales en el vector columna: $ (I-N)^{-1} . T =

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} M1 & I1 & M2 & I2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M1 \\ I1 \\ M2 \\ I2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.0712 & 1.0177 & 0.9812 & 0.9321 \\ 0.0750 & 1.0712 & 1.0328 & 0.9812 \\ 0 & 0 & 1.0712 & 1.0177 \\ 0 & 0 & 0.0750 & 1.0712 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & T \\ \begin{matrix} M1 \\ I1 \\ M2 \\ I2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 30 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

=

$$\begin{bmatrix} . & T_{esp} \\ M1 & 62.4724 \\ I1 & 44.7078 \\ M2 & 39.2608 \\ I2 & 9.7483 \end{bmatrix}$$

$

Por lo tanto, el tiempo de procesamiento esperado para una pieza que comienza en la maquina M1 es de 62,4724 minutos

Bibliografía

Russell, S. & Norvig, P. (2004) *Inteligencia Artificial: Un Enfoque Moderno*. Pearson Educación S.A. (2a Ed.) Madrid, España

Poole, D. & Mackworth, A. (2023) *Artificial Intelligence: Foundations of Computational Agents*. Cambridge University Press (3a Ed.) Vancouver, Canada