Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
факультет космических исследований
кафедра математической статистики и случайных процессов

Курсовая работа
студента 402 группы
Шигина Глеба Сергеевича

Трансформация данных в GLM моделях

Научный руководитель:
с.н.с., к.ф.-м.н.
Шкляев Александр Викторович

Москва, 2022

1 Введение

Ветвящиеся процессы были введены Гальтоном и Ватсоном в работе [Halton(1973)]. Классическая теория для этих процессов предполагает, что производящая функция процесса $\phi(s)$ отлична от s. Мы дополним исследование недостающим случаем $\phi(s) = s$. Для такой модели мы получим асимптотику вероятностей умеренных, больших и сверхбольших уклонения ветвящегося процесса.

Итак, ветвящимся процессом называют цепь Маркова Z_n, такую что $Z_0 = 1$, а

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i},$$

где $\xi_{n,i}$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в), имеющие производящую функцию $\phi(s) = s$. Основной результат работы заключается в нахождении асимптотики вероятностей

$$\mathbf{P}(Z_n \geq x)$$

при различных x и $n \to \infty$.

Работа устроена следующим образом: в разделе 2 содержатся предварительные сведения, которые потребуются в ходе доказательства основной теоремы 3.1, содержащейся в разделе 3. Доказательство основной теоремы приведено в разделе 4. Заключительные замечания сделаны в разделе 5.

2 Предварительные сведения

Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, определенный выше. Тогда нам потребуются следующие факты:

Лемма 2.1. *(Лемма 1.1(iv), [Shklyaev(2012)]) Производящая функция Z_n задается соотношением*

$$\phi_{Z_n}(s) = \phi_n(s),$$

где $\phi_n(s)$ — n-кратная суперпозиция производящей функции ϕ.

Следствие 2.1. *Предположим, что $\phi(s) = s$. Тогда $\phi_{Z_n}(s) = s$.*

3 Основной результат

Итак, предположим, что ветвящийся процесс Z_n имеет производящую функцию числа потомков одной частицы $\phi(s) = s$. Тогда справедлива следующая теорема, включающая себя анализ умеренных, больших и сверхбольших уклонений процесса Z_n:

Теорема 3.1. *Пусть $k > 1$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n \geq k) = 0,$$

причем сходимость равномерна по рассматриваемым k.

4 Доказательства

Доказательство теоремы 3.1. Доказательство очевидно. □

5 Заключение

В работе получено решение значимой проблемы, на протяжении долгих лет остававшейся не исследованной. Отметим, что проблема малых уклонений и по сей день остается открытой и требует дальнейших исследований.

Список литературы

[Halton(1973)] F. Halton, Galton-watson processes, Acta Mathematica 1 (1973) 207–248.

[Shklyaev(2012)] A. Shklyaev, Branching processes for Dummies, Springer, 2012.