NHÓ M HỌC KÈM HÀ TĨNH	**ĐỀ THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC CƠ BẢN**
Gs Hoang Anh	**MÔ N: TOÁ N 9** – Cơ bản
(Đề thi gồm: 10 trang)	Thời gian làm bài: 120 phút
	Ngày thi: 12/03/2024 (Lần 6)

Họ và tên: …………………………………… SBD: ………………………..

Câu 1. *(2 điểm)*

a) Tìm tất cả ba bộ số nguyên tố (p, q, r) sao cho $pqr = p + q + r + 200$.

b) Cho x, y là các số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x = y$.

a)PT $\Leftrightarrow -p + pqr - q = 200 + r$ $\Leftrightarrow -pr(1 - rq) + 1 - qr = (200 + r)r + 1$ $\Leftrightarrow (pr - 1)(qr - 1) = (200 + r)r + 1$	0,25
Mặt khác, giả sử: $p \geq q \geq r \geq 1$ $\Rightarrow 1 = \frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{pr} + \frac{200}{pqr} \leq \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{200}{r^2}$ $\Leftrightarrow r^2 \leq 203 \Leftrightarrow r \leq 14 \Leftrightarrow r \in \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$	0,5
Xét từng giá trị của r, suy ra bộ ba số: $(p; q; r) = (41; 3; 2); (23; 2; 5)$ và hoán vị của chúng.	0,25

bIVì $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x, y \geq 2$ $\Rightarrow 1 + 7x < 2(4x + 7) \leq y(4x + 7)$ $\Rightarrow 1 - 4xy < 7y - 7x$	0,25
CM tương tự ta có: $\Rightarrow 7y - 7x < 4xy + 1$	0,25
Suy ra: $1 - 4xy < 7y - 7x < 1 + 4xy$ $\Rightarrow 4x^2y^2 + 1 - 4xy < 4x^2y^2 + 7y - 7x < 4x^2y^2 + 4xy + 1$ $\Leftrightarrow (2xy - 1)^2 < 4x^2y^2 + 7y - 7x < (2xy + 1)^2$	0,25
Mà $4x^2y^2 + 7y - 7x$ là số chính phương nên: $4x^2y^2 + 7y - 7x = (2xy)^2$ $\Rightarrow 4x^2y^2 + 7y - 7x = 4x^2y^2$ $\Rightarrow 7y - 7x = 0$ $\Rightarrow x = y$ (đpcm)	0,25

Câu 2. *(1 điểm) Theo phân tích hóa học, quặng khai thác được thành phần của nó thường có một phần lớn là sắt, ngoài ra có chứa lẫn tạp chất khác.*

Có hai loại quặng sắt chính, Quặng loại A chứa 60% sắt, quặng loại B chứa 50% sắt. Người ta trộn một lượng quẳng loại A với một lượng quặng loại B thì được hỗn hợp chứa $\frac{8}{15}$ sắt. Nếu lấy tang hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại A và lấy giảm hơn lúc đầu là 10 tấn quặng loại B thì được hỗn hợp quặng chứa $\frac{17}{30}$ sắt. Tính khối lượng quặng mỗi loại đem trộn lúc đầu?

Gọi khối lượng quặng đem trộn lúc đầu quặng loại A là x (tấn), quặng loại B là y (tấn), $x > 0, y > 10$.	0,25
Giải thích quá trình hình thành 2 phương trình để tạo thành hệ PT.	0,25
Ta có hệ PT: $\begin{cases} \frac{60}{100}x + \frac{50}{100}y = \frac{8}{15}(x+y) \\ \frac{60}{100}(x+10) + \frac{50}{1100}(y-10) = \frac{17}{30}(x+10+y-10) \end{cases}$	0,25
Giải ra ta được nghiệm: x=10 và y=20 (tấn).	0,25

Câu 3. *(1 điểm)* Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 5 \\ mx - y = 2 \end{cases}$ (m là tham số)

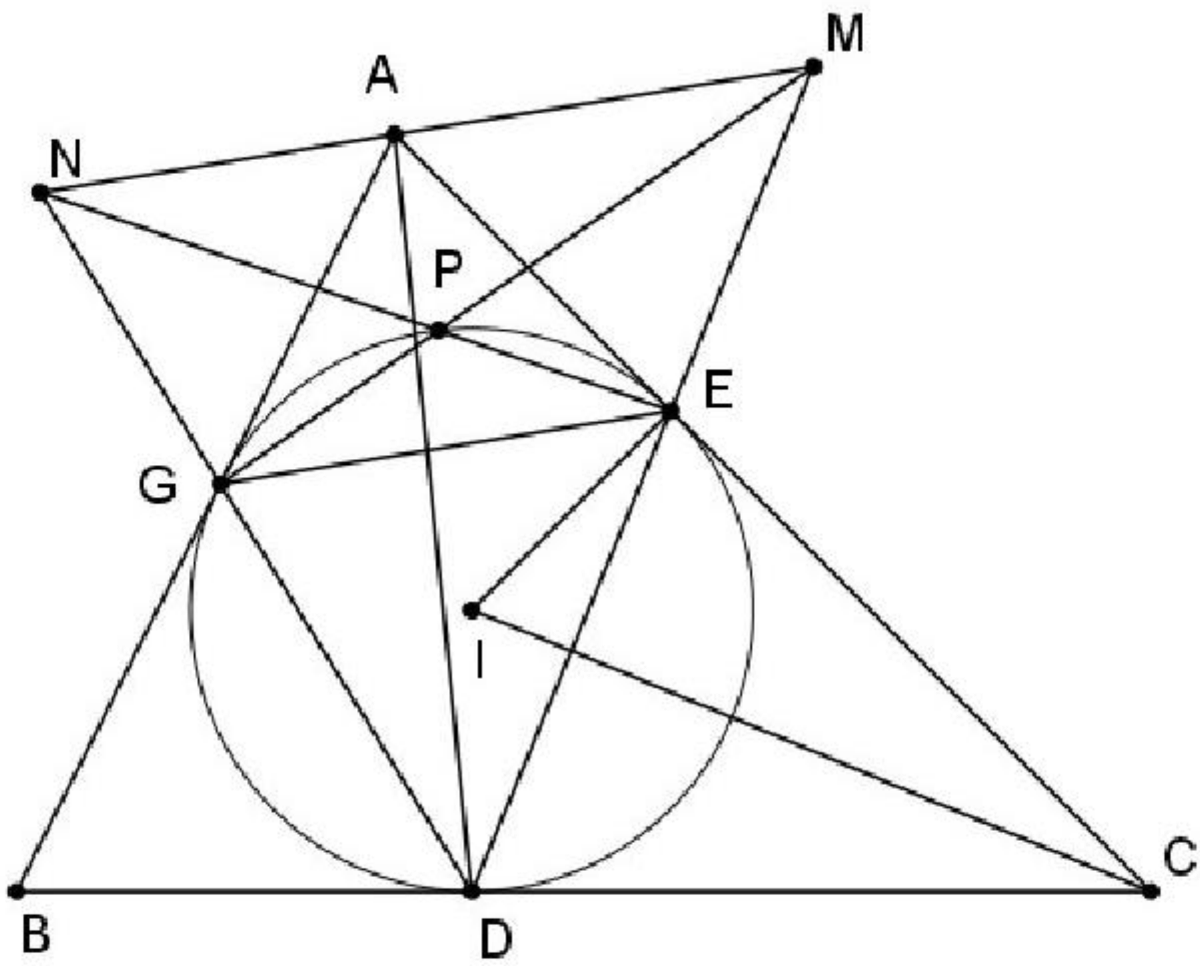
Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) và tìm nghiệm duy nhất đó?.

PT: $\begin{cases} x - my = 5 \quad (1) \\ mx - y = 2 \quad (2) \end{cases}$ Từ (1): $\Rightarrow x = my + 5 - 3m$, thay vào (2) ta được $m(my + 5 - 3m) - y = 2$.	0,25
$\Leftrightarrow y(m^2-1) = 3m^2 - 5m + 2 \Leftrightarrow y(m-1)(m+1) = (m-1)(3m-2) \ (3)$	0,25
Để hệ có nghiệm duy nhất thì PT (3) phải có nghiệm duy nhất: $\Leftrightarrow (m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$	0,25
Với điều kiện $m \neq \pm 1; m \neq \frac{2}{3}$ thì $\frac{5}{x} + 4 = \frac{3}{y} \Leftrightarrow m + 1 + 4 = \frac{3(m+1)}{3m-2} \Leftrightarrow 3m^2 + 10m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 1; m = -\frac{13}{3}$	0,25
Đối chiếu điều kiện, ta tìm được$m = -\frac{13}{3}$.	0,25

Câu 4. *(2 điểm)* Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G. Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M, N. Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại P. Chứng minh rằng:

a) EG song song với MN.

b) Điểm P thuộc đường tròn (I).



a) MN là phân giác góc ngoài của $BAC \Rightarrow MN \perp AI$.

Mà $EG \perp AI \Rightarrow MN // EG$.

b) Ta có: $NAG = MAE$

$AGN = BGD = GED$ (cùng chắn cung GB) $= AME\left(do\ GE // MN\right)$.

$\Rightarrow \Delta ANG \backsim \Delta AEM \Rightarrow \dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AG}{AM}$

$\Rightarrow \Delta ANE \backsim \Delta AGM$

$\Rightarrow ANE = AGP \Rightarrow ANGP$ là tứ giác nội tiếp.

$AMG = AEN \Rightarrow AMEP$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow GPE = 360^0 - GPA - APE = 360^0 - \left(180^0 - DAM\right) - \left(180^0 - DMN\right) = 180^0 - NDM$.

$\Rightarrow GPED$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow P \in \left(I\right)$.

b) Ta có: $\widehat{NAG} = \widehat{MAE}$

$\widehat{AGN} = \widehat{BGD} = \widehat{GED}$ (cùng chắn cung GB) $= \widehat{AME}\left(do\ GE//MN \right)$.

$\Rightarrow \Delta ANG \sim \Delta AEM \Rightarrow \dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AG}{AM}$

$\Rightarrow \Delta ANE \sim \Delta AGM$

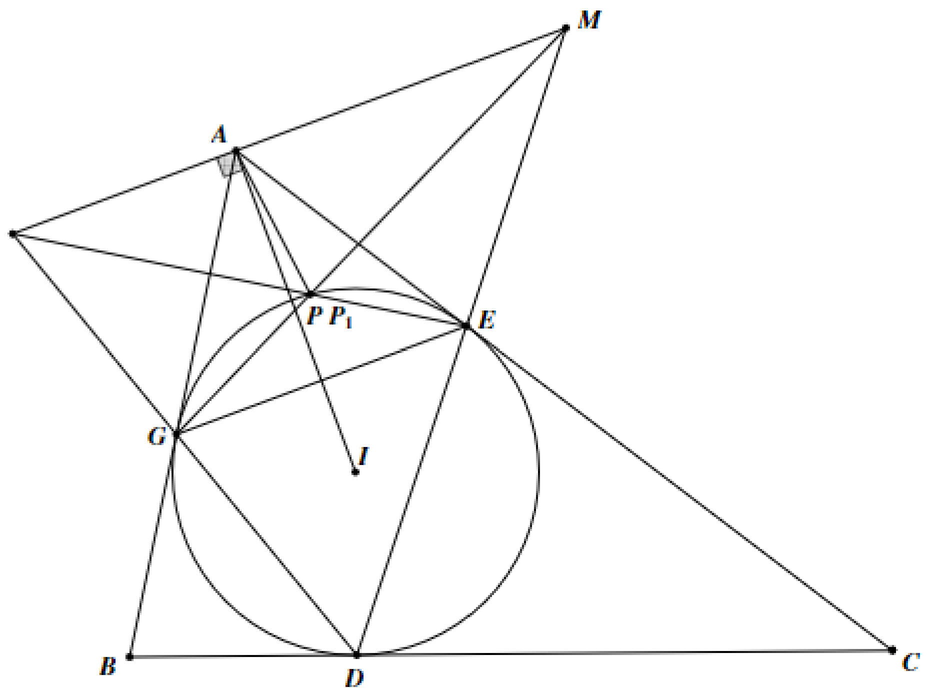
$\Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{AGP} \Rightarrow ANGP$ là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{AMG} = \widehat{AEN} \Rightarrow AMEP$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{GPE} = 360^0 - \widehat{GPA} - \widehat{APE} = 360^0 - \left(180^0 - \widehat{DMA}\right) - \left(180^0 - \widehat{DNM}\right) = 180^0 - \widehat{NDM}.$

$\Rightarrow GPED$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow P \in \left(I\right)$.

Các hướng suy luận giải khác:



a) Vì AM là phân giác ngoài $\widehat{BAC}$, AI là phân giác trong góc A nên $AI \perp AM$ mà $GE \perp AI$ nên $EG \parallel AM$ hay $GE \parallel MN$. Bài toán được chứng minh.

b) Gọi P_1 là giao của NE và đường tròn (I) thì từ $EG \parallel MN$, ta có

$$\widehat{ANP_1} = \widehat{ANE} = \widehat{P_1EG} = \widehat{P_1GA}$$

Do đó tứ giác $ANGP_1$ nội tiếp kết hợp với tứ giác DGP_1E nội tiếp, ta có

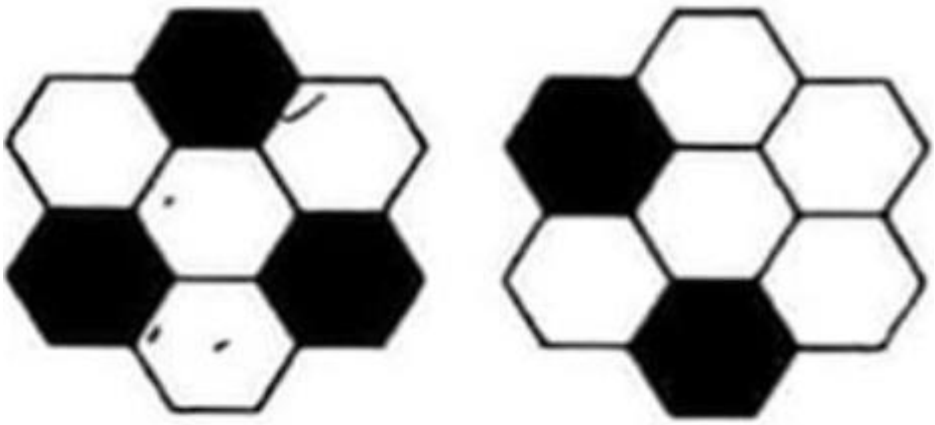
$$\widehat{P_1EM} = \widehat{P_1GD} = \widehat{NAP_1} = 180^\circ - \widehat{P_1AM}$$

Suy ra tứ giác MAP_1E nội tiếp kết hợp với $EG \parallel MN$ và tứ giác $ANGP_1$ nội tiếp, ta có

$$\widehat{GP_1M} = \widehat{AP_1M} + \widehat{AP_1G} = \widehat{AEM} + \widehat{AP_1G} = \widehat{DGE} + \widehat{AP_1G} = \widehat{GNA} + \widehat{AP_1G} = 180^\circ.$$

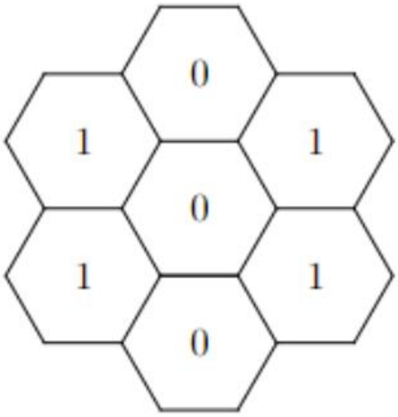
Do đó ta được 3 điểm G, P_1, M thẳng hàng. Vì vậy nên P_1 trùng P. Nói cách khác MG, NE cắt nhau tại 1 điểm P nằm trên (I). Bài toán được chứng minh.

Câu 5. *(1,0 điểm)* Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ***hình 1***. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó *(trắng thành đen hoặc đen thành trắng)*. Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ***hình 2***.



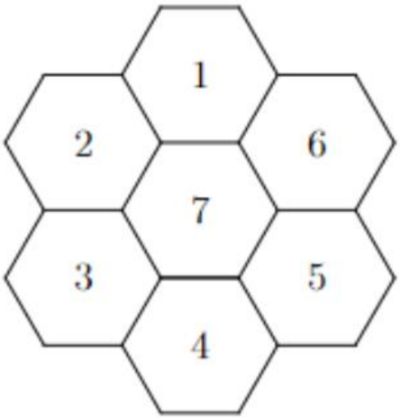
Hình 1 Hình 2

Cách 1. Đánh số vào các hình lục giác như hình vẽ.



Ta xét một hình lục giác được điền số a_i thì $a_i \equiv b_i \pmod 2$ trong đó b_i là tổng các số được điền trong các hình lục giác chung cạnh với hình lục giác đang xét. Do đó, khi đổi màu theo đề bài thì số dư trong phép chia cho 2 của tổng các số trong các hình lục giác tô đen luôn không đổi.
Đối với hình 1 thì số dư này bằng 1, còn đối với hình 2 thì số dư này bằng 0 nên không thể có cách đổi màu nào biến hình 1 thành hình 2.

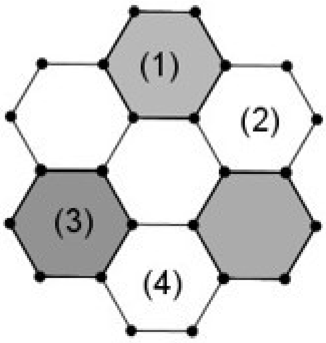
Cách 2.



Xét các ô $2, 3, 5, 6$. Mỗi bước ta đổi màu hai hoặc cả bốn ô đó nên số ô đen không thay đổi tính chẵn, lẻ. Ban đầu trong bốn ô nói trên có hai ô đen nên không thể có trạng thái trong bốn ô đó có đúng một ô đen.

Cách 3.

Xét 4 hình lục giác như trong hình vẽ sau:



Ta thấy mỗi lần đổi màu hoặc là 2 trong 4 hình được đổi màu, hoặc là cả 4 hình được đổi màu. Suy ra, số hình bị đổi màu trong 4 hình đó luôn là số chẵn.

$\Rightarrow$ Số hình màu đen trong 4 hình đó có tính chẵn lẻ không đổi.

$\Rightarrow$ Số hình màu đen trong 4 hình đó luôn là số chẵn.

Do đó không thể nhận được hình 2.

Câu 6. *(1,0 điểm)* Chứng minh rằng không tồn tại các số dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn:

$$m^{2019}+n^{2019}=p^{2018}$$

Giả sử bộ số *(m, n, p)* thỏa mãi yêu cầu. Dễ thấy $0 < m, n < p$.

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $(m+n)A=p^{2018}$ (1)

trong đó $A=m^{2018}-m^{2017}n+m^{2017}n^{2}-...-mn^{2017}+n^{2018}$.

Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có A = 1 và

$$m+n=p^{2018}=m^{2019}+n^{2019}.$$

Từ đó, dễ thấy m = n = 1 và $p^{2018}=2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p.

Do m + n > 1 nên từ (1) suy ra m + n chia hết cho p. Khi đó, ta có:

$$A\equiv 2019m^{2018} \pmod p.$$

Do A chia hết cho p và 0 < m < p nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p, hay p = 2019. Từ đó, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay m ≠ n.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$\left(m^{3}\right)^{673}+\left(n^{3}\right)^{673}=2019^{2018} \ hay \ (m+n)\left(m^{2}-mn+n^{2}\right)B=2019^{2018}$$

Trong đó $B=\left(m^{3}\right)^{672}-\left(m^{3}\right)^{671}\left(n^{3}\right)+...-\left(m^{3}\right)\left(n^{3}\right)^{671}+\left(n^{3}\right)^{672}$.

Do m ≠ n nên $m^2-mn+n^2=(m-n)^2+mn>1$, từ đó ta có m^2-mn+n^2 chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$\begin{aligned} m^{2}-mn+n^{2} &\equiv 3n^{2} \pmod{2019} \\ &\equiv 0\!\!\!/ \pmod{2019}. \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại các số m, n, p thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Câu 7. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $K = ab + 4ac - 4bc$, với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + 2c = 1$.

a) Chứng minh $K >= -\frac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

a) Chứng minh $K \geq -\frac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thwucs AM – GM ta có: $4bc \leq 2\left(\frac{b+2c}{2}\right)^2 \leq 2\left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow K = ab + 4ac - 4bc \geq -4bc \geq -\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2c \\ a + b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

Áp dụng bất đẳng thwucs AM – GM ta có: $a(b + 2c) \leq \left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow K = ab + 4ac - 4bc \leq ab + 4ac \leq 2ab + 4ac = 2a(b + 2c) \leq \frac{1}{2}$.

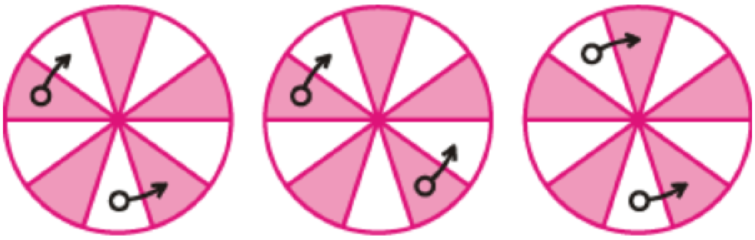
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2c \\ a + b + 2c = 1 \\ bc = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy $Max\ K = \frac{1}{2}$ khi $(a;\ b;\ c) = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{4}\right)$.

Thay thế câu 5 nếu học sinh không giải được:

Câu 5. *(1,0 điểm)* Một hình tròn được chia thành 10 ô hình quạt, trên mỗi ô người ta đặt 1 viên bi. Nếu ta cứ di chuyển các viên bi theo quy luật: mỗi lần lấy ở 2 ô bất kì mỗi ô 1 viên bi, chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau thì có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô hay không ?

Trước tiên, ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt, như vậy sẽ có 5 ô được tô màu (ô màu) và 5 ô không được tô màu (ô trắng). Ta có nhận xét :



Nếu di chuyển 1 bi ở ô màu và 1 bi ở ô trắng thì tổng số bi ở 5 ô màu không đổi.

Nếu di chuyển ở 2 ô màu, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu giảm đi 2. Nếu di chuyển ở 2 ô trắng, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu tăng lên 2.

Vậy tổng số bi ở 5 ô màu hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 hoặc tăng lên 2. Nói cách khác, tổng số bi ở 5 ô màu sẽ không thay đổi tính chẵn lẻ so với ban đầu.

Ban đầu tổng số bi ở 5 ô màu là 5 viên (là số lẻ) nên sau hữu hạn lần di chuyển bi theo quy luật trên thì tổng số bi ở 5 ô màu luôn khác 0 và khác 10, do đó không thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô.