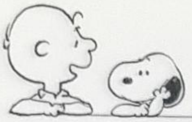
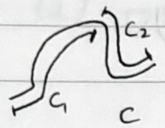
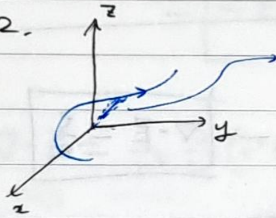


예제 1-1.



→ 피적분함수가 동일하므로, (C_1구간의 합) + (C_2구간의 합)
= (C구간의 합) 이 됨이 자명하다.

예제 1-2.

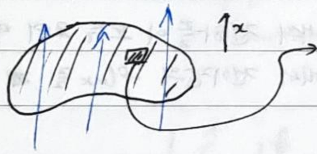


→ 삼각형의 넓이 = $\frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$

미소구간 $d\vec{r}$ 에서 합하는 값이 $\frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$

이므로 $\boxed{\int_c \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|}$ 로 표시할 수 있다.

예제 1-3.



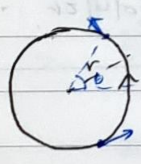
→ 미소 면적 $d\vec{A}$ 를 통과하는 시간당 유체 양

= $\rho \times$ (시간당 통과 부피)

= $\underbrace{\rho v\, \hat{x} \cdot d\vec{A}}$ — x방향에서 본 A의 넓이 or 정사영

→ $\boxed{\int_s \rho v\, \hat{x} \cdot d\vec{A}}$ 로 표현 가능.

예제 1-4. ~~%~~ $\sin\theta \to \sin^2\theta$ 으로 고치기

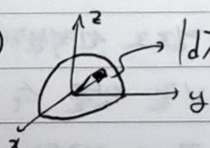


$$일 = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_c (F_0 \sin^2\theta\, \hat{\theta}) \cdot (r\,d\theta\, \hat{\theta})$$

원통 좌표계에서의 θ 방향 미소 변위 벡터

$$= rF_0 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \boxed{\pi r F_0}$$

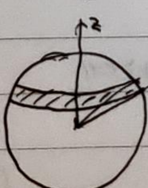
예제 1-5. sol(1)



$$|d\vec{A}| = \underbrace{(r\,d\theta)}_{\theta\text{ 방향 미소변위벡터 크기}} \underbrace{(r\sin\theta\, d\phi)}_{\phi\text{ 방향 미소 변위벡터 크기}} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

겉넓이 → $\int_s |d\vec{A}| = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta = r^2\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) = \boxed{4\pi r^2}$

sol 2)



$$dA = \underbrace{r\,d\theta}_{두께} \times \underbrace{2\pi r \sin\theta}_{길이} \to \int_s dA = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \boxed{4\pi r^2}$$

예제 1-6. $q_{in} = \varepsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \int_0^{\pi} E_0 \cos^2\theta \, (2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta)$

$$= 2\pi r^2 E_0 \varepsilon_0 \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^2 \varepsilon_0 E_0}$$

예제 1-7. (a) 가우스 법칙: $\oint_S \boxed{\vec{E} \cdot d\vec{A}} = \int_V \boxed{\frac{\rho}{\varepsilon_0}} dV \rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

local 한 변수

global 한 경계에서의 값

합 (부피적분)

$\vec{E}$의 발산은 부피전하밀도에 비례한다.

영역 내의 전하들이 모두 모여 영역 경계에서 전기장의 flux를 만들어낸다.

(b) 패러데이 법칙: $\oint_C \boxed{\vec{E} \cdot d\vec{s}} = \int_S \boxed{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}} \rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

local 한 변수

global 한 경계에서의 값

합 (면적분)

$\vec{E}$의 회전는 자기장의 변화에 비례한다.

곡면 내의 자기장 flux 변화들이 모두 모여 곡면 경계에서 전기장의 vortex를 만들어낸다.

예제 1-8. (a) $\nabla \times \vec{F} = 0 \rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ for all C

즉 어느 한 점을 0으로 잡고 ($V(\vec{0}) = 0$) 다른 모든 점을

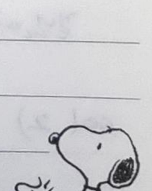
$V(\vec{r}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ 로 정의하면 같은 점에 다른 경로로 선적분해 도달해도 모두 값이 같으므로 잘 정의된 함수 V를 만들 수 있다.

이때 $V(\vec{s} + d\vec{s}) - V(\vec{s}) = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ 가 되므로 $\nabla V = \vec{F}$ 도 만족한다.

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$ 는 국소적인 폐곡면에서 $\nabla \times \vec{F}$의 flux를 나타낸다.

그런데, $\nabla \times \vec{F}$를 면적분하면 곡면 경계에서의 선적분값이 나와야 하는데 경계가 존재하지 않으므로 전자의 값이 0임은 자명하다.

$\rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$



예제 1-9. (a) $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} = -E_0\left(1+\frac{2R^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{r}$

$+ E_0\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta}$

$$= \boxed{-E_0\hat{z} \cancel{+} - \frac{R^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$

(b) $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(Are^{-br}\right) = \frac{A}{r^2}\left(e^{-br} - bre^{-br}\right)$

$$= \boxed{\frac{A}{r^2}e^{-br}(1-br)}$$

(c)

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ 0 & 0 & \frac{A\sin^2\theta}{r} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{A\sin^2\theta}{r}\right)\hat{r} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A\sin^2\theta}{r}\right)\hat{\theta}\right)$$

$$\cancel{= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{A\cos\theta}{r^2}\hat{r} + \frac{2A\sin\theta}{r^2}\hat{\theta}\right)}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{2A\sin\theta\cos\theta}{r}\hat{r} + \frac{A\sin^2\theta}{r}\right) = \frac{2A\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{A\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

$$= \boxed{\frac{A}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$

예제 1-10. 반지름 r인 구면에 대하여 $\oint_S \left(\frac{1}{r^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{A} = \int_0^{\pi} 2\pi \sin\theta\, d\theta = \boxed{4\pi}$

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\hat{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = \boxed{0}$$

$$\oint_C \left(\frac{1}{s}\hat{\phi}\right)\cdot(s\,d\phi\,\hat{\phi}) = \int_0^{2\pi} d\phi = \boxed{2\pi}$$

$$\nabla\times\left(\frac{1}{s}\hat{\phi}\right) = \frac{1}{s}\begin{vmatrix} \hat{s} & s\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\vec{0}}$$

언뜻 보면 발산 정리, 스토크스 정리에 위배되는 듯 보인다. 그러나,
적분구간 내의 미소 성분이 합쳐져 경계에서의 global 한 값이 된다는 원리 자체는 변하지 않는다.

장 $\frac{\hat{r}}{r^2}$에서, 원점을 살펴보면 $\frac{\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{A}}{dV}$ 값은 $\frac{4\pi}{\frac{4}{3}\pi r^3}$으로 발산한다.
그러나 $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{A}$는 S를 아무리 작게 잡아도 원점을 포함하는 한 4π로 일정하다.

즉, 원점의 local 한 성분이 4π라는 global 한 값을 만들어내고 있는 것이다.

이런 것을 다룰 때 델타 함수가 사용된다.

$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z) = 4\pi\delta^3(\vec{r})$ 로 나타내어 보자.

그러면 $\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)dV = \int_V 4\pi\delta^3(\vec{r})\,dV = 4\pi\int\delta(x)dx\int\delta(y)dy\int\delta(z)dz$
$= 4\pi$ 로 정상적으로 계산된다.

$\boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(\vec{r})}$ 로 놓으면 수학적 모순 없이 깔끔하게 기술된다.

같은 방법으로 $\boxed{\nabla\times\left(\frac{1}{s}\hat{\phi}\right) = 2\pi\delta^2(\vec{r})}$ 로 기술된다.

예제 2-1. $\sin\theta \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cos\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + l(l+1)\Theta\sin\theta = 0$

$\eta = \cos\theta$ 로 변수 바꿈 → $\frac{d}{d\theta} = \frac{d\eta}{d\theta}\frac{d}{d\eta} = \boxed{-\sin\theta\frac{d}{d\eta}}$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\frac{d}{d\eta}\right) = -\cos\theta\frac{d}{d\eta} + \sin^2\theta\frac{d^2}{d\eta^2}$$

$$= \boxed{-\eta\frac{d}{d\eta} + (1-\eta^2)\frac{d^2}{d\eta^2}}$$

→ 대입하면 $\left(-\eta\frac{d}{d\eta} + (1-\eta^2)\frac{d^2}{d\eta^2} - \eta\frac{d}{d\eta} + l(l+1)\right)\Theta = 0$

$$\boxed{(1-\eta^2)\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} - 2\eta\frac{d\Theta}{d\eta} + l(l+1)\Theta = 0}$$

예제 2-2. (a) 결론부터 말하자면, $\frac{1}{\frac{\partial z}{\partial r}} = \frac{1}{\cos\theta}$ 와 $\frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \theta}} = -\frac{1}{r\sin\theta}$ 부분이 틀렸다.

왜일까? 구면좌표계 변환식을 보면 분명히 맞는데 말이다.

전미분의 정확한 식은

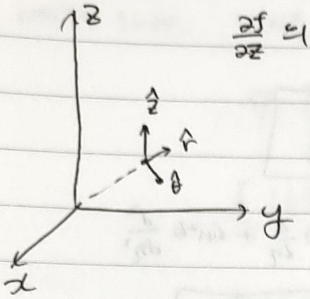
$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_2, x_3, \cdots x_n} dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_1, x_3, \cdots, x_n} dx_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{x_1, \cdots, x_{n-1}} dx_n$$

이다. 밑첨자는 ~변수가 일정하다는 구속조건을 부가한다.

우리가 $z = r\cos\theta$ 로부터 구한 $\frac{\partial z}{\partial r}$ 는 $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}$ 이다.

$\hat{r}$ 방향으로 이동하면서 z와 r의 변화량을 '관찰'한다.

그런데, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)$ 에서 $\frac{\partial r}{\partial z}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ 에는 x, y 일정의 구속조건이 붙어야 한다. $\frac{\partial}{\partial z}$ 는 $\hat{z}$ 방향으로 이동하면서 함수의 변화를 관찰하는 것이니, 당연한 말이다.



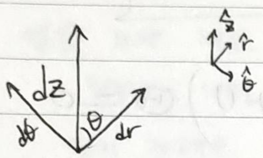
$\frac{\partial f}{\partial z}$ 의 의미: $\hat{z}$ 방향으로 이동하여 f의 변화 df를 관찰, $\frac{df}{dz}$를 구한다. (dz만큼)

즉, $\frac{\partial}{\partial z}$를 r, θ로 나타내려면 $\hat{z}$ 방향으로 dz만큼

이동할 때 $\hat{r}$ 방향, $\hat{\theta}$ 방향으로 얼마만큼 이동했는가를

알아야 하는 것이고, 여기에서 x, y 일정의

구속조건이 붙는다.



→ dz만큼 $\hat{z}$ 방향으로 이동 시

$\hat{r}$ 방향으로 $dz\cos\theta$, $\hat{\theta}$ 방향으로 $-dz\sin\theta$ 만큼

이동하게 되므로

$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y} = \cos\theta$, $\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{x,y} = -\frac{\sin\theta}{r}$ 이 된다.

(a)의 식에서 대입했던 $\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{\theta,\phi}$ 값은 $\hat{r}$ 방향으로 이동하면서

미분한 값으로, $\frac{\partial}{\partial z}$ 와는 아무런 상관이 없다!

정리하자면

$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$ = ($\hat{z}$ 방향으로 dz만큼 이동할 때 $\frac{df}{dz}$ 값)

= ($\hat{r}$ 방향으로 $\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y}$, $\hat{\theta}$ 방향으로 $\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{x,y}$ 만큼 이동할 때 $\frac{df}{\text{이동거리}}$ 값.)

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\phi} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\phi}$$

$$= \boxed{\cos\theta\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\phi} - \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\phi}}$$ 가 된다.

(b) 같은 방법으로

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$ 를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = (r\sin\theta\cos\phi)\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$- (r\sin\theta\sin\phi)\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\phi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$= (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}$$ 로 간단히 표시된다.

대입하면 $-i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = L\Phi$, $\boxed{\Phi = Ce^{i\frac{L}{\hbar}\phi}}$, C는 상수

를 얻을 수 있다. 또, $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ 이므로

$\frac{L}{\hbar}$는 정수이어야 하고, $\boxed{L = m\hbar}$ $(m \in \mathbb{Z})$

이 조건이 생김을 알 수 있다.

(c) 화이팅! (이하 생략)

예제 2-3. 원형막의 진동을 $y(r,\theta,t)$ 로 나타낼 수 있고, y는 파동 방정식 $\nabla^2 y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 를 만족한다. 원통 좌표계에서

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ 이므로

식은 $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)y = 0$ 이 된다.

y를 $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ 로 분리하고 양변을 $R\Theta T$ 로 나누면

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \frac{1}{v^2T}\frac{d^2T}{dt^2} = 0$$

베셀 함수 꼴을 만들어주기 위하여 $\frac{1}{v^2T}\frac{d^2T}{dt^2} = -k^2$ 로 잡자.

$k^2v^2 = \omega^2$ 로 변수를 정리하면 $\boxed{T = A\sin\omega t + B\cos\omega t,\ \text{혹은}\ T \sim e^{i\omega t}\ \text{로 기술된다.}}$

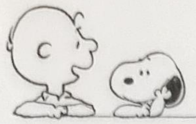
공간 성분은 $\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -k^2$

θ 성분을 분리하기 위해 양변에 r^2을 곱하고, $\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ 로 놓자.

그러면 $$\begin{cases} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2\Theta \rightarrow \boxed{\Theta = C\sin m\theta + D\cos m\theta} \\ r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (k^2r^2 - m^2)R = 0 \end{cases}$$

$\rho = kr$ 로 변수 바꿈을 해 주면 $\frac{d}{dr} = \frac{d}{d\rho}\frac{d\rho}{dr} = k\frac{d}{d\rho}$, $\frac{d^2}{dr^2} = k^2\frac{d^2}{d\rho^2}$

대입하면 $\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - m^2)R = 0$, $\boxed{R = J_m(kr)}$ 이 된다.



경계조건 $R(a)=0$ 을 생각하면 $J_m(ka)=0$ 이므로

$J_m(x)=0$ 의 n번째 근을 j_{mn} 이라고 하면 $k=\frac{j_{mn}}{a}$ 로 표현된다.

결국, 우리가 구하고자 하는 일반해는

$$\boxed{\begin{aligned} y = R\Theta T &= \sum_{m,n} A_{m,n} J_m\left(\frac{j_{m,n}}{a}r\right)\sin m\theta\, e^{i\omega t} \\ &+ \sum_{m,n} B_{m,n} J_m\left(\frac{j_{m,n}}{a}r\right)\cos m\theta\, e^{i\omega t} \end{aligned}}$$

로 표현된다!

예제 3-1. (a) $Re\left(\frac{1}{2-e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-e^{-i\theta}} + \frac{1}{2-e^{i\theta}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\frac{4-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{4-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+1} = \boxed{\frac{2-\cos\theta}{5-4\cos\theta}}$$

$$\left|\frac{1}{2-e^{i\theta}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2-e^{i\theta}}\frac{1}{2-e^{-i\theta}}} = \sqrt{\frac{1}{5-4\cos\theta}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$

(b) $Re\left(\frac{e^{-i\theta}}{2-e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-i\theta}}{2-e^{i\theta}} + \frac{e^{i\theta}}{2-e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\frac{4\cos\theta-2\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}$

$$= \boxed{\frac{2\cos\theta-\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}}$$

$$\left|\frac{e^{-i\theta}}{2-e^{i\theta}}\right| = \sqrt{\frac{e^{-i\theta}}{2-e^{i\theta}}\frac{e^{i\theta}}{2-e^{-i\theta}}} = \sqrt{\frac{1}{5-4\cos\theta}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$