오개념 때려잡기
<전자기학>

2022.08.31

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

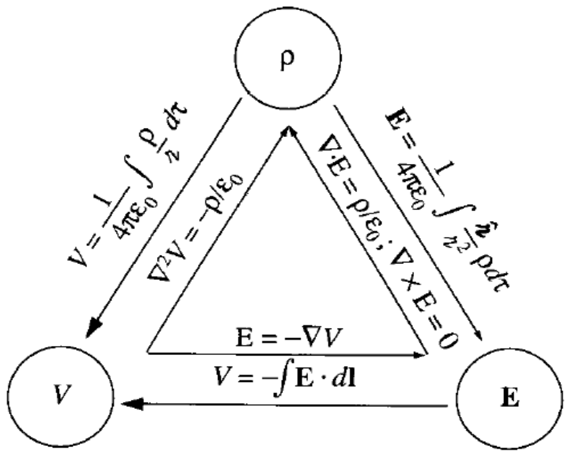
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

0. [기초] 배경지식

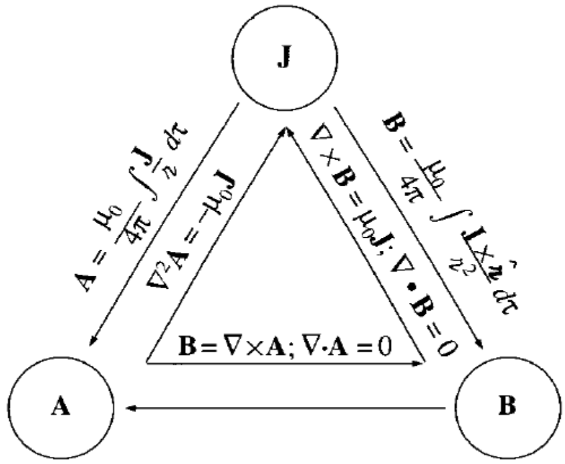
아래의 내용을 미리 익혀놓으면 강의 내용 이해에 도움이 될 것이다.

정전기학(Electrostatics)



전하밀도, 전기장, 스칼라 전위의 관계

정자기학(Magnetostatics)



전류밀도, 자기장, 벡터 전위의 관계

전기/자기 쌍극자 (electric/magnetic dipole)

$$\boxed{\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,d\tau',} \quad \boxed{\mathbf{m} \equiv I\int d\mathbf{a} = I\mathbf{a}.}$$

$$\boxed{V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.} \quad \boxed{\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2},}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}].}$$

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[3(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}].}$$

물질 속의 전자기장
(electromagnetic field in matter)

$\mathbf{P} \equiv$ *dipole moment per unit volume,*

$\mathbf{M} \equiv$ *magnetic dipole moment per unit volume.*

$$\boxed{\mathbf{D} \equiv \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P},}$$

$$\boxed{\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}.}$$

맥스웰 방정식(Maxwell's Equation) - in general

(i)	$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$	(Gauss's law),
(ii)	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	(no name),
(iii)	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	(Faraday's law),
(iv)	$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$	(Ampère's law with Maxwell's correction).

맥스웰 방정식(Maxwell's Equation) - in matter

$$\text{(i)}\ \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f, \qquad \text{(iii)}\ \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(ii)}\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \text{(iv)}\ \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

1. 물질 속의 전자기학

1.1 물성 상수

전자기학은 전자기장이 퍼져나가는 **물질의 종류**에 따라 그 행동 양상이 달라진다.
→ "세가지 상수" 로 물질의 성질은 결정된다.

1.1.1 유전율(Permittivity) : ε, 외부 전기장에 놓였을 때 편극이 얼마나 잘 되는가?
① $D = \varepsilon E$
② $D \equiv \varepsilon_0 E + P$
③ $P = \varepsilon_0 \chi_e E$ (선형유전체의 Definition, 항상 성립하지 않는다)

1.1.2 투자율(Permeability) : μ, 외부 자기장에 놓였을 때 자화가 얼마나 잘 되는가?
① $B = \mu H$
② $H \equiv \frac{1}{\mu_0} B - M$
③ $M = \chi_m H$ (선형물질의 Definition, 항상 성립하지 않는다)

1.1.3 도전율(Conductivity) : σ, 전류가 흐를 때 전기장이 얼마나 생기는가?
$J = \sigma E$ (옴의 법칙의 Definition , 항상 성립하지 않는다)

※ 유전율, 도전율, 투자율

구 분	유 전 율(ε)	도 전 율(σ)	투 자 율(μ)
개 념	부도체의 전기적인 특성	도체의 물질내 전류가 흐르는 정도	물질의 자기적 성질을 나타내는 양
단 위	F / m	A / V	H / m
매 질	유 전 체	도 체	자계의 관점
밀 도	전속밀도 (D) = ε. E	전류밀도 (J) = σ. E	자속밀도 (B) = μ. H

1.1.4 그밖의 상수
감수율(Susceptibility) : χ_e / χ_m
비저항(Resistivity) : ρ
굴절률(Refractive Index) : n
상대유전율(relative permittivity) : ε_r
상대투자율(relative permeability) : μ_r
원자편극성(atomic polarizability) : α

우리가 다룰 물질 = Linear Isotropic Homogeneous material

1.2 물질의 종류

헷갈리는 물질의 이름들... 물성상수를 바탕으로 제대로 정의해보자!

1.2.1 도체(conductor)

→ 자유전자가 이동할 수 있어 내부 전기장을 완전히 지운다. 항상 전위가 같게 유지된다.

→ $\sigma \simeq \infty$, $\varepsilon = \infty$ (사실 분극이 일어나는 물질이 아니니 의미 X) , $\mu = ?$

1.2.2 유전체(dielectric)

→ 분극이 일어나는 물질 : 전자가 핵을 벗어나지는 못하지만 내부에서 분포가 변화

→ $\sigma \simeq 0$(사실 전류가 흐르는 물질이 아니니 큰 의미 X), $\varepsilon > \varepsilon_0$, $\mu = ?$

※ 도전율, 유전율은 전기적 성질, 투자율은 자기적 성질이다. 유전율은 투자율과 대응되며 도전율은 딱히 대응되는 개념은 없다. 이는 자기홀극의 부재로 "자기전류밀도"라는 개념이 무의미 하기 때문이다.

1.2.3 절연체(insulator)

→ 전류가 흐르지 않는 물질. 이번엔 물질끼리의 공유결합이 굉장히 강하여 분극조차 거의 되지 않는다.

→ 사실 유전체와 구분하지 않아도 무방하다.

1.2.4 부도체(non-conductor)

→ 전기가 잘 흐르지 못하는 물질.

→ 애매한 정의에서도 알 수 있듯 유전체, 절연체와 현재로서는 구분하지 않아도 무방 (문맥에 따라 결정)

1.2.5 상자성체(paramagnetic)

→ 외부 자기장 방향으로 자기 쌍극자가 정렬하는 물질

→ $\chi_m > 0$, $\mu \simeq \mu_0$ (즉 자기감수율이긴 양수이긴 하나 매우 작다)

1.2.6 반자성체(diamagnetic)

→ 외부 자기장의 반대방향으로 자기 쌍극자가 정렬하는 물질

→ $\chi_m < 0$, $\mu \simeq \mu_0$ (즉 자기감수율이 음수이긴 하나 매우 크다)

1.2.7 강자성체(ferromagnetic)

→ 외부 자기장 방향으로 쌍극자가 정렬하며, 외부 자기장이 꺼져도 자화 상태가 유지된다.

→ $\chi_m > 0$, $\mu > \mu_0$

1.2.8 초전도체(superconductor)

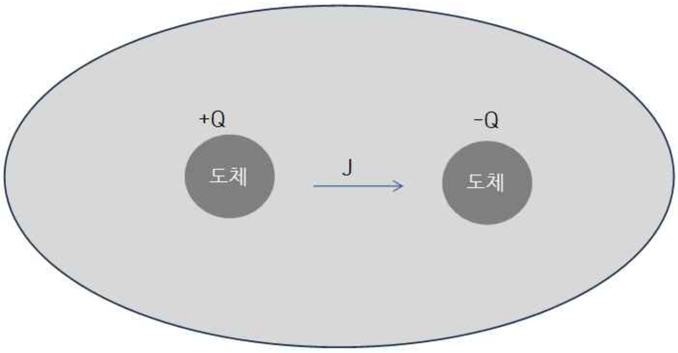
→ 내부 자기장이 0인 완전도체 (모든 도체 내부의 자기장은 일정함을 쉽게 증명 가능, 초전도체 $\subset$ 도체)

※ 강자성체가 아닌 이상 물질의 투자율은 μ_0로 가정하고 논리를 전개하는 것이 일반적. 그리고 다행히도 우리 수준에서는 강자성체의 정량적 분석은 다룰 일이 없다.

실제 물질은 "무한한 물성 상수" 따위를 가지지 않는다.

모든 실제 물질은 세가지 물성상수를 모두 가짐을 잊지 말자!

1.3 시간상수 : Statics 와 Dynamics 의 근본적인 차이



물질(유전율 ε_0, 전도도 σ)속에 놓여진 두 개의 도체를 상상하자. 이 두 도체는 전하가 쌓이는 축전기로도 작용할 수 있고, 전류가 흐르므로 저항으로도 작용할 수 있다. 이 도체계의 시간상수 (RC) 는 얼마일까?

<Solution>

Q1. 쿨롱의 법칙, 비오 사바르 법칙 : 전자기장을 구하는 기본 공식들이다. 이는 일반적으로 성립하는 법칙인가? Statics에 한해 허용되는 법칙인가?

Q2. Statics와 Dynamics 의 근본적인 차이는 어디서 발생하는가?

Q3. 시간상수를 최소화시킬 매질(matter)의 조건은 무엇일까?

2. 미시세계와 거시세계

2.1 전기장의 평균값

2.1.1 껍질정리

역제곱 법칙을 따르는 힘들은 모두 껍질정리 (shell theorem)을 만족한다. 이는 좋은 적분 연습문제이니 모두 한번쯤 시도해 볼 것. 여기서는 결과만을 언급한다.

[Shell Theorem]
a. 구각 밖에 있는 전하가 껍질에 만드는 전기장의 평균은 전하가 구의 중심에 만드는 전기장과 같다.
b. 구각 안에 있는 전하가 껍질에 만드는 전기장의 평균은 0이다.

2.1.2 구에서의 전기장 평균

그렇다면 이번에는 구각이 아닌 구 전체에 대해 살피자. 구 바깥의 전하가 만드는 전기장의 평균은 여전히 중심에 만드는 전기장과 같다. 구 내부 전하에 대해서는 우리 *은밀한 소리* 씨가 계산해 줄 것이다.

은밀한 소리 : 갑작스런 등장이지만... 일단 반지름 R인 구 속에 중심에서 r떨어진 전하 q가 만드는 전기장을 생각해 보지. 그러면 반지름이 r보다 작은 구각들에 대해 전기장의 평균값을 적분해 주면 될 테니...

$$\mathrm{E}_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{4\pi R^3/3}\int_0^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r'^2 dr' = \frac{1}{4\pi R^3/3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(-\hat{r})$$

와 같이 되고, 여러 전하가 있을 때는 이 결과를 단순히 더 해주면 되는데, qr을 중심에 대한 쌍극자 모멘트 값이라고 생각해 주면 ... $\mathrm{E}_{\mathrm{avg}} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ 이거다.

생각보다 *은밀한 소리* 씨가 계산을 잘해주는 것 같으니 앞으로 종종 써먹도록 하겠다. 이로써 2.2절, 2.3절에서 사용할 중요한 보조정리를 얻었으니 계속 이야기를 진행해보자.

2.2 클라우지우스-모소티 공식

앞에서 원자편극성과 전기감수율이라는 두가지 상수에 대해 언급하였다. 둘은 어떤 관계에 있을까?

은밀한 소리 : 그 정도야 쉽지. $p = P\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right) = \alpha E,\ P = \varepsilon_0 \chi_e E$ 이니까, 원자의 개수밀도 $N = \frac{1}{4\pi R^3/3}$ 을 이용해서 정리하면 ... $\chi_e = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0}$가 되겠군.

얼핏 생각하면 오류가 없어 보이지만 은밀한 소리씨의 계산에는 한가지 문제가 있다. 첫 번째 식의 전기장은 자신이 만들지 않는 외부, 즉 거시적 전기장만을 셈하지만 두 번째 식의 전기장에는 쌍극자 자신이 만든 미시적 전기장보다 포함되어 있기 때문이다.

은밀한 소리 : 거시적? 미시적? 다 같은 E 아니었나... 어렵군.

이런.. 새로운 계산도 *은밀한 소리* 씨에게 떠넘기려고 했는데 무리겠군. 이 계산은 여러분이 해줘야겠어.

<Solution>

2.3 쌍극자가 만드는 정확한 장

2.3.1 쌍극자가 만드는 장

전기쌍극자가 만드는 전기장과 자기쌍극자가 만드는 자기장은 잘 알려져 있다. *은밀한 소리*, 대답해 보시지.

은밀한 소리 : 귀찮은 일은 매번 나한테 떠넘긴다니까. 뭐 이정도는 써주도록 하지.

$$\mathrm{E_{dip}(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathrm{p}\cdot\hat{\mathrm{r}})\hat{\mathrm{r}} - \mathrm{p}] \quad , \ \mathrm{B_{dip}(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathrm{m}\cdot\hat{\mathrm{r}})\hat{\mathrm{r}} - \mathrm{m}]$$

(혹시 몰랐어도 괜찮다. 이제부터는 꼭 외우기로 하자!)

그러나 우리는 항상 중요한 문제를 간과해 왔다. 저 쌍극자는 전하 두 개로 만들어진 실제 쌍극자인가 아니면 점 쌍극자인가? 거시적인 경우에는 상관없지만 쌍극자와 상당히 가까운 경우 이는 중요한 문제를 야기한다. 다음 절부터 우리는 저 두 식을 정확한 식으로 교정하는 작업을 거칠 것이다.

은밀한 소리 : 2.2절에서도 그렇고, 미시 세계에서는 자기 자신이 만드는 장을 잘 따져주는게 중요한거 같군.

2.3.2 어떤 모순

말만 들어서는 왜 식을 고쳐야 할지 와닿지 않을 수 있다. 직접 2.3.1의 식을 적분해 공 전체에서의 평균 전기장을 셈해보고 2.1과 결과가 일치하는지 확인해보자.

은밀한 소리 : 원점에 위치한 z축 방향의 전기쌍극자 p에 대해 확인하면 될 것 같다. 전기장의 평균값은 당연히 z방향일 테니 아예 E_z를 셈한 뒤에 이것만 적분해 주도록 하자.

$\hat{r}\cdot\hat{z}=\cos\theta$, $\hat{\theta}\cdot\hat{z}=-\sin\theta$, $3(\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}-\hat{z}=2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta}$ 임을 이용하면

$$\mathrm{E}_z(\mathrm{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)\hat{z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}(3\cos^2\theta-1)\hat{z}$$

$$\therefore \mathrm{E}_{\mathrm{avg}}=\frac{2\pi}{4\pi R^3/3}\iint\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta-1)r^2\sin\theta drd\theta=\frac{3p}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\int_0^R\frac{dr}{r}\int_0^\pi(1-3\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta=0$$

(마지막 각도 적분이 0이다.)

이제 이게 2.1의 결과와 맞는지 확인해주면... 어? 왜 0이 나왔지..?

그렇다. 쌍극자 식은 이렇게 보면 어딘가 분명 잘못되었음을 알 수 있고, 틀린 이유는 아까 설명한 "중심에서 자기 자신이 만드는 전기장" 인 것이다.

2.3.3 쌍극자가 만드는 '진짜' 전기장

분명 평균 전기장은 분명 $\mathrm{E}_{\mathrm{avg}}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$이 나왔어야 한다. 그리고 이 값은 공을 매우 작게 잡아도 변하지 않으므로 전기장에 추가되어야 하는 항은, 원점에서 매우 가까운 점에서만 값을 가지는, 사실은 원점에서만 값을 가지는 델타함수 꼴임을 추론할 수 있다.

은밀한 소리 : 잠깐. 델타함수가 뭔지는 내가 설명하도록 하지. 정의는 $\delta^3(r)=\begin{cases}\infty & (r=0)\\ 0 & (r\neq 0)\end{cases}$ 인 굉장히 간단한 함수이다. 점전하의 전하밀도 정도로 물리적으로 이해하면 충분하다. 델타함수의 유일한 제한은 그 적분값이 1이라는 것인데 $\int_0^\infty\delta^3(r)d\tau=1$을 만족한다. (3제곱은 3차원임을 강조하기 위한 표시일 뿐)

새로운 쌍극자가 만드는 전기장 식이 $\mathrm{E}_{\mathrm{dip}}(\mathrm{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathrm{p}\cdot\hat{\mathrm{r}})\hat{\mathrm{r}}-\mathrm{p}]+\mathrm{A}\delta^3(\mathrm{r})$ 꼴이라고 하자. 그러면

$\mathrm{E}_{\mathrm{avg}}=\frac{1}{4\pi R^3/3}\int A\delta^3(r)d\tau=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, $A=-\frac{p}{3\varepsilon_0}$임을 알 수 있다.

2.3.4 쌍극자가 만드는 '진짜' 자기장

자기장에 대해서도 똑같은 논리를 적용할 수 있다. **4.1 전기장과 자기장의 대응관계에**서 소개한 방법을 이용하면 전류가 만드는 자기장을 공 전체에 대해 평균하면 다음과 같다 : $\mathrm{B}_{\mathrm{avg}}=\frac{2\mu_0 m}{4\pi R^3}$

적분해보면 같은 모순을 확인할 수 있고, 델타함수항을 덧붙여 주어야 한다.

$\mathrm{B}_{\mathrm{dip}}(\mathrm{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathrm{m}\cdot\hat{\mathrm{r}})\hat{\mathrm{r}}-\mathrm{m}]+\mathrm{B}\delta^3(\mathrm{r})$ 꼴이라고 하면

$B_{avg} = \frac{1}{4\pi R^3/3}\int B\delta^3(r)d\tau = \frac{2\mu_0 m}{4\pi R^3}$, $B = \frac{2\mu_0 m}{3}$임을 알 수 있다.

이상의 결과를 정리해보자.

[전기쌍극자가 만드는 실제 전기장]

$$\mathrm{E_{dip}}(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathrm{p}\cdot\hat{\mathrm{r}})\hat{\mathrm{r}} - \mathrm{p}] - \frac{p}{3\varepsilon_0}\delta^3(r)$$

[자기쌍극자가 만드는 실제 자기장]

$$\mathrm{B_{dip}}(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathrm{m}\cdot\hat{\mathrm{r}})\hat{\mathrm{r}} - \mathrm{m}] + \frac{2\mu_0 m}{3}\delta^3(r)$$

은밀한 소리 : 그런데 왜 이 사실은 잘 알려져 있지 않은거지?

그것은 아마 추가된게 애초 델타함수항이다 보니 변화가 생긴게 r=0인 점 하나뿐이기 때문이 아닐까. 자기가 만든 전기장이니 어쩌니 하며 일을 복잡하게 만드는 것보다, 그냥 깔끔하게 점쌍극자로 가정하고 전위 식으로부터 끌어낸 전기장 식을 알고 있는 것만으로도 충분했을지 모른다.

은밀한 소리 : 그렇다면 우리는 헛고생을 했군.

그렇지 않다! 이 과정에서 미시세계에서 주의해야 할 점에 대한 물리적 통찰을 얻지 않았는가. 어쨌든 *은밀한 소리* 씨 4쪽동안 고생 많았다. 앞으로의 장은 다시 나 혼자 진행해보도록 하겠다.

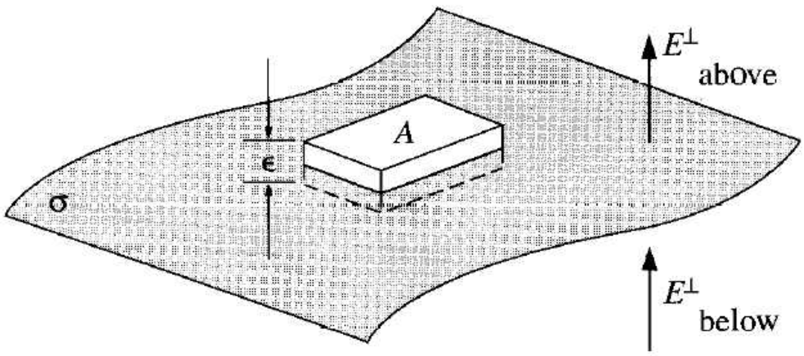
은밀한 소리 : 잘 있으라구~

3. 연속계가 받는 힘

3.1 전자기장의 불연속 : 장의 경계조건

쿨롱의 법칙에서 확인할 수 있듯 일반적인 경우 전기장은 공간에 연속적으로 분포한다. 그러나 전기장의 연속성이 깨지는 순간이 있는데 이는 **면전하**의 존재이다.

[전기장의 경계조건]

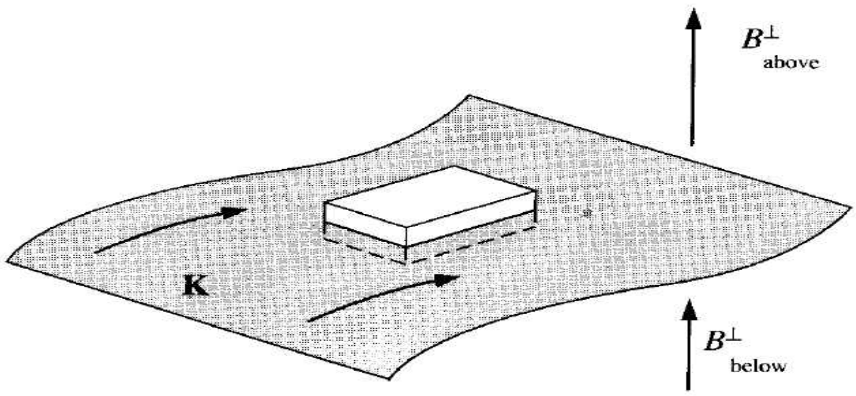


가우스 법칙 : $E^{\perp}_{위} - E^{\perp}_{아래} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, 전기장의 회전은 0 : $E^{\parallel}_{위} - E^{\parallel}_{아래} = 0$

$\therefore \boldsymbol{E}_{위} - \boldsymbol{E}_{아래} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$

자기장의 연속성은 언제 깨질까? 전기장에서 힌트를 얻을 수 있듯 **면전류**의 존재는 자기장의 연속성을 깬다. 마찬가지로 경계조건으로 확인할 수 있다.

[자기장의 경계조건]



가우스 법칙 : $B^{\perp}_{위} - B^{\perp}_{아래} = 0$, 앙페르 법칙 : $B^{\parallel}_{위} - B^{\parallel}_{아래} = \mu_0 K$

$\therefore \boldsymbol{B}_{위} - \boldsymbol{B}_{아래} = \mu_0(\boldsymbol{K} \times \hat{\boldsymbol{n}})$

그렇다면 면전하/면전류가 받는 힘을 셈할땐 어떻게 해야 할까? 힘을 주는 전기장/자기장이 위/아래 두 개가 있다!

3.2 평균

답은 면전하 위/아래의 산술평균한 장을 사용하는 것이다. 직관적으로 보아도 전하가 위 혹은 아래 둘 중 하나를 선호할 이유는 없을 테니 합리적인 결론이다. 아래에서 두가지 엄밀한 증명을 소개할 것이다.

Claim. 면전하밀도가 σ인 면전하가 있고, 면을 기준으로 위/아래 전기장이 각각 $\boldsymbol{E}_{\text{위}}$, $\boldsymbol{E}_{\text{아래}}$ 라고 한다. 이때 미소면적 요소가 받는 전기력은 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{\text{위}}+\boldsymbol{E}_{\text{아래}})\sigma da$ 이다.

3.2.1 사실 면은 두께가 있다.

우리가 3차원 공간에서 면전하에 대해 다루고 있으므로 면전하를 아주 두께가 얇은 부피전하로 생각해도 무방하다. (가끔은 이러한 쿨함이 필요할 때가 있다.)

Hint : 면전하 σ를 부피전하밀도 ρ, 두께 d인 부피전하로 봐서 두께 x인 지점의 전기장을 구해 적분하자.
<Solution>

3.2.2 전하는 자기 자신에게 힘을 주지 못한다.

면전하 자신이 만든 국소 전기장을 배제하고 $E_{\text{나머지}}$만을 셈하면 그것이 면전하가 받는 힘을 결정하는 전기장이 될 것이다. (일단 자신의 전기장을 배제하고 나면 전기장의 불연속은 사라짐을 확인하라. 왜일까?)

Hint. 문제의 간단함을 위해 $E_{\text{위}}$와 $E_{\text{아래}}$가 수직성분만 있음을 가정해도 좋다. 경계조건을 잘 활용하라.
<Solution>

※ 이 개념만 잘 이해하면 앞으로 전기장이 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$인지 $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$인지 고민할 일은 없을 것이다!

※ 위에서 전기장에 대해서만 증명했지만 같은 방법으로 하면 자기장에서도 다음이 성립한다.

claim. 면전류밀도가 $\boldsymbol{K}$인 면전류가 있고, 면을 기준으로 위/아래 자기장이 각각 $\boldsymbol{B}_{위}$, $\boldsymbol{B}_{아래}$ 라고 한다.

이때 미소면적 요소가 받는 자기력은 $\boldsymbol{K}\times\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}_{위}+\boldsymbol{B}_{아래})da$ 이다.

3.3 예제들

3.3.1 평행판 축전기

떨어진 거리가 d, 저장된 전하 Q, 단면적 A인 평행판 축전기가 있다. 한 판이 다른 판으로부터 받는 힘을 셈하라. (앞의 정리의 결과를 그대로 이용하는 것과, 3.2.2의 논리를 이용하는 두가지 방법이 있다.)

<Solution>

3.3.2 도체 구

전하 Q로 대전된 반지름 R의 도체구가 있다.

(a) 구의 북반구가 남반구로부터 받는 전기력의 크기를 셈하라.

(b) 구의 미소면적요소가 받는 압력은 얼마인가? (이를 정전기압력 p_E라 하며 $p_E=u_E$임이 알려져 있다.)

<Solution>

3.4 [참고] 맥스웰 응력 텐서(Maxwell stress tensor)

맥스웰 응력 텐서를 이용하면 아래 식처럼 어떤 부피 속의 전하가 받는 모든 힘을 면적분으로 계산할 수 있다.

$$\mathrm{F} = \oint_{S} \overleftrightarrow{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{da} \ \text{(정적일 때)}$$

다만 이 적분에 사용하는 전기장/자기장은 평균이 아닌 **외부 전기장/자기장**을 사용해야 한다. 그 이유는 식의 의미 자체가 잡은 표면의 "내부에 있는 모든 전하가 받는 힘"이다 보니 적분하는 면을 실제 전하계보다 약간 크게 잡아 모든 전하(면전하) 까지 내부에 포함되도록 해야 한다.

은밀한 소리 : 물올에 필요한 개념은 아니니 알던 개념이 아니라면 이 절은 넘어가도 무방할거야

4. 식을 똑똑하게 바라보는 법

4.1 전기장과 자기장의 대응관계

자유 전하와 자유 전류가 없는 상황에서 맥스웰 방정식을 다시 써보자.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \qquad \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P} \qquad \text{(자유전하가 없다)}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \qquad \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} \qquad \text{(자유전류가 없다)}$$

즉 $\mathbf{D} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{P} \to \mu_0 \mathbf{M}$, $\varepsilon_0 \to \mu_0$로 바꾸면 정전기학의 식을 정자기학에도 그대로 적용할 수 있다는 의미이다! (여러분은 식을 **반만** 외워도 충분하다.)

이름	정전기학	이름	정자기학
고르게 편극된 공	$E = -\frac{1}{3\varepsilon_0} P$	고르게 자화된 공	$H = -\frac{1}{3} M$, $B = \frac{2}{3}\mu_0 M$
고른 전기장 속 선형 유전체 공 속의 전기장	$E = \frac{E_0}{1+\chi_e/3}$	고른 자기장 속 선형 자성체 공 속의 자기장	$H = \frac{H_0}{1+\chi_m/3}$, $B = \frac{1+\chi_m}{1+\chi_m/3} B_0$
공 속의 전기장 평균값	$E = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$	공 속의 자기장 평균값	$H = -\frac{\mu_0 m}{4\pi\mu_0 R^3}$, $B = \frac{2\mu_0 m}{4\pi R^3}$

혹자는 전기장(E)과 자기장(B)가 대응관계가 아니고 전기장(E)과 보조자기장(H)가 대응관계라는 사실에 불편함을 느낄지도 모른다. 그러나 식을 조금만 쳐다보아도 E와 B가 대응관계**일 리가 없다**. 우선 전하가 E의 발산을 만들고(가우스 법칙), 전류가 B의 회전을 만든다(앙페르 법칙). 또한 본질적인 비대칭성의 원인을 꼽자면 현재 전자기장의 원천은 **전기전하와 전기전류 뿐**이기 때문이다. (자기홀극이 존재하지 않기에!) 진정한 E와 B의 대칭성에 대해서는 4.3절에서 다룬다.

4.2 식의 구조에서 아이디어를 얻는 법

4.2.1 회전의 응용

전자기학에 등장하는 방정식들은 그 구조가 굉장히 유사한 경우가 많다. 미분꼴로 식을 거치면 대부분 "$\nabla \cdot \mathrm{v} = \mathrm{s}$"꼴 혹은 "$\nabla \times \mathrm{v} = \mathrm{x}$"꼴로 귀결된다.

식의 구조가 같으면 같은 계산 방식을 공유한다.

Ex) Griffith Problem 7.19
안쪽 반지름 a, 바깥쪽 반지름 a+w, 높이 h, 감은 수 N 인 토로이드에 전류 I가 흐른다.
전류가 $dI/dt = k$로 일정하게 증가한다고 하자. 이때 토로이드의 축 위에서 중심과 z만큼 떨어진 점의 유도 전기장을 구하시오. (패러데이 법칙과 앙페르 법칙의 유사성을 이용하라)

<Solution>

4.2.2 발산의 응용

$\nabla \cdot \mathrm{V} = \mathrm{x}$의 꼴의 물리량의 경우 $\mathrm{V} = k\int \frac{\hat{r}}{r^2}\mathrm{x}\,d\tau'$ 꼴의 적분으로 구할 수 있음을 알고 있다. (쿨롱의 법칙과 가우스 법칙의 관계를 생각하라.) 즉 $\int \frac{\hat{r}}{r^2}d\tau'$ 꼴의 적분으로 구하는 물리량들은 가우스 법칙과 전기장에서 알아낸 보조적인 결과들을 그대로 적용시킬 수 있음을 의미한다.

Ex) Griffith Problem 6.26

전하가 밀도 ρ로 퍼진 반지름 R인 공이 만드는 전기장은 잘 알려져 있다. (가우스 법칙 대표 예제)
이를 이용하여 다음을 구하라

(a) 편극밀도가 P로 균일한 반지름 R인 공의 스칼라 전위 V $\left(\text{단 } \mathrm{V} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \frac{\hat{r}}{r^2}d\tau'\right)$

(b) 자화밀도가 M으로 균일한 반지름 R인 공의 벡터 전위 A $\left(\text{단 } \mathrm{A} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \times \int \frac{\hat{r}}{r^2}d\tau'\right)$

<Solution>

4.3 자기홀극

4.3.1 비오 사바르 법칙과 자기홀극

이 절에서는 항상 우리를 괴롭히는 문제, 자기홀극(magnetic monopole)이란 무엇인지 제대로 짚고 넘어간다. 간혹 자기홀극이 없다는 사실이 이론적으로 증명되었다고 믿고 있는 사람들이 있는데 실은 그렇지 않다. 자기장의 가우스 법칙이라고 알고 있는 $\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$이라는 식은 어디서 유도될까?

Q. 비오 사바르 법칙 $B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{Idl' \times (r - r')}{|r - r'|^3}$ 에서부터 $\nabla \cdot B = 0$ 을 유도하라.

A. 끔찍한 벡터 계산에 비해 얻을 수 있는 통찰은 많지 않으니 그리피스에게 떠넘기도록 하자.
(p249 **5.3.2 B의 발산과 회전**을 보라)

그렇다. 자기홀극이 없다는 결론은 비오 사바르 법칙에서 유도되었을 뿐이다. 그리고 이는 당연한 얘기인 것이, 비오 사바르 법칙은 자기장이 오직 **전기전류**에 의해서만 만들어진다고 주장하고 있기 때문이다! 비오 사바르 법칙이 명백한 실험식임을 생각하면, 맥스웰 방정식에 의해 자기홀극은 존재하지 않는다고 주장하는 것이 얼마나 멍청한 일인지 알 수 있다.

4.3.2 자기홀극과 맥스웰 방정식

사실 고전 전자기학에서 자기홀극이 없다는 것은 그저 미적 결함에 그칠지도 모르지만, 양자전기역학(QED)로 넘어가면 단순한 미적 결함을 넘어서는 원론적인 문제가 된다. 물론 QED는 필자도 무지한 분야일뿐더러 주제를 벗어나니 고전 전자기학의 관점에서 자기홀극의 존재를 인정하면 어떤 변화가 생기는지 알아본 후에 이 장을 마치기로 하자.

자기홀극과 구분하기 위해 전하와 전류를 각각 전기전하, 전기전류로 부르고 아래첨자 e를 써서 나타내자. 자기전하와 자기전류는 아래첨자 m을 써서 구분할 것이다. 그러면 이제 전자기장을 만드는 원천(source)는 ρ_e, J_e, ρ_m, J_m 4가지이다.

[로렌츠 힘 법칙]

$$F = q_e(E + v \times B) + q_m\left(B - \frac{1}{c^2}(v \times E)\right)$$

[맥스웰 방정식]

$$\text{(i)}\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_e, \qquad \text{(iii)}\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(ii)}\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m, \qquad \text{(iv)}\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

위의 맥스웰 방정식은 비로소 $\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{B}$, $\mathrm{B} \rightarrow -\mathrm{E}$의 대칭성을 만족한다. (비례상수 등 사사로운 문제 무시) 이렇게 보면 맥스웰 방정식이 자하의 존재를 미학적으로 시사하는 듯 하다. 그러나 자기홀극은 꽁꽁 숨어 모습을 드러내지 않는다... 정말 신은 자하를 만들지 않은 것일까?

5. 벡터 공식들을 '유도' 하는 법

앞선 "2시간에 끝내는 기초 수리물리 for 전자기학" 강의에서 세가지 미분연산자(grad, div, curl) 에 대해 배웠을 것이다. 연산자의 개수가 많아진 만큼 공식들의 수도 기하급수적으로 많아졌다. 그러나 직접 증명해 봐야지 하면, 무식한 방법으로는 공식 하나에 연습장 몇장을 할애해야 하는 불상사가 일어나게 된다. 이 장에서는 이러한 벡터 공식을 간단히 직접 유도할 수 있는 스킬을 소개한다.

5.1 두가지 멋진 기호

5.1.1 크로네터 델타(Kronecker delta)

2x2 rank Tensor인 Kronecker delta는 아래와 같이 정의된다. (2x2 단위행렬?)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases}$$

5.1.2 레비-시이타 기호(Levi-Civita symbol)

3x3 rank Tensor인 Levi-Civita symbol 은 아래와 같이 정의된다.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \quad (123/231/321) \\ -1 \ (132/213/321) \\ 0 \quad (\text{otherwise}) \end{cases}$$

직관적으로 이해가 가지 않을 수 있다. 일단 두 개라도 같은 숫자가 있는 경우는 무조건 0이며, 123의 순환꼴인 경우는 1, 321의 순환꼴인 경우는 -1 이라고 외워두자.

(위의 두가지 기호는 순전히 표기를 편하게 하기 위해 정의된 기호일 뿐이다. 암기를 꺼림칙해 하지 말라.)

5.1.3 더 멋진 항등식

크로네커 델타와 레비-시이타 기호에 대해 아래 항등식이 성립한다.

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm}$$

증명은 몇가지 케이스를 나누어 직접 확인해 보면 된다. 외우는 방법은 같은 위치의 인덱스끼리 붙여서 +(우변 첫 번째 항), 다른 위치의 인덱스끼리 붙여서 - (우변 두 번째 항) 으로 기억하면 된다.

5.2 Einstein Summation Convention

5.2.1 Dummy Index

두 번 나타나는 index 라는 뜻이다. 벡터의 성분을 다루다 보면 같은 인덱스를 다루며 summation을 해줘야 할 일이 굉장히 많다. 이럴 때 마다 $\sum$기호를 붙여주면 식의 외관상 좋지 않으니, 이제부터 두 번씩 나타나는 인덱스는 항상 sum을 의미한다고 하자. (우리는 3차원만 다루니 당연히 1~3에 대해 더한다.)

Ex) $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$, $a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = [\mathrm{AB}]_{\mathrm{ij}}$,

이러한 표기법을 Einstein Summation Convention 이라 한다.

5.2.2 벡터 연산자의 표현
위의 dummy index 표현을 이용하면 여러 벡터 연산의 정의를 한결 간단하게 표기할 수 있다.
(이 스킬은 적은 텍스트 안에 많은 의미를 담기가 너무나 편하다. 필자는 혼자 선형대수를 공부할 때도 이 표기법을 애용하는데 시험때 적응 안될까 걱정이다...)

(1) 내적(Inner Product) : $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_i u_i = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$
(2) 기울기(Gradient) : $\nabla t = \frac{\partial}{\partial x_i} t \hat{x_i}$ (이제 좌표를 x,y,z로 쓰지 않고 x_1, x_2, x_3로 쓸 것이다)
(3) 발산(Divergence) : $\nabla \cdot V = \frac{\partial}{\partial x_i} V_i$
(4) 외적(Outer Product) : $[\vec{A} \times \vec{B}]_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$
(5) 회전(Curl) : $[\nabla \times V]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} V_k$

Eienstein Summation Convention을 제대로 이해했다면 모두 자명하게 보여야 한다. (무엇이 dummy index 이고 무엇이 실제 index 일지 잘 생각해보자) 벡터 공식을 유도하는데 있어 (4), (5)를 이해하는 것이 핵심이다. 우리는 양변이 벡터인 어떤 공식을 유도할 때 이 공식들을 써 그들의 i번째 성분에 대해 분석한 후 연산자의 정의에 입각하여 결과를 추론할 것이다.

5.3 벡터 공식 유도하기

이 장에서는 벡터 화살표 표시 없이 대문자는 벡터, 소문자는 스칼라라고 하자. 또한 $\frac{\partial}{\partial x_i}$를 ∂_i라 쓰자.
일단 공식을 유도하는 방법을 말로 정리하면 대략 아래 순서를 따른다.

(1) 좌/우변 중 간단한 변을 고른 후 스칼라인지 벡터인지 판단한다.
(2) 스칼라라면 발산 혹은 내적 등일것이므로 정의에 맞춰 계산해주면 된다. (별로 어려울 것 X)
(3) 벡터라면 i번째 성분에 대한 식을 세우고 전개하자. 두 개의 levi-civita symbol 이 등장할 것이다.
(4) index를 적절히 맞춰준 뒤(levi-civita symbol은 index를 회전시켜도 동일) "멋진 항등식"을 쓰자.
(5) kronecker delta 는 결국 "대입" 의 개념임을 이해한 뒤 식을 정리한다.
(6) 벡터 연산자들의 형태를 잘 생각하며 답을 구한다.

5.3.1 외적의 교환법칙
일단 쉬운 문제를 풀며 표기법에 익숙해져 보자.

$[A \times B]_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$
$[B \times A]_i = \epsilon_{ijk} B_j A_k = -\epsilon_{ikj} A_k B_j = -[A \times B]_i$. $\therefore A \times B = -B \times A$

dummy index는 어차피 합의 의미를 지니고 있기 때문에 문자를 내 맘대로 바꿔도 된다. 단 일반 index는 바꾸면 안된다.

5.3.2 이계도함수

벡터 미적분에서는 미분 연산이 3개나 있으니 언뜻 생각하면 이계도함수는 9개가 아닐까 생각할 수 있다. 하지만 각각의 연산자의 피연산자가 벡터냐, 스칼라냐만 명확히 따져줘도 이중 무려 4개를 지우고 5가지로 후보를 압축할 수 있다.

$\nabla \cdot (\nabla t)$ / $\nabla \times (\nabla t)$ / $\nabla (\nabla \cdot V)$ / $\nabla \cdot (\nabla \times V)$ / $\nabla \times (\nabla \times V)$

이 중 첫 번째는 라플라스 연산(Laplacian)의 정의이며 $\nabla^2 t$ 로 쓸 수 있다.
결과를 모두 말하자면 두 번째, 네 번째는 0이며, 다섯 번째는 첫 번째와 세 번째의 혼합으로 정의된다.

즉 정말 의미가 있는 이계도함수는 단 **두 개(Laplacian, 발산의 기울기)** 뿐이다.
여기서는 기울기의 회전은 0이라는 사실을 증명하고 다섯 번째 '회전의 회전'의 간단한 표현에 대해 알아본다. 회전의 발산이 0이라는 것도 꼭 직접 증명해보기 바란다.

(1) 기울기의 회전은 0 : $\nabla \times (\nabla t) = 0$

(2) 회전의 회전? : $\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla (\nabla \cdot V) - \nabla^2 V$

5.3.3 곱셈 규칙

벡터 미적분의 곱셈 규칙은 총 6가지가 있다.

(1) $\nabla (fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$
(2) $\nabla (A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla) B + (B \cdot \nabla) A$
(3) $\nabla (fA) = (\nabla f) \cdot A + f(\nabla \cdot A)$
(4) $\nabla \cdot (A \times B) = (\nabla \times A) \cdot B - A \cdot (\nabla \times B)$
(5) $\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f(\nabla \times A)$
(6) $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla) A - (A \cdot \nabla) B + A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A)$

이중 제일 직관에 어긋나는건 (2), (6)인 듯 싶다. 여기서는 일단 (6)만 증명한다. (2)도 꼭 집에서 풀어보기 바란다. 특히 이 장은 보는 것만으로 충분하지 않으니 직접 강의자의 필기를 받아적으며 몸으로 익혀보도록 하자. (여러분은 이제 공식을 까먹어도 당황하지 않게 된다..!)

(6) $\nabla\times(A\times B)=(B\cdot\nabla)A-(A\cdot\nabla)B+A(\nabla\cdot B)-B(\nabla\cdot A)$

6. 마치며

5장을 끝으로 2시간 강의로 계획된 이 강의는 마쳐야 할 것 같다. 혹 강의자의 부족함으로 제대로 다루지 못하고 패스한 토픽이 있다면 미리 사과의 말씀을 드린다. 최대한 많은 이야기를 담아내고자 노력했지만, 시간과 지면 관계상 다루지 못한 토픽이 너무나 많아 아쉬움이 남는다. 오랫동안 고민했던 변압기와 자기회로에 대한 이야기도 하나도 하지 못했고, 기말고사 기간 의문을 떠올리고 방학이 되어서야 해결한 고리모형과 반자성체에 관한 이야기도 마찬가지다. 그 외에도 미시전기장에 대한 통계적 해석, 점전하와 연속계의 에너지, 전기역학의 시간차에 대한 조금더 깊은 이야기들, 회로이론의 몇가지 치트키, 자기 스칼라 전위와 자화밀도, 앙페르 모형과 길버트 모형, 벡터와 텐서에 대한 조금 더 일반적인 이야기들... 나열한 것만 해도 2시간을 채우고도 남을 것이다.

이렇듯 전자기학은, 아니 물리학은 항상 즐거운 고민할 거리가 많고, 이 고민들에 파고들어 스스로 답을 얻을 때마다 느끼는 배움의 희열은 말로 표현할 데가 없으며, 그 과정에서 여러분의 실력은 눈에 띄게 성장해 있을 것이다. 먼저 물리를 공부하며 행했던 이러한 고민들을 동아리를 통해서나마 공유하고자 기획한 강의가 바로 이 『오개념 때려잡기』 시리즈이다. 2022년에는 역학, 전자기학, 상대론 분야에서 세가지 강의를 진행할 예정이고, 필자는 이중 두 번째를 맡았다. 올해가 지나도, 훗날 이 시리즈가 PNS의 상징처럼 남게 되는 날이 오기를 소망해본다.

마지막으로 강조하자면, 물리를 공부할 때는 항상 질문이 함께해야 한다. 그 과정을 거쳐야 개념을 진정으로 이해할 수 있으며 비로소 물리의 아름다움을 느낄 수 있다. 여러분도 항상 호기심과 끈질김을 가지고 물리를 공부하길 바라며, 이만 줄이도록 하겠다.

『전자기학 오개념 때려잡기』 마침.

MEMO