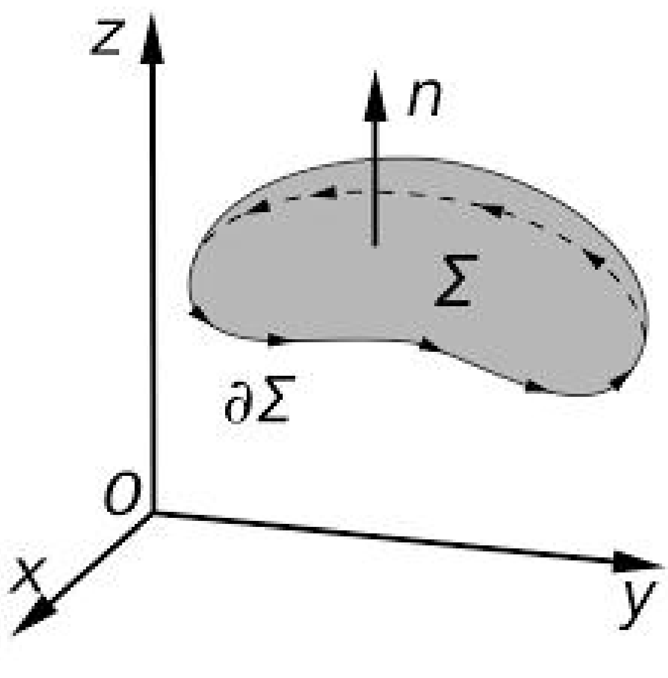
2시간에 끝내는 기초 수리물리
for 전자기학

2022.08.24

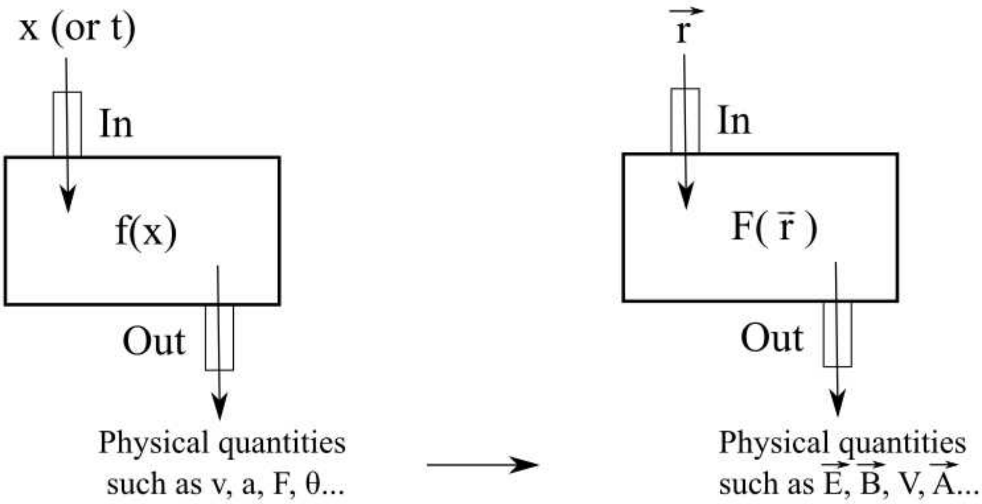


차례

I. 다변수 미적분학

0. 시작하기 전에

전자기학에서는, 우리가 평소에 다루던 독립변수 하나(x 또는 t)에 물리량 하나가 대응되는 함수에서 벗어나서 공간좌표의 한 점에 벡터나 스칼라 하나가 대응되는 다변수 함수를 다루게 된다. 다변수 미적분은 주로 공간의 한 점에 벡터 혹은 스칼라 하나가 대응되는 '장' 형태의 함수를 해석할 때 사용된다. 전기장이나 자기장 혹은 전기 퍼텐셜처럼.



2시간에 끝내는 수리물리 for 역학' 에서도 배웠듯이, 정의역 공간이 더 이상 R^1 이 아니게 되면 일변수 미적분에서 사용했던 다양한 직관 스킬들이 무너져 내리게 된다. 공간좌표에 수 하나가 대응되는 함수는 그래프를 그릴 수 없는데 기울기는 무엇이며, 밑넓이는 또 무엇이란 말인가. 따라서, 다변수 미적분을 더 잘 이해하기 위해서는 미분과 적분이 본질적으로 어떤 과정인지를 이해하는 것이 필요하다. 미적분이 본질적으로 무엇인지는 이 정도로 정리할 수 있을 것이다

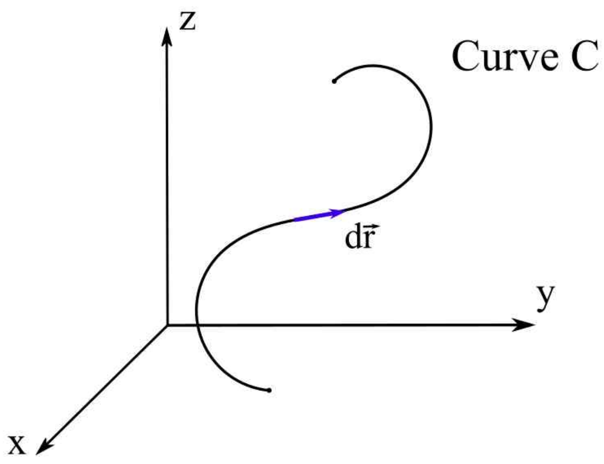
미분: 어떤 함수의 ***국소적인 영역***을 ***선형적으로 근사***하여 해석하는 것.
적분: 어떤 영역을 무한히 많은 작은 영역으로 분할한 후, 각 ***국소 영역에 대응하는 특정 값을 모두 더하여*** 국소적이지 않은 값을 구해내는 것.

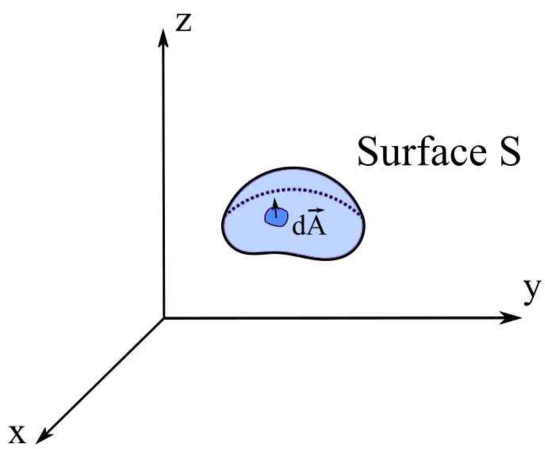
이걸 기억하고 있으면, 앞으로 나올 내용들을 더 직관적으로 이해할 수 있을 것이다.

1. 선적분과 면적분

1.1 정의와 표기법

Definition. 적분구간이 공간 위 임의의 곡선인 적분을 선적분. 임의 곡면인 적분을 면적분이라고 한다. '2시간에 끝내는 기초 수리물리 for 역학'에서 배웠던 적분, 이중적분의 일반화라고 볼 수 있다.





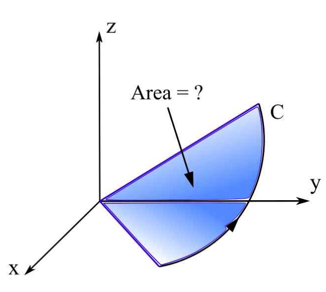
$$= \int_C f(d\vec{r}) \qquad\qquad = \int_S f(d\vec{A})$$

적분 기호의 아래쪽에 적분구간의 이름(곡선 C, 곡면 S 등)을 적어 주고, 그 옆에 미소 구간 $d\vec{r}$ 또는 $d\vec{A}$에 의존하는 피적분함수를 적어서 표기한다. 여기서는 피적분함수를 $f(d\vec{r})$와 $f(d\vec{A})$로 일반적으로 표시했지만, 주로 주어진 벡터장(공간상의 한 점을 매개변수, 벡터 하나를 함숫값으로 가지는 함수) $\vec{F}(\vec{r})$에 대해 $f(d\vec{r}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 혹은 $f(d\vec{r}) = \vec{F} \times d\vec{r}$ 형태를 만나게 될 것이다.

예제 1-1. 곡선 C가 곡선 C_1와 C_1의 끝점을 시작점으로 하는 다른 곡선 C_2의 합집합일 때, $\int_C f(d\vec{r}) = \int_{C_1} f(d\vec{r}) + \int_{C_2} f(d\vec{r})$ 임을 설명해 보자. 면적분에서도 마찬가지가 성립한다.

예제 1-2. 3차원 공간에서 입자가 궤적 C를 따라 움직인다. 이 입자가 움직이면서 원점을 중심으로 '쓸고 지나간' 면적을 선적분으로 표현하여라.

예제 1-3. 공간에 밀도 ρ의 유체가 $v\hat{x}$의 속도로 흐르고 있다 (모든 유체 입자가 $v\hat{x}$의 속력으로 운동한다). 이때, 시간당 곡면 S를 통과하는 유체의 질량을 면적분으로 표현하여라.

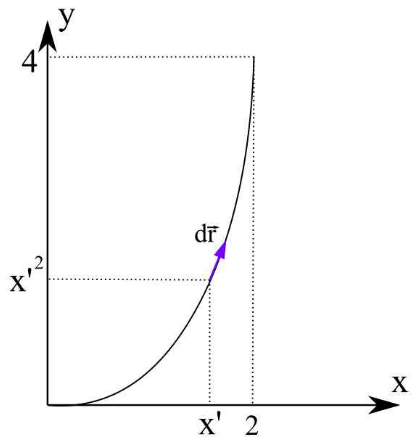


예제 1-2

1.2 계산법

적분구간이 직선 ($\int f(x)dx$) 혹은 직사각형 ($\int f(x,y)dxdy$) 일 때 작은 선분 혹은 직사각형 조각으로 적분구간을 쪼개어 계산했던 것을 생각하자. 마찬가지로, 어떻게 생겨먹은 적분구간이든 임의로 잡은 일반화 좌표를 기준으로 미소 영역으로 쪼갠 후, 각 위치에서 $d\vec{r}$ 또는 $d\vec{A}$를 일반화 좌표의 함수로 구하면 적분을 계산할 수 있다. 예를 들어, $0 < x < 2$ 범위에서 $y = x^2$ 곡선을 적분구간으로 가지는 선적분 $\int_C (\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot d\vec{r}$을 생각해 보자.

sol 1) x좌표를 기준으로 쪼개기

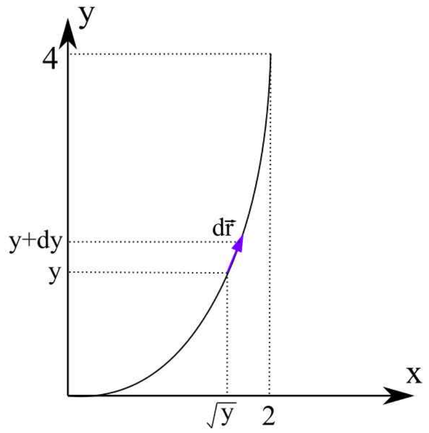


(x, x^2) 지점에서 $d\vec{r} = (\hat{x} + 2x\hat{y})dx$ 이므로

$$\int_C (\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (1 + 4x)dx = 10$$

으로 계산된다.

sol 2) y좌표를 기준으로 쪼개기



$(y, \sqrt{y})$ 지점에서 $d\vec{r} = (\frac{1}{2\sqrt{y}}\hat{x} + \hat{y})dy$ 이므로

$$\int_C (\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot d\vec{r} = \int_0^4 (\frac{1}{2\sqrt{y}} + 2)dy = 10$$

으로 계산된다.

면적분도 똑같은 방법으로 계산하되, 일반화 좌표를 1개가 아니라 2개를 잡는다는 점, $d\vec{A}$를 계산할 때 벡터의 외적을 이용해 미소 면적의 면적 벡터를 구해준다는 점만 유의하면 된다.
일반적인 경우를 다루긴 했지만, 선적분과 면적분을 명시적으로 계산하게 될 일은 별로 없다.

선적분의 경우 거의 직선이나 원호, 면적분의 경우는 평면이나 구면을 다룰 것이다. 직선과 평면은 평소에 적분하듯이 해 주면 되고, 원호는 각도를 기준으로, 구면은 여위도와 경도를 기준으로 미소 영역을 나눠 주면 된다.

예제 1-4. 원통 좌표계에서 $\vec{F} = F_0(\sin\theta\,\hat{\theta})$로 주어지는 가상의 역장이 있다고 하자. 입자가 반지름 r인 원 궤도를 따라 한 바퀴 돌 때마다 외력이 입자에 가하는 일의 양을 구하시오.

예제 1-5. 면적분을 사용하여 반지름 r 짜리 구의 표면적이 $4\pi r^2$임을 증명하시오. 대칭성을 무시하고 θ와 ϕ를 모두 사용하여 계산을 한 번 해 보고, ϕ 대칭성을 고려하여 θ 좌표 하나만을 기준으로 쪼개는 방법도 사용해보자. 기전에서 만날 문제들은 거의 다 ϕ 대칭성이 존재하므로, 두 번째 방법을 많이 사용하게 될 것이다.

예제 1-6. 반지름 r의 도체구 표면의 전기장이 $\vec{E} = E_0\cos^2\theta$ 로 주어진다. 가우스 법칙을 사용하여 도체구에 저장된 전하량을 계산하시오.

2. 미분의 일반화

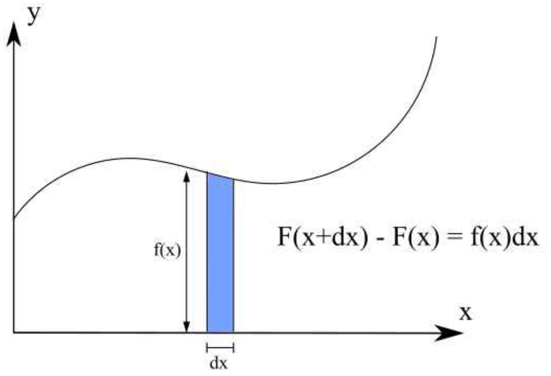
2,1 일반화된 미분 연산자

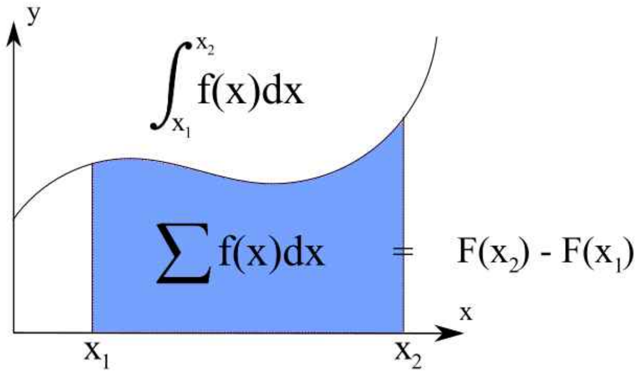
다변수함수의 미분을 배우기 전에, 일변수함수의 미적분으로 돌아가 미분이 가지는 의미가 무엇이었는지를 돌이켜 보자. 일변수함수 적분에서 구하고자 하는 것은 $f(x)$ 그래프의 밑넓이이다. 밑넓이를 어떻게 구할까? 앞뒤 과정 생략하고 간단하게 말하면, 그래프의 높이 변화를 무시할 수 있을 정도로 작은 구간으로 잘라서 해당 구간의 그래프 밑넓이를 직사각형으로 근사한 후, 싸그리 더하는 거다.

문제는, 싸그리 더한 합을 어떻게 간단하게 계산하느냐는 것이다. 무한합은 해석적으로 구하는 것이 힘들다. 당장 간단해 보이는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$도 closed form으로 나타내는 방법을 아직 아무도 찾아내지 못했다.

답은 텔레스코핑이다. x_1과 x_2 사이의 $f(x)$ 그래프의 밑넓이는 목표 구간을 dx 길이의 선분으로 잘게 자르면 $\sum_{x=x_1}^{x_2} f(x)dx$ 가 된다 (괴상한 표기법을 썼지만 알아서 잘 알아들으리라 믿는다). $f(x)dx = F(x+dx) - F(x)$을 만족하는 함수 $F(x)$를 찾으면, 위의 무한합은 $F(x_2) - F(x_1)$로 간단하게 표현된다. 양변을 dx로 나누고, dx를 0으로 보내는 극한을 취하면

$f(x) = \lim_{dx \to 0}\frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$을 얻는다. 어디선가 굉장히 많이 본 식이다.





결국 우리는 여기에서 미적분의 기본정리 $\int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$ 를 얻을 수 있다.

주목할 점은, 여기에서 기울기나 변화율에 대한 논의는 단 한 번도 이루어진 적이 없다는 것이다. 우리는 거꾸로 적분값을 구하는 방법에서 시작하여 미분 공식을 유도해 내었다.

여기서 유도된 미분식은 어떤 함수의 기울기나 변화율 관점에서 해석한 것이 아니다. 단지, 적분에 필요한 무한합을 계산하기 쉽도록 국소적인 영역에서 설계된 연산자일 뿐이다. (이쯤에서 0번으로 돌아가 미분과 적분의 일반적인 의미를 다시 보고 오자.)

이제 면적분과 선적분에 대응하는 새로운 미분연산자를 만날 모든 준비가 끝났다.

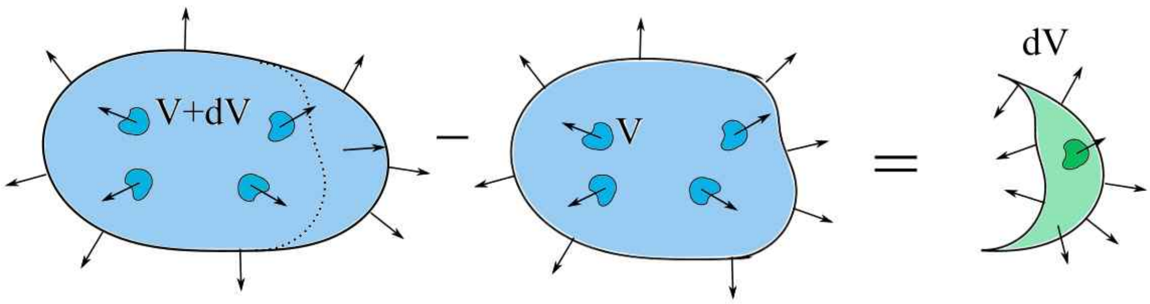
위의 일변수 적분 $\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$ 을 3차원 공간에서의 일반적인 적분

$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$, $\int_S \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$, $\int_V f(\vec{r})\,dV$ 으로 확장하자. 각각 곡선 C를 적분구간으로 가지는 선적분, 곡면 S를 적분구간으로 가지는 면적분, 영역 V를 적분구간으로 가지는 부피적분이다.

No. 1) 폐면적분에 대응하는 미분 연산자. $\int_V f(\vec{r})dV$ 에서 출발한다.

$\int_V f(\vec{r})dV$ 에서 구하는 것은 V영역 내의 모든 $f(\vec{r})dV$의 합이다. 일변수 적분에서 했던 것과 마찬가지로, $f(\vec{r})dV$ 를 임의의 닫힌 영역 V를 정의역으로 가지는 함수 $U(V)$에 대해 $f(\vec{r})dV = U(V+dV) - U(V)$로 표현해 주자. 여기서 V는 어떤 영역이든 상관없다. 그러면 마찬가지로 텔레스코핑에 의해 $\int_V f(\vec{r})dV = U(V) - U(0)$ 이 성립한다.

어떤 V를 고르든 상관없이 위 식이 성립하게 하려면 $U(V)$는 어떤 함수여야 할까? 위 식을 잘 관찰해 보면, 마치 $V+dV$ 영역에서 V 영역이 빠져서 최종적으로 dV에만 의존하는 함수가 되는 것 같은 꼴이다. 여기서 *예제 1-1*이 생각난다면 당신은 자료를 열심히 읽은 것이다. 면적분이다.



$U(V)$를 어떤 벡터함수 $\vec{F}(\vec{r})$에 대해 $\oint_{S_V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$ (S_V 는 V 영역의 경계면) 로 표현하면,

$U(V+dV) - U(V) = \oint_{S_{dV}} \vec{F} \cdot d\vec{A}$, $f(\vec{r}) = \dfrac{\oint_{S_{dV}} \vec{F} \cdot d\vec{A}}{dV}$가 성립하게 된다. $f(\vec{r})$을 $\vec{F}$로 표현한 이 식은 일변수 미적분에서 $f(x) = \lim_{dx \to 0} \dfrac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$에 대응된다.

마지막으로 $f(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{F}$으로 표기해 주면 (저 세모 모양 연산자는 델 혹은 나블라라고 읽는다)

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\oint_{S_{dV}} \vec{F} \cdot d\vec{A}}{dV} \qquad\qquad \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \oint_{S_V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

위 두 개의 식을 얻는다. $\nabla \cdot \vec{F}$은 ***$\vec{F}$의 발산***이라고 하며, 폐면적분에 대응하는 미분기호이다. 왼쪽 식은 발산의 정의이고, 오른쪽 식은 ***발산 정리***라고 부른다. 발산 정리는 일변수 미적분에서 미적분의 기본정리에 대응된다. 결국, 발산 정리는 영역 안의 국소 발산 성분들이 합쳐져 영역의 경계에서 물리적 국소적이지 않은 발산 성분을 만들어내는 것이라고 볼 수 있다.

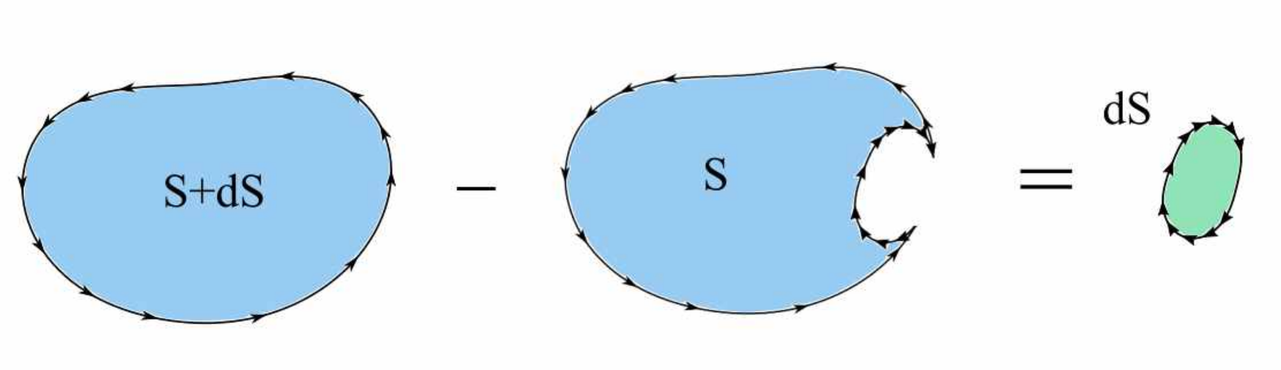
No. 2) 폐선적분에 대응하는 미분 연산자. $\int_S \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$에서 출발한다.

위의 발산 계산에서 했던 것과 굉장히 유사한 스텝을 따라간다. 다른 점은 $\vec{f}(\vec{r})$이 벡터함수라는 점 정도. U를 공간 상 임의 영역을 정의역으로 가지는 함수로 잡는 대신에, 임의 곡면 S를 정의역으로 가지는 함수로 바꾸면, 똑같은 과정을 거쳐 미분 연산자를 유도할 수 있다.

$$\vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = U(S+dS) - U(S)$$

$$\int_S \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = U(S) - U(0)$$

$U(S) = \oint_{C_S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ 로 표현하면 (C_S는 곡면 S의 경계)



$$\oint_{dC} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

$\vec{f} = \nabla \times \vec{F}$ 로 표기하면

$$\nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{dC} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{C_S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$\nabla \times \vec{F}$ 은 ***$\vec{F}$의 회전***이라고 하며, 폐선적분에 대응하는 미분 연산자이다.
왼쪽 식은 회전의 정의이고, 오른쪽 식은 ***스토크스 정리***라고 한다. 마찬가지로 스토크스 정리도 미적분의 기본정리에 대응된다. 스토크스 정리도, 곡면 내부의 국소적인 회전 성분들이 모여서 곡면의 경계에서 국소적이지 않은 회전 성분을 만들어내는 것이라고 생각할 수 있다.

No. 3) 선적분에 대응하는 미분연산자. $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$에서 출발한다.

마찬가지로 미소 변화량에 대하여 $\vec{f} \cdot d\vec{s} = V(\vec{s}+d\vec{s}) - V(\vec{s})$로 식을 적는다. 위치벡터를 더하는 연산은 공간 상에 이미 정의되어 있기에, 이번에는 앞 2개처럼 복잡한 생각을 하지 않고 V를 위치의 함수로 적을 수 있다. 같은 방법으로 식을 전개하면

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})$$

$\vec{f} = \nabla V$ 로 표기하면

$$\nabla V \cdot d\vec{s} = V(\vec{s} + d\vec{s}) - V(\vec{s}) \quad \int_C \nabla V \cdot d\vec{s} = V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})$$

∇V는 ***V의 그래디언트***라고 하며, 선적분에 대응되는 미분 연산자이다.
왼쪽 식은 그래디언트의 정의이고, 오른쪽 식은 ***기울기 정리***라고 한다. 기울기 정리 역시 국소적인 변화량이 모여 시작점과 끝점 사이의 국소적이지 않은 변화를 만드는 것이라고 볼 수 있다.

이 장에서 유도한 일반화된 미분 연산들을 정리하면 다음과 같다.

	미분꼴	적분꼴
일변수 미적분	$F(x+dx) - F(x) = f(x)dx$	$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx$
그래디언트 (선적분)	$V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$	$V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i}) = \int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla V \cdot d\vec{r}$
회전 (폐선적분)	$U(C+dC) - U(C) = \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$	$U(C) - U(0) = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$
발산 (폐면적분)	$U(V+dV) - U(V) = f(\vec{r})dV$	$U(V) - U(0) = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$

예제 1-7.

(a) 가우스 법칙 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$를 미분꼴로 나타내고, 갖는 물리적 의미를 쓰시오. 전기장의 발산은 어디에서 일어나는가? (수학적으로 엄밀하게 풀지 말고 대충 풀자)

(b) 패러데이 법칙 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$를 미분꼴로 나타내고, 갖는 물리적 의미를 쓰시오. 전기장의 회전은 어디에서 일어나는가? (수학적으로 엄밀하게 풀지 말고 대충 풀자)

예제 1-8.

(a) 모든 $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ 인 함수 $\vec{F}$는 어떤 스칼라 함수의 그래디언트로 표현됨을 설명하라.

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ 임을 설명하여라.

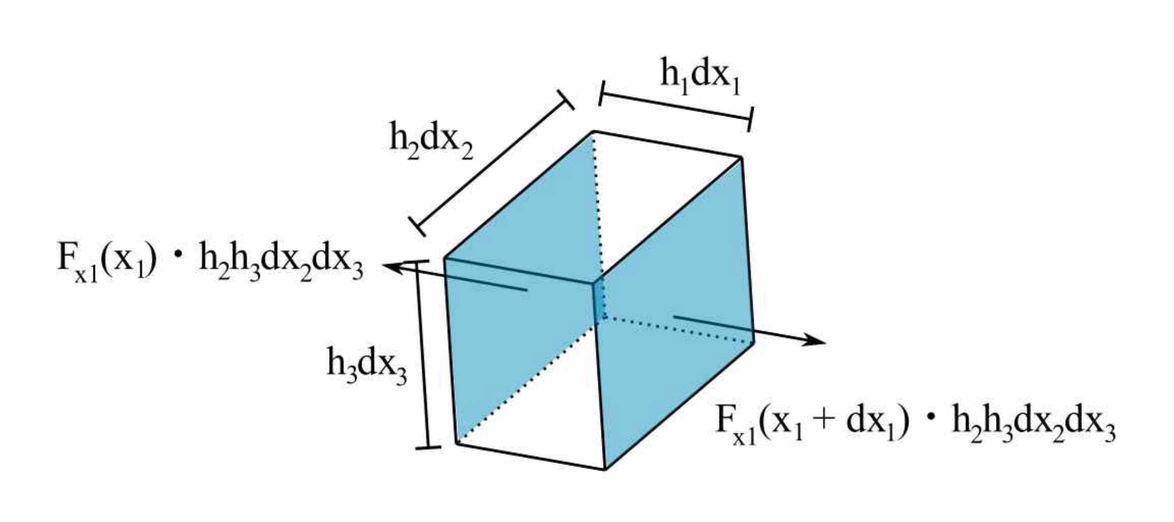
사실, 앞에 자세히 적어 놓은 발산, 회전, 그래디언트의 수학적인 유도나 정의는 전자기학을 하는 데 별로 중요하지 않다. 위 수식들을 기억할 필요는 없지만, 각 미분 연산자가 어떤 수학적 의미를 가지는지를 이해하는 것은 전자기학의 직관적 이해에 굉장히 많은 도움을 준다. 필자도 이 델 연산자를 잘 이해하지 못했을 때 전자기학이 헷갈리고 어려웠지만, 그 근본을 이해한 후에 전자기학을 좀 더 잘 이해하게 된 경험이 있기에 설명에 사족을 좀 덧붙여 보았다.

2.2. 발산, 회전, 그래디언트의 정의와 계산법

앞 절에서 발산, 회전, 그래디언트의 수학적인 정의를 논하였다. 이제 일반적인 좌표계에서 이들을 계산해 보자. 좌표계의 독립변수 x_i에 대해 거리 성분이 $d\vec{s} = \sum_{i=1}^{3} h_i dx_i \hat{x_i}$ 인 일반화 좌표를 생각하자. 예를 들어, 구면 좌표계에서의 거리 성분은 $d\vec{s} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$이므로 $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$로 쓸 수 있다.

No. 11 발산

앞에서 발산을 $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\oint_{S_{dV}} \vec{F} \cdot d\vec{A}}{dV}$ 로 정의했다. dV를 미소 직육면체로 잡아서 계산하자.



$dV = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$ 이다. 이 영역은 충분히 좁아서, 영역 내에서 $\vec{F}$는 선형적으로 변화한다고 가정한다. 즉 $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial x}, \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial y}, \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial z}$ 모두 dV 내부에서는 상수벡터이다.

x_1 방향을 향하는 두 면에 대하여 면적분을 계산하면

$$dx_2 dx_3 (h_2 h_3 \vec{F}(x_1 + dx_1) - h_2 h_3 \vec{F}(x_1)) = dx_2 dx_3 \frac{\partial (h_2 h_3 \vec{F})}{\partial x_1} dx_1$$

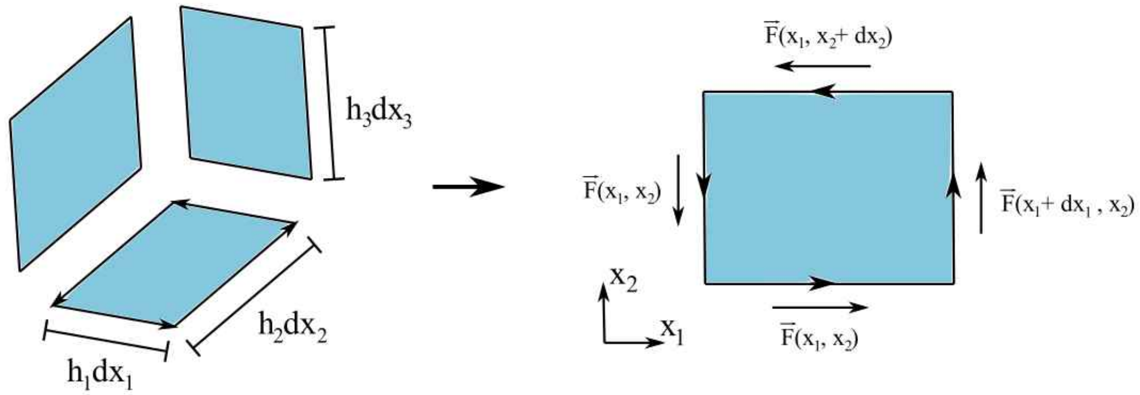
h_2, h_3이 x_1의 함수일 수도 있으므로 함부로 밖으로 빼면 안 된다.
다른 두 방향에 대해서도 똑같은 방법으로 계산해 주면

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\oint_{S_{dV}} \vec{F} \cdot d\vec{A}}{dV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \overrightarrow{F_{x_1}}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 \overrightarrow{F_{x_2}}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \overrightarrow{F_{x_3}}) \right)$$

을 얻어낼 수 있다. 위 식은 모든 직교 좌표계에서 성립하며, 발산의 계산식이다. 위 식에서 볼 수 있듯이, 발산은 한 점에서의 국소적인 면적분의 값으로 해석할 수 있다. 앞에서 다뤘었던 발산의 미분 연산자로서의 의미를 되새기면, 어떤 유한한 영역에서의 면적분, 즉 어떤 폐곡면 안에서 흘러나오는 시간당 '물' 의 양은 그 영역 안의 국소적인 '수도꼭지'의 개수를 모두 합한 것과 같다는 해석을 할 수 있다.

No. 21 회전

앞에서 회전을 $\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A}=\oint_{dC}\vec{F}\cdot d\vec{s}$ 로 정의했었다. dC를 특정 방향을 가진 미소 직사각형으로 잡아서 $\nabla\times\vec{F}$의 특정 방향 성분을 결정하자.



x_3 방향 면적벡터를 가지는 미소 직사각형을 생각하자. 넓이 $dA=h_1h_2dx_1dx_2$ 이다. 영역 내에서 $\vec{F}$는 선형적으로 변화한다고 가정한다. 즉 $\frac{\partial\vec{F}}{\partial x},\frac{\partial\vec{F}}{\partial y},\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}$ 모두 dA 내부에서는 상수벡터이다. 회전의 정의 공식을 참고하면, 이 미소 직사각형의 경계를 따라 선적분한 값 / dA = $\nabla\times\vec{F}$의 x_3 성분이 된다.

이 값을 계산하면

$$\frac{\oint_{dC}\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dA}=(dx_2\frac{\partial(h_2\overrightarrow{F_{x_2}})}{\partial x_1}dx_1-dx_1\frac{\partial(h_1\overrightarrow{F_{x_1}})}{\partial x_2}dx_2)/dA=\frac{1}{h_1h_2}(\frac{\partial(h_2\overrightarrow{F_{x_2}})}{\partial x_1}-\frac{\partial(h_1\overrightarrow{F_{x_1}})}{\partial x_2})$$

이 식을 행렬식으로 간단하게 정리하면 $\frac{h_3}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ h_1\overrightarrow{F_{x_1}} & h_2\overrightarrow{F_{x_2}}\end{vmatrix}$ 가 되므로, 결국 완전한 식은

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\widehat{x_1} & h_2\widehat{x_2} & h_3\widehat{x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ h_1\overrightarrow{F_{x_1}} & h_2\overrightarrow{F_{x_2}} & h_3\overrightarrow{F_{x_3}}\end{vmatrix}$$

가 된다. 위 식은 모든 직교 좌표계에서 성립하며, 회전의 계산식이다. 회전의 정의에서도 나와 있듯이, 회전과 국소적인 평면의 면적벡터를 내적한 값은 국소적인 선적분의 값으로 해석할 수 있다. 앞에서 다뤘었던 회전의 미분 연산자로서의 의미를 되새기면, 어떤 유한한 곡면의 경계에서의 선적분, 즉 어떤 폐곡선 안에서 벡터가 돌아가는(?) 정도는 그 영역 안의 국소적인 '회오리'를 모두 합한 것과 같다는 해석을 할 수 있다.

No. 31 그래디언트

앞의 두 개보다 훨씬 간단하다. 발산의 정의식에서

$$\nabla V \bullet d\vec{s} = \nabla V \bullet (h_1 dx_1 \widehat{x_1} + h_2 dx_2 \widehat{x_2} + h_3 dx_3 \widehat{x_3})$$
$$= V(\vec{s} + d\vec{s}) - V(\vec{s}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 \widehat{x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 \widehat{x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_3} dx_3 \widehat{x_3}$$

을 얻을 수 있고, ∇V를 성분별로 계산해 주면

$$\boxed{\nabla V = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\widehat{x_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\widehat{x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\widehat{x_3}}$$

를 얻을 수 있다. 위 식은 모든 직교 좌표계에서 성립하며, 그래디언트의 계산식이다. 그래디언트와 미소 변위벡터를 내적한 값은 벡터의 시점과 종점 사이의 함숫값 차이이며, 어떤 곡선에서 시점과 종점의 함숫값 차이는 그 곡선을 잘게 쪼갠 미소 변위 벡터와 각 지점의 그래디언트를 내적한 국소적인 값을 모두 더한 것이라고 해석할 수 있다. 기울기에 대응되는 연산이기도 하다.

정리하면,

발산: $$\nabla \bullet \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 \overrightarrow{F_{x_1}}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 \overrightarrow{F_{x_2}}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 \overrightarrow{F_{x_3}})\right)$$

회전: $$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\widehat{x_1} & h_2\widehat{x_2} & h_3\widehat{x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1\overrightarrow{F_{x_1}} & h_2\overrightarrow{F_{x_2}} & h_3\overrightarrow{F_{x_3}} \end{vmatrix}$$

그래디언트: $$\nabla V = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\widehat{x_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\widehat{x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\widehat{x_3}$$

이론 전개를 하거나 문제를 풀 때 명시적으로 주어진 함수에 대해 위 값을 계산할 일은 선적분이나 면적분에 비해 그렇게 많지는 않을 것이다. 하지만 위치벡터를 정의역으로 가지는 함수의 편미분방정식을 풀 때는 필수적이니 기억해 놓는 것이 좋을 것이다. 그렇다고 한 자 한 자 외우라는 얘기는 아니고, 문제 풀 때 직육면체랑 직사각형 잡아서 몇 번 직접 계산하다 보면 저절로 머리에 새겨질 것이다.

예제 1-9.

(a) $V = -E_0(r - \frac{R^3}{r^2})\cos\theta$ 일 때, ∇V를 구하시오.

(b) $\vec{F} = A\frac{e^{-br}}{r}\hat{r}$ 일 때, $\nabla \cdot \vec{F}$를 구하시오.

(c) $\vec{F} = A\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{\phi}$ 일 때, $\nabla \times \vec{F}$를 구하시오,

예제 1-10. 구면 좌표계에서 $\nabla \cdot (\frac{1}{r^2})\hat{r}$ 을 구하고, 원점을 포함하는 아무 영역이나 잡아서 $\oint_S (\frac{1}{r^2})\hat{r} \cdot d\vec{A}$를 계산해 보자. 원통 좌표계에서 $\nabla \times (\frac{1}{s})\hat{\phi}$ 를 구하고, $s=0$ 위 최소 한 점을 포함하는 아무 곡면이나 잡아서 $\oint_C (\frac{1}{s})\hat{\phi} \cdot d\vec{r}$ 을 계산해 보자. 어딘가 이상하지 않은가?

이 모순점을 해결하기 위해 $\delta(x) = \delta_{0x}, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ 인 함수를 잡고, 이 함수를 사용하여 위의 미분을 다시 나타내어 보자. 이 함수는 델타 함수라고 부르며, 점전하의 전하밀도처럼 국소 영역에서 발산하는 듯 보이지만 더 큰 구간에서는 잘 행동하는 대상을 분석할 때 쓰인다.

3. 유용한 공식들

일변수 미적분에서 성립했던 곱미분 규칙이 미분 연산자의 개수가 많아진 만큼 정말 다양한 모습으로 나타난다.

$\nabla(\psi\phi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$	$\int_C (\psi\nabla\phi)\cdot d\vec{r} = \Delta(\psi\phi) - \int_C (\phi\nabla\psi)\cdot d\vec{r}$
$\nabla\cdot(\phi\vec{F}) = \vec{F}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{F}$	$\int_V \vec{F}\cdot\nabla\phi\, dV = \oint_S \phi\vec{F}\cdot d\vec{A} - \int_V \phi\nabla\cdot\vec{F} dV$
$\nabla\times(\phi\vec{F}) = \psi\nabla\times\vec{F} + (\nabla\psi)\times\vec{F}$	$\int_S \psi\nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A} = \oint_C \phi\vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_S (\nabla\psi)\times\vec{F}\cdot d\vec{A}$
$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G} - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$	$\int_V (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G} dV = \oint_S \vec{F}\times\vec{G}\cdot d\vec{A} + \int_V \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G}) dV$

왼쪽 식들은 일반화된 곱미분 규칙, 오른쪽인 곱미분규칙을 이용한 부분적분이다. 어떤 함수와 다른 함수의 미분을 곱한 값을 적분할 일이 이론 전개할 때 꽤 많기 때문에 부분적분은 꽤 자주 쓰이는 스킬이다. 오른쪽 식을 외울 필요는 없고, 왼쪽 식에서 항 하나를 이항하고 적분하면 부분적분 식을 바로 유도할 수 있다.

두 벡터의 외적의 회전, 두 벡터의 내적의 그래디언트도 미분규칙이 있지만 상당히 복잡하여 부분적분에 활용되지 않기 때문에 여기 넣지는 않았다. (내적의 그래디언트는 Maxwell Stress Tensor 유도할 때 쓰이긴 한다)

$\nabla\times(\nabla\psi) = 0$

$\nabla\cdot(\nabla\psi) = \nabla^2\psi$

$\nabla(\nabla\cdot\vec{F}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{F}) + \nabla^2\vec{F}$

$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$

2계 미분 공식도 다양해진다. 위에서 두 번째 식의 우변에 있는 연산자는 라플라시안이라고 부르며, 그래디언트의 발산을 취해 얻어진다. 가지는 의미는 함수의 볼록, 오목성 판단이며, 주위의 점들이 평균적으로 얼마나 자신보다 높은지를 의미한다는 해석도 있다. 1, 4번 식은 계산에는 쓰이지 않지만 회전이 0인 벡터함수를 그래디언트로 가지는 스칼라함수를 잡는다거나, 발산이 0인 벡터함수를 회전으로 가지는 벡터함수를 잡아 문제를 해결하는 등 하나의 풀이 도구로 쓰인다. 5번 식은 생긴 건 복잡하게 생겼지만 생각보다 많은 데 쓰이니 기억해두자.

II. 편미분방정식

1. 편미분방정식을 풀려면

함수들의 독립변수 개수가 1개에서 여러 개로 늘어나면서, 우리가 풀던 미분방정식의 독립변수도 1개에서 여러 개로 늘어났다. 독립변수가 1개일 때는 변수분리를 하거나, 치환을 하거나 하면서 해석적으로 정해를 구하는 방법으로 미분방정식을 풀었지만, 독립변수가 여러 개가 되면 있는 그대로의 상태에서 해석적으로 푸는 것은 불가능에 가까워진다. 그래서, 편미분방정식을 풀 때는 (선형이라는 가정 하에) 약간의 꼼수를 사용한다.

1. 선형결합을 통해 모든 초기조건과 경계조건을 맞추어 주기에 충분한 개수의 해를 구한다.
2. 충분한 개수의 해를 선형결합하여 원하는 초기조건과 경계조건을 만들어 준다.

똑같은 초기조건과 경계조건을 가지고, 물리적 의미를 가지는 미분방정식의 두 해는 똑같을 수밖에 없다. 따라서, 가지고 있는 해를 선형결합해서 모든 초기조건과 경계조건을 맞춰 주기에 충분하다면, 가지고 있는 해로 표현되지 않는 해가 존재하지 않는다는 걸 굳이 증명할 필요가 없다.

관건은 충분히 많은 해를 어떻게 구하느냐인데, 보통은 변수 분리법을 사용하여 각 독립변수의 상미분방정식으로 분해하는 방법을 사용한다.

2. 변수분리로 해집합 찾기

2.1 변수 바꿈

들어가기 전에 꼭 필요한 스킬인 변수 바꿈에 대해 알아보고 가자. 말 그대로 정의역 변수를 다른 변수로 치환하여 미분방정식을 더 간단한 꼴로 바꾸는 스킬이다. 하는 방법은 간단하다. 바꾸고자 하는 독립변수에 대한 미분연산자를 새로운 독립변수에 대한 미분연산자로 표현하여 대입하면 된다. 예시를 들어 보자.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \text{ 파동 방정식이다.}$$

파동에는 속력 $\pm v$로 가는 파가 둘 다 있으므로, y를 결정하는 독립변수를 $x \pm vt$로 바꿔 보자. $\alpha = x + vt, \beta = x - vt$라고 하자. x와 t를 모두 없애고 싶으므로, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$와 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$를 모두 α와 β로 나타내어 주자. '2시간에 끝내는 기초 수리물리 for 역학'을 열심히 들은 사람이라면, 전미분을 이용하여 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}$를 끌어내는 것쯤은 식은 죽 먹기일 것이다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial x})^2 = (\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x})^2 = (\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta})^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (\frac{\partial}{\partial t})^2 = (\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t})^2 = v(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta})^2 = (\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta})^2 = v^2(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2})$$

이를 대입하고 정리하면 $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$ 을 얻을 수 있다. 이 식은 α와 β의 교차항이 없음을 의미하며, 일반해는 $y = f(x+vt) + g(x-vt)$로 표현된다는 것을 말해 준다(이렇게 원래 상태에서 직접 식 조작을 해서 풀 수 있는 편미분방정식은 정말 극소수이다).

위와 같이 전미분과 Chain rule을 사용하여 미분 연산자들을 다른 독립변수에 대한 연산자로 바꿔치기할 수 있고, 결과적으로 독립변수를 원하는 문자들로 완전히 바꿀 수 있었다.

예제 2-1. 상미분방정식 $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}) = -l(l+1)\Theta\sin\theta$ 에서 $\eta = \cos\theta$로 변수 바꿈하여 η에 대한 미분방정식을 유도해라.

$(1-\eta^2)\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} - 2\eta\frac{d\Theta}{d\eta} + l(l+1)\Theta = 0$이 나왔다면 잘 한 것이다. 이 미분방정식의 물리적인 해는 르장드르 다항식 $P_l(\eta)$로, 구면 좌표계에서 라플라스 방정식을 풀 때 θ성분에서 튀어 나온다. 중간 항의 계수가 -1이 나온 사람은 η와 θ는 독립이 아니라는 점을 다시 한 번 생각해 보자.

예제 2-2. 좌표계와 변수 바꿈.

(a) $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ 로 두 좌표계 간 변환을 할 수 있다. 앞에서 했던 것처럼 z에 대해 전미분을 해 주면

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \theta}}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

를 얻을 수 있다. 그러나, $f(\vec{r}) = Ar\cos\theta$ 만 대입해 봐도 위 식은 옳지 않음을 알 수 있다. 어디가 틀렸을까?

(b) $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$를 $r, \theta, \phi, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}$로 나타내어 보아라. 또, 이를 이용하여 편미분방정식 $-i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})\Phi = L\Phi$ 의 해를 구하고 L이 가지는 조건을 논하여라. (단, L은 상수, Φ는 위치에 대한 함수)

(c) 복잡한 계산을 좋아하는 친구들은 위 결과를 이용하여 발산, 회전, 그래디언트, 라플라시안 등의 미분연산자를 구면 좌표계의 독립변수들로 표현해 보자. (주의: 정신건강에 좋지 않습니다)
참고로 데카르트 좌표계에서 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$ 이고 구면 좌표계에서
$\hat{x} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\theta} - \sin\phi\,\hat{\phi}, \hat{y} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\theta} + \cos\phi\,\hat{\phi}, \hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
이 성립한다.

2.2 변수 분리법

변수 분리를 하는 방법은 다음과 같다.

1. 구하고자 하는 함수를 독립변수 하나하나에 대한 일변수 함수의 곱으로 표현한다. 물론 모든 해가 이 꼴로 표현되는 것은 아니지만, 앞에서 말했듯이 선형 미방을 풀 때는 물리적인 경계 조건을 맞춰 주기에 충분한 개수의 특수해만 구하면 장땡이다.

2. 편미분방정식을 (각 독립변수에 대한 상미분식의 일차결합) = 0 꼴로 표현한다.

3. 분리한 상미분식은 각각 독립변수 하나만의 함수이므로, 합해서 0이 되려면 상수가 되어야 한다. 분리상수를 잘 정의하여 우리(혹은 울프럼 아저씨)가 풀 수 있는 웰노운 상미분방정식으로 원래 식을 나누어 준다. 이후, 다시 상미분방정식의 해를 곱하여 원래 식의 특수해들을 구한다.

예시로, 경도 대칭성을 가지는 구면 좌표계에서의 라플라스 방정식을 풀어 보자.

풀어야 하는 편미분방정식은 다음과 같다:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}) = 0$$

1단계: 구하고자 하는 함수를 독립변수 하나하나에 대한 일변수 함수의 곱으로 표현한다.

$$V = R(r)\Theta(\theta)$$

R은 r만의, Θ는 θ만의 함수이다

2단계: 편미분방정식을 (각 독립변수에 대한 상미분식의 일차결합) = 0 꼴로 표현한다.

1단계의 식을 위 편미분방정식에 대입하면

$$\frac{\Theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}) = 0$$

이제 각 항이 하나의 독립변수만으로 기술되게 하기 위해 양변을 $\frac{R\Theta}{r^2}$로 나눠 주면

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}) = 0$$

두 항은 각각 r의 함수, θ의 함수이다. 둘이 합하여 0이 되려면 둘 다 상수여야 함은 자명하다.

3단계: 분리상수를 잘 정의하여 우리가 풀 수 있는 상미분방정식으로 원래 식을 나누어 준다.

두 번째 항을 보니 예제 2-1이 떠오른다. 분리 상수(각 항의 값)은 $l(l+1)$로 정해 주자.
그러면 원래 방정식을 두 개의 상미분방정식으로 나눌 수 있게 된다.

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r}) = l(l+1)$$

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}) = -l(l+1)$$

첫 번째 식의 해는 시험해 r^m을 대입해 보면, $R = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}$임을 쉽게 확인할 수 있다.
두 번째 식은 예제 2-1과 똑같으므로 물리적인 해는 $P_l(\cos\theta)$ 임을 알 수 있다.

결국 변수분리법으로 얻을 수 있는 해는 $\sum_{l=0}^{\infty}(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}})P_l(\cos\theta)$ 이고, 테일러 급수와 르장드르 다항식의 직교성, 완비성을 생각하면 모든 물리적인 경계 조건은 위 식으로 맞추어 줄 수 있다는 것을 알 수 있다. 위 결과는 구형의 전기퍼텐셜 경계조건이 있는 문제에서 매우 강력한 식으로 쓰인다.

'2시간에 끝내는 기초 수리물리 for 역학'에서 푸리에 방법을 쓰는 것을 공부했으니 초기조건과 경계조건을 맞춰 주는 것에 대한 세부적인 설명은 생략한다.

예제 2-3. 진동하는 원형막의 시간, 위치에 따른 높이의 일반해를 구하여라. 원형막에서 파동의 속력은 v, 반지름은 a라고 하자.

참고: 미분방정식 $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$의 물리적인 해는 베셀 함수로, $J_n(x)$로 표기한다. 베셀 함수는 원통 좌표계에서 헬름홀츠 방정식(라플라시안의 고유함수를 구하는 문제)을 변수 분리하는 과정에서 만나게 된다.

III. 복소수

Definition. 허수단위 i를 $i^2=1$이 되는 수로 정의하고, $a+bi$꼴로 표현되는 모든 수를 복소수라고 한다.

3.1. 연산

덧셈, 뺄셈, 곱셈 모두 i를 하나의 문자 다루듯이 분배법칙을 써서 실수 연산과 유사하게 계산할 수 있다. 나눗셈의 경우는 역수를 취하여 곱하는 방법을 사용한다.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{ac+bd}{\sqrt{c^2+d^2}}-\frac{bc-ad}{\sqrt{c^2+d^2}}i$$

실수에서와 마찬가지로 복소수의 절댓값도 "원점에서부터의 거리"로 정의된다. 그러나 원점에서 나갈 수 있는 방향이 복소수에서는 무수히 많기 때문에 계산식 자체는 상당히 다르다.

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

켤레 연산은 허수부분의 부호를 뒤집는 연산으로, 복소수 z의 켤레는 $\tilde{z}$로 표기한다. 켤레 연산은 여러 가지 재미있는 성질을 가진다. 그 중 중요한 것들을 몇 개 꼽자면

1, $z+\tilde{z}=2Re(z)$, $z-\tilde{z}=2Im(z)$

2. $\widetilde{z_1 z_2}=\tilde{z}_1\tilde{z}_2$

3. $|z|^2=z\tilde{z}$

4. 실함수 $f(x)$에 대해 $\widetilde{f(z)}=f(\tilde{z})$

이 정도가 있다. 1번 식은 물리량이 복잡한 복소수 식으로 표현되었을 때 실제값을 구하기 위해 사용되며, 2번과 3번은 보통 진동을 복소수로 기술하는 과정에서 합성파의 진폭을 구하는 데 쓰인다. 4번은 켤레복소수를 쓰는 데는 어디에나 다 쓰인다.

마지막으로, 가장 중요한 오일러 항등식이 있다.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

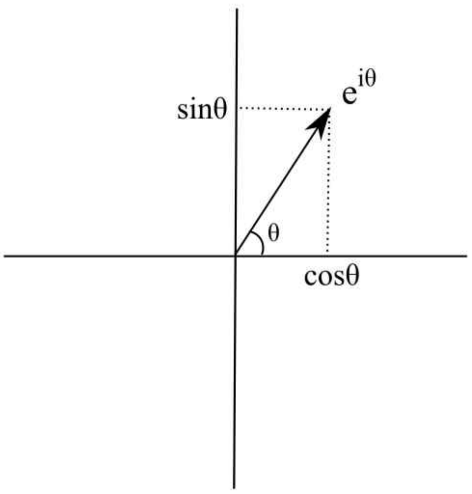
$$Re\,(e^{i\theta}) = \cos\theta, Im(e^{i\theta}) = \sin\theta$$

오일러 항등식은 지수함수와 삼각함수의 테일러 전개로부터 유도될 수 있으며, 삼각함수를 대신하여 주기함수나 진동을 기술하는 데 사용된다.

예제 3-1.

(a) $\dfrac{1}{2-e^{i\theta}}$의 실수부분과 절댓값을 구하여라.

(b) $\dfrac{e^{-i\theta}}{2-e^{i\theta}}$에 대해 같은 일을 반복하여라.



3,2, 활용

더 어려운 학문에서는 복소수가 괴상한 방법으로 많이 쓰이지만, 기전 수준에서의 복소수는 거의 오일러 항등식을 사용하여 진동을 기술하는 데만 쓰인다 보아도 된다.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$Re\,(e^{i\theta}) = \cos\theta, Im(e^{i\theta}) = \sin\theta$$

보통 진동을 복소수로 표현할 때는 진폭의 크기를 복소수의 크기로 잡고, 물리량의 참값을 복소수의 실수부분으로 잡는다.

$$Acos(kx - wt) + Bsin(kx - wt) \Rightarrow \sqrt{A^2 + B^2}\, e^{i\phi} e^{i(kx - wt)}, \cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

복소수를 사용하여 진동을 표시하는 방법의 이점은 위상의 덧셈이 간결해진다는 점이다. 삼각함수에서 덧셈정리로 일일이 복잡한 계산을 해 줘야 했던 것이 복소지수함수에서는 그냥 복소진폭의 덧셈으로 간단히 계산된다. 밑 예시에서 체험해 보자.

위상차가 ϕ이고 진폭이 A인 n개의 사인파가 간섭하는 상황을 생각하자. 삼각함수로는 화려한 수학적 기교를 부리지 않는 한 계산이 거의 불가능이다. 상황을 복소수로 바꾸어 보자.

$$y=\sum_{m=0}^{n-1} A cos(kx-wt+m\phi) \Rightarrow y=\sum_{m=0}^{n-1} Ae^{im\phi}e^{i(kx-wt)}$$

변하지 않는 부분을 시그마 밖으로 빼내면

$$Ae^{i(kx-wt)}\sum_{m=0}^{n-1} e^{im\phi}$$

등비급수 공식을 이용해 시그마 안에 든 식을 계산하면

$$Ae^{i(kx-wt)}\frac{1-e^{in\phi}}{1-e^{i\phi}}$$

실수부분, 즉 실제값은

$$\frac{1}{2}A(e^{i(kx-wt)}\frac{1-e^{in\phi}}{1-e^{i\phi}}+e^{-i(kx-wt)}\frac{1-e^{-in\phi}}{1-e^{-i\phi}})$$ 를 계산하면 나올 것이다.

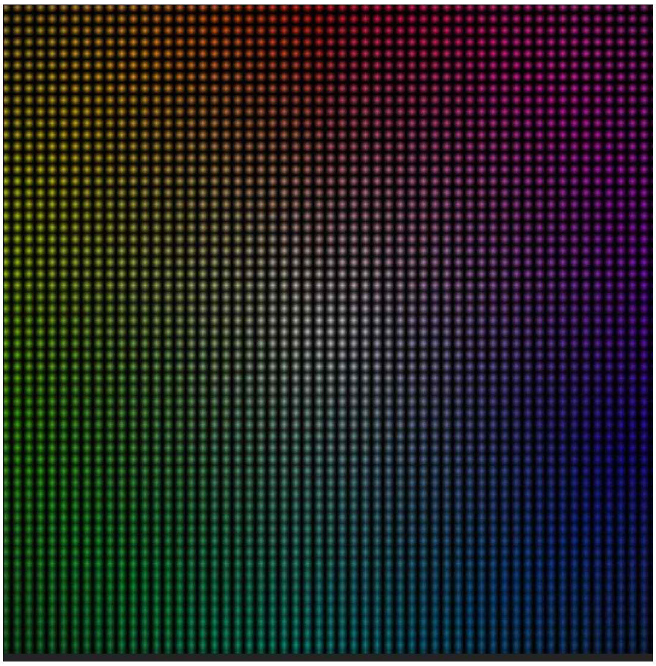
진폭은

$$A\sqrt{\frac{1-e^{in\phi}}{1-e^{i\phi}}\frac{1-e^{-in\phi}}{1-e^{-i\phi}}}=A\sqrt{\frac{2-2\cos n\phi}{2-2\cos\phi}}=A\frac{\sin\frac{n\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}$$ 로 쉽게 계산할 수 있다.

앞에서 본 것처럼 복소수와 오일러 항등식은 특히 진동, 주기 관련 문제에서 계산 도구로 그 힘을 발휘한다. 복소수를 계산 도구로만 생각하는 것은 복소수가 수학계에 가지고 온 혁명을 너무 무시하는 거 아니냐고 혹자는 말할 수 있겠지만 기전에 필요한 복소수 지식은 사실상 여기까지이고, 필자의 지식도 많이 부족한지라 이만 말을 줄이도록 하겠다.

『 2시간에 끝내는 기초 수리물리 for 전자기학』마침.

MEMO



경기과학고등학교 39기 서준영 저. 2022.08.24. 초판 발행.