물리 올림피아드를 위한

해석역학

Analytical Mechanics

for International Physics Olympiad(IPHO)

학번 : ____________ 이름 : ______________

저자 : 정동영

1. 중심과 중심력 (Fowles 기준 7장)

테마: 중심력을 받는 입자의 운동 분석

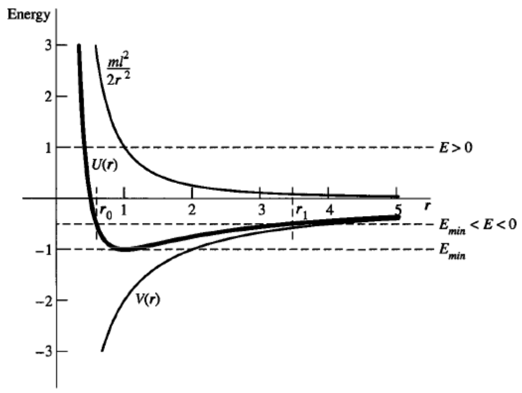
전개: 1) 유효퍼텐셜　2) 안정성　3) 극지각　추가) 알파입자 산란

1) 유효퍼텐셜

중심력장에서 운동하는 물체를 기술하려면 극좌표를 이용하는 것이 편리하다.

물체의 변위: (r,θ)　속도: $(\dot{r}, r\dot{\theta})$

중심력, 즉 물체가 받는 힘이 항상 원점 방향일 때 물체의 각운동량이 보존된다. 각운동량을 L이라 하면, 물체의 역학적 에너지는



$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + \mathrm{V} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathrm{v}^2 + \mathrm{V} = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\dot{\mathrm{r}}^2 + \mathrm{r}^2\dot{\theta}^2) + \mathrm{V}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V$$

이때, 원점과 물체를 잇는 축에 대한 정지좌표계, 즉 회전좌표계에서 보았을 때 입자의 운동은 $\frac{L^2}{2mr^2} + V$의 퍼텐셜 속에서 움직이는 일차원 운동과 같다. 이를 유효 퍼텐셜이라 하며, 앞으로 자주 보겠지만 궤도운동에서 유용하게 쓰인다.

2) 안정성

물체가 어떠한 위치에서 안정하기 위한 조건은 무엇인가? 흔히 말하는 복원력이 작용하기 위해서는 다음 조건이 충족되어야 한다.

"그 위치에서 퍼텐셜은 극소점이다."

극소점이기 위해서는 다음 두 조건이 필요하다.

1) 그 위치에서 퍼텐셜의 일계미분값이 0　　2) 그 위치에서 퍼텐셜의 이계미분값이 +

그렇다면 물체가 $f(r)$의 중심력을 받고 있을 때 입자가 안정한 원궤도로 운동하기 위한 f의 조건을 구해보자.

회전좌표계에 대한 운동방정식을 세우면 (원심력 고려)

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + f(r)$$

물체가 반지름이 a인 원운동을 하고 있을 때, r방향 가속도가 0이므로 좌변이 0

한편, 우변의 첫 번째 항은 단위 질량당 각운동량을 l이라 할 때 $\frac{ml^2}{r^3}$ 즉, 반지름이 a일 때

$$\frac{ml^2}{a^3} + f(a) = 0$$

이는 유효퍼텐셜의 일계미분이 0이라는 식과 동치이다.

이번에는 반지름에서 살짝 벗어나는 섭동을 고려할 때, $x = r - a$를 잡으면

$$m\ddot{x} = ml^2(x+a)^{-3} + f(x+a)$$

이를 x에 대한 일차항까지만 전개하자. 그 후 x=0을 대입하면

$$m\ddot{x} = \left[\frac{3}{a}f(a) + f'(a)\right]x$$

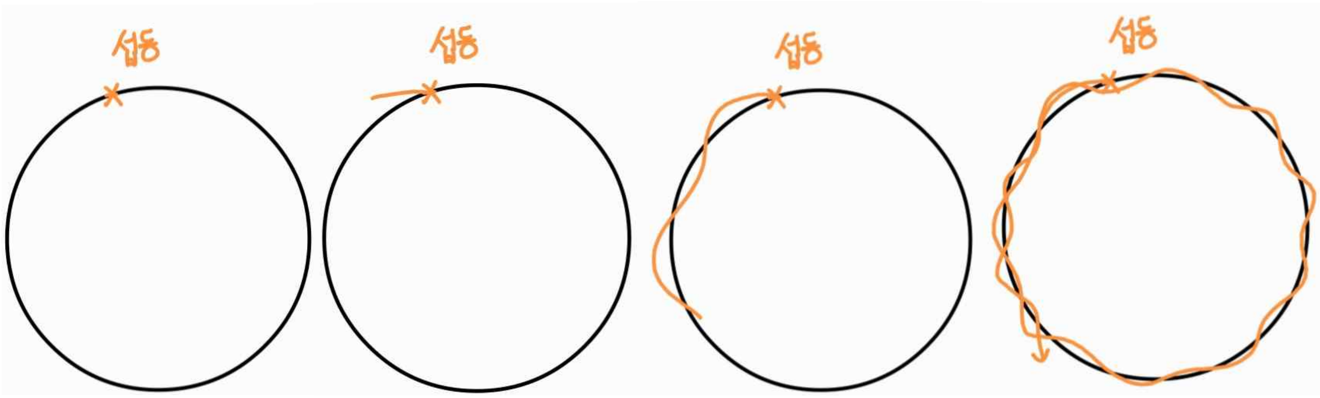
복원력이 작용하기 위해서는 우변의 x의 계수가 음수여야 하므로 f의 조건은

$$f(a) + \frac{a}{3}f'(a) < 0$$

이는 유효퍼텐셜의 이계미분이 0이라는 식과 동치이다.

3) 극지각

방금 유도한 식에서 안정한 원궤도에서 벗어났을 때 변위에 비례하는 복원력이 나타난다는 것을 확인할 수 있는데, 이는 곧 진동운동이 나타남을 의미한다. 여기서 진동운동이 어떻게 나타나는지 확인해보자.



그림에서 볼 수 있듯이 원궤도에서 조금 벗어난 진동을 하는데, 반지름 r이 극값을 가지는 점을 극지점이라고 한다. '극지점-중심-인접한 극지점'이 이루는 각을 극지각이라고 하는데, 이번에는 극지각을 구해보자.

극지각을 알기 위해서는, 진동운동의 주기가 필요하다. 진동의 주기는 유효 용수철 상수로부터 주어지는데, 앞서 유도한 식으로부터 유효 용수철 상수의 값을 알 수 있다.

$$k_{eff} = -\frac{3}{a}f(a) - f'(a)$$

즉, 주기를 τ라 하면 $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eff}}}$이며, 원운동 각속도는 변하지 않는다는 상황적 근사를 사용하면 주기의 절반에 원운동 각속도를 곱하여 극지각 ψ을 구할 수 있다.

$$\psi = \frac{1}{2}\times 2\pi\left[\frac{m}{-\frac{3}{a}f(a) - f'(a)}\right]^{\frac{1}{2}} \times \left[-\frac{f(a)}{ma}\right]^{\frac{1}{2}} = \pi\left[3 + a\frac{f'(a)}{f(a)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

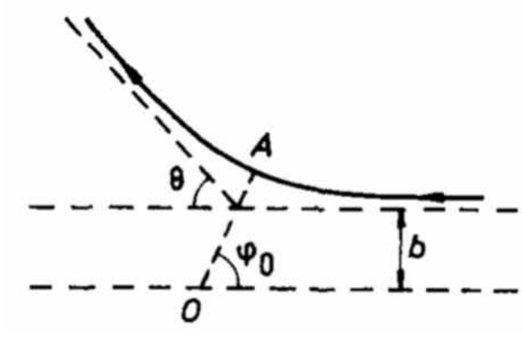
만약 중심력이 상수 c에 대하여 $f(r) = -cr^n$일 때 $\psi = \pi(3+n)^{-\frac{1}{2}}$

n=-2, 1 등 극지각이 π의 유리수 배이면 똑같은 궤도를 돌 수 있지만 n=2 등 극지각이 π의 무리수 배이면 불가능하다. 또, n이 -3보다 작으면 극지각이 허수가 됨을 알 수 있는데, 이는 n이 -3보다 작을 때 원궤도가 안정하지 않음을 의미한다.

추가) 알파입자 산란 문제

1. 산란 단면적

전하를 가지는 알파입자가 운동에너지 T를 가지고 핵에 접근한다. 핵의 전하량은 Ze이고, 유효반지름은 R이다. 고전역학으로 해석하면 알파입자와 핵 사이 거리가 R에 도달하면 튕겨져 나간다고 볼 수 있다. 그렇다면 알파입자의 산란단면적은 얼마인가?



알파입자가 충돌하지 않는다면 궤도는 이차곡선, 그중에서도 쌍곡선의 형태로 나타난다. 즉, 쌍곡선과 중심 사이 거리의 최솟값을 구하여, 그 최솟값이 R인 충돌계수 b를 찾는다.

알파 입자가 핵에 가장 근접했을 때 각운동량 보존을 사용하면 $mbv_0 = mR^2\dot{\theta}$

에너지 보존법칙에서 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{2kZe^2}{R} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$, 즉 $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4kZe^2}{mR^3}}$

따라서 산란단면적은 $\pi b^2 = \pi\frac{R^4}{v_0^2}\dot{\theta}^2 = \pi\frac{R^4}{v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4kZe^2}{mR^3}\right) = \pi R^2\left(1 - \frac{4kZe^2}{mv_0^2 R}\right)$

2. 미분산란단면적

핵은 점입자로 취급한다면, 위의 문제처럼 명확한 산란단면적이 주어지지 않는다. 즉, 우리는 미분산란단면적이라는 개념을 도입해야 한다. 입사하는 총 입자수에 대하여 특정 각도로 산란하는 입자의 비율로써 정의한다.

$$\frac{dN}{N} = n\sigma d\Omega$$

N은 전체 입자수, dN은 특정 각도로 산란하는 입자수, n은 단위면적당 산란중심의 개수, σ는 특정 각도에 대한 미분산란단면적, $d\Omega$은 미소 산란각에 대한 미소 입체각이다.

다소 직관적이지 않은 정의이지만, 다음과 같이 받아들이면 외우기 쉽다.

$$dN = Nn\sigma 2\pi\sin\theta_s d\theta_s = Nn2\pi b\,db,\ \sigma = \frac{b}{\sin\theta_s}\left|\frac{db}{d\theta_s}\right| \text{ 혹은 } \sigma = \left|\frac{d(\pi b^2)}{d\Omega}\right|$$

에너지 E인 입자가 점입자인 핵에 입사할 때 미분산란단면적을 구해보자. 운동방정식으로 돌아오면 $f(r) = \frac{k}{r^2}$의 힘을 주고받는다고 할 때

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{k}{r^2}$$

r의 역수를 u로 치환하여 식을 정리해보자. 단위 질량당 각운동량이 l일 때

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -l\frac{du}{d\theta}$$

한 번 더 미분하면

$$\ddot{r} = -l\frac{d}{dt}\frac{du}{d\theta} = -l\frac{d\,tehta}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{du}{d\theta} = -l\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -l^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

이를 운동방정식에 대입하면

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = -\frac{k}{ml^2}, \text{ 이항하면 } \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\left(u+\frac{k}{ml^2}\right)$$

이계미분방정식이므로 코사인 꼴의 해를 대입하자. 이때 미정계수는 코사인의 계수와 위상에 각각 붙는데, 이를 해결하면

$$r = \frac{ml^2k^{-1}}{-1+(1+2Eml^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}\cos(\theta-\theta_0)}$$

우리는 산란각과 충돌계수의 관계를 보고 싶다. 이때 $\theta = 0$을 대입하면 초기에 $r = \infty$이므로 분모가 0이 됨을 이용하면

$$-1+(1+2Eml^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}\cos\theta_0 = 0$$

$l = bv_0, E = \frac{1}{2}mv_0^2,\ \theta_s = \pi - 2\theta_0$를 대입하면

$$\cot\frac{\theta_s}{2} = \frac{2bE}{k}, \text{ 양변을 } \theta_s\text{로 미분하면 } \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\theta_s}{2}\right)} = \frac{2E}{k}\left|\frac{db}{d\theta_s}\right|$$

따라서 미분산란단면적은 $\sigma = \frac{k^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta_s}{2}\right)}$이다.

2. 라그랑주 역학 (Fowles 기준 10장)

테마: 뉴턴의 운동법칙에서 벗어난 새로운 분석 방법 고민

전개: 1) 해밀턴의 변분원리 2) 라그랑지안 3) 라그랑주 승수법 4) 해밀토니안

1) 해밀턴의 변분원리

그동안 뉴턴의 운동법칙에 따라서 물체의 운동을 기술했다면, 이번에는 색다른 방법으로 물체의 운동을 분석하고자 한다. 영국의 수학자 해밀턴은 다음의 가정 하나로 모든 운동을 설명할 수 있다고 주장한다.

“어떤 물리계에서 가능한 모든 운동 경로 중 실제로 운동이 일어난 경로를 따른 다음의 적분

$$J = \int_{t_1}^{t_2} T - V dt$$

은 극값을 갖는다.”

이는 뉴턴의 F=ma처럼 명확한 증명 없이 받아들여야 한다. 뉴턴 역학에서는 F=ma가 기본 원리라면, 라그랑주 역학에서는 해밀턴의 변분원리가 기본 원리이다.

2) 라그랑지안

앞선 적분에서 등장했던 운동에너지 - 위치에너지는 라그장주 역학에서 계속 쓰인다. 그래서 이를 간단히 L로 치환하며, 이를 라그랑지안이라고 부른다. 그렇다면 라그랑지안으로 어떻게 물체의 운동을 서술하는가? 이에 앞서 일반화좌표라는 것을 알아야 한다.

우리는 물체의 운동을 서술할 때 좌표계를 사용한다. 가장 자주 사용하는 xyz 좌표계는 가끔씩 비효율적일 때가 있다. 예를 들면 진자 운동이 있다. 진자 운동은 xyz좌표계로 표현하면 $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, $x = 0$의 조건이 있는 (x, y, z)의 집합이라고 할 수 있다. 이는 좌표가 3개나 필요하고, 그 3개가 서로 구속되어 있다. 구속조건도 2개나 있어 매우 불편하다. 하지만, 특정 위치로부터 각변위를 기준으로 진자운동을 해석하면, 어떠한 구속조건도 없이 하나의 물리량으로 위치를 표현할 수 있다. 이렇게 서로 구속조건이 있는 좌표를 종속좌표, 구속조건이 없는 좌표를 독립좌표라 하며, 운동을 명시하기에 필요하고 충분한 독립좌표의 집합을 일반화좌표라 한다. 일반화좌표의 수는 그 계의 자유도와 같다.

일반화좌표가 q_1, q_2로 2개 있는 운동을 생각하자. 운동에너지는 q_1, q_2뿐만 아니라 시간에 따른 변화량 $\dot{q}_1, \dot{q}_2$의 함수이기도 하다. 위치에너지는 오직 q_1, q_2만의 함수이다. 결과적으로 라그랑지안은 $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$의 함수이다. 그렇다면 일반성을 잃지 않고 라그랑지안을 q_1으로 미분해보자.

$$\frac{dL}{dq_1}$$

이때, L은 $\dot{q_1}$의 함수이기도 하다. 그렇다면 $\dot{q_1}$으로도 미분해보자.

$$\frac{dL}{d\dot{q_1}}$$

여기서 $\dot{q_1} = \frac{dq_1}{dt}$이므로 고쳐쓰면

$$\frac{dL}{\frac{dq_1}{dt}} = \frac{dL}{dq_1}dt$$

이를 dt로 나누면 $\frac{dL}{dq_1}$이 되지 않겠는가? 다시 써보면

$$\frac{dL}{dq_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dq_1}dt\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{\frac{dq_1}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q_1}}\right),\ \text{따라서}\ \frac{dL}{dq_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q_1}}\right)$$

주의할 점은 위에서 우리가 한 미분은 q_1 혹은 $\dot{q_1}$ 말고 나머지 변수를 상수로 취급한 미분이다. 이때는 기호를 바꿔 써줘야 한다. 이를 편미분이라 하고, 그냥 d로 읽어도 큰 문제 없다.

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}}\right)$$

뉴턴 역학에 F=ma가 있다면 라그랑주 역학에는 $\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}}\right)$가 있다. 이를 라그랑주 운동방정식이라 한다.

라그랑주 운동방정식의 풀이과정은 다음과 같다.

step 1) 입자계의 배치를 분명히 결정할 수 있는 적당한 일반화 좌표를 선정한다.
step 2) 운동에너지를 일반화 좌표와 일반화 속도의 함수로 구한다.
step 3) 위치에너지를 일반화 좌표의 함수로 구한다.
step 4) 운동에너지에서 위치에너지를 빼 라그랑지안을 구하고 각 일반화 좌표에 대한 운동방정식을 푼다.

이에 대한 예제를 풀어보자.

예제 1) 1차원 조화진동자의 경우 라그랑주 역학으로 운동방정식을 작성하라.

step 1) 1차원 조화진동자이기에 일반화좌표는 x 하나로 충분하다.

step 2) 운동에너지는 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$이다.

step 3) 위치에너지는 $\frac{1}{2}kx^2$이다.

step 4) 라그랑지안은 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$이고, 라그랑주 방정식에 대입하면 $-kx = m\ddot{x}$

예제 2) 도르래 양쪽에 m_1, m_2를 걸어두었을 때, 가속도를 구하라.

step 1) 실의 길이를 l이라 하면 m_1의 위치 x 하나면 충분하다.

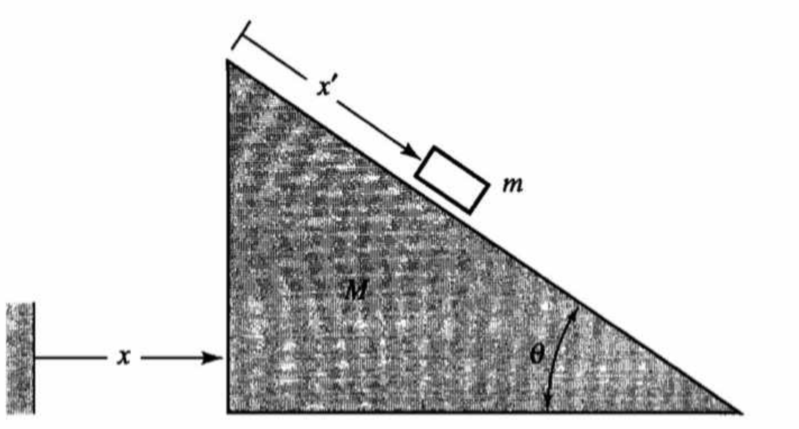
step 2) 운동에너지는 $\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$이다.

step 3) 위치에너지는 $-m_1gx - m_2g(l-x)$이다.

step 4) 라그랑지안은 $\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + m_1gx + m_2g(l-x)$이고, 라그랑주 방정식에 대입하면 $m_1g - m_2g = m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x}$

따라서 가속도는 $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$이다.

예제 3) 자유롭게 움직일 수 있는 경사면에 물체가 올려져 있다. 경사면의 가속도를 구하라.



step 1) 그림과 같이 일반화 좌표는 x와 x' 두 개를 잡는 것이 편리하다.

step 2) 운동에너지는 $\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\{(\dot{x} + \dot{x}'\cos\theta)^2 + (\dot{x}'\sin\theta)^2\}$이다.

step 3) 위치에너지는 $-mgx'\cos\theta$이다.

step 4) 라그랑지안은 $\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\{(\dot{x}+\dot{x}'\cos\theta)^2 + (\dot{x}'\sin\theta)^2\} + mgx'\cos\theta$이고, 라그랑주 방정식에 대입하면

$$m(\ddot{x}+\ddot{x}'\cos\theta) + M\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{x}' + \ddot{x}\cos\theta = g\sin\theta$$

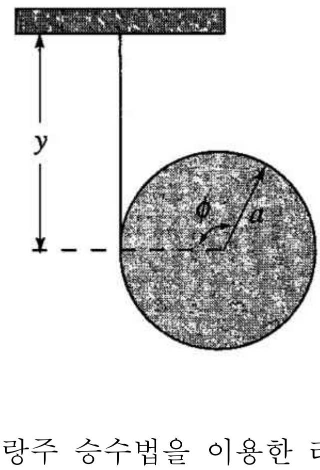
이를 정리하면 $\ddot{x} = \dfrac{-gsin\theta\cos\theta}{(m+M)/m - \cos^2\theta}$이다.

3) 라그랑주 승수법

그렇다면 힘은 구할 수 없는 것인가? 그렇지 않다. 라그랑주 승수법을 이용하면 힘을 구할 수 있다. 라그랑주 승수법은 일반화좌표를 일부러 더 많이 잡아 구속조건을 갖게 한 다음, 라그랑주 방정식에 구속조건을 대입하여 구속력을 구하는 방식이다. 예제를 살펴보면 이해를 빠르게 할 수 있다.

step 1) 과다의 일반화좌표와 그에 알맞은 구속조건을 세운다.
step 2) 운동에너지를 위치와 속도의 함수로 구한다.
step 3) 위치에너지를 위치의 함수로 구한다.
step 4) 라그랑지안을 구하고, 라그랑주 승수법을 이용한 운동방정식을 푼다.
step 5) 라그랑주 승수에 미분값을 곱해서 구속력을 구한다.

예제 4) 그림과 같이 원반에 끈이 감겨 있고 끈의 한끝의 고정된 지지대에 붙어 있으며 원반이 낙하하면서 끈이 풀리게 되어있다. 이것은 어린이 장난감 요요와 같다. 단지 끈을 묶은 손가락을 움직이지 않을 뿐이다. 낙하하는 원반의 운동방정식과 구속력을 구하라.



step 1) 원반이 내려간 거리 y와 회전한 각도 ϕ를 일반화좌표로 설정한다. 이때 구속조건은 $f(y,\phi) = y - a\phi = 0$이다.

step 2) 운동에너지는 $\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}ma^2\phi^2$

step 3) 위치에너지는 $-mgy$

step 4) 라그랑지안은 $\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}ma^2\phi^2 + mgy$

라그랑주 승수법을 이용한 라그랑주 운동방정식은 시간에 따른 함수 λ에 대해

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$$

이를 정리하면

$$mg + \lambda = m\ddot{y}$$

$$-\lambda a = \frac{1}{2}ma^2\ddot{\phi}$$

미지수는 3개, 식은 2개임을 알 수 있다. 나머지 식은 구속조건에서 얻을 수 있다.

$$\ddot{y} - a\ddot{\phi} = 0$$

식을 풀면

$\lambda = -\frac{1}{3}mg$, 주의할 점은 이 승수가 구속력이 아니라는 것이다. 구속력은

$$y\text{에 대한 구속력} : \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = lamda = -\frac{1}{3}mg$$

$$\phi\text{에 대한 구속력} : \lambda\frac{\partial f}{\partial \phi} = -lamda\,a = \frac{1}{3}mga$$

각각 장력과 장력에 의한 토크임을 알 수 있다.

4) 해밀토니안

해밀토니안의 정의는 아래와 같다. $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$

하지만 곧 역학적 에너지라는 사실을 금방 알 수 있다.

역학적 에너지 대신 해밀토니안이라는 유식한 용어를 쓰는 이유는, 위의 정의로부터 변분을 통해 새로운 운동방정식을 기술할 수 있기 때문이다. 변분을 통한 계수 비교로 두 가지 식을 세울 수 있다. 이를 정준방정식이라 한다.(이때 해밀토니안이 극값을 가지는 것은 아니다. 이는 라그랑지안과는 달리 항상 일정하다.)

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad , \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

p는 운동량, q는 좌표를 의미한다. 하나는 양수고 나머지 하나는 -가 붙어서 헷갈릴 수 있겠으나, $E = \frac{p^2}{2m}$을 p로 미분해서 양수고, 나머지 식은 음수라고 외우면 편하다.

고등학교 학생으로서 해밀토니안의 의의는 이계미분방정식을 일계미분방정식으로 바꾼다는 장점에 의의가 있다. 하지만 역으로 변수의 개수를 2배로 늘려서 풀이시간을 줄인다는 단점도 있다. 개인적으로는 해미로니안보다는 라그랑지안이 좀 더 빠르지 않나 싶다.

step 1) 적당한 일반화좌표와 일반화운동량을 잡는다.
step 2) 해밀토니안을 구하고, 정준방정식을 서술한다.
step 3) 정준방정식을 푼다.

예제 5) 1차원 조화진동자에 대한 해밀턴의 운동방정식을 구하라.

step 1) 일반화좌표: x 일반화 운동량: p

step 2) 해밀토니안 $\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}x^2$에서 정준방정식은 $\frac{p}{m}=\dot{x}$, $kx=-\dot{p}$

step 3) 두 식을 연립하면 $m\ddot{x}+kx=0$

예제 6) 중심력장에서 움직이는 입자의 운동에 관한 해밀턴 방정식을 구하라.

step 1) 일반화좌표: r, θ 일반화 운동량: p_r, p_θ

step 2) 해밀토니안은 $H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+V(r)$, 정준방정식은

$$\frac{p_r}{m}=\dot{r}\ ,\ \frac{dV}{dr}-\frac{p_\theta^2}{mr^3}=-\dot{p}_r\ ,\ \frac{p_\theta}{mr^2}=\dot{\theta}\ ,\ 0=-\dot{p}_\theta$$

step 3) 두 식을 연립하면 $m\ddot{r}=\dot{p}_r=\frac{ml^2}{r^3}-\frac{dV}{dr}$

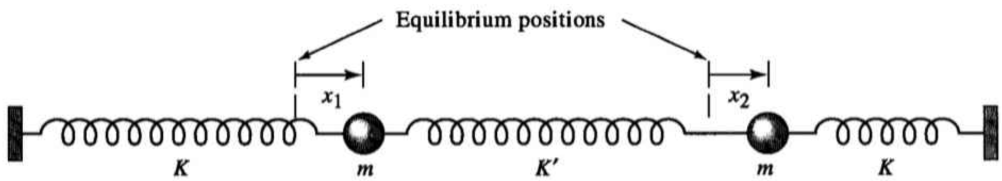
3. 진동계의 동력학 (Fowles 기준 11장)

테마: 여러 물체가 상호작용하며 진동하는 운동 분석

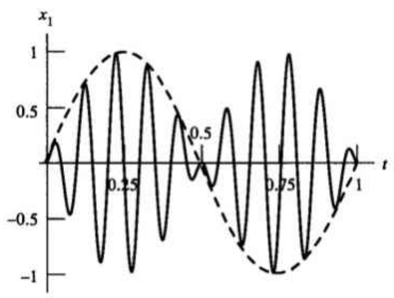
전개: 1) 결합된 진동자 2) 이중진자 3) 하중이 걸린 현의 진동

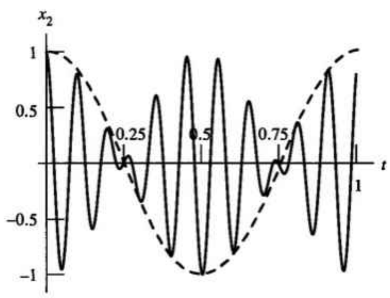
1) 결합된 진동자

결합된 진동자라 함은 다음 그림과 같이 진동자들이 서로 영향을 주고 받는 상태를 의미한다.



이 물체의 운동은 어떻게 기술하면 좋을까? 그리 단순하지 않을 것임을 짐작할 수 있다.

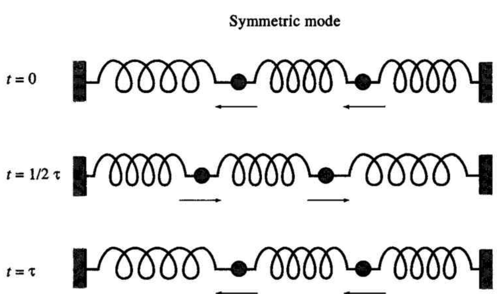


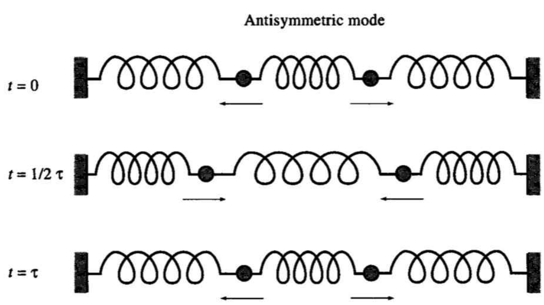


이 문제의 답부터 살펴보자. 위 그림은 각각 왼쪽과 오른쪽 물체의 시간에 따른 변위를 나타낸 그래프이다. 맥놀이 현상이 연상되지 않는가?

맥놀이 현상은 언제 생기는가? 서로 다른 두 진동수의 소리가 중첩될 때 생성된다. 이에 비유하면 서로 다른 두 진동수를 가지는 운동이 결합되었음을 알 수 있다.

두 물체가 하나의 진동수로 움직이는 경우가 있겠는가? 아래 그림을 살펴보자.





앞의 그림과 같이 하나의 진동수로 운동할 때를 고유 모드라 하고 그 진동수를 고유진동수라 한다. 그렇다면 고유진동수를 구해보자.

운동방정식은 $m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1)$, $m\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - kx_2$

이때 운동은 하나의 진동수로 진동하기에 단조화운동이다. 따라서 시간에 따른 변위의 이계미분은 진동수의 제곱의 마이너스를 붙인 값과 같다. 진동수를 w라 하면

$$(-mw^2 + k + k')x_1 - k'x_2 = 0\,, \qquad -k'x_1 + (-mw^2 + k + k')\,x_2 = 0$$

계수행렬의 역행렬이 존재하지 않아야 의미있는 운동을 얻을 수 있다. 따라서 계수행렬의 행렬식은 0이다.

$(-mw^2 + k + k')^2 - k'^2 = 0$, 실수해만 골라내면 $w = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}\,, \sqrt{\frac{k}{m}}$

가장 단순한 고유벡터를 구해보면 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

우리는 고유벡터와 고유진동수를 구했다. 실제 운동은 이러한 고유모드들의 선형결합으로 나타내어진다. 이때 미정계수는 진폭과 위상에 각각 붙으므로 미정계수의 개수는 모드 개수의 2배임을 알 수 있다. 각 입자의 초기조건(초기위치와 초기속도)도 각 입자당 2개이므로 초기조건을 통해 미정계수를 구할 수 있다.

$$x_1 = Asin(w_1 t + \phi) + Bsin(w_2 t + \delta)\ , \qquad x_2 = -Asin(w_1 t + \phi) + Bsin(w_2 t + \delta)$$

$x_1(0) = l, v_1(0) = 0, x_2(0) = 0, v_2(0) = 0$이면 $A = B = \frac{l}{2}$, $\phi = \delta = 90^\circ$

우리는 초기조건을 만족하는 미분방정식의 해를 찾았다. 따라서 유일성 정리에 의하여 우리는 물체의 운동을 정확히 기술한 것이다.

step 1) 운동방정식을 기술한다.
step 2) $\ddot{x} = -w^2 x$를 대입하여 계수행렬을 얻는다.
step 3) 계수행렬의 행렬식은 0이라는 것을 통해 고유진동수를 구한다.
step 4) 고유진동수를 통해 고유벡터를 구한다.
step 5) 미정계수를 초기조건을 통해 구한다.

예제 7) 이산화탄소는 다음 그림과 같이 두 개의 용수철로 연결된 세 물체로 모델링할 수 있다. 이때 고유진동수와 고유모드를 구하라.

step 1) 운동방정식을 기술한다.

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0\ , \\
&m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0\ , \\
&M\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0\ .
\end{aligned}
$$

step 2) 계수행렬을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
(k-\omega^2 M)x_{10} - kx_{20} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0\ , \\
-kx_{10} + (2k-\omega^2 m)x_{20} - kx_{30} &= 0\ , \\
-kx_{20} + (k-\omega^2 M)x_{30} &= 0\ .
\end{aligned}
$$

step 3) 행렬식이 0이라는 것을 통해 고유진동수를 구한다.

$$
\begin{vmatrix} k-\omega^2 M & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 M \end{vmatrix} = 0 \qquad \omega = 0, \qquad \pm\sqrt{\frac{k}{M}}, \qquad \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2M}{m}\right)}
$$

step 4) 고유벡터를 구한다.

첫 번째 고유진동수는 세 물체가 같이 병진운동하는 것을 의미한다.
두 번째 고유진동수는 m을 중심으로 M이 진동하는 것을 의미한다.
세 번째 고유진동수는 두 M이 같이 진동하고 m이 반대 방향으로 진동하는 것을 의미한다.

step 5) 문제에서 요구한 거는 step 4)까지이므로 생략.

2) 이중진자

이중진자 문제에 대하여 살펴보자. 이때 큰 각으로 진동하는 이중진자는 매우 복잡하기에, 작은 각 근사를 사용한다. 다시 말해 에너지에서 각변위는 이차항까지만 고려한다.

step 1) 운동방정식을 기술하자.

뉴턴의 운동방정식을 쓰는 방법도 물론 가능하지만, 이 문제에서는 기계적으로 식을 세울 수 있는

라그랑지안이 더 편리하다.

step 1-1) 일반화좌표를 설정한다. 여기서는 θ와 ϕ를 일반화좌표로 설정한다.

step 1-2) 운동에너지를 구한다. $T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2$

step 1-3) 위치에너지를 구한다. $V=\frac{1}{2}mgl(2\theta^2+\phi^2)$

step 1-4) 라그랑지안을 통해 운동방정식을 구한다.

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2-\frac{1}{2}mgl(2\theta^2+\phi^2)$$

$\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)$, $\frac{\partial L}{\partial \phi}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right)$에 대입하면 $\begin{cases} 2\ddot{\theta}+\ddot{\phi}+2w_0^2\theta=0 \\ \ddot{\theta}+\ddot{\phi}+w_0^2\phi=0 \end{cases}$

step 2) 계수행렬을 구한다.

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2+2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=0$$

step 3) 행렬식이 0이라는 것을 이용해 고유진동수를 구한다.

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2+2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+1 \end{vmatrix}=0$$

이를 정리하면 $w^4-4w^2+2=0$

따라서, $w=\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\,w_0$

step 4) 고유벡터를 구한다.

$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ *symmetric mode*

$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ *antisymmetric mode*

step 5) 초기조건을 이용하여 미정계수를 구한다.

$$\theta(0)=0.1\ ,\ \dot{\theta}(0)=0\ ,\ \phi(0)=0\ ,\ \dot{\theta}(0)=0$$

3) 하중이 걸린 현의 진동

이번엔 색다른 문제를 풀어보자. n개의 입자가 용수철로 연결된 상태에서 진폭이 충분히 작아 입자가 위아래로만 움직인다는 상황적 근사를 사용할 때의 운동을 기술하자.

step 1) 운동방정식을 기술하자.

이번에도 마찬가지로 라그랑지안을 사용하는 것이 더 편리하다.

step 1-1) 여기서는 횡변위 $q_i(i=1,2,\dots,n)$를 일반화좌표로 설정한다.

step 1-2) 운동에너지를 구한다. $T=\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots\dot{q}_n^2)$

step 1-3) 위치에너지를 구한다. $V=\sum_k \frac{1}{2}K(q_{k+1}-q_k)^2$

step 1-4) 라그랑지안을 통해 운동방정식을 구한다.

$L=\frac{1}{2}\sum_k\left[m\dot{q}_k^2-K(q_{k+1}-q_k)^2\right]$ 에서 $m\ddot{q}_k=-K(q_k-q_{k-1})+K(q_{k+1}-q_k)$

step 2) 계수행렬을 구한다.

step 3) 행렬식이 0이라는 것을 이용해 고유진동수를 구한다.

$$\begin{vmatrix} 2K-m\omega^2 & -K & 0 & \cdots & 0 \\ -K & 2K-m\omega^2 & -K & \cdots & 0 \\ 0 & -K & 2K-m\omega^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2K-m\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

이 방정식을 푸는 것은 쉽지 않아 보인다. 이 문제는 매뉴얼을 벗어나는 유일한 문제라고 할 수 있는데, 이 경우 $q_k=a_k\cos wt$일 때 $a_k=Asink\phi$를 대입하면 간단히 해결할 수 있다.

$$-mw^2Asin(k\phi)=KA[\sin(k\phi-\phi)-2\sin(k\phi)+\sin(k\phi+\phi)]$$

식을 정리하면 $w_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$에 대하여 $w=2w_0\sin\frac{\phi}{2}$임을 알 수 있다. 이때 경계조건 $a_{n+1}=0$을 사용하면 ϕ를 구할 수 있다.

$$(n+1)\phi=N\pi,\quad w_N=2w_0\sin\left(\frac{N\pi}{2n+2}\right),\ a_k=Asin\left(\frac{N\pi k}{n+1}\right)$$

이때 N은 진동계의 기준 모드를 표시한다. 즉, 1, 2, ... , n까지 총 n개의 값이 가능하다.

step 4) 고유벡터를 구한다.

$a_k = Asin\left(\frac{N\pi k}{n+1}\right)$이므로 고유벡터는 $\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{n\pi k}{n+1}\right) \end{pmatrix}$

step 5) 초기조건을 통하여 운동을 결정한다.

$$q_k = \sum_{N=1}^{n} A_N \sin\left(\frac{N\pi k}{n+1}\right)\cos(w_N t - \epsilon_N)$$

초기조건을 통해 A_N과 ϵ_N, 즉 진폭과 위상상수를 결정한다.

이 공식은 입자의 수가 매우 클 때 질량이 있는 줄의 파동을 잘 설명한다. n이 매우 크면 sin 속의 값이 매우 작기에 일차근사를 적용할 수 있고, 고로 $w_N = w_0\left(\frac{N\pi}{n+1}\right)$

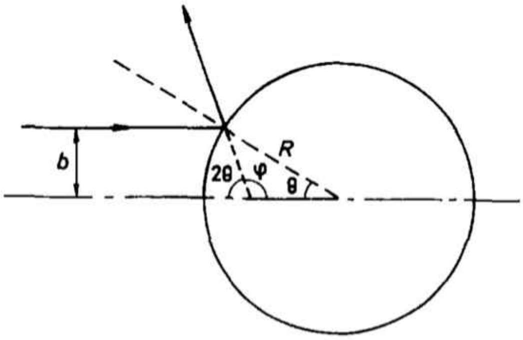
이때 장력이 F라면 $w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{F}{md}}$ 이다. 식을 정리하면 $w_N = N\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{F}{m/L}} = Nw_1$

또한, N차 모드의 운동에 $q_N(w,t) = A\sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)\cos(w_N t) = Asin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_N}\right)\cos 2\pi f_N t$

이때 $\lambda_N = \frac{2L}{N}$, $f_N = \frac{w_N}{2\pi} = \frac{Nw_1}{2\pi}$이다. 이는 정상파가 나타나는 현에서 다뤘던 내용과 정확히 일치한다.

4. 종합 문제풀이

Q1) 반지름이 R인 강체의 미분산란단면적을 구하여라.



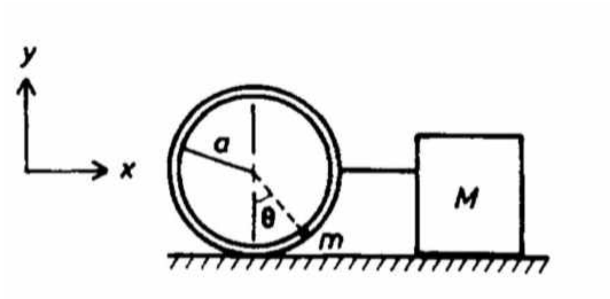
Q2) 수성에 작용하는 중력장은 아래 식과 같이 된다고 가정하자.

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} + \epsilon r$$

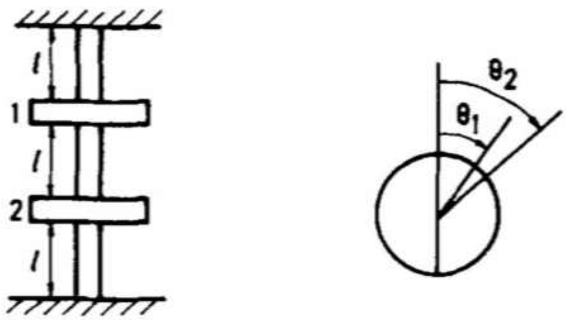
이때 극지각은 얼마인가?(단, 앞서 유도한 공식을 보지 않도록 한다.)

Q3) 아래 그림처럼 질량 M인 블록이 반지름이 a이고 질량이 없는 원형트랙가 마찰 없는 수평면에 연결되어있다. 점입자 m은 마찰없는 원형트랙 위에 놓여있다.

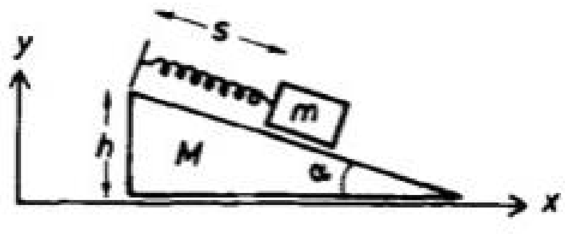
(a) 본인의 방식대로 라그랑지안을 구하라.
(b) 운동방정식을 기술하라.
(c) 작은 각에 대하여 진동할 때 그 주기를 구하라.



Q4) 그림과 같이 비틀림진자 세 개로 연결된 두 개의 원판이 있다. 비틀림상수가 k, 관성모멘트는 I일 때 시간에 따른 두 디스크의 각변위를 구하라. 단, 초기조건은 $\theta_1(0)=0, \theta_2(0)=0, \dot{\theta}_1(0)=0, \dot{\theta}_2(0)=\Omega$이다.



Q5) 질량 m이 자유로운 경사면 M 위의 용수철(힘 상수 k)과 연결되어 있다.



(a) 용수철의 자연 길이가 d일 때, 평형 상태에서 용수철이 늘어난 길이를 구하여라.
(b) 라그랑지안을 이용하여 물체의 운동방정식을 기술하라. 일반화 좌표는 경사면의 x 좌표와 용수철의 길이 s를 기준으로 한다.
(c) 진동의 고유진동수는 얼마인가?