Road to Lagrangian Formalism

Witten by M. Yoon

May, 2022

Preface to Lagrangian Mechanics

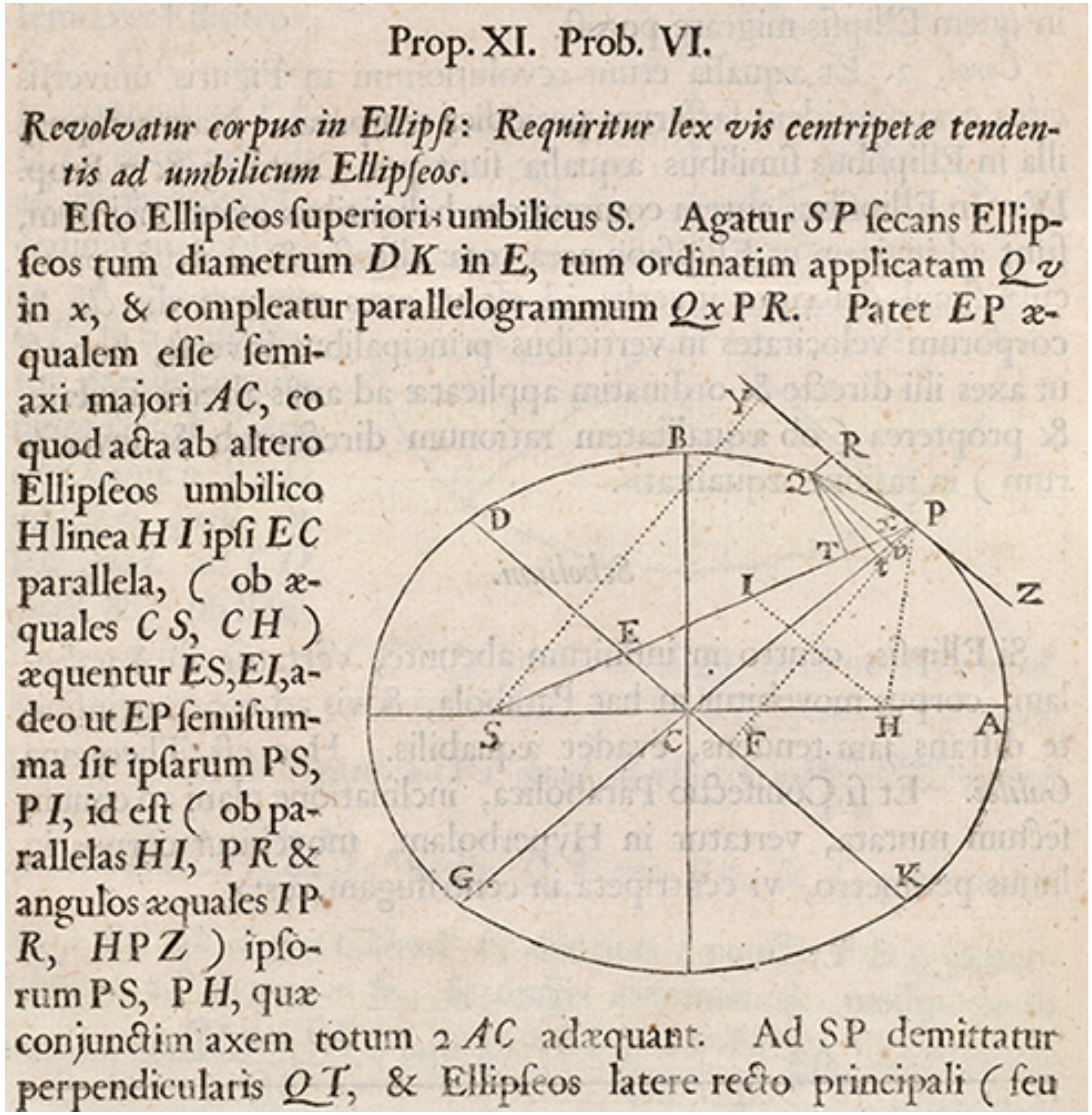
Newtonian Mechanics

Newton은 역사상 처음으로 자연 현상을 수학적으로 기술한 사람, 물리학의 창시자입니다.

Newton의 저서 제목 '자연 철학의 수학적 원리'는 현재 학문으로 정립된 물리학의 성격을 매우 간결하면서도 정확하게 나타내고 있습니다.

고전역학은 Newton의 운동방정식, 또는 운동 제2 법칙이라 불리는 아래 식에서 출발합니다.

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$$


Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

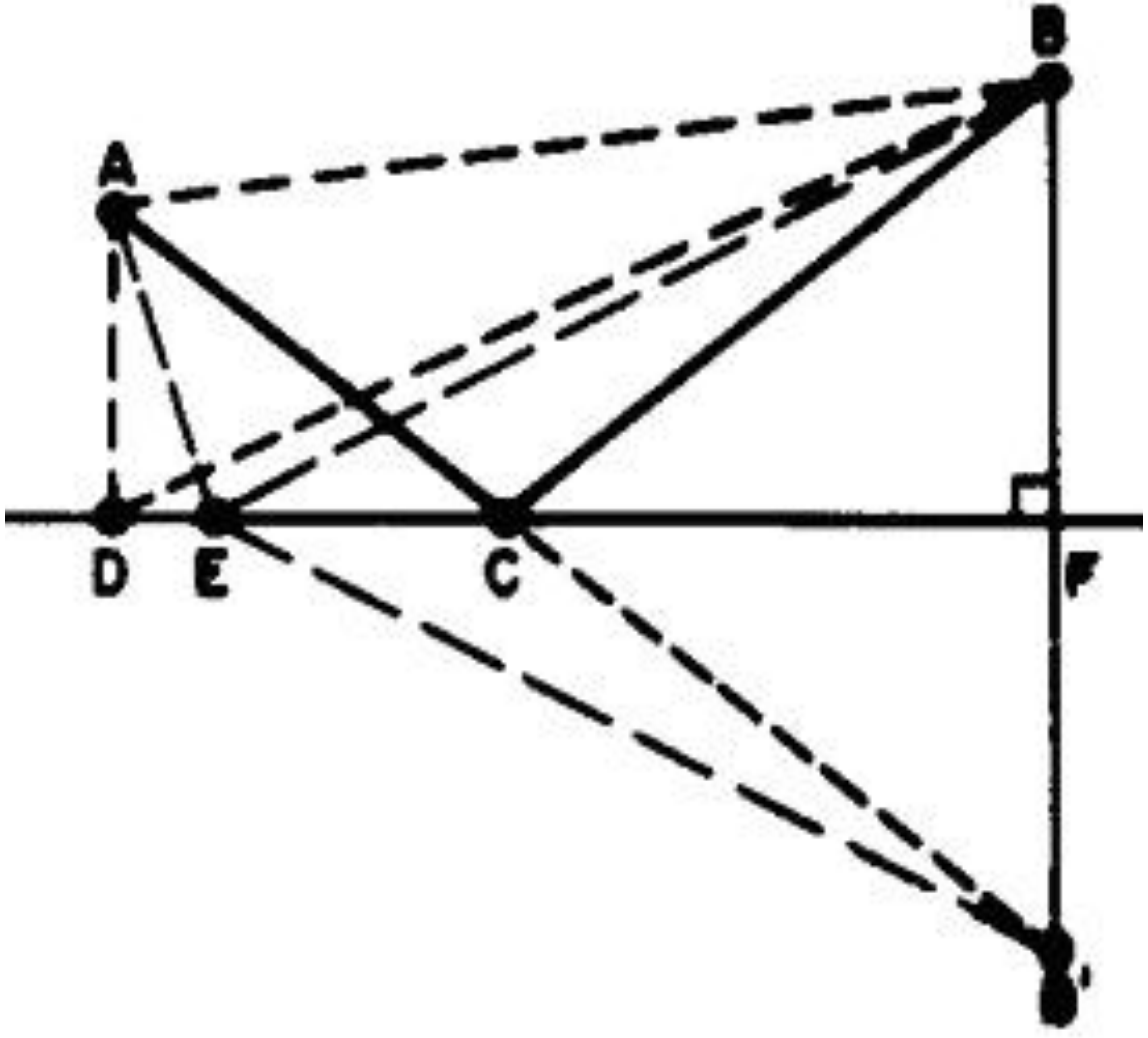
Eſto Ellipſeos ſuperioris umbilicus S. Agatur *SP* ſecans Ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico *H* linea *HI* ipſi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* ſemiſumma ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipſorum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2 *AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu

Fermat’s Principle

Fermat의 최소 시간 원리는 기하광학과 파동광학 사이에 다리를 놓는, 빛에 대한 원리입니다.

Fermat의 최소 시간 원리의 statement는 다음과 같습니다.

“두 점을 지나는 빛은 항상 걸리는 시간이 최단 시간이 되는 경로를 택한다.”



d'Alembert's Principle

Newton의 Principia가 출간된지 50년이 조금 더 지나가던 시점에서, d'Alembert는 물체의 운동에 관한 새로운 원리를 발표합니다.

d'Alembert의 원리는 configuration space† 위에서 다음과 같이 표현됩니다.

$$\sum_i \delta \mathbf{r}_i \cdot \left(\mathbf{F}_i - (\dot{m}_i \mathbf{v}_i + m_i \dot{\mathbf{v}}_i) \right)$$

†Lagrangian mechanics의 '구조'를 알 수 있는 중요한 개념이기에 다음 페이지에 설명을 추가했으나, 위상수학에 대한 약간의 사전지식을 필요로 하며, 글의 흐름에 필수적이지 않으므로 읽지 않아도 좋습니다.


DE

DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniére nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une maniére quelconque.

Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,

Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

Configuration Space

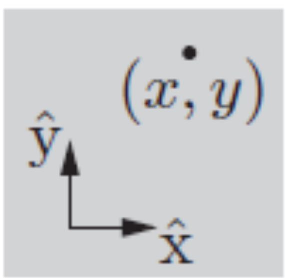
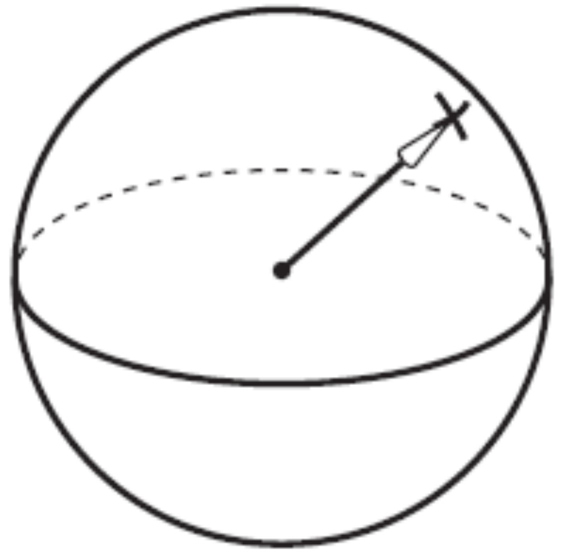
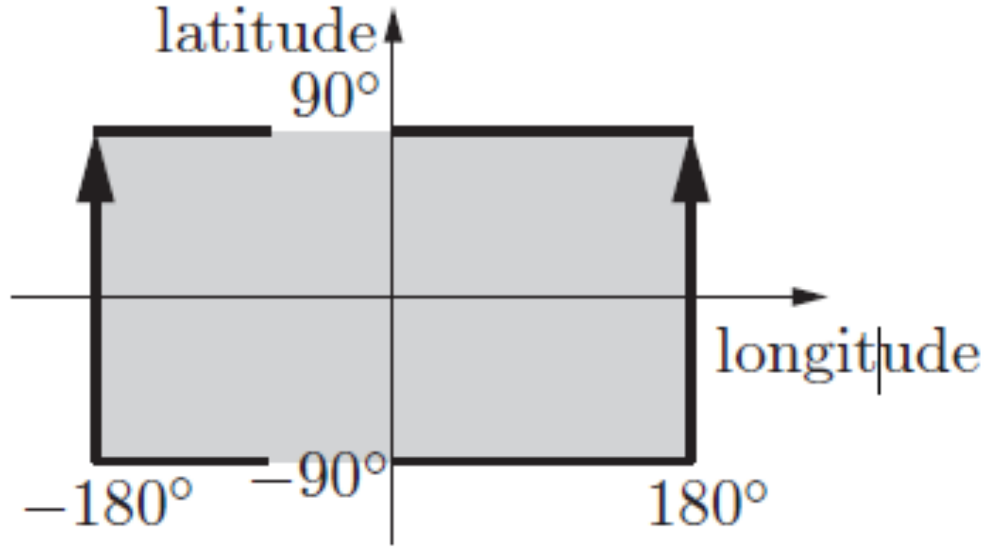
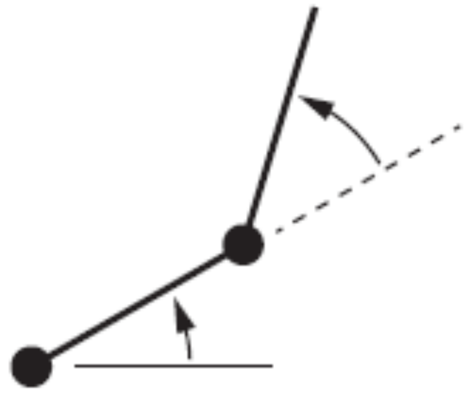
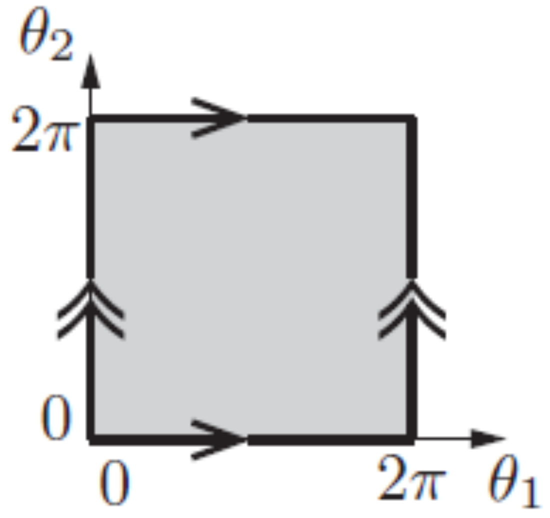
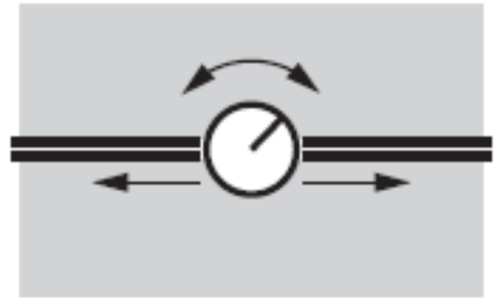
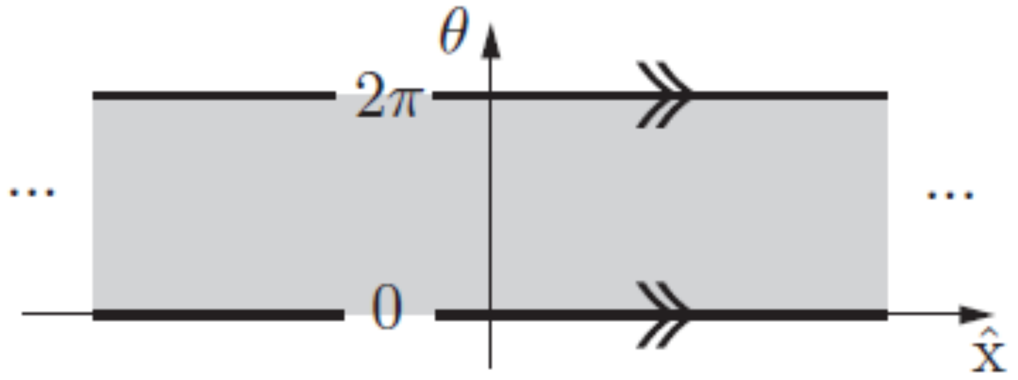
Lagrangian mechanics에서는 일반화 좌표를 이용해 운동을 기술하는데, 이는 역학계의 구속 조건†으로부터 물체의 위치를 **physical space**의 차원보다 더 적은 수의 숫자로 표현할 수 있게 해줍니다. 이러한 일반화 좌표는 **configuration space**라 부르는 **manifold**에서의 좌표로 생각할 수 있습니다.

예를 들어, 이중진자의 **configuration space**는 두 원의 곱††, 즉 토러스입니다. 이중진자의 자유도가 **2**라는 사실로부터 이 답이 타당하며, **configuration space**의 형태가 역학계의 구속이 어떻게 구성되는가에 대한 약간의 정보 역시 담을 수 있다는 사실을 알 수 있습니다.

여기서 이전 페이지의 $\delta \mathbf{r}$ 을 다시 살펴보면, **configuration space**의 **tangent buldle**의 원소라는 것을 알 수 있습니다.

†각 **holonomic** 구속 조건은 물체의 자유도를 하나 줄인다.

†† 두 **topological space** S^1의 **cartesian product** $S^1 \times S^1 = T^2$로 수학적으로 문제없는 **wording**이다. 이후 언급되는 **space**의 '형태'는 **topology**를 말한다.

system	topology	sample representation
point on a plane	 $\mathbb{E}^2$	 $\mathbb{R}^2$
 spherical pendulum	 S^2	 $[-180°, 180°) \times [-90°, 90°]$
 2R robot arm	 $T^2 = S^1 \times S^1$	 $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$
 rotating sliding knob	 $\mathbb{E}^1 \times S^1$	 $\mathbb{R}^1 \times [0, 2\pi)$

Hamilton's Principle and the Lagrangian Formalism

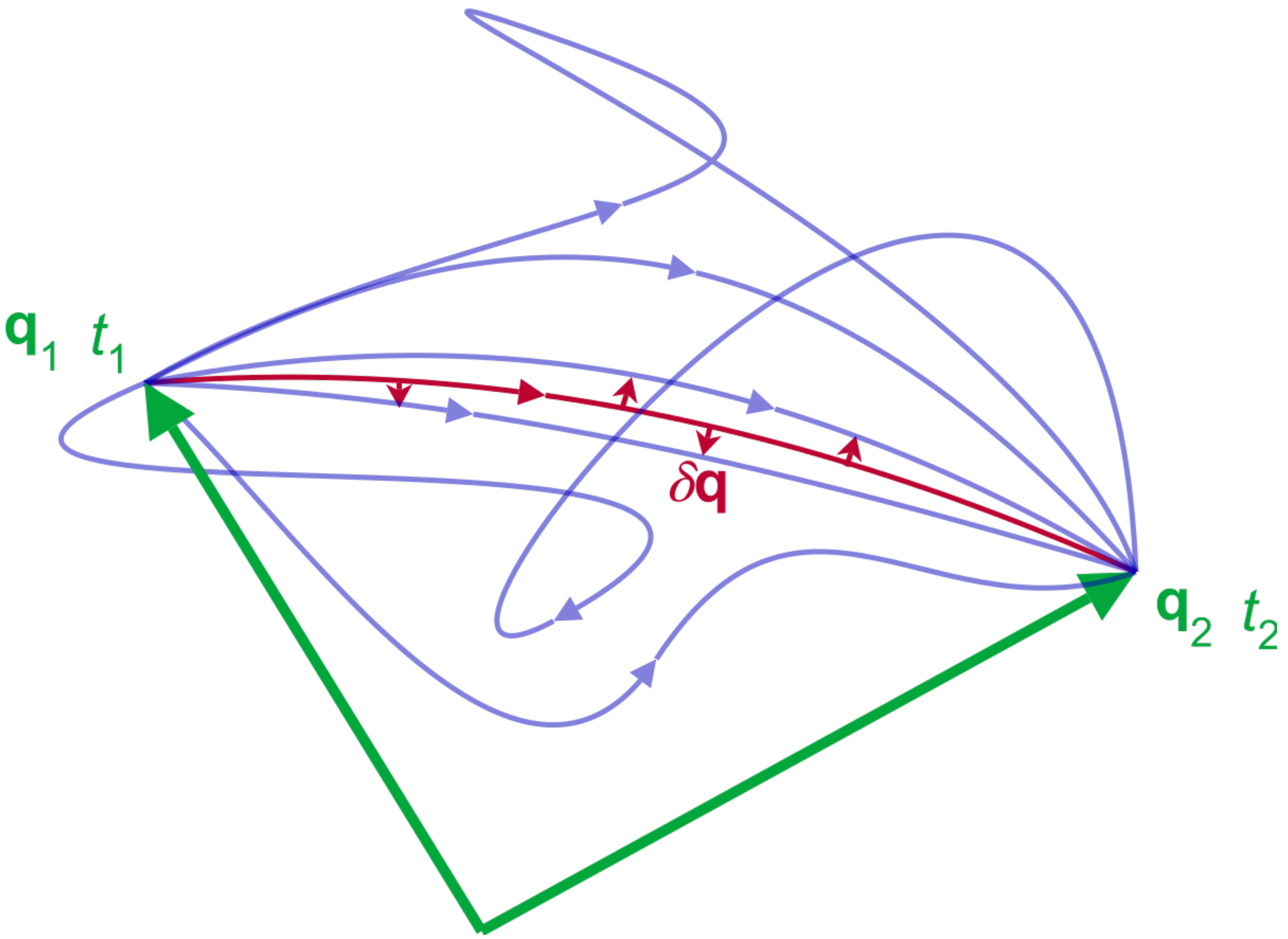
Hamilton's Principle

앞선 두 **principle**의 발표는 과학사에서 한 거대한 이론의 등장을 암시합니다.

Hamilton의 원리는 특정 시간 간격에서 물체의 운동은 항상 어떤 물리량이 최소†가 되도록 결정된다는 원리입니다. 여기서 '어떤 물리량의 최소'란 다음을 의미합니다.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) = 0^{\dagger}$$

여기서 '어떤 물리량'인 **S**를 **action**, 일반화좌표와 그 시간 미분, 시간으로 이루어진 함수 L을 **lagrangian**이라 부르기로 합니다.

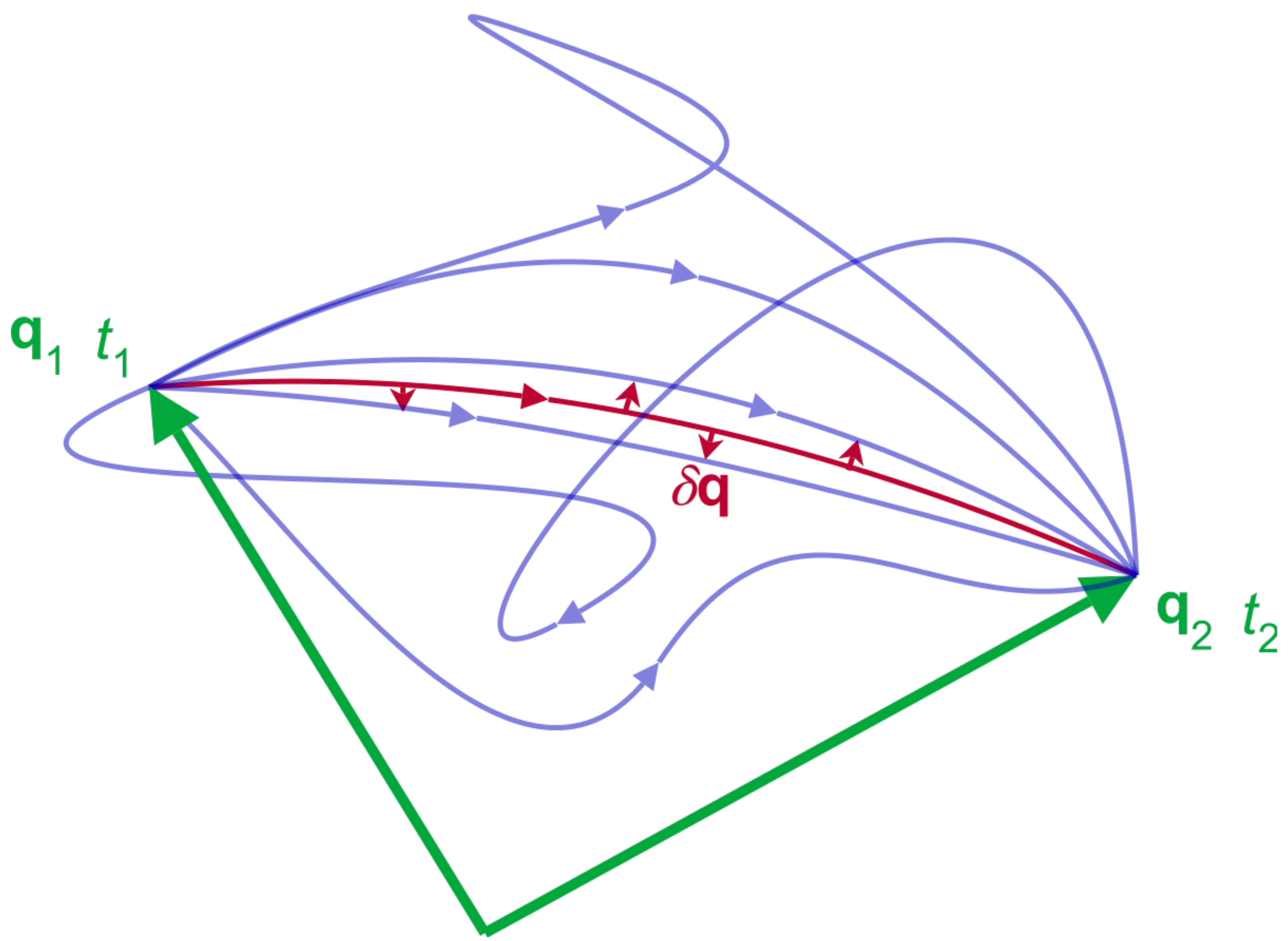


†**Hamilton**의 원리를 최소 **action**의 원리라고 부르기도 하지만, 수학적인 **statement**에서도 알 수 있듯 반드시 최소여야하는 것은 아니다. 보다 정확히는 극값에 있어야 한다.

††$\mathbf{q}$는 **configuration space**의 벡터이다.

Hamilton's Principle

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\right) = 0$$



Hamilton의 원리의 수학적인 statement로부터 두 가지 질문에 대한 답이 필요할 것입니다.

1. 극값을 어떻게 찾아내는가?
2. lagrangian은 어떻게 결정하는가?

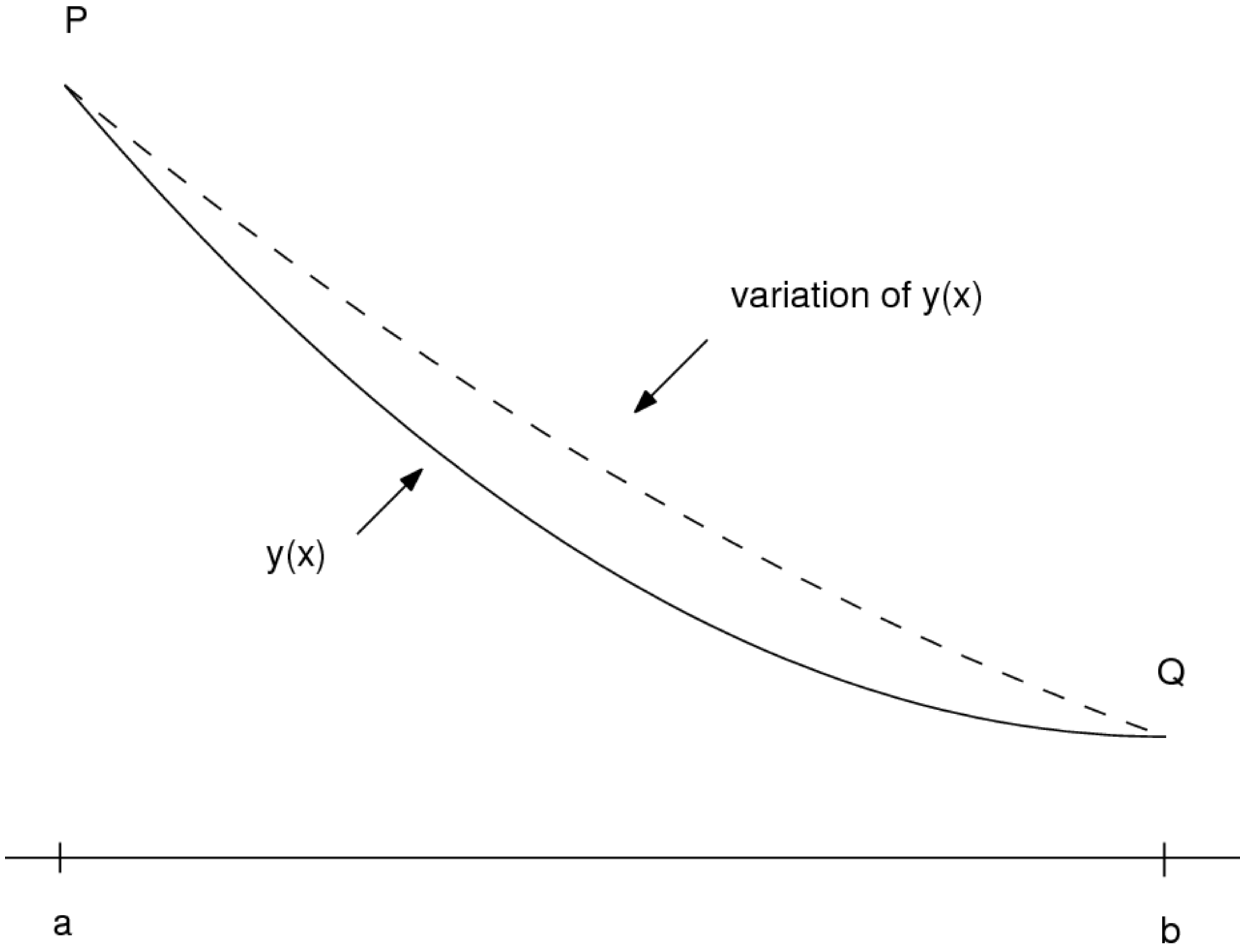
Calulus of Variations

Action S는 함수 L을 정의역으로 하는 함수로 이러한 함수를 functional이라 부릅니다.

Brachistocrone 문제에서 출발한 변분법은 functional의 최솟값을 구하는 대표적인 전략인데, 최솟값에서는 함수의 미소변화량이 0이 된다는 아이디어를 사용합니다.†

L의 변수의 변화에 따른 S의 변화량을 δS로 쓰고, S의 변분이라 부르기로 합니다. Einstein Summation Convention을 사용하면 다음과 같습니다.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \text{††}$$



†**Fermat**는 **Fermat**의 원리 증명에 아이디어를 사용하여 뉴턴의 미적분 발명 이전에 함수의 최솟값을 구할 수 있었다.

††이 식을 **total derivative**와 비교해 보라. 변분은 직관적으로 q_i와 $\dot{q}_i$축으로 구성된 공간 상에서의 전미분처럼 생각할 수 있다.

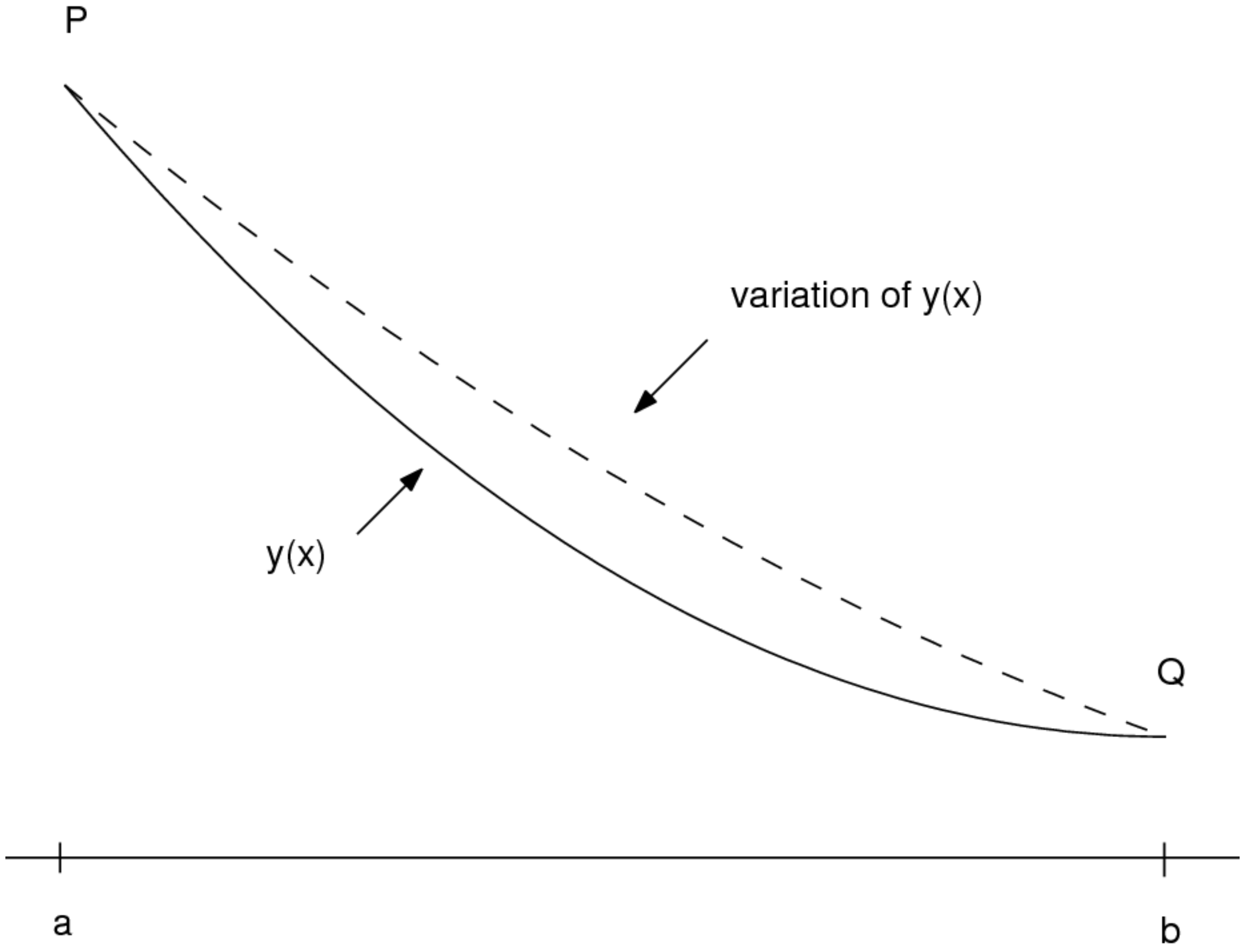
Lagrange's Equation

S를 최소로 만드는 $\mathbf{q}$를 $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_m(t)$와 같이 가정합니다. 이는 다른 q^i, $\dot{q}^i$ 경로 위에서 L을 적분할 때, 즉 $\mathbf{q}(t)$을 $\mathbf{q}_m(t) + \delta\mathbf{q}(t)$로 변화시킬 때(단, $\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = 0$) S의 값이 항상 증가한다는 것을 의미합니다.

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \right) \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i
\end{aligned}
$$

Hamilton의 원리 $\delta S = 0$를 적용하여 변분법의 결과인 아래의 식을 얻어낼 수 있으며, 이를 **Lagrange**의 방정식이라 합니다.

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0
$$



Determining Well-Known Lagrangians

Lagrangian

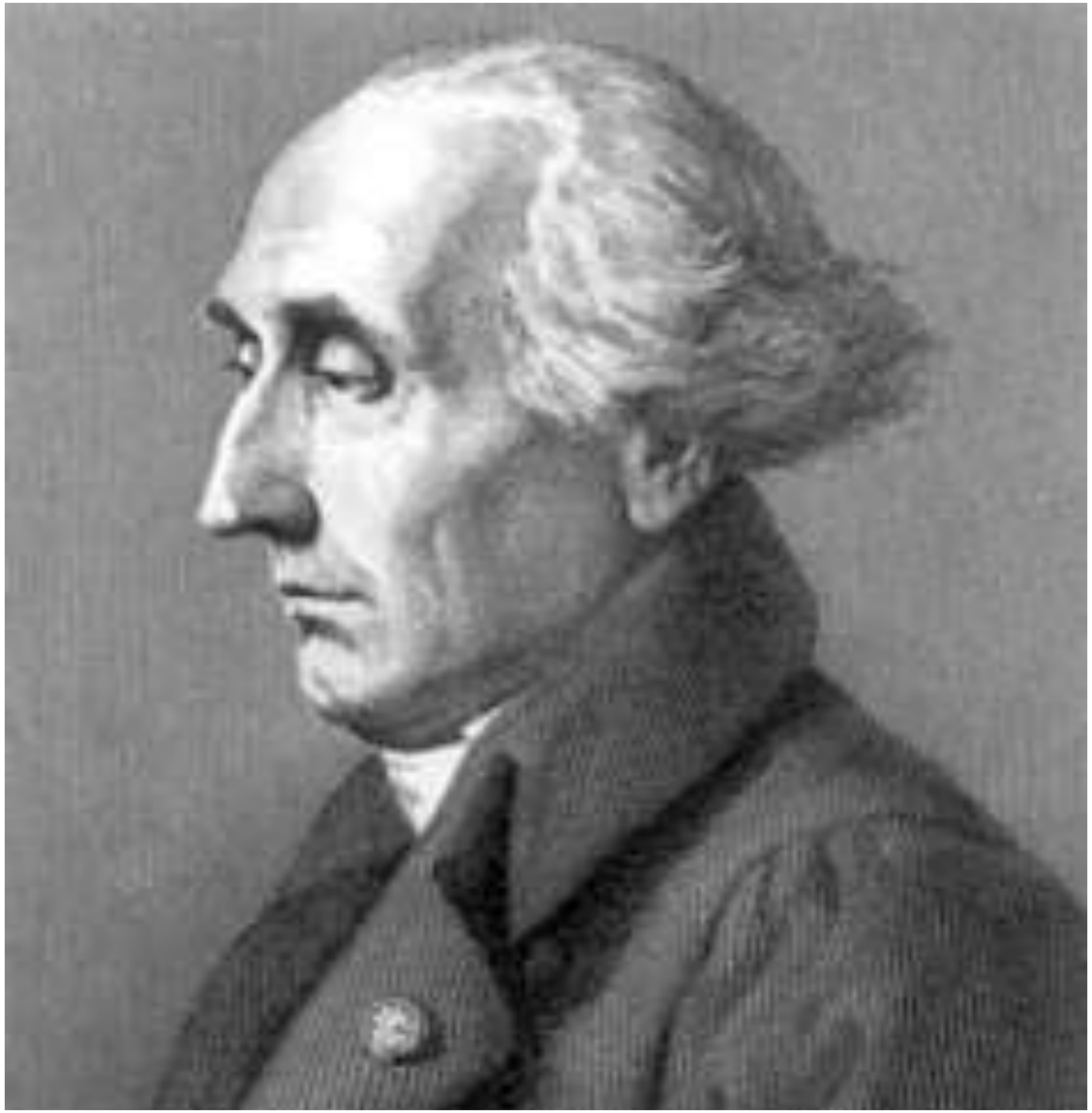
어떤 물리계의 운동을 기술하고자 하느냐에 따라 lagrangian은 달라집니다.

Lagrangian의 유용함은 여기에서 빛을 보는데, 고전역학에서만 사용할 수 있었던 Newton의 운동 법칙과는 달리 Lagrange 방정식은 적절한 lagrangian을 찾기만 한다면 언제나 운동방정식을 도출할 수 있습니다.

Lagrangian의 개념을 도입하면 각 상황에 알맞은 운동방정식을 하나씩 찾는 것보다 세련된 형태로 물체의 운동을 기술할 수 있습니다. 또한 lagrangian은 동등한 좌표계에서(e.g. 관성계간) 동일한 형태를 가져야하므로 약간의 힌트가 제공된 셈입니다.

자명하게 lagrangian에 0이 아닌 상수를 곱하거나 더해도 운동방정식은 변하지 않으므로† lagrangian은 유일하지 않습니다.

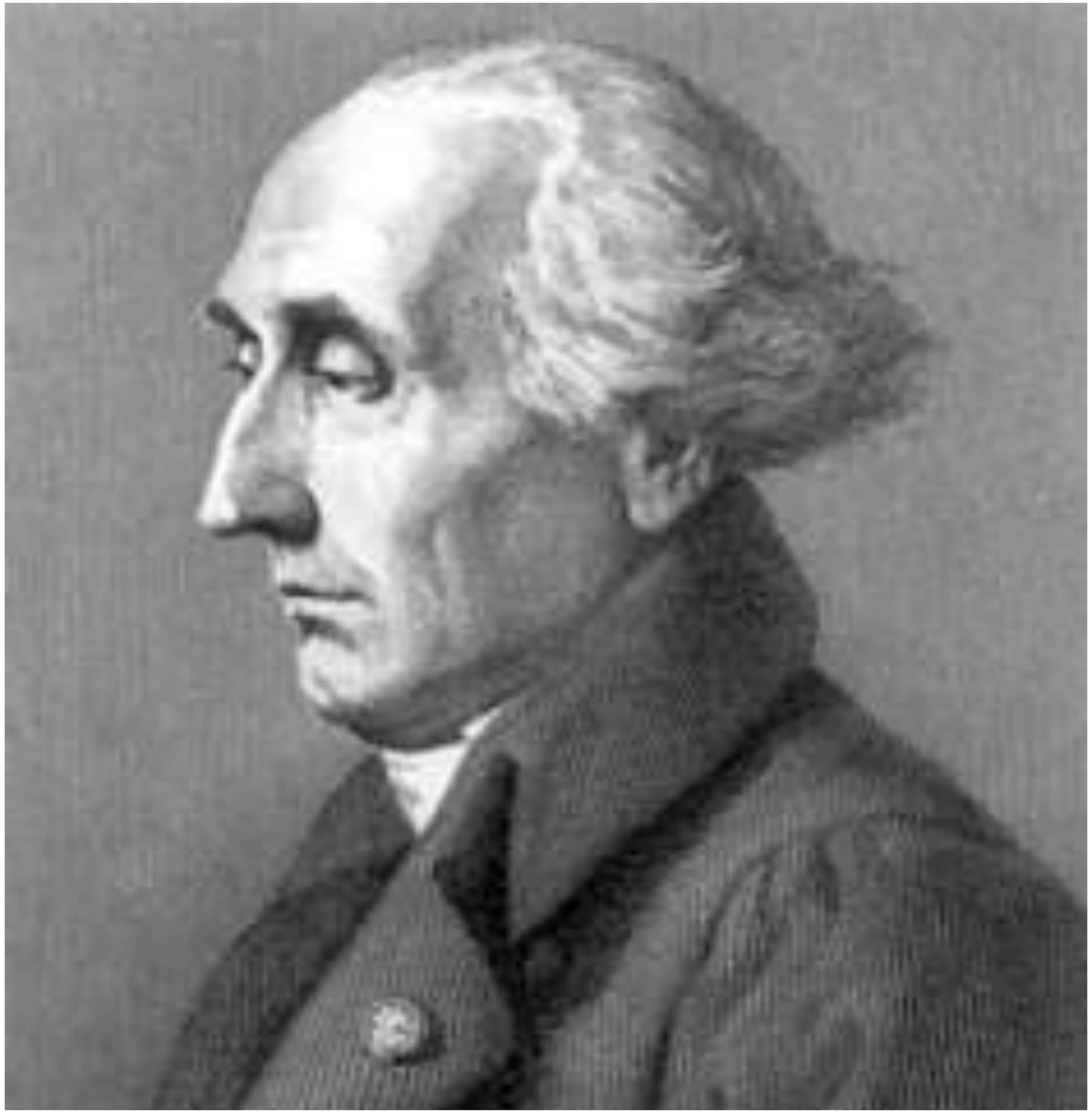
†action이 최솟값을 갖게 하는 변수의 값이 변하지 않으므로



Lagrangian

Lagrange 방정식을 관찰하면 조금 덜 자명한 결과를 얻는데, 임의의 함수 $f(q,t)$에 대해 $\frac{d}{dt}f$가 lagrangian에 더해져도 운동방정식은 불변(invariant)임을 알 수 있습니다. 이러한 대칭성(변환에 대한 invariance)은 gauge symmetry 등의 대칭성의 배경이 됩니다.

힘이라는 개념을 도입해 인과론적으로 물체의 운동을 기술한 Newton의 운동법칙과, 운동을 기술하고자 하는 범위가 명백히 정해져있고 두 점 사이의 경로에 대한 조건으로 운동을 기술한 Lagrange의 운동법칙이 같은 결과를 내놓는다는 점은 꽤나 흥미롭습니다. 고전역학을 접하며, 우리는 우리가 물리적 본질이라고 받아들이는 것이 그 현상을 기술하는 수학의 구조에 달려있었다는 사실을 깨닫게 됩니다. 이것은 우리가 아직도 고전역학을 공부해야하는 이유 중 하나입니다.

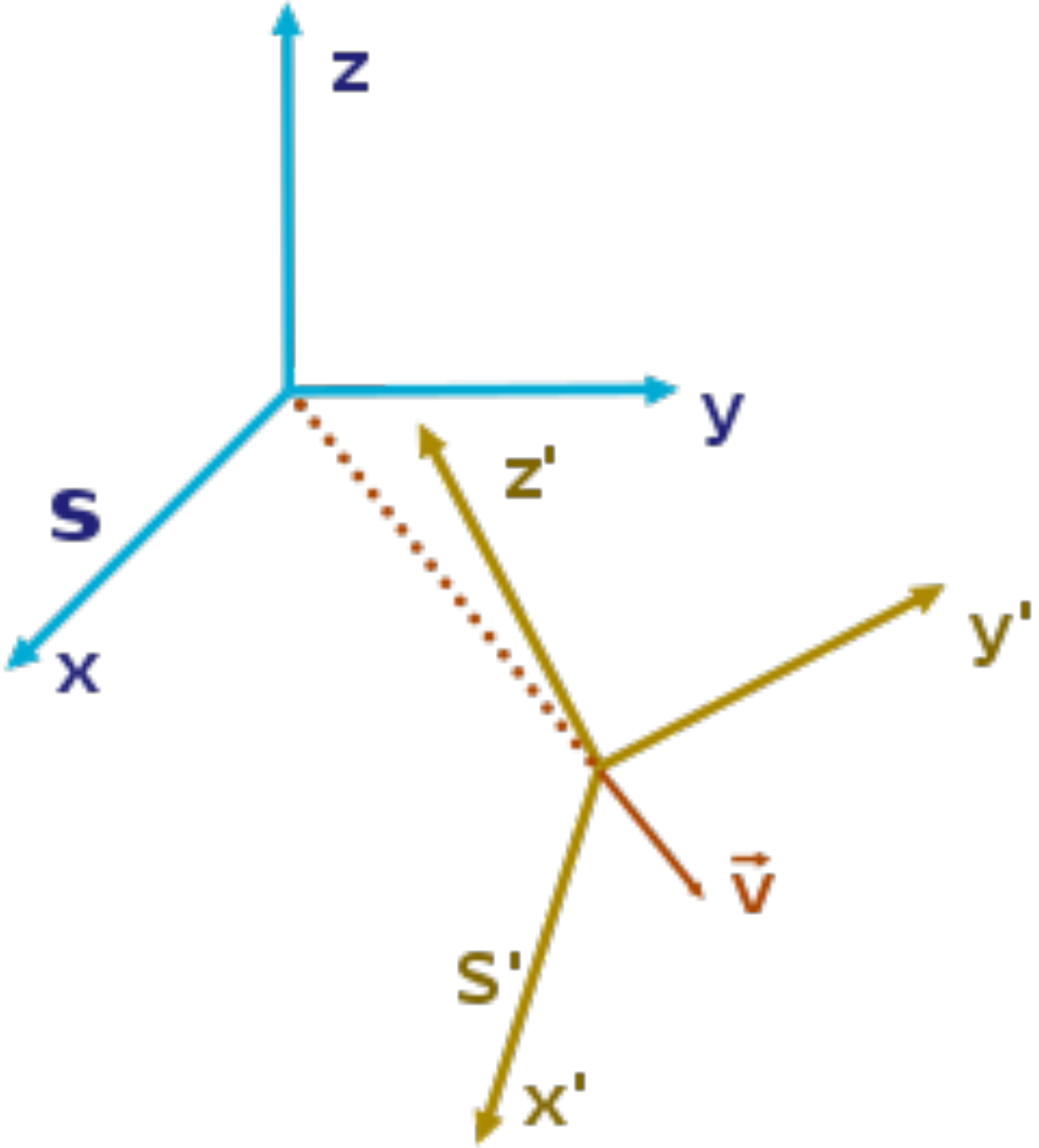


Inertial Frame

관성계란 공간과 시간의 homogeneity와 공간의 isotropy가 보장되는 좌표계를 말합니다.

공간과 시간은 homogenous하므로, L은 위치와 시간에 무관해야합니다. 또한 공간의 isotropy로부터 L이 속도의 방향에도 무관함을 알 수 있습니다. 따라서 L은 v^2의 함수입니다.

따라서 Lagrange 방정식으로부터 속도벡터 $\mathbf{v}$는 상수이며, 등속도 운동하는 좌표계와 관성계가 동치라는 사실을 알 수 있습니다.



Free Particle in Classical Mechanics

이제 **lagrangian**을 찾을 준비가 끝났습니다. 가장 먼저 관성계에서 자유 입자의 **lagrangian** L을 찾아봅시다.

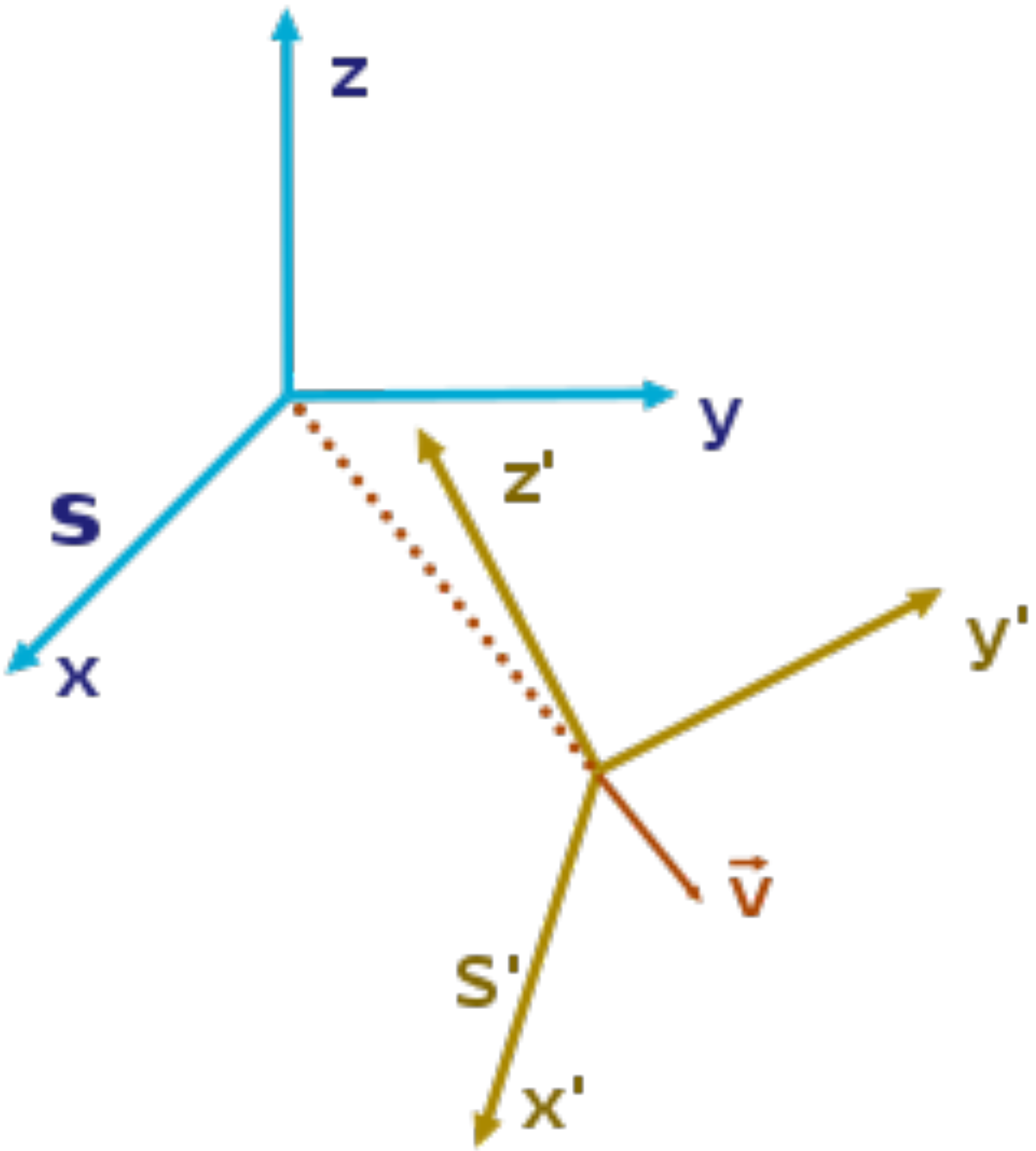
앞선 정의에 따라, 모든 관성계는 동등합니다. 즉 **lagrangian**이 같습니다. 따라서 $L\left(\mathbf{v}^2\right) = L\left((\mathbf{v}+\mathbf{u})^2\right)$이고, 선형 근사를 통해 다음을 얻습니다.

$$L\left(\mathbf{v}^2\right) = L\left(\mathbf{v}^2\right) + \frac{\partial L}{\partial\left(v^2\right)} 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial\left(v^2\right)} 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$항이 $\dfrac{d}{dt} f(q,t)$꼴로 표현되려면 $\dfrac{\partial L}{\partial\left(v^2\right)}$이 상수이고†, 따라서 자유 입자의 **lagrangian**은 다음과 같이 주어집니다.

$$L = \frac{1}{2} m v^2$$

†$f = m\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}$



Potential Energy

입자 간의 상호작용이 존재하는 닫힌 입자계를 상정해봅시다.

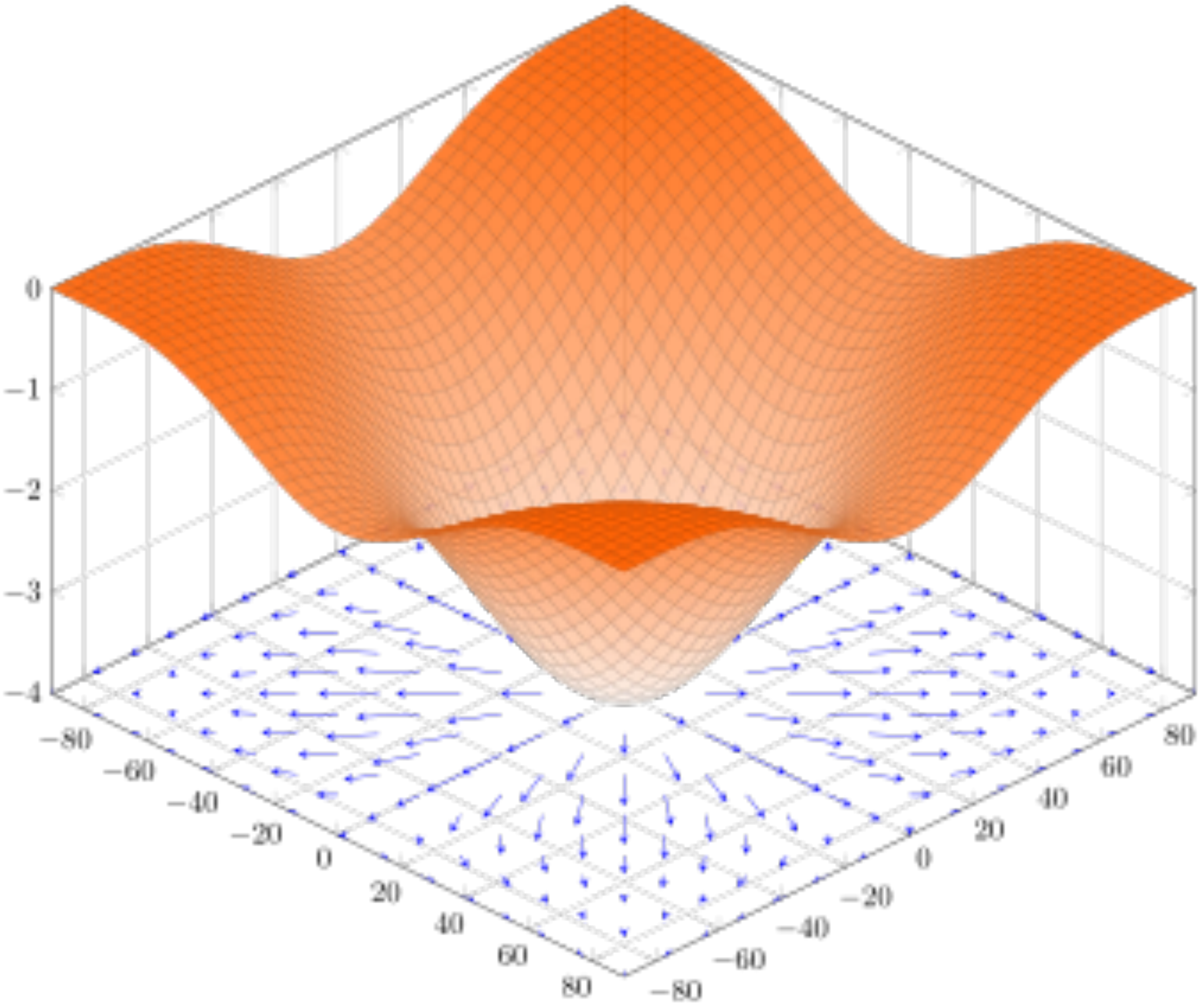
입자계의 lagrangian을 다음과 같이 써 상호작용을 기술하려는 시도해보겠습니다.

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots)$$

Lagrange 방정식 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$로부터 입자계의 운동방정식은 다음과 같습니다.

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}^{\dagger}$$

Newton의 운동방정식이 얻어졌습니다.



†∂ 뒤에 벡터를 붙인 notation은 벡터의 각 성분에 대한 미분, 즉

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2}, \frac{\partial f}{\partial r_3}\right)$$

Free Particle in Special Relativity

특수상대론에서, action은 Lorentz 변환에 불변이어야 하며, 따라서 Lorentz scalar로만 구성된다. Lorentz scalar는 ds^2 뿐이므로 SR에서 자유 입자의 action은 Minkowski 공간 상에서의 선적분, 즉 다음의 꼴입니다.

$$S = -\alpha \int_C ds$$

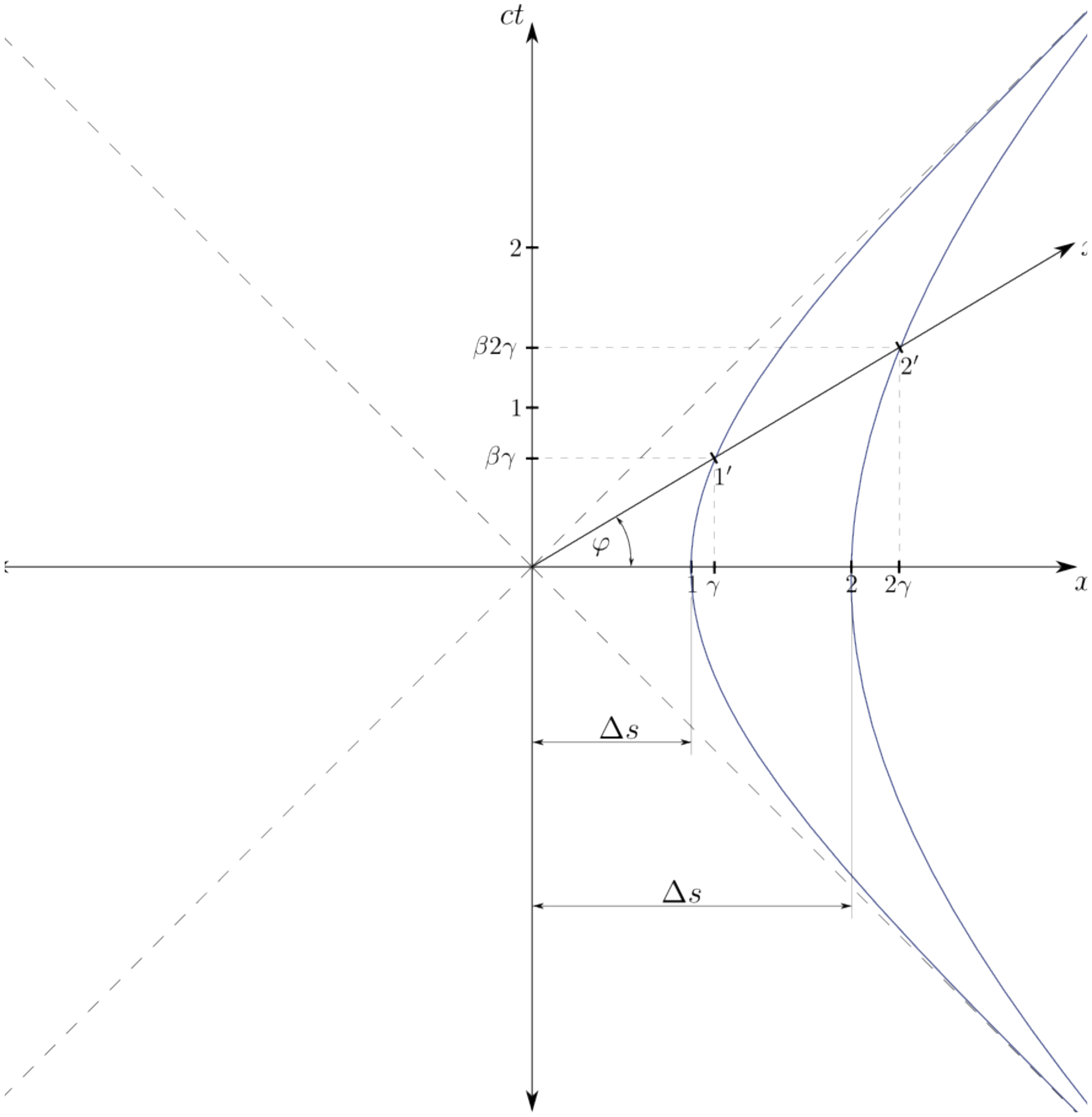
이에 따라 Lagrangian은 다음의 꼴입니다.

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

v^2이 충분히 작을 때, L은 고전역학에서의 lagrangian $\frac{1}{2}mv^2$으로 수렴하므로, α를 특정할 수 있습니다.

따라서, SR에서 자유 입자의 lagrangian은 다음과 같습니다.

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

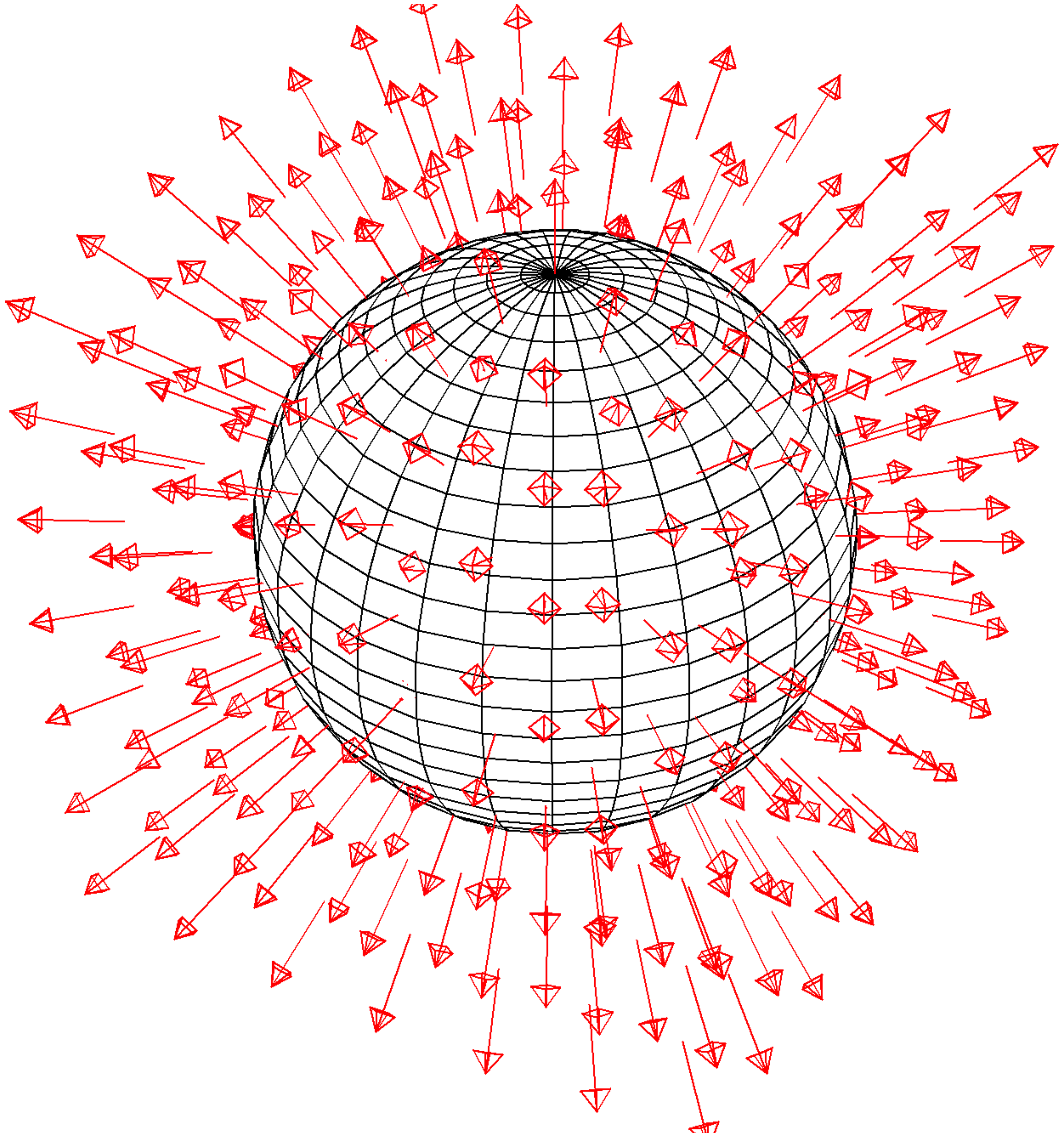


Particle in Electromagnetic Field

입자 간의 상호작용을 기술하기 위한 도구가 바로 장(field)입니다. Newton 시대에 장은 단순히 계산 도구로 취급할 수 있었지만, SR의 등장 이후 상호작용의 속도가 c라는 한계를 가지며 장은 물리적인 실체가 있는 것으로 다뤄집니다.†

전자기력을 기술하는 장은 4-벡터장으로, $A^i = (\phi, \mathbf{A})$로 표현합니다.†† 여기서 ϕ와 $\mathbf{A}$는 각각 scalar potential, $\mathbf{A}$는 vector potential입니다.

전자기학의 범위에서는, 질량 m 뿐만 아니라 전하량 역시 입자를 특정합니다. 따라서 action은 고전역학에서보다 더 복잡해질 것으로 예상할 수 있습니다.



†전자를 원격작용, 후자를 근접작용이라 칭한다.
††SR 없이는 전자기학을 고려할 수 없다.

Particle in Electromagnetic Field

오로지 전자기장 A_i에 의한 효과만을 고려하면, **action**의 일부분을 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$-q\int A_i dx^i$$

비례상수 $\frac{1}{c}$를 곱해† **SR**에서 자유 입자의 **action**과 더하면, 다음과 같은 **action**이 얻어집니다.

$$S = -\int_C \left(mcds + \frac{q}{c}A_i dx^i \right)$$

식을 정리하면, **lagrangian**은 다음과 같습니다.

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - q\phi$$

Lagrange 방정식을 적용하면 다음과 같습니다.

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - q\nabla\phi + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})^{††}$$

†A_i가 상수배 되는 효과로, 기존에 사용하던 전자기장의 **scale**을 따르기 위함이다.

††$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$을 전기장, $\nabla\times\mathbf{A}$를 **H**장이라 하고, 이 운동방정식은 **Lorentz** 힘과 같은 결과이다.