

## 2023.04.26. PNS 2회차 강의자료

22103 조연우

010-7233-9259

### Topic 1. 표준중력

$$g = 978.03185(1 + a \sin^2 \phi + b \sin^4 \phi)(Gal)$$

$$(a = 0.005278895, b = 0.000023462, \phi = \text{관측지점의 위도})$$

표준 중력이란 지구를 내부 밀도가 균일하고 표면이 매끄러우며, 적도 반지름이 극 반지름보다 조금 더 긴 이상적인 회전 타원체로 가정한 상태에서 만유인력과 원심력의 합력으로 계산한 이론적인 중력 값이다. 기지실Ⅲ 수업자료에서는 다음과 같은 식이 소개되어 있다.

필자가 자료를 찾아본 결과  $\sin \phi$ 의 급수 전개로 중력 값을 정확히 얻어내는 자료를 발견했지만, 유도과정이 상당히 어려웠다. 그래서 우리는 근사를 이용해  $\sin \phi$ 의 2차항까지만 비교적 간단한 방법으로 구해보고자 한다.

(<https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA075988.pdf>)

근사는 극반지름과 적도반지름이 거의 차이가 없다는 것이다.(실제로 적도 반지름은 6,378km, 극반지름은 6,356km이므로 타당한 근사이다.) 이를 바탕으로 밀도가 균일한 구와 일정한 음의 질량이 중첩된 상황으로 해석하기로 한다. 또, 회전타원체의 이심률( $\epsilon$ )을 근사적으로  $(R_E - R_P)/R_E$ 으로 정의하고  $\epsilon \ll 1$  근사를 사용하자. ( $R_E, R_P$ 는 각각 극반지름과 적도 반지름)

#### 1.1 위도에 따른 질량밀도 구하기

Hint 1: 타원체의 단면을 지구의 중심이 원점인 극좌표계로 표현한다.

( $\sigma = \text{두께} \times \rho$ 임을 이용한다.)

Hint 2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$$

#### 1.2 표면에서의 중력장 구하기

Hint 1: 표면전하 밀도를 통해 먼 근방에서 전기장을 구하는 것과 똑같이 하면 된다.

Hint 2: 중력장 식을 유심히 관찰하면  $P_0(\cos \theta)$ ,  $P_2(\cos \theta)$  항으로 분리할 수 있다. 잘 정리해보자!

### 1.3 중력 퍼텐셜의 다중극 전개

중력 퍼텐셜도 사실 라플라스 방정식을 만족한다. (둘다 가우스법칙을 만족하기 때문이다.) 이때 지구를 회전 타원체로 가정했으므로 구 대칭 상황으로 볼 수 있고, 르장드르 전개를 할 수 있다.

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (1)$$

Hint: 르장드르 전개란?

구 대칭성(구면 좌표계에서 회전대칭성이 있는) 상황에서 라플라스 방정식 ( $\nabla^2 \Phi = 0$ )을 만족할 때 사용할 수 있는 일반해의 한 종류. (Griffith 전자기학 책을 잘 읽다보면 르장드르 전개는 만능이 아니라는 것을 깨닫게 될 것이다.. 화이팅)

퍼텐셜을 르장드르 전개했을 때  $P_0(\cos \theta)$ ,  $P_2(\cos \theta)$  항의 계수를 비교해보자. (홀극항을 잘 관찰하면 신기한 것을 발견할 수 있을 것이다.)

### 1.4 원심력

위도에 따라 원심력 항을 나타내서 중력을 추가로 보정해보자

### 1.5 평형조건

행성의 표면이 평형상태에 있으려면 어떤 조건을 만족해야 할까? 바로 등퍼텐셜면이어야 한다는 것이다. 각각  $\theta = 0, \theta = \pi/2$ 인 상황에서 퍼텐셜이 같다는 조건을 사용해보자. 그리고 적도에서 측정한 중력가속도를  $g$ 라고 하고 식을 정리해보자.

오늘 활동은 여기서 끝!