2023 일반물리학 I 과제1 풀이

[빠른 답안]

1. 60km
2. (a) 495s (b) 141s
3. 60 $^\circ$
4. 0.994m/s^2
5. $\vec{B}=-3.0\hat{i}-3.0\hat{j}-4.0\hat{k}$
6. (1) -21 (2) -1.0 (3) $-7.0\hat{i}+1.0\hat{j}-9.0\hat{k}$
7. (1) 불가능하다 (2) 중력가속도가 $7.71m/s^2$ 보다 작은 행성이면 가능하다.
8. 0.29
9. (a) $80km/h\,\hat{i}-60km/h\,\hat{j}$ (b) 0 (c) 아니오
10. $1.34\times10^4 m/s^2$
11. (a) $5.05\times10^2 N$ (b) $5.72\times10^2 N$
12. (a) $4.81m/s^2$ (b) 700N
13. $\sqrt{\frac{8}{15}gh}$
14. (a) $43.2m$ (b) $v_x=9.66m/s, v_y=-25.6m/s$
15. (a) 풀이 참조 (b) 풀이 참조
16. $\frac{T}{3P}dP$ 만큼 감소
17. 0.25m
18. (a) 0.21kg (b) 7.2m
19. 1.0kg
20. 속력은 2.50m/s, 방향은 처음 운동선 아래 60.0도이다.
21. $1.57\times10^3 N$
22. (a) 0.400m (b) 4.10m/s (c) 최고점에 도달한다.
23. $\frac{4M}{m}\sqrt{gl}$
24. (a) 15.9g (b) 0.153m
25. (a) $3.90\times10^7 N$ (b) $3.20m/s^2$
26. (a) $2.36m/s^2\,\hat{i}-1.57m/s^2\,\hat{j}$ (b) $(2.36t)\hat{i}-(1.57t)\hat{j}(m/s)$
27. (a) $9.1kg\cdot m/s$ (b) $1.7\times10^3 N$
28. 120 $^\circ$
29. (a) $T_1=118N$, $T_2=156N$ (b) $1.17kg\cdot m^2$
30. (a) $\frac{27}{10}R$ (b) $-\frac{20}{7}mg\hat{i}-\frac{5}{7}mg\hat{j}$
31. $w=\sqrt{\frac{2mgd\sin\theta+kd^2}{I+mR^2}}$
32. (a) $3.8\times10^3 rad/s$ (b) $1.9\times10^2 m/s$
33. (a) $9.7rad/s^2$ (b) 지면을 뚫고 나오는 방향
34. $1.4m/s$
35. 5.0×10^2
36. $1.20kg\cdot m^2/s$
37. 2.38m
38. 0.34
39. (a) $1.4\times10^9 N$ (b) 75개
40. 35.2AU
41. (a) $7.6m/s^2$ (b) $4.2m/s^2$
42. $8.31\times10^{-9}N$
43. $1.66\times10^4 m/s$
44. 풀이 참조
45. (a) 풀이 참조 (b) 풀이 참조 (c) $1.85\times10^{-5}m/s^2$

[해설]

1. 두 기차가 충돌할 때까지 걸리는 시간은 1h
이 시간동안 새의 이동거리는 60km

2. (A의 시간간격) : (B의 시간간격) = 40 : 33
(B의 시간간격) : (C의 시간간격) = 7 : 2
따라서 (a)는 $600 \times \frac{33}{40} = 495(s)$, (b)는
$495 \times \frac{2}{7} = 141(s)$이다.

3. (x_0, y_0)에서 만난다면
$vt = x_0 = \frac{1}{2}at^2\sin\theta \quad \therefore t = \frac{2v}{a\sin\theta}$
$y_0 = \frac{1}{2}at^2\cos\theta$ 위 식을 대입해서 정리
$ay_0\cos^2\theta + 2v^2\cos\theta - ay_0 = 0$
물리량을 대입하면 $\theta = \arccos(\frac{6}{12}) = 60^\circ$

4. 주황색 기관차 정지 좌표계 기준으로 파란색 기관차는 $v_1 - v_2$의 속력으로 다가오며 a만큼 시간당 감속하고 있다. 즉,
$a_{\min} = \frac{(\text{상대속도})^2}{2(\text{떨어진 거리})} = 0.994m/s^2$

5. let) $\vec{B} = (a, a, b)$
$q\vec{v} \times \vec{B} = 2\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ a & a & b \end{vmatrix} = 2(4b - 6a)\hat{i} + 2(6a - 2b)\hat{j} - 4a\hat{k}$
세 번째 성분 비교하면 $a = -3$, $b = -4$
따라서 $\vec{B} = -3.0\hat{i} - 3.0\hat{j} - 4.0\hat{k}$

6. (1) $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.0j + 6.0k$
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 3 \times (-3) + (-2) \times (6) = -21$
(2) $\vec{b} + \vec{c} = (1, -2, -1)$,
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 3 - 6 + 2 = -1.0$
(3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -7.0i + 1.0j - 9.0k$

7. 수평 원을 따라 회전할 수 있다 가정하자. 회전 반지름은 $\frac{\sqrt{7}}{2}m$이고 회전 속력은 v일 때
운동방정식과 힘 평형 식은(T_1, T_2는 각각 위쪽 실과 아래쪽 실의 장력이다.)
$(T_1 - T_2)\frac{3}{4} = mg \qquad (T_1 + T_2)\frac{\sqrt{7}}{4} = m\frac{v^2}{\frac{\sqrt{7}}{2}}$
T_1은 항상 양수이며, 식을 T_2에 관해 정리하면
$T_2 = \frac{2m(6v^2 - 7g)}{21}$ 즉 $g \leq \frac{6v^2}{7}$이어야 가능하다.
(1) $9.80 > \frac{6 \times 3^2}{7} = 7.71$이기에 불가능하다.
(2) 중력가속도가 $\frac{6v^2}{7} = 7.71m/s^2$보다 작은 행성이면 가능하다.

8. A와 연결된 실에 걸린 장력은 A와 표면 사이의 최대정지마찰력과 같다. 이는 $\theta = 30$이기에 B의 무게의 $\frac{1}{\sqrt{3}}$배와 같으며, 고로 정지마찰계수는
$\mu = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \times 5.0 \times 9.8}{10 \times 9.8} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0.29$이다.

9. (a) $80km/h\,\hat{i} - 60km/h\,\hat{j}$
(b) 0
(c) 아니오. 원점으로부터의 거리의 비가 속력의 비와 일치해 변하지 않는다.

10. 평균가속도의 정의에 따라
$\frac{25.0 + 22.0}{3.50 \times 10^{-3}} = 1.34 \times 10^4(m/s^2)$

11. 사람이 손으로 T만큼의 힘으로 아래로 줄을 당기면 자신은 위로 2T만큼의 힘을 받는다.

(a) $T = \frac{103 \times 9.8}{2} = 5.05 \times 10^2\,(N)$

(b) $T' = \frac{103 \times (9.8 + 1.30)}{2} = 5.72 \times 10^2\,(N)$

12. (a) 구심력은 정지해있을 때 줄의 장력의 합이었을 어린이의 무게를 700N에서 빼주면 된다. 즉, 308N이 구심력이며 반지름은 3.00m, 질량은 40.0kg이기에 $v = \sqrt{\frac{3.00 \times 308}{40.0}} = 4.81 m/s^2$

(b) 그네 의자는 질량이 없기에 알짜힘도 없다. 따라서 장력의 합인 700N이 곧 수직항력이다.

13. B의 가속도의 크기를 a라 하면 A의 가속도의 크기는 2a이다. A에 작용하는 장력을 T라 하면 B에 작용하는 장력은 2T이기에 운동방정식은

$A: mg - T = 2ma \qquad B: 2T - mg = ma$

이때 $a = \frac{3}{5}g$이다.

현재 A와 B는 3a의 가속도로 멀어지고 있다. 물체의 연직 거리가 h이기 위해서는 시간이 $\sqrt{\frac{2h}{3a}}$ 만큼 흘러야 하며 이때 A의 속력은

$2a \times \sqrt{\frac{2h}{3a}} = \sqrt{\frac{8}{15}gh}$

14. (주: 문제의 그림이 애매하게 보일지도 모르겠습니다. 여기서는 (수직방향 이동거리)/(수평방향 이동거리)가 tan50이 될 때 착지합니다.)

$x = v_0 \cos 15.0 t \qquad y = v_0 \sin 15.0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$\frac{-y}{x} = \tan 50.0$

위의 세 식을 정리하면 $t = 2.88s$

(a) 선수의 착지거리 : $x \sec 50.0 = 43.2m$

(b) 수평 성분: $10.0 \times \cos 15.0 = 9.66 m/s$

수직 성분: $10.0 \times \sin 15.0 - 9.80 \times 2.88 = -25.6 m/s$

15.(a) 중력의 접선성분은 $mg\cos\theta$인데, 항상 힘평형을 이루면서 움직이기 위해서는 $F = mg\cos\theta$여야 한다.

(b) $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (mg\cos\theta)\, R d\theta = mgR$

이는 입자의 중력위치에너지 변화량과도 같다.

16. 시간에 따라 일정한 일률로 자동차가 가속하므로 $P = \frac{dE_k}{dt}, E_k(t) = Pt, \frac{1}{2}mv^2 = Pt$

이동거리는 $\int_0^T \sqrt{\frac{2PT}{m}}\, dt = \sqrt{\frac{8PT^3}{9m}}$ 로 일정하다.

따라서 $PT^3 = const.\ (dP)T^3 + P(3T^2)dT = 0$,

$dT = -\frac{T}{3P}dP$ 이다.(주: 성급하게 $PT = const.$라고 판단하는 오류를 유의하라. 두 경우에서 모터가 한 일은 다르다!)

17. 운동량 보존법칙에서 두 토막의 속력이 같을 때 그 속력은 $\frac{2 \times 10 + 5 \times 3}{2+5} = 5m/s$

즉, 운동에너지 변화량은

$\frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 3^2 - \frac{1}{2} \times 7 \times 5^2 = 35J$

따라서 최대 압축거리는 $\sqrt{\frac{2 \times 35}{1120}} = 0.25m$

18. (a) 야구공과 농구공은 둘 모두 $\sqrt{2gh}$의 속력으로 마주보고 충돌한다. 이때 충돌은 탄성충돌이기에 충돌 후 농구공이 정지한다면 야구공의 속력은 $2\sqrt{2gh}$이다. 이때 운동량 보존 법칙에서

$M\sqrt{2gh} - m\sqrt{2gh} = m(2\sqrt{2gh}),\ m = \frac{M}{3} = 0.21kg$

(b) 이때 야구공의 속력은 $\sqrt{2g(4h)}$이기에 7.2m 튀어오른다.

19. 퍽 1의 초기 속력을 v_0라 하면 충돌 후 1과 2의 속력은 각각 $\frac{2}{3}v_0, \frac{1}{3}v_0$이다. 운동량 보존

법칙에서 $m v_0 = -\frac{2}{3} m v_0 + \frac{1}{3} M v_0$

따라서 $M = 5m = 1.0kg$이다.

20. 질량이 동일한 두 구가 탄성충돌하면 두 속도벡터가 이루는 각의 크기는 90도이다. 즉 맞은 공은 처음 운동선 아래 60도의 각도로 운동한다. 속력을 v라 하면 처음 운동선과 수직한 방향의 운동량 보존에 의해 $4.33 \times \frac{1}{2} = v \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 따라서 속력은 2.50m/s, 방향은 처음 운동선 아래 60.0도이다.

21. 필요한 구심력의 크기는 무게와 같기에 수직력의 크기는 무게의 2배인 $1.57 \times 10^3 N$

22. (a) 에너지 보존 법칙에 의하여

$\frac{1}{2} \times 450 \times x^2 = \frac{1}{2} \times 0.500 \times 12.0^2$ 즉, $x = 0.400m$

(b) 일=에너지 정리에 의하여

$-fpiR = \varDelta E = \left(\frac{1}{2} m v_T^2 + 2mgR\right) - \frac{1}{2} m v_B^2$

대입해서 계산하면 $v_T = 4.10 m/s$

(c) 트랙을 한 바퀴 돌기 위한 최소한의 속력인 $\sqrt{gR} = 3.13 m/s$보다 크기에 최고점에 도달한다.

23. 충돌 직후 M의 속도를 V라고 하자. 운동량 보존에서 $mv = MV + \frac{1}{2} mv$, $V = \frac{m}{2M} v$이다. 이때 완전한 원운동을 하기 위해서는 $\frac{m}{2M} v = 2\sqrt{gl}$

따라서 v의 최솟값은 $\frac{4M}{m}\sqrt{gl}$ 이다.

24.(a)

$$\int_0^{0.3} 50.0 + 20.0x\, dx = \left[50.0x + 10.0x^2\right]_0^{0.3} = 15.9g$$

(b) $\frac{1}{15.9} \int_0^{0.3} x(50.0 + 20.0x)\, dx$

$$= \frac{1}{15.9}\left[25.0x^2 + \frac{20.0}{3} x^3\right]_0^{0.3} = 0.153m$$

25. (a) (주: 공식이 기억나지 않더라도 단위를 보면 N을 간단하게 맞출 수 있다.)

$1.50 \times 10^4 kg/s \times 2.60 \times 10^3 m/s = 3.90 \times 10^7 N$

(b) 운동방정식에서 $\frac{3.90 \times 10^7}{3.00 \times 10^6} - 9.80 = 3.20 m/s^2$

26. 계의 가속도는 $\frac{m_2}{m_1 + m_2} g = 3.92 m/s^2$이다. 즉, 질량중심의 좌표는 시간 t에 대하여

$$\left(\frac{0.600}{0.600 + 0.400} \times \left(-0.500 + \frac{1}{2} \times 3.92 \times t^2\right),\right.$$

$$\left.\frac{0.400}{0.600 + 0.400} \times \left(-0.100 - \frac{1}{2} \times 3.92 \times t^2\right)\right)$$

$= (-0.3 + 1.18t^2, -0.04 - 0.784t^2)$

(b) 시간에 대하여 미분하면 $(2.36t, -1.57t)$

(a) 속도를 시간에 대하여 미분하면 $(2.36, -1.57)$

27. (a) 충격량은 $0.70kg \times 13m/s = 9.1kg \cdot m/s$

(b) 평균력의 크기는 $\frac{9.1kg \cdot m/s^2}{5.5ms} = 1.7 \times 10^3 N$

28. 두 물체의 초기속도 사이의 각도의 절반을 θ라 하면 운동선과 나란한 방향의 운동량 보존에서 $(\text{초기속력}) \times \cos\theta = \frac{(\text{초기속력})}{2}$, 따라서 각도는 120도이다.

29. (a) 운동 방정식을 세우자.

$T_1 - m_1 g sin\theta = m_1 a \qquad m_2 g - T_2 = m_2 a$

물리량을 대입하면 $T_1 = 118N$, $T_2 = 156N$

(b) 회전 운동 방정식을 세우자.

$R(T_2 - T_2) = I\alpha$, 물리량을 대입하면 $1.17kg \cdot m^2$

30. (a) 에너지 보존법칙을 적용하되, 회전운동에너지를 빠먹지 않도록 주의하라. 이러한 류의 문제에

서는 $\frac{7}{10}mv^2$의 항을 외워서 쓰는 것도 시간 절약에 나쁘지 않다.

$$mgh = mg(2R-r) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)w^2$$

$$\simeq 2mgR + \frac{7}{10}mv^2$$

이때 $v=\sqrt{gR}$일 때 떨어지는 것은 마찬가지로 대입해주면 $h = \frac{27}{10}R$

(b) P의 위치에서는 수직 방향 속력은 $\sqrt{\frac{20}{7}gR}$, 수평 방향 속력은 0이다.((a) 식 참고) 그렇다면 수평 방향의 힘은 왼쪽으로 $\frac{20}{7}mg$이며, 수직 방향 힘으로는 중력과 마찰력이 있는데 마찰력을 f라 하면

$$f - mg = ma_y \qquad -Rf = \frac{2}{5}mR^2\left(\frac{a_y}{R}\right)$$

식을 정리하면 $a_y = -\frac{5}{7}g$로 수직 방향 힘은 아래로 $\frac{5}{7}mg$이다.

31. 에너지 보존 법칙에서

$$mgd\sin\theta + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}Iw^2 + \frac{1}{2}m(Rw)^2$$

따라서 각속력은

$$w = \sqrt{\frac{2mgd\sin\theta + kd^2}{I + mR^2}}$$

32. (a) 빛이 톱니와 거울 사이를 왕복하는 동안 톱니날이 하나 바뀐다. 즉, 빛이 왕복하는 시간 $\frac{2L}{c}$ 동안 톱니바퀴가 회전한 각이 $\theta = \frac{2\pi}{500}$이다. 따라서, 각속력는 $\frac{\theta}{t} = 3.8 \times 10^3\, rad/s$

(b) 선속력은 각속력에 반지름을 곱한 $1.9 \times 10^2\, m/s$

33. (a) 작용하는 토크의 크기는

$$-6.0 \times 0.12 + 4.0 \times 0.12 + 2.0 \times 0.050 + 5.0 \times 0$$

$$= -0.14\, N \cdot m$$

관성모멘트는 $\frac{1}{2} \times 2.0 \times 0.12^2 = 1.44 \times 10^{-2}\, kg \cdot m^2$

이므로 각가속도의 크기는 $\frac{0.14}{1.44 \times 10^{-2}} = 9.7\, rad/s^2$

(b) 알짜토크의 부호가 음수이기에 방향은 지면을 뚫고 나오는 방향이다.

34. 에너지 보존 법칙에서

$$m \times 9.80 \times 0.82 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

주어진 물리량을 대입하면 $1.4\, m/s$

35. 계의 각운동량 보존법칙 식을 시간에 대해 적분하면 $I_m\theta_m = I_p\theta_p$ 즉, 비례식을 풀면 180000도 회전해야 하며 회전수로 따지면 5.0×10^2번 회전해야 한다.

36. 시침, 분침의 관성모멘트: 145.8, 675
시침, 분침의 각속도: $1.45 \times 10^{-4}, 1.75 \times 10^{-3}$
따라서 전체 각운동량은 $1.20\, kg \cdot m^2/s$

37. (주: 작년 통신시험 기출이다.)
힘평형 식을 세운다.(좌측 실의 장력과 우측 실의 장력이 각각 T_1과 T_2이다.

$$T_1\cos\theta + T_2\cos\phi = mg \qquad T_1\sin\theta = T_2\sin\phi$$

$mgx = T_2 L\cos\phi$ 위의 세 식을 연립하면

$$x = L\frac{\sin\theta\cos\phi}{\sin(\phi+\theta)} = 2.38m$$

38. N을 지면이 떠받치는 수직항력, N'을 바퀴가 떠받치는 수직항력, f_x를 지면이 작용하는 정지마찰력으로 설정하면 힘 평형 식에서(+토크 평형)

$$mg = N + N'\cos\theta \quad N'\sin\theta = f_x$$

$$mg \times \frac{L}{2}\cos tehta = N' \times \frac{h}{\sin\theta}$$

식을 연립하고 물리량을 대입하면 정지마찰계수가 $\frac{L\sin^2\theta_0\cos\theta_0}{2h - L\sin theta_0\cos^2\theta_0} = 0.34$임을 알 수 있다.

39. (a) 흙의 부피는 $5.22 \times 10^4\, m^3$이므로 무게는 $2.8 \times 10^3 \times 5.22 \times 10^4 \times 9.80 = 1.4 \times 10^9\, N$

(b) 한계강도의 반이 되려면 압축력은 $2.00 \times 10^8\, N/m^2$이 되어야 하기에 최소 단면적은 $7.15m^2$이기에 총 75개 필요하다.(cf. 나눈 값은

74.479...)

40. 케플러 제 3법칙에 의하여 장반경은

$T^2 = a^3$, $a = T^{\frac{2}{3}} = 17.8AU$ (주: 만유인력 상수와 태양 질량을 주지 않은 점을 보고 눈치챌 수 있듯이, 시간의 단위를 yr, 거리의 단위를 AU라 하면 비례상수는 1이다. 태양계가 아닌 다른 항성에 대한 천체문제를 풀 때는 성립하지 않음을 주의하여야 한다.) 따라서 $x = 35.8 - 0.570 = 35.2(AU)$

41. (a) 구각 정리에 의해 외부의 질량은 알짜 중력을 주지 못한다. 따라서, 중력가속도는

$$G\frac{M}{R^2} = 7.6 m/s^2$$

(b) (주: 균일하지 않은 천체에 의한 중력가속도를 계산할 때는 반지름이 더 큰 구가 균일한 상태와 비교하여 차이를 보정하는 중첩의 원리(흔히 음의 만유인력이라 부르는 문제 유형이지만, 이는 공동이 있을 때 사용하는 풀이 방법이지 꼭 중첩하는 질량이 음수일 필요는 없다)를 사용하는 것이 정석이다. 이 문제에서는 핵과 외각의 중심이 일치하기에 단순히 질량을 더해줘도 된다. 모든 문제를 질량의 합을 이용해 풀려고 하지 않도록 유의하라.)

총 질량은 5M이고, 외각과 핵의 중심이 일치하기에 $G\frac{5M}{(3R)^2} = 4.2 m/s^2$

42. 음의 만유인력 문제이다. 자세한 내용은 41. (b)의 주석을 참고하라. 9.00cm만큼 떨어져 있고, 총 질량이 M인 납덩어리와 7.00cm만큼 떨어져 있고, 총 질량이 $-\frac{1}{8}M$ 납덩어리에 의한 중력을 합친다.

$$GMm\left(\frac{1}{9.00cm^2} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{7.00cm^2}\right) = 8.31 \times 10^{-9} N$$

(주: 이 문제에서는 만유인력 상수를 주지 않았다. 실제 시험에서도 간혹 상수를 주지 않는 경우가 있는데, 만유인력 상수의 경우 자주 쓰이니 외워두도록 하자.)

43. 에너지 보존 법칙에 의해서

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_f^2$ 정리하면

$v_f = \sqrt{v^2 - \frac{2GM}{R}}$ 이때 제 2 우주속도는 11.2km/h 이기에

$$v_f = \sqrt{(2.00 \times 10^4)^2 - (11.2 \times 10^3 m/s)^2}$$

$$= 1.66 \times 10^4 m/s$$

(주: 제 2 우주속도의 암기를 빈번하게 요구하지는 않는다. 불안한 사람은 외우는 걸 추천하지만, 필요하면 이에 대한 정보(지구 질량이나 반지름 등)를 제공해줄 확률이 크니 너무 압박감을 가지지는 않아도 된다.)

44. 각 별에 운동방정식을 세우면

$$G\frac{Mm}{d^2} = mr_1w^2 = Mr_2w^2$$

$$w^2 = \frac{GM}{d^2 r_1} = \frac{Gm}{d^2 r_2} = \frac{G(M+m)}{d^3} \text{ (가비의 리)}$$

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{w}\right)^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$$

45. (a)

$$g = \frac{GM_E}{r^2}, \quad \frac{dg}{dr} = \frac{-2GM_E}{r^3} = \frac{-2GM_E}{R_E^3} \ (r = R_E \text{일 때})$$

(b) $|\Delta g| = \left|\frac{dg}{dr}\right| h = \frac{2GM_E h}{R_E^3}$

(c) 물리량을 대입하면 $1.85 \times 10^{-5} m/s^2$