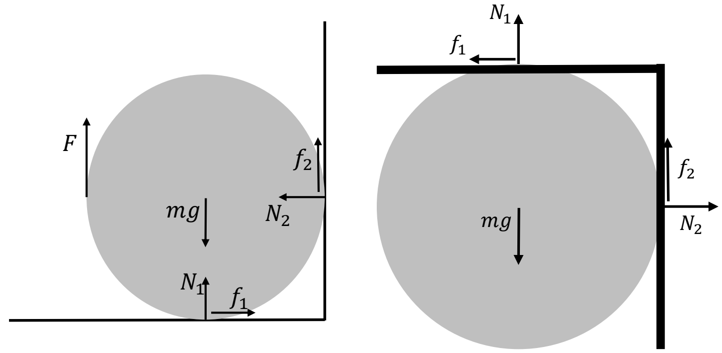
한 물체에 여러 마찰력이 작용하는 문제의 정확한 풀이법

14041 박승원

2016년 4월 4일



(a) (b)

그림 1: (a) 고급물리학 1차 과제 문제 5번 (b) 고급물리학 2차 과제 문제 11번

이 문서에서는 그림 1a에 해당하는 문제를 풀이한다.

토크평형 $$F = f_1 + f_2 \tag{1}$$

x방향 힘평형 $$f_1 = N_2 \tag{2}$$

y방향 힘평형 $$mg = F + N_1 + f_2 \tag{3}$$

마찰계수 고려 $$f_1 \le \mu N_1 \tag{4}$$

$$f_2 \le \mu N_2 \tag{5}$$

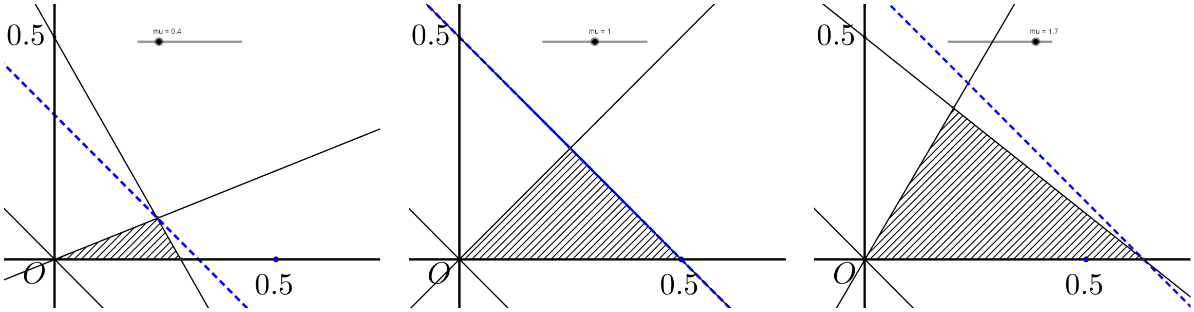
식 (1) - (5)를 f_1, f_2에 대해 정리하자. (3) 에 (1)을 대입하면 식 (6)이 되고, (2)를 다시 쓰면 (7)이 된다.

$$N_1 = mg - f_1 - 2f_2 \tag{6}$$

$$N_2 = f_1 \tag{7}$$

식 (6), (7)을 조건 (4), (5)에 대입하여 정리하면, 부등식 (8)을 얻는다.

$$\begin{cases} (1/\mu + 1)f_1 + 2f_2 \le mg \\ f_2 \le \mu f_1 \end{cases} \tag{8}$$



(a) (b) (c)

그림 2: μ가 (a) : 0.4, (b) : 1.0, (c) : 1.7 일 때의 그래프. x축은 f_1, y축은 f_2 이며, 단위는 mg 이다.

부등식 (8) 에 의거하여 영역을 그려보면 그림 2a와 같다. 부등식의 영역은 삼각형이다.

이제 우리가 할 일은 원통이 미끄러지지 않기 위한 힘 F의 최대값을 구하는 것이다. 직선 $F = f_1 + f_2$ 을 $F = \infty$ 에서 시작하여 점점 줄여나가다가, 그러다가 직선이 삼각형 영역과 처음으로 만나는 순간이 F가 최대인 순간이다.

그림 2a를 보면, $f_1 = \mu N_1$, $f_2 = \mu N_2$ 인 경우가 F가 최대인 때이다. 이것이 보통 사용되는 풀이다. 하지만, 만약 μ 가 1보다 크다면 어떻게 될까? [1] 그림 2b 와 2c를 보라. 무언가가 이상함을 눈치챘는가? $\mu > 1$ 일때는 F가 최대인 때가 $f_1 = \mu N_1$, $f_2 = \mu N_2$ 일 때가 아닌 $f_2 = 0$ 일 때이다!

정확한 답은 (9)와 같이 μ 의 값에 따라 나뉨을 알 수 있다.

$$F_{max} = \begin{cases} \frac{\mu^2+\mu}{2\mu^2+\mu+1} mg & (\mu < 1) \\ \frac{\mu}{\mu+1} mg & (\mu > 1) \end{cases} \tag{9}$$

참고로 μ 의 값에 따른 F_{max} 의 그래프는 그림 3 와 같다.

저자 주 : 그림 1b 에 해당하는 문제도 이와 같이 풀 수 있다. N_1, N_2에 대해 정리하면 편하며, 기울기가 μ, $-1/\mu$인 두 직선(직교한다!)에 의한 부등식의 영역이 나타난다. 기하적인 방법을 이용하여, 해결할 수 있다. 답 : $\mu < \tan 22.5° = \sqrt{2} - 1$ ($N_2 - N_1$ 그래프에서 두 직선의 교점은 항상 $(mg, 0)$이 중심이고 반지름이 mg인 원 위에 있음을 이용하면 좋다.)

[1] 보통의 경우 정지마찰계수 μ 는 1보다 작지만, 검색을 조금만 해보면 그렇지 않은 경우가 상당히 있다는 것을 알 수 있다.

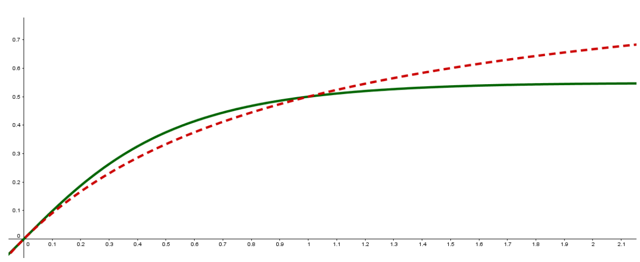


그림 3: $F_{max}(\mu)$. x축은 μ, y축은 F_{max}(단위 : mg). 실선이 $\mu < 1$에, 점선이 $\mu > 1$에 해당된다.