Evaluation of $\int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx$ for Even Number n,m

2015.9.6 by 14041 박승원

Contents

1 Introduction

우리는 미적분학 I 시간에 삼각함수로 이루어진 다양한 함수의 적분 방법에 대해서 알아보았다. 그 중에서 나의 흥미를 끈 것은 m, n이 짝수일때 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 의 적분 방법이었다. [1] 하지만 이 방법은 깔끔하지 못했고, $\int \sin^m x \cos^n x dx$의 일반화된 부정적분 식을 알아보고자 노력하였지만, 그것은 분명히 어려운 일이었다. 따라서 나는 정적분 $\int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx$ 이라도 구해 보았다.

정의 1. *For* $2|m$ *and* $2|n$,

$$A(m,n) = \int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx$$

2 By getting/using recursion formula

우리는 우선 부분적분을 통하여 $A(m,n)$과 다른 어떤 식과의 관계식, 즉 점화식을 구해 볼 것이다.

$$\int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx \tag{1}$$

$\sin^m x \cos^{n-1} x$를 미분하면 $m \sin^{m-1} \cos^n x - (n-1) \sin^{m+1} x \cos^{n-2} x$이고, $\cos x$를 적분하면 $\sin x$ 이므로 식 1을 정리하면 식 2과 같다.

$$A(m,n) = \frac{n-1}{m+1} A(m+2, n-2) \tag{2}$$

$\therefore A(m,n) = \frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdot(1)}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)} A(m+n, 0)$
일반화된 형태로 $A(m,n)$을 나타내면 식 3와 같다.

$$A(m,n) = A(m+n, 0) \cdot \frac{\frac{n!}{2^{n/2}\cdot(n/2)!} \frac{m!}{2^{m/2}\cdot(m/2)!}}{\frac{(m+n)!}{2^{(m+n)/2}\cdot(m+n)/2!}} \tag{3}$$

[1] 반각 공식 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$를 통해 적분식을 점점 간단하게 만드는 방법이다.

Copyright © 2015 박승원(seungwonpark), Gyeonggi Science HighSchool for the Gifted. All rights reserved. Email : psw14041@gmail.com

정의 2. *For* $2|k$,

$$B(k) = \int_0^{2\pi} \sin^k x dx$$

$B(k)$ 역시 부분적분을 통해 점화식을 구할 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} \sin^k x dx = \int_0 2\pi \sin^{k-1} x \cdot \sin x dx \tag{4}$$

$\sin^{k-1} x$를 미분하면 $(k-1)\sin^{k-2} x \cos x$이고, $\sin x$를 적분하면 $-\cos x$이므로 식 4는 식 5와 같이 정리된다.

$$B(k) = \frac{k-1}{k} B(k-2) \tag{5}$$

$\therefore B(k) = \frac{(k-1)(k-3)\cdots(1)}{k(k-2)\cdots 2} B(0)$

$B(0) = 2\pi$ 등을 고려하여 $B(k)$를 일반화시키면 식 6와 같다.

$$B(k) = 2\pi \cdot \frac{k!}{(2^{k/2} \cdot (k/2)!)^2} \tag{6}$$

식 3와 식 6를 종합하면 결과적으로 식 7와 같다.

$$A(m,n) = 2\pi \cdot \frac{\frac{n!}{2^{n/2} \cdot (n/2)!} \frac{m!}{2^{m/2} \cdot (m/2)!}}{2^{(m+n)/2} \cdot ((m+n)/2)!} \tag{7}$$

3 By using Euler's equation

두번째 풀이 방법은 삼각함수를 복소수를 이용하여 나타내고 그를 적분하는 방법이다. 이 방법에서 한가지 비약이 있음에 유의해야 한다. 식 1와 같이 지수함수의 적분을 임의로 복소수에까지 확장했다는 점이다. 일단은 허용하고 넘어가자. [2]

비약 1. *For real number* x *and complex number* α ,

$$\int e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$$

아무튼 우리는 식 8과 보조정리 1 을 핵심적으로 사용할 것이다.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{8}$$

보조정리 1. *For non-zero integer* m, $\int_0^{2\pi} e^{imx} = [\frac{e^{imx}}{im}]_0^{2\pi} = 0$

[2] 복소함수 $f(z) = u + iv$ 가 미분가능하기 위해서는 Cauchy-Riemann 관계식 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$을 만족하면 된다고 한다. 더 알아보고 싶은 사람은 "Complex Functions and the Cauchy-Riemann Equations"을 참고하길 바란다. (나도 잘 모름)

Copyright © 2015 박승원(seungwonpark), Gyeonggi Science HighSchool for the Gifted. All rights reserved. Email : psw14041@gmail.com

A(m,n)을 식 1을 이용하여 전개하자. *단, 간편한 계산을 위해 일반성을 잃지 않고* $m \geq n$*이라 가정하자.*

$$A(m,n) = \int_0^{2\pi} (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^m \cdot (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^n dx$$

.

피적분함수의 항들 중에서 상수항이 아닌 것은 보조정리 1에 의해 모두 0이 되고, 상수항만이 남는다. 상수항을 계산하면 식 9와 같다.

$$\frac{i^m}{2^{m+n}} \cdot \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot (-1)^k \cdot {}_m C_k \tag{9}$$

$A(m,n)$은 이 상수항을 적분한 값인 $2\pi \cdot constant$가 되고, 결론적으로 $A(m,n)$은 식 10와 같다.

$$A(m,n) = 2\pi \cdot \frac{i^m}{2^{m+n}} \cdot \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot (-1)^k \cdot {}_m C_k \tag{10}$$

4 Verification

$m = 2, n = 2$인 경우에 대해 일반적인 방법, 2절의 방법, 3절의 방법을 통해 계산해보고 서로 일치하는지 확인하자.

1. 일반적인 방법 :
   $A(2,2) = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4x}{8} dx = [\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$
2. 2절의 방법 :
   $A(2,2) = 2\pi \cdot \frac{\frac{2!}{2^{2/2} \cdot (2/2)!} \frac{2!}{2^{2/2} \cdot (2/2)!}}{2^{4/2} \cdot (4/2)!} = \frac{\pi}{4}$
3. 3절의 방법 :
   $A(2,2) = 2\pi \cdot \frac{i^2}{2^4} \cdot \sum_{k=0}^{2} {}_2C_k \cdot (-1)^k \cdot {}_2 C_k = \frac{\pi}{4}$

5 Further Research

우선은 2절의 방법과 3절의 방법이 어떻게 같은 결과가 나오는 것인지 알아보아야 할 것이다. 다시 말하면, 다음 식이 성립함을 증명해야 한다.

For even number n and m,

$$\frac{\frac{n!}{2^{n/2} \cdot (n/2)!} \frac{m!}{2^{m/2} \cdot (m/2)!}}{2^{(m+n)/2} \cdot ((m+n)/2)!} = \frac{i^m}{2^{m+n}} \cdot \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot (-1)^k \cdot {}_m C_k$$

또한, 이외에도 정적분 A(m,n)을 구하는 방법을 더 찾아보고 서로 비교하여 새로운 등식을 얻게 된다면 좋을 것이다.

Copyright © 2015 박승원(seungwonpark), Gyeonggi Science HighSchool for the Gifted. All rights reserved. Email : psw14041@gmail.com