정육면체의 정사영의 넓이의 최댓값
: 엄밀한 접근

수학세미나 I

15011 김경태

경기과학고등학교

문제

한 변의 길이가 1인 정육면체가 있다. 이 정육면체가 평면 위에 정사영될 때, 정사영된 정육면체의 넓이의 최댓값을 구하여라.

(풀이) 정육면체를 정사영시킬 때 최대 세 면이 (유효하게) 정사영된다 (Why?). 그 중 세 면이 정사영될 때 넓이가 최대가 되고, 세 면이 정사영할 평면과 이루는 각을 각각 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$이라 하면,

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$$

이고 정사영의 넓이는

$$S = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3$$

이다 (Why? 두 면의 정사영이 겹친다면?). 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 S의 최댓값을 구할 수 있다.

정사영될 평면을 $z=0$이라 하자. 정육면체의 8개 꼭짓점 중 z 좌표가 가장 작은 꼭짓점이 원점에 오도록 정육면체를 평행이동하자. 그 다음에 원점과 모서리로 연결된 세 꼭짓점의 위치벡터를 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$라 하자.

공간 상의 한 점을 그 점의 정사영으로 보내는 변환은 선형변환이다. $z=0$으로의 정사영을 나타내는 선형변환을 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$이라 하자. 정육면체의 내부와 경계를 집합 G라 하고 $R=T(G)$라 하자. 또한 정육면체 중에서 원점을 공유하는 세 면을 집합 G'라 하고 $R'=T(G')$라 하자. 우리의 목표는 $R=R'$임을 보이는 것이다.

앞의 정의에 의하여,

$$
\begin{aligned}
G &= \{c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 | 0 \le c_1, c_2, c_3 \le 1\}, \\
R &= \{c_1T(\mathbf{w}_1) + c_2T(\mathbf{w}_2) + c_3T(\mathbf{w}_3) | 0 \le c_1, c_2, c_3 \le 1\}, \\
G' &= \cup_{i<j}\{a\mathbf{w}_i + b\mathbf{w}_j | 0 \le a, b \le 1\}, \\
R' &= \cup_{i<j}\{aT(\mathbf{w}_i) + bT(\mathbf{w}_j) | 0 \le a, b \le 1\}.
\end{aligned}
$$

우리는 정육면체가 평면에 원점에서만 닿는 경우만 고려하자. 나머지 경우(모서리가 닿거나 면이 닿는 경우)는 이것보다 훨씬 간단하다.

Proposition 1

$T(\mathbf{w}_1), T(\mathbf{w}_2), T(\mathbf{w}_3)$는 서로 둔각을 이룬다.

(증명) $\mathbf{w}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{w}_2 = (x_2, y_2, z_2)$라 하자.
$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$이고 $z_1, z_2 > 0$인데,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_1) \cdot T(\mathbf{w}_2) &= (x_1, y_1, 0) \cdot (x_2, y_2, 0) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 \\ &< x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \end{aligned}$$

이므로 $T(\mathbf{w}_1)$과 $T(\mathbf{w}_2)$는 둔각을 이룬다.

Proposition 2

$T(\mathbf{w}_1), T(\mathbf{w}_2), T(\mathbf{w}_3)$ 중 어느 두 개도 linearly independent 하다.

(증명) $T(\mathbf{w}_1), T(\mathbf{w}_2)$가 linearly dependent하다고 가정하면, 스칼라 c가 존재하여 $T(\mathbf{w}_1) + cT(\mathbf{w}_2) = \mathbf{0}$이다. 즉 W를 $z = 0$인 평면을 나타내는 $\mathbb{R}^3$의 subspace라 하면 $\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2 \in W^\perp$이다. $\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2 \neq \mathbf{0}$이고 $\mathrm{dim W}^\perp = 1$이기 때문에 $\{\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2\}$는 $W^\perp$의 basis인데, $\mathbf{w}_3 \cdot (\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2) = 0$이므로 $\mathbf{w}_3 \in (W^\perp)^\perp = W$가 된다. 즉 $\mathbf{w}_3$이 정사영할 평면 위에 있어, 정육면체의 한 점만 평면과 닿아있다는 가정에 모순이다.

Proposition 3

스칼라 c_1, c_2에 대하여 $T(\mathbf{w}_3) = c_1T(\mathbf{w}_1) + c_2T(\mathbf{w}_2)$로 나타낼 때 $c_1, c_2 < 0$이다.

(증명) 자명.

Theorem 4

G'을 이루는 세 면 중 임의의 서로 다른 두 면의 정사영의 intersection은 선분이고, 그 넓이는 0이다.

(증명) $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$로 만들어지는 면과 $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$으로 만들어지는 두 면을 고려하자. 두 영역의 점이 변환 T 이후에 같으려면 스칼라 $a, b, c, d \in [0, 1]$에 대하여

$$aT(\mathbf{w}_1) + bT(\mathbf{w}_2) = cT(\mathbf{w}_2) + dT(\mathbf{w}_3)$$

또는

$$aT(\mathbf{w}_1) + (b - c)T(\mathbf{w}_2) - dT(\mathbf{w}_3) = \mathbf{0}$$

이면 된다. $b > c$이면 $T(\mathbf{w}_3)$은 $T(\mathbf{w}_1)$과 $T(\mathbf{w}_2)$에 음수를 곱한 선형결합으로 나타내어지기 때문에 위 식이 성립할 수가 없다. $b < c$인 경우에는 $T(\mathbf{w}_1)$에 대해 같은 논리를 적용하면 마찬가지가 된다. 남은 경우인 $b = c, a = d = 0$일 때만 위 식이 성립하고, 그에 해당하는 영역이 바로 원점과 $T(\mathbf{w}_2)$를 잇는 선분이다.

Theorem 5

$R = R'$이다. 즉, 정육면체의 세 면의 정사영만 고려해도, 정육면체의 나머지 부분이 세 면의 정사영 안에 들어오기 때문에 충분하다.

(증명) $\mathbf{v}_i = T(\mathbf{w}_i)$로 표기하자. 다음과 같이 세 집합으로 $\mathbb{R}^2$를 분할하면,

$$S_1 = \{c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 | c_2, c_3 \geq 0\},$$
$$S_2 = \{c_3\mathbf{v}_3 + c_1\mathbf{v}_1 | c_3, c_1 \geq 0\},$$
$$S_3 = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 | c_1, c_2 \geq 0\}.$$

일반성을 잃지 않고 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \in S_3$이라 하자. 또한 $a, b < 0$에 대하여 $\mathbf{v}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$이므로,

$$\mathbf{v} = (c_1 + ac_3)\mathbf{v}_1 + (c_2 + bc_3)\mathbf{v}_2$$

이고 $0 \leq c_1 + ac_3, c_2 + bc_3 \leq 1$이므로 $\mathbf{v} \in R'$이다.