경사면 위에서 원뿔대의 굴림 운동

15011 김경태

March 29, 2017

1 Introduction and Preliminaries

균일한 원형의 물체가 경사면을 굴러가는 운동은 일반물리학 책에서 쉽게 접할 수 있는 반면, 원기둥이 균일하지 않거나 원뿔대와 같이 원기둥 모양이 아닌 물체가 경사면을 굴러가는 문제는 생소할 것이다. 이 글에서는 그러한 생소한 상황을 다룰 것이다. 자명해 보이지만 먼저 "굴러간다"는 것이 무엇인지 정의하고, 그 정의로부터 구름운동의 가장 기본적인 성질을 유도하자.

정의 1. *물체가 경사면 위를* ***굴러간다****는 것은, 물체와 경사면의 접촉점에서의 속력이 0인 것이다.*

정리 1. *반지름 R인 원형 물체가 굴러갈 때, 원형 물체 중심의 속력 v와 중심에서 본 각속도 ω 사이에는 관계식 $v = R\omega$가 성립한다.*

Proof. 접촉점에서의 속력은 원 중심의 선속력 v와 원 중심에서 본 접촉점의 선속력 $-R\omega$의 합이므로 $v - R\omega = 0$이어야 한다. 따라서 $v = R\omega$이다. □

정리 2. *물체가 굴러갈 때 역학적 에너지는 보존된다.*

Proof. 물체에 작용하는 비보존력은 마찰력 $\mathbf{f}$밖에 없다. 그런데, 마찰력이 작용하는 지점인 접촉점에서 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$이므로, 마찰력이 물체에작용하는 일률은 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$이다. 따라서 물체가 굴러갈 때 역학적 에너지는 보존된다. □

2 경사면 위에서 원뿔대의 굴림 운동

이 장에서는 마찰계수가 큰 경사면 위에 있는 원뿔대의 운동을 다룰 것이다. 그림 1과 같은 원뿔대가 경사각 θ인 경사면에 접촉 부분이 지면과 평행하도록 놓여 있다 (그림 2, $\phi = -90°$). 원뿔대를 가만히 놓았을 때 이후 운동을 분석하자.

원뿔대의 운동은 꼭짓점의 속도 $\mathbf{v}_{apex}$와 그림 2에 나타낸 두 방향의 축에 대한 각속도 Ω, ω를 이용하여 완전히 나타내어진다. 좌표축을 그림 1과 같이 잡으면

$$\omega = (\omega \cos \alpha)\mathbf{r} + \omega \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{y}} \tag{1}$$

임을 알 수 있다. 여기서 $\mathbf{r}$은 원뿔 꼭지점 좌표계에서 본 접촉점의 위치벡터이다. 접촉점에서의 속도 $\mathbf{v}$는

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{apex} + \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{v}_{apex} + (\Omega + \omega \sin \alpha)(\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2}$$

이다. 임의의 접촉점의 위치벡터 $\mathbf{r}$에 대해 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$이기 위해서는

$$\mathbf{v}_{apex} = \mathbf{0}, \quad \Omega = \omega \sin \alpha \tag{3}$$

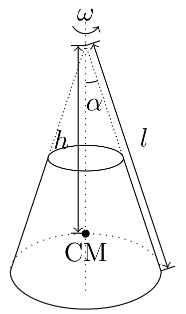

Figure 1: 원뿔대의 꼭짓점으로부터 질량 중심 사이의 거리는 h, 모선한의 길이는 l, 꼭짓각은 α이다. 원뿔대의 질량은 m, 중심축에 대한 관성 모멘트는 I이다. 원뿔대가 중심축을 기준으로 회전하는 각속도는 ω이다.

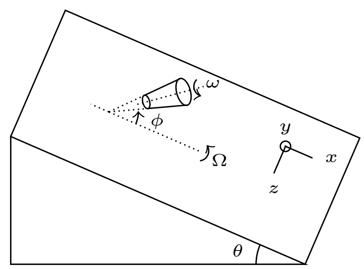

Figure 2: 원뿔대가 기울기 θ인 평면에 놓여 있다. 원뿔대가 꼭짓점을 중심으로 ”공전”하는 각속도는 $\Omega = \dot{\phi}$이다.

이어야 한다. 즉, 원뿔대는 꼭짓점이 고정된 채로 마치 진자처럼 진동한다. 다음으로 원뿔대의 진동 주기 T를 구해보자. 가장 간단한 방법은 원뿔대의 에너지 E가 보존됨을 이용하는 것이다. 원뿔대의 질량 중심은 수평면으로부터 $\theta - \alpha$만큼(θ가 아니다!) 기울어진 평면 위를 움직인다는 사실을 인지하자.

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mh^2\dot{\phi}^2 - mg\sin(\theta-\alpha)\cdot h\cos\phi. \tag{4}$$

여기서 퍼텐셜 에너지의 기준점은 원뿔대의 꼭짓점으로 잡았다. 식 (3)에서 $\dot{\phi} = -\omega\sin\alpha$이므로

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(mh^2 + \frac{I}{\sin^2\alpha}\right)\dot{\phi}^2 - mgh\sin(\theta-\alpha)\cos\phi \\ &\overset{\text{let}}{=} \frac{1}{2}m_{\text{eff}}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mg_{\text{eff}}h\cos\phi \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{m}{m_{\text{eff}}}g_{\text{eff}}h\cos\phi \tag{6}$$

다음 적분식

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi}} = \sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\frac{1}{\Gamma(3/4)^2} \tag{7}$$

을 이용해 (Γ는 감마 함수, MATLAB이 알려줬다.) (6)을 적분하면 원뿔대의 진동 주기는

$$T = \sqrt{\frac{8\pi^3 mgh\sin(\theta-\alpha)}{mh^2 + I/\sin^2\alpha}}\frac{1}{\Gamma(3/4)^2} \tag{8}$$

임을 알 수 있다. 식 (6)은 원뿔대의 운동에 관한 모든 것을 말해준다. 이제 궁금한 것은 원뿔대가 굴러가기 위한 최소의 마찰 계수가 얼마인지이다. 이 문제를 고민해 봤지만 필자는 풀지 못하였다. 혹시 원뿔대가 굴러가기 위한 최소의 마찰 계수를 구하신 분은 필자에게 알려주기 바란다.