Abelian Categories
(Abel 범주)
Version 1.0

Author : Peter J. Freyd
Translated by Dyne

Dec 19, 2023

Contents (목차)

1 Fundamentals (범주의 기본 성질)

우리는 Kelley의 General Topology (일반위상수학) [17]에서와 같은 집합론적 체계 내에서 작업할 것이다. 우리는 범주를 특정 성질들을 만족시키는 '합성' 관계를 가지는 *모임* $\mathscr{M}$으로 정의했다. 우리는 이제 (도입부에서 암묵적으로 가정했던) 임의의 두 대상 A, B에 대하여 모임 (A, B)가 *집합*이어야 한다는 공리를 명시적으로 도입할 것이다. (대략적으로 말하면, 집합은 '충분히 작아서' *기수*를 가지는 모임이다. 모든 집합의 모임은 집합이 *아니다*.) 만약 $\mathscr{M}$이 집합이면 이를 **작은(small)** 범주라고 부른다.

우리는 사상의 합성을 *도식적* 순서 대신 *언어적* 순서로 수행하는 관습을 채택했다. 범주론은 집합과 함수에 대한 문제에 적용될 것을 의도한 이론이며 함수의 합성에서는 일반적으로 언어적 순서가 사용되므로 $((fg)(x) = f(g(x)))$ 범주론은 이를 따라야 한다. 따라서 $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$는 $A \xrightarrow{fg} C$로 표기된다.

화살표를 다른 방향으로 표기하면 논쟁을 피할 수 있다: $C \xleftarrow{fg} A = C \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} A$. 그러나 이는 수학의 더 오래된 분야에서의 관습과 충돌하고, 우리는 (관습을 버리는 것을 가능한 한 회피하고자 하므로) 관습을 버리지 않을 것이다.

가능한 한 우리는 'fg' 대신 '$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$'로 표기할 것이다. 사상의 *합*을 수반하는 표현에서는 'fg'라는 표기법을 사용할 것이 강제된다. 순서에 관한 논쟁은 가끔씩만 영향을 줄 것이다.

1.1 Contravariant Functors and Dual Categories (반변함자와 쌍대 범주)

범주 $\mathscr{M}_1$에서 범주 $\mathscr{M}_2$로의 **반변함자(contravariant functor)**는 다음을 만족시키는 함수 $F : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$이다:

CF1. 만약 e가 $\mathscr{M}_1$에서의 항등사상이면 $F(e)$는 $\mathscr{M}_2$에서의 항등사상이다.
CF2. 만약 xy가 $\mathscr{M}_1$에서 정의되면 $F(y)F(x)$가 $\mathscr{M}_2$에서 정의되며 $F(xy)$와 같다.

(우리는 때때로 '함자' 앞에 **공변(covariant)**이라는 단어를 붙여 이것이 반변이 아님을 강조할 것이다.)

모든 범주 $\mathscr{M}$에 대하여 **쌍대 범주(dual category)**를 $\mathscr{M}^* = \{x^* : x \in \mathscr{M}\}, x^*y^* = (yx)^*$로 정의할 것이다. $D(x) = x^*$에 의해 정의된 함수 $D : M \to M^*$는 반변함자이며 역 반변함자 $D : M^* \to M, D(x^*) = x$를 가진다.

만약 $\mathscr{O}$가 $\mathscr{M}$의 대상들의 족이면 $\mathscr{M}^*$의 대상들의 족을 $\mathscr{O}^* = \{A^* : A \in \mathscr{O}\}$로 취할 수 있다. 따라서 $D(A \xrightarrow{x} B) = B^* \xrightarrow{x^*} A^*$이다.

범주의 사상 또는 대상에 대한 각각의 성질은 *쌍대 성질*을 가진다. 만약 P가 범주의 사상에 대한 성질이면 P^*는 'x가 P^*이다' $\Leftrightarrow$ 'x^*가 P이다'에 의해 정의된다. 어떠한 성질들은 자기쌍대이다: $P = P^*$. 이것의 가장 자명한 예시는 '항등사상이다'라는 성질이다. 다음 장에서 우리는 Abel 범주에 대한 공리들을 나열할 것이며 만약 $\mathscr{M}$이 Abel 범주이면 $\mathscr{M}^*$도 그러함을 관찰할 수 있을 것이다. 따라서 공리로부터 나오는 모든 정리들은 대응하는 *쌍대 정리*를 가진다; 즉 등장하는 각각의 성질들이 쌍대 성질로 대체된 정리이다.

1.2 Notation (표기법)

이제부터 우리는 $\mathscr{A}$가 범주라고 말하면 이를 $\mathscr{A}$가 사상의 모임이며 대상의 모임인 것으로 해석할 것이다. 따라서 다음과 같은 진술이 유효하다: 'A가 $\mathscr{A}$에서의 대상이라 하자', 'x가 $\mathscr{A}$에서의 사상이라 하자'. 사상은 항상 소문자로, 대상은 항상 대문자로 표기할 것이다. '$x \in \mathscr{A}$'는 x가 $\mathscr{A}$에서의 사상임을 의미한다; '$A \in \mathscr{A}$'는 A가 $\mathscr{A}$에서의 대상임을 의미한다.

함자 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$를 정의하는 통상적인 과정은 두 단계로 구성된다. 첫째 단계에서는 각각의 $A \in \mathscr{A}$에 대하여 대상 $F(A) \in \mathscr{B}$를 기술한다. 둘째 단계에서는 각각의 $x \in (A, B) \subset \mathscr{A}$에 대하여 사상 $F(x) \in$

$(F(A), F(B)) \subset \mathscr{A}$를 기술한다.

$\mathscr{B}$가 집합의 범주 $\mathscr{S}$로 대체되었다 가정하자. 첫째 단계에서 우리는 각각의 $A \in \mathcal{A}$에 대하여 집합 $F(A)$를 명시해야 한다. 둘째 단계에서 우리는 각각의 $A \xrightarrow{x} B \in \mathcal{A}$에 대하여 함수 $F(x) : F(A) \to F(B)$를 명시해야 한다. 이를 위해서는 통상적으로 다음과 같은 끔찍한 것이 필요하다:

"$y \in F(A)$에 대하여, $[F(x)](y) = \ldots$"

이를 다음 절에 대한 경고로 삼겠다.

1.3 The Standard Functors (표준 함자)

$\mathscr{S}$가 집합의 범주이고 $\mathscr{A}$가 임의의 범주이며 A가 $\mathscr{A}$에서의 대상이라 하자. 함자 $(A, -) : \mathscr{A} \to \mathscr{S}$가 다음에 의해 정의된다:

- $B \in \mathscr{A}$에 대하여 $(A, -)(B) = (A, B)$ (A에서 B로의 사상들의 집합)
- $B_1 \xrightarrow{x} B_2 \in \mathscr{A}$에 대하여 $(A, -)(x)$는 다음에 의해 정의된 함수 $(A, B_1) \xrightarrow{(A,x)} (A, B_2)$이다:

$$[(A, x)](A \xrightarrow{y} B) = A \xrightarrow{y} B_1 \xrightarrow{x} B_2 \in (A, B_2)$$

반변함자 $(-, A) : \mathscr{A} \to \mathscr{S}$는 다음에 의해 정의된다:

- $B \in \mathscr{A}$에 대하여 $(-, A)(B) = (B, A)$
- $B_1 \xrightarrow{x} B_2 \in \mathscr{A}$에 대하여 $(-, A)(x)$는 다음에 의해 정의된 함수 $(B_1, A) \xrightarrow{(x,A)} (B_2, A)$이다:

$$[(x, A)](B_2 \xrightarrow{y} A) = B_1 \xrightarrow{x} B_2 \xrightarrow{y} A \in (B_1, A)$$

1.4 Special Maps (특수한 사상)

이 장의 남은 부분에서 우리는 범주 내에서 작업할 것이다. 즉 우리는 하나의 범주만을 논의하며 언급되는 모든 사상과 대상들은 해당 범주에 속한 것들이다. 세 가지 특수한 사상들이 언급될 수 있다:

- $A \xrightarrow{a} B$가 **동형사상(isomorphism)**임은 사상 $B \xrightarrow{b_1} A$와 $B \xrightarrow{b_2} A$가 존재하여 $B \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{a} B$와 $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b_2} A$가 항등사상인 것이다.
- $A \longrightarrow B$가 **단사사상(monomorphism)**임은 쌍 $C \xrightarrow{x} A, C \xrightarrow{y} A$가 $C \xrightarrow{x} A \longrightarrow B = C \xrightarrow{y} A \longrightarrow B$를 만족시킨다면 이들이 자명한 쌍 $x = y$인 것이다.
- $A \longrightarrow B$가 **전사사상(epimorphism)**임은 쌍 $B \xrightarrow{x} C, B \xrightarrow{y} C$가 $A \longrightarrow B \xrightarrow{x} C = A \to B \xrightarrow{y} C$를 만족시킨다면 이들이 자명한 쌍 $x = y$인 것이다.

'동형사상이다'라는 성질은 자기쌍대이다. 단사사상과 전사사상은 서로 쌍대이다.

집합의 범주와 가환군의 범주에서는 이러한 정의가 기존의 정의와 일치한다. (단사사상은 함수로서 단사함수임을, 전사사상은 함수로서 전사함수임을 의미한다.) 다음 명제들은 잘 알려진 모형에서 명백히 참이며 일반적으로도 증명할 수 있다:

Proposition 1.4.1. 만약 $A \to B \to C$가 단사사상이면 $A \to B$도 단사사상이다. 만약 $A \to B$와 $B \to C$가 모두 단사사상이면 $A \to B \to C$도 단사사상이다. □

Proposition 1.4.2. 만약 $A \to B \to C$가 전사사상이면 $B \to C$도 전사사상이다. 만약 $A \to B$와 $B \to C$가 모두 전사사상이면 $A \to B \to C$도 전사사상이다. □

Proposition 1.4.3. 동형사상은 단사사상이며 전사사상이다.

Proof. 만약 $A \xrightarrow{a} B$가 동형사상이면 $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b_2} A$가 단사사상이며 $B \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{a} B$가 전사사상이도록 하는 사상들이 존재한다. □

Proposition 1.4.4. 만약 $A \xrightarrow{a} B$가 동형사상이면 유일한 사상 $B \xrightarrow{b} A$가 존재하여 $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} A = 1_A$와 $B \xrightarrow{b} A \xrightarrow{a} B = 1_B$를 만족시킨다. 이러한 $B \xrightarrow{b} A$는 동형사상이다.

Proof. b_1과 b_2가 동형사상의 정의에서와 같다 하자. $B \xrightarrow{b_1} A = B \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{1} A = B \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b_2} A = B \xrightarrow{1} B \xrightarrow{b_2} A = B \xrightarrow{b_2} A$이다. □

Proposition 1.4.5. 동형사상들의 합성은 동형사상이다. □

두 대상이 **동형(isomorphic)**임은 이들 간에 동형사상이 존재하는 것이다. 위 두 명제는 이러한 방식으로 정의된 대상들 간의 관계가 동치 관계임을 보여준다.

1.5 Subobjects and Quotient Objects (부분대상과 몫대상)

Definition. 두 단사사상 $A_1 \to B$와 $A_2 \to B$가 *동치*임은 사상 $A_1 \to A_2$와 $A_2 \to A_2$가 존재하여 다음 도표들이 가환이도록 하는 것이다.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
A_2 \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr] & \\
A_2 \arrow[u] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
$$

B의 **부분대상(subobject)**은 B로의 단사사상들의 동치류이다. $A_1 \to B$에 의해 표현되는 부분대상이 $A_2 \to B$에 의해 표현되는 부분대상에 **포함된다(contained)**는 것을 사상 $A_1 \to A_2$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 하는 것으로 정의한다.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
A_2 \arrow[r] & B
\end{tikzcd}
$$

$A_1 \to A_2$가 반드시 단사사상이어야 하며 유일함을 기억해 두라. 이와 동시에 $A_2 \to B$에 의해 표현된 부분대상이 $A_1 \to B$에 의해 표현된 부분대상에 포함되면 유일성으로부터 부분대상들이 같으며 A_1과 A_2가 동형임이 따라온다. 포함 관계는 부분대상들에 대하여 정의된 부분순서이다.

'부분대상' 관계는 추이적이지 않음을 기억해 두라. 우리가 부분대상들을 단사사상의 동치류로 정의했으므로 이들은 부분대상을 가질 수가 없다. 그러므로 추이성을 논하는 것은 애초에 말이 안 되는 것이다. 우리는 아마도 '부분집합' 관계의 추이성으로부터 오해를 했을 수도 있다. 이는 독립된 현상으로 간주되어야 한다. 고전 군론에서 '몫군' 관계를 고려하고 몫군이 잉여류들의 집합으로 정의되었음을 상기하라. 이제 A의 잉여류들의 집합의 잉여류들의 집합은 A의 잉여류들의 집합이 아니다. 관계 '몫군'은 추이적이지 않다.

두 전사사상 $B \to C_1$과 $B \to C_2$가 *동치*임은 사상 $C_1 \to C_2$와 $C_2 \to C_1$이 존재하여 다음 도표들이 가환이도록 하는 것이다.

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[d] \\
B \arrow[ur] \arrow[r] & C_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C_1 \\
B \arrow[ur] \arrow[r] & C_2 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

몫대상(quotient object)은 전사사상들의 동치류이다. $B \to C_1$에 의해 표현되는 몫대상이 $B \to C_2$에 의해 표현되는 몫대상보다 **작다(smaller)**는 것을 사상 $C_2 \to C_1$이 존재하여 다음 도표가 가환이도록 하는 것으로 정의한다.

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \\
B \arrow[ur] \arrow[r] & C_2 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

1.6 Difference Kernels and Cokernels (차핵과 차여핵)

두 사상 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$에 대하여 $K \to A$가 x와 y의 **차핵(diffrerence kernel)**임은 다음을 만족시키는 것이다:

DK1. $K \to A \xrightarrow{x} B = K \to A \xrightarrow{y} B$
DK2. $X \to A \xrightarrow{x} B = X \to A \xrightarrow{y} B$를 만족시키는 모든 $X \to A$에 대하여 유일한 $X \to K$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ K \arrow[rr] & & A \end{tikzcd}$$

다른 말로 하면, x와 y의 차핵은 x와 y를 구별하지 못하는 A로의 사상 중 이러한 성질 하에서 보편인 것이다 - i.e. x와 y를 구별하지 못하는 A로의 사상은 이를 통해 유일하게 분해된다.

우리는 이곳에서 차핵의 존재성을 주장하지 않고 있다. 우리는 단지 이를 정의했을 뿐이다.

Proposition 1.6.1. 만약 $K \to A$가 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$의 차핵이면 이는 단사사상이며 이것이 표현하는 부분대상 S는 $S \to A \xrightarrow{x} B = S \to X \xrightarrow{y} B$를 만족시키는 A의 최대 부분대상이다.

Proof. $C \xrightarrow{a} K \to A = C \xrightarrow{b} K \to A = C \xrightarrow{c} A$라 하자. 그 경우 **DK1**에 의해 $C \xrightarrow{c} A \xrightarrow{x} B = C \xrightarrow{c} A \xrightarrow{y} B$이다. 그러나 **DK2**에 의해 K를 통한 분해는 유일하며 따라서 $a = b$이다. □

$A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$의 모든 차핵은 동일한 부분대상을 표현한다. 역으로 만약 $K \to A$가 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$의 차핵이며 $K' \to A$가 이와 동일한 부분대상을 표현하면 $K' \to A$가 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$의 차핵이다.

$A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$의 차핵들에 의해 표현되는 유일한 부분대상도 차핵이라 칭하며 $\mathrm{Ker}(x-y)$로 표기한다. 따라서 형식적으로 $\mathrm{Ker}(x-y)$는 A의 부분대상이다. 그러나 우리는 표기법 $\mathrm{Ker}(x-y) \to A$를 이용하여 (사상) 차핵을 표기할 것이다.

쌍대 개념은 차여핵이다. 주어진 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$에 대하여 $B \to F$가 x와 y의 **차여핵(difference cokernel)**임은 다음을 만족시키는 것이다:

DK1. $A \xrightarrow{x} B \to F = A \xrightarrow{y} B \to F$
DK2. $A \xrightarrow{x} B \to X = A \xrightarrow{y} B \to X$를 만족시키는 모든 $X \to A$에 대하여 유일한 $F \to X$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

차여핵은 전사사상이어야 하며, 만약 차여핵이 존재한다면 이는 (역시) 차여핵이라 불리며 $\mathrm{Cok}(x-y)$로 표기되는 몫대상을 결정한다.

1.7 Products and Sums (곱과 합)

2개의 대상 A, B가 주어진 경우 대상 P가 A와 B의 **곱(product)**이라는 것의 정의는 사상 $P \xrightarrow{p_1} A$와 $P \xrightarrow{p_2} B$가 존재하여 임의의 사상 $X \to A, X \to B$에 대하여 유일한 사상 $X \to P$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 하는 것이다.

$$\begin{tikzcd} & A \\ X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & P \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

집합, 군, 환, 위상공간 등 잘 알려진 범주에서는 Descartes 곱을 통해 곱을 구축할 수 있음을 기억해 두라.

Proposition 1.7.1. 만약 P, P'이 A와 B의 곱이면 이들은 서로 동형이다.

Proof. $P \xrightarrow{p_1} A, P \xrightarrow{p_2} B, P' \xrightarrow{p_1'} A, P' \xrightarrow{p_2'} B$가 곱의 정의에 기술된 사상들이라 하자. 사상 $P \to P'$와 $P' \to P$가 존재하여 다음 도표들이 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd} & A \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r] \arrow[dr, "p_2"'] & P' \arrow[u, "p_1'"'] \arrow[d, "p_2'"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \\ P' \arrow[ur, "p_1'"] \arrow[r] \arrow[dr, "p_2'"'] & P \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

합성 $P \to P' \to P = P \xrightarrow{x} P$는 ($1_P$와 마찬가지로) 다음 성질을 가진다.

$$\begin{tikzcd} & A \\ P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "p_2"'] & P \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

곱의 정의의 유일성 조건은 $x = 1_P$임을 함의한다. 마찬가지로 $P' \to P \to P'$도 항등사상이다. □

곱은 '동형 하에서' 결정되므로 유일하지 않을 수 있다. 따라서 유일한 곱을 결정하려는 시도는 애초에 말이 되지 않는다. 표기법 $A \times B$는 A와 B의 (유일하게 결정되지는 않지만) 고정된 곱을 나타낼 것이며 다음 사상들을 가지는 것으로 간주될 것이다.

$$A \times B \xrightarrow{p_1} A \quad , \quad A \times B \xrightarrow{p_2} B$$

곱의 쌍대는 합이다. 2개의 대상 A, B가 주어진 경우 대상 S가 A와 P의 **합(sum)**이라는 것의 정의는 사상 $A \xrightarrow{u_1} S$와 $B \xrightarrow{u_2} S$가 존재하여 임의의 사상 $A \to X, B \to X$에 대하여 유일한 사상 $S \to X$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 하는 것이다.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr] & \\ S \arrow[r] & X \\ B \arrow[u, "u_2"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

동일한 대상들의 합들은 서로 동형이다; 표기법 $A+B$는 A와 B의 고정된 합을 나타낸다; 사상 $A \xrightarrow{u_1} A+B$와 $B \xrightarrow{u_2} A+B$가 연관된 (고정된) 사상들이다.

잘 알려진 범주에서 '합'이라는 단어는 관습적으로 다음과 같이 대체된다:

범주	**합**
집합	분리합집합(disjoint union)
가환군	직접합(direct sum)
군	자유곱(free product)
가환환	텐서곱(tensor product)

$X \xrightarrow{x_1} A$와 $X \xrightarrow{x_2} B$가 주어진 경우 다음을 만족시키는 유일한 사상 $X \to A \times B$를 $X \xrightarrow{(x_1,x_2)} A \times B$로 표기할 것이다.

$$X \to A \times B \xrightarrow{p_1} A = X \xrightarrow{x_1} A$$
$$X \to A \times B \xrightarrow{p_2} A = X \xrightarrow{x_2} B$$

또한 $A + B \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} X$는 다음을 만족시키는 유일한 사상이다.

$$A \xrightarrow{u_1} A + B \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} X = A \xrightarrow{x_1} X$$

$$B \xrightarrow{u_2} A + B \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} X = B \xrightarrow{x_2} X$$

1.8 Complete Categories (완비 범주)

범주에서의 대상들의 첨자화된 집합 $\{A_i\}_I$가 주어진 경우 그 **곱(product)**은 다음 사상

$$\left\{\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{p_i} A_i\right\}$$

들을 가지는 대상 $\prod_{i\in I} A_i$로, 임의의 족 $\{X \xrightarrow{x_i} A_i\}_I$에 대하여 유일한 $X \to \prod_I A_i$가 존재하여 $X \to \prod_I A_i \xrightarrow{p_i} A_i = X_i \xrightarrow{x_i} A_i$를 만족시키는 것이다. 쌍대 개념은 **합(sum)**이며 $\{A_i \xrightarrow{u_i} \sum_I A_i\}$로 표기도 니다.

범주가 **좌완비(left-complete)**임은 사상의 임의의 쌍이 차핵을 가지며 대상들의 임의의 첨자화된 *집합*이 곱을 가지는 것이다. 이와 쌍대로, 범주가 **우완비(right-complete)**임은 사상의 임의의 쌍이 차여핵을 가지며 대상들의 임의의 첨자화된 집합이 합을 가지는 것이다. 만약 범주가 동시에 좌완비이며 우완비이면 **완비(complete)**라 불린다.

1.9 Zero Objects, Kernels, and Cokernels (영대상, 핵, 여핵)

영대상(zero object)은 각각의 대상으로부터의 사상과 각각의 대상으로의 사상을 정확히 하나씩 가지는 대상이다. 영대상을 기호 O로 표기한다. 따라서 모든 A에 대하여 집합 (O, A)와 (A, O)는 정확히 하나의 원소를 가진다. 집합의 범주는 영대상을 갖지 않는다; 군의 범주는 자명군을 영대상으로 가진다.

범주가 영대상을 가지는 경우 **영사상(zero map)** $A \xrightarrow{0} B$를 유일한 사상 $A \to O \to B$로 정의한다. (어떠한 영대상이 사용되는지는 문제가 되지 않는다.)

$A \xrightarrow{x} B$의 **핵(kernel)**은 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{0} B$의 차핵이다. 그러므로 $K \to A$가 $A \xrightarrow{x} B$의 핵임은 다음을 만족시키는 것이다:

K1. $K \to A \xrightarrow{x} B = K \xrightarrow{0} B$

K2. 다음 도표

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\ A \arrow[r, "x"] & B \end{tikzcd}$$

가 가환이도록 하는 모든 $X \to A$에 대하여 유일한 $X \to K$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \\ K \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

x의 핵은 통상적으로 $\mathrm{Ker}(x)$로 표기된다. (따라서 $\mathrm{Ker}(x) = \mathrm{Ker}(x-0)$이다.)

$A \xrightarrow{x} B$의 **여핵(cokernel)**은 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{0} B$의 차여핵이며 $\mathrm{Cok}(x)$로 표기된다.

2 Fundamentals of Abelian Categories (Abel 범주의 기본 성질)

범주 $\mathscr{A}$가 **Abel 범주(Abelian category)**임은 다음을 만족시키는 것이다:

K0. $\mathscr{A}$가 영대상을 가진다.

K1. 임의의 두 원소의 곱이 존재한다.
K1*. 임의의 두 원소의 합이 존재한다.

K2. 임의의 사상이 핵을 가진다.
K2*. 임의의 사상이 여핵을 가진다.

K3. 모든 단사사상이 어떠한 사상의 핵이다.
K3*. 모든 전사사상이 어떠한 사상의 여핵이다.

공리 **A3**은 “모든 부분대상이 *정규*이다”라고도 표현할 수 있다. 자연스럽게 등장하는 대부분의 범주들은 공리 **A0**에서 **A2**를 만족시킨다. 기반점을 이용하면 공리 **A0**이 만족되는 경우가 종종 있다. 많은 범주들은 **A3** 또는 **A3*** 중 하나를 만족시킨다. 기반점을 가지는 컴팩트 Hausdorff 공간들의 범주는 **A3**을 만족시킨다; (가환일 필요가 없는) 군의 범주는 **A3***를 만족시킨다.

이 장의 모든 정리는 Abel 범주에 대한 정리이다.

2.1 Theorems for Abelian Categories (Abel 범주에 대한 정리)

대상 A를 고려하자. $\mathbf{S}$가 A의 부분대상들의 족이며 $\mathbf{Q}$가 A의 몫대상들의 족이라 하자. $\mathrm{Cok} : \mathbf{S} \to \mathbf{Q}$가 각각의 부분대상에 여핵을 대응시키는 함수라 하자.

이와 쌍대로, $\mathrm{Ker}\,\mathbf{Q} \to \mathbf{S}$가 핵을 대응시키는 함수라 하자. Cok와 Ker이 순서 역전 함수임을 기억해 두라. 공리 **A3**과 **A3***는 다음과 동치이다:

Theorem 2.1.1. Ker과 Cok는 서로의 역함수이다.

Proof. $A' \to A$가 단사사상이라 하자. 공리 **A3**에 의해 이는 어떠한 사상 $A \to B$의 핵이다. $A \to F$가 $A' \to A$의 여핵이며 $K \to A$가 $A \to F$의 핵이라 하자. 우리는 증명에서 특정 합성이 영사상임을 보인 후 핵과 여핵의 정의를 적용하는 것을 반복할 것이다. 먼저 $A' \to A \to B = 0$이며 따라서 사상 $F \to B$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(A \to B) = A' \arrow[dr] & & F = \mathrm{Cok}(A' \to A) \arrow[dd] \\
& A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Ker}(A \to F) = K \arrow[ur] & & B
\end{tikzcd}$$

$A' \to A \to F = 0$이다; 사상 $A' \to K$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& A \\
K \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$K \to A \to B = 0$이다; 사상 $K \to A'$이 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[dr] & \\ & A \\ K \arrow[uu] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

그러므로 $A' \to A$와 $K \to A$에 의해 표현되는 부분대상들은 서로에게 포함되고 따라서 서로 같다. $A' \to A$가 $A \to F$의 핵이다. 따라서 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Cok} =$ 항등함수이며, 이와 쌍대로 $\mathrm{Cok}\,\mathrm{Ker} =$ 항등함수이다. □

Theorem 2.1.2. 단사사상이며 전사사상인 사상은 동형사상이다.

Proof. $A \xrightarrow{a} B$가 단사사상이며 전사사상이라 하자. 명백히 $B \to O$가 $A \xrightarrow{a} B$의 여핵이다. $B \xrightarrow{1} B$는 명백히 $B \to O$의 핵이다. Theorem 2.1.1A에 의해 $A \to B$도 $B \to O$의 핵이다. (우리는 이미 A와 B가 동형임을 보였다 - 이들은 동일한 사상의 핵이다. 정리는 추가적으로 *사상* $A \xrightarrow{a} B$가 동형사상이라 주장한다.) 따라서 사상 $B \xrightarrow{b_1} A$가 존재하여 $B \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{a} B = B \xrightarrow{1} B$를 만족시킨다. 이와 쌍대로 $O \to A$가 $A \xrightarrow{a} B$의 핵이며 $A \xrightarrow{a} B$와 $A \xrightarrow{1} A$가 모두 $O \to A$의 여핵임을 기억해 두라. 따라서 사상 $B \xrightarrow{b_2} A$가 존재하여 $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b_2} A = A \xrightarrow{1} A$를 만족시킨다. 동형사상의 정의에 의해 $A \xrightarrow{a} B$가 동형사상이다. □

A의 두 부분대상의 **교부분대상(intersection)**은 이들의 A의 부분대상들의 족에서의 최대하계로 정의된다.

Theorem 2.1.3. 임의의 두 부분대상은 교부분대상을 가진다.

Proof. 더 강한 성질을 증명하자. $A_1 \to A$와 $A_2 \to A$가 단사사상이고 $A \to F$가 $A_1 \to A$의 여핵이며 $A_{12} \to A_2$가 $A_2 \to A \to F$의 핵이라 하자.

먼저 다음 합성

$$\begin{tikzcd} A_{12} \arrow[r] & A_2 \arrow[d] & \\ & A \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

이 영사상이므로, $A_1 = \mathrm{Ker}(A \to F)$라는 사실을 사용하면 (반드시 단사사상이어야 하는) 사상 $A_{12} \to A_1$이 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다:

$$\begin{tikzcd} A_{12} \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & A \end{tikzcd} \tag{2.1.3.1}$$

$X \to A_1$과 $X \to A_2$가 다음 도표가 가환이도록 하는 임의의 사상들이라 하자.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

다음을 만족시키는 유일한 $X \to A_{12}$가 존재함을 보이겠다.

$$X \to A_{12} \to A_1 = X \to A_1 \quad , \quad X \to A_{12} \to A_2 \to A_2 = X \to A_2$$

(X가 '부분대상인' 경우 이는 X가 A_{12}에 포함됨을 증명한다.)

$X \to A_2 \to F = X \to A_1 \to F = 0$이며 $A_{12} \to A_2 = \mathrm{Ker}(A_2 \to F)$이므로 그러므로 *유일한* 사상 $X \to A_{12}$가 존재하여 $X \to A_{12} \to A_2 = X \to A_2$를 만족시킨다. 다른 방정식은 $X \to A_{12} \to A_1 \to A = X \to A_2 \to A = X \to A_1 \to A$임과 $A_1 \to A$가 단사사상이라는 사실에서 따라온다. □

이와 쌍대로, 임의의 두 몫대상은 최대하계를 가진다. Ker과 Cok가 순서 역전 함수이며 서로의 역삼수이므로 임의의 두 부분대상이 최소상계를 가진다. 따라서 A의 부분대상들의 족은 격자이다. 표준적인 격자 기호 $\cup$과 $\cap$을 사용할 것이다.

Theorem 2.1.4. 임의의 두 사상 $A \xrightarrow{x} B, A \xrightarrow{y} B$의 차핵이 존재한다.

Proof. '그래프들을 교차시키는 것으로' 차핵을 구축하겠다.

단사사상 $A \xrightarrow{(1,x)} A \times B$와 $A \xrightarrow{(1,y)} A \times B$를 고려하자. ($(1,x)$에 p_1을 합성한 것이 단사사상이므로 $(1,x)$가 단사사상이다.) $K \to A \times B$가 이들의 교부분대상을 나타낸다 하자. 다음의 가환 도표를 얻는다:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "k_2"'] & A \arrow[d, "(1,y)"] \\
A \arrow[r, "(1,x)"'] & A \times B
\end{tikzcd}$$

p_1을 합성하면 $k_1 = k_2$임을 알 수 있다. $k = k_1 = k_2$라 하자. p_2를 합성하면 $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{x} B = K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{y} B$임을 알 수 있다. $X \to A$가 $X \to A \xrightarrow{x} B = X \to A \xrightarrow{y} B$를 만족시킨다 하자. 그 경우 다음 도표가 가환이다:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "(1,y)"] \\
A \arrow[r, "(1,x)"'] & A \times B
\end{tikzcd}$$

(이것이 가환임을 증명하기 위해서는 각 사상을 p_1, p_2와 합성하면 된다.) Theorem 2.1.3의 증명에 의해 $X \to A$의 $K \to A$를 통한 유일한 분해가 존재한다. □

이와 쌍대로, 임의의 두 사상 $A \xrightarrow{x} B, A \xrightarrow{y} B$의 차여핵이 존재한다.

다음 가환 도표

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

가 **당김(pullback)** 도표임은 다음 도표가 가환이도록 하는 임의의 사상 $X \to A, X \to B$에 대하여,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

유일한 $X \to P$가 존재하여 $X \to P \to A = X \to A, X \to P \to B = X \to B$를 만족시키는 것이다. Theorem 2.1.3의 증명은 사실 도표 2.1.3.1이 당김 도표임을 증명하는 것이었다.

Theorem 2.1.5. 다음 형태의 모든 도표는 당김 도표로 확장될 수 있다.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

Proof. $A \times B$와 사상 $A \times B \xrightarrow{p_1} A \to C, A \times B \xrightarrow{p_2} B \to C$를 고려하자. $K \to A \times B$가 이들의 차핵이라 하자. 다음과 같이 정의하자.

$$K \to A = K \to A \times B \overset{p_1}{A}$$

$$K \to B = K \to A \times B \overset{p_2}{B}$$

다음이 당김 도표임을 간단히 검증할 수 있다.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.1.5.1. 만약 다음 도표들이 당김 도표이면,

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P' & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

P와 P'이 동형이다; 유일한 사상 $P \to P'$이 존재하여 다음 도표가 가환이도록 하며, 이러한 사상은 동형사상이다.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ A & & B \\ & P' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Proof. 곱에 대한 증명(Prop. 1.7.1)과 거의 같다. 더 간단히 증명하기 위해서는 (고정된 C에 대하여) 대상이 $\{(A \to C) : A \in \mathcal{A}\}$들이며 사상이 $(A \to C, B \to C) = \{A \to B \in (A, B) : A \to B \to C = A \to C\}$들인 범주에서 곱 $(P \to C) = (A \to C) \times (B \to C)$가 정확히 $\mathcal{A}$에서의 당김 도표의 대각선 사상임을 기억해 두라. □

다음 가환 도표

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

가 **밂(pushout)** 도표임은 다음 도표가 가환이도록 하는 모든 사상 $B \to X, C \to X$에 대하여,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & X \end{array}$$

유일한 $P \to X$가 존재하여 $B \to P \to X = B \to X, C \to P \to X = C \to X$를 만족시키는 것이다.

Theorem 2.1.5*. 다음 형태의 모든 도표는 밂 도표로 확장될 수 있으며, 이러한 확장은 동형 하에서 유일하다.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

사상 $A \to B$의 **상(image)**은 $A \to B$를 분해하는 단사사상에 의해 표현되는 B의 최소 부분대상이다.

Theorem 2.1.6. $A \to B$의 상이 존재하며 $\operatorname{Ker}\operatorname{Cok}(A \to B)$와 같다.

Proof. 단사사상 $S \to B$가 $A \to B$를 *허용함*을 $A \to B$가 $S \to B$를 통해 분해되는 것으로 정의하겠다. i.e. 사상 $A \to S$가 존재하여 $A \to S \to B = A \to B$를 만족시킨다. 전사사상 $B \to F$가 $A \to B$를 *소멸시킴*을 $A \to B \to F = 0$인 것으로 정의하겠다. 이들은 각각 부분대상과 몫대상의 성질이다.

Lemma. 부분대상이 $A \to B$를 허용할 필요충분조건은 그 여핵이 $A \to B$를 소멸시키는 것이다. □

이제 $\operatorname{Cok}(A \to B)$가 $A \to B$를 소멸시키는 최대 몫대상이다. 따라서 $\operatorname{Ker}\operatorname{Cok}(A \to B)$가 $A \to B$를 허용하는 최소 부분대상이다. i.e. 이는 $A \to B$의 상이다. □

Notation. $A \xrightarrow{x} B$의 상을 $\operatorname{Im}(A \xrightarrow{x} B)$ 또는 $\operatorname{Im}(x)$로 표기한다.

Theorem 2.1.7. $A \to B$가 전사사상 iff $\operatorname{Im}(A \to B) = B$ iff $\operatorname{Cok}(A \to B) = O$

Proof. $(\Rightarrow)$ 자명.
$(\Leftarrow)$ 만약 $\operatorname{Cok}(A \to B) = O$이면 Theorem 2.1.6에 의해 $\operatorname{Im}(A \to B) = B \xrightarrow{1} B$이다. $A \to B \xrightarrow{x} C = A \to B \xrightarrow{y} C$라 하자. $\operatorname{Ker}(x - y) \to B$가 x와 y의 차핵이라 하자. 그 경우 $A \to \operatorname{Ker}(x - y)$가 존재하여 $A \to B = A \to \operatorname{Ker}(x - y) \to B$를 만족시키며 $\operatorname{Ker}(x - y)$는 $A \to B$의 상을 포함한다. 그러므로 $\operatorname{Ker}(x - y) = B$이고 $x = y$이다. □

Theorem 2.1.8. $A \xrightarrow{x} \mathrm{Im}(x)$가 전사사상이다.

Proof. 만약 $\mathrm{Cok}(A \to \mathrm{Im}(x)) \neq O$이면 $A \to \mathrm{Im}(x)$가 $\mathrm{Im}(x)$의 진부부분대상을 통해 분해되며 이는 $\mathrm{Im}(x)$의 정의에 모순이다. $\square$

상의 쌍대는 여상이다. $A \to B$의 **여상(coimage)**은 $A \to B$를 분해하는 A의 최소 몫대상이다.

Notation. $A \xrightarrow{x} B$의 여상을 $\mathrm{Coim}(A \xrightarrow{x} B)$ 또는 $\mathrm{Coim}(x)$로 표기한다.

Theorem 2.1.6*. $\mathrm{Coim}(A \to B) = \mathrm{Cok}\,\mathrm{Ker}(A \to B)$ $\square$

Theorem 2.1.7*. $A \to B$가 단사사상 iff $\mathrm{Coim}(A \to B) = A$ iff $\mathrm{Ker}(A \to B) = O$ $\square$

$A \to I'$이 $A \to B$의 여상이라 하고 $A \to I' \to B$를 고려하자.

Theorem 2.1.8*. $I' \to B$가 단사사상이다. $\square$

Theorem 2.1.9 (Unique Factorization Theorem (유일 분해 정리))**.** 만약 $A \to B = A \to I \to B$이고 $A \to I$가 전사사상이며 $I \to B$가 단사사상이면 $A \to I$가 $A \to B$의 여상이며 $I \to B$가 $A \to B$의 상이다. 이에 더해 $A \to \bar{I}$가 전사사상이며 $\bar{I} \to B$가 단사사상이도록 하는 임의의 다른 분해 $A \to \bar{I} \to B$에 대하여 유일한 $I \to \bar{I}$가 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다.

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \\ & \bar{I} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

이러한 사상 $I \to \bar{I}$는 반드시 동형사상이어야 한다. $\square$

2.2 Exact Sequences (완전열)

Theorem 2.2.1. $A \to B \to C$에 대하여 다음 조건들이 서로 동치이다:

(a) $\mathrm{Im}(A \to B) = \mathrm{Ker}(B \to C)$
(b) $\mathrm{Coim}(B \to C) = \mathrm{Cok}(A \to B)$
(c) $A \to B \to C = 0$이며 $K \to B \to F = 0$

여기에서 $K \to B$는 $B \to C$의 핵이고 $B \to F$는 $A \to B$의 여핵이다.

Proof. (a) $\Rightarrow$ (c). $A \to B \to C = 0$임은 자명하다; 우리는 $K \to B \to F = 0$임을 보여야 한다. $\mathrm{Ker}(B \to C) = \mathrm{Im}(A \to B) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Cok}(A \to B) = \mathrm{Ker}(B \to F)$임을 기억해 두라. $K \to B$가 $B \to C$의 핵이므로 $K \to B \to F = 0$임이 따라온다.
(c) $\Rightarrow$ (a). $I \to B$가 $B \to F$의 핵이며 따라서 $A \to B$의 상이라 하자. $K \to B \to F = 0$이므로 $\mathrm{Ker}(B \to C) \subset \mathrm{Im}(A \to B)$이다. 반면에 $A \to B \to C = 0$이므로 $\mathrm{Im}(A \to B) \subset \mathrm{Ker}(B \to C)$이다.
(b) $\Leftrightarrow$ (c)도 쌍대 논의에 의해 증명된다. $\square$

열 $\cdots \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to \cdots$가 **완전(exact)**열임의 정의는 각각의 i에 대하여 $\mathrm{Im}(A_{i-1} \to A_i) = \mathrm{Ker}(A_i \to A_{i+1})$인 것이다.

Proposition 2.2.2.

$O \to K \to A$	가 완전열 iff $K \to A$가 단사사상
$O \to K \to A \to B$	가 완전열 iff $K \to A$가 $A \to B$의 핵
$B \to F \to O$	가 완전열 iff $B \to F$가 전사사상
$A \to B \to F \to O$	가 완전열 iff $B \to F$가 $A \to B$의 여핵
$O \to A \to B \to O$	가 완전열 iff $A \to B$가 동형사상
$A \to B \xrightarrow{1} B$	가 완전열 iff $A \to B$가 영사상
$O \to A \to B \to C \to O$	가 완전열 iff $A \to B$가 단사사상이며 $B \to C$가 $A \to B$의 여핵

$\square$

2.3 The Additive Structure for Abelian Categories (Abel 범주의 덧셈적 구조)

Theorem 2.3.1. 열 $O \to A \xrightarrow{u_1} A+B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \to O$가 완전열이다.

Proof. $A \xrightarrow{u_1} A+B \xrightarrow{\binom{1}{0}} A$가 단사사상이므로 $A \xrightarrow{u_1} A+B$는 자명하게 단사사상이다. $A+B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B$가 u_1의 여핵임을 보이자: $A+B \xrightarrow{\binom{x}{y}} X$가 $A+B \xrightarrow{\binom{x}{y}} X = 0$을 만족시키는 사상이면 $x=0$이며 $A+B \xrightarrow{\binom{x}{y}} X = A+B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \xrightarrow{y} X$이다. □

Theorem 2.3.2. $O \to A \xrightarrow{(1,0)} A \times B \xrightarrow{p_2} B \to O$가 완전열이다. □

Theorem 2.3.3. $A \xrightarrow{u_1} A+B$와 $B \xrightarrow{u_2} A+B$의 교부분대상은 O이다.

Proof. 증명은 교부분대상의 구축에서 따라온다. □

이와 쌍대로 다음이 성립한다:

Theorem 2.3.4. 몫대상 $A \times B \xrightarrow{p_1} A$와 $A \times B \xrightarrow{p_2} B$의 최대하계는 O이다.

Ker-Cok 쌍대성에 의해 $A \xrightarrow{u_1} A+B$와 $B \xrightarrow{u_2} A+B$의 최소상계는 $A+B$이다. 합 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$과 곱 $B_1 \times \cdots \times B_m$이 주어진 경우 합에서 곱으로의 임의의 사상은 다음과 같은 행렬 (x_{ij})에 의해 유일하게 표현된다.

$$A_i \xrightarrow{x_{ij}} B_j = A_i \xrightarrow{u_i} A_1 + \cdots + A_n \to B_1 \times \cdots \times B_m \xrightarrow{p_i} B_j$$

Theorem 2.3.5. $A_1 + A_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)} A_1 \times A_2$는 동형사상이다.

Proof. $K \to A_1 + A_2$가 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 핵이라 하자. 그 경우 $K \to A_1 + A_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)} A_1 \times A_2 \xrightarrow{p_2} A_2 = K \to A_1 + A_2 \xrightarrow{\binom{0}{1}} A_2$이므로 $K \to A_1 + A_2$가 $A_1 \xrightarrow{u_1} A_1 + A_2$에 포함된다. 마찬가지로 이는 $A_2 \xrightarrow{u_2} A_1 + A_2$에 포함되며 따라서 K가 이들의 교부분대상 O에 포함된다. 그러므로 $K = O$이고 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 단사사상이다. 이와 쌍대로 이는 전사사상이며 따라서 동형사상이다. □

그러므로 $A_1 + A_2 \xrightarrow{\binom{1}{0}} A_1, A_1 + A_2 \xrightarrow{\binom{0}{1}} A_2$는 A_1과 A_2의 곱으로 취해질 수 있다.

Notation. $A \oplus B$는 합 $A+B$와 곱 $A \times B$를 나타내기 위해 사용될 것이며 A와 B의 **직접합(direct sum)**이라 불릴 것이다.

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A = A \xrightarrow{(1,1)} A + A \quad \text{는 **대각사상(diagonal map)**이라 불린다.}$$

$$A \oplus A \xrightarrow{\sigma} A = A \times A \xrightarrow{\binom{1}{1}} A \quad \text{는 **합사상(summation map)**이라 불린다.}$$

두 사상 $A \xrightarrow{x} B, A \xrightarrow{y} B$가 주어진 경우 다음과 같이 정의한다:

$$A \xrightarrow{x \underset{L}{+} y} B = A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\binom{x}{y}} B$$

$$A \xrightarrow{x \underset{R}{+} y} B = A \xrightarrow{(x,y)} B \times B \xrightarrow{\sigma} B$$

Proposition 2.3.6.

$$0 \underset{L}{+} x = x = x \underset{L}{+} 0 \quad , \quad 0 \underset{R}{+} x = x = x \underset{R}{+} 0$$

Proof. $A \oplus A \xrightarrow{\binom{x}{0}} B = A + A \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{x} B$이므로 다음이 성립한다.

$$A \xrightarrow{\delta} A + A \xrightarrow{\binom{x}{0}} B = A \to A + A \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{x} B = A \xrightarrow{x} B$$ □

Proposition 2.3.7. $B \xrightarrow{u} C$에 대하여 $(ux \underset{L}{+} uy) = u(x \underset{L}{+} y)$이며 $C \xrightarrow{z} A$에 대하여 $(xz \underset{R}{+} yz) = (x \underset{R}{+} y)z$이다.

Proof. $A + A \xrightarrow{\binom{x}{y}} B \xrightarrow{u} C = A + A \xrightarrow{\binom{ux}{uy}} C$ □

Theorem 2.3.8. $\underset{L}{+}$과 $\underset{R}{+}$은 동일한 이항 연산이며, 이는 결합적이며 가환이다.

Proof. $A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B$를 고려하자. $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \left(\binom{w}{x}, \binom{x}{z}\right)$임을 관찰하라. (i.e. 만약 $A \oplus A = D$라 하고 $\binom{w}{y} = d_1, \binom{x}{z} = d_2$라 하면 $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = (d_1, d_2)$이다.) 그러므로 다음이 성립한다.

$$A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = \left[\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} \underset{R}{+} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right]$$

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = \left[\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}\delta \underset{R}{+} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\delta\right] = \left[(w \underset{L}{+} y) \underset{R}{+} (x \underset{L}{+} y)\right]$$

반면에 다음이 성립한다.

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B = [(w, x) \underset{L}{+} (y, z)]$$

$$A \xrightarrow{\delta} A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right)} B \oplus B \xrightarrow{\sigma} B = (w \underset{R}{+} x) \underset{L}{+} (y \underset{R}{+} z)$$

따라서 다음이 성립한다.

$$(w \underset{R}{+} x) \underset{L}{+} (y \underset{R}{+} z) = (w \underset{L}{+} y) \underset{R}{+} (x \underset{L}{+} z)$$

$x = y = 0$이라 하면 $w \underset{L}{+} z = w \underset{R}{+} z$를 얻는다.

$\underset{L}{+}$과 $\underset{R}{+}$을 모두 동일한 기호 '+'로 표기하면 위 방정식은 다음과 같아진다:

$$(u + x) + (y + z) = (u + y) + (x + z)$$

$y = 0$이라 하면 $(u + x) + z = u + (x + z)$를 얻는다. $u = z = 0$이라 하면 $x + y = y + x$를 얻는다. □

이제 통상적인 행렬 곱셈 규칙을 증명할 수 있다.

Theorem 2.3.9. 집합 (A, B)는 연산 + 하에서 가환군을 형성한다.

Proof. $A \xrightarrow{x} B$가 주어진 경우 사상 $A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B$를 고려하자. 그 핵을 $K \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B$라 하면 이것이 다음을 만족시키므로 $a = 0, b = 0$이어야 한다.

$$0 = K \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B = K \xrightarrow{(a, xa+b)} A \oplus B$$

그러므로 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$이 단사사상이다. 이와 쌍대로 이는 전사사상이며, 따라서 동형사상이다. 그 역이 $y + x = 0$을 만족시키는 y에 대하여 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 형태여야 함을 간단히 보일 수 있다. □

이제 (A, B)는 A에서 B로의 사상들의 군을 나타낼 것이다. 각각의 순서 3조 A, B, C에 대하여 사상의 합성에 의해 정의된 쌍선형 함수 $c : ((A, B), (B, C)) \to (A, C)$가 존재한다. 대상 A의 **자기사상(endomorphism)**은 A에서 A로의 사상이다; 이들은 단위환을 형성한다.

2.4 Recognition of Direct Sum System (직접합계의 이해)

다음의 4개 사상들의 집합

$$A_1 \xrightarrow{u_1} S \quad , \quad A_2 \xrightarrow{u_2} S \quad , \quad S \xrightarrow{p_1} A_1 \quad , \quad S \xrightarrow{p_2} A_2$$

가 **직접합계(direct sum system)**라는 것의 정의는 S가 A_1과 A_2의 직접합이며 $u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1), p_1 = \binom{1}{0}, p_2 = \binom{0}{1}$인 것이다. 직접합계를 이해하는 데 유용한 두 가지 정리를 소개하겠다:

Theorem 2.4.1. 만약 u_1, u_2, p_1, p_2가 다음을 만족시키며 $u_1p_1+u_2p_2 = 1_S$이면 u_1, u_2, p_1, p_2가 직접합계를 형성한다.

$$A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 1_{A_1} \quad , \quad A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_2} A_2 = 1_{A_2}$$
$$A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} A_2 = 0 \quad , \quad A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 0$$

Proof. $X \xrightarrow{x_1} A_1, X \xrightarrow{x_2} A_2$가 임의의 사상이라 하자. $X \xrightarrow{x} S = u_1x_1 + u_2x_2$로 정의하자. 그 경우 $p_1x = p_1(u_1x_1 + u_2x_2) = p_1u_1x_1 + p_1u_2x_2 = x_1$이다; $p_2x = p_2(u_1x_1 + u_2x_2) = p_2u_1x_1 + p_2u_2x_2 = x_2$이다. 만약 $x = u_1x_1 + u_2x_2$가 $p_1x = x_1, p_2x = x_2$를 만족시키는 *유일한* 사상임을 보일 수 있다면 $\{S \xrightarrow{p_1} A_2, S \xrightarrow{p_2} A_2\}$가 곱임을 알 수 있다: 이를 만족시키는 임의의 x에 대하여 다음이 성립하므로 유일성이 따라온다.

$$x = 1_S x = (u_1p_1 + u_2p_2)x = u_1x_1 + u_2x_2$$

이와 쌍대로 $\{A_1 \xrightarrow{u_1} S, A_2 \xrightarrow{u_2} S\}$가 A_1과 A_2의 합이므로 정리가 증명된다. □

Theorem 2.4.2. 만약 u_1, u_2, p_1, p_2가 다음을 만족시키며,

$$A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 1_{A_1} \quad , \quad A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_2} A_2 = 1_{A_2}$$

다음 열들이 완전열이면,

$$A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} A_2 \quad , \quad A_2 \xrightarrow{u_2} S \xrightarrow{p_1} A_1$$

u_1, u_2, p_1, p_2가 직접합계를 형성한다.

Proof. Theorem 2.4.1의 증명에서와 마찬가지로 모든 쌍 $(X \xrightarrow{x_1} A_1, X \xrightarrow{x_2} A_2)$에 대하여 사상 $X \xrightarrow{x} S$가 존재하여 $p_1x = x_1, p_2x = x_2$를 만족시킴을 보일 수 있다. 유일성을 보이기 위해 x'이 $p_1x' = x_1, p_2x' = x_2$를 만족시킨다 하자. $z = x - x'$라 하자. $p_1z = 0, p_2z = 0$임을 기억해 두라. $z = 0$임을 보여야 한다. p_1u_1이 단사사상이므로 u_1이 단사사상이고 따라서 $O \to A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_2} A_2$가 완전열이다. 그러므로 사상 $X \to A_1$이 존재하여 다음 도표가 가환이도록 한다.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl] \arrow[d, "z"] & \\
O \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "u_1"] & S \arrow[r, "p_2"] & A_2
\end{tikzcd}$$

$X \to A_1 = X \to A_1 \xrightarrow{1} A_1 = X \to A_1 \xrightarrow{u_1} S \xrightarrow{p_1} A_1 = X \xrightarrow{z} S \xrightarrow{p_1} A_1 = 0$이다. 따라서 $X \xrightarrow{z} S = X \xrightarrow{0} A_1 \to S = 0$이다. □

2.5 The Pullback and Pushout Theorems (당김 및 밂 정리)

Proposition 2.5.1 (Ker$(x-y) = $ Ker$(x-y)$)**.** $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$가 주어졌다 하고 $z = x - y$라 하자. 그 경우 Ker$(A \xrightarrow{z} B)$는 $A \xrightarrow{x} B$와 $A \xrightarrow{y} B$의 차핵이다. □

Theorem 2.5.2. 다음 도표가 당김 도표이며 $K \to P$가 $P \to B$의 핵이라 하자.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

그 경우 $K \to P \to A$가 $A \to C$의 핵이다. 특히 $P \to B$가 단사사상 iff $A \to C$가 단사사상인 것이다.

Proof. $X \to A$가 $X \to A \to C = 0$을 만족시킨다 하자. 그 경우 다음 도표가 가환이며,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

따라서 유일한 사상 $X \to P$가 존재하여 $X \to P \to A = X \to A$이며 $X \to P \to B = 0$이다. 후자로부터 유일한 사상 $X \to K$가 존재하여 $X \to K \to P \to A = X \to A$를 만족시킴을 알 수 있다. □

Proposition 2.5.3. 다음 사각형이 주어졌다 하자.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{a} & A \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{b}} \\ B & \xrightarrow[\bar{a}]{} & P \end{array}$$

열 $C \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{\binom{\bar{b}}{-\bar{a}}} P$를 고려하자. 그 경우 다음이 성립한다:

$C \to A \oplus B \to P = 0$	iff 위 사각형이 가환
$O \to C \to A \oplus B \to B$	가 완전열 iff 위 사각형이 당김 도표
$C \to A \oplus B \to P \to O$	가 완전열 iff 위 사각형이 밂
$O \to C \to A \oplus B \to P \to O$	가 완전열 iff 위 사각형이 당김 도표이며 밂 도표

(마지막 경우 사각형이 **Doolittle 도표(Doolittle diagram)**라고 말한다.) □

열에서 부호 $-$로 인해 등장하는 비대칭성은 $-$ 부호를 4개 사상 중 어떤 것에 붙여도 상관없다는 사실을 관찰하면 해소된다.

Theorem 2.5.4 (Pullback Theorem (당김 정리))**.** 만약 다음이 당김 도표이며 $B \to C$가 전사사상이면 $P \to A$도 전사사상이다.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

그 쌍대를 증명하겠다:

Theorem 2.5.4* (Pushout Theorem (밂 정리))**.** 만약 다음이 밂 도표이며 $C \xrightarrow{a} A$가 단사사상이면 $B \xrightarrow{\bar{a}} P$도 단사사상이다.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{a} & A \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{b}} \\ B & \xrightarrow[\bar{a}]{} & P \end{array}$$

Proof. 전제조건에 의해 열 $C \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{\binom{\bar{b}}{-\bar{a}}} P \to O$가 완전열이며, $C \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B \xrightarrow{p_1} A$가 단사사상이므로 $C \xrightarrow{(a,b)} A \oplus B$도 단사사상이다. 그러므로 위 도표가 Doolittle 도표이고 따라서 당김 도표이므로 Theorem 2.5.2를 적용 가능하다. □

2.6 Classical Lemmas (고전적인 보조정리)

우리는 약한 매장 정리를 증명하기 위해 필요한 Abel 범주의 '내재적' 보조정리들을 모두 증명했다. 이 정리를 증명하면 (고전적인 '도표 추적'을 통해) 보조정리가 가환군의 범주에서 성립함을 확인하는 것만으로 수많은 보조정리들을 증명할 수 있다. 이 과정은 Chapter 4에 설명되어 있다.

이 절에서 우리는 Abel 범주에 대한 이러한 다수의 정리들을 증명할 것이다. 우리는 물론 약한 매장 정리를 사용하지 않을 것이다. 그러나 이러한 증명은 유익할 것이며, (약한 매장 정리 이후이기는 하지만) 나중에 이러한 보조정리들이 필요할 것이다.

이 절에서 우리는 Abel 범주에서 작업하고 있다고 가정할 것이다.

Lemma 2.6.1. 다음이 가환 도표이며 이 도표의 아래쪽 행이 완전열이라 하자.

$$\begin{tikzcd} & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ O \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] & B_{22} \arrow[r] & B_{23} \end{tikzcd}$$

그 경우 다음 사각형이 당김 도표일 필요충분조건은 $O \to B_{11} \to B_{12} \to B_{23}$이 완전열인 것이다.

$$\begin{tikzcd} B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \\ B_{21} \arrow[r] & B_{22} \end{tikzcd}$$

Proof. $(\Rightarrow)$ $B_{11} \to B_{12}$가 $B_{12} \to B_{23}$의 핵임을 증명해야 한다. $X \to B_{12}$가 $X \to B_{12} \to B_{23} = 0$을 만족시킨다 하자. $X \to B_{12} \to B_{22}$에 $B_{22} \to B_{23}$을 합성하면 0이 되므로 $X \to B_{21} \to B_{22} = X \to B_{12} \to B_{22}$를 만족시키는 유일한 분해 $X \to B_{21}$이 존재한다. 즉, 다음 도표가 가환 도표이다.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \\ B_{21} \arrow[r] & B_{22} \end{tikzcd}$$

따라서 유일한 분해 $X \to B_{11}$이 존재하여 $X \to B_{11} \to B_{12} = X \to B_{12}$를 만족시킨다.
$(\Leftarrow)$ $O \to B_{21} \to B_{22} \to B_{23}$과 $O \to B_{11} \to B_{12} \to B_{23}$이 완전열이며 다음 도표가 가환 도표라 하자.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \\ B_{21} \arrow[r] & B_{22} \end{tikzcd}$$

$X \to B_{12} \to B_{23} = X \to B_{21} \to B_{22} \to B_{23} = 0$이므로 유일한 분해 $X \to B_{11}$이 존재하여 $X \to B_{11} \to B_{12} = X \to B_{12}$를 만족시킨다. $X \to B_{11} \to B_{21} \to B_{22} = X \to B_{11} \to B_{12} \to B_{22} = X \to B_{12} \to B_{22} = X \to B_{21} \to B_{22}$이며 이 방정식의 양변에서 단사사상 $B_{21} \to B_{22}$를 소거할 수 있으므로 $X \to B_{11} \to B_{21} = X \to B_{21}$이고 B_{11}이 당김이다. □

Lemma 2.6.2. 만약 $B_1 \to B_2$가 사상이며 $B_2 \to B_3$이 단사사상이면 다음이 성립한다.

$$\operatorname{Ker}(B_1 \to B_2) = \operatorname{Ker}(B_1 \to B_2 \to B_3)$$

Proof. $X \to B_1 \to B_2 = 0$ iff $X \to B_1 \to B_3 = 0$인 것이다. □

Lemma 2.6.3. 다음 도표가 가환 도표이며 이 도표의 위쪽 행이 완전열이라 하자.

$$\begin{tikzcd} & & & O \arrow[d] & \\ O \arrow[r] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & O \\ O \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_3 & \end{tikzcd}$$

이 도표의 아래쪽 행이 완전열 iff 열이 완전열인 것이다.

Proof. $(\Leftarrow)$ Lemma 2.6.2
$(\Rightarrow)$ 다음의 가환 도표를 고려하자.

$$\begin{tikzcd} & & & O \arrow[d] & \\ & & P \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & O \\ O \arrow[r] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & O \\ O \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_3 & \end{tikzcd}$$

여기에서 아래쪽 2개 행과 오른쪽 열이 완전열이며, 다음의 부분도표가 당김 도표이다.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \end{tikzcd}$$

당김 정리(Theorem 2.5.4)에 의해 위쪽 행이 완전열이다. 우리는 $K = O$임을 증명하고자 하며, 이를 위해서는 $P \to K \to B_2 = 0$임을 증명하면 충분하다.

$P \to B_1 \xrightarrow{1} B_1 \to B_3 = 0$이므로 사상 $P \to B_0$가 존재하여 $P \to B_1 = P \to B_0 \to B_1$을 만족시킨다. 따라서 $P \to K \to B_2 = P \to B_1 \to B_2 = P \to B_0 \to B_1 \to B_2 = 0$이다. □

Lemma 2.6.4. 다음 가환 도표에서 열들과 중간 행이 완전열이라 하자. 그 경우 위쪽 행이 완전열일 필요충분조건은 아래쪽 행이 완전열인 것이다.

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d] & O \arrow[d] & O \arrow[d] \\
O \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & B_{13} \arrow[d] \\
O \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \\
O \arrow[r] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d] & B_{32} & \\
 & O & &
\end{tikzcd}$$

Proof. $B_{13} \to B_{23}$이 단사사상이므로 (Lemma 2.6.2에 의해) $O \to B_{11} \to B_{12} \to B_{13}$이 완전열일 필요충분조건은 $O \to B_{11} \to B_{12} \to B_{23}$이 완전열인 것이다. (Lemma 2.6.1에 의해) 이는 다시 다음이 당김 도표임과 동치이다.

$$\begin{tikzcd} B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \\ B_{21} \arrow[r] & B_{22} \end{tikzcd}$$

(도표를 회전시켜 Lemma 2.6.1을 적용하면) 이는 $O \to B_{11} \to B_{21} \to B_{32}$가 완전열임과 동치이다. $O \to B_{11} \to B_{21} \to B_{31}$이 완전열이므로 Lemma 2.6.3에 의해 이는 다시 $O \to B_{31} \to B_{32}$가 완전열임과 동치이다. □

Lemma 2.6.5 (Nine lemma (9 보조정리)[1])**.** 다음 가환 도표에서 열들과 중간 행이 완전열이라 하자. 그 경우 위쪽 행이 완전열일 필요충분조건은 아래쪽 행이 완전열인 것이다.

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d] & O \arrow[d] & O \arrow[d] & \\
O \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & B_{13} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d] & B_{32} \arrow[r] \arrow[d] & B_{33} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
 & O & O & O &
\end{tikzcd}$$

Proof. Lemma 2.6.4 및 그 쌍대를 조합하라. □

[1]'3×3 보조정리'가 더 적절한 명칭일 것이다.

다음 보조정리들의 증명은 연습문제로 남기겠다.

Lemma 2.6.6 (Noether Isomorphisms (Noether 동형사상))**.** $\left(B_{11} \subset B_{21} \subset B_{22}\text{이면 } \dfrac{B_{22}/B_{11}}{B_{21}/B_{11}} \simeq \dfrac{B_{22}}{B_{21}}.\right)$
$B_{11} \to B_{21}$과 $B_{21} \to B_{22}$가 단사사상이라 하자. 그 경우 다음과 같은 완전 가환 도표가 존재한다.

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d] & O \arrow[d] & & \\
O \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & O \arrow[d] & \\
O \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22}/B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & B_{21}/B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22}/B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22}/B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
 & O & O & O &
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 2.6.7. $\left(\dfrac{B_{12}}{B_{12} \cap B_{21}} \simeq \dfrac{B_{12} \cup B_{21}}{B_{21}}.\right)$
$B_{12} \to B_{22}$와 $B_{21} \to B_{22}$가 단사사상이며 이들의 상의 합부분대상(최소상계)이 B_{22}라 하자. 그 경우 다음과 같은 완전 가환 도표가 존재한다:

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d] & O \arrow[d] & O \arrow[d] & \\
O \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12}/B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & B_{21}/B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22}/B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & O & \\
 & O & O & &
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 2.6.8 (Splitting Maps (분해사상))**.** 사상 $B_{21} \to B_{22}$와 $B_{22} \to B_{21}$이 $B_{21} \to B_{22} \to B_{21} = 1$을 만족시킨다 하자. 만약 $O \to B_{21} \to B_{22} \to B_{23} \to O$가 완전열이면 사상 $B_{23} \to B_{22}$가 존재하여 $B_{23} \to B_{22} \to B_{23} = 1$을 만족시키며, 이러한 4개 사상들은 B_{21}과 B_{23}에 대한 직접합계를 형성한다.

Proof. 다음 가환 도표에 9 보조정리(Lemma 2.6.5)를 사용하자.

$$\begin{tikzcd}
 & & O \arrow[d] & O \arrow[d] & \\
 & O \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & O & \\
 & O & O & &
\end{tikzcd}$$

명제의 마지막 부분을 증명하기 위해서는 Theorem 2.4.2를 사용하라. □

3 Special Functors and Subcategories (특수한 함자와 부분범주)

범주론은 내부 이론을 제거하고 외부에 집중하기 위해 발명되었다고 말해진다. 지금까지 우리는 (명시되지 않은) 주어진 범주 내에서 작업했다. 그러나 일반적으로 내부 구조를 살펴보기 위해서는 외부로 나갈 필요가 있으며, 범주론에서도 그러하다. 따라서 우리는 이 장에서 함자를 다룰 것이다.

3.1 Additivity and Exactness (가법성과 완전성)

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$가 범주라 하자. 함자 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$와 임의의 두 대상 $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$가 주어진 경우 F는 다음 함수를 유도한다.

$$(A_1, A_2) \to (F(A_1), F(A_2))$$

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$가 Abel 범주라 하자. F가 **가법(additive)**함자임은 모든 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$에 대하여 함수 $(A_1, A_2) \to (F(A_1), F(A_2))$가 군 준동형사상인 것이다.

Example. $\mathscr{A}$가 Abel 범주이고 A가 $\mathscr{A}$에서의 대상이며 $(A, -) : \mathscr{A} \to \mathscr{G}$가 $(A, -)(B) = (A, B)$ (A에서 B로의 사상들의 군)에 의해 정의된 $\mathscr{A}$에서 가환군의 범주 $\mathscr{G}$로의 함자라 하자.

Theorem 3.1.1. Abel 범주 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$에 대하여 함자 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$가 가법함자일 필요충분조건은 이것이 직접합계를 직접합계로 대응시키는 것이다.

Proof. ($\Rightarrow$) Theorem 2.4.1의 전제조건들은 가법함자 하에서 보존된다.
($\Leftarrow$) $A \xrightarrow{u_1} A \oplus A, A \xrightarrow{u_2} A \oplus A, A \oplus A \xrightarrow{p_1} A, A \oplus A \xrightarrow{p_2} A$가 $\mathscr{A}$에서의 직접합계라 하자. 전제조건에 의해 $F(u_1), F(u_2), F(p_1), F(p_2)$가 $\mathscr{B}$에서의 직접합계이다. $x, y \in (A, B)$라 하자. 그 경우 §2.3에서의 $+$의 정의에 의해 $A \xrightarrow{x+y} B = A \xrightarrow{(1,1)} A \oplus A \xrightarrow{\binom{x}{y}} B$이다. 따라서 $F(A \xrightarrow{x+y} B) = F(A) \xrightarrow{F(1,1)} F(A \oplus A) \xrightarrow{F\binom{x}{y}} F(B) = F(A) \xrightarrow{(1,1)} F(A) \oplus F(A) \xrightarrow{\binom{F(x)}{F(y)}} F(B) = F(x) + F(y)$이다. □

좌완전(left-exact)열은 $O \to A_1 \to A_2 \to A_3$ 형태의 완전열이다. **좌완전함자(left-exact functor)**는 Abel 범주 간의 함자 중 좌완전열을 좌완전열로 대응시키는 것이다. (이와 동치로, 이는 *핵*을 보존하는 함자이다.)

Theorem 3.1.2. 좌완전함자는 가법함자이다.

Theorem 3.1.3. Theorem 2.4.2의 전제조건들은 좌완전함자 하에서 보존된다; 사실 이를 위해서는 모든 완전열 $O \to A' \to A \to A'' \to O$에 대하여 $F(A') \to F(A) \to F(A'')$이 완전열이라는 사실만 필요하다. 이러한 함자는 **반완전(half-exact)** 또는 **중완전(middle-exact)** 함자라 불린다.

Example. $(A, -) : \mathscr{A} \to \mathscr{G}$가 좌완전함자이다.

우완전(right-exact)열은 $A_1 \to A_2 \to A_3 \to O$ 형태의 완전열이다. **우완전함자(right-exact functor)**는 Abel 범주 간의 함자 중 우완전열을 우완전열로 대응시키는 것이다.

Theorem 3.1.2*. 우완전함자는 가법함자이다. □

완전함자(exact functor)는 Abel 범주 간의 함자 중 완전열을 완전열로 대응시키는 것이다.

Proposition 3.1.3. 함자가 완전함자일 필요충분조건은 우완전함자이며 좌완전함자인 것이다.

이제부터 등장하는 Abel 범주 간의 모든 함자들이 가법함자라 가정하겠다.

3.2 Embeddings (매장)

함자 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$가 **매장(embedding)**임은 임의의 두 $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$에 대하여 함수 $(A_1, A_2) \to (F(A_1), F(A_2))$가 단사함수인 것이다.

Theorem 3.2.1. $\mathscr{A}, \mathscr{B}$가 Abel 범주이며 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$가 가법함자라 하자. 다음이 서로 동치이다:

(a) F가 매장이다.
(b) F가 비가환 도표를 비가환 도표로 대응시킨다.
(c) F가 불완전열을 불완전열로 대응시킨다.

Proof. (a) $\Leftrightarrow$ (b) 자명.
(c) $\Rightarrow$ (a). $A_1 \xrightarrow{x} A_2 \neq 0$이라 하자. 그 경우 $A_1 \xrightarrow{1} A_1 \xrightarrow{x} A_2$가 불완전열이다. 그러므로 $F(A_1) \xrightarrow{1} F(A_1) \xrightarrow{F(x)} F(A_2)$가 불완전열이며 따라서 $F(x) \neq 0$이다.
(a) $\Rightarrow$ (c). $A' \to A \to A''$이 불완전열이라 하자. $O \to K \to A \to A''$과 $A' \to A \to G \to O$가 완전열이라 하자. Proposition 2.2.1에 의해 $A' \to A \to A' \neq 0$이거나 또는 $K \to A \to G \neq 0$이다. 따라서 $F(A') \to F(A) \to F(A'') \neq 0$ 또는 $F(K) \to F(A) \to F(G) \neq 0$이다.

전자의 경우 명백히 $F(A') \to F(A) \to F(A'')$이 불완전열이다. $F(K) \to F(A) \to F(G) \neq 0$이라 가정하자. $O \to B' \to F(A) \to F(A'')$과 $F(A') \to F(A) \to B'' \to O$가 $\mathscr{B}$에서의 완전열이라 하자. $K \to A \to A'' = 0$임은 $F(K) \to F(A) \to F(A'') = 0$임을 함의하므로 사상 $F(K) \to B'$이 존재하여 $F(K) \to B' \to F(A) = F(K) \to F(A)$를 만족시키며 사상 $B'' \to F(G)$가 존재하여 $F(A) \to B'' \to F(G) = F(A) \to F(G)$를 만족시킨다. 따라서 만약 $F(A') \to F(A) \to F(A'')$이 완전열이면 $B' \to F(A) \to B'' = 0$이며 $F(K) \to B' \to F(A) \to B'' \to F(G) = 0$이므로 모순이다. $\square$

만약 함자 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$가 완전 매장이면 $\mathscr{A}$에서의 도표의 완전성 및 가환성은 해당 도표의 F-상의 완전성 및 가환성과 동치이다.

3.3 Special Objects (특수한 대상)

범주론에서는 함자에 대한 흥미로운 성질을 통해 범주에서의 대상에 대한 흥미로운 성질을 정의할 수 있다. 그 예시로 Abel 범주에서의 대상 P가 **사영(projective)** 대상임의 정의는 함자 $(P, -) : \mathscr{A} \to \mathscr{G}$가 완전함자인 것이다. (임의의 $A \in \mathscr{A}$에 대하여 $(A, -)$가 좌완전이다; 따라서 P가 사영 대상일 필요충분조건은 $(P, -)$가 우완전인 것이다.) 사영 대상의 가장 간단한 예시는 환 R에 대한 R-모듈의 범주에서의 R 자신이다.

Proposition 3.3.1. P가 사영 대상일 필요충분조건은 모든 전사사상 $A \to A''$과 사상 $P \to A''$에 대하여 사상 $P \to A$가 존재하여 $P \to A \to A'' = P \to A''$을 만족시키는 것이다. $\square$

Proposition 3.3.2. 만약 $\{P_i\}$가 Abel 범주에서의 사영 대상들의 족이면 직접합 $\sum P_i$가 ($\mathscr{A}$에서 존재한다면) 사영 대상이다. $\square$

대상 $G \in \mathscr{A}$가 **생성자(generator)**임은 함자 $(G, -) : \mathscr{A} \to \mathscr{G}$가 매장인 것이다. 다시 R-모듈의 범주에서의 환 R 자신이 예시가 된다.

Proposition 3.3.3. G가 생성자 iff 모든 $A \to B \neq 0$에 대하여 사상 $G \to A$가 존재하여 $G \to A \to B \neq 0$이도록 한다 iff A의 임의의 진부분대상에 대하여 사상 $G \to A$가 존재하여 그 상이 주어진 부분대상에 포함되지 않는다. $\square$

Proposition 3.3.4. 만약 P가 사영 대상인 경우 P가 생성자 iff 모든 비자명한 A에 대하여 (P, A)가 비자명한 것이다. $\square$

이에 더해 완전함자가 매장일 필요충분조건은 0이 아닌 대상을 0이 아닌 대상으로 대응시키는 것임을 보일 수 있다.

Theorem 3.2.1(c)에서 소개된 완전함자와 매장 함자의 반대되는 성질들은 사영 대상과 생성자에도 반영되며 이는 특히 환 R 상에서의 모듈의 범주에서 다음과 같이 현저하게 나타난다:

- A가 사영 대상 iff A가 R의 사본들의 (무한할 수 있는) 직접합의 직접합인자인 것이다.
- A가 생성자 iff R이 A의 사본들의 (무한할 수 있는) 직접합의 직접합인자인 것이다.

Proposition 3.3.5. 만약 Abel 범주가 생성자를 가지면 임의의 대상의 부분대상들의 족이 집합이다.

Proof. 만약 G가 생성자이며 A가 임의의 대상이면 부분대상 $A' \to A$는 부분집합 $(G, A') \subset (G, A)$에 의해 식별된다. $\square$

Proposition 3.3.6. G가 우완비 Abel 범주 $\mathscr{A}$에서의 생성자일 필요충분조건은 모든 $A \in \mathscr{A}$에 대하여 (모든 $x \in (G, A)$에 대하여 다음을 만족시키도록 정의된) 자명한 사상 $\sum_{(G,A)} G \to A$가 전사사상인 것이다.

$$G \xrightarrow{u_x} \sum_{(G,A)} G \to A = G \xrightarrow{x} A \qquad \square$$

쌍대 개념들은 다음과 같다: 대상 Q가 **단사(injective)** 대상이라는 것의 정의는 반변함자 $(-, Q)$가 완전열을 (방향이 반전된) 완전열로 대응시키는 것이다. (Q가 $\mathscr{A}$에서의 단사 대상일 필요충분조건은 Q^*가 $\mathscr{A}^*$에서의 사영 대상인 것이다.) 대상 C가 **쌍대생성자(cogenerator)**라는 것의 정의는 반변함자 $(-, C)$가 매장인 것이다. (C가 $\mathscr{A}$에 대한 쌍대생성자일 필요충분조건은 C^*가 $\mathscr{A}^*$에 대한 생성자인 것이다.)

Proposition 3.3.7. $\mathscr{A}$가 생성자를 가지는 좌완비 Abel 범주라 하자. $\mathscr{A}$에서의 모든 대상이 단사 대상으로 매장 가능할 필요충분조건은 $\mathscr{A}$가 단사 쌍대생성자를 가지는 것이다.

Proof. ($\Leftarrow$) C가 $\mathscr{A}$의 단사 쌍대생성자이며 $A \in \mathscr{A}$가 임의의 대상이라 하자. (Proposition 3.3.6의 쌍대 명제를 적용하면) 자명한 사상 $A \to \prod_{(A,C)} C$가 단사사상이며 $\prod_{(A,C)} C$가 단사 대상이다.
($\Rightarrow$) G가 $\mathscr{A}$에 대한 생성자이며 P가 G의 모든 몫대상들의 곱이라 하자. (Proposition 3.3.5에 의해 G의 몫대상들은 (고유모임이 아닌) 집합을 형성한다.) $P \to E$가 단사사상이며 E가 단사 대상이라 하자. 그 경우 E가 쌍대생성자임을 보이자. 이를 보이기 위해 $A \to B$가 0이 아닌 사상이라 하자. G가 생성자이므로 사상 $G \to A$가 존재하여 $G \to A \to B \neq 0$을 만족시킨다. $I \to B$가 $G \to A \to B$의 상이라 하면 $I \to P \to E$가 단사사상이다. E가 단사 대상이므로 사상 $B \to E$가 존재하여 $I \to B \to E = I \to P \to E$를 만족시킨다. $G \to A \to B \to E = G \to A \to I \to B \to E \neq 0$이므로 $A \to B \to E \neq 0$이다. $\square$

3.4 Subcategories (부분범주)