Elliptic Partial Differential Equations of Second Order
(2계 타원형 편미분방정식)

Version 1.0

Author : David Gilbarg, Neil S. Trudinger
Translated by Dyne

Dec 19, 2023

Contents (목차)

1 Introduction (도입)

Summary (요약)

이 책의 주요 목표는 2계 준선형 타원형 방정식에 대한 일반적인 선형 이론을 체계적으로 개발하는 것이다. 이는 경계값 문제(주로 Dirichlet 문제)의 해결가능성 및 문제에 관련된 다음의 선형방정식

(1.1) $$Lu \equiv a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

과 다음의 준선형방정식

(1.2) $$Qu \equiv a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du) = 0$$

의 해의 일반적인 성질을 다룰 것임을 의미한다. 여기에서 $Du = (D_1u, \dots, D_nu), D_iu = \partial u/\partial x_i, D_{ij}u = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ 등이며 합 관습을 사용한다. 이러한 방정식들이 타원형임은 (각각의 경우) 계수행렬 $[a^{ij}]$가 논의 중인 영역에서 양의 정수호라는 사실에 의해 표현된다. 방정식이 **균등타원형(uniformly elliptic)**이라는 것은 행렬 $[a^{ij}]$의 최대 고유치와 최소 고유치의 비 γ가 유계인 것이다. 우리는 불균등타원형 방정식과 균등타원형 방정식을 모두 다룰 것이다.

선형 타원형 방정식의 고전적인 전형은 물론 다음의 Laplace 방정식

$$\Delta u = \sum D_{ii}u = 0$$

과 여기에 대응하는 비동차방정식인 Poisson 방정식 $\Delta u = f$이다. 준선형 타원형 방정식의 가장 잘 알려진 예시는 아마도 다음의 최소면적방정식일 것이다.

$$\sum D_i(D_iu/(1 + |Du|^2)^{1/2}) = 0$$

이는 최소 표면적을 가지는 곡면을 찾는 문제에서 등장한다. 이 방정식은 $\gamma = 1 + |Du|^2$를 가지는 불균등타원형 방정식이다. 이러한 예시에서의 미분작용소의 성질들은 이 책에서 논의되는 방정식들의 일반적인 족에 대한 이론에 대한 동기를 부여한다.

관련된 이론이 Chapter 2-9 (및 Chapter 12의 일부)에서 개발된다. (이 내용 자체도 충분히 흥미로움에도 불구하고) 이 책에서는 비선형 문제에 대한 응용을 위해 필요한 것들을 강조할 것이다. 그러므로 이론에서 계수에 대한 전제조건을 최대한 약하게 가할 것이며 선형 타원형 방정식에 대한 다수의 중요한 고전적 및 현대적 결과들을 제외할 것이다.

우리가 궁극적으로 방정식 (1.2)의 고전해에 관심이 있으며 이는 어느 시점에 선형방정식들의 충분히 큰 족에서의 고전해에 관한 기반 이론을 필요로 한다. 이는 Hölder 연속한 계수들을 가지는 (1.1) 형태의 방정식들의 족에 대한 근본적으로 완전한 이론인 Chapter 6의 Schauder 이론에 의해 제공된다. 이러한 방정식들은 존재성 및 고전해에 대한 정칙성 이론을 거의 완벽하게 가지므로 대응하는 결과들은 계수가 연속하다고만 가정한 방정식들에 대해서는 더 이상 성립하지 않는다.

고전해의 이론에 대한 자연스러운 시작점은 Laplace 방정식과 Poisson 방정식 이론이다. 이는 Chapter 2, 4의 내용이다. 나중의 개발에 유익하도록 연속 경계값에 대한 조화함수의 Dirichlet 문제를 Perron 열조화함수 기법을 통해 접근할 것이다. 이는 최대 원리를 강조하며 경계 거동을 다루기 위해 장벽함수의 개념을 도입한다; 나중에 이러한 논의를 더 일반적인 상황으로 즉시 확장할 수 있다. Chapter 4에서 우리는 Newton 퍼텐셜의 분석으로부터 Poisson 방정식에 대한 기본적인 Hölder 추산을 유도할 것이다. 이곳에서의 주요 결과는 (Theorem 4.6, 4.8을 참조하라) $\mathbb{R}^n$에서의 영역 Ω에서의 Poisson 방정식 $\Delta u = f$의 모든 C^2 해가 임의의 부분집합 $\Omega' \subset\subset \Omega$에서 다음의 균등 추산을 만족시킨다는 것이다.

(1.3) $$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}')} \le C(\sup_{\Omega} |u| + \|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})})$$

여기에서 C는 α $(0 < \alpha < 1)$, 차원 n, $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$에만 의존하는 상수이다. (표기법을 위해서는 Section 4.1을 참조하라.) 이러한 **내부추산(interior estimate)**($\Omega' \subset\subset \Omega$이므로 내부이다)은 경계 $\partial\Omega$가 충분히 매끄러운 경우 충분히 매끄러운 경계값에 대한 해에 대한 **대역적 추산(global estimate)**으로 확장될 수 있다. Chapter 4에서 경계까지 포함하는 추산은 초평면과 구면 경계에 대해서만 수립되지만 이것만으로도 나중의 응용에는 충분하다.

Further Remark (추가 첨언)

Basic Notation (기초 표기법)

$\mathbb{R}^n$: Euclid n-공간 $(n \geq 2)$. 이는 점 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $(x_i \in \mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$은 실수집합)들을 가진다; $|x| = (\sum x_i^2)^{1/2}$; 만약 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$이 순서 n조이면 $|\mathbf{b}| = (\sum b_i^2)^{1/2}$이다.
$\mathbb{R}_n^+$: $\mathbb{R}^n$에서의 반공간 $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$
∂S: 집합 S의 경계점들의 집합; $\bar{S} = S$의 폐포$= S \cup \partial S$
$S - S' = \{x \in S : x \notin S'\}$
$S' \subset\subset S$: S'의 폐포가 S의 컴팩트 부분집합이다; S'이 S에 **강하게 포함된다(strictly contained)**.
$B(y)$: 중심이 y인 $\mathbb{R}^n$에서의 구체; $B_r(y)$는 중심이 y이고 반경이 r인 열린 구체이다.
ω_n: $\mathbb{R}^n$에서의 단위 구체의 부피 $\dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$
$D_i u = \partial u/\partial x_i, D_{ij}u = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ 등; $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u) = u$의 구배; $D^2 u = [D_{ij}u] =$ 2계도함수 $D_{ij}u$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$들의 Hesse 행렬
$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (β_i 음 아닌 정수), $|\boldsymbol{\beta}| = \sum \beta_i$는 **다중첨자(multi-index)**이다; 다음과 같이 정의한다.

$$D^\beta u = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\beta}|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$$

$C^0(\Omega)$[resp. $C^0(\bar{\Omega})$]: Ω[resp. $\bar{\Omega}$]에서의 연속 함수들의 집합
$C^k(\Omega)$: k계 이하의 모든 도함수가 존재하며 Ω에서 연속하도록 하는 함수들의 집합 (k는 음 아닌 정수 또는 ∞)
$C^k(\bar{\Omega})$: $C^k(\Omega)$에 속한 함수 중 k계 이하의 모든 도함수가 $\bar{\Omega}$로의 연속 확장을 가지는 함수들의 집합
$\operatorname{supp} u$: u의 **지지집합(support)**, $u \neq 0$인 점들의 집합의 폐포
$C_0^k(\Omega)$: Ω에서 컴팩트 지지인 $C^k(\Omega)$ 함수들의 집합
$C = C(*, \ldots, *)$는 괄호 내에 등장하는 값에만 의존하는 상수를 나타낸다. 본문에서 (일반적으로) 동일한 값에만 의존하는 서로 다른 상수들을 나타내기 위해 동일한 문자 C를 사용할 수 있다.

Part I

Linear Equations (선형 방정식)

2 | Laplace's Equation (Laplace 방정식)

Ω가 $\mathbb{R}^2$에서의 영역이며 u가 $C^2(\Omega)$ 함수라 하자. u의 Laplacian은 Δu로 표기되며 다음에 의해 정의된다.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}u = \operatorname{div} Du \tag{2.1}$$

함수 u가 Ω에서의 **조화(harmonic)**[resp. **열조화(subharmonic)**, **우조화(superharmonic)**]함수임은 이곳에서 다음을 만족시키는 것이다.

$$\Delta u = 0 \quad [\text{resp. } \geq 0, \leq 0] \tag{2.2}$$

이 장에서 우리는 조화, 열조화, 우조화함수들의 기본 성질들을 개발하고 (Chapter 1에서 언급한 것과 같이) **Laplace 방정식(Laplace's equation)** $\Delta u = 0$에 대한 고전적 Dirichlet 문제의 해결가능성을 연구하기 위해 이를 사용할 것이다. Laplace 방정식 및 이것의 비동차 형태인 Poisson 방정식은 선형 타원형 방정식의 기본 모형들이다.

$\mathbb{R}^n$에서의 잘 알려진 발산 정리로 시작하겠다. Ω_0가 유계 영역이며 C^1 경계 $\partial\Omega_0$를 가진다 하자. $\boldsymbol{\nu}$가 $\partial\Omega_0$의 외향 단위법선을 나타낸다 하자. $C^1(\bar{\Omega}_0)$에 속한 임의의 벡터장 $\mathbf{w}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} \mathbf{w}\, dx = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu}\, ds \tag{2.3}$$

여기에서 ds는 $\partial\Omega_0$에서의 $(n-1)$차원 면적요소를 나타낸다. 특히 만약 u가 $C^2(\bar{\Omega}_0)$ 함수이면 (2.3)에서 $\mathbf{w} = Du$로 선택하는 것으로 다음을 얻는다.

$$\int_{\Omega_0} \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega_0} Du \cdot \boldsymbol{\nu}\, ds = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds \tag{2.4}$$

(발산 정리의 더 일반적인 형태에 대해서는 [KE2]를 참조하라.)

2.1 The Mean Value Inequalities (평균값 부등식)

첫째로 다룰 정리는 항등식 (2.4)의 결과이며 조화, 열조화, 우조화함수의 잘 알려진 평균값 성질들로 구성된다.

Theorem 2.1. $u \in C^2(\Omega)$가 Ω에서 $\Delta u = 0$ [resp. $\geq 0, \leq 0$]을 만족시킨다 하자. 그 경우 임의의 $B = B_T(y) \subset\subset \Omega$에 대하여 다음이 성립한다.

$$u(y) = [\text{resp. } \leq, \geq]\ \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u\, ds \tag{2.5}$$

$$u(y) = [\text{resp. } \leq, \geq]\ \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B} u\, dx \tag{2.6}$$

그러므로 Theorem 2.1은 조화함수에 대하여 구체 B의 중심에서의 함숫값이 곡면 ∂B에서의 적분 평균값 및 B에서의 적분 평균값과 일치함을 주장한다. 이러한 결과들은 **평균값 정리(mean value theorem)**들이라 불린다. 이는 사실 조화함수를 특성화한다. (Theorem 2.7을 참조하라.)

Proof. $\rho \in (0, R)$이라 하고 항등식 (2.4)를 구체 $B_\rho = B_\rho(y)$에 적용하면 다음을 얻는다.

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = \int_{B_\rho} \Delta u\, dx = [\text{resp. } \geq, \leq]\ 0$$

반경 및 각도 좌표 $r = |x-y|, \omega = \frac{x-y}{r}$을 도입하고 $u(x) = u(y + r\omega)$로 표기하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds &= \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial r}(y+\rho\omega)\, ds = \rho^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(y+\rho\omega)\, d\omega \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\omega|=1} u(y+\rho\omega)\, d\omega = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u\, ds \right] \\ &= [\text{resp. } \geq, \leq]\ 0\end{aligned}$$

그러므로 임의의 $\rho \in (0, R)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u\, ds = [\text{resp. } \leq, \geq]\ R^{1-n} \int_{\partial B_R} u\, ds$$

다음이 성립하므로 관계식 (2.5)가 따라온다.

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u\, ds = n\omega_n u(y)$$

입체 평균값 부등식을 얻기 위해서는 (2.5)를 다음 형태로 표현한 후 ρ에 대하여 0에서 R까지 적분해야 한다.

$$n\omega_n \rho^{n-1} u(y) = [\text{resp. } \leq, \geq] \int_{\partial B_\rho} u\, ds \quad (\rho \leq R)$$

관계식 (2.6)이 즉시 따라온다. □

2.2 Maximum and Minimum Principle (최대 및 최소 원리)

Theorem 2.1의 도움으로 열조화함수에 대한 **강한 최대 원리(strong maximum principle)**와 우조화함수에 대한 **강한 최소 원리(strong minimum principle)**를 유도할 수 있다.

Theorem 2.2. Ω에서 $\Delta u \geq 0$ [resp. ≤ 0]이며 점 $y \in \Omega$가 존재하여 $u(y) = \sup_\Omega u$ [resp. $\inf_\Omega u$]라 하자. 그 경우 u는 상수함수이다. 따라서 상수함수가 아닌 조화함수는 내부최댓값 또는 내부최솟값을 가질 수 없다.

Proof. Ω에서 $\Delta u \geq 0$이며 $M = \sup_\Omega u$이고 $\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$이라 하자. 가정에 의해 Ω_M이 공집합이 아니다. 이에 더해 u가 연속하므로 Ω_M은 Ω에 대하여 상대적으로 닫혀 있다. z가 Ω_M의 임의의 점이라 하고 구체 $B = B_R(z) \subset\subset \Omega$에서 열조화함수 $u - M$에 평균값 부등식 (2.6)을 적용하면 다음을 얻는다.

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B (u - M)\, dx \leq 0$$

그러므로 $B_R(z)$에서 $u = M$이다. 따라서 Ω_M은 Ω에 대하여 상대적으로 열려 있다. 그러므로 $\Omega_M = \Omega$이다. u를 $-u$로 대체하면 우조화함수에 대한 결과가 따라온다. □

강한 최대 및 최소 원리를 대역적 추산에 적용하면 **약한 최대 원리(weak maximum principle)** [resp. **약한 최소 원리(weak minimum principle)**]를 얻는다.

Theorem 2.3. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$가 Ω에서 $\Delta u \geq 0$ [resp. ≤ 0]을 만족시킨다 하자. Ω가 유계인 경우 다음이 성립한다.

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left[\text{resp. } \inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u\right] \tag{2.7}$$

따라서 조화함수 u에 대하여 다음이 성립한다.

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad (x \in \Omega)$$

이제 Theorem 2.3에서 유계 영역에 대한 Laplace 방정식 및 Poisson 방정식에 대한 고전적 Dirichlet 문제의 유일성 정리가 따라온다.

Theorem 2.4. $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$가 Ω에서 $\Delta u = \Delta v$, $\partial\Omega$에서 $u = v$를 만족시킨다 하자. 그 경우 Ω에서 $u = v$이다.

Proof. $w = u - v$라 하자. 그 경우 Ω에서 $\Delta w = 0$이며 $\partial\Omega$에서 $w = 0$이다. Theorem 2.3으로부터 Ω에서 $w = 0$임이 따라온다. □

u와 v가 각각 조화함수와 열조화함수이며 경계 $\partial\Omega$에서 일치하는 경우 Theorem 2.3에 의해 Ω에서 $v \leq u$임을 기억해 두라. 이는 열조화함수라는 용어의 기원이다. 우조화함수에 대한 대응하는 명제도 참이다. 나중에 이 장에서 우리는 $C^2(\Omega)$ 열조화 및 우조화함수에 대한 이러한 성질을 이용하여 이들의 정의를 더 큰 함수족으로 확장할 것이다. 다음 장에서 일반적인 타원형 방정식에 대한 최대 원리를 다루면서 Theorem 2.2, 2.3, 2.4에 대한 다른 증명 방법이 제공될 것이다. (Problem 2.1을 참조하라.)

2.3 The Harnack Inequality (Harnack 부등식)

Theorem 2.1에서 다음의 조화함수에 대한 Harnack 부등식이 따라온다.

Theorem 2.5 (Harnack's inequality (Harnack 부등식))**.** u가 Ω에서의 음 아닌 조화함수라 하자. 그 경우 임의의 유계 부분영역 $\Omega' \subset\subset \Omega$에 대하여 n, Ω', Ω에만 의존하는 상수 C가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u \tag{2.8}$$

Proof. $y \in \Omega, B_{4R}(y) \subset \Omega$라 하자. 그 경우 임의의 두 점 $x_1, x_2 \in B_R(y)$에 대하여 부등식 (2.6)에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u\ dx \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u\ dx \\ u(x_2) &= \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u\ dx \leq \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{2R}(y)} u\ dx \end{aligned}$$

그러므로 다음을 얻는다.

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u \tag{2.9}$$

이제 $\Omega' \subset\subset \Omega$라 하고 $x_1, x_2 \in \bar{\Omega}'$을 $u(x_1) = \sup_{\Omega'} u, u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$이도록 선택하자. $\Gamma \subset \bar{\Omega}'$가 x_1과 x_2를 연결하는 닫힌 호라 하고 R을 충분히 작게 선택하여 $4R < \mathrm{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$이도록 하자. Heine-Borel 정리에 의해 Γ는 (Ω'과 Ω에만 의존하는) 유한한 개수 N개의 구체에 의해 덮을 수 있다. 각각의 구체에 추산 (2.9)를 적용하여 얻어진 부등식들을 조합하면 다음을 얻는다.

$$u(x_1) \leq 3^{nN} u(x_2)$$

따라서 $C = 3^{nN}$에 대하여 추산 (2.8)이 성립한다. □

(2.8)의 상수가 닮음변환 및 직교변환 하에서 불변임을 기억해 두라. 동차 타원형 방정식의 약한 해에 대한 Harnack 부등식이 Chapter 8에서 수립될 것이다.

2.4 Green's Representation (Green 표현)

*존재성*을 논의하기 전에 발산 정리의 결과인 Green 항등식들을 유도할 것이다. 항등식 (2.3)에서 $\mathbf{w} = vDu$로 선택하면 **제1 Green 항등식(Green's first identity)**을 얻는다:

$$\int_\Omega v\Delta u\ dx + \int_\Omega Du \cdot Dv\ dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\ ds \tag{2.10}$$

(2.10)에서 u와 v를 교환한 것을 빼면 **제2 Green 항등식(Green's second identity)**을 어든ㄴ다:

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\ dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right)\ ds \tag{2.11}$$

Laplace 방정식의 반경 방향 대칭인 해는 $n > 2$인 경우 r^{2-n}, $n = 2$인 경우 $\log r$이 있다. (여기에서 r은 고정된 점으로부터의 반경 방향 거리이다.) (2.11)에서 더 진행하기 위해서는 Ω의 점 y를 고정하고 Laplace 방정식의 정규화된 **기본해(fundamental solution)**를 도입해야 한다:

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n} & (n > 2) \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y| & (n = 2) \end{cases} \tag{2.12}$$

간단한 계산에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} D_i\Gamma(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n} \\ D_{ij}\Gamma(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n}\{|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\}|x-y|^{-n-2} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$x \neq y$에 대하여 Γ가 명백히 조화함수이다. 나중에 다음의 도함수 추산들을 사용할 것이다:

$$\begin{aligned} |D_i\Gamma(x-y)| &\leq \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n} \\ |D_{ij}\Gamma(x-y)| &\leq \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n} \\ |D^\beta\Gamma(x-y)| &\leq C|x-y|^{2-n-|\beta|}, \quad C = C(n, |\beta|) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$x = y$에서 특이점이 존재하므로 v 대신 Γ에 대하여 제2 Green 항등식(2.11)을 사용할 수 없다. 이를 극복하는 한 가지 방법은 충분히 작은 ρ와 $B_\rho = B_\rho(y)$에 대하여 Ω를 $\Omega - \bar{B}_\rho$로 대체하는 것이다. 그 경우 (2.11)에서 다음을 얻는다.

$$\int_{\Omega - B_\rho} \Gamma\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right) ds + \int_{\partial B_\rho}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right) ds \tag{2.15}$$

이제 $\rho \to 0$에서 다음이 성립한다. (ν가 $\Omega - B_\rho$의 *외향* 법선임을 상기하라.)

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\rho}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\, ds &= \Gamma(\rho)\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\nu}\, ds \leq n\omega_n\rho^{n-1}\Gamma(\rho)\sup_{B_\rho}|Du| \to 0 \\ \int_{\partial B_\rho} u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\, ds &= -\Gamma'(\rho)\int_{\partial B_\rho} u\, ds = \frac{-1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho} u\, ds \to -u(y) \end{aligned}$$

따라서 $\rho \to 0$의 극한을 취하면 (2.15)로부터 다음의 **Green 표현 공식(Green's representation formula)**을 얻는다:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) ds + \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u\, dx \quad (y \in \Omega) \tag{2.16}$$

적분가능 함수 f에 대하여 적분 $\displaystyle\int_\Omega \Gamma(x-y)f(x)\, dx$는 밀도 f를 가지는 **Newton 퍼텐셜(Newtonian potential)**이라 불린다. 만약 u가 $\mathbb{R}^n$에서 컴팩트 지지이면 (2.16)은 다음의 유용한 표현 공식을 제공한다.

$$u(y) = \int \Gamma(x-y)\Delta u(x)\, dx \tag{2.17}$$

조화함수 u에 대해서는 다음 표현이 성립한다.

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) ds \quad (y \in \Omega) \tag{2.18}$$

위 식의 피적분함수가 무한계 미분가능할 뿐만 아니라 y에 대하여 해석적이므로 u도 Ω에서 해석적임이 따라온다. 그러므로 조화함수는 정의역 전체에서 해석적이며 따라서 임의의 열린 부분집합에서의 값에 의해 유일하게 결정된다.

이제 $h \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$가 Ω에서 $\Delta h = 0$을 만족시킨다 하자. 그 경우 다시 제2 Green 항등식(2.11)에 의해 다음을 얻는다.

$$-\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial h}{\partial \nu} - h\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, ds = \int_{\Omega} h\Delta u \, dx \tag{2.19}$$

$G = \Gamma + h$라 하고 (2.16)과 (2.19)를 합하면 Green 표현 공식의 더 일반적인 형태를 얻는다:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, ds + \int_{\Omega} G\Delta u \, dx \tag{2.20}$$

만약 이에 더해 $\partial\Omega$에서 $G = 0$이면 다음이 성립한다.

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \nu} \, ds + \int_{\Omega} G\Delta u \, dx \tag{2.21}$$

함수 $G = G(x, y)$는 영역 Ω에 대한 (Dirichlet) **Green 함수(Green's function)**, 또는 Ω에 대한 **제1 종 Green 함수(Green's function of the first kind)**라 불린다. Theorem 2.4에 의해 Green 함수는 유일하며, 만약 Green 함수가 존재한다면 $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 조화함수가 자신의 경계값에 의한 표현 (2.21)을 가진다.

2.5 The Poisson Integral (Poisson 적분)

영역 Ω가 구체일 경우 Green 함수는 영상법에 의해 명시적으로 결정될 수 있으며 이는 구체에서의 조화함수에 대한 잘 알려진 Poisson 적분 표현으로 이어진다. $B_R = B_R(0)$이라 하고 $x \in B_R, x \neq 0$의 B_R에 대한 반전점을 다음과 같이 표기하자.

$$\bar{x} = \frac{R^2}{|x|^2}x \tag{2.22}$$

만약 $x = 0$이면 $\bar{x} = \infty$로 취하자. 그 경우 B_R에 대한 Green 함수가 다음에 의해 주어짐을 간단히 검증할 수 있다.

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right) & (y \neq 0) \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & (y = 0) \end{cases} \\ &= \Gamma(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x\cdot y}) - \Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2x\cdot y}\right) \quad (\forall x, y \in B_R, x \neq y) \end{aligned} \tag{2.23}$$

(2.23)에 의해 정의된 함수 G는 다음 성질들을 가진다.

$$G(x,y) = G(y,x), \quad G(x,y) \le 0 \quad (\forall x, y \in \bar{B}_R) \tag{2.24}$$

이에 더해 직접적인 계산을 통해 $x \in \partial B_R$에서 G의 법선도함수가 다음에 의해 주어짐을 알 수 있다.

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial |x|} = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}|x-y|^{-n} \ge 0 \tag{2.25}$$

따라서 만약 $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\bar{B}_R)$이 조화함수이면 (2.21)에 의해 다음의 **Poisson 적분 공식(Poisson integral formula)**을 얻는다:

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u \, ds_x}{|x-y|^n} \tag{2.26}$$

공식 (2.26)의 우변은 u의 Poisson 적분이라 불린다. 간단한 근사 논의에 의해 Poisson 적분 공식이 $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\bar{B}_R)$에 대해서도 성립함을 보일 수 있다. $y = 0$으로 설정하면 조화함수에 대한 평균값 정리가 복원됨을 기억해 두라. 사실 지금까지 이 장에서 등장한 정리들은 모두 (2.21)을 $\Omega = B_R(0)$에 적용하는 것으로 유도할 수 있다.

구체에 대한 고전적 Dirichlet 문제의 해의 존재성을 수립하기 위해서는 표현 (2.26)의 반대 결과가 필요하다. 이를 지금 증명하겠다.

Theorem 2.6. $B = B_R(0)$이며 φ가 ∂B에서의 연속 함수라 하자. 그 경우 다음에 의해 정의된 함수 u가 $C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$에 속하며 B에서 $\Delta u = 0$을 만족시킨다.

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B} \dfrac{\varphi(y)\, ds_y}{|x-y|^n} & (x \in B) \\ \varphi(x) & (x \in \partial B) \end{cases} \tag{2.27}$$

Proof. (2.27)에 의해 정의된 u가 B에서의 조화함수임은 G가 (따라서 $\partial G/\partial \nu$가) x에 대한 조화함수라는 사실에 의해 자명하다. (직접적인 계산을 통해 검증할 수도 있다.) u가 ∂B에서 연속함을 보이기 위해 자명한 경우 $u = 1$에 대하여 Poisson 공식 (2.26)을 사용하여 다음 항등식을 얻자.

$$\int_{\partial B} K(x,y)\, ds_y = 1 \quad (\forall x \in B) \tag{2.28}$$

여기에서 K는 다음의 **Poisson 핵(Poisson kernel)**이다.

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R |x-y|^n} \qquad (x \in B, y \in \partial B) \tag{2.29}$$

물론 (2.28)에서의 적분을 직접 계산할 수도 있지만 이는 복잡한 계산이다. 이제 $x_0 \in \partial B$라 하고 ε가 임의의 양수라 하자. $\delta > 0$을 적절히 선택하여 만약 $|x - x_0| < \delta$이면 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$이도록 하자. ∂B에서 $|\varphi| \le M$이라 하자. 그 경우 만약 $|x - x_0| < \delta/2$이면 (2.27)과 (2.28)에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &= \left| \int_{\partial B} K(x,y)(\varphi(x) - \varphi(x_0))\, ds_y \right| \\ &\le \int_{|y-x_0| \le \delta} K(x,y) |\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, ds_y + \int_{|y-x_0| > \delta} K(x,y) |\varphi(y) - \varphi(x_0)|\, ds_y \\ &\le \varepsilon + \frac{2M(R^2 - |x|^2) R^{n-2}}{(\delta/2)^n} \end{aligned}$$

이제 만약 $|x - x_0|$가 충분히 작다면 $|u(x) - u(x_0)| < 2\varepsilon$임이 명백하다. 따라서 u가 x_0에서 연속하다. 그러므로 요구된 것과 같이 $u \in C^0(\bar{B})$이다. □

위 논의가 국소적임을 기억해 두라; 즉 만약 φ가 유계이며 ∂B에서 적분 가능하고 x_0에서 연속하면 $x \to x_0$에서 $u(x) \to \varphi(x_0)$이다.

2.6 Convergence Theorems (수렴 정리)

이제 우리는 Poisson 적분 공식의 몇 가지 즉각적인 결과들을 논의할 것이다. 그러나 다음의 3개 정리는 나중에 사용하지 않을 것이다. 먼저 조화함수들이 사실 이들의 평균값 성질에 의해 특성화됨을 보이겠다.

Theorem 2.7. $C^0(\Omega)$ 함수 u가 조화함수일 필요충분조건은 모든 구체 $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$가 평균값 성질을 만족시키는 것이다.

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u\, ds \tag{2.30}$$

Proof. Theorem 2.6에 의해 임의의 구체 $B \subset\subset \Omega$에 대하여 조화함수 h가 존재하여 ∂B에서 $h = u$를 만족시킨다. 그 경우 차 $w = u - h$는 B에서의 임의의 구체에 대하여 평균값 성질을 만족시키는 함수이다. Theorem 2.2, 2.3, 2.4의 최대 원리와 유일성 결과를 유도할 때 평균값 성질만을 사용했으므로 이들을 w에 적용할 수 있다. 그러므로 B에서 $w = 0$이며 따라서 u가 Ω에서 조화함수여야 한다. □

위 정리의 즉각적인 결과로 다음이 성립한다.

Theorem 2.8. 조화함수들의 균등수렴 함수열의 극한은 조화함수이다.

Theorem 2.8로부터 만약 $\{u_n\}$이 유계 영역 Ω에서의 조화함수들의 열이며 연속한 경계값 $\{\varphi_n\}$들을 가지고 이들이 $\partial\Omega$에서 함수 φ로 균등수렴하면 (최대 원리에 의해) 열 $\{u_n\}$이 $\partial\Omega$에서 경계값 φ를 가지는 조화함수로 균등수렴한다. Harnack 부등식(Theorem 2.5)에 의해 Theorem 2.8로부터 다음 정리를 유도할 수 있다.

Theorem 2.9 (Harnack's convergence theorem (Harnack 수렴 정리)). $\{u_n\}$이 영역 Ω에서의 조화함수들의 단조증가 열이라 하자. 어떠한 점 $y \in \Omega$에 대하여 열 $\{u_n(y)\}$가 유계라 하자. 그 경우 임의의 유계 부분영역 $\Omega' \subset\subset \Omega$에서 $\{u_n\}$이 조화함수로 균등수렴한다.

Proof. 열 $\{u_n(y)\}$가 수렴하므로 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 수 N이 존재하여 모든 $m \geq n > N$에 대하여 $0 \leq u_m(y) - u_n(y) < \varepsilon$를 만족시킨다. 그러나 그 경우 Theorem 2.5에 의해 Ω', Ω에 의존하는 어떠한 상수 C가 존재하여 다음이 성립해야 한다.

$$\sup_{\Omega'} |u_m(x) - u_n(x)| < C\varepsilon$$

따라서 $\{u_n\}$이 균등수렴하며, Theorem 2.8에 의해 극한이 조화함수이다. □

2.7 Interior Estimates of Derivatives (도함수의 내부 추산)

Poisson 적분을 직접 미분하는 것으로 조화함수에 대한 내부 도함수 추산을 얻을 수 있다. 또한 평균값 성질에서 이러한 추산을 얻을 수도 있다. u가 Ω에서의 조화함수이며 $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$라 하자. 구배 Du도 Ω에서의 조화함수이므로 평균값 성질과 발산 정리에서 다음이 따라온다.

$$\begin{aligned} Du(y) &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B Du \, dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B} u\boldsymbol{\nu} \, ds \\ |Du(y)| &\leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B} |u| \end{aligned}$$

따라서 $d_y = \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$라 하면 다음이 성립한다.

$$|Du(y)| \leq \frac{n}{d_y} \sup_{\Omega} |u| \tag{2.31}$$

추산 (2.31)을 등간격으로 배치된 축소 구체들에 순차적으로 적용하면 고계도함수에 대한 추산을 얻는다:

Theorem 2.10. u가 Ω에서의 조화함수이며 Ω'이 Ω의 임의의 컴팩트 부분집합이라 하자. $d = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$라 하자. 그 경우 임의의 다중첨자 $\boldsymbol{\alpha}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sup_{\Omega'} |D^{\boldsymbol{\alpha}} u| \leq \left(\frac{n|\boldsymbol{\alpha}|}{d} \right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \sup_{\Omega} |u| \tag{2.32}$$

상계 (2.32)의 즉각적인 결과는 조화함수들의 임의의 유계집합의 도함수들이 임의의 컴팩트 부분영역에서 동등연속하다는 것이다. 따라서 Arzela 정리에 의해 조화함수들의 임의의 유계집합이 **정규 족(normal family)**을 형성함을 알 수 있다; i.e. 다음이 성립한다:

Theorem 2.11. 영역 Ω에서의 조화함수들의 임의의 유계 열에 대하여 Ω의 임의의 컴팩트 부분집합에서 조화함수로 균등수렴하는 부분열이 존재한다.

앞에서의 수렴 정리 Theorem 2.8도 Theorem 2.11에서 즉시 따라온다.

2.8 The Dirichlet Problem; the Method of Subharmonic Functions (Dirichlet 문제; 열조화함수 기법)

우리는 이제 임의의 유계 영역에서의 고전 Dirichlet 문제의 해의 존재성 문제에 접근할 수 있다. 이곳에서의 논의는 (최대 원리와 Dirichlet 문제의 구체에서의 해결가능성에 크게 의존하는) **Perron 열조화함수 기법 (Perron's method of subharmonic function)** [PE]에 의해 완수된다. 이러한 방식은 초등적이고 내부 존재성 문제와 해의 경계 거동을 분리하며 일반적인 2계 타원형 편미분방정식의 경우로 쉽게 확장될 수 있는 등 여러 매력적인 성질들을 가진다. (예를 들어 [KE2] [GU] 등의 책에서 다루는) 적분방정식법 또는 Chapter 8에서 우리가 더 일반적인 상황에 대하여 기술할 변분법과 Hilbert 공간 접근법 등 존재성 정리에 대한 다른 잘 알려진 방법들도 존재한다.

$C^2(\Omega)$ 열조화함수 및 우조화함수의 정의는 다음과 같이 일반화된다. $C^0(\Omega)$ 함수 u가 Ω에서의 **열조화(subharmonic)** [resp. **우조화(superharmonic)**]함수임의 정의는 모든 $B \subset\subset \Omega$와 ∂B에서 $u \leq$ [resp. $\geq$] h를 만족시키는 B에서의 모든 조화함수 h에 대하여 B에서도 $u \leq$ [resp. $\geq$] h가 성립하는 것이다. $C^0(\Omega)$ 열조화함수들의 다음과 같은 성질들이 간단히 수립된다:

(i) 만약 u가 영역 Ω에서의 열조화함수이면 이는 Ω에서 강한 최대 원리를 만족시킨다; 만약 v가 유계 영역 Ω에서의 우조화함수이며 $\partial\Omega$에서 $v \geq u$이면 Ω 전체에서 $v > u$이거나 또는 $v \equiv u$이다. 후자의 주장을 증명하기 위해 이것이 거짓이라 가정하자. 그 경우 어떠한 점 $x_0 \in \Omega$에서 다음이 성립한다.

$$(u-v)(x_0) = \sup_{\Omega}(u-v) = M \geq 0$$

또한 구체 $B = B(x_0)$가 존재하여 ∂B에서 $u - v \not\equiv M$이라 가정할 수 있다. $\bar{u}, \bar{v}$가 각각 ∂B에서 u, v와 일치하는 조화함수를 나타낸다 하자. (Theorem 2.6) 다음이 성립하며,

$$M \geq \sup_{\partial B}(\bar{u} - \bar{v}) \geq (\bar{u} - \bar{v})(x_0) \geq (u-v)(x_0) = M$$

따라서 위 식에서 모두 등호가 성립한다. 조화함수에 대한 강한 최대 원리(Theorem 2.2)에 의해 B에서 $\bar{u} - \bar{v} \equiv M$이며 따라서 ∂B에서 $u - v \equiv M$이고 이는 B의 선택에 모순이다.

(ii) u가 Ω에서의 열조화함수이며 B가 Ω에 진 포함된 구체라 하자. (∂B에서의 u의 Poisson 적분에 의해 주어진) B에서의 조화함수를 $\bar{u}$로 표기하자. Ω에서 u의 B에서의 **조화 올림(harmonic lifting)**을 다음과 같이 정의하자.

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & (x \in B) \\ u(x) & (x \in \Omega - B) \end{cases} \tag{2.33}$$

그 경우 함수 U도 Ω에서의 열조화함수이다: 임의의 구체 $B' \subset\subset \Omega$를 고려하고 h가 $\partial B'$에서 $h \geq U$를 만족시키는 B'에서의 조화함수라 하자. B'에서 $u \leq U$이므로 B'에서 $u \leq h$이며 따라서 $B' - B$에서 $U \leq h$이다. 또한 U가 B에서 조화함수이므로 최대 원리에 의해 $B \cap B'$에서 $U \leq h$이다. 그러므로 B'에서 $U \leq h$이며 따라서 U가 Ω에서의 열조화함수이다.

(iii) $u_1, u_2, \ldots, u_N$이 Ω에서의 열조화함수라 하자. 그 경우 함수 $u(x) = \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$도 Ω에서의 열조화함수이다. (이는 열조화성의 정의에서 자명하게 따라온다.) (i), (ii), (iii)에서 u를 $-u$로 대체하면 우조화함수에 대한 대응하는 결과도 성립한다.

이제 Ω가 유계 영역이며 φ가 $\partial\Omega$에서의 유계 함수라 하자. $C^0(\bar{\Omega})$ 열조화함수 u가 φ에 대한 **하방함수(subfunction)**라는 것의 정의는 $\partial\Omega$에서 $u \leq \varphi$를 만족시키는 것이다. 마찬가지로 $C^0(\bar{\Omega})$ 우조화함수 u가 φ에 대한 **상방함수(superfunction)**라는 것의 정의는 $\partial\Omega$에서 $u \geq \varphi$를 만족시키는 것이다. 최대 원리에 의해 임의의 하방함수는 임의의 상방함수 이하이다. 특히 상수함수 $\leq \inf_{\partial\Omega}\varphi$ [resp. $\geq \sup_{\partial\Omega}\varphi$]들이 하방함수 [resp. 상방함수]이다. S_φ가 φ에 대한 하방함수들의 집합을 나타낸다 하자. Perron 기법의 기본 결과가 다음 정리에 포함되어 있다.

Theorem 2.12. 함수 $u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$가 Ω에서의 조화함수이다.

Proof. 최대 원리에 의해 임의의 함수 $v \in S_\varphi$가 $v \leq \sup\varphi$를 만족시키며 따라서 u가 잘 정의된다. Ω의 임의의 점 y를 고정하자. u의 정의에 의해 열 $\{v_n\} \subset S_\varphi$가 존재하여 $v_n(y) \to u(y)$를 만족시킨다. v_n을 $\max(v_n, \inf\varphi)$로 대체하는 것으로 함수열 $\{v_n\}$이 유계라 가정할 수 있다. 이제 R을 적절히 선택하여 구체 $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$이도록 하고 (2.33)에 의해 V_n을 v_n의 B에서의 조화 올림으로 정의하자. 그 경우 $V_n \in S_\varphi, V_n(y) \to u(y)$이다. Theorem 2.11에 의해 $\{V_n\}$의 부분열 $\{V_{n_k}\}$가 존재하여 임의의 구체 $B_\rho(y)$에서 균등수렴하며 그 극한 v가 B에서의 조화함수이도록 한다. 명백히 B에서 $v \leq u$이며 $v(y) = u(y)$이다. 이제 B에서 $v = u$임을 주장하겠다. 어떠한 $z \in B$에서 $v(z) < u(z)$라 가정하자. 그 경우 함수 $\bar{u} \in S_\varphi$가 존재하여 $v(z) < \bar{u}(z)$이다. $w_k = \max(\bar{u}, V_{n_k})$와 (2.33)에 의한 조화 올림 W_k를 정의하자. 앞에서와 같이 조화함수 w로 수렴하는 $\{W_k\}$의 부분열을 얻는다. B에서 $v \leq w \leq u$가 성립하며 $v(y) = w(y) = u(y)$이다. 그러나 그 경우 최대 원리에 의해 B에서 $v = w$이다. 이는 $\bar{u}$의 정의에 모순이며 따라서 u가 Ω에서의 조화함수이다. □

위 결과는 고전 Dirichlet 문제($\Delta u = 0, \partial\Omega$에서 $u = \varphi$)의 (**Perron 해(Perron solution)**라 불리는) 해의 후보를 제시한다: 만약 Dirichlet 문제가 해결가능하면 그 해는 Perron 해와 같아야 한다. w가 해의 후보라 하자. 그 경우 명백히 $w \in S_\varphi$이며 최대 원리에 의해 모든 $u \in S_\varphi$에 대하여 $w \geq u$이다. 컴팩트성 정리(Theorem 2.11) 대신 Harnack 수렴 정리(Theorem 2.9)에 기반하여 Theorem 2.12를 증명할 수도 있음을 기억해 두라. (Problem 2.10을 참조하라.)

Perron 기법에서 해의 경계 거동의 연구는 본질적으로 존재성 문제와 별개의 문제이다. 경계값의 연속성 가정은 **장벽함수(barrier)**의 개념을 통해 경계의 기하학적 성질과 관련되어 있다. ξ가 $\partial\Omega$의 점이라 하자. 그 경우 $C^0(\bar{\Omega})$ 함수 $w = w_\xi$가 Ω에 대한 ξ에서의 **장벽함수(barrier)**임의 정의는 다음을 만족시키는 것이다:

(i) w가 Ω에서의 우조화함수이다.
(ii) $\bar{\Omega} - \xi$에서 $w > 0$이다; $w(\xi) = 0$이다.

장벽함수의 더 일반적인 정의는 우조화함수 w에 대하여 Ω에서만 양의 값 연속 함수라 요구하고 $x \to \xi$에서 $w(x) \to 0$을 요구하는 것이다. 이 절의 결과들은 이러한 **약한 장벽함수(weak barrier)**에 대해서도 유효하다. (예를 들어 [HL, p. 168]을 참조하라.) 장벽함수의 개념의 중요한 특성은 이것이 경계 $\partial\Omega$에서의 국소적 성질이라는 것이다. 즉 w가 $\xi \in \partial\Omega$에서의 **국소장벽함수(local barrier)**임을 ξ의 근방 N이 존재하여 w가 $\Omega \cap N$에 대한 장벽함수인 것으로 정의하면 Ω에 대한 ξ에서의 장벽함수를 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)) & (x \in \bar{\Omega} \cap B) \\ m & (x \in \bar{\Omega} - B) \end{cases}$$

여기에서 B는 $\xi \in B \subset\subset N$을 만족시키는 구체이며 $m = \inf_{N-B} w > 0$이다. 이것이 Ω에 대한 ξ에서의 장벽함수임을 보일 수 있다. 정의 (i), (ii)를 직접 확인하자. $\bar{w}$가 $\bar{\Omega}$에서 연속하며 열조화함수의 성질 (iii)에 의해 Ω에서의 우조화함수이다; 성질 (ii)는 즉시 따라온다.

경계점이 (Laplacian에 대한) **정칙(regular)** 경계점이라는 것의 정의는 이 점에서의 장벽함수가 존재하는 것이다. 장벽함수와 해의 경계 거동 간의 관계가 다음 보조정리에 포함되어 있다.

Lemma 2.13. u가 Ω에서 Perron 기법(Theorem 2.12)에 의해 정의된 조화함수라 하자. 만약 ξ가 Ω의 정칙 경계점이며 φ가 ξ에서 연속하면 $x \to \xi$에서 $u(x) \to \varphi(\xi)$이다.

Proof. $\varepsilon > 0$을 선택하고 $M = \sup|\varphi|$라 하자. ξ가 정칙 경계점이므로 ξ에서의 장벽함수 w가 존재한다. φ의 연속성에 의해 상수 δ, k가 존재하여 $|x - \xi| < \delta$이면 $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$를 만족시키며 $|x - \xi| \geq \delta$이면 $kw(x) \geq 2M$을 만족시킨다. 함수 $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw, \varphi(\xi) - \varepsilon - kw$는 각각 φ에 대한 상방함수와 하방함수이다. 따라서 u의 정의와 임의의 상방함수가 임의의 하방함수를 지배한다는 사실에 의해 Ω에서 다음이 성립한다.

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$
$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x)$$

$x \to \xi$에서 $w(x) \to 0$이었으므로 $x \to \xi$에서 $u(x) \to \varphi(\xi)$이다. □

이는 즉시 다음으로 이어진다.

Theorem 2.14. 유계 영역에서의 임의의 연속 경계값에 대한 고전 Dirichlet 문제가 해결가능할 필요충분조건은 모든 경계점이 정칙인 것이다.

Proof. 만약 경계값 φ가 연속하며 경계 $\partial\Omega$가 정칙 경계점들로 구성된다면 위 보조정리에 의해 Perron 기법에 의해 주어진 조화함수가 Dirichlet 문제의 해가 된다. 역으로 모든 연속 경계값에 대한 Dirichlet 문제가 해결가능하다 하자. $\xi \in \partial\Omega$라 하자. 함수 $\varphi(x) = |x - \xi|$가 $\partial\Omega$에서 연속하며, 이러한 φ에 대한 Dirichlet 문제의 해가 되는 Ω에서의 조화함수는 명백히 ξ에서의 장벽함수이다. 따라서 $\partial\Omega$의 임의의 점 ξ가 정칙점이다. □

중요한 질문이 남아있다: 모든 경계점이 정칙인 영역은 어떤 것들인가? 경계의 국소적 기하학적 성질들을 통해 일반적인 충분조건을 기술할 수 있음이 밝혀진다. 이러한 조건들 중 일부를 아래에서 언급하겠다.

$n = 2$인 경우 유계 영역 Ω의 경계점 z_0를 고려하고 원점이 z_0인 극좌표계 r, θ를 취하자. z_0의 근방 N이 존재하여 $\Omega \cap N$에서 (또는 z_0를 경계점으로 가지는 $\Omega \cap N$의 연결성분에서) θ를 (가지 절단하여) 1가함수로서 정의할 수 있다 하자. 다음이 z_0에서의 (약한) 국소장벽함수이며 따라서 z_0이 정칙점임을 보일 수 있다.

$$w = -\operatorname{Re} \frac{1}{\log z} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

특히 만약 z_0가 Ω의 외부에 놓인 단순호의 끝점이면 z_0가 정칙 경계점이다. 그러므로 평면에서의 연속 경계값에 대한 Dirichlet 문제는 각각의 경계점에 외부의 단순호를 통해 접근할 수 있도록 하는 유계 영역에서 항상 해결가능하다. 더 일반적으로 동일한 장벽함수는 영역의 여집합의 각각의 연결성분이 1개 초과의 점으로 구성된다면 경계값 문제가 해결가능함을 보여준다. 이러한 영역의 예시로 유한 개 단순곡선들로 둘러싸인 영역이 있다; 다른 예시는 단위 원판 내에 호를 따른 틈이 있는 영역이다; 이 경우 틈의 양쪽 부분에 모두 경계값을 할당할 수 있다.

고차원의 경우에는 상황이 근본적으로 다르며 Dirichlet 문제를 위와 같은 일반성 하에서 해결할 수 없다. Lebesgue에 의한 예시는 충분히 뾰족한 내향 첨점을 가지는 3차원에서의 폐곡면은 첨점에서 비정칙점을 가짐을 보여준다. (예를 들어 [CH]를 참조하라.)

유계 영역 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$에서의 해결가능성에 대한 간단한 충분조건은 Ω가 **외부구 조건(exterior sphere condition)**을 만족시키는 것이다: 임의의 점 $\xi \in \partial\Omega$에 대하여 공 $B = B_R(y)$가 존재하여 $\bar{B} \cap \bar{\Omega} = \xi$를 만족시키면 다음에 의해 주어진 함수 w가 ξ에서의 장벽함수이다.

$$w(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n} & (n \geq 3) \\ \log \frac{|x-y|}{R} & (n = 2) \end{cases} \tag{2.34}$$

따라서 C^2 경계를 가지는 영역의 경계점들은 모두 정칙 경계점이다. (Problem 2.11을 참조하라.)

2.9 Capacity (용량)

용량(capacity)이라는 물리학적 개념은 정칙 경계점과 특이 경계점을 특성화하는 다른 방법을 제공한다. Ω가 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$에서의 유계 영역이며 매끄러운 경계 $\partial\Omega$를 가진다 하자. u가 $\bar{\Omega}$의 여집합에서 정의되었으며 경계조건으로 $\partial\Omega$에서 $u = 1$, 무한원점에서 $u = 0$을 만족시키는 조화함수라 하자. (이는 종종 **도체 퍼텐셜 (conductor potential)**이라 불린다.) u의 존재성은 안쪽 경계 $\partial\Omega$(이곳에서 $u' = 1$)과 무한히 멀어지는 바깥쪽 경계(이곳에서 $u' = 0$)들을 가지는 유계 영역들에서의 조화함수 u'들의 열의 (유일한) 극한으로서 간단히 수립된다. 만약 Σ가 $\partial\Omega$ 또는 Ω를 둘러싸는 임의의 매끄러운 폐곡면을 나타낸다 하면 다음과 같이 Ω의 용량을 정의한다.

$$\operatorname{cap}\Omega = -\int_\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = \int_{\mathbb{R}^n - \Omega} |Du|^2\, dx \qquad (\nu = \text{외향 법선}) \tag{2.35}$$

정전기학에서는 $\operatorname{cap}\Omega$에 상수 인자를 곱한 것이 (무한대를 기준으로 하는) 단위 퍼텐셜에서 도체 $\partial\Omega$에 존재하는 총 전하량이다.

매끄럽지 않은 경계를 가지는 영역과 임의의 컴팩트 집합에서 용량을 매끄러운 경계를 가지는 영역들의 축퇴 열의 용량의 유일한 극한으로 정의할 수 있다. 이와 동치로 영역 근사 없이도 직접 용량을 정의할 수도 있다. (e.g. [LK]를 참조하라.) 특히 다음의 변분법적 특성화가 성립한다.

$$\operatorname{cap}\Omega = \inf_{v \in K} \int |Dv|^2 \tag{2.36}$$

여기에서 K는 다음과 같다.

$$K = \left\{ v \in C_0^1(\mathbb{R}^n) : \Omega\text{에서 } v = 1 \right\}$$

점 $x_0 \in \partial\Omega$에서의 정칙성을 조사하기 위해 임의의 고정된 $\lambda \in (0,1)$에 대하여 다음의 용량을 고려하자.

$$C_j = \operatorname{cap}\left\{ x \notin \Omega : |x - x_0| \leq \lambda^j \right\}$$

Wiener 판정법(Wiener criterion)은 x_0 Ω의 정칙 경계점일 필요충분조건이 다음 급수가 발산하는 것이라 기술한다.

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j / \lambda^{j(n-2)} \tag{2.37}$$

용량에 대한 논의와 Wiener 판정법의 증명은 [KE2, LK] 등의 문헌을 참조하라. Chapter 8에서 일반적인 발산구조 타원형 작용소에 대하여 이러한 정칙성 조건을 증명할 것이다.

3 The Classical Maximum Principle (고전적 최대 원리)

이 장의 목표는 Chapter 2에서 유도한 Laplace 작용소에 대한 고전적 최대 원리를 다음 형태의 선형 타원형 미분작용소에 대하여 확장하는 것이다.

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji} \tag{3.1}$$

여기에서 $x = (x_1, \dots, x_n)$은 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$에서의 영역 Ω에 속한다. 명시적으로 부정하지 않는 한 u가 $C^2(\Omega)$에 속한다 가정할 것이다. 반복되는 첨자가 1에서 n까지의 합을 나타내는 합 관습을 지속적으로 사용할 것이다. L은 항상 (3.1)의 작용소를 나타낼 것이다.

다음의 정의를 도입하겠다: L이 점 $x \in \Omega$에서 **타원형(elliptic)**이라는 것의 정의는 계수행렬 $[a^{ij}(x)]$가 양의 정부호 행렬인 것이다; 즉 $\lambda(x)$와 $\Lambda(x)$가 각각 $[a^{ij}(x)]$의 최소 및 최대 고유치를 나타낸다면 모든 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \tag{3.2}$$

만약 Ω에서 $\lambda > 0$이면 L이 Ω에서 타원형이라 한다. 만약 어떠한 상수 λ_0에 대하여 Ω에서 $\lambda \geq \lambda_0 > 0$이면 L이 Ω에서 **강한 타원형(strictly elliptic)**이라 한다. 만약 Λ/λ이 Ω에서 유계이면 L이 Ω에서 **균등타원형(uniformly elliptic)**이라 한다. 그러므로 작용소 $D_{11} + x_1D_{22}$는 반평면 $x_1 > 0$에서 타원형이지만 균등타원형은 아니다. 하지만 이는 $0 < \alpha < \beta < \infty$에 대한 $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ 형태의 띠에서 균등타원형이다.

(3.1) 형태의 타원형 작용소에 대한 대부분의 결과들은 저계항 b^iD_iu와 cu가 최고계항 $a^{ij}D_{ij}u$에 비해 상대적으로 덜 중요하도록 제한하는 추가적인 조건을 필요로 한다. 이 장에서는 항상 다음 조건을 가정할 것이다.

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)} \leq \text{const} < \infty \quad (i = 1, \dots, n, x \in \Omega) \tag{3.3}$$

그 후 L 대신 $L' = \lambda^{-1}L$을 고려하는 것으로 $\lambda = 1$이며 b^i가 유계인 경우로 문제를 줄일 수 있다. 만약 추가적으로 L이 균등타원형이면 a^{ij}도 유계이도록 선택할 수 있다. 만약 계수 a^{ij}, b^i가 Ω에서 연속하면 임의의 유계 부분영역 $\Omega' \subset\subset \Omega$에서 L이 균등타원형이며 (3.3)이 성립함을 기억해 두라. 계수 c도 어떠한 제한조건을 따를 것이지만 이는 경우에 따라 다를 것이므로 전제조건에 나타나 있을 것이다.

3.1 The Weak Maximum Principle (약한 최대 원리)

많은 경우 다음의 **약한 최대 원리(weak maximum principle)**를 사용하면 충분하다.

Theorem 3.1. L이 유계 영역 Ω에서의 타원형 작용소라 하자. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$에 대하여 다음이 성립한다 하자.

$$\Omega\text{에서 } Lu \geq 0 \text{ [resp. } \leq 0], \quad \Omega\text{에서 } c = 0 \tag{3.4}$$

그 경우 u의 $\bar{\Omega}$에서의 최댓값(최솟값)은 $\partial\Omega$에서 달성된다. 즉 다음이 성립한다.

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left[\text{resp. } \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right] \tag{3.5}$$

만약 $a^{ij}, b^i \in C^0(\Omega)$인 경우 $|b^i|/\lambda$가 Ω에서 국소유계이기만 해도 결과가 여전히 유효하다. 또한 만약 u가 $\bar{\Omega}$에서 연속하다는 가정을 제거하면 결론 (3.5)가 다음과 같아진다.

$$\sup_{\Omega} u = \limsup_{x \to \partial\Omega} u(x) \quad \left[\text{resp. } \inf_{\Omega} u = \liminf_{x \to \partial\Omega} u\right] \tag{3.6}$$

Proof. 만약 Ω에서 $Lu > 0$이면 강한 최대 원리(i.e. u가 $\bar{\Omega}$에서 내부최대점을 가질 수 없다)가 성립함을 간단히 보일 수 있다: 만약 이러한 점 x_0가 존재한다면 $Du(x_0) = 0$이며 행렬 $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)]$가 양의 정부호가 아니다. 그러나 L이 타원형이므로 행렬 $[a^{ij}(x_0)]$가 양의 정부호이다. 따라서 $Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)D_{ij}(x_0) \le 0$이므로 $Lu > 0$임에 모순이다. (이 논의에서 계수행렬 $[a_{ij}]$의 반정부호성만이 사용되었음을 기억해 두라.)

전제조건 (3.3)에 의해 $|b^i|/\lambda \le b_0 =$ 상수이다. 그 경우 $a^{1,1} \ge \lambda$이므로 충분히 큰 상수 γ가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{1,1} + \gamma b^1)e^{\gamma x^1} \ge \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1} > 0$$

그러므로 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 Ω에서 $L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$이며 따라서 위 논의에 의해 다음이 성립한다.

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1})$$

$\varepsilon \to 0$이라 하면 정리에서 주장한 것과 같이 $\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u$임을 알 수 있다. □

Remark. 증명을 살펴보면 행렬 $[a^{ij}]$가 양의 반정부호이며 어떠한 k에 대하여 $|b^k|/a^{kk}$가 국소유계라는 더 약한 전제조건 하에서도 정리가 성립함이 명백하다.

최대 원리에 의해 제안된 다음과 같은 용어를 도입하는 것이 편리하다: Ω에서 $Lu = 0$ [resp. $\ge 0, \le 0$]을 만족시키는 함수는 문제 $Lu = 0$의 Ω에서의 **해(solution)** [resp. **하방해(subsolution)**, **상방해(supersolution)**]이다. L이 Laplacian일 경우 이러한 용어는 조화함수, 열조화함수, 우조화함수에 대응한다.

더 일반적으로 Ω에서 $c \le 0$이라 가정하자. $u > 0$이도록 하는 부분집합 $\Omega^+ \subset \Omega$를 고려하자. 만약 Ω에서 $Lu \ge 0$이면 Ω^+에서 $L_0u = a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu \ge -cu \ge 0$임을 알 수 있다. 그러므로 $\bar{\Omega}^+$에서의 u의 최댓값은 $\partial\bar{\Omega}^+$에서 달성되어야 하며 따라서 $\partial\Omega$에서 달성되어야 한다. 그러므로 $u^+ = \max(u, 0), u^- = \min(u, 0)$이라 하면 다음을 얻는다:

Corollary 3.2. L이 유계 영역 Ω에서의 타원형 작용소이며 $c \le 0$이라 하자. $u \in C^0(\bar{\Omega})$이며 Ω에서 다음이 성립한다 하자.

$$Lu \ge 0 \text{ [resp. } \le 0] \tag{3.7}$$

그 경우 다음이 성립한다.

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left[\text{resp. } \inf_\Omega u \ge \inf_{\partial\Omega} u^-\right] \tag{3.8}$$

만약 Ω에서 $Lu = 0$이면 다음이 성립한다.

$$\sup_\omega |u| = \sup_{\partial\Omega} |u| \tag{3.9}$$

이 따름정리에서 일반적으로 $c \le 0$이라는 조건을 완화하여 $c > 0$인 경우를 허용하도록 할 수는 없다. 이는 문제 $\Delta u + \leftarrow u = 0$, $\partial\Omega$에서 $u = 0$의 양수 고유치 κ의 존재성으로부터 명확하다. 약한 최대 원리의 즉각적인 중요한 결과는 해의 유일성 및 경계값에 대한 연속의존성이다. Corollary 3.2로부터 자동적으로 작용소 L에 대한 고전적 Dirichlet 문제의 유일성 결과 및 (위 따름정리의 응용의 전형적인 형태인) 다음의 비교 원리가 따라온다.

Theorem 3.3 (Comparison principle (비교 원리))**.** L이 Ω에서의 타원형 작용소이며 Ω에서 $c \le 0$이라 하자. u, v가 $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 함수이며 Ω에서 $Lu = Lv$, $\partial\Omega$에서 $u = v$를 만족시킨다 하자. 그 경우 Ω에서 $u = v$이다. 만약 Ω에서 $Lu \ge Lv$이며 $\partial\Omega$에서 $u \le v$이면 Ω에서 $u \le v$이다.

3.2 The Strong Maximum Principle (강한 최대 원리)

많은 경우에 약한 최대 원리를 적용하면 충분함에도 불구하고 비자명 내부 최대점의 가정을 배제하는 강한 형태가 필요한 경우가 종종 있다. 우리는 다음의 유용한 경계점 보조정리를 사용하는 것으로 국소균등타원형 작용소에 대하여 이러한 결과를 얻을 것이다. 영역 Ω가 $x_0 \in \partial\Omega$에서 **내부구 조건(interior sphere condition)**을 만족시킨다는 것의 정의는 공 $B \subset \Omega$가 존재하여 $x_0 \in \partial\Omega$를 만족시킨다는 것이다. (i.e. Ω의 여집합이 x_0에서 외부구 조건을 만족시키는 것이다.)

Lemma 3.4. L이 균등타원형이고 $c = 0$이며 Ω에서 $Lu \ge 0$이라 하자. $x_0 \in \partial\Omega$가 다음을 만족시킨다 하자.

(i) u가 x_0에서 연속하다.
(ii) 모든 $x \in \Omega$에 대하여 $u(x_0) > u(x)$이다.
(iii) Ω가 x_0에서 내부구 조건을 만족시킨다.

그 경우 u의 x_0에서의 외향 법선도함수는 존재한다면 다음의 강한 부등식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0 \tag{3.10}$$

만약 $c \leq 0$이며 c/λ가 유계이면 $u(x_0) \geq 0$인 경우 동일한 결과가 성립한다. 만약 $u(x_0) = 0$이면 c의 부호에 관계없이 동일한 결과가 성립한다.

Proof. Ω가 x_0에서 내부구 조건을 만족시키므로 구체 $B = B_R(y) \subset \Omega$가 존재하여 $x_0 \in \partial B$를 만족시킨다. $0 < \rho < R$에 대하여 다음과 같이 정의된 보조함수 v를 도입하자.

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$$

여기에서 $r = |x - y| > \rho$이며 α는 아직 결정되지 않은 양수 상수이다. 직접적인 계산에 의해 $c \leq 0$인 경우 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} Lv(x) &= e^{-\alpha r^2}[4\alpha^2 a^{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha(a^{ii} + b^i(x_i - y_i))] + cv \\ &\geq e^{-\alpha r^2}[4\alpha^2 \lambda(x) r^2 - 2\alpha(a^{ii} + |\mathbf{b}|r) + c] \quad (\mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^n)) \end{aligned}$$

가정에 의해 $a^{ii}/\lambda, |\mathbf{b}|/\lambda, c/\lambda$가 유계이다. 따라서 α를 충분히 크게 선택하여 고리형 영역 $A = B_R(y) - B_\rho(y)$ 전체에서 $Lv \geq 0$이도록 할 수 있다. $\partial B_\rho(y)$에서 $u - u(x_0) < 0$이므로 상수 $\varepsilon > 0$이 존재하여 $\partial B_\rho(y)$에서 $u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0$을 만족시킨다. $\partial B_R(y)$에서도 ($v = 0$이므로) 동일한 부등식이 성립한다. 그러므로 A에서 $L(u - u(x_0) + \varepsilon v) \geq -cu(x_0) \geq 0$이며 ∂A에서 $u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0$이다. 약한 최대 원리(Corollary 3.2)에 의해 A 전체에서 $u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0$이다. x_0에서 법선도함수를 취하면 요구된 것과 같이 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon v'(R) > 0$$

c가 임의의 부호를 가지는 경우 $u(x_0) = 0$이면 위 논의를 L 대신 $L - c^+$에 대하여 적용할 수 있다. □

더 일반적으로, 법선도함수의 존재성에 무관하게 어떠한 고정된 $\delta > 0$에 대하여 벡터 $x_0 - x$와 x_0에서의 법선 사이의 각도가 $\pi/2 - \delta$ 이하라 하면 다음이 성립한다.

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} > 0 \tag{3.11}$$

내부구 조건이 다소 완화될 수 있음에도 불구하고 $\partial\Omega$의 x_0에서의 적절한 매끄러움 조건 없이 (3.11)을 주장하는 것은 불가능하다. 예를 들어 $L = \Delta$이며 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$가 우반평면에서 $u = \mathrm{Re}(z/\log z) < 0$을 만족시키는 영역이라 하자. 기초적인 계산에 의해 $z = 0$ 근처에서 $\partial\Omega \subset C^1$이며 $u_x(0,0) = 0$이므로 (3.11)이 거짓임을 알 수 있다.

우리는 이제 E. Hopf [HO1]에 의한 다음의 **강한 최대 원리(strong maximum principle)**를 유도할 수 있다.

Theorem 3.5. L이 균등타원형이고 $c = 0$이며 (유계일 필요는 없는) 영역 Ω에서 $Lu \geq 0$ [resp. ≤ 0]이라 하자. 그 경우 만약 u가 Ω에서 내부최대점[resp. 내부최소점]을 가지면 u가 상수함수이다. 만약 $c \leq 0$이며 c/λ가 유계이면 u는 상수함수가 아닌 한 Ω의 내부에서 음 아닌 최댓값[resp. 양 아닌 최솟값]을 가질 수 없다.

L이 국소균등타원형이며 $|b^i|/\lambda, c/\lambda$가 국소유계인 경우에도 명백히 결론이 여전히 유효하다.

Proof. 정리와 반대로 u가 상수함수가 아니며 Ω의 내부에서 최댓값 $M \geq 0$을 달성한다 가정하자. 그 경우 $u < M$인 집합 Ω^-는 $\Omega^- \subset \Omega, \partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset$를 만족시킨다. x_0가 $\partial\Omega$보다 $\partial\Omega^-$에 더 가까운 Ω^-의 점이라 하자. x_0를 중심으로 하는 최대 구체 $B \subset \Omega^-$를 고려하자. 그 경우 어떠한 점 $y \in \partial B$에서 $u(y) = M$이다. 위 보조정리에 의해 $Du(y) \neq 0$이지만 y가 내부최대점이므로 이는 불가능하다. □

만약 어떤 점에서 $c < 0$이면 위 정리의 상수는 명백히 0이다. 또한 만약 내부최대점[resp. 내부최소점]에서 $u = 0$이면 정리로부터 c의 부호에 상관없이 $u \equiv 0$임이 따라온다.

물론 Theorem 3.1, Lemma 3.4를 거치지 않고 강한 최대 원리를 직접 증명하는 것도 가능하다. (예를 들어 [MR2]를 참조하라.)

다른 형태의 경계값 문제들에 대한 유일성 정리는 Lemma 3.4와 Theorem 3.5의 결과이다. 특히 고전 Neumann 문제에 대한 다음의 유일성 정리가 성립한다.

Theorem 3.6. L이 균등타원형이고 $c \le 0$이며 c/λ가 유계이고 Ω가 $\partial\Omega$의 각 점에서 내부구 조건을 만족시킨다 하자. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$가 유계 영역 Ω에서 $Lu = 0$의 해라 하자. 만약 법선도함수가 $\partial\Omega$ 전체에서 정의되며 $\partial\Omega$에서 $\partial u/\partial\nu = 0$이면 u가 Ω에서의 상수함수이다. 또한 만약 Ω의 어떤 점에서 $c < 0$이면 $u \equiv 0$이다.

Proof. 만약 u가 상수함수가 아니면 함수 u 또는 $-u$가 $\partial\Omega$의 점 x_0에서 음 아닌 최댓값 M을 가지며 Ω에서는 M 이하라 가정할 수 있다. Lemma 3.4를 x_0에 적용하면 $\partial u/\partial\nu(x_0) \ne 0$임을 알 수 있으며, 이는 전제조건에 모순이다. □

Theorem 3.6의 결론을 혼합 경계값 문제와 사선 도함수 문제로 일반화할 수 있다. (Problem 3.1을 참조하라.) $\partial\Omega$가 u의 도함수가 정의되지 않도록 하는 모서리 또는 변을 가질 경우 이러한 결론은 위와 같은 일반성 하에서는 (심지어 u가 $\bar{\Omega}$에서 연속하다고 가정하더라도) 거짓이다. (Problem 3.8(a)를 참조하라.)

3.3 Apriori Bounds (선험적 경계)

최대 원리는 유계 영역에서의 비동차방정식 $Lu = f$의 해에 대한 간단한 점별 추산을 제공한다. 여기에는 타원성과 계수에 대한 상계만이 관계됨을 언급하겠다. 이는 비선형 문제를 다룰 때 중요하다.

Theorem 3.7. Ω가 유계 영역이고 L이 타원형이며 $c \le 0$이고 $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2\Omega$이며 Ω에서 $Lu \ge f$ [resp. $= f$]라 하자. 그 경우 $\operatorname{diam}(\Omega)$와 $\beta = \sup|\mathbf{b}|/\lambda$에만 의존하는 상수 C가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda} \quad \left[\text{resp. } \sup_{\Omega} |u| \le \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} \frac{|f|}{\lambda}\right] \tag{3.12}$$

특히 만약 Ω가 거리 d만큼 떨어진 2개 평행평면 사이에 놓인 경우 $C = e^{(\beta-1)d} - 1$에 대하여 (3.12)가 성립한다.

Proof. Ω가 판 $0 < x_1 < d$에 포함된다 하자. $L_0 = a^{ij}D_{ij} + b^iD_i$라 하자. $\alpha \ge \beta + 1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$L_0 e^{\alpha x_1} = (\alpha^2 a^{1,1} + \alpha b^1)e^{\alpha x_1} \ge \lambda(\alpha^2 - \alpha\beta)e^{\alpha x_1} \ge \lambda$$

다음과 같다 하자.

$$v = \sup_{\partial\Omega} u^+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda}$$

그 경우 $Lv = L_0 v + cv \le -\lambda \sup_\Omega(|f^-|/\lambda)$이므로 Ω에서 다음이 성립한다.

$$L(u - v) \le -\lambda\left(\frac{f}{\lambda} + \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda}\right) \le 0$$

또한 $\partial\Omega$에서 $v - u \ge 0$이다. 따라서 $C = e^{zd} - 1$과 $\alpha \ge \beta + 1$에 대하여 $Lu \ge f$인 경우에 대한 요구된 결과를 얻는다.

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\Omega} v \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda}$$

u를 $-u$로 대체하면 $Lu = f$인 경우에 대한 (3.12)를 얻는다. □

Chapter 8, 9에서 Theorem 3.7을 강화한 f의 적분 노름에 의한 $\sup u$에 대한 추산을 얻을 것이다.

조건 $c \le 0$이 충족되지 않을 경우에도 충분히 가까운 평행평면들 사이에 놓인 영역 Ω에 대하여 (3.12)와 유사한 선험적 상계를 주장할 수 있다.

Corollary 3.8. Ω가 유계 영역이고 L이 타원형이며 $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$이고 Ω에서 $Lu = f$라 하자. C가 Theorem 3.7의 상수라 하고 다음이 성립한다 하자.

$$C_1 = 1 - C \sup_{\Omega} \frac{c^+}{\lambda} > 0 \tag{3.13}$$

그 경우 다음이 성립한다.

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \frac{1}{C_1} \left(\sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} \frac{|f|}{\lambda} \right) \tag{3.14}$$

Remark. d가 Ω를 포함하는 임의의 판의 두께인 경우 (3.12)에서의 상수 값으로 $C = e^{(\beta+1)d} - 1$가 가능하므로 $|\mathbf{b}|/\lambda$과 c/λ가 유계이도록 하는 임의의 충분히 좁은 영역에서 조건 (3.13)이 만족된다. 만약 $c^+ \equiv 0$ (i.e. $c \leq 0$)이면 $C_1 = 1$이며 (3.14)는 (3.12)로 줄어든다.

Proof. $Lu = (L_0 + c)u = f$를 다음 형태로 재표현하자.

$$(L_0 + c^-)u = f' \equiv f + (c^- - c)u = f - c^+ u$$

(3.12)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |u| &\leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} \frac{|f'|}{\lambda} \\ &\leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \left(\sup_{\Omega} \frac{|f|}{\lambda} + \sup_{\Omega} |u| \sup_{\Omega} \frac{c^+}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

이 부등식과 (3.13)이 (3.14)를 함의한다. □

Corollary 3.8의 즉각적인 따름정리로 ($|\mathbf{b}|/\lambda$와 c/λ에 대한 고정된 상계가 존재하도록 하는) 충분히 작은 영역에서의 Dirichlet 문제에 대한 해의 유일성이 성립한다.

3.4 Gradient Estimates for Poisson's Equation (Poisson 방정식에 대한 구배 추산)

최대 원리를 이용하여 어떠한 추가 조건을 만족시키는 방정식의 해의 도함수에 대한 추산을 유도할 수도 있다. 이 방법을 설명하기 위해 Poisson 방정식에 대한 추산을 얻는 과정을 보여주겠다. 이곳에서 유도된 결과들은 나중에 필요하지 않을 것이다.

입방체 $Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < d, i = 1, \ldots, n\}$에서 $\Delta u = f$이며 $u \in C^2(Q) \cap C^0(\bar{Q})$이고 f가 Q에서 유계라 하자. 우리는 비교 논의를 통해 다음 추산을 유도할 것이다.

$$|D_i u(0)| \leq \frac{n}{d} \sup_{\partial Q} |u| + \frac{d}{2} \sup_{Q} |f| \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.15}$$

다음의 반입방체

$$Q' = \{(x_1, \ldots, x_n) : |x_i| < d \ (i = 1, \ldots, n-1), 0 < x_n < d\}$$

에서 $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), x = (x', x_n)$으로 표기하고 다음 함수를 고려하자.

$$\varphi(x', x_n) = \tfrac{1}{2}[u(x', x_n) - u(x', -x_n)]$$

$\varphi(x', 0) = 0, \sup_{\partial Q'} |\varphi| \leq M = \sup_{\partial Q} |u|$이며 Q'에서 $|\Delta\varphi| \leq N = \sup_Q |f|$임을 알 수 있다. 다음 함수도 고려하자.

$$\psi(x', x_n) = \frac{M}{d^2}[|x'|^2 + x_n(nd - (n-1)x_n)] + N\frac{x_n}{2}(d - x_n)$$

명백히 $x_n = 0$에서 $\psi(x', x_n) \geq 0$이며 $\partial Q'$의 남은 부분에서 $\psi \geq M$이다. 또한 $\Delta\psi = -N$이다. 따라서 Q'에서 $\Delta(\psi \pm \varphi) \leq 0$이며 $\partial Q'$에서 $\psi \pm \varphi \geq -$이다. 최대 원리에 의해 Q'에서 $|\varphi(x', x_n)| \leq \psi(x', x_n)$임이 따라온다. φ와 ψ에 대한 표현에서 $x' = 0$이라 한 후 $x_n \to 0$의 극한을 취하면 다음을 얻는다.

$$|D_n u(0)| = \lim_{x_n \to 0} \left| \frac{\varphi(0, x_n)}{x_n} \right| \leq \frac{n}{d} M + \frac{d}{2} N$$

이는 $i = n$에 대한 주장된 추산 (3.15)이다. $i = 1, \ldots, n-1$에 대해서도 동일하게 증명하면 결과가 따라온다. 만약 $f = 0$이면 (3.15)는 조화함수에 대한 구배 상계 (2.31)의 (본질적으로) 다른 증명을 제공한다.

(3.15)에 의해 임의의 영역 Ω에서 $\Delta u = f$의 유계 해 u가 다음 추산을 만족시킴을 알 수 있다.

$$\sup_\Omega d_x|Du(x)| \leq C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2|f(x)|) \tag{3.16}$$

여기에서 $d_x = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$이며 $C = C(n)$이다. 만약 $x \in \Omega$이며 Q가 중심이 x이고 변의 길이가 $d = d_x/\sqrt{n}$인 입방체이면 (3.15)에 의해 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} d_x|Du(x)| &\leq C(\sup_{\partial Q} |u| + d^2 \sup_Q |f|) \\ &\leq C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_y^2|f(y)|) \end{aligned}$$

(여기에서 n에만 의존하는 상수들을 나타내기 위해 동일한 문자 C를 사용했다.)

유사한 비교 논의를 통해 위와 같은 일반성 하에서 Poisson 방정식의 해의 구배의 연속도에 대한 추산을 유도할 수 있다.

다시 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$가 입방체 Q에서의 $\Delta u = f$의 해라 하고 $M = \sup_Q |u|, N = \sup_Q |f|$라 하자. Q'이 다음에 의해 주어진 R^{n+1}에서의 영역이라 하자.

$$Q' = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) : |x_i| < d/2 \ (i = 1, \ldots, n-1), 0 < y, z < d/4\}$$

Q'에서 다음 함수를 정의하자.

$$\varphi(x', y, z) = \tfrac{1}{4}[u(x', y+z) - u(x', y-z) - u(x', -y+z) + u(x', -y-z)]$$

$n+1$개 변수 $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z$에 대한 다음의 타원형 작용소를 도입하자.

$$L \equiv \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Q'에서 $|L\varphi| \leq N$이다. 또한 Q'에서 다음이 성립한다: (i) $\varphi(x', 0, z) = \varphi(x', y, 0) = 0$ (ii) $|x_i| = d/2$ $(i = 1, \ldots, n-1)$에서 $|\varphi| \leq M$ (iii) (3.16)에 의해 M, N을 통해 주어진 Q'에서 $|Du| \leq \mu$를 만족시키는 상수 μ에 대하여 $|\varphi(x', d/4, z)| \leq \mu z, |\varphi(x', y, d/4)| \leq \mu y$이다. 이제 Q'에서 다음 형태의 비교함수를 선택하자.

$$\psi(x', y, z) = \frac{4M|x'|^2}{d^2} + \frac{4\mu}{d}yz + kyz\log\frac{2d}{y+z} \tag{3.17}$$

여기에서 k는 아직 결정되지 않은 양수 상수이다. 먼저 $\partial Q'$에서 $|\varphi| \leq \psi$임을 관찰하자. 다음이 성립하므로,

$$L\psi = \frac{8(n-1)}{d^2}M + k\left(-1 + \frac{yz}{(y+z)^2}\right) \leq \frac{8(n-1)M}{d^2} - \frac{3}{4}k$$

만약 $k \geq \frac{4}{3}(N + 8(n-1)M/d^2)$이면 $L\psi \leq -N$임을 알 수 있다. 이러한 k를 선택하면 다음 함수

$$\psi(x', y, z) = \frac{4M|x'|^2}{d^2} + yz\left(\frac{4\mu}{d} + k\log\frac{2d}{y+z}\right)$$

가 Q'에서 $L(\psi \pm \varphi) \leq 0$, $\partial Q'$에서 $\psi \pm \varphi \geq 0$을 만족시킨다. 따라서 Q'에서 $|\varphi| \leq \psi$이다. 이 부등식에서 $x' = 0$이라 하고 z로 나눈 후 $z \to 0$의 극한을 취하면 다음을 얻는다.

$$\tfrac{1}{2}|u_y(0, y) - u_y(0, -y)| = \lim_{z\to 0}\frac{|\varphi(0, y, z)|}{z} \leq \frac{4\mu}{d}y + ky\log\frac{2d}{y} \tag{3.18}$$

논의를 약간 수정하면 $|D_iu(0, x_n) - D_iu(0, -x_n)|$ $(D_i = \partial/\partial x_i, i = 1, \ldots, n-1)$에 대한 유사한 추산을 얻을 수 있다. $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-2})$에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\varphi(\hat{x}, y, z) = \tfrac{1}{4}[u(\hat{x}, y, z) - u(\hat{x}, -y, z) - u(\hat{x}, y, -z) + u(\hat{x}, -y, -z)]$$

다음 영역

$$Q' = \{(x_1, \ldots, x_{n-2}, y, z) : |x_i| < d/2 \ (i = 1, \ldots, n-2), 0 < y, z < d/2\}$$

에서 (3.17)과 유사한 다음 형태의 비교함수를 선택할 수 있다.

$$\psi(\hat{x}, y, z) = \frac{4M|\hat{x}|^2}{d^2} + yz\left(\frac{4\mu}{d} + \bar{k}\log\frac{2d}{y+z}\right)$$

여기에서 μ와 $\bar{k}$는 각각 Q'에서 $|Du| \le \mu$ 및 $\bar{k} \ge \frac{2}{3}[N + 8(n-2)M/d^2]$를 만족시키는 상수들이다. Q'에서 $\Delta(\psi \pm \varphi) \le 0$이며 $\partial Q'$에서 $\psi \pm \varphi \ge 0$임을 검증할 수 있다. 따라서 Q'에서 $|\varphi| \le \psi$이다. 위에서와 마찬가지로 이 부등식에서 $\hat{x} = 0$으로 설정한 후 y로 나누고 $y \to 0$의 극한을 취하면 다음을 얻는다.

$$\tag{3.19} \tfrac{1}{2}|D_{n-1}u(0,z) - D_{n-1}u(0,-z)| = \lim_{y\to 0}\frac{|\varphi(0,y,z)|}{y} \le \frac{4\mu}{d}z + \bar{k}z\log\frac{2d}{z}$$

D_{n-1}을 D_i $(i = 1, \dots, n-2)$로 대체하더라도 동일한 결론이 자명하게 성립한다. (3.18)에 대한 논의에서와 달리 (3.19)의 증명에서는 $\mathbb{R}^{n+1}$에서의 작용소를 새로 도입할 필요가 없었음을 기억해 두라.

이제 만약 $\mathbb{R}^n$에서의 영역 Ω에서 $\Delta u = f$이면 (3.18)과 (3.19)로부터 $|Du(x) - Du(y)|$ $(x, y \in \Omega)$에 대한 추산을 얻을 수 있다. $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), d_y = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega), d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$라 하자. $d_x \le d_y$라 가정하자. (따라서 $d_x = d_{x,y}$이다.) 먼저 $|x - y| \le d = d_x/2\sqrt{n}$이라 가정하고 x와 y를 연결하는 선분을 고려하자. 이 선분의 중심을 원점으로 선택하고 좌표계를 회전시켜 x와 y가 새로운 좌표계에서 x_n축 상에 놓인 점 $x = (0, x_n), y = (0, -x_n)$이도록 하자. 입방체 $Q = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_i| < d\ (i = 1, \dots, n)\}$은 Ω에 포함되며, Q와 $\partial\Omega$의 거리가 $d_x/2$ 초과이다. (3.16), (3.18), (3.19)를 Q에 직접 적용하면 어떠한 상수 $C = C(n)$에 대하여 다음을 얻는다.

$$d^2\frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \le C(\sup_Q |u| + d^2\sup_Q |f|)\log\frac{2d}{|x-y|}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \le C(\sup_Q |u| + \sup_Q d_x^2|f(x)|)\log\frac{d_{x,y}}{|x-y|}$$

만약 $x, y \in \Omega$가 이제 $|x - y| > d$를 만족시킨다면 (3.16)에 의해 다음이 성립한다.

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \le C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2|f(x)|)$$

이들을 조합하면 n에만 의존하는 어떠한 상수 C가 존재하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \le C(\sup_Q |u| + \sup_Q d_x^2|f(x)|)\left(\log\frac{d_{x,y}}{|x-y|} + 1\right)$$

위 결과를 정리하면 다음과 같다.

Theorem 3.9. $u \in C^2(\Omega)$가 Poisson 방정식 $\Delta u = f$의 해라 하자. 그 경우 다음이 성립하며,

$$\sup_\Omega d_x|Du(x)| \le C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2|f(x)|)$$

모든 $x, y \in \Omega, x \ne y$에 대하여 $C = C(n)$이 존재하여 다음이 성립하도록 한다.

$$\tag{3.20} d_{x,y}^2\frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \le C(\sup_Q |u| + \sup_Q d_x^2|f(x)|)\left(\log\frac{d_{x,y}}{|x-y|} + 1\right)$$

여기에서 $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$이다.

이 정리는 (증명이 초등적임에도 불구하고) 본질적으로 예리하며 추산 (3.20)을 f에 대한 추가적인 연속성 가정 없이 더 개선하는 것은 불가능하다. f가 유계인 경우 Chapter 8에서 정의된 약한 해에 대해서도 Theorem 3.9가 성립한다. (Problem 8.4를 참조하라.)

위 결과의 Hölder 연속 함수 f의 경우에 대한 확장은 Chapter 4에서 다른 방법을 통해 다뤄질 것이다. 하지만 이 절의 비교 기법을 사용하여 이러한 확장을 얻을 수도 있다. ([BR1, 2]를 참조하라.)

3.5 A Harnack Inequality (Harnack 부등식)

최대 원리는 2개 독립변수에 대한 균등타원형 작용소에 대한 일반화 Harnack 부등식의 초등적인 증명을 제공한다. $D_\rho = D_\rho(0)$이 중심이 원점이며 반경이 ρ인 열린 원판을 나타낸다 하면 이 결과를 다음과 같이 기술할 수 있다.

Theorem 3.10. u가 다음 방정식의 원판 D_R에서의 음 아닌 C^2 해라 하자.

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

또한 L이 D_R에서 균등타원형이라 하자. 그 경우 모든 점 $z = (x, y) \in D_{R/4}$에서 다음 부등식이 성립한다.

$$Ku(0) \leq u(z) \leq K^{-1}u(0) \tag{3.21}$$

여기에서 K는 **타원도(ellipticity modulus)** $\mu = \sup_D \Lambda/\lambda$에만 의존하는 상수이다.

Proof. 방정식 $Lu = 0$과 타원도 μ가 닮음변환 하에서 불변이므로 단위원판 $D = D_1$에서 정리를 증명하면 충분하다. D에서 $u \geq 0$이므로 강한 최대 원리(Theorem 3.5)에 의해 $u \equiv 0$이거나 또는 D에서 $u > 0$이다. 전자의 경우는 자명하므로 후자가 성립한다 가정하자. $u > u(0)/2$가 성립하는 점들의 집합 $G \subset D$를 고려하자. $G' \subset G$가 0을 포함하는 연결성분이라 하자. 최대 원리에 의해 $\partial G' \cap \partial D$가 공집합이 아니다. 따라서 일반성을 잃지 않고 점 $Q = (0, 1)$이 $\partial G'$에 속한다 가정할 수 있다. 함수 v_+와 v_-를 다음과 같이 정의하자.

$$v_\pm(x, y) = \pm x + \tfrac{3}{4} - k(y - \tfrac{1}{2})^2$$

여기에서 k는 양수 상수이다. 포물선 $\Gamma_\pm = \{(x, y) \in D : v_\pm(x, y) = 0\}$는 D에 속한 꼭짓점 $(\mp\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$를 가지며 공통 대칭축 $y = \frac{1}{2}$를 가진다. 만약 k가 충분히 크다면 ($k \geq 3$이면 충분하다) 영역 $P_\pm = \{(x, y) \in D : v_\pm(x, y) > 0\}$ 들의 (Γ_+, Γ_-로 둘러싸인) 교집합 $P_+ \cap P_-$가 D의 상반부에 완전히 포함된다. (Figure 1을 참조하라.) $P_\pm$에서 함수 $v_\pm$가 명백히 부등식 $0 < v_\pm < \frac{7}{4}$를 만족시킨다.

아직 결정되지 않은 양수 상수 α에 대하여 $E_\pm = \exp(\alpha v_\pm)$로 설정하면 직접적인 계산을 통해 D에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} LE_\pm &= E_\pm\{\alpha^2[a \mp 4bk(y - \tfrac{1}{2}) + 4ck^2(y - \tfrac{1}{2})^2] - 2\alpha kc\} \\ &\geq E_\pm(\alpha^2\lambda - 2\alpha k\Lambda) \\ &\geq 0 \qquad (\text{만약 } \alpha \geq 2k\mu\text{일 경우}) \end{aligned}$$

그러므로 $\alpha \geq 2k\mu$이도록 선택하면 다음 함수

$$w_\pm = (E_\pm - 1)/(e^{7x/4} - 1) \tag{3.22}$$

들이 다음 성질을 가진다:

$$D\text{에서 } Lw_\pm \geq 0, \quad \Gamma_\pm\text{에서 } w_\pm = 0, \quad P_\pm\text{에서 } 0 < w_\pm < 1$$

이제 z가 $P_+ \cap P_-$의 임의의 점이라 하자. 그 경우 다음 중 하나가 성립한다: (i) $u \geq u(0)/2$이며 $z \in \bar{G}$. (ii) z가 ($\partial U_+ \subset \Gamma_+ \cup \partial G$를 만족시키는) $P_+ - \bar{G}$의 연결성분 U_+에 속한다. (iii) z가 ($\partial U_- \subset \Gamma_- \cup \partial G$를 만족시키는) $P_- - \bar{G}$의 연결성분 U_-에 속한다. (Figure 1을 참조하라.) $P_+ \cap P_- \subset G'$이거나 또는 $\partial G'$이 $P_+ \cup P_-$를 분리해야 하므로 이것 이외의 가능성은 없다. (2차원성이 이곳에서 필수적인 방식으로 사용되었다.) (ii)와 (iii)의 경우 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} u - \tfrac{1}{2}u(0)w_\pm &= \tfrac{1}{2}u(0)(1 - w_\pm) > 0 \quad &((x, y) \in \partial G \cap \partial U_\pm) \\ u - \tfrac{1}{2}u(0)w_\pm &= u > 0 \quad &((x, y) \in \Gamma_\pm \cap \partial U_\pm) \end{aligned}$$

그러므로 $\partial U_\pm$에서 $u - \frac{1}{2}u(0)w_\pm > 0$이다. $L(u - \frac{1}{2}u(0)w_\pm) \leq 0$이므로 다음이 성립함을 알 숭 ㅣㅆ다.

$$u(z) > \tfrac{1}{2}u(0)\min(w_+(z), w_-(z)) \quad (\forall z \in P_+ \cap P_-)$$

특히 선분 $y = \frac{1}{2}, |x| \leq \frac{1}{2}$에서 다음이 성립한다.

$$u(x, \tfrac{1}{2}) > K_1 u(0) \quad (\forall x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]) \tag{3.23}$$

여기에서 K_1은 다음과 같다.

$$K_1 = \frac{1}{2}(e^{\alpha/4}-1)/(e^{7\alpha-4}-1) = \frac{1}{2}\inf_{|x|\le 1/2}[w_+(x,\tfrac{1}{2}), w_-(x,\tfrac{1}{2})]$$

이제 (3.22)에서와 같이 비교함수를 정의할 것이다. $v = y+1-6x^2$라 하고 다음 영역을 고려하자.

$$P = \{(x,y)\in D : v(x,y) > 0, y < 1/2\}$$

P는 선분 $y = \frac{1}{2}, |x| \le \frac{1}{2}$ 및 꼭짓점이 $(0,-1)$이며 점 $(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$를 통과하는 포물선 $v=0$의 호 Γ로 둘러싸여 있다. 앞에서와 같이 μ에만 의존하는 적절히 선택된 $\beta > 0$에 대하여 다음 함수

$$w = (e^{\beta v}-1)/(e^{3\beta/2}-1)$$

가 다음 성질을 가진다:

$$D\text{에서 } Lw \ge 0, \quad \Gamma\text{에서 } w = 0, \quad P\text{에서 } 0 < w < 1$$

(3.23)에 의해 ∂P에서 $u - K_1u(0)w > 0$이며 $L(u-K_1u(0)w) \le 0$이므로 최대 원리에서 다음이 따라온다.

$$u(z) > K_1u(0)w(z) \quad (\forall z \in P)$$

$D_{1/3} \subset P$이므로 $K_2 = \inf_{D_{1/3}} w$라 하면 다음을 얻는다.

$$u(z) > K_1K_2u(0) = Ku(0) \quad (\forall z \in D_{1/3}) \tag{3.24}$$

명백히 K는 μ에만 의존한다.

이제 $z \in D_{1/4}$이면 원판 $D_{3/4}(z)$는 D에 포함되며 부등식 (3.24)를 원판 $D_{1/4}(z)$에 적용하면 다음을 얻는다.

$$u(0) > Ku(z) \quad (\forall z \in D_{1/4})$$

이 부등식을 (3.24)와 조합하면 다음을 얻는다.

$$Ku(0) < u(z) < K^{-1}u(0) \quad (\forall z \in D_{1/4})$$

□

(3.21)로부터 다음이 즉시 따라온다.

$$\sup_{D_{R/4}} u \le \kappa \inf_{D_{R/4}} u$$

여기에서 $\kappa = 1/K^2$이다. Theorem 2.5에서와 같은 연쇄적 논의에 의해 $\mathbb{R}^2$에서의 임의의 영역에 대한 Harnack 부등식을 얻는다.

Corollary 3.11. Theorem 3.10의 전제조건이 영역 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$에서 성립한다 하자. 그 경우 임의의 유계 부분영역 $\Omega' \subset\subset \Omega$에 대하여 Ω, Ω', μ에만 의존하는 상수 κ가 존재하여 다음을 만족시킨다.

$$\sup_{\Omega'} u \le \kappa \inf_{\Omega'} u \tag{3.25}$$

만약 다음의 더 일반적인 타원형 방정식

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu = 0 \quad (c \le 0,\ i,j = 1,2) \tag{3.26}$$

을 고려하고 작용소 L의 계수들이 유계이며 $\lambda \ge \lambda_0 > 0$이라 가정하면 원판 D에서 Theorem 3.10이 (약간 변형하면) 여전히 유효하며 동일한 결론이 성립한다. 하지만 이제 상수 K는 μ뿐만 아니라 계수들의 D에서의 상계에 의존한다. 그러므로 반경 R의 원판에 대한 유사한 결과를 기술하면 이제 상수 K는 추가적으로 R에도 의존한다. (Problem 3.4를 참조하라.)

Harnack 부등식 (3.21)에서 다음의 Liouville 정리가 따라온다.

Corollary 3.12. 만약 방정식 $Lu = au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$이 $\mathbb{R}^2$에서 균등타원형이며 u가 아래로 유계 (또는 위로 유계) 해이고 평면 전체에서 정의되었다면 u가 상수함수이다.

Proof. $\inf u = 0$이라 가정할 수 있으며 따라서 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 어떠한 z_0가 존재하여 $u(z_0) < \varepsilon$이다. 임의의 원판 $D_{2R}(z_0)$에서 (3.21)에 의해 모든 $z \in D_R(z_0)$에 대하여 $u(z) < K\varepsilon$가 성립한다. K가 R에 독립적인 상수이므로 모든 $z \in \mathbb{R}^2$에 대하여 $u(z) < K\varepsilon$이다. $\varepsilon \to 0$의 극한을 취하면 결과가 따라온다. □

Harnack 부등식(Theorem 3.10) 및 Corollary 3.12의 고차원으로의 확장의 증명은 Chapter 9에 있다. 발산구조 방정식들에 대한 다른 Harnack 부등식들과 중요한 응용은 Chapter 8, 13에 포함되어 있다.

3.6 Operators in Divergence Form (발산구조 작용소)

발산구조(divergence form) 작용소에 대한 상황을 간략히 살펴보는 것으로 이 장을 마치겠다. 많은 경우 (3.1) 형태의 작용소보다 발산구조 작용소를 고려하는 것이 더 자연스럽다. 가장 단순한 경우는 다음과 같다.

$$Lu = D_j(a^{ij}D_i u) \tag{3.27}$$

나중에는 주부분이 발산구조인 더 일반적인 작용소들을 고려할 필요가 있다. L이 Ω에서 **타원형(elliptic)** 이라는 것의 정의는 모든 $x \in \Omega$에 대하여 계수행렬 $[a^{ij}(x)]$가 양의 정부호인 것이다.

계수 a^{ij}들이 충분히 매끄럽다면 최대 원리에 대한 결과들은 작용소 (3.28)에도 똑같이 잘 적용된다. 그러나 계수들이 매끄럽지 않거나 또는 (비선형 문제 등) 계수의 매끄러움에 관한 양적인 가정(e.g. 도함수의 상계 가정)을 하는 것이 부적절한 경우 이 장의 앞쪽 부분에서의 본질적으로 대수적인 기법들을 더 이상 적용할 수 없으므로 이들을 L의 발산구조에 대하여 더 자연스러운 적분 기법으로 대체해야만 한다.

관계식 $Lu = 0$ [resp. $\geq 0, \leq 0$]을 만족시키는 문제 $Lu = 0$의 해[resp. 하방해, 상방해]를 (3.28)에서보다 더 넓은 계수들과 함수 u들의 족에서 정의할 수 있다. 그러므로 만약 계수 a^{ij}들이 유계 가측 함수이며 $u \in C^1(\Omega)$이면 u가 Ω에서 (일반화된 의미로) $Lu = 0$ [resp. $\geq 0, \leq 0$]을 만족시킨다는 것은 모든 음 아닌 함수 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$에 대하여 다음을 만족시키는 것으로 정의한다.

$$\int_\Omega a^{ij}(x) D_i u D_j \varphi \, dx = 0 \quad [\text{resp. } \leq 0, \geq 0] \tag{3.28}$$

만약 $a^{ij} \in C^1(\Omega)$이며 $u \in C^2(\Omega)$일 경우 발산 정리를 적용하면 이것이 $Lu = 0$ [resp. $\geq 0, \leq 0$]과 동치임을 간단히 보일 수 있다. 이후 장들에서 더 넓고 더 적절한 함수공간에서 일반화 해를 정의할 것이다.

약한 최대 원리는 (3.29)에서 즉시 따라온다: u가 다음을 만족시킨다 하자.

$$\int_\Omega a^{ij} D_i u D_j \varphi \, dx \leq 0 \qquad (\forall \varphi \in C_0^1(\Omega), \varphi \geq 0) \tag{3.29}$$

그리고 주장과 반대로 $\sup_\Omega u > \sup_{\partial\Omega} u = u_0$라 가정하자. 그 경우 어떠한 상수 $c > 0$와 부분영역 $\Omega' \subset\subset \Omega$가 존재하여 이곳에서 $v = u - u_0 - c > 0$이며 $\partial\Omega'$에서 $v = 0$이도록 한다. 관계식 (3.30)은 u를 v로 대체하고 φ를 Ω'에서 v, 다른 곳에서 0인 함수로 대체해도 참이다. (이러한 방식으로 정의된 φ는 $C_0^1(\Omega)$에 속하지 않지만 이러한 φ를 $C_0^1(\Omega)$ 함수들로 접근시키는 것으로 (3.30)이 성립함을 보일 수 있다.) 다음이 성립함이 따라온다.

$$\int_{\Omega'} a^{ij} D_i v D_j v \, dx \leq 0$$

$[a^{ij}]$가 양의 정부호이므로 Ω'에서 $Dv = 0$이다. $\partial\Omega'$에서 $v = 0$이므로 Ω'에서 $v = 0$이 성립하며 이는 v의 정의에 모순이다. 이는 최대 원리를 수립한다.

나중 장들에서 발산구조 작용소에 대한 더 강하고 일반적인 최대 원리들을 제시하겠다. 이미 언급한 이러한 두 부류의 작용소들을 다루는 방식의 차이 이외에도 계수에 약한 매끄러움 조건이 있는 경우 (3.1)과 (3.28)의 작용소의 최대 원리에 관한 결과들도 종종 다르다는 사실을 언급해야 한다. 예를 들어 Lemma 3.4는 (심지어 계수들이 내부에서 임의로 매끄럽고 폐포에서 연속한 경우에도) 발산구조 균등타원형 작용소 (3.28)에 대하여 성립할 필요가 없다. (Problem 3.9를 참조하라.)

Notes (첨언)

이곳에서 증명한 경계점 보조정리(Lemma 3.4)는 Hopf [HO5]에 의한 것이다; Oleinik [OL]가 비교함수만 다르게 선택한 독립적인 증명을 했다. 이 결과는 계수에 대한 전제조건이 같으며 $\partial\Omega$가 Dini 연속 정규인 경우에도 여전히 성립한다. [KH] Lipschitz 영역을 포함하는 영역들의 족에서 성립하는 추가적인 확장은 이러한 영역에서의 Neumann 문제의 유일성을 제공한다. [ND] Lemma 3.4는 일반적으로 (계수들이 경계점에서 연속하더라도) 강한 균등타원형 발산구조 작용소에 대하여 거짓이다. (Problem 3.9를 참조하라.) 그러나 만약 계수들이 근방에서 Hölder 연속하면 참이다. (Finn-Gilbarg [FG1])

내부구 조건 대신 내부뿔 조건을 만족시키는 영역에 대한 Lemma 3.4와 유사한 결과들은 Oddson [OD]과 Miller [ML1, 3]가 밝혀냈다. 이들은 (3.11) 및 $|x - x_0|$ 대신 $|x - x_0|^\mu$를 포함하는 더 정밀한 결과를 증명했다. (지수 μ는 뿔의 각도와 타원도 상수에만 의존한다; 여기에서 벡터 $x - x_0$는 x_0를 꼭짓점으로 가지는 주어진 내부뿔의 고정된 부분뿔 내에 속한다.) 이러한 본질적으로 예리한 결과들은 Pucci [PU2]의 극값 타원형 작용소에 의존한다.

Theorem 3.5의 일반성을 가지는 최대 원리는 Hopf [HO1]에 의해 처음으로 증명되었다. 더 제한적인 전제조건들을 가지는 앞선 결과들을 위해서는 [PW]의 참고문헌 목록(p. 156)을 참조하라. 이곳에는 최대 원리의 다양한 확장에 관한 논의도 있다. 이들 중 일부를 Chapter 8, 9에서 고려할 것이다.

Section 3.4는 Brandt [BR1, 2]의 발상에 기반한다. 그는 Chapter 4, 6의 심화 추산을 포함하는 2계 타원형 및 포물형 방정식의 고전해에 관한 선형 이론의 대부분을 최대 원리를 사용하는 비교 논의를 통해 유도할 수 있음을 보였다. Section 3.4에서와 마찬가지로 이러한 기법은 차분계수의 (따라서 도함수의) 추산을 위해 적절한 (그리고 일반적으로 자명하지 않은) 비교함수의 선택을 요구한다.

Harnack 부등식(Theorem 3.10)과 몇 가지 확장은 Serrin [SE1]에 의한 것이다. 이는 최대 원리에 기반한 Harnack 부등식의 첫 번째 증명인 듯하다. Bers and Nirenberg [BN]는 완전히 다른 더 심오한 방법을 통해 매우 유사한 결과를 유도했다.

Liouville 정리(Corollary 3.12)는 양 아닌 곡률 곡면에서 임의의 타원형 방정식 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$의 전체해 u 중 $r \to \infty$에서 $u = o(r)$인 것이 상수함수여야 한다는 Bernstein의 기하학적 정리([HO4]를 참조하라)와 관련이 있다. 특히 흥미로운 사실은 방정식이 점별로 타원형이기만 하면 된다는 것이다. 이러한 일반성에서는 Corollary 3.12가 더 이상 성립하지 않음을 반례를 통해 보일 수 있다. Bernstein의 결과도 최대 원리에 기반하지만 논의 방식이 상당히 다르며 더 기하학적이다.

Problems (연습문제)

4 | Poisson's Equation and the Newtonian Potential (Poisson 방정식과 Newton 퍼텐셜)