Introduction to Riemannian Manifolds (Riemann 다양체 입문)

Version 1.0

Author : John M. Lee

2nd Edition · Translated by Dyne

Dec 19, 2023

Contents (목차)

1 | What Is Curvature? (곡률이란 무엇인가?)

2 | Riemannian Metrics (Riemann 계량)

이 장에서 우리는 Riemann 계량을 공식적으로 정의하고 여기에 연관된 기본적인 계산 기법들을 논의하겠다. 정의 이후에 우리는 다른 Riemann 다양체의 부분다양체, 곱, 몫으로서 Riemann 다양체를 구축하는 몇 가지 표준적인 방법들을 기술할 것이다. 그 후 우리는 Riemann 계량에 의해 제공되는 몇 가지 기초적인 기하학적 구축을 소개할 것이다. 이들 중 가장 중요한 것은 Riemann 거리함수이며, 이는 모든 연결 Riemann 다양체를 거리공간으로 만든다.

이 장의 마지막 부분에서는 Riemann 계량의 몇 가지 중요한 일반화를 다룰 것이다. 이들 중 가장 중요한 것은 준-Riemann 계량이며, 열-Riemann 계량과 Finsler 계량도 간단히 언급할 것이다.

독자는 이 장을 읽기 전에 Chapter 12 이후의 3개 부록들을 읽고 이 책 전체에서 사용될 선행지식들을 이해해야 한다.

Definitions (정의)

$\mathbb{R}^n$에서의 Euclid 기하학에 대하여 우리가 아는 것은 전부 $\mathbb{R}^n$의 **점곱(dot product)**으로부터 유도될 수 있다. 이는 $v = (v^1, \ldots, v^n)$과 $w = (w^1, \ldots, w^n)$에 대하여 다음에 의해 정의된다.

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

점곱은 임의의 벡터 공간으로의 자연스러운 일반화를 가진다. 벡터 공간 (항상 실 벡터 공간이라 가정하겠다) V가 주어진 경우 **V에서의 내적(inner product on V)**은 전형적으로 $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$로 표기되는 사상 $V \times V \to \mathbb{R}$으로 모든 $v, w, x \in V$와 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 다음 성질들을 가지는 것이다:

(i) **대칭성(symmetry):** $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
(ii) **쌍선형성(bilinearity):** $\langle av + bw, x \rangle = a \langle v, x \rangle + b \langle w, x \rangle = \langle x, av + bw \rangle$
(iii) **양의 정부호성(positive definiteness):** $\langle v, v \rangle \geq 0$이며 등호가 성립할 필요충분조건은 $v = 0$이다.

특정한 내적이 부여된 벡터 공간은 **내적 공간(inner product space)**이라 불린다.

V에서의 내적은 벡터의 길이와 벡터들 간의 각도 등의 기하학적 양을 정의할 수 있도록 해 준다. 먼저 벡터 $v \in V$의 **길이(length)** 또는 **노름(norm)**을 다음과 같이 정의한다.

$$|v| = \langle v, v \rangle^{1/2} \tag{2.1}$$

다음 항등식은 모든 벡터의 길이에 대한 정보로부터 내적이 완전히 결정됨을 보여준다.

Lemma 2.1 (Polarization Identity (극화 항등식))**.** $\langle \cdot, \cdot \rangle$가 벡터 공간 V에서의 내적이라 하자. 그 경우 모든 $v, w \in V$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\langle v, w \rangle = \tfrac{1}{4}(\langle v + w, v + w \rangle - \langle v - w, v - w \rangle) \tag{2.2}$$

► **Exercise 2.2.** 위 보조정리를 증명하라.

2개의 0이 아닌 벡터 $v, w \in V$ 사이의 **각도(angle)**는 다음을 만족시키는 유일한 $\theta \in [0, \pi]$로 정의된다.

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|} \tag{2.3}$$

두 벡터 $v, w \in V$가 **직교(orthogonal)**함은 $\langle v, w \rangle = 0$인 것이다. 이는 각도가 $\pi/2$이거나 또는 두 벡터 중 하나 이상이 0임을 의미한다. 만약 $S \subseteq V$가 선형 부분공간이면 S의 모든 벡터와 직교하는 V에 속한 벡터들의 집합 $S^\perp$도 선형 부분공간이며 S의 **직교여공간(orthogonal complement)**이라 불린다.

벡터 $v_1, \ldots, v_k$가 **정규직교(orthonormal)**함은 이들이 모두 길이 1이며 쌍마다 직교한 것이다. 또는 이와 동치로 $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$인 것이다. (여기에서 δ_{ij}는 Appendix B에서 정의된 **Kroneker 델타 기호(Kroneker delta symbol)**이다; (B.1)을 참조하라.) 다음의 잘 알려진 명제는 모든 유한 차원 내적 공간이 정규직교기저를 가짐을 보여준다.

Proposition 2.3 (Gram-Schmidt Algorithm (Gram-Schmidt 알고리즘))**.** V가 n차원 내적 공간이며 $(v_1, \ldots, v_n)$이 V에 대한 임의의 순서기저라 하자. 그 경우 다음 조건을 만족시키는 순서 정규직교기저 $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$이 존재한다:

$$\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_k) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k) \qquad (\forall k = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Proof. 기저벡터 $b_1, \ldots, b_n$은 재귀적으로 다음과 같이 정의된다.

$$b_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \tag{2.5}$$

$$b_j = \frac{v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, b_i \rangle b_i}{\left| v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, b_i \rangle b_i \right|} \qquad (2 \le j \le n) \tag{2.6}$$

$v_1 \neq 0$이며 각각의 $j \geq 2$에 대하여 $v_j \notin \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{j-1})$이므로 분모는 항상 0이 아니다. 구축에 의해 이러한 벡터들은 (2.4)를 만족시키며 직접적인 계산에 의해 정규직교이다. □

만약 두 벡터공간 V, W에 각각 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$와 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$로 표기되는 내적이 부여되었다면 사상 $F : V \to W$가 **선형 등장사상(linear isometry)**임은 내적을 보존하는 벡터 공간 동형사상인 것이다: $\langle F(v), F(v') \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V$. 만약 V와 W가 n차원 내적 공간이며 V의 임의의 정규직교기저 $(v_1, \ldots, v_n)$과 W의 임의의 정규직교기저 $(w_1, \ldots, w_n)$이 주어졌다면 $F(v_i) = w_i$에 의해 결정된 선형 사상 $F : V \to W$가 선형 등장사상임을 간단히 보일 수 있다. 그러므로 동일한 유한한 차원을 가지는 모든 내적 공간들은 서로 선형 등장적이다.

Riemannian Metrics (Riemann 계량)

이러한 기하학적 발상을 추상적 미분다양체로 확장하기 위해 각각의 접공간에서 내적을 미분적으로 선택하는 것과 마찬가지인 구조를 정의할 것이다.

M이 미분다양체라 하자. M에서의 **Riemann 계량(Riemannian metric)**은 공변 미분 2-텐서장 $g \in \mathscr{T}^2(M)$ 중 각각의 $p \in M$에서 값 g_p가 T_pM에서의 내적인 것이다; 그러므로 g는 (각각의 $p \in M$과 각각의 $v \in T_pM$에 대하여 $g_p(v, v) \geq 0$이며 등호가 성립할 필요충분조건이 $v = 0$이라는 의미로) 양의 정부호 대칭 2-텐서장이다. **Riemann 다양체(Riemannian manifold)**는 미분다양체 M 및 M에서의 특정한 Riemann 계량 g의 쌍 (M, g)이다. 만약 M에 특정한 Riemann 계량이 부여되었음을 이해했다면 때로는 "M이 Riemann 다양체이다"라고 말하기도 한다.

다음 명제는 Riemann 계량이 매우 풍부하게 존재함을 보여준다.

Proposition 2.4. 모든 미분다양체는 Riemann 계량을 가진다.

▶ **Exercise 2.5.** 단위 분할을 이용하여 위 명제를 증명하라.

우리는 이 장에서 Riemann 계량의 예시를 다수 제시할 것이며 다음 장에서 이들을 구축하는 여러 체계적 방법들을 제시할 것이다.

만약 M이 미분경계다양체이면 M에서의 Riemann 계량도 정확히 같은 방식으로 정의된다: 모든 곳에서 양의 정부호인 미분 대칭 2-텐서장 g. **Riemann 경계다양체(Riemannian manifold with boundary)**는 미분경계다양체 M과 M에서의 Riemann 계량 g의 쌍 (M, g)이다. 이 책에서 논의할 다수의 결과들은 동일한 증명에 의해 경계/무경계다양체에 대하여 모두 잘 성립하며, 이 경우 우리는 이러한 일반성으로 기술할 것이다. 그러나 경계의 취급이 추가적인 어려움을 수반할 경우 우리는 일반적으로 주요 관심사인 무경계다양체로 주의를 제한할 것이다. Riemann 경계다양체를 수반하는 많은 문제들은 더 큰 무경계다양체로 매장한 후 Riemann 계량을 더 큰 다양체로 임의로 확장하는 것으로 다룰 수 있다; Appendix A의 Propositon A.31을 참조하라.

Riemann 계량은 거리공간의 거리함수(metric)과 같은 것이 아니다.[1] (그러나 이 장의 뒤쪽에서 두 개념이 서로 관련있음을 보게 될 것이다.) 이 책에서 등장하는 '계량(metric)'이라는 단어는 명시적으로 부정하지 않는 한 항상 Riemann 계량을 의미한다.

[1] 역주: 이를 나타내기 위해 서로 다른 번역어를 사용했다.

g가 미분경계/무경계다양체 M에서의 Riemann 계량이라 하자. 각각의 $p \in M$에 대하여 g_p가 T_pM에서의 내적이므로 우리는 $v, w \in T_pM$에 대한 다음의 각진 괄호 표기법을 사용할 것이다:

$$\langle v, w \rangle_g = g_p(v, w)$$

이러한 내적을 사용하면 접벡터의 길이, 0이 아닌 두 접벡터 사이의 각도, 접벡터의 직교성을 위에서와 같이 정의할 수 있다. 벡터 $v \in T_pM$의 길이는 $|v|_g = \langle v, v \rangle_g^{1/2}$로 표기된다. 만약 계량이 무엇인지를 알고 있다면 이를 표기법에서 생략하고 $\langle v, w \rangle_g$와 $|v|_g$ 대신 $\langle v, w \rangle$와 $|v|$로 표기한다.

Riemann 기하학의 시작점은 다음의 기본적인 예시이다.

Example 2.6 (The Euclidean Metric (Euclid 계량)). **Euclid 계량(Euclidean metric)**은 각 점 $x \in \mathbb{R}^n$에서 (자연스러운 동일시 $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ 하에서) $T_x\mathbb{R}^n$의 통상적인 점곱을 값으로 가지는 $\mathbb{R}^n$에서의 Riemann 계량 $\bar{g}$이다. 이는 각각의 $v, w \in T_x\mathbb{R}^n$에 대하여 표준좌표계 $(x^1, \dots, x^n)$ 하에서 $v = \sum_i v^i \partial_i|_x, w = \sum_j v^j \partial_j|_x$로 표현하면 다음이 성립함을 의미한다.

$$\langle v, w \rangle_{\bar{g}} = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

$\mathbb{R}^n$을 Riemann 다양체로 간주할 경우 명시적으로 부정하지 않는 한 Euclid 계량을 사용한다 가정할 것이다.

Isometries (등장사상)

(M, g)와 $(\tilde{M}, \tilde{g})$가 Riemann 경계/무경계다양체라 하자. **(M, g)에서 $(\tilde{M}, \tilde{g})$로의 등장사상(isometry from (M, g) to $(\tilde{M}, \tilde{g})$)**은 미분동형사상 $\varphi : M \to \tilde{M}$ 중 $\varphi^* g = \tilde{g}$를 만족시키는 것이다. 이는 풀어서 해석하면 φ가 전단사 미분사상이며 각각의 미분 $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\tilde{M}$이 선형 등장사상임과 동치이다. (M, g)와 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 간에 등장사상이 존재하면 이들이 **등장적(isometric)**이라 한다.

등장사상들의 합성과 등장사상의 역은 다시 등장사상이다. 그러므로 '등장적' 관계는 Riemann 경계/무경계다양체의 족에서의 동치 관계이다. 우리의 학문인 **Riemann 기하학(Riemannian geometry)**은 주로 등장사상 하에서 보존되는 Riemann 다양체의 성질에 대한 학문이다.

만약 (M, g)와 $(\tilde{M}, \tilde{g})$가 Riemann 다양체이면 사상 $\varphi : M \to \tilde{M}$이 **국소등장사상(local isometry)**임은 각각의 점 $p \in M$에 대하여 근방 U가 존재하여 $\varphi|_U$가 U에서 $\tilde{M}$의 열린 부분집합으로의 등장사상이도록 하는 것이다.

► **Exercise 2.7.** 만약 (M, g)와 $(\tilde{M}, \tilde{g})$가 동일한 차원의 Riemann 다양체이면 미분사상 $\varphi : M \to \tilde{M}$이 국소등장사상일 필요충분조건은 $\varphi^* \tilde{g} = g$인 것임을 보여라.

n-Riemann 다양체가 **평탄(flat)**하다는 것의 정의는 국소적으로 Euclid 공간과 등장적인 것이다. 즉 모든 점이 Euclid 계량을 가지는 $\mathbb{R}^n$에서의 열린집합과 등장적인 근방을 가진다. Problem 2-1은 모든 1-Riemann 다양체가 평탄함을 보여준다; 그러나 고차원의 경우에는 이것이 성립하지 않음을 나중에 보게 될 것이다.

(M, g)에서 자신으로의 등장사상을 **(M, g)의 자기등장사상(isometry of (M, g))**이라 한다. (M, g)의 모든 자기등장사상들의 집합은 합성 하에서 군을 형성한다; 이는 **(M, g)의 자기등장사상군(isometry group of (M, g))**이라 불리며 $\mathrm{Iso}(M, g)$, 또는 계량이 알려진 경우에는 $\mathrm{Iso}(M)$으로 표기한다.

Sumner B. Myers와 Norman E. Steenrod [MS39]의 심오한 정리는 M이 유한 개 연결성분들을 가지면 $\mathrm{Iso}(M)$의 적절한 위상과 미분구조가 존재하여 그 하에서 $\mathrm{Iso}(M)$이 M에 미분작용하는 유한 차원 Lie 군이 된다는 사실을 보여준다. 우리는 Myers-Steenrod 정리를 증명하지도 사용하지도 않을 것이지만 독자가 관심이 있다면 [Kob72]에 수록된 증명을 참조하라.

Local Representaitons for Metrics (계량의 국소 표현)

(M, g)가 Riemann 경계/무경계다양체라 하자. 만약 $(x^1, \dots, x^n)$이 어떠한 열린 부분집합 $U \subseteq M$에서의 임의의 미분국소좌표계이면 n^2개 미분함수 g_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$들을 통해 g를 U에서 국소적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \tag{2.7}$$

(이곳에서와 앞으로 이 책에서 우리는 Einstein 합 관습을 사용한다; p. 375를 참조하라.) 이러한 텐서장의 성분함수들은 $g_{ij}(p) = \langle \partial_i|_p, \partial_j|_p \rangle$에 의해 특성화되는 행렬 값 함수 (g_{ij})를 형성한다. (여기에서 $\partial_i = \partial / \partial x^i$는 i번째 좌표벡터장이다.) 이는 i, j에 대하여 대칭적이며 $p \in U$에 대한 미분함수이다. 만약 $v = v^i \partial_i|_p$가 T_pM에서의 벡터이며 $g_{ij}(p) v^j = 0$을 만족시킨다면 $\langle v, v \rangle = g_{ij}(p) v^i v^j = 0$임이 따라오며 이는 $v = 0$

임을 함의한다; 그러므로 행렬 $(g_{ij}(p))$는 항상 비특이이다. g에 대한 표기법은 대칭곱을 이용하여 표현하는 것으로 축약할 수 있다 (Appendix B를 참조하라): g_{ij}의 대칭성을 이용하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} g &= g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j \\ &= \tfrac{1}{2}(g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j + g_{ji}\ dx^i \otimes dx^j) \\ &= \tfrac{1}{2}(g_{ij}\ dx^i \otimes dx^j + g_{ji}\ dx^j \otimes dx^i) \\ &= g_{ij}\ dx^i\ dx^j \end{aligned}$$

예를 들어 $\mathbb{R}^n$에서의 Euclid 계량(Example 2.6)은 표준좌표계에서 여러 방식으로 표현될 수 있다:

$$\bar{g} = \sum_i dx^i\ dx^i = \sum_i (dx^i)^2 = \delta_{ij}\ dx^i\ dx^j \tag{2.8}$$

이러한 좌표계에서 $\bar{g}$의 행렬은 $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$이다.

더 일반적으로, 만약 $(E_1, \ldots, E_n)$이 어떠한 열린 부분집합 $U \subseteq M$에서의 TM에 대한 임의의 미분국소틀이며 $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$이 이와 쌍대인 쌍대틀이면 g를 U에서 국소적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g = g_{ij}\varepsilon^i\varepsilon^j \tag{2.9}$$

여기에서 $g_{ij}(p) = \langle E_i\,|_p, E_j\,|_p\rangle$이며 행렬 값 함수 (g_{ij})는 앞에서와 같이 대칭 미분함수이다.

Riemann 계량 g가 벡터장 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$에 작용하면 실수 값 함수 $\langle X, Y\rangle$를 얻는다. 임의의 미분국소틀에서 이러한 함수는 국소적으로 $\langle X, Y\rangle = g_{ij}X^iY^j$로 표현되며 따라서 미분함수이다. 마찬가지로 우리는 음 아닌 실수 값 함수 $|X| = \langle X, X\rangle^{1/2}$를 얻는다. 이는 모든 곳에서 연속하며 $X \neq 0$인 열린 부분집합에서 미분함수이다.

M에 대한 국소틀 (E_i)가 **정규직교틀(orthonormal frame)**이라는 것의 정의는 각각의 $p \in U$에 대하여 벡터 $E_1|_p, \ldots, E_n|_p$가 T_pM에 대한 정규직교기저를 형성하는 것이다. 이와 동치로 (E_i)가 정규직교틀일 필요충분조건은 다음이 성립하는 것이다:

$$\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$$

이 경우 g는 다음의 국소 표현을 가진다.

$$g = (\varepsilon^1)^2 + \cdots + (\varepsilon^n)^2$$

여기에서 $(\varepsilon^i)^2$는 대칭곱 $\varepsilon^i\varepsilon^i = \varepsilon^i \otimes \varepsilon^i$를 나타낸다.

Proposition 2.8 (Existence of Orthonormal Frames (정규직교틀의 존재성))**.** (M, g)가 n-Riemann 경계/무경계다양체라 하자. 만약 (X_j)가 TM에 대한 임의의 미분국소틀이며 부분집합 $U \subseteq M$ 상에서 정의되었다면 U 상에서의 미분정규직교틀 (E_j)가 존재하여 각각의 $k = 1, \ldots, n$과 각각의 $p \in U$에 대하여 $\operatorname{span}(E_1|_p, \ldots, E_k|_p) = \operatorname{span}(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$이도록 한다. 특히 모든 $p \in M$에 대하여 p의 어떠한 근방에서 정의된 미분정규직교틀 (E_j)가 존재한다.

Proof. 각각의 $p \in U$에 대하여 Gram-Schmidt 알고리즘을 벡터 $(X_1|_p, \ldots, X_n|_p)$에 적용하면 정리에서 제시된 선형생성 조건을 만족시키는 U 상에서의 정규직교 거친 벡터장들의 순서 n조 $(E_1, \ldots, E_n)$을 얻는다. (2.5)-(2.6)의 분모에서 등장하는 노름들은 소멸하지 않으므로 이러한 공식은 각각의 벡터장 E_j들이 미분벡터장임을 보여준다. 명제의 마지막 진술은 이러한 구축을 p의 근방에서의 임의의 미분국소틀에 적용하면 따라온다. □

경고: 초보자가 흔히 저지르는 실수로 **좌표틀(coordinate frame)** (∂_i)가 정규직교틀이도록 하는 p 근처에서의 좌표계를 찾을 수 있다 가정하는 것이다. 사실 이는 계량이 *평탄*할 경우에만 (즉 국소적으로 Euclid 계량과 등장적일 경우에만) 가능함을 Chapter 7에서 보게 될 것이다.

Riemann 경계/무경계다양체 (M, g)에 대하여 **단위접다발(unit tangent bundle)**을 단위벡터들로 구성된 부분집합 $UTM \subseteq TM$으로 정의한다:

$$UTM = \{(p, v) \in TM : |v|_g = 1\} \tag{2.10}$$

Proposition 2.9 (Properties of the Unit Tangent Bundle (단위접다발의 성질))**.** 만약 (M, g)가 Riemann 경계/무경계다양체이면 그 단위접다발 UTM은 TM에서의 여차원 1의 진 매장 부분미분경계다양체이며 ($\pi : UTM \to M$이 정준 사영이라 하면) $\partial(UTM) = \pi^{-1}(\partial M)$을 만족시킨다. 단위접다발이 연결일 필요충분조건은 M이 연결인 것이며 단위접다발이 컴팩트할 필요충분조건은 M이 컴팩트한 것이다.

► **Exercise 2.10.** 국소정규직교틀을 이용하여 위 명제를 증명하라.

Methods for Constructing Riemannian Metrics (Riemann 계량을 구축하는 방법)

3 | Model Riemannian Manifolds (Riemann 다양체의 전형적 예시)

Riemann 다양체의 일반적 이론을 탐구하기 전에 잠시 멈춰 다수의 'Riemann 다양체의 전형적 예시'들을 도입하는 것으로 내용을 설명하고 일반적 이론에 대한 동기를 부여할 것이다. 이러한 다양체들은 고도의 대칭성을 가진다는 것이 특징이다.

가장 대칭적인 예시인 Euclid 공간, 구, 쌍곡공간 등을 기술하는 것으로 시작하겠다. 우리는 이들을 자세히 분석하고 이들이 각각 매우 큰 자기등장사상군을 가짐을 증명하겠다: 임의의 한 점을 임의의 다른 점으로 대응시키는 자기등장사상이 존재하며, 심지어 한 점에서의 임의의 정규직교기저를 다른 점에서의 임의의 정규직교기저로 대응시키는 등장사상도 찾을 수 있다. Chapter 8에서 이것이 이러한 다양체들의 곡률에 대한 강한 결과를 가짐을 보게 될 것이다.

이러한 매우 특수한 예시들을 도입한 후에는 대칭을 가지는 더 일반적인 Riemann 다양체들의 족을 탐색할 것이다 - Lie 군에서의 불변 계량, 동차공간, 대칭공간.

이 장의 마지막 부분에서 준-Riemann 다양체에 대한 유사한 예시들을 간단히 소개할 것이다. 특히 Lorentz 다양체의 경우 이들은 일반상대론에서 중요하게 사용되는 공간인 Minkowski 공간, de Sitter 공간, 반-de Sitter 공간이다.

Symmetries of Riemannian Manifolds (Riemann 다양체의 대칭)

우리가 이 장에서 도입하고자 하는 Riemann 다양체들의 주요 특성은 이들이 모두 (큰 자기등장사상군을 가진다는 의미로) 고도의 대칭성을 가진다는 것이다.

(M,g)가 Riemann 다양체라 하자. $\mathrm{Iso}(M,g)$가 M의 모든 자기등장사상들의 합성 하에서의 군을 의미함을 상기하라. (M,g)가 **동차 Riemann 다양체(homogeneous Riemannian manifold)**라는 것의 정의는 $\mathrm{Iso}(M,g)$가 M에 추이적으로 작용하는 것이다. i.e. 임의의 점 $p,q\in M$에 대하여 자기등장사상 $\varphi: M\to M$이 존재하여 $\varphi(p)=q$를 만족시킨다.

자기등장사상군은 단순히 M에 작용하는 것보다 더 많은 일을 한다. 모든 $\varphi\in\mathrm{Iso}(M,g)$에 대하여 대역적 미분 $d\varphi$는 TM을 자신으로 대응시키며 각각의 $p\in M$에 대하여 선형 등장사상 $d\varphi_p: T_pM\to T_{\varphi(p)}M$으로 제한된다.

점 $p\in M$이 주어진 경우 $\mathrm{Iso}_p(M,g)$가 **p에서의 부동부분군(isotropy subgroup at p)**, 즉 p를 고정하는 자기등장사상들로 구성된 $\mathrm{Iso}(M,g)$의 부분군이라 하자. 각각의 $\varphi\in\mathrm{Iso}_p(M,g)$에 대하여 선형 사상 $d\varphi_p$가 T_pM을 자신으로 대응시키며 $I_p(\varphi)=d\varphi_p$에 의해 주어진 사상 $I_p:\mathrm{Iso}_p(M,g)\to\mathrm{GL}(T_pM)$이 $\mathrm{Iso}_p(M,g)$의 **부동 표현(isotropy representation)**이라 불리는 표현이다. M이 **p에서 부동(isotropic at p)**임을 $\mathrm{Iso}_p(M,g)$의 부동 표현이 T_pM에서의 단위 벡터들의 집합에 추이적으로 작용하는 것으로 정의한다. 만약 M이 모든 점에서 부동이면 간단히 M이 **부동(isotropic)**이라 한다.

부동보다 더 강한 형태의 대칭성도 존재한다. $\mathrm{O}(M)$이 M의 모든 접공간에 대한 모든 정규직교기저들의 집합을 나타낸다 하자:

$$\mathrm{O}(M)=\coprod_{p\in M}\{T_pM\text{에 대한 정규직교기저}\}$$

자기등장사상 φ의 미분이 p에서의 정규직교기저를 $\varphi(p)$에서의 정규직교기저로 미는 것을 통해 정의된 $\mathrm{Iso}(M,g)$의 $\mathrm{O}(M)$에서의 유도 작용이 존재한다:

$$\varphi\cdot(b_1,\dots,b_n)=(d\varphi_p(b_1),\dots,d\varphi_p(b_n)) \tag{3.1}$$

만약 이러한 유도된 작용이 $\mathrm{O}(M)$에서 추이적이면 (M,g)가 **틀동차(frame-homogeneous)**라 한다. 다른 말로 하면 임의의 $p,q\in M$과 p,q에서의 정규직교기저의 임의의 선택에 대하여 p를 q로 대응시키고 p에서의 선택된 정규직교기저를 q에서의 선택된 정규직교기저로 대응시키는 자기등장사상이 존재한다. (경고:

[Boo86], [dC92], [Spi79] 등 일부 저자들은 우리가 틀동차라고 부르는 성질을 나타내기 위해 용어 *부동*을 사용한다.)

Proposition 3.1. (M, g)가 Riemann 다양체라 하자.

(a) 만약 M이 한 점에서 부동이며 동차이면 M이 부동이다.
(b) 만약 M이 틀동차이면 M이 부동이며 동차이다.

Proof. Problem 3-3. □

동차 Riemann 다양체는 기하학적으로 모든 점에서 동일한 것처럼 보이며, 부동 Riemann 다양체는 모든 방향에서 동일한 것처럼 보인다. 부동 Riemann 다양체가 자동적으로 동차임이 밝혀진다; 그러나 Riemann 다양체는 부동이 아니더라도 한 점에서 부동일 수 있으며 (예를 들어 유도 계량을 가지는 $\mathbb{R}^3$에서의 포물면 $z = x^2 + y^2$) 어떤 점에서도 부동이 아니지만 동차일 수 있고 (예를 들어 Problem 3-10에서 논의할 $\mathbb{S}^3$에서의 Berger 계량) 동차이고 부동이지만 틀동차가 아닐 수 있다. (예를 들어 Example 2.30에서 논의한 복소사영평면에서의 Fubini-Study 계량) 이러한 주장의 증명을 위해서는 측지선과 곡률에 대한 이론을 개발할 때까지 기다려야 한다. (Problems 6-18, 8-5, 8-16, 8-13을 참조하라.)

Chapter 1에서 언급한 것과 같이 Myers-Steenrod 정리는 $\mathrm{Iso}(M, g)$가 항상 M에 미분작용하는 Lie 군임을 보여준다. 우리가 이러한 결과를 사용하지는 않을 것이지만 많은 경우에 자기등장사상군의 일부로서 등장하는 Lie 군의 미분작용을 식별할 수 있으며 몇몇 경우에는 이것이 자기등장사상군 전체임을 증명할 수 있다.

Euclidean Spaces (Euclid 공간)

가장 간단하고 가장 중요한 Riemann 다양체의 예시는 물론 **n차원 Euclid 공간(n-dimensional Euclidean space)**, 즉 (2.8)에 의해 주어진 Euclid 계량 $\bar{g}$를 가지는 $\mathbb{R}^n$이다.

더 일반적으로, 만약 V가 임의의 n차원 실 내적 공간이면 임의의 $p \in V$와 임의의 $v, w \in T_pV \cong V$에 대하여 $g(v, w) = \langle v, w \rangle$로 설정할 수 있다. V의 정규직교기저 $(b_1, \ldots, b_n)$을 선택하면 $(x^1, \ldots, x^n)$을 $x^i b_i$로 대응시키는 $\mathbb{R}^n$에서 V로의 기반 동형사상을 얻는다; 이것이 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$에서 (V, g)로의 등장사상이며 따라서 모든 n차원 내적 공간이 Riemann 다양체로서 서로 등장적임을 알 수 있다.

Riemann 다양체 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$의 자기등장사상들을 간단히 구축할 수 있다: 예를 들어 모든 직교 선형변환 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$과 모든 평행이동 $x \mapsto b + x$가 Euclid 계량을 보존한다. 먼저 직교사상 A를 적용하고 b만큼 평행이동하여 얻어진 $x \mapsto b + Ax$ 형태의 모든 사상이 자기등장사상임이 따라온다.

이러한 형태의 모든 자기등장사상들이 $\mathbb{R}^n$에 미분작용하는 Lie 군을 형성함을 알 수 있다. $\mathbb{R}^n$을 덧셈 하에서의 Lie 군으로 간주하고 $\theta : \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 $\mathrm{O}(n)$의 $\mathbb{R}^n$에서의 자연스러운 작용이라 하자. **Euclid 군(Euclidean group)** $\mathrm{E}(n)$을 이러한 작용에 의해 결정된 반직접곱 $\mathbb{R}^n \rtimes_\theta \mathrm{O}(n)$으로 정의하자: 이는 기반 다양체가 곱공간 $\mathbb{R}^n \times \mathrm{O}(n)$이며 곱셈이 $(b, A)(b', A') = (b + Ab', AA')$인 Lie 군이다. (Example C.12를 참조하라.) 이는 다음과 같이 블록 형태로 정의된 사상 $\rho : \mathrm{E}(n) \to \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{R})$에 의해 주어진 충실한 표현을 가진다.

$$\rho(b, A) = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

여기에서 b를 $n \times 1$ 열행렬로 간주했다.

Euclid 군은 다음에 의해 $\mathbb{R}^n$에 작용한다.

$$(b, A) \cdot x = b + Ax \tag{3.2}$$

Problem 3-1은 $\mathbb{R}^n$에 Euclid 계량을 부여하면 이러한 작용이 등장사상에 의한 작용이며 $\mathrm{O}(n)$에서의 유도된 작용이 추이적임을 보여준다. (나중에 우리는 이것이 사실 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$의 자기등장사상군 전체임을 보일 것이다 - Problem 5.11을 참조하라 - 그러나 지금은 이러한 사실이 필요하지 않다.) 그러므로 각각의 Euclid 공간은 틀동차이다.

Spheres (구)

우리가 소개할 Riemann 다양체의 예시들의 두 번째 족은 각각의 양의 실수마다 하나씩 대응된 다양체들의 족이다. $R > 0$이 주어진 경우 $\mathbb{S}^n(R)$이 $\mathbb{R}^{n+1}$에서의 중심이 원점이며 반경이 R인 구에 $\mathbb{R}^{n+1}$의 Euclid 계량에서 유도된 **반경 R의 표준구계량(round metric of radius R)** $\mathring{g}_R$이 부여된 것이라 하자. $R = 1$일 경우 이는 Example 2.13에서 소개한 $\mathbb{S}^n$의 표준구계량이며 우리는 $\mathring{g} = \mathring{g}_1$로 표기할 것이다.

구에 대하여 가장 먼저 알아차릴 수 있는 사실들 중 하나는 이들이 Euclid 공간과 같이 고도의 대칭성을 가진다는 것이다. 우리는 직교군 $\mathrm{O}(n+1)$의 $\mathbb{R}^{n+1}$에서의 작용이 $\mathbb{S}^n(R)$과 Euclid 계량을 보존하며 따라서 이들의 $\mathbb{S}^n(\mathbb{R})$로의 제한이 구에 등장사상으로서 작용한다는 사실을 관찰하는 것으로 $\mathbb{S}^n(R)$의 자기등장사상들로 구성된 거대한 군을 제시할 수 있다. (Problem 5-11은 이것이 자기등장사상군 전체임을 보여줄 것이다.)

Proposition 3.2. 군 $\mathrm{O}(n+1)$은 $\mathrm{O}(\mathbb{S}^n(R))$에 추이적으로 작용하며 따라서 각각의 표준구는 틀동차이다.

Proof. 주어진 임의의 $p \in \mathbb{S}^n(R)$과 $T_p\mathbb{S}^n(R)$의 임의의 정규직교기저 (b_i)에 대하여 '북극' $N = (0, \ldots, 0, R)$을 p로 대응시키며 $T_N\mathbb{S}^n(R)$의 기저 $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$을 (b_i)로 대응시키는 직교사상이 존재함을 보이면 충분하다.

이를 위해 p를 $\mathbb{R}^{n+1}$에서의 길이 R의 벡터로 간주하고 $\hat{p} = p/R$이 동일한 방향의 단위벡터를 나타낸다 하자. (Fig. 3.1) 기저벡터 (b_i)들이 구에 접하므로 이들은 $\hat{p}$에 수직하며 따라서 $(b_1, \ldots, b_n, p)$가 $\mathbb{R}^{n+1}$의 정규직교기저이다. α가 이러한 벡터들을 열로 가지는 행렬이라 하자. 그 경우 $\alpha \in \mathrm{O}(n+1)$이며 기초 선형대수에 의해 α가 표준기저벡터 $(\partial_1, \ldots, \partial_{n+1})$을 $(b_1, \ldots, b_n, \hat{p})$로 대응시킨다. $\alpha(N) = p$임이 따라온다. 이에 더해 α가 $\mathbb{R}^{n+1}$에 선형 작용하므로 그 미분 $d\alpha_N : T_N\mathbb{R}^{n+1} \to T_p\mathbb{R}^{n+1}$은 표준좌표계에서 동일한 행렬 α에 의해 표현된다. 그러므로 $d\alpha_N(\partial_i) = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$이며 α가 요구된 직교사상이다. □

표준구계량의 (대칭성보다는 훨씬 덜 자명한) 다른 중요한 성질은 Euclid 계량과 밀접한 관련이 있다는 것이다. 다양체 M에서의 두 계량 g_1, g_2가 서로 **등각연관(conformally related)**되었음은 (또는 **점별 등각(pointwise conformal)** 또는 단순히 **등각(conformal)**) 양의 값 함수 $f \in C^\infty(M)$이 존재하여 $g_2 = fg_1$을 만족시키는 것이다. 두 Riemann 다양체 (M, g)와 $(\tilde{M}, \tilde{g})$에 대하여 미분동형사상 $\varphi : M \to \tilde{M}$이 **등각미분동형사상(conformal diffeomorphism)** (또는 **등각변환(conformal transformation)**)이라는 것의 정의는 φ에 의한 $\tilde{g}$의 당김이 g와 등각이도록 하는 것이다:

$$\text{어떠한 양의 값 함수 } f \in C^\infty(M)\text{에 대하여 } \varphi^*\tilde{g} = fg$$

Problem 3-6은 등각미분동형사상이 실제로 정확히 각을 보존하는 미분동형사상들임을 보여준다. 두 Riemann 다양체가 **등각 동치(conformally equivalent)**라는 것의 정의는 이들 간에 등각미분동형사상이 존재한느 것이다.

Riemann 다양체 (M, g)가 **국소등각평탄(locally conformally flat)**이라는 것의 정의는 M의 모든 점이 $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$의 열린집합과 등각 동치인 근방을 가지는 것이다.

► **Exercise 3.3.** (a) 임의의 미분다양체 M에 대하여 등각연관이 M에서의 모든 Riemann 계량들의 집합에서의 동치 관계임을 보여라.
(b) 등각 동치가 모든 Riemann 다양체들의 족에서의 동치 관계임을 보여라.

Example 3.4. g_1, g_2가 $g_2 = fg_1$을 만족시키는 n-유향다양체 상에서의 등각연관 계량들이라 하자. 체적요소가 $dV_{g_2} = f^{n/2}dV_{g_1}$에 의해 연관됨을 보여라.

북극으로부터의 **입체사영(stereographic projection)**을 통해 $\mathbb{R}^n$과 $\mathbb{S}^n(R)$에서 한 점을 제외한 것 간의 등각 동치를 얻을 수 있다. 임의의 점 $P = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau) \in \mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$에 대하여 $U = (u^1, \ldots, u^n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$이 N과 P를 지나는 직선과 초평면 $\{(\xi, \tau) : \tau = 0\}$의 교점이라 하면 입체사영은 P를 $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$으로 대응시키는 사상 $\sigma : \mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$으로 정의된다. (Fig. 3.2) 그러므로 U는 어떠한 0이 아닌 스칼라 λ에 대하여 $(U - N) = \lambda(P - N)$이라는 사실에 의해 특성화된다. $N = (0, R), U = (u, 0), P = (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$로 표기하면 다음의 방정식계를 얻는다.

$$\begin{aligned} u^i &= \lambda \xi^i \\ -R &= \lambda(\tau - R) \end{aligned} \tag{3.3}$$

λ에 대한 둘째 방정식을 해결하고 첫째 방정식에 대입하면 반경 R의 구의 북극으로부터의 입체사영에 대한 다음 공식을 얻는다.

$$\sigma(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R_\tau} \tag{3.4}$$

이 공식으로부터 σ가 $\mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$ 전체에서 정의된 미분사상임이 따라온다. 이것이 미분동형사상임을 보이는 가장 간단한 방법은 역사상을 계산하는 것이다. (3.3)의 두 방정식을 τ, ξ^i에 대하여 해결하면 다음을 얻는다.

$$\xi^i = \frac{u^i}{\lambda} \quad , \quad \tau = R\frac{\lambda - 1}{\lambda} \tag{3.5}$$

점 $P = \sigma^{-1}(u)$는 이러한 방정식들 및 P가 구에 속한 점이라는 사실에 의해 특성화된다. 그러므로 (3.5)를 $|\xi|^2 + \tau^2 = R^2$에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{|u|^2}{\lambda^2} + R^2 \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} = R^2$$

이로부터 다음이 성립한다 결론지을 수 있다.

$$\lambda = \frac{|u|^2 + R^2}{2R^2}$$

(3.5)에 다시 대입하면 다음을 얻는다.

$$\sigma^{-1}(u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2R^2 u}{|u|^2 + R^2}, R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right) \tag{3.6}$$

이는 구축에 의해 사상 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$이다. 따라서 σ가 미분동형사상이다.

Proposition 3.5. 입체사영은 $\mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$과 $\mathbb{R}^n$ 간의 등각미분동형사상이다.

Proof. 역사상 σ^{-1}은 $\mathbb{S}^n(R) \setminus \{N\}$의 미분매개화이며 따라서 당김 계량을 계산하기 위해 이를 사용할 수 있다. 당김을 계산하기 위해 통상적인 대입 기법을 사용하면 다음과 같이 $\mathring{g}_R$의 입체좌표계에서의 좌표표현을 얻는다:

$$(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R = (\sigma^{-1})^* \bar{g} = \sum_j \left(d\left(\frac{2R^2 u^j}{|u|^2 + R^2} \right) \right)^2 + \left(d\left(\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right) \right)^2$$

이러한 항들을 각각 전개하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{2R^2 u^j}{|u|^2 + R^2} \right) &= \frac{2R^2 \, du^j}{|u|^2 + R^2} - \frac{4R^2 u^j \sum_i u^i \, du^i}{(|u|^2 + R^2)^2} \\
d\left(R\frac{|u|^2 - R^2}{|u|^2 + R^2} \right) &= \frac{2R \sum_i u^i \, du^i}{|u|^2 + R^2} - \frac{2R(|u|^2 - R^2) \sum_i u^i \, du^i}{(|u|^2 + R^2)^2} \\
&= \frac{4R^3 \sum_i u^i \, du^i}{(|u|^2 + R^2)^2}
\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R &= \frac{4R^4 \sum_j (du^j)^2}{(|u|^2 + R^2)^2} - \frac{16R^4 (\sum_i u^i \, du^i)^2}{(|u|^2 + R^2)^3} + \frac{16R^4 |u|^2 (\sum_i u^i \, du^i)^2}{(|u|^2 + R^2)^4} + \frac{16R^6 (\sum_i u^i \, du^i)^2}{(|u|^2 + R^2)^4} \\
&= \frac{4R^4 \sum_j (du^j)^2}{(|u|^2 + R^2)^2}
\end{aligned}$$

즉 다음이 성립한다.

$$(\sigma^{-1})^* \mathring{g}_R = \frac{4R^4}{(|u|^2 + R^2)^2} \bar{g} \tag{3.7}$$

여기에서 $\bar{g}$는 $\mathbb{R}^n$에서의 Euclid 계량을 나타내며 따라서 σ는 등각미분동형사상이다. □

Corollary 3.6. 표준구계량을 가지는 각각의 구는 국소등각평탄하다.

Proof. 입체사영은 북극을 제외한 임의의 점의 근방과 Euclid 공간 간의 등각 동치를 제공한다; 적절한 회전을 가한 후 입체사영을 가하면 (또는 남극으로부터의 입체사영을 가하면) 북극의 근방에 대해서도 이러한 등각 동치를 얻는다. □

Hyperbolic Spaces (쌍곡공간)

Riemann 다양체의 세 번째 예시는 앞의 두 가지보다는 덜 친숙할 수도 있다. 우리는 각각의 $n \geq 1$과 각각의 $R > 0$에 대하여 **반경 R의 쌍곡공간(hyperbolic space of radius R)**이라 불리는 틀동차 Riemann 다양체 $\mathbb{H}^n(R)$을 정의할 것이다. 쌍곡공간의 4가지 서로 동치인 모형들이 존재하며 이들은 모두 각각 특정 상황에서 유용하다. 다음 정리에서 이들을 모두 소개하고 이들이 등장적임을 보이겠다.

Theorem 3.7. n이 1 초과의 정수라 하자. 각각의 고정된 $R > 0$에 대하여 다음의 Riemann 다양체들이 모두 서로 등장적이다.

(a) **쌍곡면 모형(hyperboloid model).** $\mathbb{H}^n(R)$이 Minkowski 공간 $\mathbb{R}^{n,1}$의 표준좌표계 $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau)$ 하에서 2엽쌍곡면 $(\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^n)^2 - \tau^2 = -R^2$의 '위쪽 엽' $\{\tau > 0\}$에 다음의 유도 계량이 부여된 부분다양체라 하자.

$$\breve{g}^1_R = \iota^* \bar{q}$$

여기에서 $\iota : \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{R}^{n,1}$은 포함사상이며 $\bar{q} = \bar{q}^{(n,1)}$은 다음의 Minkowski 계량이다:

$$\bar{q} = (d\xi^1)^2 + \cdots + (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2 \tag{3.8}$$

(b) **Beltrami-Klein 모형(Beltrami-Klein model).** $\mathbb{K}^n(R)$은 $\mathbb{R}^n$에서의 중심이 원점이며 반경이 R인 구체에 좌표계 $(w^1, \ldots, w^n)$ 하에서 다음과 같은 계량이 부여된 것이다.

$$\breve{g}^2_R = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \cdots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1\, dw^1 + \cdots + w^n\, dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2} \tag{3.9}$$

(c) **Poincaré 구체 모형(Poincaré ball model).** $\mathbb{B}^n(R)$은 $\mathbb{R}^n$에서의 중심이 원점이며 반경이 R인 구체에 좌표계 $(u^1, \ldots, u^n)$ 하에서 다음과 같은 계량이 부여된 것이다.

$$\breve{g}^3_R = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}$$

(d) **Poincaré 반공간 모형(Poincaré half-space model).** $\mathbb{U}^n(R)$은 $\mathbb{R}^n$에서의 좌표계 $(x^1, \ldots, x^{n-1}, y)$ 하에서 $\{(x, y) : y > 0\}$에 의해 정의된 반공간에 다음과 같은 계량이 부여된 것이다.

$$\breve{g}^4_R = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}$$

Proof. $R > 0$이 주어졌다 하자. 우리는 $\mathbb{H}^n(R)$이 실제로 $\mathbb{R}^{n,1}$의 부분-Riemann 다양체임을 검증해야 한다. 다른 말로 하면 $\breve{g}^1_R$이 양의 정부호임을 보여야 한다. 이를 수행하는 한 가지 방법은 이것이 (정의에 의해 자명하게 양의 정부호인) $\breve{g}^2_R$ 또는 $\breve{g}^3_R$의 미분동형사상 하에서의 당김임을 보이는 것이다. 그 이외에도 Chapter 1에서 개발한 준-Riemann 다양체의 부분다양체에 관한 이론을 이용해 직접 증명할 수도 있다.

$\mathbb{H}^n(R)$이 $f(\xi, \tau) = (\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^n)^2 - \tau^2$에 의해 주어진 미분함수 $f : \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}$의 등위집합의 열린 부분집합임을 기억해 두라. 다음이 성립한다.

$$df = 2\xi^1\, d\xi^1 + \cdots + 2\xi^n\, d\xi^n - 2\tau\, d\tau$$

그러므로 f의 $\bar{q}$에 대한 구배는 다음에 의해 주어진다.

$$\operatorname{grad} f = 2\xi^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \cdots + 2\xi^n \frac{\partial}{\partial \xi^n} + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{3.10}$$

직접적인 계산에 의해 다음을 보일 수 있다.

$$\bar{q}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = 4 \left(\sum_i (\xi^i)^2 - \tau^2 \right)$$

$\mathbb{H}^n(R)$의 점에서 이는 $-4R^2$이다. Corollary 2.71로부터 $\mathbb{H}^n(R)$이 부호수 $(n, 0)$의 부분준-Riemann 다양체, 즉 부분-Riemann 다양체이다.

우리는 등장사상 $c : \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{K}^n(R), \pi : \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{B}^n(R), \kappa : \mathbb{B}^n(R) \to \mathbb{U}^n(R)$을 정의하는 것으로 4가지 Riemann 다양체들이 서로 등장적임을 보일 것이다. (Fig. 3.3을 참조하라.)

쌍곡면에서 구체로의 **중심사영(central projection)**이라 불리는 다음의 미분동형사상을 기하학적으로 구축하고 이것이 (a)와 (b)에 의해 주어진 두 계량 간의 등장사상임을 밝힐 것이다.

$$c : \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{K}^n(R)$$

임의의 $P = (\xi^1, \ldots, \xi^n \tau) \in \mathbb{H}^n(R) \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$에 대하여 $W = (w, R) \in \mathbb{R}^{n,1}$이 원점에서 시작하여 P를 통과하는 반직선이 평면 $\{(\xi, \tau) : \tau = R\}$과 교차하는 지점이라 하고 $c(P) = w \in \mathbb{K}^n(R)$로 정의하자. (Fig. 3.4)

W가 P의 스칼라배 중 마지막 좌표가 R인 것으로 유일하게 결정되므로 $W = RP/\tau$이며 따라서 c는 다음 공식에 의해 주어진다.

$$c(\xi, \tau) = \frac{R\xi}{\tau} \tag{3.11}$$

관계 $|\xi|^2 - \tau^2 = -R^2$에 의해 $|c(\xi,\tau)|^2 = R^2(1 - R^2/\tau^2) < R^2$이며, 따라서 c가 $\mathbb{H}^n(R)$을 $\mathbb{K}^n(R)$로 대응시킨다. c가 미분동형사상임을 보이기 위해 c의 역사상을 결정하겠다. 점 $(\xi,\tau) = \lambda(w, R)$이 $\mathbb{H}^n(R)$에 속하도록 하는 양수 스칼라 λ가 유일하게 존재하며 $\lambda^2|w|^2 - \lambda^2R^2 = -R^2$에 의해 결정된다. i.e. 이는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{R^2 - |w|^2}}$$

다음의 미분사상이 c의 역사상임이 따라온다:

$$c^{-1}(w) = (\xi, \tau) = \left(\frac{Rw}{R^2 - |w|^2}, \frac{R^2}{R^2 - |w|^2} \right) \tag{3.12}$$

그러므로 c는 미분동형사상이다. 이것이 $\breve{g}_R^1$과 $\breve{g}_R^2$ 간의 등장사상임을 보이기 위해 (위에서 입체사영에 대하여 수행했던 계산과 같이) $\breve{g}_R^1$이 $\bar{q}$에서 유도된 계량이라는 사실을 이용할 것이다. (3.12)에 의해 정의된 (ξ,τ)에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} d\xi^i &= \frac{R\, dw^i}{\sqrt{R^2 - |w|^2}} + \frac{Rw^i \sum_j w^j\; dw^j}{(R^2 - |w|^2)^{3/2}} \\ d\tau &= \frac{R^2 \sum_j w^j; dw^j}{(R^2 - |w|^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

그 경우 $(c^{-1})^* \breve{g}_R^1 = \sum_i (d\xi^i)^2 - (d\tau)^2 = \breve{g}_R^2$임을 간단히 계산할 수 있다.

다음으로 **쌍곡입체사영(hyperbolic stereographic projection)**이라 불리는 다음의 쌍곡면에서 구체로의 미분동형사상을 기술하고 이것이 (a)와 (c)의 계량 간의 등장사상임을 보이겠다.

$$\pi : \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{B}^n(R)$$

$S \in \mathbb{R}^{n,1}$이 점 $S = (0, \ldots, 0, -R)$을 나타낸다 하자. 임의의 $P = (\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau) \in \mathbb{H}^n(R) \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$에 대하여 $U = (u, 0) \in \mathbb{R}^{n,1}$이 S와 P를 통과하는 직선이 초평면 $\{(\xi,\tau) : \tau = 0\}$와 교차하는 점이라 하고 (Fig. 3.5) $\pi(P) = u \in \mathbb{B}^n(R)$로 설정하자. 점 U는 어떠한 0이 아닌 스칼라에 대하여 $(U - S) = \lambda(P - S)$에 의해 특성화되며, 따라서 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} u^i &= \lambda \xi^i \\ R &= \lambda(\tau + R) \end{aligned} \tag{3.13}$$

구의 경우와 마찬가지로 이러한 방정식들을 해결하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\pi(\xi, \tau) = u = \frac{R\xi}{R + \tau}$$

$|\pi(\xi,\tau)|^2 = R^2(\tau^2 - R^2)(\tau^2 + R^2) < R^2$이므로 그 값은 $\mathbb{B}^n(R)$에 속한다. 위에서와 유사한 계산에 의해 역사상이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\pi^{-1}((u) = (\xi, \tau) = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 - |u|^2}, R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2} \right)$$

$(\pi^{-1})^* \breve{g}_R^1 = \breve{g}_R^3$임을 보이자. 구의 경우와 마찬가지로 계산할 수 있으므로 세부사항을 생략하겠다:

$$\begin{aligned} (\pi^{-1})^* \breve{g}_R^1 &= \sum_j \left(d\left(\frac{2R^2 u^j}{R^2 - |u|^2} \right) - \left(d\left(R\frac{R^2 + |u|^2}{R^2 - |u|^2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{4R^4 \sum_j (du^j)^2}{(R^2 - |u|^2)^2} \\ &= \breve{g}_R^3 \end{aligned}$$

다음으로 다음과 같은 명시적인 미분동형사상을 구축하는 것으로 Poincaré 반공간 모형을 고려하겠다.

$$\kappa : \mathbb{U}^n(R) \to \mathbb{B}^n(R)$$

이 경우 구체에서의 좌표계를 $(u,v) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, v)$로 표기하는 것이 더 편리하다. 2차원의 경우 κ는 복소수 표기법 $w = u + iv, z = x + iy$ 하에서 간단히 보현할 수 있다. 이는 고전적 **Cayley 변환(Cayley transform)**의 일종이다:

$$\kappa(z) = w = iR\frac{z - iR}{z + iR} \tag{3.14}$$

기초 복소해석학에 의해 이것이 $\mathbb{U}^2(R)$을 $\mathbb{B}^2(R)$로 전사 대응시키는 복소해석학적 미분동형사상임을 알 수 있다. z를 실수부와 허수부로 분리하면 실수 항에 대하여 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\kappa(x,y) = (u,v) = \left(\frac{2R^2x}{|x|^2 + (y+R)^2}, R\frac{|x|^2 + |y|^2 - R^2}{|x|^2 + (y+R)^2}\right) \tag{3.15}$$

x가 $(x^1, \ldots, x^{n-1})$이라 하면 동일한 공식이 n차원에 대해서도 성립한다. 이것이 상반공간 $\{y > 0\}$을 반경 R의 구체로 대응시킴을 간단히 확인할 수 있다. 역사상을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$$\kappa^{-1}(u,v) = (x,y) = \left(\frac{2R^2u}{|u|^2 + (v-R)^2}, R\frac{R^2 - |u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + (v-R)^2}\right)$$

따라서 κ가 **일반화 Cayley 변환(generalized Cayley transform)**이라 불리는 미분동형사상이다. $\kappa^*\breve{g}^3_R = \breve{g}^4_R$임에 대한 검증은 기본적으로 긴 계산이며 Problem 3-4로 남긴다. □

우리는 종종 Theorem 3.7의 Riemann 다양체 중 하나를 나타내기 위해 포괄적인 표기법 $\mathbb{H}^n(R)$을 사용하고 대응하는 계량을 $\breve{g}_R$로 표기한다; $R = 1$인 특수한 경우는 $(\mathbb{H}^n, \breve{g})$로 표기되며 간단히 **쌍곡공간(hyperbolic space)**, 또는 2차원의 경우에는 **쌍곡평면(hyperbolic plane)**이라 불린다.

주어진 R의 값에 대한 모든 모형들이 서로 등장적이므로 이들을 기하학적으로 분석할 때는 어느 모형을 사용하는 것이 가장 편리한지를 염두에 두고 있어야 한다. 다음 따름정리는 Poincaré 구체와 반공간 모형이 가장 적합한 상황의 예시이다.

Corollary 3.8. 각각의 쌍곡공간은 국소등각평탄하다.

Proof. Poincaré 구체 또는 반공간 모형에서 항등사상은 Euclid 공간의 열린 부분집합과의 대역적 등각동치를 제공한다. □