

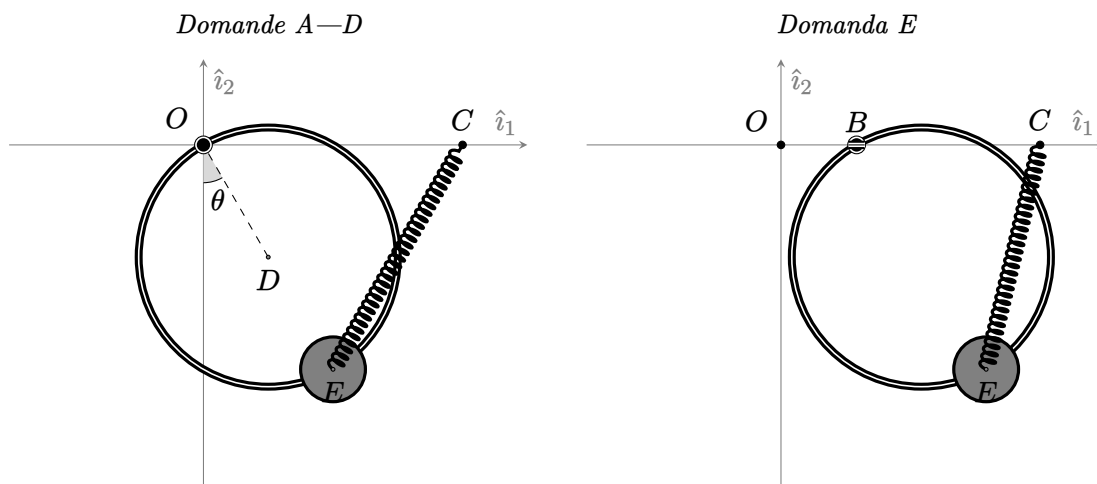
## ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA E BIOCHIMICA  
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

26 Gennaio 2026

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. Sul foglio di risoluzione va indicato corso di laurea e numero di matricola.

In un piano verticale giace un anello di raggio  $r$  e massa  $m$ , vincolato per mezzo di una cerniera ideale in un suo punto  $O$  in modo che l'anello stesso possa ruotare attorno ad  $O$  nel piano. Nel punto diametralmente opposto ad  $O$  è saldato sull'anello un disco omogeneo di densità  $\hat{\rho}$  e raggio  $\frac{r}{4}$ , in modo che il centro  $E$  del disco giaccia sull'anello. Infine, il centro  $E$  del disco è collegato tramite una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k$  ad un punto  $C$  che giace a distanza  $2r$  da  $O$  sulla stessa retta orizzontale, come in figura.



Adottando l'angolo  $\theta$  in figura (sinistra) come variabile lagrangiana, si risponda alle seguenti domande.

- A** Si calcoli il centro di massa del sistema: per quale valore di  $\hat{\rho}$  esso si trova a distanza  $\frac{4}{3}r$  da  $O$ ?
- B** Si assuma ora che  $\hat{\rho}$  sia tale che la massa del disco sia  $m/2$ . Si esprima il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse normale al piano e passante per  $O$ , e si scriva l'espressione dell'energia cinetica in funzione della variabile lagrangiana  $\theta$ .

Si assuma ora che  $\hat{\rho}$  sia tale che la massa dell'anello e quella del disco siano uguali

- C** Si studino le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità.
- D** Si calcoli il momento totale di tutte le forze esterne agenti sul sistema rispetto ad  $O$ .
- E** Si supponga ora che l'anello sia vincolato all'asse delle ascisse non tramite un giunto ma tramite un *carrello ideale* (come in figura sopra, destra, ove è indicato con  $B$ ). Il carrello è libero di scorrere lungo l'intero asse orizzontale contenente  $O$  e  $C$  e permette all'anello di ruotare attorno a  $B$ . Quante variabili lagrangiane sono necessarie per la parametrizzazione del sistema? Si scriva l'espressione dell'energia potenziale del sistema in termini delle nuove variabili lagrangiane.

SOLUZIONE

Abbiamo che  $\overrightarrow{OE} = 2r \sin \theta \hat{i}_1 - 2r \cos \theta \hat{i}_2$ , mentre  $\overrightarrow{OD} = r \sin \theta \hat{i}_1 - r \cos \theta \hat{i}_2$  e  $\overrightarrow{OC} = 2r \hat{i}_1$ . Infine,  $\|\overrightarrow{EC}\|^2 = 8r^2 - 8r^2 \cos(\pi/2 - \theta) = 8r^2 - 8r^2 \sin(\theta)$ .

**A** Il centro di massa si trova facilmente come

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OD} + \hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2\overrightarrow{OE}}{m + \hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2} = \frac{m + 2\hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2}{m + \hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2} (r \sin \theta \hat{i}_1 - r \cos \theta \hat{i}_2).$$

Imponiamo che la distanza quadra dall'origine sia  $\frac{16}{9}r^2$ ,

$$\|\overrightarrow{OG}\|^2 = r^2 \left( \frac{1 + \hat{\rho}\pi\frac{r^2}{8m}}{1 + \hat{\rho}\pi\frac{r^2}{16m}} \right)^2 = \frac{16}{9}r^2 \Rightarrow \hat{\rho} = \frac{8m}{\pi r^2}.$$

**B** Il momento di un anello di massa  $m$  e raggio  $r$  rispetto ad un asse ortogonale ad esso e passante per il suo centro è  $I_D = mr^2$ , mentre quello di un disco di massa  $\frac{m}{2}$  e raggio  $\frac{r}{4}$  rispetto ad un asse passante per il suo centro è  $I_E = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\left(\frac{r}{4}\right)^2$ . Applichiamo a disco e anello il teorema di Huygens–Steiner per individuare il momento del sistema  $I_z$  rispetto all'asse passante per l'origine e ortogonale al piano:

$$I_z = I_D + mr^2 + I_E + \frac{m}{2}(2r)^2 = \frac{257}{64}mr^2.$$

Essendo  $O$  un centro istantaneo di rotazione fisso, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2 = \frac{257}{128}mr^2\dot{\theta}^2.$$

**C** Se la massa del disco e dell'anello sono uguali, allora

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OD} + m\overrightarrow{OE}}{2m} = \frac{3}{2}(r \sin \theta \hat{i}_1 - r \cos \theta \hat{i}_2).$$

Il potenziale associato al sistema è la somma del contributo gravitazionale ed elastico, ovvero

$$V(\theta) = -3mgr \cos \theta + 4kr^2(1 - \sin \theta).$$

I punti di equilibrio possono essere trovati ponendo, dopo aver osservato che  $\cos \theta = 0$  non può essere soluzione,

$$V'(\theta) = 3mgr \sin \theta - 4kr^2 \cos \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{4kr}{3mg} \Rightarrow \theta_1 = \arctan \frac{4kr}{3mg}, \quad \theta_2 = \pi + \theta_1.$$

Per lo studio della stabilità calcoliamo

$$V''(\theta) = 3mgr \cos \theta + 4kr^2 \sin \theta.$$

Avendo  $\theta_1$  coseno positivo e seno negativo,  $V''(\theta_1) > 0$  per cui la soluzione corrisponde ad un equilibrio stabile. Viceversa, avendo  $\theta_2$  seno negativo e coseno positivo,  $V''(\theta_2) < 0$  per cui la soluzione corrisponde ad un equilibrio instabile.

**D** Abbiamo che la forza peso  $\vec{F}_g = -2mg\hat{i}_2$  mentre la forza elastica  $\vec{F}_{el} = k\overrightarrow{EC} = 2rk(1 - \sin \theta)\hat{i}_1 + 2kr \cos \theta \hat{i}_2$ . La terza forza esterna agente sul sistema è la reazione vincolare applicata in  $O$  che non ha quindi momento rispetto a questo punto. Abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_g + \overrightarrow{OE} \wedge \vec{F}_{el} = \\ &= \frac{3}{2}(r \sin \theta \hat{i}_1 - r \cos \theta \hat{i}_2) \wedge (-2mg\hat{i}_2) + (2r \sin \theta \hat{i}_1 - 2r \cos \theta \hat{i}_2) \wedge (2rk(1 - \sin \theta)\hat{i}_1 + 2kr \cos \theta \hat{i}_2) \\ &= -3mgr \sin \theta \hat{i}_3 + 4kr^2 \sin \theta \cos \theta \hat{i}_3 + 4r^2k \cos \theta (1 - \sin \theta) \hat{i}_2 = (-3mgr \sin \theta + 4r^2k \cos \theta) \hat{i}_3. \end{aligned}$$

**E** Sono necessari due parametri lagrangiani, ovvero l'ascissa  $x$  del carrello, che denominiamo  $B$ , e l'angolo  $\theta$  che  $\overrightarrow{BE}$  forma con la verticale. Il potenziale viene modificato nel fatto che

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BE}$$

$$= 2r\hat{i}_1 - x\hat{i}_1 - 2r \sin \theta \hat{i}_1 + 2r \cos \theta \hat{i}_2 = (2r - x - 2r \sin \theta)\hat{i}_1 + 2r \cos \theta \hat{i}_2$$

e quindi  $\|\overrightarrow{EC}\|^2 = (2r - x)^2 + 4r^2 - 4r(2r - x) \sin \theta$ , per cui

$$V(x, \theta) = -3mgr \cos \theta + \frac{k}{2} \left( (2r - x)^2 + 4r^2 - 4r(2r - x) \sin \theta \right).$$