

INTRODUZIONE ALLA

# MECCANICA RAZIONALE

PER IL CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA

— 27 SETTEMBRE 2025 —

GABRIELE SICURO



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



## Indice

|   |    |
|---|----|
| Capitolo 1. Preambolo: curve e vettori                        | 1  |
| 1. Spazi vettoriali, spazi affini                             | 1  |
| 2. Curve  | 7  |
| 3. Vettori applicati in $\mathbb{E}^3$                        | 10 |
| Capitolo 2. Cinematica  | 15 |
| 1. Quantità fondamentali della cinematica                     | 15 |
| 2. Cambi di riferimento: cinematica relativa                  | 16 |
| Capitolo 3. Leggi della meccanica                             | 25 |
| 1. Massa e quantità di moto                                   | 25 |
| 2. Forze e lavoro   | 27 |
| 3. Principi della meccanica                                   | 32 |
| 4. Principio di Galilei e forze apparenti                     | 36 |
| 5. Equazioni cardinali per un sistema di punti                | 38 |
| 6. Equilibrio: generalità                                     | 41 |
| 7. Energia cinetica e teorema delle forze vive                | 42 |
| Capitolo 4. Introduzione alla meccanica dei sistemi olonomi   | 45 |
| 1. Moti vincolati   | 45 |
| 2. Equilibrio e vincoli                                       | 53 |
| 3. Moto unidimensionale                                       | 61 |
| Capitolo 5. Il corpo rigido: aspetti cinematici e dinamici    | 67 |
| 1. Cinematica del corpo rigido                                | 67 |
| 2. Equazioni cardinali per i corpi rigidi e tensore d'inerzia | 75 |
| 3. Statica e dinamica del corpo rigido                        | 83 |
| Capitolo 6. Principio di d'Alembert ed equazioni di Lagrange  | 89 |
| 1. Principio di d'Alembert                                    | 89 |
| 2. Equazioni di Lagrange                                      | 89 |



## CAPITOLO 1

### Preambolo: curve e vettori

Per introdurre il concetto di *spazio* e *tempo* così come studiati dalla meccanica classica, e inquadrare matematicamente il moto dei corpi nello spazio, è utile rivedere alcuni concetti preliminari, cogliendo l'occasione per fissare della notazione.

#### 1. Spazi vettoriali, spazi affini

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ). Uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  è un insieme non vuoto  $\mathbb{V}$  tale per cui esistono due operazioni binarie, ovvero  $+: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , detta *somma*, e  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , detta *prodotto per uno scalare*, con le seguenti proprietà:

- la somma  $+$  è commutativa e associativa; esiste un elemento neutro  $\vec{0} \in \mathbb{V}$ , ovvero se  $\vec{v} \in \mathbb{V}$ , allora  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ ; per ogni  $\vec{v} \in \mathbb{V}$  esiste il suo *opposto*  $-\vec{v} \in \mathbb{V}$ , ovvero un vettore tale per cui  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ ;
- il prodotto  $\cdot$  è distributivo sulla somma di vettori (ovvero  $a \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{u}$  per  $a \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ ) e sulla somma di scalari (ovvero  $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$  per  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\vec{v} \in \mathbb{V}$ ).

Diremo che  $\mathbb{V} \equiv \mathbb{V}^d$  è  $d$ -dimensionale se esiste in esso una *base*  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^d \subset \mathbb{V}^d$  di  $d$  vettori non-nulli linearmente indipendenti, tali cioè da soddisfare,

$$(1.1) \quad \lambda_1 \hat{i}_1 + \cdots + \lambda_d \hat{i}_d = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0,$$

e tale che ogni  $\vec{v} \in \mathbb{V}^d$  si possa scrivere in maniera *univoca* per mezzo di una combinazione lineare a coefficienti in  $\mathbb{R}$  degli elementi di tale base, ovvero

$$(1.2) \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^d v_k \hat{i}_k.$$

La collezione ordinata  $(v_k)_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d$  fornisce le *componenti* di  $\vec{v}$  secondo la base indicata, ovvero è una rappresentazione di  $\vec{v}$  secondo la base  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^d$ . Scegliendo una diversa base  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^d$ , si può ottenere una diversa rappresentazione

$$(1.3) \quad \vec{v} = \sum_{a=1}^d v_a^* \hat{e}_a$$

con un diverso set di coefficienti  $(v_a^*)_{a=1}^d$ , univocamente determinati a base fissata. La relazione tra una rappresentazione e l'altra può essere derivata facilmente se si estrae la *matrice di cambio di base*  $\mathbf{R}$ , tale per cui

$$(1.4) \quad \hat{e}_a = \sum_{k=1}^d R_{ak} \hat{i}_k, \quad a = 1, \dots, d,$$

che permette di scrivere, per ogni  $k$ ,

$$(1.5) \quad v_k = \sum_{a=1}^d v_a^* R_{ak}.$$

Si può mostrare che la matrice  $\mathbf{R}$  è invertibile e la sua inversa  $\mathbf{R}^{-1}$  permette di esprimere la base  $\{\hat{v}_k\}_{k=1}^d$  in termini della base  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^d$ .

**1.1. Prodotto scalare.** Un concetto molto importante per l'argomento di questo modulo è quello di *prodotto scalare* su uno spazio vettoriale reale.

**DEFINIZIONE 1.2** (Prodotto scalare). Si dice prodotto scalare euclideo sullo spazio vettoriale reale  $d$ -dimensionale  $\mathbb{V}^d$  una applicazione

$$(1.6) \quad \langle \bullet, \bullet \rangle: \mathbb{V}^d \times \mathbb{V}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

che è simmetrica (ovvero  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^d, \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ), bilineare (ovvero  $\langle \alpha \vec{v} + \beta \vec{u}, \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \beta \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$  per  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^d$ ) e definita positiva (ovvero  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$   $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}^d$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $\vec{v} = \vec{0}$ ).

Se è dato un prodotto scalare come sopra, si può definire una *norma* ad esso associata. In generale, una norma è una applicazione che soddisfa la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.3** (Norma). Una norma su uno spazio vettoriale reale  $\mathbb{V}^d$  è una applicazione  $\psi: \mathbb{V}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \psi(\alpha \vec{v}) = |\alpha| \psi(\vec{v})$ ,  $\psi(\vec{v} + \vec{u}) \leq \psi(\vec{v}) + \psi(\vec{u})$  e  $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^d, \psi(\vec{v}) \geq 0$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $\vec{v} = \vec{0}$ .

L'applicazione  $\|\bullet\|: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definita come

$$(1.7) \quad \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

è effettivamente una norma ed è, appunto, la norma canonicamente associata al prodotto scalare  $\langle \bullet, \bullet \rangle$ . Vale la seguente

**PROPOSIZIONE 1.1** (Disuguaglianza di Schwartz). *Dati due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  in uno spazio  $\mathbb{V}^d$  dotato di prodotto scalare, allora*

$$(1.8) \quad |\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{u}\|$$

dove

$$(1.9) \quad \|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Se entrambi i vettori in gioco sono non-nulli, la disuguaglianza di Schwartz comporta l'esistenza di un angolo  $\theta$  tale che

$$(1.10) \quad \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos \theta$$

che si dice essere l'angolo tra i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ . In particolare due vettori entrambi non nulli si dicono *ortogonali* se  $\cos \theta = 0$ , mentre si dicono *paralleli* se  $|\cos \theta| = 1$ ; in quest'ultimo caso esiste un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ .

1.1.1. *Base ortonormale.* Una base  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^d$  si dice *ortonormale* se per ogni coppia di valori  $j, k$  vale

$$(1.11) \quad \langle \hat{i}_j, \hat{i}_k \rangle = \delta_{jk}$$

dove  $\delta_{jk}$  è il simbolo di Kronecker, pari a 1 se  $j = k$ , e a zero diversamente. Si noti che se la base è appunto ortonormale, i coefficienti di  $\vec{v}$ , generico vettore, secondo questa base possono essere estratti con un semplice prodotto scalare,

$$(1.12) \quad \vec{v} = \sum_k v_k \hat{i}_k \iff v_k = \langle \vec{v}, \hat{i}_k \rangle, \quad k = 1, \dots, d.$$

Date due basi ortonormali  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^d$  e  $\{\hat{e}_k\}_{k=1}^d$ , la matrice di cambio di base  $\mathbf{R}$  deve soddisfare la relazione

$$(1.13) \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_d$$

ovvero deve essere una matrice ortogonale, avente perciò  $\det \mathbf{R} = \pm 1$ . Questo comporta che

$$(1.14) \quad \hat{e}_a = \sum_{\kappa=1}^3 R_{a\kappa} \hat{i}_\kappa, \quad \hat{i}_k = \sum_{b=1}^3 R_{bk} \hat{e}_b, \quad a, k = 1, 2, 3.$$

e quindi

$$(1.15) \quad \vec{v} = \sum_k v_k \hat{i}_k = \sum_a v_a^* \hat{e}_a \iff v_k = \sum_a v_a^* R_{ak} \quad v_a^* = \sum_j R_{aj} v_j,$$

essendo  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ . In forma matriciale, la formula precedente si scrive

$$\begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1d} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{d1} & R_{d2} & \dots & R_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & \dots & R_{d1} \\ R_{12} & R_{22} & \dots & R_{d2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1d} & R_{2d} & \dots & R_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_d^* \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con  $\mathbf{v} = (v_k)_{k=1}^d$ ,  $\mathbf{v}^* = (v_a^*)_{a=1}^d$ , le equazioni precedenti si scrivono in forma matriciale come  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R} \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{R}^T \mathbf{v}^*$ . L'uso di una base ortonormale permette di calcolare prodotti scalari e norme in maniera piuttosto semplice. Se  $\vec{v} = \sum_k v_k \hat{i}_k$  e  $\vec{u} = \sum_k u_k \hat{i}_k$ , allora

$$(1.16) \quad \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \sum_k v_k u_k, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_k v_k^2}.$$

È importante osservare che prodotto scalare e norma sono quantità che *non dipendono* dalla base scelta per rappresentare i vettori.

**1.2. Prodotto vettoriale.** Se  $\mathbb{V}^3$  è uno spazio vettoriale tridimensionale con prodotto scalare su  $\mathbb{R}$ , è possibile definire un'ulteriore operazione tra due vettori  $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3$ . Supponiamo di avere una base ortonormale  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^3$  di modo che  $\vec{v} = \sum_k v_k \hat{i}_k$  e  $\vec{u} = \sum_k u_k \hat{i}_k$ . Considerando la sequenza  $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  come *ordinata* (ovvero fissando l'ordine dei tre vettori della base), diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.4 (Prodotto vettoriale). Il prodotto vettoriale  $\vec{v} \wedge \vec{u}$  è definito come

$$(1.17) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2) \hat{i}_1 + (v_3 u_1 - v_1 u_3) \hat{i}_2 + (v_1 u_2 - v_2 u_1) \hat{i}_3.$$

La formula data nella definizione può essere ricordata nel seguente modo. Consideriamo la matrice formale

$$(1.18) \quad \begin{pmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$

Questa è, naturalmente, una matrice molto bizzarra i cui elementi sono in parte scalari e in parte vettori. È però utile dare una regola *mnemonica*: possiamo *formalmente* scrivere che

$$(1.19) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} \hat{i}_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} \hat{i}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \hat{i}_3.$$

Dati tre vettori  $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$  e uno scalare  $c \in \mathbb{R}$ , valgono le seguenti proprietà:

- (1)  $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ ;
- (2)  $\vec{v} \wedge (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ ;
- (3)  $c(\vec{v} \wedge \vec{u}) = (c\vec{v}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge (c\vec{u})$ ;
- (4)  $\langle \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u} \rangle = 0$  e  $\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{u} \rangle = 0$ ;
- (5)  $\|\vec{v} \wedge \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2$ ;
- (6)  $\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{0}$  se e solo se  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  sono paralleli;
- (7) Se  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  sono linearmente indipendenti, ogni vettore ortogonale sia a  $\vec{v}$  che a  $\vec{u}$  è parallelo a  $\vec{v} \wedge \vec{u}$ . Inoltre,  $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{u}\}$  è una base di  $\mathbb{V}^3$  concorde con la base ortonormale scelta.

La proprietà (5) in particolare può essere semplificata utilizzando l'angolo  $\theta$  definito sopra tra  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ . Infatti

$$(1.20) \quad \|\vec{v} \wedge \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 \cos^2 \theta = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{u}\|^2 \sin^2 \theta$$

ovvero la norma del prodotto vettoriale è

$$(1.21) \quad \|\vec{v} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| |\sin \theta|.$$

Inoltre sappiamo, dalla proprietà (4), che  $\vec{v} \wedge \vec{u}$  è ortogonale sia a  $\vec{v}$  che a  $\vec{u}$ . È facile vedere (per esempio, usando la regola mnemonica sopra) che se consideriamo precisamente la base ortonormale, allora

$$(1.22) \quad \hat{i}_1 \wedge \hat{i}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}_3.$$

Possiamo scrivere una espressione simile per ogni altra coppia di vettori di base e in particolare vale la seguente relazione:

$$(1.23) \quad \hat{i}_i \wedge \hat{i}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{i}_k$$

dove il simbolo  $\varepsilon_{ijk}$  è detto *di Levi-Civita* e vale

$$(1.24) \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)\} \\ 0 & \text{diversamente.} \end{cases}$$



Il simbolo di Levi-Civita permette di scrivere in forma compatta i prodotti vettoriali tra due generici vettori come

$$(1.25) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} v_i u_j \hat{t}_k.$$

Il simbolo di Levi-Civita ha diverse proprietà. Per esempio,  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$  e

$$(1.26) \quad \sum_i \varepsilon_{iab} \varepsilon_{ijk} = \delta_{aj} \delta_{bk} - \delta_{ak} \delta_{bj}.$$

Il simbolo di Levi-Civita è molto utile per operare, in generale, coi determinanti. Infatti, data una matrice  $\mathbf{A}$  si verifica che

$$(1.27) \quad \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{ia} A_{jb} A_{kc} = \varepsilon_{abc} \det \mathbf{A}.$$

Quest'ultima proprietà è utile per studiare come il prodotto vettoriale si comporta cambiando base. Supponiamo di avere una diversa base ortonormale  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^3$  di modo che

$$(1.28) \quad \hat{t}_k = \sum_a R_{ka} \hat{e}_a, \quad k = 1, \dots, d.$$

Avremo quindi che

$$(1.29) \quad \hat{e}_a \wedge \hat{e}_b = \sum_{ij} R_{ai} R_{bj} \hat{t}_i \wedge \hat{t}_j = \sum_{ijk} R_{ai} R_{bj} \varepsilon_{ijk} \hat{t}_k = \sum_{ijk} R_{ai} R_{bj} R_{ck} \varepsilon_{ijk} \hat{e}_c = \varepsilon_{abc} \det \mathbf{R} \hat{e}_c$$

Di conseguenza, detti  $\vec{u} = \sum_k u_k \hat{t}_k = \sum_a u_a^* \hat{e}_a$  e  $\vec{v} = \sum_k v_k \hat{t}_k = \sum_a v_a^* \hat{e}_a$ ,

$$(1.30) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} v_i u_j \hat{t}_k = \left( \sum_{a=1}^3 v_a^* \hat{e}_a \right) \wedge \left( \sum_{b=1}^3 u_b^* \hat{e}_b \right) = \det \mathbf{R} \sum_{abc} v_a^* u_b^* \varepsilon_{abc} \hat{e}_c.$$

Questo mostra che, se definito tramite l'Eq. (1.25), il prodotto vettoriale non dipende dalla scelta della base a meno di un segno. Si definiscono così due classi di equivalenza nell'insieme delle *basi* di  $\mathbb{V}^3$ : due basi sono nella stessa classe se la matrice di cambio di base tra esse ha  $\det \mathbf{R} = 1$ , e viceversa sono in classi diverse se  $\det \mathbf{R} = -1$ . Ciascuna delle due classi è associata ad un *orientamento* e la definizione di prodotto vettoriale è ben posta se ristretta ad una classe. La scelta di quale classe usare è arbitraria: si adotta tipicamente la cosiddetta regola della mano destra, che consiste nel fissare una base ortonormale  $\{\hat{t}_k\}_{k=1}^3$  nello spazio tridimensionale in modo che, disposti il pollice, il medio e l'indice della mano sinistra in tre direzioni ortogonali, il vettore  $\hat{t}_1$  sia diretto secondo il pollice, il vettore  $\hat{t}_2$  sia diretto secondo l'indice ed il vettore  $\hat{t}_3$  secondo il medio (a meno di una permutazione ciclica). Ogni altra base ottenuta da una base così orientata per mezzo di una matrice  $\mathbf{R}$  con  $\det \mathbf{R} = 1$  si dirà concorde ad essa e *destrogiro*.

Un'utile identità riguardante il prodotto vettoriale è la seguente. Siano  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$ . Allora

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \left( \sum_r a_r \hat{t}_r \right) \wedge \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} b_i c_j \hat{t}_k = \sum_{ijrkl} \varepsilon_{rkl} \varepsilon_{ijk} a_r b_i c_j \hat{t}_l \\ &= \sum_{ijrl} (\delta_{li} \delta_{rj} - \delta_{lj} \delta_{ri}) a_r b_i c_j \hat{t}_l = \sum_{rl} (a_r b_l c_r - a_r b_r c_l) \hat{t}_l = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$(1.32) \quad \sum_k \varepsilon_{rkl} \varepsilon_{ijk} = \sum_k \varepsilon_{klr} \varepsilon_{kij} = \delta_{li} \delta_{rj} - \delta_{lj} \delta_{ri}.$$

Si noti che  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$  in generale.

1.2.1. *Prodotti misti.* Avendo introdotto sia il prodotto scalare che il prodotto vettoriale, possiamo considerare espressioni in cui *entrambi* questi prodotti appaiono, ovvero espressioni del tipo

$$(1.33) \quad \langle \vec{v} \wedge \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

per  $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ . Questa quantità può essere calcolata direttamente, per esempio usando l'espressione appena ottenuta con il simbolo di Levi-Civita. Se  $\vec{w} = \sum_k w_k \hat{i}_k$ , allora, essendo  $\langle \hat{i}_i, \hat{i}_j \rangle = \delta_{ij}$ ,

$$(1.34) \quad \langle \vec{v} \wedge \vec{u}, \vec{w} \rangle = \left\langle \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{i}_i v_j u_k, \sum_r w_r \hat{i}_r \right\rangle = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} w_r v_j u_k \langle \hat{i}_i, \hat{i}_r \rangle \\ = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} w_i v_j u_k = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

L'espressione in termini di un determinante implica una utile identità, ovvero

$$(1.35) \quad \langle \vec{v} \wedge \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w} \rangle.$$

Sempre l'espressione in termini del determinante ci indica che se  $\langle \vec{v} \wedge \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$ , allora  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$  devono essere linearmente dipendenti, o “complanari”.

**1.3. Spazio affine euclideo.** Sia  $\mathbb{V}^d$  uno spazio vettoriale reale  $d$ -dimensionale munito di prodotto scalare. Un insieme  $\mathbb{E}^d$  è uno *spazio affine euclideo* di dimensione  $d$  se esiste una operazione  $+$ :  $\mathbb{E}^d \times \mathbb{V}^d \rightarrow \mathbb{E}^d$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall P \in \mathbb{E}^d, P + \vec{0} = P$ , dove  $\vec{0}$  è il vettore nullo in  $\mathbb{V}^d$ ;
- $\forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^d$ , e  $\forall P \in \mathbb{E}^d, (P + \vec{v}) + \vec{u} = P + (\vec{v} + \vec{u})$ ;
- $\forall P, Q \in \mathbb{E}^d$  e per ogni  $\vec{v} \in \mathbb{V}^d$ , esiste un unico  $\vec{v} \in \mathbb{V}^d$  tale che  $Q = P + \vec{v}$ . Si indica  $\vec{v} := \overrightarrow{PQ}$ .

Lo spazio vettoriale  $\mathbb{V}^d$  è detto *spazio dei vettori liberi* e può essere immaginato come lo spazio dei vettori che permettono di “spostarsi” da un certo punto di  $\mathbb{E}^d$  ad un altro.

La struttura di  $\mathbb{V}^d$  induce automaticamente una metrica su  $\mathbb{E}^d$  indotta dal prodotto scalare e della norma associata. In particolare possiamo definire la distanza tra  $P$  e  $Q$  come

$$(1.36) \quad d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Una *retta* in  $\mathbb{E}^d$  passante per  $P$  e di direzione  $\vec{v}$  è l'insieme

$$(1.37) \quad \mathcal{R} := \{Q \in \mathbb{E}^d: \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } Q = P + \lambda \vec{v}\}.$$

Analogamente un *piano* generato da  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e passante per  $P$  è definito come

$$(1.38) \quad \Pi := \{Q \in \mathbb{E}^d: \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tale che } Q = P + \lambda \vec{v} + \mu \vec{u}\}.$$

Se fissiamo un punto  $O \in \mathbb{E}^d$ , allora possiamo associare univocamente

$$(1.39) \quad P \in \mathbb{E}^d \mapsto \vec{x}_P = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{V}^d.$$

Se inoltre è data una base ortonormale  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^d$  in  $\mathbb{V}^d$ , possiamo specificare le *coordinate*<sup>1</sup> di  $\vec{x}_P$ ,  $\mathbf{x}_P = (x_k)_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d$ , e scrivere  $\vec{x}_P = \sum_{k=1}^d x_k \hat{i}_k$ . Diremo che le coordinate sono date entro il *riferimento ortonormale*  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\ldots\hat{i}_d$ . Un siffatto riferimento permette di mettere in corrispondenza un punto  $P$  con un il vettore  $\vec{x}_P = \overrightarrow{OP}$  e quindi con le coordinate  $\mathbf{x}_P = (x_k)_{k=1}^d$  e identificare  $\mathbb{E}^d \simeq \mathbb{V}^d \simeq \mathbb{R}^d$  a meno di trasformazioni affini (cioè, sostanzialmente, a meno della scelta del riferimento ortonormale). Per questa ragione, in seguito identificheremo  $P \in \mathbb{E}^d$  con  $\vec{x}_P \in \mathbb{V}^d$  e con  $\mathbf{x}_P \in \mathbb{R}^d$  a riferimento fissato.

## 2. Curve

Sia dato uno spazio euclideo  $\mathbb{E}^d$  su uno spazio vettoriale reale  $\mathbb{V}^d$ . Scelto un riferimento ortonormale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , una *curva* in questo spazio è una applicazione su un intervallo  $I \in \mathbb{R}$

$$(1.40) \quad \Gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^d \quad \text{tale che} \quad u \in I \mapsto O + \vec{\gamma}(u).$$

Nell'espressione precedente compare la funzione vettoriale

$$(1.41) \quad \vec{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{V}^d \quad \text{tale che} \quad \vec{\gamma}(u) = \sum_{k=1}^d \gamma_k(u) \hat{i}_k$$

che esprime le posizioni dei punti della curva rispetto all'origine  $O$  al variare di  $u$ . Assumeremo che ciascuna funzione  $\gamma_k: I \rightarrow \mathbb{R}$  sia differenziabile e almeno di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $I$ . La quantità

$$(1.42) \quad \vec{\gamma}'(u) := \sum_{k=1}^d \gamma'_k(u) \hat{i}_k$$

è il vettore *tangente* alla curva nel punto  $\vec{\gamma}(u)$ . Infatti, per  $u_0 \in I$ , il vettore  $\vec{\gamma}'(u_0)$  permette di esprimere un'approssimazione lineare della curva stessa come

$$(1.43) \quad \vec{\gamma}(u) = \vec{\gamma}(u_0) + \vec{\gamma}'(u_0)(u - u_0) + o(u - u_0)$$

che, per quanto detto, è una *retta* passante per  $\vec{\gamma}(u_0)$  di direzione  $\vec{\gamma}'(u_0)$ . Se  $\vec{\gamma}'(u) \neq \vec{0}$  per ogni  $u \in I$ , la curva si dice *regolare*. Data una funzione  $f: \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , l'integrale di  $f$  lungo la curva è definito come

$$(1.44) \quad \int_{\Gamma} f \, d\gamma := \int_I f(\vec{\gamma}(u)) \|\vec{\gamma}'(u)\| \, du.$$

In particolare la *lunghezza* della curva è definita come l'integrale lungo la curva dell'unità, ovvero

$$(1.45) \quad \ell := \int_{\Gamma} d\gamma = \int_I \|\vec{\gamma}'(u)\| \, du$$

---

<sup>1</sup>In seguito indicheremo con  $\vec{x} \in \mathbb{V}^d$  un vettore e con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  la collezione ordinata delle sue  $d$  coordinate rispetto ad una certa base di  $\mathbb{R}^d$ : quest'ultimo oggetto *dipende*, appunto, *dalla base* in cui viene rappresentato  $\vec{x}$ , mentre  $\vec{x}$  stesso no.

purché questo integrale esista. Analogamente, se  $\vec{F}: \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{V}^d$  è un *campo vettoriale*, ovvero una funzione definita sullo spazio euclideo a valori in  $\mathbb{V}^d$ , si definisce il suo integrale lungo la curva come

$$(1.46) \quad \int_{\Gamma} \langle \vec{F}, d\vec{\gamma} \rangle := \int_I \langle \vec{F}(\vec{\gamma}(u)), \vec{\gamma}'(u) \rangle du.$$

**2.1. Ascissa curvilinea e terna intrinseca.** Nel caso di una curva regolare, è possibile introdurre una parametrizzazione della curva particolarmente importante: scelto infatti un punto  $\vec{\gamma}(u_0)$  della curva come “origine”, possiamo indicare con

$$(1.47) \quad s(u) := \int_{u_0}^u \|\vec{\gamma}'(\hat{u})\| d\hat{u}$$

l'*ascissa curvilinea* del punto  $\vec{\gamma}(u)$ : si tratta della *distanza lungo la curva* del punto  $\vec{\gamma}(u)$  dal punto  $\vec{\gamma}(u_0)$  da prendersi con segno, assumendo che la direzione delle  $u$  crescenti indichi l'orientazione positiva della curva. La regolarità della curva implica che  $s'(u) \neq 0$  per ogni  $u \in I$ , e quindi è possibile invertire localmente la funzione e scrivere  $u \equiv u(s)$  ed introdurre

$$(1.48) \quad \vec{\gamma}(u(s)) =: \vec{\gamma}_*(s),$$

detta *parametrizzazione intrinseca* o *naturale* della curva. Usando  $s$  come parametro al posto di  $u$ , la derivata prima della curva, che indichiamo con  $\hat{v}$ , ha norma unitaria, ovvero è un *versore tangente* alla curva,

$$(1.49) \quad \hat{v}(s) := \vec{\gamma}'_*(s) = \vec{\gamma}'(u(s))u'(s) = \frac{\vec{\gamma}'(u(s))}{\|\vec{\gamma}'(u(s))\|}.$$

Da quanto detto discende anche che

$$(1.50) \quad 0 = \frac{1}{2} \frac{d\|\hat{v}(s)\|^2}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d\langle \hat{v}(s), \hat{v}(s) \rangle}{ds} = \langle \hat{v}(s), \vec{\gamma}''_*(s) \rangle$$

ovvero  $\hat{v}$  e  $\vec{\gamma}''_*(s)$  sono ortogonali: essendo  $\hat{v}$  un versore tangente alla curva,  $\vec{\gamma}''_*(s)$  è un vettore ortogonale ad essa. Se non nullo, il modulo di  $\vec{\gamma}''_*(s)$  ha un ruolo geometrico importante in quanto definisce la *curvatura* della curva: si scrive infatti che il *raggio di curvatura*  $\rho$  nel punto di ascissa curvilinea  $s$  e la corrispondente *curvatura*  $\kappa$  sono dati da

$$(1.51) \quad \rho(s) := \frac{1}{\|\vec{\gamma}''_*(s)\|} \quad \kappa(s) := \frac{1}{\rho(s)}.$$

Si osservi che nel caso di un cui la traiettoria sia rettilinea,  $\vec{\gamma}''_* = \vec{0}$ , che informalmente ha il senso di “raggio di curvatura infinito”. La denominazione “raggio di curvatura” non è casuale: in effetti, si può dimostrare che il raggio di curvatura in un certo punto è il raggio del *cerchio osculatore* della curva, ovvero del cerchio tangente alla curva in detto punto che meglio approssima la curva stessa. Chiamando

$$(1.52) \quad \hat{n}(s) = \rho(s)\vec{\gamma}''_*(s)$$

il *versore* associato a  $\vec{\gamma}''_*(s)$ , esso è detto *normale principale* della traiettoria.

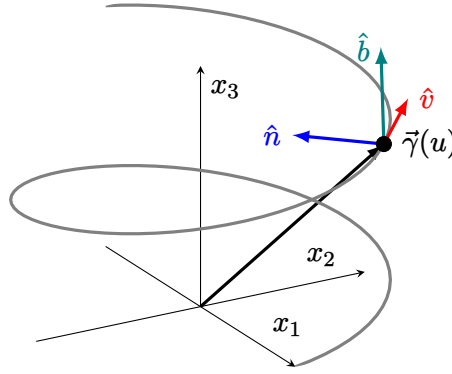


FIGURA 1. Curva elicoidale, con rappresentazione della sua terna intrinseca in una certa posizione.

Ad ascissa curvilinea  $s$  fissata, i versori  $\hat{v}(s)$  e  $\hat{n}(s)$  individuano quindi due direzioni ortogonali speciali, una tangente alla curva e l'altra ortogonale ad essa. Insieme ad essi si può definire una terza direzione, detta *binormale* e data dal versore

$$(1.53) \quad \hat{b}(s) := \hat{v}(s) \wedge \hat{n}(s).$$

La terna  $(\hat{v}, \hat{n}, \hat{b})$  è detta *terna intrinseca* ortonormale nella posizione della curva di ascissa curvilinea  $s$ . La terna dipende dalla sola geometria della curva, ed è possibile riscrivere le derivate in ciascun punto della curva rispetto a questa terna. Basta infatti osservare che  $\vec{\gamma}(u) = \vec{\gamma}_*(s(u))$  per ottenere, derivando,

$$(1.54) \quad \vec{\gamma}'(u) = s'(u) \sum_{j=1}^3 \vec{\gamma}'_j(s(u)) \hat{i}_j = s'(u) \hat{v}(s(u)).$$

Derivando ancora una volta si ha

$$(1.55) \quad \vec{\gamma}''(u) = s''(u) \hat{v}(s(u)) + s'(u)^2 \vec{\gamma}''_*(s(u)) = s''(u) \hat{v}(s(u)) + \frac{s'(u)^2}{\rho(s(u))} \hat{n}(s(u)).$$

**Esempio 1.1** — Consideriamo la curva  $\vec{\gamma}$  parametrizzata in un riferimento ortonormale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  come

$$(1.56) \quad \vec{\gamma}(u) = R \cos u \hat{i}_1 + R \sin u \hat{i}_2 + v_z u \hat{i}_3, \quad u \in [0, T],$$

dove  $R, v_z, T$  sono tutte quantità positive. Una curva siffatta è rappresentata in Fig. 1. Abbiamo

$$(1.57) \quad \vec{\gamma}'(u) = -R \sin u \hat{i}_1 + R \cos u \hat{i}_2 + v_z \hat{i}_3 \Rightarrow \|\vec{\gamma}'(u)\| = \sqrt{R^2 + v_z^2} =: v.$$

La lunghezza della curva può essere trovata come

$$(1.58) \quad \ell = \int_0^T \|\vec{\gamma}'(u)\| \, du = \sqrt{R^2 + v_z^2} T = vT.$$

In particolare, possiamo introdurre l'ascissa curvilinea

$$(1.59) \quad s(u) = \int_0^u \|\vec{\gamma}'(\tau)\| \, d\tau = v\tau \Rightarrow u \equiv u(s) = \frac{s}{v}.$$

Stando così le cose, possiamo usare le formule precedenti per derivare la parametrizzazione intrinseca della curva

$$(1.60) \quad \vec{\gamma}_*(s) = \vec{\gamma}(u(s)) = R \cos \frac{s}{v} \hat{i}_1 + R \sin \frac{s}{v} \hat{i}_2 + \frac{v_z s}{v} \hat{i}_3.$$

Da questa espressione possiamo calcolare le espressioni dei tre vettori della terna intrinseca. In particolare

$$(1.61) \quad \hat{v}(s) = \vec{\gamma}'_*(s) = -\frac{R}{v} \sin \frac{s}{v} \hat{i}_1 + \frac{R}{v} \cos \frac{s}{v} \hat{i}_2 + v_z \hat{i}_3,$$

e

$$(1.62) \quad \begin{aligned} \vec{\gamma}''_*(s) &= -\frac{R}{v^2} \cos \frac{s}{v} \hat{i}_1 - \frac{R}{v^2} \sin \frac{s}{v} \hat{i}_2 - \frac{R v_z}{v^2} \hat{i}_3 \\ \Rightarrow \rho(s) &= \frac{1}{\|\vec{\gamma}''_*(s)\|} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \hat{n}(s) = \rho(s) \vec{\gamma}''_*(s) = -\cos \frac{s}{v} \hat{i}_1 + \sin \frac{s}{v} \hat{i}_2. \end{aligned}$$

Se  $v_z = 0$ , allora  $\rho = R$ : in effetti, in questo caso il punto si muove su una circonferenza di raggio  $R$ . Il terzo elemento della terna,  $\hat{b}$ , si trova ricordando che  $\hat{b} := \hat{v} \wedge \hat{n}$ , per cui eseguendo il prodotto vettoriale

$$(1.63) \quad \hat{b}(s) = v_z \sin \frac{s}{v} \hat{i}_1 - v_z \cos \frac{s}{v} \hat{i}_2 + R \hat{i}_3.$$

### 3. Vettori applicati in $\mathbb{E}^3$

Consideriamo ora il caso specifico di uno spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}^3$  su uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}^3$ . Un *vettore applicato* è una coppia in  $(P, \vec{v}) \in \mathbb{E}^3 \times \mathbb{V}^3$  costituita da un punto dello spazio e da un vettore che si dice *applicato* a quel punto. Ad un vettore applicato è possibile associare un *momento rispetto ad un polo*  $A \in \mathbb{E}^3$ , definito come

$$(1.64) \quad \vec{\mu}_A := \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}.$$

Per quanto detto sui prodotti vettoriali,  $\|\vec{\mu}_A\| = \|\overrightarrow{AP}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = d(P, A) \|\vec{v}\| \sin \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\overrightarrow{AP}$  e  $\vec{v}$ . La quantità  $d(P, A) \sin \theta$  è detta *braccio* del momento e non è altro che la distanza tra la retta di direzione  $\vec{v}$  passante per  $P$  e il punto  $A$ . Dalla definizione si vede che  $\vec{\mu}_A$  non cambia se ad  $A$  sostituiamo  $A + \lambda \vec{v}$ , ovvero se spostiamo il polo parallelamente a  $\vec{v}$ . Il momento *assiale* del vettore applicato rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  di direzione  $\hat{u}$  passante per  $A$  non è altro che la proiezione di  $\vec{\mu}_A$  lungo  $\mathcal{R}$ , ovvero

$$(1.65) \quad \mu_{\mathcal{R}} := \langle \hat{u}, \vec{\mu}_A \rangle.$$

Il momento assiale non dipende dalla scelta di  $A$  lungo la retta  $\mathcal{R}$ .

**DEFINIZIONE 3.1.** Un *sistema* di vettori applicati è una collezione  $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^N$  di  $N$  di coppie costituite da punto di applicazione e vettore. Il momento polare totale di  $\mathcal{S}$  rispetto al polo  $A \in \mathbb{E}^3$  e il momento assiale rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  passante per  $A$  di direzione  $\hat{u}$  sono dati da

$$(1.66) \quad \vec{\mu}_A := \sum_i \vec{\mu}_{A,i} = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{v}_i, \quad \mu_{\mathcal{R}} := \sum_i \langle \hat{u}, \vec{\mu}_{A,i} \rangle = \langle \hat{u}, \vec{\mu}_A \rangle.$$

A questo sistema di vettori applicati si associa il *vettore risultante*

$$(1.67) \quad \vec{R} := \sum_i \vec{v}_i.$$

I due vettori  $\vec{R}$  e  $\vec{\mu}_A$  sono detti *vettori caratteristici* di  $\mathcal{S}$ . Vale il seguente risultato

LEMMA 3.1 (Legge del cambiamento di polo). *Se  $\vec{\mu}_A$  è il momento totale del sistema di vettori applicato rispetto ad  $A$ , allora*

$$(1.68) \quad \vec{\mu}_B = \vec{\mu}_A + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si può vedere direttamente essendo

$$(1.69) \quad \begin{aligned} \vec{\mu}_B &= \sum_i \overrightarrow{BP_i} \wedge \vec{v}_i = \sum_i (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP_i}) \wedge \vec{v}_i = \overrightarrow{BA} \wedge \sum_i \vec{v}_i + \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{v}_i \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} + \vec{\mu}_A = \vec{\mu}_A + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}. \quad \square \end{aligned}$$

COROLLARIO 3.2. *Il momento  $\vec{\mu}_A$  non dipende dal polo se e soltanto se  $\vec{R} = \vec{0}$ .*

Un particolare caso di sistema di vettori applicati è una *coppia*, costituita da *due* vettori applicati a risultante nullo. Una coppia ha quindi momento indipendente dal polo che può essere perciò calcolato scegliendo, per esempio, uno dei due punti di applicazione come polo. Se il sistema è  $\mathcal{S} = \{(P_1, \vec{v}), (P_2, -\vec{v})\}$ , il momento è quindi

$$(1.70) \quad \vec{\mu} = \overrightarrow{P_2P_1} \wedge \vec{v},$$

il cui braccio è detto *braccio della coppia*.

Ad un sistema di vettori applicati si associa il cosiddetto *invariante scalare*.

DEFINIZIONE 3.2. Dato un sistema di vettori applicati  $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^N$ , si definisce invariante scalare la quantità

$$(1.71) \quad \mathcal{I} := \langle \vec{\mu}_A, \vec{R} \rangle.$$

Lasciamo come esercizio la dimostrazione che l'invariante scalare non dipende dalla scelta del polo  $A$ .

**3.1. Asse centrale.** Dato un sistema di vettori applicati  $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^N$ , se il vettore risultante è non nullo è possibile individuare una retta speciale, detta *asse centrale* o *retta di applicazione del vettore risultante*.

PROPOSIZIONE 3.3 (Asse centrale). *Sia  $\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i \neq \vec{0}$ . Esiste un asse  $\mathcal{A}$ , detto asse centrale, parallelo ad  $\vec{R}$  tale che, per ogni suo punto  $Z \in \mathcal{A}$ ,  $\vec{\mu}_Z$  è parallelo a  $\mathcal{A}$  e ha modulo minimo rispetto ad ogni altro punto nello spazio. Inoltre, se  $\mathcal{I} = 0$ , allora  $\vec{\mu}_A = \vec{0}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Il vettore  $\vec{\mu}_X$  avrà una componente parallela a  $\vec{R}$  ed una ortogonale ad essa. Cerchiamo ora il punto  $Y$  nel piano ortogonale al vettore  $\vec{R}$  passante per  $A$  tale che  $\vec{\mu}_Y \wedge \vec{R} = \vec{0}$ : in altre parole, assumendo che esista un asse centrale  $\mathcal{A}$ , cerchiamone il punto  $Y$  più vicino a  $X$ . Abbiamo

$$(1.72) \quad \vec{0} = \vec{\mu}_Y \wedge \vec{R} = (\vec{\mu}_X + \vec{R} \wedge \overrightarrow{XY}) \wedge \vec{R}$$

$$= \vec{\mu}_X \wedge \vec{R} + \|\vec{R}\|^2 \overrightarrow{XY} - \langle \overrightarrow{XY}, \vec{R} \rangle \vec{R} = \vec{\mu}_X \wedge \vec{R} + \|\vec{R}\|^2 \overrightarrow{XY},$$

dove abbiamo usato l'identità  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  e il fatto che  $\langle \overrightarrow{XY}, \vec{R} \rangle = 0$ . Ciò significa che

$$(1.73) \quad \overrightarrow{XY} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\mu}_X}{\|\vec{R}\|^2}.$$

Pertanto un punto  $Z$  della retta passante per  $Y$  con direzione  $\vec{R}$  è individuato in generale da un vettore

$$(1.74) \quad \overrightarrow{XZ} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\mu}_X}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$$

per un qualche valore  $\lambda \in \mathbb{R}$ : l'equazione precedente fornisce, al variare di  $\lambda$ , tutti i punti dell'asse centrale. Tali punti hanno per costruzione  $\vec{\mu}_Z$  parallela a  $\vec{R}$ . D'altra parte, nella notazione sopra,  $\vec{\mu}_X = \vec{\mu}_Y + \vec{R} \wedge \overrightarrow{YX}$ , da cui, essendo  $\vec{\mu}_Y$  e  $\vec{R} \wedge \overrightarrow{YX}$  ortogonali,  $\|\vec{\mu}_X\|^2 = \|\vec{\mu}_Y\|^2 + \|\vec{R} \wedge \overrightarrow{YX}\|^2 \geq \|\vec{\mu}_Y\|^2$ : il momento totale è in modulo minimo sull'asse.  $\square$

**3.2. Sistemi equivalenti.** Due sistemi di vettori applicati che hanno stesso vettore risultante e stesso momento risultante si dicono *equivalenti*. Se due sistemi sono equivalenti rispetto ad un certo polo, lo sono rispetto ad ogni altro in quanto il vettore risultante che appare nella legge di cambio di polo è lo stesso per entrambi. Dato un sistema di vettori applicati  $\mathcal{S}$ , se ne può ottenere uno equivalente  $\hat{\mathcal{S}}$  tramite le seguenti operazioni:

- traslando un vettore del sistema  $\mathcal{S}$  lungo la sua retta di applicazione;
- sostituendo un sottoinsieme di vettori di  $\mathcal{S}$  con il loro vettore risultante (su una opportuna retta di applicazione);
- aggiungendo o sottraendo un insieme di vettori avente vettore risultante e momento globali nulli.

Vale il seguente teorema.

**TEOREMA 3.4.** *Sia dato un sistema di vettori applicati  $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^N$  con risultante  $\vec{R}$  e momento risultante  $\vec{\mu}_A$ . È sempre possibile costruire un sistema equivalente  $\hat{\mathcal{S}}$  costituito al più da un vettore uguale al vettore risultante e ad una coppia.*

**DIMOSTRAZIONE.** Possono esserci quattro possibili casi, che possiamo considerare uno per uno.

$\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{\mu} = \vec{0}$ : il sistema è equivalente ad un sistema nullo  $\hat{\mathcal{S}} = \emptyset$ .

$\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{\mu} \neq \vec{0}$ : il sistema è equivalente ad una coppia  $\hat{\mathcal{S}} = \{(P_1, \vec{v}), (P_2, -\vec{v})\}$ , in cui  $P_1$  e  $P_2$  sono scelti in modo che  $\vec{\mu} = \overrightarrow{P_2 P_1} \wedge \vec{v}$ .

$\vec{R} \neq \vec{0}$  e  $\mathcal{I} = 0$ : il sistema è equivalente ad  $\hat{\mathcal{S}} = \{(P, \vec{R})\}$ , costituito dal solo vettore  $\vec{R}$  applicato in un punto  $P$ .

$\vec{R} \neq \vec{0}$  e  $\mathcal{I} \neq 0$ : il sistema è equivalente a  $\hat{\mathcal{S}} = \{(P_1, \vec{v}), (P_2, -\vec{v}), (P_2, \vec{R})\}$ , di modo che  $\vec{\mu}_{P_2} = \overrightarrow{P_2 P_1} \wedge \vec{v}$  e occorre scegliere  $P_1$  e  $\vec{v}$  di modo che  $\langle \vec{R}, \hat{\vec{\mu}}_{P_2} \rangle = \mathcal{I}$ .  $\square$

Consideriamo ora alcuni speciali sistemi aventi in comune la proprietà di avere un invariante scalare nullo.



**DEFINIZIONE 3.3** (Sistema piano). Un sistema di vettori si dice piano se tanto i vettori quanto i loro punti di applicazione appartengono ad uno stesso piano in  $\mathbb{E}^3$ .

Un sistema piano ha quindi  $\vec{R}$  appartenente al medesimo piano  $\Pi$  a cui appartengono i punti di applicazione del sistema, mentre  $\vec{\mu}_A$  rispetto ad un polo  $A \in \Pi$  sarà ortogonale a  $\Pi$ . Per un sistema piano, quindi *l'invariante scalare  $\mathcal{I}$  è sempre nullo*.

Vi sono però altri casi in cui l'invariante scalare può essere nullo.

**DEFINIZIONE 3.4** (Sistema di vettori concorrenti). Un sistema di vettori concorrenti in  $P$  è tale che le rette di applicazione di tutti i vettori si incontrano in un unico punto  $P$ .

In questo caso, avendo tutti i vettori momento nullo rispetto a  $P$ ,  $\mathcal{I} = 0$ .

**DEFINIZIONE 3.5** (Sistema di vettori paralleli). Un sistema di vettori paralleli è tale che le rette di applicazione di tutti i vettori sono parallele.

In questo caso,  $\vec{R}$  avrà la stessa direzione di tutti i vettori, mentre il momento corrispondente sarà ortogonale ad esso, e di conseguenza anche in questo caso l'invariante scalare è nullo. Un sistema di vettori paralleli  $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^N$  permette di introdurre il concetto di *centro del sistema*. Dato che, in un siffatto sistema esiste un versore  $\hat{v}$  tale per cui  $\vec{v}_i = v_i \hat{v}$  per ogni  $i$ , e di conseguenza  $\vec{R} = R \hat{v}$  con  $R := \sum_i v_i$ , scegliendo un punto  $O$  come origine e un punto  $Z$  sull'asse centrale, avremo che  $\vec{\mu}_Z = \vec{0}$ , per via del fatto che l'invariante cinematico è nullo: ciò significa che

$$(1.75) \quad \vec{\mu}_Z = \sum_{k=1}^N \overrightarrow{ZP_k} \wedge \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N (\overrightarrow{ZO} + \overrightarrow{OP_k}) \wedge \vec{v}_k = \left( \sum_{k=1}^N v_k \overrightarrow{OP_k} - R \overrightarrow{OZ} \right) \wedge \hat{v} = \vec{0},$$

ovvero, per un qualche  $\lambda$

$$(1.76) \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N v_k \overrightarrow{OP_k} + \lambda \hat{v}.$$

Il punto  $C$  individuato rispetto ad  $O$  dal vettore

$$(1.77) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N v_k \overrightarrow{OP_k}$$

si dice *centro del sistema di vettori paralleli*: esso è l'unico punto che non dipende dalla direzione  $\hat{v}$  ma solo dalle posizioni dei punti di applicazione. Si tratta di una sorta di “media pesata” delle posizioni dei vari vettori. Infine, vale la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 3.6** (Sistema equilibrato). Un sistema di vettori applicati si dice equilibrato se  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{\mu} = \vec{0}$ .



## CAPITOLO 2

### Cinematica

#### 1. Quantità fondamentali della cinematica

Lo *spaziotempo* della meccanica è modellizzato componendo uno spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}^3$ , che svolge il ruolo di “spazio fisico”, con uno spazio euclideo unidimensionale  $\mathbb{E}^1$  che svolge il ruolo di “tempo”. Il risultato è uno spazio affine  $\mathbb{A}^4 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ . Fissata una opportuna origine “temporale” in  $\mathbb{E}^1$  ed un versore in esso, che ne esprime l’orientazione, ogni elemento  $e \in \mathbb{A}^4$  di questo spazio, detto *evento*, può essere associato ad un valore reale  $t \in \mathbb{R}$ , che denota l’*istante di tempo* in cui avviene l’evento. Analogamente, fissato un riferimento ortonormale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  in  $\mathbb{E}^3$ , ogni elemento in  $\mathbb{E}^3$  viene messo in corrispondenza univoca con una terna di coordinate  $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1}^3 \in \mathbb{R}^3$ . Complessivamente, quindi, un evento  $e \in \mathbb{A}^4$  è associato ad una quadrupletta  $(t, \mathbf{x})$  di coordinate temporali e spaziali<sup>1</sup>. In questo spaziotempo si introduce il concetto primitivo di *punto materiale*  $P$  come di un corpo di dimensioni trascurabili. Questo oggetto è associato ad una *linea universo*, ovvero ad una mappa su un certo intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  tale che

$$(2.1) \quad t \in I \mapsto (t, \mathbf{x}_P(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

dove  $\mathbf{x}_P(t) := (x_k(t))_{k=1}^3$  sono le coordinate del vettore dipendente dal tempo<sup>2</sup>

$$(2.2) \quad \overrightarrow{OP}(t) \equiv \vec{x}_P(t) = x_1(t)\hat{i}_1 + x_2(t)\hat{i}_2 + x_3(t)\hat{i}_3.$$

Si tratta, in altre parole, di una curva, detta *traiettoria di  $P$* , che assumeremo avere componenti continue e almeno due volte differenziabili rispetto alla variabile tempo  $t$ . A tale traiettoria possiamo associare un vettore *velocità*, definito come la derivata prima di  $\vec{x}_P(t)$  rispetto a  $t$ ,

$$(2.3) \quad \dot{\vec{x}}_P(t) := \frac{d\vec{x}_P(t)}{dt} = \dot{x}_1(t)\hat{i}_1 + \dot{x}_2(t)\hat{i}_2 + \dot{x}_3(t)\hat{i}_3$$

e il vettore *accelerazione*

$$(2.4) \quad \ddot{\vec{x}}_P(t) := \frac{d^2\vec{x}_P(t)}{dt^2} = \ddot{x}_1(t)\hat{i}_1 + \ddot{x}_2(t)\hat{i}_2 + \ddot{x}_3(t)\hat{i}_3.$$

In seguito utilizzeremo talvolta la notazione  $\vec{v}_P := \dot{\vec{x}}_P$  e  $\vec{a}_P := \ddot{\vec{x}}_P$ : velocità e accelerazione sono *vettori applicati*, ovvero vettori da intendersi appaiati con un punto di applicazione  $P$ . Nel caso in cui  $\vec{x}_P$  sia una curva regolare, è possibile e utile introdurre, come abbiamo

<sup>1</sup>Lo spaziotempo così introdotto ha caratteristiche “aristoteliche”: si tratta perciò di una caratterizzazione imprecisa, ma non approfondiremo ulteriormente questo aspetto per brevità.

<sup>2</sup>Nel seguito, quando sarà specificato un riferimento cartesiano, indicheremo con  $\vec{x}_P$  il vettore  $\overrightarrow{OP}$  per brevità.

visto, una parametrizzazione in termini di ascissa curvilinea  $s: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  definita come

$$(2.5) \quad s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\vec{x}}_P(\tau)\| \, d\tau$$

dove  $\vec{x}_P(t_0)$  funge da “origine” lungo la curva. In questo contesto, in cui la curva è una traiettoria di un punto materiale, la funzione  $s$  è anche detta *legge oraria*. Essa quantifica la lunghezza della traiettoria percorsa dal tempo iniziale  $t_0$  al tempo  $t$ , con segno. Come abbiamo anticipato, permette di riparametrizzare la traiettoria, in modo che si possa scrivere  $\vec{\gamma}_*(s) = \vec{x}(t(s))$ : in questa parametrizzazione,  $\hat{v}_P(s) := \vec{\gamma}'_*(s)$  è il *versore tangente* alla traiettoria nel punto di ascissa curvilinea  $s$ . La parametrizzazione intrinseca può essere interpretata perciò come il moto di un punto materiale che percorre la stessa traiettoria di  $P$  a velocità unitaria. Inoltre, in conseguenza di quanto detto sulle curve in generale, velocità e accelerazione del punto possono scriversi in termini della terna intrinseca della curva come

$$(2.6) \quad \dot{\vec{x}}_P = \dot{s}\hat{v}_P, \quad \ddot{\vec{x}}_P = \ddot{s}\hat{v}_P + \frac{\dot{s}^2}{\rho(s)}\hat{n}_P,$$

dove  $\rho(s) = \|\vec{\gamma}''_*(s)\|$  e  $\hat{n}_P := \rho(s)\vec{\gamma}''_*(s)$  sono il raggio di curvatura e il versore normale della traiettoria rispettivamente. Inoltre, dalla formula precedente si nota che  $\hat{v}_P$  è precisamente il *versore* associato alla velocità del punto (da cui la notazione adottata). Le relazioni trovate mostrano che, se la velocità è sempre tangente alla traiettoria, l'accelerazione ha in generale una componente *parallela* alla traiettoria, nulla solo se  $\ddot{s} = 0$ , e una componente *ortogonale*, tanto più rilevante (a parità di  $\dot{s}$ ) quanto più piccolo è il raggio di curvatura  $\rho$ . D'altra parte, né velocità né accelerazione hanno componenti lungo  $\hat{b}_P := \hat{v}_P \wedge \hat{n}_P$ . Le decomposizioni sopra ancora una volta separano l'informazione puramente *cinematica* relativa al *come* la curva viene percorsa (contenuta nella funzione  $s$ ) da quella puramente geometrica relativa alla *forma* della traiettoria (contenuta in  $\hat{v}_P$  e  $\hat{n}_P$ ).

## 2. Cambi di riferimento: cinematica relativa

Fissato un riferimento cartesiano in  $\mathbb{E}^3$ , le relazioni tra punto in tale spazio e vettore associato e tra vettore associato e sue coordinate sono biunivoche e, fintantoché non si esegue un cambio di riferimento, i tre oggetti possono essere considerati identici. Ciononostante, è talvolta utile passare da un certo riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  ad un diverso riferimento  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , in generale *mobile* rispetto al primo, in modo da semplificare l'analisi di complessi sistemi in moto: di conseguenza è necessario capire come, passando da un riferimento ad un altro, le rappresentazioni delle quantità cinematiche (posizione, velocità, accelerazione) vengano riscritte in termini della nuova base e del moto della nuova origine.

Supponiamo perciò di disporre, come anticipato, di un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e di voler esprimere le quantità di interesse in un nuovo riferimento “mobile” rispetto al primo,  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , che assumiamo positivamente orientato, in cui  $O_*$  (la nuova origine) è un punto identificato dal vettore  $\vec{x}_*$  rispetto al vecchio riferimento. In generale,  $\vec{x}_* \equiv \vec{x}_*(t) = \overrightarrow{OO_*}$  dipenderà dal tempo, ovvero  $O_*$  cambierà posizione rispetto ad  $O$ , vedasi Fig. 1.

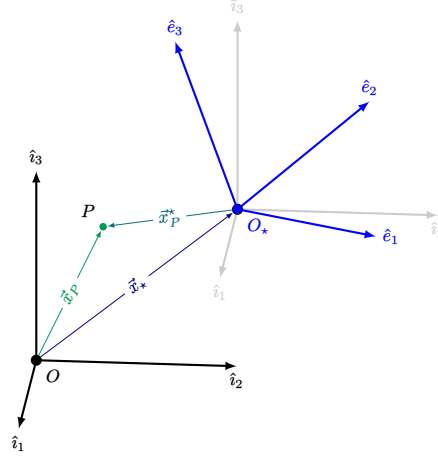


FIGURA 1. Rappresentazione pittorica di due riferimenti nello spazio:  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  ha una origine  $O_*$  individuata da  $\vec{x}_*$  rispetto al riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , e assi rigidamente ruotati. Un punto  $P$ , individuato dal vettore  $\vec{x}_P$  nel riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , è individuato da un diverso vettore  $\vec{x}_P^*$  nel riferimento  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  di modo che  $\vec{x}_P = \vec{x}_P^* + \vec{x}_*$ .

Ugualmente  $\hat{e}_a(t)$ ,  $a = 1, 2, 3$ , sono versori che in generale evolvono nel tempo rispetto al riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , che denomineremo “fisso” d’ora in poi<sup>3</sup>. La terna mobile  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^3$  deve essere ortonormale in ogni istante di tempo: così, per esempio, se osserviamo l’evoluzione nell’intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ , varrà

$$(2.7) \quad \hat{e}_3(t) = \hat{e}_1(t) \wedge \hat{e}_2(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Supponiamo ora di avere un punto materiale  $P$ , e sia  $P(t)$  la posizione che esso occupa nello spazio euclideo nell’istante  $t$ . Rispetto al riferimento “fisso”, tale posizione è individuata dal vettore  $\vec{x}_P(t) = \overrightarrow{OP(t)}$ . Il vettore  $\vec{x}_P^*(t) := \overrightarrow{O_*P} = \vec{x}_P(t) - \vec{x}_*(t)$ , che individua il punto nel *nuovo* riferimento, può essere decomposto nella nuova base come

$$(2.8) \quad \vec{x}_P^*(t) = \sum_{a=1}^3 x_a^*(t) \hat{e}_a(t), \quad x_a^*(t) := \langle \vec{x}_P^*, \hat{e}_a(t) \rangle = \langle \vec{x}_P(t) - \vec{x}_*(t), \hat{e}_a(t) \rangle$$

ovvero

$$(2.9) \quad \vec{x}_P(t) = \vec{x}_*(t) + \vec{x}_P^*(t) = \vec{x}_*(t) + \sum_{a=1}^3 x_a^*(t) \hat{e}_a(t).$$

Come sappiamo dall’algebra lineare, a  $t$  fissato, è possibile individuare una matrice di cambio di base  $\mathbf{R}(t)$  che permette di passare dalla base fissa  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^3$  alla base mobile

<sup>3</sup>In questa sezione, indicheremo con un  $\vec{u}_*$  una quantità *associata al riferimento mobile* ma espressa *relativamente al riferimento fisso*, mentre indicheremo con  $\vec{u}^*$  una quantità espressa rispetto al sistema mobile.

$\{\hat{e}_a\}_{a=1}^3$ , scrivendo la nuova base in termini della vecchia,

$$(2.10) \quad \hat{e}_a(t) = \sum_{k=1}^3 R_{ak}(t) \hat{i}_k, \quad a = 1, 2, 3.$$

Questa matrice  $\mathbf{R}(t) = (R_{ak}(t))_{ak}$  sarà *ortogonale*, ovvero  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_3$ : essa esegue infatti un cambio di base tra basi ortonormali, ed esprime una *rotazione rigida degli assi*, fornendo una terna cartesiana ortonormale a partire da una diversa terna cartesiana ortonormale senza agire sull'origine né sulla lunghezza dei vettori, ed avrà  $\det \mathbf{R} = 1$ , in modo da presentare l'orientazione. In questo modo si ha

$$(2.11) \quad \vec{x}_P(t) = \vec{x}_*(t) + \sum_{a=1}^3 x_a^*(t) \hat{e}_i(t) = \vec{x}_*(t) + \sum_{a=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_a^*(t) R_{ak}(t) \hat{i}_k.$$

Vale la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 2.1.** Si dice che  $P$  evolve in maniera *solidale* col nuovo riferimento se in tale riferimento è individuato da un vettore  $\vec{x}_P^*$  tale che

$$(2.12) \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{x}_P^*(t), \hat{e}_a(t) \rangle = 0, \quad a = 1, 2, 3.$$

In altre parole, un punto che si muove in modo solidale con la terna mobile ha coordinate  $x_a^*$  indipendenti dal tempo. Di conseguenza, la dipendenza dal tempo appare, in Eq. (2.11), solo in quantità che descrivono il moto del riferimento mobile rispetto a quello fisso.

**2.1. Angoli di Eulero.** Come abbiamo detto, la matrice di cambio di base  $\mathbf{R}$  deve essere ortogonale, ovvero deve essere tale che  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_3$ , e deve preservare l'orientazione della base, ovvero  $\det \mathbf{R} = 1$ . La prima espressione può essere scritta esplicitamente per ogni coppia  $(i, j)$  come

$$(2.13) \quad \sum_{k=1}^3 R_{ak} R_{bk} = \delta_{ab}, \quad a, b \in \{1, 2, 3\}.$$

Questa condizione fornisce sei equazioni distinte per nove quantità da fissare, ovvero gli elementi di  $\mathbf{R}$ . In altre parole, ogni matrice  $\mathbf{R}$  è identificata da soli *tre* parametri arbitrari: ciò significa che per caratterizzare un cambio di riferimento ortonormale sono necessarie le tre coordinate di  $\vec{x}_*(t)$ , cioè della nuova origine rispetto al riferimento fisso, e tre parametri per fissare la matrice  $\mathbf{R}(t)$ , come si vede dall'Eq. (2.11). Per introdurre una opportuna parametrizzazione di  $\mathbf{R}$  utilizzeremo il metodo di Eulero: questo metodo *non* è unico, e in effetti altre scelte di metodo sono possibili, ma è quello più diffusamente utilizzato per via di una serie di vantaggi operativi.

Immaginiamo quindi di voler fare il cambio di terna ortonormale

$$(2.14) \quad (\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3) \rightarrow (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3).$$

Supponiamo che  $\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3 \neq \vec{0}$  (ovvero che  $\hat{i}_3$  e  $\hat{e}_3$  *non* siano paralleli) e definiamo il versore

$$(2.15) \quad \hat{n} := \frac{\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3}{\|\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3\|}.$$

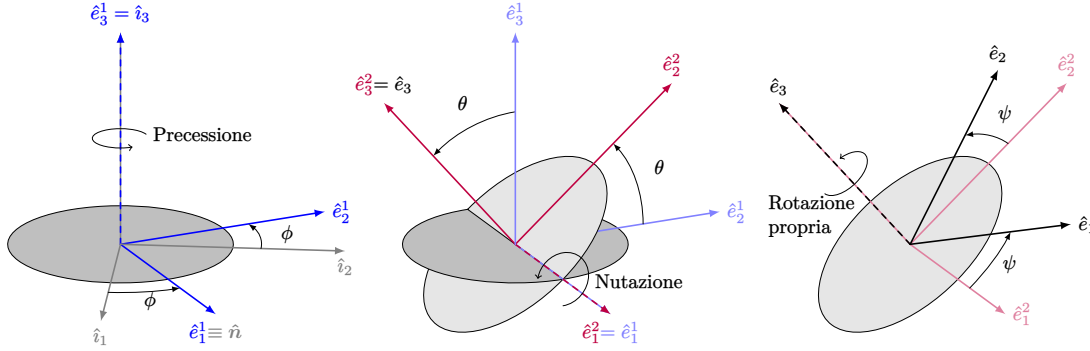


FIGURA 2. Angoli di Eulero. Il passaggio dalla terna  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$  alla terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  avviene con tre rotazioni successive: (1) precessione attorno a  $\hat{i}_3$  (tenuto fisso) che fornisce la nuova terna  $\{\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1\}$ , con  $\hat{e}_3^1 = \hat{i}_3$ ; (2) nutazione attorno a  $\hat{e}_1^1$  (tenuto fisso) che fornisce la nuova terna  $\{\hat{e}_1^2, \hat{e}_2^2, \hat{e}_3^2\}$ , con  $\hat{e}_1^2 = \hat{e}_1^1$  e  $\hat{e}_3^2 \equiv \hat{e}_3$ ; (3) rotazione propria attorno a  $\hat{e}_3^2 \equiv \hat{e}_3$  (tenuto fisso) che porta infine alla terna desiderata.

Questo versore indica il cosiddetto *asse dei nodi*. In base a questo asse possiamo definire tre rotazioni in senso antiorario rispetto ad un asse di altrettanti angoli, detti *angoli di Eulero*, che possiamo pensare di eseguire in successione. Con riferimento alla Fig. 2, procediamo quindi come segue.

**Precessione:** Eseguiamo una rotazione di un angolo  $\phi \in [0, 2\pi)$  attorno a  $\hat{i}_3$ , in modo da portare a coincidere  $\hat{i}_1$  con  $\hat{n}$ . Chiamiamo i nuovi assi ottenuti dopo questa rotazione  $(\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1)$ , dove in particolare  $\hat{e}_1^1 = \hat{n}$  e  $\hat{e}_3^1 = \hat{i}_3$ .

**Nutazione:** Eseguiamo ora una rotazione di un angolo  $\theta \in [0, \pi]$  attorno a  $\hat{e}_1^1$ , in modo da portare  $\hat{e}_3^1$  su  $\hat{e}_3$ . Alla fine di questa rotazione otteniamo una nuova terna,  $(\hat{e}_1^2, \hat{e}_2^2, \hat{e}_3^2)$ , in cui  $\hat{e}_1^2 = \hat{e}_1^1$  (asse rimasto invariato) e  $\hat{e}_3^2 = \hat{e}_3$  (terzo asse uguale a quello finale).

**Rotazione propria:** Eseguiamo un'ultima rotazione di un angolo  $\psi \in [0, 2\pi)$  attorno all'asse  $\hat{e}_3^2$  per portare a coincidere gli assi  $\hat{e}_1^2$  e  $\hat{e}_2^2$  con  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ . A questo punto abbiamo ottenuto la terna finale.

La successione descritta

$$(2.16) \quad (\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3) \xrightarrow[\phi]{\text{precessione}} (\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1) \xrightarrow[\theta]{\text{nutazione}} (\hat{e}_1^2, \hat{e}_2^2, \hat{e}_3^2) \xrightarrow[\psi]{\text{rot. propria}} (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$$

corrisponde perciò all'applicazione di tre matrici di rotazione, in successione. Se è dato un vettore  $\vec{v} = \sum_j v_j \hat{i}_j$ , la sua decomposizione nella nuova base  $\vec{v} = \sum_a v_a^* \hat{e}_a$  si ottiene applicando queste rotazioni alle componenti nella base di partenza,

$$(2.17) \quad \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rot. propria}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{Nutazione}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Precessione}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

**R**

Eseguendo i prodotti si trova l'espressione esplicita di  $\mathbf{R}$ ,

$$(2.18) \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta & -\sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La parametrizzazione della rotazione  $\mathbf{R}$  qui introdotta richiede che  $\hat{i}_3$  e  $\hat{e}_3$  non siano paralleli: si può dimostrare tuttavia che questa difficoltà, ovvero l'impossibilità di associare biunivocamente tutte le rotazioni ad un singolo tipo di parametrizzazione, appare per *qualsiasi* costruzione. Se d'altra parte  $\hat{e}_3 = \hat{i}_3$ , è chiaro che abbiamo bisogno solo di un movimento di rotazione, e più precisamente di una precessione di un certo angolo  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , in cui  $\hat{i}_1 \rightarrow \hat{e}_1$ , per cui

$$(2.19) \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso,  $\alpha$  è semplicemente detto *angolo di rotazione*. Si noti che la forma sopra di  $\mathbf{R}$  si ottiene anche dalla costruzione di Eulero nel limite  $\theta \rightarrow 0$  e identificando  $\alpha = \phi + \psi$  (la degenerazione emerge dal fatto che ci sono infiniti valori di  $\psi$  e  $\phi$  associati allo stesso  $\alpha$ ).

**2.2. Velocità angolare e formule di Poisson.** Il riferimento mobile dipende, in generale, dalla variabile temporale  $t$  e, di conseguenza, la matrice  $\mathbf{R}$  dipende a sua volta dal tempo,  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(t)$ . Supponiamo per semplicità che la base mobile sia tale che, nell'istante  $t = 0$ ,  $\hat{e}_i(0) = \hat{i}_i(0)$  per  $i = 1, 2, 3$ , ovvero nell'istante  $t = 0$  le due basi coincidono. Questo vuol dire che  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ , matrice identità. Vale il seguente Lemma.

**LEMMA 2.1.** *Sia  $\mathbf{R}(s)$  una matrice ortogonale di dimensione  $3 \times 3$ , differenziabile in un intorno di  $s = 0$ , ovvero tale che ogni suo elemento  $R_{ij}(s)$  sia differenziabile in un intorno di  $s = 0 \forall i, j$ . Supponiamo inoltre che  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ , matrice identità. La matrice*

$$(2.20) \quad \Omega := \left. \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \right|_{s=0},$$

*è antisimmetrica, ovvero  $\Omega = -\Omega^\top$ . Inoltre, esiste un vettore  $\vec{\omega}$  tale che, dette  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  il vettore di componenti di un generico vettore  $\vec{v}$ ,  $\Omega \mathbf{v}$  fornisce le componenti di  $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo  $\mathbf{R}(s)$  ortogonale, in un intorno di  $s = 0$  potremo scrivere

$$(2.21) \quad \mathbf{R}(s)^\top \mathbf{R}(s) = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}(s)^\top}{ds} \mathbf{R}(s) = -\mathbf{R}(s)^\top \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \xrightarrow{s=0} \Omega^\top = -\Omega.$$

Il fatto che  $\Omega$  sia antisimmetrica implica che essa ha la forma

$$(2.22) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Messa in questa forma, se  $\vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \hat{i}_k$ , allora

$$(2.23) \quad \Omega \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix}.$$



Quelle ottenute sono precisamente le componenti del vettore  $\vec{\omega} \wedge \vec{v}$ , avendo usato  $\vec{\omega} = \sum_k \omega_k \hat{v}_k$ .  $\square$

**TEOREMA 2.2 (Poisson).** *Sia  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^3$  una terna ortonormale tale che  $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$  che evolve nel tempo rispetto ad una terna fissa  $\{\hat{v}_k\}_{k=1}^3$ . Allora esiste un unico vettore  $\vec{\omega}$ , detto vettore velocità angolare tale per cui*

$$(2.24) \quad \dot{\hat{e}}_a = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_a, \quad a = 1, 2, 3.$$

*Inoltre, ogni terna solidale alla terna  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^3$  evolve con lo stesso vettore velocità angolare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Da quanto detto sopra, se vogliamo passare da una base calcolata al tempo  $t$  ad una base calcolata al tempo  $t + \tau$ , possiamo eseguire una *rotazione* con una matrice  $\mathbf{R}(\tau)$ , tale che  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ , ovvero se  $\hat{e}_a(t + \tau) = \sum_{k=1}^3 e_{ak}(t + \tau) \hat{v}_k$  allora le nuove componenti si scrivono rispetto alle vecchie come

$$(2.25) \quad \hat{e}_a(t + \tau) = \mathbf{R}(\tau) \hat{e}_a(t) \Rightarrow \frac{\hat{e}_a(t + \tau) - \hat{e}_a(t)}{\tau} = \frac{\mathbf{R}(\tau) - \mathbf{I}}{\tau} \hat{e}_a(t) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{d\hat{e}_a(t)}{dt} = \dot{\mathbf{R}}(0) \hat{e}_a(t),$$

dove  $\hat{e}_a(t) = (e_{ak}(t))_{k=1}^3 \in \mathbb{R}^3$  contiene le componenti di  $\hat{e}_a(t)$  rispetto alla base fissa, e nell'ultimo passaggio abbiamo usato il Lemma 2.1. Per quanto visto sopra  $\dot{\mathbf{R}}(0) \hat{e}_a$  sono le coordinate di un vettore che può scriversi come  $\vec{\omega} \wedge \hat{e}_a$  per un opportuno  $\vec{\omega}$ , il che vuol dire che  $\dot{\hat{e}}_a = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_a$  come da tesi. Per concludere la dimostrazione, supponiamo infine di avere una diversa terna ortonormale  $\{\hat{b}_i\}_{i=1}^3$  solidale alla terna  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^3$ . Abbiamo che

$$(2.26) \quad \dot{\hat{b}}_i = \sum_{a=1}^3 \frac{d}{dt} (\langle \hat{b}_i, \hat{e}_a \rangle \hat{e}_a) = \sum_{a=1}^3 \frac{d\langle \hat{b}_i, \hat{e}_a \rangle}{dt} \hat{e}_a + \sum_{a=1}^3 \langle \hat{b}_i, \hat{e}_a \rangle \dot{\hat{e}}_a = \vec{\omega} \wedge \sum_{a=1}^3 \langle \hat{b}_i, \hat{e}_a \rangle \hat{e}_a = \vec{\omega} \wedge \hat{b}_i$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\langle \hat{b}_i, \hat{e}_a \rangle$  non dipende dal tempo essendo la terna  $\{\hat{b}_i\}_{i=1}^3$  solidale.  $\square$

Il teorema ha come corollario che  $\langle \hat{e}_a, \dot{\hat{e}}_a \rangle = 0$  per ogni  $a$ . Questo fatto discende anche, più semplicemente, dal fatto che la base mobile  $\{\hat{e}_a(t)\}_{a=1}^3$  deve mantenersi ortonormale in ogni istante,

$$(2.27) \quad \langle \hat{e}_a, \hat{e}_b \rangle = \delta_{ab} \Rightarrow 0 = \frac{d\langle \hat{e}_a, \hat{e}_b \rangle}{dt} = \langle \dot{\hat{e}}_a, \hat{e}_b \rangle + \langle \hat{e}_a, \dot{\hat{e}}_b \rangle, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

e quindi, in particolare, per  $a = b$ ,  $\langle \hat{e}_a, \dot{\hat{e}}_a \rangle = 0$ . Si noti che la formula nell'enunciato del Teorema di Poisson può essere invertita.

**COROLLARIO 2.3.** *Il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  si può scrivere come*

$$(2.28) \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \hat{e}_a \wedge \dot{\hat{e}}_a.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Usando l'identità  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ , basta infatti osservare che

$$(2.29) \quad \sum_{a=1}^3 \hat{e}_a \wedge \dot{\hat{e}}_a = \sum_{a=1}^3 \hat{e}_a \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_a) = \sum_{a=1}^3 (\vec{\omega} - \langle \vec{\omega}, \hat{e}_a \rangle \hat{e}_a) = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega},$$

da cui segue la tesi.  $\square$

**2.2.1. Evoluzione dei vettori.** Supponiamo ora di avere un vettore  $\vec{u}$  generico, espresso in termini della terna fissa come  $\vec{u} = \sum_k u_k \hat{i}_k$ , e calcoliamone la derivata temporale: essa sarà  $\dot{\vec{u}} = \sum_k \dot{u}_k \hat{i}_k$ , dato che in questo riferimento la base non dipende dal tempo. Questo stesso vettore può scriversi rispetto alla terna mobile come  $\vec{u} = \sum_a u_a^* \hat{e}_a$ , dove questa volta sia i coefficienti che i versori di base sono in generale dipendenti dal tempo dal punto di vista del riferimento fisso. Derivando questa espressione, avremo

$$(2.30) \quad \dot{\vec{u}} = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^3 u_a^* \hat{e}_a = \sum_{a=1}^3 \dot{u}_a^* \hat{e}_a + \vec{\omega} \wedge \sum_{a=1}^3 u_a^* \hat{e}_a \equiv \vec{u}' + \vec{\omega} \wedge \vec{u}.$$

La quantità  $\vec{u}' = \sum_i \dot{u}_i^* \hat{e}_i$  è la derivata temporale del vettore *nel riferimento mobile*: un osservatore solidale col riferimento mobile vede infatti la terna  $\{\hat{e}_a\}_{a=1}^3$  come *fissa*, e nel calcolo della velocità tiene conto della dipendenza temporale delle sole coordinate, non della base. In particolare applicando questo risultato a  $\vec{\omega}$  si trova

$$(2.31) \quad \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega}'.$$

ovvero le derivate temporali di  $\vec{\omega}$  rispetto ad un riferimento fisso e rispetto ad un riferimento mobile sono uguali.

**2.3. Trasformazione delle grandezze cinematiche.** Avendo ottenuto la relazione tra derivate temporali in due sistemi di riferimento per un generico vettore, possiamo ora applicare questo risultato ad un vettore posizione specificatamente, e agli associati vettori velocità e accelerazione. Supponiamo quindi di avere un punto materiale  $P$  con posizione individuata dal vettore  $\vec{x}_P(t)$  rispetto ad un riferimento cartesiano fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Vale come sappiamo la seguente relazione

$$(2.32) \quad \vec{x}_P = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_*} + \overrightarrow{O_*P} = \vec{x}_* + \vec{x}_P^*.$$

Il vettore  $\vec{x}_P^* := \overrightarrow{O_*P}$  è perciò da intendersi applicato in  $O_*$ , origine del riferimento mobile. Sulla base di questa relazione, e delle relazioni trovate, possiamo calcolare tutto quello di cui abbiamo bisogno.

**2.3.1. Composizione delle velocità.** Derivando rispetto al tempo otterremo

$$(2.33) \quad \vec{v}_P := \dot{\vec{x}}_P = \dot{\vec{x}}_* + \dot{\vec{x}}_P^* \equiv \vec{v}_* + \dot{\vec{x}}_P^*.$$

dove  $\vec{v}_* := \dot{\vec{x}}_*$  è la velocità della nuova origine  $O_*$  rispetto al sistema di riferimento fisso. Per quanto detto sopra

$$(2.34) \quad \dot{\vec{x}}_P^* = \vec{v}_P^* + \vec{\omega} \wedge \vec{x}_P^*$$

dove  $\vec{v}_P^* := \dot{\vec{x}}_P^{*'}$  è la velocità di  $P$  osservata nel riferimento mobile. Abbiamo ottenuto così la *legge di composizione delle velocità*

$$(2.35) \quad \vec{v}_P = \vec{v}_P^* + \vec{v}_P^T, \quad \text{dove} \quad \vec{v}_P^T := \vec{v}_* + \vec{\omega} \wedge \vec{x}_P^*.$$

Il termine  $\vec{v}_P^T$  di differenza tra le velocità nei due riferimenti è detta *velocità di trascinamento*.

2.3.2. *Composizione delle accelerazioni.* Ripetendo i ragionamenti sopra sulla formula per le velocità otteniamo la legge delle composizioni per le accelerazioni. Derivando rispetto al tempo l'Eq. (2.35) otteniamo infatti

$$(2.36a) \quad \vec{a}_P = \vec{a}_P^* + \vec{a}_P^T + \vec{a}_P^c,$$

dove, indicando  $\ddot{\vec{x}}_* =: \vec{a}_*$ , i due vettori

$$(2.36b) \quad \vec{a}_P^T := \vec{a}_* + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{x}_P^* + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_P^*), \quad \vec{a}_P^c := 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P^*$$

sono detti rispettivamente *accelerazione di trascinamento* e *accelerazione di Coriolis*. L'accelerazione di trascinamento corrisponde all'accelerazione di un punto impermeato al riferimento mobile, privo di velocità relativa rispetto ad esso. Il termine aggiuntivo è dovuto ad una ulteriore accelerazione che appare quando  $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P^* \neq \vec{0}$ . Si noti che se  $\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ , ovvero la velocità angolare è costantemente nulla (osservatore mobile traslante) la legge di composizione delle velocità è semplicemente  $\vec{a}_P = \vec{a}_* + \vec{a}_P^*$ . Infine, se anche  $\vec{a}_* = \vec{0}$ , le accelerazioni nei due riferimenti sono uguali. Il caso  $\vec{\omega} = \vec{0}$  e  $\vec{a}_* = \vec{0}$  è particolarmente importante: in questa circostanza, si dice che  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  e  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  sono legati da una *trasformazione galileiana*, di modo che per ogni punto  $P$  valga

$$(2.37) \quad \vec{v}_P = \vec{v}_* + \vec{v}_P^*, \quad \vec{a}_P = \vec{a}_P^*.$$

2.3.3. *Composizione delle velocità angolari.* Rimane da specificare come possono essere composte le velocità angolari. Supponiamo per esempio di avere un riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e un riferimento mobile  $O_\bullet\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$  rispetto ad esso: quest'ultimo ha velocità angolare rispetto al primo che indichiamo come  $\vec{\omega}_\bullet$ . Supponiamo quindi di avere un *terzo* riferimento  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , anch'esso mobile, avente velocità angolare  $\vec{\omega}_*$  rispetto al riferimento fisso. Vogliamo calcolare la velocità angolare  $\vec{\omega}_{\bullet|*}$  del riferimento mobile  $O_\bullet\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$  rispetto al riferimento mobile  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ . Dal punto di vista del riferimento fisso, vale

$$(2.38) \quad \dot{\hat{b}}_a = \vec{\omega}_\bullet \wedge \hat{b}_a, \quad a = 1, 2, 3.$$

Nel riferimento  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  si osserva la stessa relazione ma con una velocità angolare diversa

$$(2.39) \quad \hat{b}'_a = \vec{\omega}_{\bullet|*} \wedge \hat{b}_a$$

dove, come sopra, l'apice indica la derivata temporale fatta nel riferimento  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , ovvero tenendo i vettori di base di questo riferimento fissi. D'altra parte vale anche la seguente relazione tra derivate in  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e derivate in  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$$(2.40) \quad \dot{\hat{b}}_a = \hat{b}'_a + \vec{\omega}_* \wedge \hat{b}_a \Leftrightarrow \vec{\omega}_\bullet \wedge \hat{b}_a = \vec{\omega}_{\bullet|*} \wedge \hat{b}_a + \vec{\omega}_* \wedge \hat{b}_a = (\vec{\omega}_{\bullet|*} + \vec{\omega}_*) \wedge \hat{b}_a.$$

Dato che questo deve valere per ogni elemento di base del sistema di riferimento  $O_\bullet\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$ , deve essere

$$(2.41) \quad \vec{\omega}_\bullet = \vec{\omega}_{\bullet|*} + \vec{\omega}_*,$$

che è la legge cercata che lega le tre velocità angolari.

**Esempio 2.1** (Coordinate polari e riferimento rotante) — Sia  $P$  un punto individuato dal vettore posizione  $\vec{x}_P(t) = x_1(t)\hat{i}_1 + x_2(t)\hat{i}_2 + x_3\hat{i}_3$  per  $t \in [t_1, t_2]$ : si noti che  $x_3$  *non* dipende da  $t$ , sicché il moto di  $P$  è in un piano ortogonale a  $\hat{i}_3$ . Lo studio del moto lungo la curva può essere perciò eseguito usando soltanto le due coordinate cartesiane  $(x_1, x_2)^\top$ , dato che  $x_3$  è

fisso: possiamo in particolare scegliere l'origine in modo tale che  $x_3 = 0$ . È possibile scrivere la posizione del punto utilizzando le coordinate polari, introducendo due funzioni,  $r: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $\theta: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  tali per cui

$$(2.42) \quad \begin{cases} x_1(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ x_2(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \vec{x}_P(t) = r(t) \cos \theta(t) \hat{i}_1 + r(t) \sin \theta(t) \hat{i}_2.$$

La quantità  $r(t)$  è la distanza di  $P$  dall'origine. Si dice che  $\hat{i}_1$  svolge il ruolo di *asse polare*, essendo  $\theta(t)$  l'angolo tra  $\vec{x}_P(t)$  e  $\hat{i}_1$  al tempo  $t$ , e il moto dato in termini di  $r(t)$  e  $\theta(t)$  si dice parametrizzato in *coordinate polari*. Introduciamo ora una coppia di versori  $\{\hat{e}_r(t), \hat{e}_\theta(t)\}$  così fatta

$$(2.43) \quad \hat{e}_r(t) = \cos \theta(t) \hat{i}_1 + \sin \theta(t) \hat{i}_2, \quad \hat{e}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \hat{i}_1 + \cos \theta(t) \hat{i}_2.$$

Il versore  $\hat{e}_r$  punta nella direzione radiale verso  $\vec{x}_P$ , mentre il versore  $\hat{e}_\theta$  punta nella direzione trasversa, ovvero ortogonale a  $\hat{e}_r$ ; inoltre  $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\theta = \hat{i}_3$ . Dato che  $r$  e  $\theta$  dipendono da  $t$ , questi due versori dipenderanno anch'essi da  $t$ ; essi sono inoltre *ortonormali* e, insieme a  $\hat{i}_3$ , costituiscono una *base mobile*, in modo che  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{i}_3$  sia un nuovo riferimento rispetto a  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . In questo riferimento,  $\vec{x}_P$  ha una espressione molto semplice, essendo  $\vec{x}_P = r\hat{e}_r$ . Possiamo calcolare la velocità angolare  $\vec{\omega}$  del riferimento mobile rispetto a quello fisso. Usando

$$(2.44) \quad \dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \hat{i}_2 = \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{i}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \hat{i}_2 = -\dot{\theta} \hat{e}_r$$

troviamo

$$(2.45) \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2}(\dot{\hat{e}}_1 \wedge \dot{\hat{e}}_1 + \dot{\hat{e}}_2 \wedge \dot{\hat{e}}_2) = \dot{\theta} \hat{i}_3$$

che giustifica ancora una volta la denominazione di “velocità angolare” per  $\vec{\omega}$ :  $\vec{\omega}$  esprime la velocità con cui l'angolo  $\theta$  varia in una rotazione attorno a  $\hat{i}_3$ . Derivando  $\vec{x}_P$  si trovano velocità e accelerazione del punto materiale

$$(2.46) \quad \begin{aligned} \vec{v}_P &= \dot{\vec{x}}_P = \underbrace{\dot{r}\hat{e}_r}_{\vec{a}_P^*} + \underbrace{r\dot{\theta}\hat{e}_\theta}_{\vec{v}_P^r}, \\ \vec{a}_P &= \underbrace{\ddot{r}\hat{e}_r}_{\vec{a}_P^*} + \underbrace{r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r}_{\vec{a}_P^r} + \underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta}_{\vec{a}_P^c} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta. \end{aligned}$$

Queste formule sono coerenti con le formule generali trovate sopra notando che  $\vec{x}_P^* = \vec{x}_P$ , essendo  $\vec{x}_* \equiv \vec{0}$ .

## CAPITOLO 3

### Leggi della meccanica

#### 1. Massa e quantità di moto

Se vogliamo andare oltre la mera *descrizione* geometrica del moto dei punti materiali nello spazio, è importante specificare quale sia l'effetto dell'interazione tra corpi sul loro stato cinematico. Una grandezza essenziale da introdurre a tale scopo è la *massa*: la massa di un punto materiale è una grandezza scalare non negativa  $m \geq 0$  associata al punto materiale stesso. Se un *corpo*  $\mathcal{B}$  è costituito da un insieme di  $N$  punti materiali,  $\mathcal{B} = \{P_i\}_{i=1}^N$ , detta  $m_i$  la massa del punto  $P_i$ , esso avrà massa totale

$$(3.1) \quad m = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Si ha spesso a che fare con corpi estesi che occupano una porzione di spazio  $\mathcal{B} \subset \mathbb{E}^3$  di misura non nulla e che possono essere immaginati come composti da una infinità di punti materiali, ciascuno con massa infinitesima. Per tali corpi si introduce una *densità volumetrica di massa*  $\rho: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  con supporto su una porzione  $\mathcal{B}$  di spazio. Se indichiamo con  $dX$  la porzione infinitesima di spazio occupata dal corpo attorno al punto  $X$ , la massa associata a tale volumetto infinitesimo è  $\rho(X) dX$ , di modo che la massa totale sia esprimibile come

$$(3.2) \quad m = \int_{\mathcal{B}} \rho(X) dX.$$

Questa scrittura (come le analoghe che seguono) va intesa come notazione simbolica: una volta fissato un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , al punto  $X$  si associano le coordinate  $\mathbf{x}$  e la notazione si traduce in  $m = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , dove  $\rho(\mathbf{x})$  è la densità nel punto  $X$  di coordinate  $\mathbf{x}$  e l'integrale è l'usuale integrale di volume tridimensionale. In maniera analoga si trattano i casi in cui il corpo occupi una superficie o una curva: l'integrale sarà quindi un integrale di *superficie* o *lineare*. Manterremo comunque la notazione generale  $m = \int_{\mathcal{B}} \rho(X) dX$  specificando caso per caso di che tipo di integrale si tratta. Inoltre, questa notazione ricorda un fatto più fondamentale, ovvero che la massa e la densità in un punto  $X$  *non* dipendono dal riferimento cartesiano scelto.

**1.1. Centro di massa.** Avendo introdotto i concetti di massa e densità, possiamo definire quello di *centro di massa* come segue. Detta  $\rho$  la densità del corpo  $\mathcal{B}$ , e detta  $m$  la sua massa, il centro di massa  $G$  del corpo è individuato, rispetto ad un altro punto generico  $P$ , dal vettore

$$(3.3) \quad \overrightarrow{PG} := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{PX} \rho(X) dX.$$

Se  $\rho(X) \equiv \rho$  ha un valore costante indipendente dalla posizione, si dice che il centro di massa coincide con il centro geometrico del corpo: in questo caso, detto  $V = \int_{\mathcal{B}} dX$  il volume del corpo,  $m = \rho V$  e  $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{PX} dX$ . La formula per il centro di massa ha un analogo semplice nel caso in cui il corpo sia costituito da  $N$  punti materiali,  $\mathcal{B} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , con  $P_k$  di massa  $m_k$ ,

$$(3.4) \quad \overrightarrow{PG} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{PP_k}, \quad m := \sum_{k=1}^N m_k.$$

Tipicamente si sceglie  $P = O$ , origine di un certo riferimento cartesiano. Il punto  $G$  non dipende dall'origine  $O$  del riferimento cartesiano scelto, ma il vettore  $\overrightarrow{OG}$  che lo individua rispetto all'origine ovviamente sì. Essendo il centro di massa definito come un integrale, se scriviamo  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^K \mathcal{B}_i$  con  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^K$  insiemi quasi disgiunti che corrispondono a porzioni distinte non sovrapposte del corpo, allora

$$(3.5) \quad \overrightarrow{PG} := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{PX} \rho(X) dX = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^K \int_{\mathcal{B}_i} \overrightarrow{PX} \rho(X) dX = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^K m_i \overrightarrow{PG_i},$$

dove  $G_i$  è il centro di massa della porzione  $\mathcal{B}_i$  avente massa  $m_i$ .

Nel seguito svilupperemo alcune formule per il caso continuo ed altre per il caso discreto. Per passare da una formulazione continua a quella discreta basta scambiare nelle formule

$$(3.6) \quad \sum_k m_k[\bullet] \leftrightarrow \int_{\mathcal{B}} [\bullet] \rho(X) dX.$$

**1.1.1. Simmetria e centro di massa.** Alcune proprietà del centro di massa possono essere facilmente ottenute dalla sua definizione, che esprime il centro di massa come combinazione *lineare* delle posizioni delle componenti del corpo. Il centro di massa di due punti materiali individuati da  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, per esempio, si trova sul segmento che li congiunge. Se il sistema che si sta considerando è piano, ovvero i punti materiali che lo costituiscono giacciono tutti in un certo piano  $\Pi$ , il centro di massa sarà sul medesimo piano. Il calcolo del centro di massa può essere poi ulteriormente facilitato dalla presenza di simmetrie nel sistema. Un esempio è il caso in cui il sistema abbia un *piano di simmetria materiale*.

**DEFINIZIONE 1.1** (Piano di simmetria materiale). Un piano è di simmetria materiale per un corpo  $\mathcal{B}$  se, dato un punto materiale  $P$  di massa  $m$  (o associato alla densità  $\rho_P$ ) del corpo, il punto  $Q$  diametralmente opposto a  $P$  rispetto a  $\Pi$  appartiene al corpo e ha stessa massa (o densità).

I punti  $P$  e  $Q$  sono in posizioni diametralmente opposte rispetto ad un piano  $\Pi$  se  $\overrightarrow{QP}$  è ortogonale al piano e il punto individuato da  $\frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2}$  appartiene al piano. Un analogo esempio è quello di *asse di simmetria materiale*.

**DEFINIZIONE 1.2** (Asse di simmetria materiale). Una retta  $\mathcal{R}$  è un *asse di simmetria materiale* per un corpo  $\mathcal{B}$  se per ogni punto  $P$  di massa  $m$  (o densità  $\rho_P$ ) del corpo, ne esiste un altro  $Q$  di uguale massa (o densità) diametralmente opposto rispetto alla retta.

Come prima, due punti  $P$  e  $Q$  sono diametralmente opposti rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  se  $\overrightarrow{PQ}$  è ortogonale alla retta e il punto individuato da  $\frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2}$  appartiene ad essa.

LEMMA 1.1. *Se il corpo è dotato di un piano o di un asse di simmetria materiale, allora il suo centro di massa si troverà su di essi.*

Essendo il centro di massa una combinazione convessa delle posizioni di tutti i punti del corpo, se quest'ultimo è convesso il centro di massa si troverà all'interno del corpo stesso; in maniera simile, se il corpo è contenuto dentro una porzione di spazio convessa, il centro di massa sarà nella medesima porzione di spazio.

**1.2. Quantità di moto.** Dato un corpo  $\mathcal{B}$  caratterizzato da una densità  $\rho$ , si definisce *quantità di moto* del corpo il vettore  $\vec{Q}$  dato da

$$(3.7) \quad \vec{Q} := \int_{\mathcal{B}} \vec{v}_X \rho(X) \, dX,$$

dove  $\vec{v}_X$  è la velocità osservata nel punto del corpo  $X$ . Se il corpo è costituito da  $N$  masse puntiformi  $\mathcal{B} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , di modo che la massa  $m_k$  abbia velocità  $\vec{v}_k$ , allora l'espressione precedente si scrive

$$(3.8) \quad \vec{Q} := \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k.$$

Vale la seguente Proposizione, che esprime il fatto che la quantità di moto di un corpo coincide con quella di un corpo puntiforme di ugual massa concentrato nel centro di massa.

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia  $\vec{v}_G$  la velocità del centro di massa  $G$  di un corpo  $\mathcal{B}$  di massa  $m$ . Allora*

$$(3.9) \quad \vec{Q} = m\vec{v}_G.$$

DIMOSTRAZIONE. Svolgiamo la dimostrazione per il caso di un sistema di  $N$  corpi puntiformi. Basta applicare la definizione, osservando che

$$(3.10) \quad \vec{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{OP_k} = m \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m\vec{v}_G. \quad \square$$

## 2. Forze e lavoro

Una forza  $\vec{F}_P$  è definita in maniera intuitiva come *una azione applicata su un punto materiale  $P$  in grado di cambiarne la quantità di moto in una certa direzione*. Una forza è una quantità *invariante* rispetto a cambi di riferimento, ovvero indipendente dall'osservatore; inoltre, essa è sempre associata ad un certo *punto di applicazione*: la forza, come la velocità o l'accelerazione, è quindi un *vettore applicato*. Essa può essere funzione del tempo, della posizione dell'oggetto materiale  $P$  a cui è applicata, e della sua velocità  $\vec{v}_P$ , ovvero in generale  $\vec{F}_P \equiv \vec{F}(P, \vec{v}_P, t)$ . La retta passante per  $P$  e parallela a  $\vec{F}_P$  si dice *retta di applicazione* della forza. La forza si dice *costante*,  $\vec{F}_P \equiv \vec{F}_0$ , se non dipende da alcuna delle quantità menzionate sopra, ovvero non dipende né dal tempo, né dalla posizione del punto né dalla sua velocità. Si dice invece che la forza è *posizionale*

se essa dipende solo dalla posizione di  $P$ ,  $\vec{F}_P \equiv \vec{F}_P(P)$ . Può anche aversi il caso in cui la forza dipenda solo dalla velocità del punto a cui è applicata,  $\vec{F}_P \equiv \vec{F}_P(\vec{v}_P)$ . Si chiamano *forze attive* le forze di cui sia nota *a priori* la dipendenza funzionale dalle tre quantità suddette, ovvero tempo, posizione e velocità del punto di applicazione, indipendentemente dalla presenza di altre forze applicate al medesimo oggetto.

Il risultato dell'azione di una forza su un punto materiale (e su un corpo generico) può essere quantificato attraverso una serie di grandezze. Nel seguito considereremo un punto materiale  $P$  e supporremo fissato un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , indicando con  $\vec{x}_P = \overrightarrow{OP}$ . Una forza  $F_P(P, \vec{v}_P, t)$  è quindi, usando questo riferimento cartesiano, più esplicitamente una funzione  $F_P(\vec{x}_P, \dot{\vec{x}}_P, t)$ . Con un leggero abuso, useremo le due notazioni in maniera intercambiabile.

**2.1. Lavoro.** Si dice che

$$(3.11) \quad w := \langle \vec{F}_P, d\vec{x}_P \rangle = \langle \vec{F}_P, \vec{v}_P \rangle dt$$

è il *lavoro elementare* della forza  $\vec{F}_P$  applicata a  $P$ , lungo lo spostamento infinitesimo  $d\vec{x}_P$ . Il lavoro elementare è una *forma differenziale* associata al campo vettoriale  $\vec{F}_P$ . È chiaro quindi come calcolare il lavoro di una forza lungo una traiettoria  $\vec{x}_P(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$ : è sufficiente integrare la forma differenziale lungo la curva,

$$(3.12) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \langle \vec{F}_P, \vec{v}_P \rangle dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt.$$

Nell'espressione precedente abbiamo introdotto la *potenza* associata ad una forza, definita come

$$(3.13) \quad \Pi := \langle \vec{F}_P, \vec{v}_P \rangle.$$

**2.1.1. Forze posizionali.** Nel caso di forze posizionali, le espressioni integrali introdotte sopra diventano indipendenti dalla "cinematica", ovvero da *come* una certa traiettoria viene percorsa, ma mantengono una dipendenza dalla sola *geometria* della traiettoria. Possiamo infatti riscrivere l'espressione del lavoro di una forza  $\vec{F}_P$  lungo una certa traiettoria in funzione della parametrizzazione intrinseca della curva, che assumiamo avere lunghezza  $\ell$ . Eseguiamo infatti un cambio di variabili e sostituiamo la dipendenza da  $t$  con una dipendenza dall'ascissa curvilinea  $s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\vec{x}}_P(\tau)\| d\tau$ , avendo fissato una origine lungo la traiettoria in  $\vec{x}_P(t_0)$ : scrivendo  $\vec{\gamma}(s) = \vec{x}_P(t(s))$ , abbiamo

$$(3.14) \quad w = \langle \vec{F}_P(\vec{x}_P(t)), \dot{\vec{x}}_P(t) \rangle dt = \left\langle \vec{F}_P(\vec{x}_P(t)), \frac{\dot{\vec{x}}_P(t)}{\|\dot{\vec{x}}_P(t)\|} \right\rangle \|\dot{\vec{x}}_P(t)\| dt = \langle \vec{F}_P(\vec{\gamma}(s)), \hat{v}(s) \rangle ds$$

per cui

$$(3.15) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \langle \vec{F}_P(\vec{x}_P), \dot{\vec{x}}_P \rangle dt = \int_0^\ell \langle \vec{F}_P(\vec{\gamma}(s)), \hat{v}(s) \rangle ds.$$

Come anticipato, ogni dipendenza dalla legge oraria è scomparsa e il lavoro diventa l'integrale della proiezione di  $\vec{F}_P$  lungo la direzione tangente alla curva. In altre parole,



il lavoro di una data forza posizionale lungo una curva *non* dipende da come la curva viene percorsa, ma solo dalla curva stessa.

2.1.2. *Forze conservative.* Il lavoro elementare, come abbiamo detto, è una forma differenziale, e sappiamo che una forma differenziale può essere chiusa e, in particolare, esatta: la proprietà di esattezza semplifica di molto il calcolo di integrali di linea e quindi, nel nostro contesto, il calcolo del lavoro di una forza. Il seguente risultato stabilisce che solo le forze posizionali possono essere associate a una forma differenziale esatta.

**TEOREMA 2.1.** *Condizione necessaria perché il lavoro elementare sia una forma esatta è che la forza sia posizionale.*

**DIMOSTRAZIONE.** La forma differenziale  $w = \langle \vec{F}_P, d\vec{x}_P \rangle$  può essere intesa come una forma in uno spazio a 7 dimensioni  $(t, \vec{x}_P, \vec{v}_P)$  (dato che queste sono le possibili variabili del campo vettoriale  $\vec{F}_P$ ), in cui però i contributi lungo le direzioni associate a  $dt$  e  $d\vec{v}_P$  sono assenti. Se la forma è chiusa (condizione necessaria per l'esattezza), dal teorema di Schwartz segue che tutte le derivate parziali rispetto alla velocità e al tempo devono essere nulle, ovvero la forza è posizionale,  $\vec{F}_P \equiv \vec{F}_P(\vec{x}_P)$ .  $\square$

La forma non può perciò essere chiusa, e quindi tantomeno esatta, se  $\vec{F}_P$  dipende da  $t$  o dalla velocità del punto materiale a cui è applicata. D'altra parte, se  $\vec{F}_P$  è posizionale, non è detto che la forma sia chiusa: a tal fine è richiesto che essa soddisfi la condizione

$$(3.16) \quad \nabla \wedge \vec{F}_P = \vec{0}.$$

Una forza che soddisfi questa proprietà si dice *irrotazionale*. Sappiamo inoltre che se il dominio di definizione di  $\vec{F}_P$  è connesso per archi, una forma chiusa è anche esatta, ovvero esiste una funzione scalare  $V$ , detta in meccanica *energia potenziale* e determinata a meno di una costante additiva, tale che  $\vec{F}_P = -\nabla V$ . Questo fatto è di grande importanza, dato che il lavoro infinitesimo di una forza siffatta si può scrivere come un differenziale esatto,

$$(3.17) \quad w = \langle \vec{F}_P, d\vec{x} \rangle = -\langle \nabla V, d\vec{x} \rangle = -dV.$$

Una forza associata ad una forma esatta si dice *conservativa*. La potenza di una forza conservativa si scrive

$$(3.18) \quad \Pi = -\frac{dV}{dt}.$$

Il lavoro di una forza conservativa lungo una traiettoria  $\vec{x}_P(t)$  di un punto materiale  $P$ , data per  $t \in [t_0, t_1]$  e di estremi  $\vec{x}_0 := \vec{x}(t_0)$  e  $\vec{x}_1 := \vec{x}(t_1)$ , si calcola semplicemente come

$$(3.19) \quad W = - \int_{\vec{x}_P} dV = V(\vec{x}_0) - V(\vec{x}_1)$$

e dipende perciò *solo* dai punti iniziale e finale della traiettoria, ma *non* dipende dalla traiettoria seguita. In particolare, se la traiettoria è chiusa, il lavoro di una forza conservativa è nullo. Questa proprietà è *caratterizzante* per le forze conservative. L'energia potenziale di una forza conservativa è talvolta rimpiazzata, nell'analisi, dal *potenziale*  $U = -V$ . Le due quantità svolgono lo stesso ruolo ma è importante prestare attenzione a quale si utilizza, dato che questo determina una differenza di segno. Ribadiamo che

$V$  è *sempre* dato a meno di costanti additive irrilevanti. Nel seguito ometteremo tali costanti per semplicità.

**Esempio 3.1** (Forze costanti) — Le forze costanti sono un esempio di forza conservativa. In effetti, se  $\vec{F}_P = \vec{F}_0$  vettore costante, allora si vede subito che

$$(3.20) \quad \vec{F}_P = -\nabla V \quad \text{con} \quad V(\vec{x}) = -\langle \vec{F}_0, \vec{x} \rangle.$$

Un esempio notevole di forza costante è la *forza peso* che agisce su un corpo puntiforme di massa  $m$  in prossimità della superficie terrestre, che si può approssimare come  $\vec{F}_0 = -mg\hat{i}_3$  per una certa costante  $g$ , assumendo un riferimento cartesiano in cui  $\hat{i}_3$  è orientato dal basso verso l'alto. In questo caso  $V(\vec{x}) = mg\langle \vec{x}, \hat{i}_3 \rangle$ .

**Esempio 3.2** (Forze centrali) — Un'importante famiglia di forze conservative è costituita dalle cosiddette *forze centrali* aventi la forma

$$(3.21) \quad \vec{F}_P(\vec{x}) = -\Phi'(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|) \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}, \quad \text{dove} \quad \Phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

dove  $\vec{x}_0$  è un certo vettore fissato e  $\vec{x}$  individua la posizione in cui la forza è applicata. Una forza siffatta è sempre orientata secondo la congiungente tra la posizione  $\vec{x}$  e quella del “centro”  $\vec{x}_0$ . Si tratta di forze conservative di energia potenziale  $V(\vec{x}) = \Phi(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$ , come si vede prendendo il gradiente. Un esempio di forza centrale è la *forza elastica* associata all'energia potenziale

$$(3.22) \quad V(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2$$

detta anche *potenziale elastico*. La forza elastica dipende da un coefficiente positivo  $k$  e modella matematicamente l'azione di una *molla ideale* avente lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k > 0$ . La molla va intesa come fissata nella posizione individuata da  $\vec{x}_0$  e applicata ad un punto materiale in posizione  $\vec{x}$ . Data la sua importanza, torneremo sullo studio della forza elastica in seguito.

**2.2. Momento di una forza e sistemi di forze.** Una quantità che giocherà un ruolo rilevante nello studio della meccanica è il *momento di una forza*  $\vec{F}_P$  applicata in  $P$  rispetto ad un polo, che chiameremo  $A$ . Tale momento è dato dalla quantità

$$(3.23) \quad \vec{\tau}_A := \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}_P.$$

Si tratta di un momento di un vettore applicato del tipo che abbiamo già visto, per cui vale la stessa formula di cambiamento di polo.

Un *sistema di forze*  $\mathcal{F} := \{(P_k, \vec{F}_k)\}_{k=1}^N$  è un sistema di vettori applicati  $\vec{F}_k$ , ciascuno inteso applicato in un certo punto  $P_k$ . In quanto sistema di vettori applicati, ad esso è associabile una coppia di vettori caratteristici, ovvero la *risultante*  $\vec{R}$  e il *momento risultante*  $\vec{\tau}_A$  rispetto al polo  $A$ , definiti come

$$(3.24) \quad \vec{R} := \sum_{k=1}^N \vec{F}_k, \quad \vec{\tau}_A := \sum_{k=1}^N \overrightarrow{AP_k} \wedge \vec{F}_k \equiv \sum_{k=1}^N \vec{\tau}_{k,A}.$$

Anche in questo caso, vale la formula di cambiamento di polo che permette di esprimere il momento rispetto al polo  $B$  in funzione di quello rispetto al polo  $A$ ,

$$(3.25) \quad \vec{\tau}_B = \vec{\tau}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}.$$

Analogamente, l'invariante scalare è in questo caso

$$(3.26) \quad \mathcal{I} := \langle \vec{R}, \vec{\tau}_A \rangle.$$

L'esistenza di una legge di cambiamento di polo nella forma sopra, implica, nell'ipotesi che  $\vec{R} \neq \vec{0}$ , l'esistenza di un *asse centrale* del sistema di forze, individuato da tutti i punti  $Z$  tali che

$$(3.27) \quad \overrightarrow{XZ} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\tau}_X}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$$

per un qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$ : lungo tale asse,  $\vec{\tau}_Z$  è parallelo ad  $\vec{R}$  e ha modulo minimo.

Una conseguenza della teoria generale sui sistemi di vettori applicati è che ogni sistema di forze è equivalente ad un sistema di al più tre forze, ovvero una coppia e la risultante. Un sistema di forze è *equilibrato* se risultante e momento totale sono nulli.

Nel caso in cui si abbia infine a che fare con un sistema di *forze parallele*  $\mathcal{S} = \{(P_k, f_k \hat{u})\}_{k=1}^N$ , tutte orientate come  $\hat{u}$ , sappiamo che l'invariante scalare è nullo ed è possibile identificare un "centro"  $C$ , individuato rispetto ad un'origine  $O$  da

$$(3.28) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N f_k \overrightarrow{OP_k}, \quad \text{dove} \quad R = \sum_{k=1}^N f_k.$$

**Esempio 3.3** (Baricentro) — Sia dato un sistema di punti materiali  $\{P_k\}_{k=1}^N$ : supponiamo che il punto  $P_k$  abbia massa  $m_k$  e sia individuato da un vettore  $\vec{x}_k$  rispetto ad un riferimento riferimento  $O_* \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  solidale con la Terra, dove  $\hat{e}_3 \equiv \hat{r}$  è diretto come il raggio che unisce il centro della Terra a  $O_*$ , punto sulla superficie terrestre, puntando nella direzione uscente. Abbiamo visto che in prossimità della superficie possiamo approssimare la forza peso agente su  $P_k$  come  $\vec{F}_k = -m_k g \hat{e}_3$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Il sistema di forze  $\mathcal{F} = \{\vec{F}_k\}$  è un sistema di forze parallele e possiamo individuarne il *centro*  $C$  utilizzando la formula sopra

$$(3.29) \quad \overrightarrow{O_*C} = \frac{1}{\sum_k m_k g} \sum_k m_k g \overrightarrow{O_*P_k} = \frac{1}{m} \sum_k m_k \overrightarrow{O_*P_k} \equiv \overrightarrow{O_*G},$$

dove  $m = \sum_{k=1}^N m_k$  è la massa totale del sistema. Il centro di questo campo è quindi il già noto centro di massa  $G$ , detto in questo contesto *baricentro*. È interessante osservare che il baricentro è effettivamente il punto in cui si può immaginare applicata la forza peso dell'intero sistema. Per esempio, l'energia potenziale assegnata all'intero sistema equivale a quella di un punto di massa  $m$  collocato nel baricentro: infatti, se il potenziale assegnato ad ogni punto  $P_k$  è  $V(\vec{x}_k) = m_k g \langle \vec{x}_k, \hat{e}_3 \rangle$ , con  $\vec{x}_k = \overrightarrow{O_*P_k}$ , allora, detto  $\vec{x}_G = \overrightarrow{O_*G}$ , il potenziale totale del sistema si può scrivere come

$$(3.30) \quad V = \sum_{k=1}^N V(\vec{x}_k) = g \sum_{k=1}^N m_k \langle \vec{x}_k, \hat{e}_3 \rangle = m g \langle \vec{x}_G, \hat{e}_3 \rangle.$$

In analogia con quanto fatto per una singola forza, è possibile definire il lavoro infinitesimo e la potenza di un sistema di forze  $\mathcal{F} = \{(P_k, \vec{F}_k)\}_{k=1}^N$  come

$$(3.31) \quad w = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, d\vec{x}_k \rangle, \quad \Pi = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, \dot{\vec{x}}_k \rangle,$$

dove  $\vec{x}_k$  è il punto di applicazione della forza  $\vec{F}_k$  di velocità  $\dot{\vec{x}}_k \equiv \vec{v}_k$ .

### 3. Principi della meccanica

Le leggi della meccanica sono il risultato di una serie di accurate sperimentazioni che han permesso di identificare la relazione tra l'evoluzione temporale delle posizioni dei corpi e le forze che agiscono su di essi. Le quantità introdotte finora, che sono di natura descrittiva, vengono messe in relazione non triviale grazie a tre postulati, o *principi*, introdotti da Galileo Galilei e, soprattutto, Isaac Newton, che ne ha dato la formulazione moderna. In questa sezione presenteremo questi postulati, o *principi*, e ne discuteremo le più immediate implicazioni.

**POSTULATO 3.1** (Primo principio della meccanica). *Esistono dei sistemi di riferimento, detti sistemi di riferimento inerziali, rispetto ai quali un punto materiale isolato, ovvero non soggetto a forze, rimane in quiete o si muove con accelerazione nulla.*

**POSTULATO 3.2** (Secondo principio della meccanica). *In un riferimento inerziale, un punto materiale  $P$  di massa  $m$  su cui agisce una forza  $\vec{F}_P$  è soggetto ad una accelerazione  $\vec{a}_P$  parallela alla forza e proporzionale ad essa secondo la relazione*

$$(3.32) \quad \vec{F}_P = m\vec{a}_P.$$

**POSTULATO 3.3** (Terzo principio della meccanica). *Data una coppia di punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , indicando con  $\vec{F}_{12}$  la forza esercitata da  $P_1$  su  $P_2$  con  $\vec{F}_{21}$  la forza esercitata da  $P_2$  su  $P_1$ , allora per ogni punto  $O$  dello spazio*

$$(3.33) \quad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{F}_{21} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{F}_{12} = \vec{0}.$$

Il terzo postulato, detto *principio di azione e reazione*, stabilisce che l'interazione reciproca di due punti materiali avviene sulla retta che li congiunge (dato che  $\overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{F}_{21} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{F}_{12} = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{F}_{12} = \vec{0}$ ) e si manifesta come una coppia di forze.

L'uso dei tre principi necessita di un postulato aggiuntivo altrettanto importante e che permette di andare oltre lo studio di sistemi di due punti materiali.

**POSTULATO 3.4** (Principio di sovrapposizione). *Supponiamo che su un punto materiale  $P$  di massa  $m$  agiscano due forze,  $\vec{F}_P^a$  e  $\vec{F}_P^b$ , e siano  $\vec{a}_P^a$  e  $\vec{a}_P^b$  le accelerazioni che esse indurrebbero separatamente. Allora, la contemporanea applicazione di  $\vec{F}_P^a$  e  $\vec{F}_P^b$  produce una accelerazione  $\vec{a}_P = \vec{a}_P^a + \vec{a}_P^b$ .*

**3.1. Determinismo meccanico.** I postulati enunciati sopra sono *tipicamente* sufficienti a predire il moto dei sistemi materiali in un certo intervallo di tempo, *purché* se ne conoscano le condizioni iniziali, ovvero la configurazione e le velocità delle componenti del sistema al tempo iniziale. Per essere più precisi, consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$ . Supponiamo di aver scelto un riferimento cartesiano inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e di conoscere la funzione  $\vec{F}_P(\vec{x}_P, \vec{v}_P, t)$  che fornisce la forza totale agente su di esso. Indichiamo con  $\vec{x}_P = \overrightarrow{OP}$  la posizione e con  $\vec{v}_P$  la velocità del punto stesso: il problema di predire la traiettoria  $\vec{x}_P(t)$  del punto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  si formula come

il seguente *problema di Cauchy*

$$(3.34) \quad \begin{cases} \vec{x}_P(t_0) = \vec{x}_0 \\ \dot{\vec{x}}_P(t_0) = \vec{v}_0 \\ \vec{F}_P(\vec{x}_P, \dot{\vec{x}}_P, t) = m\ddot{\vec{x}}_P, \end{cases}$$

in cui  $\vec{x}_0$  e  $\vec{v}_0$  sono posizione e velocità del punto al tempo iniziale  $t = t_0$  e costituiscono le *condizioni iniziali* dell'evoluzione considerata. Questo problema, la cui incognita è la *funzione vettoriale*  $\vec{x}_P(t)$  che soddisfa tutte le equazioni per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , ammette un'unica soluzione sotto l'ipotesi che la funzione  $\vec{F}_P$  sia lipschitziana nei suoi argomenti. A questo proposito, è utile aprire una breve ma importante parentesi.

**Q Equazioni differenziali ordinarie** — I principi della Meccanica stabiliscono che lo studio dell'evoluzione temporale della posizione dei corpi equivale allo studio di un insieme di *equazioni differenziali*. Elenchiamo qui alcuni fatti riguardo le *equazioni differenziali ordinarie*.

**DEFINIZIONE 3.1.** Sia  $\vec{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una funzione definita su un certo intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  è una equazione che coinvolge  $\vec{x}(t)$  ed un certo numero di sue derivate, fino ad un ordine massimo  $n$ , valida per ogni  $t \in I$ . Una soluzione dell'equazione differenziale è una funzione che soddisfa l'equazione in ogni punto dell'intervallo  $I$ .

Una equazione differenziale ordinaria ha, in generale, una famiglia di possibili soluzioni, date in funzione di un certo numero di parametri che l'equazione di per sé non permette di fissare. Questo insieme di soluzioni si dice *soluzione generale*. Una *soluzione particolare* di una equazione differenziale, invece, è un preciso elemento di questa famiglia. Per selezionare una specifica soluzione, sono in generale necessarie alcune condizioni aggiuntive che completano l'equazione stessa. Tipicamente, queste condizioni riguardano il valore che la soluzione e le sue derivate fino all'ordine  $n - 1$  devono avere in un punto specifico di  $I$ : ciò che ne risulta è il cosiddetto *problema di Cauchy*.

**DEFINIZIONE 3.2.** Sia data una equazione differenziale, ed un insieme di condizioni iniziali. Il problema di determinare, nella famiglia della soluzione generale, la (o le) soluzioni che soddisfino le condizioni iniziali assegnate si dice *problema di Cauchy*.

Il fatto che un problema di Cauchy abbia o meno soluzione, e che eventualmente questa soluzione sia unica, non è banale. Il teorema di Cauchy è, in questo senso, centrale nello studio delle equazioni differenziali e fornisce le condizioni affinché la soluzione di un problema di Cauchy esista e sia unica. L'importanza di questo risultato va oltre il contesto della meccanica.

**TEOREMA 3.5 (Cauchy).** Sia  $\vec{\phi}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , dove  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ . Siano inoltre  $\vec{x}_0, \vec{v}_0 \in \mathbb{R}^d$ . Il *problema differenziale di Cauchy*

$$(3.35) \quad \begin{cases} \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \\ \dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{v}_0 \\ \vec{\phi}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \ddot{\vec{x}}(t). \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione  $\vec{x}(t): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  se tutte le componenti di  $\vec{\phi}$  sono continue nei loro argomenti. Inoltre, la soluzione è unica se dette componenti sono anche lipschitziane su un aperto che contiene la terna iniziale  $(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t_0)$ .

Nel teorema compare il concetto di lipschitzianità, così definito.

**DEFINIZIONE 3.3** (Funzione lipschitziana). Sia  $f: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione in molte variabili. Essa si dice lipschitziana su  $\mathcal{A}$  se esiste  $K > 0$  tale che

$$(3.36) \quad |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq K \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}.$$

La condizione di lipschitzianità può essere verificata utilizzando il risultato seguente, che non dimostriamo: *se la funzione  $f$  è differenziabile su un compatto e ha su esso derivate continue, essa è lipschitziana.*

Si noti che la forma del problema di Cauchy data qui richiede di scrivere la derivata seconda di  $\vec{x}$  in termini di una funzione  $\vec{\phi}$  della derivata prima e della funzione stessa (oltre a  $t$ ). Una equazione differenziale in cui la derivata di ordine più alto dell'incognita può scriversi come funzione delle derivate di ordine più basso si dice *in forma normale*: non è sempre facile o ovvio scrivere un'equazione differenziale in una forma siffatta.

Il teorema di Cauchy si applica ugualmente al caso in cui si studi un *insieme* di punti e dimostra che, sotto opportune condizioni di regolarità, la conoscenza delle condizioni iniziali è in effetti sufficiente per caratterizzare l'evoluzione del sistema.

**3.2. Il moto armonico.** Il *moto armonico* è senza dubbio uno dei più importanti tipi di moto, per via delle sue innumerevoli applicazioni. Consideriamo la sua versione più semplice. Immaginiamo di avere un punto materiale  $P$  di massa  $m$  ed riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  di modo che  $\vec{x}_P = \vec{OP} = \sum_k x_k \hat{i}_k$ . Il punto è soggetto soltanto ad una forza di richiamo verso l'origine

$$(3.37) \quad \vec{F}_P = -k\vec{x}_P, \quad k > 0,$$

detta *forza elastica*. Si tratta di una forza *conservativa* associata al potenziale  $V(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\|\vec{x}\|^2$ . L'equazione del moto è quindi

$$(3.38) \quad m\ddot{\vec{x}}_P = -k\vec{x}_P \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 \\ m\ddot{x}_3 = -kx_3 \end{cases}.$$

Per risolvere le equazioni del moto, dobbiamo completare il problema di Cauchy aggiungendo due opportune condizioni iniziali. Supponendo di iniziare il moto in  $t = 0$ , specifichiamo quindi

$$(3.39) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_i = -kx_i \\ x_i(0) = x_{i0} \\ \dot{x}_i(0) = v_{i0} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Si tratta di tre problemi di Cauchy (uno per componente) formalmente identici. Nel seguito ometteremo il pedice  $i$  immaginando di svolgere l'analisi su uno di questi problemi e tenendo a mente che l'analisi sugli altri due si ripete identica (con le corrispondenti condizioni iniziali). Anzitutto riscriviamo l'equazione come

$$(3.40) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Per integrare questa equazione, ricordiamo alcuni risultati generali della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

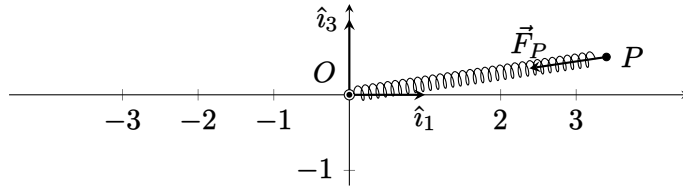


FIGURA 1. Punto materiale soggetto ad una molla ideale fissata nell'origine.

**Q Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti —**

Una equazione differenziale *ordinaria a coefficienti costanti* del secondo ordine, ha la forma

$$(3.41) \quad c_2 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + c_0 x = f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

dove  $f: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione supposta nota, mentre la nostra incognita è la funzione  $x(t)$  sullo stesso intervallo. L'equazione si intende accompagnata, come in ogni problema di Cauchy, da opportune condizioni iniziali nella forma

$$(3.42) \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0,$$

dove  $x_0$  e  $v_0$  sono delle quantità date. Bisogna ora distinguere due casi

**CASO OMOGENEO.** Consideriamo anzitutto il caso *omogeneo*, ovvero il caso in cui  $f(t) \equiv 0$ . Questo tipo di equazione è *lineare*, ovvero appartiene alla più vasta famiglia di equazioni tali per cui, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  soddisfano l'equazione, allora una loro combinazione lineare  $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ , per due costanti generiche  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , soddisfa anch'essa l'equazione. La soluzione generale di una equazione siffatta si ottiene promuovendo l'equazione al campo dei complessi, ovvero considerando l'equazione  $c_2 \ddot{z} + c_1 \dot{z} + c_0 z = 0$  con  $z$  funzione a valori complessi. La *parte reale* di questa equazione corrisponde all'equazione di partenza, per cui risolvendo questa equazione potremo ottenere una soluzione dell'equazione originaria. Cerchiamo quindi due *soluzioni fondamentali indipendenti* dell'equazione in  $z$  di tipo esponenziale  $z(t) = e^{\lambda t}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sostituendo questo tipo di soluzione nell'equazione, si ottiene un polinomio di secondo grado

$$(3.43) \quad c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} := \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2 c_0}}{2c_2},$$

che fornisce una condizione per al più due valori di  $\lambda$ , siano essi  $\lambda_{\pm}$  come già indicato, in generale complessi. Se i due valori ottenuti sono distinti, la soluzione generale ha la forma

$$(3.44) \quad z(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} + \alpha_- e^{\lambda_- t}.$$

I due coefficienti  $\alpha_{\pm}$  sono da fissare prendendo la parte reale di questa espressione,  $x = \text{Re}[z]$ , e imponendo le due condizioni iniziali. Se viceversa si trova  $\lambda_+ = \lambda_- \equiv \lambda$ , occorre cercare un'altra soluzione fondamentale diversa da  $e^{\lambda t}$ . In particolare, si può verificare che  $z(t) = t e^{\lambda t}$  è in questo caso anch'essa una soluzione, per cui la soluzione più generale si ottiene scrivendo

$$(3.45) \quad z(t) = e^{\lambda t}(\alpha_1 + \alpha_2 t).$$

Come prima, le due costanti vengono fissate richiedendo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali.

**CASO INOMOGENEO.** Nel caso in cui  $f$  sia non identicamente nulla, la soluzione al problema si ottiene sommando una generica combinazione lineare delle due soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea associata (ovvero dell'equazione ottenuta imponendo  $f \equiv 0$ ) ad una

soluzione particolare del sistema, ovvero una soluzione dell'equazione “completa” non necessariamente tale da soddisfare le condizioni iniziali. La ricerca di una soluzione particolare è in genere la parte più complessa della risoluzione dell'equazione differenziale. Le due costanti che compaiono nella combinazione lineare delle soluzioni fondamentali verranno poi scelte opportunamente per soddisfare le condizioni iniziali date.

Introduciamo quindi una versione “complessificata” della nostra equazione,

$$(3.46) \quad \ddot{z} + \omega^2 z = 0.$$

L'obiettivo è risolvere questa equazione con le opportune condizioni iniziali per poi selezionarne la *parte reale*, che corrisponde al nostro problema. Alla luce di quanto detto, se imponiamo un ansatz  $z(t) = e^{\lambda t}$  troveremo che i valori possibili per  $\lambda$  sono  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega$ , per cui la soluzione generale è

$$(3.47) \quad z(t) = \alpha_+ e^{i\omega t} + \alpha_- e^{-i\omega t}.$$

Se ora  $\alpha_+ = a_+ + ib_+$  e  $\alpha_- = a_- + ib_-$ , con  $a_{\pm}, b_{\pm} \in \mathbb{R}$ , l'espressione si scrive in maniera più esplicita come

$$(3.48) \quad \begin{aligned} z(t) &= (a_+ + ib_+)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + (a_- + ib_-)(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &= ((a_+ + a_-) \cos(\omega t) + (b_- - b_+) \sin(\omega t)) + i((b_+ + b_-) \cos(\omega t) + (a_+ - a_-) \sin(\omega t)). \end{aligned}$$

La parte reale di questa soluzione è la nostra soluzione, che deve avere la forma

$$(3.49) \quad x(t) = \text{Re}[z(t)] = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t),$$

dove abbiamo ridefinito  $\alpha := a_+ + a_-$  e  $\beta = b_- - b_+$ . Per  $t = 0$  deve valere

$$(3.50) \quad x(0) = \alpha = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega \beta = v_0$$

e quindi la soluzione cercata è

$$(3.51) \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Si tratta di un *moto periodico*, ovvero che si ripete perfettamente identico a se stesso ( $x(t+T) = x(t)$ ) con un periodo

$$(3.52) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

#### 4. Principio di Galilei e forze apparenti

Abbiamo visto che in un sistema di riferimento inerziale un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e soggetto ad una forza totale  $\vec{F}_P$  deve soddisfare il Secondo principio della meccanica,  $\vec{F}_P = m\vec{a}_P$ . Questa legge, così come tutti i principi della meccanica, rimane inalterata se si effettua un cambio di riferimento passando da un sistema inerziale ad un altro sistema inerziale. Supponiamo infatti di avere un sistema inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , e consideriamo un secondo sistema  $O_\star\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  che si muove di moto *traslatorio* rispetto al primo, ovvero avente velocità angolare  $\vec{\omega}$  e accelerazione  $\vec{a}_\star$  dell'origine  $O_\star$  nulle rispetto al riferimento di partenza: il nuovo sistema è quindi inerziale. In questo caso la velocità



del punto si trasforma in maniera molto semplice, ovvero secondo le trasformazioni di Galilei

$$(3.53) \quad \vec{v}_P = \vec{v}_P^* + \vec{v}_*,$$

dove  $\vec{v}_*$  è la velocità di  $O_*$  rispetto al riferimento inerziale di partenza. Soprattutto, questo comporta che l'accelerazione  $\vec{a}_P^*$  del punto  $P$  nel nuovo riferimento inerziale è invariata rispetto al sistema inerziale,  $\vec{a}_P = \vec{a}_P^*$ , essendo l'accelerazione di trascinamento  $\vec{a}_P^\tau$  e l'accelerazione di Coriolis  $\vec{a}_P^c$  entrambe nulle, sicché la formula sopra rimane anch'essa identica nel nuovo riferimento

$$(3.54) \quad \vec{F}_P = m\vec{a}_P^*.$$

Se il punto non è soggetto a forze e ha quindi accelerazione nulla nel primo riferimento, avrà accelerazione nulla anche nel secondo, rispettando così il Primo principio della meccanica. Ciò che abbiamo verificato è il cosiddetto *principio di relatività Galileiano*: le leggi della meccanica sono invarianti sotto trasformazioni di Galilei, assumendo la stessa forma in tutti i riferimenti inerziali.

Tuttavia, la formulazione del Secondo principio risulta alterata se il nuovo riferimento è non inerziale, ovvero se la velocità angolare  $\vec{\omega}$  del nuovo riferimento e l'accelerazione  $\vec{a}_*$  della sua origine sono non nulli. Utilizzando la legge di composizione delle accelerazioni in Eq. (2.36), infatti, contributi aggiuntivi dovuti all'accelerazione di trascinamento e all'accelerazione di Coriolis appaiono nella legge del moto,

$$(3.55) \quad \vec{F}_P = m\vec{a}_P = m\vec{a}_P^* + m\vec{a}_P^\tau + m\vec{a}_P^c.$$

Ciò equivale a dire che, volendo riscrivere un equivalente “Secondo principio” nel nuovo riferimento, sarà in generale necessario introdurre due nuove “forze”

$$(3.56) \quad \vec{F}_P^\tau := -m\vec{a}_P^\tau, \quad \vec{F}_P^c := -m\vec{a}_P^c,$$

dette *forza di trascinamento* e *forza di Coriolis* rispettivamente, in modo che

$$(3.57) \quad \vec{F}_P + \vec{F}_P^\tau + \vec{F}_P^c = m\vec{a}_P^*.$$

Queste “forze” sono dette *apparenti* in quanto compaiono nell'equazione del moto esclusivamente perché il nuovo sistema di riferimento è non inerziale e presenta una accelerazione e una velocità angolare non nulle rispetto al sistema inerziale di partenza. In particolare, la forza apparente di trascinamento

$$(3.58) \quad \vec{F}_P^\tau = -m\vec{a}_P^\tau = -m \left( \vec{a}_* + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{x}_P^* + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_P^*) \right)$$

è *posizionale*, mentre la forza di Coriolis

$$(3.59) \quad \vec{F}_P^c = -m\vec{a}_P^c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P^*$$

dipende dalla velocità. A dispetto del nome, le forze apparenti hanno conseguenze reali molto concrete e importanti.

**4.1. Forza centrifuga.** Supponiamo che l'osservatore non inerziale sia tale che  $\vec{a}_* = \vec{0}$  e  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , ma  $\vec{\omega} = \omega \hat{i}_3 \neq \vec{0}$  ha direzione fissa nel riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . In questo caso, la forza di trascinamento assume una forma molto più semplice, ovvero

$$(3.60) \quad \vec{F}_P^\tau = m\omega^2 (\vec{x}_P^* - \langle \vec{x}_P^*, \hat{i}_3 \rangle \hat{i}_3).$$

Questa forza è detta *forza centrifuga*. La ragione è che la quantità  $\vec{x}_P^* - \langle \vec{x}_P^*, \hat{i}_3 \rangle \hat{i}_3$  è esattamente la componente di  $\vec{x}_P^*$  ortogonale all'asse  $\mathcal{R}$  passante per  $O_*$  e avente direzione  $\vec{\omega}$ : se chiamiamo  $Q$  il punto dell'asse più vicino a  $P$ , possiamo infatti scrivere

$$(3.61) \quad \vec{F}_P^\tau = m\omega^2 (\vec{x}_P^* - \vec{x}_Q^*) = m\omega^2 \overrightarrow{QP}.$$

La forza centrifuga ha una ulteriore proprietà: essa è *conservativa*, dato che è possibile scriverla come il *gradiente* di un potenziale:

$$(3.62) \quad \vec{F}_P^\tau(\vec{x}_P) = -\nabla_{\vec{x}_P^*} V^{\text{cen}}(\vec{x}_P^*), \quad \text{dove} \quad V^{\text{cen}}(\vec{x}_P^*) := -\frac{1}{2}m\omega^2 \|\vec{x}_P^* - \vec{x}_Q^*\|^2 = \frac{1}{2}\omega^2 m d^2(P, \mathcal{R}).$$

Vedremo in seguito che  $m d^2(P, \mathcal{R})$  ha un significato particolare ed è detto *momento d'inerzia* del punto materiale in  $P$  rispetto all'asse  $\mathcal{R}$ .

## 5. Equazioni cardinali per un sistema di punti

**5.1. Forze interne e forze esterne.** Consideriamo un sistema *isolato*  $\mathcal{U} = \{P_k\}_{k=1}^M$  costituito da  $M$  punti materiali, ovvero un sistema tale che tutte le forze agenti su di esso sono dovute al sistema stesso. In altre parole, tutte le forze in  $\mathcal{U}$  nascono dall'interazione "a due corpi" tra due punti materiali di  $\mathcal{U}$ . Il sistema  $\mathcal{U}$  può sempre considerarsi come partizionato in due diversi sottosistemi disgiunti, siano essi  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{E}$ , di modo che  $\mathcal{S} \cap \mathcal{E} = \emptyset$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{S} \cup \mathcal{E}$ . Indichiamo ora con  $\vec{F}_{kj}$  la forza agente sul punto materiale  $P_k$  per effetto della presenza del punto materiale  $P_j$ . Le forze  $\vec{F}_{kj}$  con  $k, j \in \mathcal{S}$  si dicono *forze interne* ad  $\mathcal{S}$ , mentre se  $P_j \in \mathcal{S}$  e  $P_k \in \mathcal{E}$  la forza è detta *esterna* ad  $\mathcal{S}$ .

**TEOREMA 5.1.** *La risultante e il momento delle forze interne di un sistema  $\mathcal{S}$  sono sempre nulli. Le forze interne dunque sono sempre un sistema di forze equilibrato.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per via del Terzo principio della meccanica, le forze interne sono a due a due opposte, ovvero  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ . Ne segue che la risultante delle forze interne è nulla

$$(3.63) \quad \vec{R}^{(\text{in})} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}.$$

Sempre usando il Terzo principio,

$$(3.64) \quad \vec{\tau}_O^{(\text{in})} \equiv \vec{\tau}^{(\text{in})} = \sum_{P_i \in \mathcal{S}} \overrightarrow{OP_i} \wedge \sum_{\substack{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}}} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_{ij} + \overrightarrow{OP_j} \wedge \vec{F}_{ji}) = \vec{0}. \quad \square$$

**COROLLARIO 5.2.** *In assenza di forze esterne, il centro di massa  $G$  di un sistema di  $N$  punti materiali di massa totale  $m$  ha accelerazione  $\vec{a}_G$  nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo  $\vec{R}^{(\text{ext})} = \vec{0}$ , indicando  $\vec{x}_i := \overrightarrow{OP_i}$  si ha

$$(3.65) \quad m\vec{a}_G = m \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \vec{R}^{(\text{in})} = \vec{0}. \quad \square$$

**5.2. Momento della quantità di moto.** Lo studio della dinamica dei sistemi costituiti da molti punti materiali richiede l'introduzione di una nuova quantità, il *momento della quantità di moto*, o *momento angolare*, che quantifica il moto rotatorio di cui un sistema esteso può essere dotato. Si tratta di una quantità naturalmente introdotta una volta osservato che, dato un sistema di punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , possiamo associare ad esso il sistema di vettori applicati  $\mathcal{Q} = \{(P_k, \vec{Q}_k)\}_{k=1}^N$ , dove  $\vec{Q}_k$  è la quantità di moto del punto materiale  $P_k$ . Il momento associato a questo sistema di vettori applicati è appunto il momento della quantità di moto,

$$\vec{L}_A := \sum_{k=1}^N \overrightarrow{AP_k} \wedge \vec{Q}_k.$$

Questa quantità ha le solite proprietà dei momenti in un sistema di vettori applicati. Per esempio, vale la legge di cambio di polo

$$(3.66) \quad \vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{Q} \wedge \overrightarrow{AB},$$

dove abbiamo introdotto la quantità di moto totale,

$$(3.67) \quad \vec{Q} := \sum_k \vec{Q}_k.$$

Se  $\vec{Q} = \vec{0}$ , allora  $\vec{L}_A = \vec{L}_B$ , indipendentemente dal polo. Inoltre, se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\vec{Q}$  sono paralleli, il momento angolare non cambia. Il momento della quantità di moto si può anche scrivere nel caso di un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$ :

$$(3.68) \quad \vec{L}_A = \int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{AX} \wedge \vec{v}_X \rho(X) dX,$$

dove  $\vec{v}_X$  è la velocità dell'infinitesimo del corpo che occupa il punto  $X$ .

Vale il seguente, importante, Teorema, che esprime una legge di decomposizione del momento angolare.

**TEOREMA 5.3** (Primo teorema di König). *Dato un sistema di  $N$  punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  di quantità di moto  $\vec{Q}$  e centro di massa  $G$ , vale la seguente relazione per un generico punto  $P$*

$$(3.69) \quad \vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{Q},$$

dove  $\vec{L}_G^*$  è il momento angolare calcolato in un riferimento traslante con origine il centro di massa.

**DIMOSTRAZIONE.** Si procede in maniera esplicita. Sia  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  il riferimento fisso, e consideriamo  $G\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  riferimento traslante con origine nel centro di massa  $G$ . Essendo traslante, tale sistema ha velocità angolare  $\vec{\omega} = \vec{0}$  rispetto al riferimento fisso, e per ogni elemento del sistema la velocità nel riferimento fisso  $\vec{v}_k$  e quella nel riferimento

traslante  $\vec{v}_k^*$  sono legate dalla semplice relazione  $\vec{v}_k = \vec{v}_G + \vec{v}_k^*$  e quindi di conseguenza  $\vec{Q}_k = \vec{Q}_G + \frac{m_k}{m} \vec{Q}^*$ , avendo definito  $m$  massa totale,  $m_k$  massa del punto  $P_k$ ,  $\vec{Q}_k := m_k \vec{v}_k$ ,  $\vec{Q} = m \vec{v}_G$  e  $\vec{Q}_k^* = m_k \vec{v}_k^*$ . Dunque

(3.70)

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \sum_{k=1}^N \overrightarrow{AP_k} \wedge \vec{Q}_k = \sum_{k=1}^N \overrightarrow{AP_k} \wedge \left( \vec{Q}_k^* + \frac{m_k}{m} \vec{Q} \right) = \sum_{k=1}^N \overrightarrow{AP_k} \wedge \vec{Q}_k^* + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{m} \overrightarrow{AP_k} \wedge \vec{Q} \\ &= \vec{L}_A^* + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{Q}. \end{aligned}$$

dove il termine  $\vec{L}_A^*$  è il momento angolare rispetto a  $A$  nel riferimento traslante. Il fatto notevole, ora, è che questo momento *non* dipende dal punto  $A$  e può quindi essere indicato con  $\vec{L}_G^*$ . In tale riferimento infatti il centro di massa ha quantità di moto nulla e  $\vec{L}_A^*$  non dipende dal polo.  $\square$

Il primo teorema di König ha come conseguenza immediata che  $\vec{L}_G^* = \vec{L}_G$ , ovvero il momento angolare calcolato rispetto a  $G$  coincide con il momento angolare calcolato nel riferimento traslante centrato nel centro di massa  $G$ .

**5.3. Equazioni cardinali della dinamica.** Possiamo ora scrivere le equazioni fondamentali della dinamica per *sistemi* di punti materiali.

**TEOREMA 5.4** (Equazioni cardinali della dinamica). *Sia  $\vec{R}^{(\text{ext})}$  la risultante delle forze esterne agenti su un sistema con quantità di moto  $\vec{Q}$ , e sia  $\vec{\tau}_A^{(\text{ext})}$  il momento risultante delle forze esterne individuato rispetto al polo  $A$ . Allora*

$$(3.71) \quad \vec{R}^{(\text{ext})} = \dot{\vec{Q}}, \quad \vec{\tau}_A^{(\text{ext})} = \dot{\vec{L}}_A + \vec{v}_A \wedge \vec{Q},$$

dove  $\vec{L}_A$  è il momento totale delle quantità di moto rispetto al polo  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia dato un insieme di punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ . Indicando con  $m_k$  la massa del punto  $P_k$ , la forza agente su di esso soddisfa  $\vec{F}_k^{(\text{ext})} + \vec{F}_k^{(\text{in})} = \dot{\vec{Q}}_k$ , dove  $\vec{Q}_k$  è la corrispondente quantità di moto: abbiamo distinto tra la risultante delle forze esterne  $\vec{F}_k^{(\text{ext})}$  e la risultante delle forze interne  $\vec{F}_k^{(\text{in})}$ . Basta sommare questa espressione su  $k$  ricordando che  $\vec{Q} = \sum_k \vec{Q}_k$  e che  $\sum_k \vec{F}_k^{(\text{in})} = \vec{0}$  per ottenere

$$(3.72) \quad \vec{R}^{(\text{ext})} = \sum_k \vec{F}_k^{(\text{ext})} = \sum_k \dot{\vec{Q}}_k = \dot{\vec{Q}}.$$

Per dimostrare la seconda equazione, osserviamo che per il singolo punto vale

$$(3.73) \quad \vec{\tau}_{A,k} = \overrightarrow{AP_k} \wedge (\vec{F}_k^{(\text{ext})} + \vec{F}_k^{(\text{in})}) = \overrightarrow{AP_k} \wedge \dot{\vec{Q}}_k$$

per cui, sommando su  $k$  ancora una volta e usando il fatto che  $\overrightarrow{AP_k} \wedge (\vec{F}_k^{(\text{ext})} + \vec{F}_k^{(\text{in})}) = \vec{\tau}_{A,k}^{(\text{ext})} + \vec{\tau}_{A,k}^{(\text{in})}$ , somma dei momenti delle forze rispetto ad  $A$  su  $k$ ,

$$(3.74) \quad \sum_k \vec{\tau}_{A,k}^{(\text{ext})} + \sum_k \vec{\tau}_{A,k}^{(\text{in})} \equiv \vec{\tau}_A^{(\text{ext})} = \sum_k \overrightarrow{AP_k} \wedge \dot{\vec{Q}}_k,$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\sum_k \vec{\tau}_{A,k}^{(\text{in})} = \vec{0}$ . Il termine a destra nell'equazione si può scrivere come

(3.75)

$$\sum_k \overrightarrow{AP_k} \wedge \dot{\vec{Q}}_k = \frac{d}{dt} \left( \sum_k \overrightarrow{AP_k} \wedge \vec{Q}_k \right) - \sum_k \frac{d\overrightarrow{AP_k}}{dt} \wedge \vec{Q}_k = \frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge \sum_k \vec{Q}_k = \frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge \vec{Q},$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\frac{d}{dt} \overrightarrow{AP_k} = \vec{v}_k - \vec{v}_A$ , e  $\vec{v}_k$  e  $\vec{Q}_k$  sono paralleli.  $\square$

Se il polo  $A$  è fisso, oppure  $\vec{v}_A \parallel \vec{Q}$  (condizione soddisfatta per esempio se  $A$  è il centro di massa del sistema), l'equazione sui momenti è semplicemente  $\vec{\tau}_A^{(\text{ext})} = \dot{\vec{L}}_A$ .

La prima equazione cardinale permette di dare il seguente Teorema, che discende immediatamente dal fatto che  $\vec{Q} = m\vec{v}_G$ , dove come solito indichiamo con  $G$  il centro di massa.

**TEOREMA 5.5** (Moto del centro di massa). *Il centro di massa  $G$  del sistema si muove come un punto materiale di massa pari alla massa totale  $m$  del sistema su cui è applicata la risultante delle forze esterne, ovvero, la sua accelerazione  $\vec{a}_G$  soddisfa l'equazione*

$$(3.76) \quad m\vec{a}_G = \vec{R}^{(\text{ext})}.$$

## 6. Equilibrio: generalità

**6.1. Equilibrio di un punto materiale.** Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  di massa  $m$ . Se la risultante delle forze agenti sul punto dipende solo da posizione e dalla velocità del punto stesso, il Secondo principio della meccanica assume la forma

$$(3.77) \quad m\vec{a}_P = \vec{F}_P(\vec{x}_P, \vec{v}_P).$$

Si dice che  $\vec{x}_0$  è una configurazione di *equilibrio* del punto materiale, se

$$(3.78) \quad \vec{F}_P(\vec{x}_0, \vec{0}) = \vec{0}.$$

In altre parole, sotto questa condizione, se il punto materiale si trova in  $P_0$  a velocità nulla, allora rimane nel medesimo punto per un tempo indeterminato. Le soluzioni della condizione di equilibrio sopra possono essere in numero finito o infinito. Si osservi che se siamo interessati esclusivamente a posizioni di equilibrio, la dipendenza dalla velocità di  $\vec{F}_P$  può essere ignorata: nelle configurazioni di equilibrio, infatti, la velocità è sempre assunta nulla per definizione. Le configurazioni di equilibrio, pertanto, vanno in generale cercate tra le soluzioni dell'equazione  $\vec{F}_P(\vec{x}, \vec{0}) = \vec{0}$ . Se la forza totale agente sul punto è conservativa, ovvero  $\vec{F}_P(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x})$  per un qualche potenziale  $V$ , allora i punti di equilibrio sono tutte e sole le posizioni individuate dalla condizione di equilibrio

$$\nabla V(\vec{x}) = \vec{0}.$$

In altre parole, i punti di equilibrio per un punto materiale soggetto a forze conservative di potenziale  $V$  corrispondono ai *punti stazionari* di tale potenziale. In seguito torneremo sullo studio delle configurazioni di equilibrio quando in presenza di vincoli e attrito.

**6.2. Equazioni cardinali della statica.** Se abbiamo a che fare con un sistema di  $N$  punti materiali  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , ciascuno avente massa  $m_k$  e posizione  $\vec{x}_k$  rispetto ad un riferimento inerziale, la condizione di equilibrio è data in maniera semplice: il sistema è in equilibrio se lo sono tutti i suoi punti. Questa semplice affermazione ha una rilevante conseguenza.

**TEOREMA 6.1** (Equazioni cardinali della statica). *Condizione necessaria perché un sistema di punti materiali sia in equilibrio è che la risultante delle forze esterne  $\vec{R}^{(\text{ext})}$  e il momento risultante delle forze esterne  $\vec{\tau}^{(\text{ext})}$  siano nulli,*

$$(3.79) \quad \vec{R}^{(\text{ext})} = \vec{0}, \quad \vec{\tau}^{(\text{ext})} = \vec{0}.$$

Le equazioni che appaiono nel precedente teorema sono dette prima e seconda equazione cardinale della statica rispettivamente. Si tratta di *condizioni necessarie ma non sufficienti*: può accadere che un sistema di punti *non* sia in equilibrio nonostante le equazioni cardinali della statica siano soddisfatte.

## 7. Energia cinetica e teorema delle forze vive

**7.1. Energia cinetica di un sistema.** Si definisce *energia cinetica* del sistema  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  la quantità

$$(3.80) \quad T := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\vec{v}_k\|^2,$$

dove abbiamo indicato con  $m_k$  e  $\vec{v}_k$  rispettivamente la massa e la velocità del punto materiale  $P_k$ . Se invece di un sistema di punti materiali è dato un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$  con campo di velocità  $\vec{v}_X$  su di esso (di modo che  $\vec{v}_X$  sia la velocità del punto  $X$ ), allora l'energia cinetica del corpo è data da

$$(3.81) \quad T := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\vec{v}_X\|^2 dX.$$

Come mostrato dal seguente teorema, l'energia cinetica può essere decomposta in due contributi, uno dei quali equivale all'energia cinetica di un punto materiale di massa uguale alla massa totale del sistema e concentrato nel centro di massa.

**TEOREMA 7.1** (Secondo teorema di König). *L'energia cinetica di un sistema materiale di massa  $m$  può essere espressa come*

$$(3.82) \quad T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_G\|^2 + T_G^*$$

dove  $T_G^*$  è l'energia cinetica del sistema in un riferimento traslante con velocità  $\vec{v}_G$  pari a quella del centro di massa.

**DIMOSTRAZIONE.** Nella solita notazione, per ottenere la decomposizione proposta dal teorema, possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galilei e scrivere

$$(3.83) \quad \vec{v}_k = \vec{v}_k^* + \vec{v}_G,$$

dove  $\vec{v}_k^*$  è la velocità di  $P_k$  rispetto ad un riferimento *traslante* centrato nel centro di massa: siffatto sistema ha velocità angolare nulla rispetto al riferimento di partenza e  $G$  come origine. Abbiamo quindi che

$$(3.84) \quad \|\vec{v}_k\|^2 = \langle \vec{v}_k, \vec{v}_k \rangle = \|\vec{v}_k^*\|^2 + \|\vec{v}_G\|^2 + 2\langle \vec{v}_k^*, \vec{v}_G \rangle.$$

Dunque possiamo scrivere

$$(3.85) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\vec{v}_k\|^2 = \frac{1}{2} \|\vec{v}_G\|^2 \sum_{k=1}^N m_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\vec{v}_k^*\|^2 + \sum_{k=1}^N m_k \langle \vec{v}_k^*, \vec{v}_G \rangle \\ = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_G\|^2 + T_G^*.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la linearità del prodotto scalare: infatti,

$$(3.86) \quad \sum_{k=1}^N m_k \langle \vec{v}_k^*, \vec{v}_G \rangle = \langle \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k^*, \vec{v}_G \rangle = 0,$$

dato che  $\sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k^*$  è la quantità di moto nel riferimento del centro di massa, che è zero.  $\square$

**7.2. Teorema dell'energia cinetica.** Una delle ragioni per cui abbiamo introdotto l'energia cinetica è dovuta al suo legame con i concetti di potenza e lavoro, stabilito dal seguente risultato, detto anche *teorema delle forze vive*.

**TEOREMA 7.2** (dell'energia cinetica). *Sia  $T$  l'energia cinetica di un sistema e  $\Pi$  la potenza di tutte le forze agenti su di esso. Allora*

$$(3.87) \quad \frac{dT}{dt} = \Pi.$$

*Inoltre, la variazione  $\Delta T$  dell'energia cinetica di un sistema materiale in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$  eguaglia il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul sistema.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il caso di un sistema di  $N$  punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ : nella solita notazione, per ciascuno di essi vale naturalmente il Secondo principio,

$$(3.88) \quad \vec{F}_k = m_k \vec{a}_k,$$

dove  $\vec{F}_k$  è la risultante di *tutte* le forze applicate su  $P_k$ . Moltiplicando scalarmente ambo i membri per  $\vec{v}_k$  e sommando su  $k$ ,

$$(3.89) \quad \Pi \equiv \sum_{k=1}^N \langle \vec{v}_k, \vec{F}_k \rangle = \sum_{k=1}^N m_k \langle \vec{v}_k, \dot{\vec{v}}_k \rangle = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \|\vec{v}_k\|^2 \right) = \frac{dT}{dt}.$$

La seconda parte del teorema segue da una integrazione diretta dell'espressione ottenuta. Supponiamo di considerare l'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ : allora

$$(3.90) \quad \Delta T := T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt = W. \quad \square$$





## CAPITOLO 4

### Introduzione alla meccanica dei sistemi olonomi

#### 1. Moti vincolati

Lo studio di sistemi di punti materiali *liberi* è in realtà più l'eccezione che la regola, e in generale occorre tenere conto della presenza di dispositivi atti a limitare la libertà dei punti materiali che si stanno studiando: tali dispositivi vengono detti appunto *vincoli*. Per essere più precisi, consideriamo un sistema costituito da  $N$  punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , individuati dai vettori  $\vec{x}_k = \overrightarrow{OP_k}$  rispetto ad un riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  dato. Indichiamo, come nel precedente capitolo, con  $\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$  la collezione di tutte le coordinate di tutti i punti materiali,

$$\vec{X} := \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{x}_N \end{pmatrix}.$$

Indichiamo quindi con  $\dot{\vec{X}}$  la collezione ordinata di tutte le velocità dei punti materiali in  $\mathcal{S}$ . Un *vincolo* avrà matematicamente la forma di un insieme  $\mathcal{M}$  di  $s$  equazioni e/o disequazioni che riguardano in generale la posizione e la velocità dei punti, e possono dipendere dal tempo,

$$(4.1) \quad \mathcal{M} = \begin{cases} \phi_1(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) \geq \text{ oppure } = 0 \\ \phi_2(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) \geq \text{ oppure } = 0 \\ \vdots \\ \phi_s(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) \geq \text{ oppure } = 0. \end{cases}$$

**Esempio 4.1** (Moto piano) — Un punto materiale  $P$  si muove di *moto piano* se esiste un versore  $\hat{u}$  costante tale che  $\langle \vec{v}_P, \hat{u} \rangle = 0$ . Questo significa che durante il moto il corpo si mantiene sempre nel piano ortogonale a  $\hat{u}$  e passante per la posizione che tale punto occupa in un qualunque istante scelto  $t_0$ .

**1.1. Classificazione cinematica dei vincoli.** I vincoli possono essere classificati sulla base della forma che il sistema di equazioni e disequazioni in Eq. (4.1) assume. Anzitutto, un vincolo può essere *interno* o *esterno*: nel primo caso, il vincolo coinvolge solo ed esclusivamente le *posizioni reciproche* e le velocità dei punti del sistema che si sta studiando, senza nessun riferimento all'interazione con l'ambiente esterno; nel secondo caso, invece, le relazioni in Eq. (4.1) coinvolgono delle quantità dipendenti dalla posizione

o velocità di riferimenti esterni al corpo (per esempio, la distanza di un punto dall'origine del riferimento cartesiano fisso che si sta usando).

**Esempio 4.2** (Sistema rigido) — Sia dato un sistema  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  di  $N > 1$  punti in posizioni distinte in un certo istante di tempo  $t_0$ . Si dice che il sistema è *rigido* se valgono le seguenti

$$\mathcal{M} \quad : \quad \frac{d}{dt} \|\overrightarrow{P_i P_j}\| = 0, \quad \forall i, j.$$

Si tratta di un vincolo *interno* che coinvolge le posizioni relative dei punti del sistema senza fare riferimento all'ambiente esterno. Torneremo su sistemi e corpi rigidi in seguito.

La distinzione tra vincolo interno ed esterno dipende ovviamente da ciò che consideriamo essere il “sistema” e ciò che consideriamo essere il suo “esterno”.

**DEFINIZIONE 1.1** (Vincoli bilaterali e unilaterali). Un vincolo  $\mathcal{M}$  come in Eq. (4.1) si dice bilaterale quando nel suddetto sistema compaiono solo equazioni. Diversamente, si dice che è unilaterale.

**Esempio 4.3** — Un insieme di  $N$  punti  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  che debbono essere contenuti *entro* una sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine  $O$  del riferimento fisso deve soddisfare  $N$  disequazioni vincolari, ciascuna nella forma

$$(4.2) \quad \|\overrightarrow{OP_k}\|^2 \leq R^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è unilaterale. Se i punti debbono invece muoversi *sulla superficie* della sfera, dovrà valere

$$(4.3) \quad \|\overrightarrow{OP_k}\|^2 = R^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è bilaterale.

**DEFINIZIONE 1.2** (Vincoli scleronomi e reonomi). Un vincolo  $\mathcal{M}$  come in Eq. (4.1) si dice scleronomo se le relazioni che lo definiscono non dipendono esplicitamente dal tempo; diversamente si dice reonomo.

**Esempio 4.4** — Gli esempi di vincolo considerati finora sono scleronomi. Se per esempio consideriamo un insieme di  $N$  punti  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  che debbono essere contenuti *entro* una sfera di raggio  $R(t) = R_0 + vt$  centrata in  $O$ ,  $R_0, v$  quantità non negative, esso deve soddisfare  $N$  equazioni vincolari, ciascuna nella forma

$$(4.4) \quad \|\overrightarrow{OP_k}\|^2 \leq (R_0 + vt)^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è reonomo per  $v \neq 0$ , diversamente è scleronomo.

1.1.1. *Vincoli olonomi e coordinate lagrangiane.* Una classe particolarmente importante di vincoli è quella dei *vincoli olonomi*.

DEFINIZIONE 1.3 (Vincoli olonomi e anolonomi). Un vincolo  $\mathcal{M}$  come in Eq. (4.1) si dice *olonomo* se le relazioni che lo definiscono sono in *forma finita*, ovvero possono essere scritte rimuovendo la dipendenza dalle derivate dei vettori posizione; diversamente si dice *anolonomo*, o di mobilità.

Consideriamo ora un vincolo olonomo bilaterale nella forma

$$(4.5) \quad \mathcal{M} = \begin{cases} \phi_1(\vec{X}, t) = 0 \\ \phi_2(\vec{X}, t) = 0 \\ \vdots \\ \phi_s(\vec{X}, t) = 0 \end{cases}$$

con  $s \leq 3N$ . Un sistema vincolato in maniera olonoma in maniera siffatta permette in generale di individuare un numero  $n \leq 3N$  di parametri *essenziali* e tra loro *indipendenti*, ovvero tali da essere tutti necessari e al tempo stesso sufficienti per la descrizione del moto. Consideriamo infatti una certa configurazione  $\vec{X}_0$  compatibile con il vincolo, ovvero tale che  $\phi_k(\vec{X}_0, t) = 0$  per  $k = 1, \dots, s$ : se la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1}(\vec{X}_0, t) & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2}(\vec{X}_0, t) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_{3N}}(\vec{X}_0, t) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1}(\vec{X}_0, t) & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2}(\vec{X}_0, t) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_{3N}}(\vec{X}_0, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial X_1}(\vec{X}_0, t) & \frac{\partial \phi_s}{\partial X_2}(\vec{X}_0, t) & \dots & \frac{\partial \phi_s}{\partial X_{3N}}(\vec{X}_0, t) \end{pmatrix}$$

ha rango  $s$ , ovvero massimo, allora, per via del teorema della funzione implicita, è possibile esprimere tutte le componenti di  $\vec{X}$  (ovvero, tutti i vettori  $\vec{x}_k$ ) in funzione di  $n = 3N - s$  parametri, più eventualmente il tempo, in un intorno di  $\vec{X}_0$ . Ciò significa che possiamo utilizzare  $n$  parametri per descrivere il moto in un intorno di  $\vec{X}_0$  sul vincolo. Questi parametri, genericamente indicati con  $\{q_a\}_{a=1}^n$ , si dicono *coordinate lagrangiane* o *generalizzate* o *libere*, e costituiscono i *gradi di libertà* del sistema che si può perciò descrivere per mezzo di un elemento  $\mathbf{q} = (q_a)_{a=1}^n$  di  $\mathbb{R}^n$ , dove  $n = 3N - s$ : avremo quindi  $\vec{X} \equiv \vec{X}(\mathbf{q}, t)$ , ovvero, per ogni  $k$ ,  $\vec{x}_k \equiv \vec{x}_k(\mathbf{q}, t)$ , dove  $\mathbf{q}$  è in generale una funzione del tempo. La conoscenza di  $\mathbf{q}(t)$  permette di caratterizzare completamente il moto e la funzione  $\mathbf{q}(t)$  fornisce essa stessa le *equazioni orarie* in coordinate lagrangiane. Lo spazio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  dei valori che  $\mathbf{q}$  può assumere è detto *spazio delle configurazioni* del sistema: al variare di  $t$ ,  $\mathbf{q}(t)$  descrive una curva in  $\Omega$  che esprime l'evoluzione del sistema stesso compatibilmente con il vincolo.

**Esempio 4.5** (Punto su sfera) — Consideriamo un punto materiale  $P$ , la cui posizione è parametrizzata in un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  da  $\vec{OP} = \vec{x}_P = \sum_j x_j \hat{i}_j$ , vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio  $R > 0$ . Il suo moto deve soddisfare l'equazione

$$(4.6) \quad \|\vec{x}_P\|^2 = R^2.$$

Questo vincolo è bilaterale olonomo. Questa equazione permette di esprimere *localmente* una delle coordinate di  $\vec{x}_P$  in funzione delle altre due, e pertanto il sistema ha  $n = 3 - 1 = 2$  gradi di libertà. Esistono quindi due parametri lagrangiani,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  in grado di parametrizzare

il moto. È tuttavia più comodo non scegliere le coordinate cartesiane in questo caso, data la simmetria sferica del problema, ma piuttosto le due variabili angolari  $\theta$  e  $\phi$  che compaiono nella parametrizzazione sferica della posizione del punto, scrivendo

$$(4.7) \quad x_1 = R \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = R \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = R \cos \theta,$$

di modo che  $\mathbf{q} = (\theta, \phi)^\top$ . Si noti che questa parametrizzazione permette di coprire l'intera superficie della sfera senza problemi, fuorché nei punti  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , dove  $\phi$  non è univocamente specificato.

Come detto, dato che le coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  parametrizzano localmente il sistema, il vettore  $\vec{x}_k$  che individua la posizione di un generico punto  $P_k$  del sistema può essere inteso come una funzione di  $\mathbf{q}$  e, eventualmente, del tempo  $t$ , ovvero  $\vec{x}_k \equiv \vec{x}_k(\mathbf{q}(t), t)$ . Di conseguenza, la velocità di  $P_k$  è

$$(4.8) \quad \dot{\vec{x}}_k = \partial_t \vec{x}_k + \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_a}.$$

Si noti che nel caso di vincoli scleronomi non c'è dipendenza esplicita di  $\vec{x}_k$  da  $t$  e  $\partial_t \vec{x}_k = \vec{0}$ . L'espressione sopra si può scrivere in forma differenziale come

$$(4.9) \quad d\vec{x}_k = \partial_t \vec{x}_k dt + \sum_{a=1}^n dq_a \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_a}$$

in cui la *spostamento infinitesimo*  $d\vec{x}_k$  viene espresso in termini di una variazione delle coordinate lagrangiane. Da quanto detto, il lavoro infinitesimo fatto dalle forze agenti su in sistema olonomo può scriversi

$$(4.10) \quad w = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, d\vec{x}_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, \partial_t \vec{x}_k \rangle dt + \sum_{a=1}^n \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_a} \rangle dq_a \equiv f_t dt + \sum_{a=1}^n f_a dq_a,$$

dove abbiamo introdotto l'insieme di scalari

$$(4.11) \quad f_t := \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, \partial_t \vec{x}_k \rangle, \quad f_a := \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_a} \rangle, \quad a = 1, \dots, n.$$

La potenza si calcola direttamente come

$$(4.12) \quad \Pi = f_t + \sum_{a=1}^n f_a \dot{q}_a.$$

Le quantità  $f_a$  sono dette *forze generalizzate*, dato che svolgono un ruolo simile a quello delle forze nell'espressione di  $\Pi$  ma nello spazio delle configurazioni; inoltre,  $f_t = 0$  se i vincoli in gioco sono fissi.

Se le forze sono conservative, ovvero esiste una funzione  $V = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$  di modo che  $\vec{F}_k = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_k}$  (inteso come il gradiente rispetto alla variabile  $\vec{x}_k$ ), allora

$$(4.13) \quad f_t := -\sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_k}, \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial t} \right\rangle = -\partial_t V \quad f_a := -\sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_k}, \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_a} \right\rangle \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_a}, \quad a = 1, \dots, n.$$

Pertanto, in questo caso,

$$(4.14) \quad w = -\partial_t V dt - \sum_{a=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_a} dq_a \equiv -dV, \quad \Pi = -\partial_t V - \sum_{a=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_a} \dot{q}_a \equiv -\frac{dV}{dt},$$

che evidenzia come anche in presenza di vincoli olonomi il lavoro infinitesimo di forze conservative si può scrivere come un differenziale esatto. In definitiva, in presenza di vincoli olonomi le variabili cartesiane possono essere sostituite da quelle lagrangiane e le forze da forze generalizzate, ottenendo lo stesso tipo di formalismo.

**1.1.2. Vincoli olonomi e spostamenti virtuali.** Caratterizzare un vincolo olonomo che evolve nel tempo è complesso, e richiede l'introduzione del concetto di *spostamento virtuale*, che racchiude l'informazione sulla *geometria* del vincolo ad un istante fissato. Uno *spostamento infinitesimo virtuale* è uno spostamento di un punto vincolato  $P$  compatibile coi vincoli che non tiene conto della loro dipendenza dal tempo e viene matematicamente espresso come

$$(4.15) \quad \delta \vec{x}_P = \sum_{a=1}^n \delta q_a \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial q_a}$$

dove la presenza di  $\delta$  ricorda che non si tratta di un “vero” differenziale di  $\vec{x}_P$ : il tempo infatti viene immaginato fisso e si variano infinitesimamente solo le coordinate lagrangiane, che per costruzione tengono conto dei vincoli a cui il sistema è soggetto. In altre parole, uno spostamento virtuale contiene informazioni sulla *geometria del vincolo* attorno ad un punto *in un dato istante*.

**Esempio 4.6** — Consideriamo il caso del moto di un punto materiale  $P$ , il cui moto è parametrizzato in un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  da  $\vec{OP} = \vec{x}_P = \sum_k x_k \hat{i}_k$ , vincolato a muoversi su una sfera di raggio  $R(t)$  dipendente dal tempo. L'equazione vincolare è

$$(4.16) \quad \|\vec{x}_P(t)\|^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) = R^2(t).$$

Differenziando questa espressione

$$(4.17) \quad \frac{1}{2} d\|\vec{x}_P\|^2 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = \langle \vec{x}_P, d\vec{x}_P \rangle = \dot{R}R dt.$$

Il differenziale tiene conto propriamente della dipendenza del vincolo dal tempo. Viceversa, se consideriamo uno spostamento virtuale, la dipendenza esplicita dal tempo in  $R$  viene trascurata e si ottiene

$$(4.18) \quad \frac{1}{2} \delta \|\vec{x}_P\|^2 = x_1 \delta x_1 + x_2 \delta x_2 + x_3 \delta x_3 = \langle \vec{x}_P, \delta \vec{x}_P \rangle = 0.$$

Come si vede, lo spostamento virtuale è tangente alla sfera, essendo ortogonale a  $\vec{x}_P$ , mentre quello reale in generale non lo è dato che è tenuto a “seguire” la possibile dilatazione o contrazione della sfera che si verifica nell'intervallo temporale infinitesimo  $dt$ . Se quindi calcoliamo la velocità del punto, abbiamo che la velocità reale,  $\vec{v}_P$ , ha una componente nella direzione radiale, proprio perché  $\langle \vec{x}_P, d\vec{x}_P \rangle = R\dot{R}dt \Rightarrow \langle \vec{x}_P, \vec{v}_P \rangle = R\dot{R}$ .

Uno spostamento virtuale si dice *reversibile* se il suo opposto è anch'esso uno spostamento virtuale ammesso; viceversa si dice *irreversibile*. Questa definizione è utile per caratterizzare le cosiddette configurazioni di confine, o frontiera.

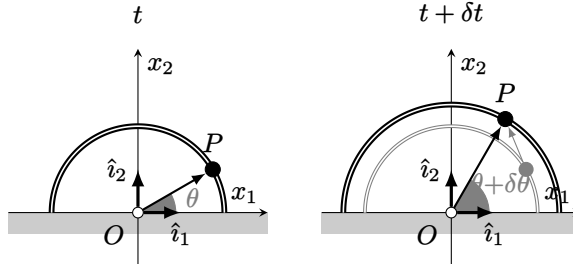
**DEFINIZIONE 1.4.** Una configurazione è detta *di frontiera* se ammette spostamenti virtuali irreversibili. Configurazioni non di frontiera si dicono *ordinarie*.

Facciamo un esempio.

**Esempio 4.7** — Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  tenuto a soddisfare i seguenti tre vincoli:

$$(4.19) \quad \|\vec{x}_P\| = \rho t, \quad \langle \vec{x}_P, \hat{i}_3 \rangle = 0, \quad \langle \vec{x}_P, \hat{i}_2 \rangle \geq 0, \quad \rho > 0.$$

I vincoli esprimono il fatto che il moto deve avvenire nel semipiano superiore di un riferimento cartesiano su un arco di circonferenza di raggio variabile nel tempo  $\rho t$ . Si tratta quindi di un vincolo reonomo.



Per via del vincolo di planarità del moto e della condizione di appartenenza alla guida, possiamo individuare un unico parametro lagrangiano  $\theta$  per il sistema, e utilizzare una parametrizzazione polare scrivendo

$$(4.20) \quad \vec{x}_P = \rho t \cos \theta \hat{i}_1 + \rho t \sin \theta \hat{i}_2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Ora, per ogni posizione sulla guida con  $0 < \theta < \pi$ , abbiamo che

$$(4.21) \quad \delta \vec{x}_P = \rho t (-\sin \theta \hat{i}_1 + \cos \theta \hat{i}_2) \delta \theta.$$

Questa espressione è associata ad uno spostamento virtuale legittimo sia che si prenda  $\delta \theta > 0$  sia che si prenda  $\delta \theta < 0$ , cioè ovunque sulla guida *eccezion fatta* per i punti  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . In  $\theta = 0$ , per esempio, possiamo considerare solo uno spostamento virtuale con  $\delta \theta > 0$ : il suo opposto è inammissibile. Viceversa, in  $\theta = 2\pi$ , solo  $\delta \theta < 0$  è ammesso. Queste due configurazioni sono dette *di frontiera*. Si noti che la velocità del nostro punto è

$$(4.22) \quad \vec{v}_P = \dot{\vec{x}}_P = \rho(\cos \theta \hat{i}_1 + \sin \theta \hat{i}_2) + \tilde{\vec{v}}_P.$$

Mentre il secondo contributo può avere qualsivoglia segno sui punti non di frontiera (considerando spostamenti virtuali infinitesimi in senso orario o antiorario), il primo contributo *non* può essere mai invertito di segno ed è sempre diretto nella direzione radiale uscente, dato che segue la dilatazione del vincolo: questo esemplifica la ragione per cui è conveniente considerare gli spostamenti virtuali, e non quelli reali, per definire le configurazioni di confine.

**1.1.3. Lavoro virtuale.** Gli spostamenti virtuali possono essere associati al concetto di *lavoro infinitesimo virtuale*. Supponiamo di avere un sistema olonomo di  $N$  particelle. Su ciascun punto  $P_k$  è applicata la forza  $\vec{F}_k$ ; consideriamo quindi uno spostamento virtuale  $\delta \vec{X} = (\delta \vec{x}_k)_{k=1}^N$ . Possiamo introdurre il lavoro infinitesimo virtuale  $\tilde{w}$  come

$$(4.23) \quad \tilde{w} = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, \delta \vec{x}_k \rangle.$$

Introducendo le variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$ , questa quantità si riscrive come

$$(4.24) \quad \tilde{w} = \sum_{a=1}^n f_a \delta q_a,$$

dove, in virtù del fatto che gli spostamenti sono virtuali, i termini dipendenti da  $f_t$  sono assenti rispetto al lavoro infinitesimo reale. Se le forze sono ottenute da un potenziale, ovvero

$$(4.25) \quad \vec{F}_k = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_k}$$

per un qualche potenziale  $V \equiv V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ , otteniamo

$$(4.26) \quad \tilde{w} = -\delta V = -\sum_{a=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_a} \delta q_a$$

ovvero il lavoro *virtuale* infinitesimo delle forze è il differenziale ottenuto ignorando la dipendenza esplicita dal tempo negli argomenti  $\vec{x}_k(\mathbf{q}, t)$  in  $V$ , come atteso.

**1.2. Reazioni vincolari.** Dato che la presenza di vincoli non permette al sistema di assumere accelerazioni qualsivoglia, questo significa che un vincolo esercita una o più forze sul sistema per impedire che si realizzino certe configurazioni. Se per esempio consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , in presenza di vincoli il Secondo principio potrà essere scritto in forma più precisa come

$$(4.27) \quad \vec{F}_P^{(a)} + \vec{\Phi}_P = m\vec{a}_P$$

dove  $\vec{F}_P^{(a)}$  è la risultante di tutte le forze attive agenti sul punto materiale, mentre  $\vec{\Phi}_P$  è una forza “di reazione”, esercitata dai dispositivi vincolari, tale da rendere  $\vec{a}_P$  compatibile con i vincoli imposti. Questo contributo, detto *reazione vincolare*, è una forza non nota a priori, ma che, come vedremo, deve soddisfare certe relazioni imposte dalla natura del vincolo.

Cerchiamo ora di caratterizzare l'azione di un vincolo in termini della forza di reazione  $\vec{\Phi}_P$  da esso generata: cominciamo considerando il caso *ideale* in cui questa forza di reazione sia la *minima necessaria ad imporre la validità del vincolo*. Per fissare le idee, immaginiamo di avere un singolo punto materiale  $P$  a muoversi *lungo* una certa superficie  $\sigma$  che, in  $P$ , assumiamo avere versore normale  $\hat{n}_P(t)$ . Il vincolo è tale da non permettere al punto di uscire dalla superficie: si tratta cioè di un vincolo bilaterale. Inoltre, supponiamo anche che il vincolo sia *olonomo*, e quindi esista una collezione di coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  tale per cui  $\vec{x}_P \equiv \vec{x}_P(\mathbf{q}, t)$ . Il fatto che la reazione vincolare si limiti a tenere il punto materiale sulla superficie significa che, *istante per istante*, essa non ostacola in nessun modo il suo movimento *lungo* la superficie stessa, ovvero

$$(4.28) \quad \langle \vec{\Phi}_P, \delta \vec{x}_P \rangle = 0.$$

Il fatto che  $\vec{\Phi}_P$  non abbia proiezione nella direzione *tangente* al vincolo equivale a dire che *il lavoro virtuale infinitesimo della forza  $\vec{\Phi}_P$  è nullo*.

Se il punto materiale è libero di muoversi purché rimanga *da un lato* della superficie, ovvero il vincolo è unilatero, un vincolo ideale  $\vec{\Phi}_P$  si limita ad impedire il superamento

della superficie e perciò produce una forza sempre ortogonale alla superficie. Uno spostamento virtuale, tuttavia, non è necessariamente tangente alla superficie (a vincolo fisso, un punto adiacente alla superficie su un certo suo lato può muoversi ortogonalmente ad essa rimanendo sullo stesso lato). Vale quindi

$$(4.29) \quad \langle \vec{\Phi}_P, \delta \vec{x}_P \rangle \geq 0.$$

La relazione sopra equivale a dire che il lavoro virtuale  $\tilde{w}$  della forza  $\vec{\Phi}$  è *non negativo*.

Considerazioni analoghe a quanto detto sopra possono ripetersi nel caso in cui il vincolo sia una curva e vengono raccolte nella seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.5** (Vincolo ideale e vincolo dissipativo). Un vincolo *ideale*, o *liscio*, genera tutti e soli i sistemi di reazioni vincolari compatibili col vincolo aventi lavoro virtuale infinitesimo non negativo. Se i vincoli sono bilateri, il lavoro infinitesimo virtuale delle reazioni vincolari è in particolare nullo. Un vincolo non ideale si dice *dissipativo*.

**1.3. Vincoli lisci e conservazione dell'energia.** Il teorema delle forze vive ha speciali e importanti casi particolari elencati nelle seguenti Proposizioni quando si è in presenza di vincoli ideali.

**PROPOSIZIONE 1.1** (Vincoli ideali bilaterali fissi). *Se il sistema è soggetto a vincoli ideali bilaterali fissi, allora*

$$(4.30) \quad \frac{dT}{dt} = \Pi^{(a)},$$

dove  $\Pi^{(a)}$  è la potenza delle forze attive.

**DIMOSTRAZIONE.** Il lavoro virtuale delle forze di reazione in un vincolo ideale è nullo se il vincolo è *bilaterale*: inoltre, se il vincolo è *fisso*, il lavoro infinitesimo reale è un particolare lavoro infinitesimo virtuale, e pertanto il lavoro infinitesimo delle forze di reazione è nullo. Ne consegue, che anche la potenza delle forze di reazione è nulla.  $\square$

Possiamo enunciare così il seguente, importante risultato.

**PROPOSIZIONE 1.2** (Conservazione dell'energia meccanica). *Sia dato un sistema sottoposto a vincoli ideali bilateri fissi e su cui agiscono solo forze attive conservative, di energia potenziale  $V$ . Allora l'energia meccanica*

$$(4.31) \quad E := T + V$$

*è costante nel tempo.*

**DIMOSTRAZIONE.** La proposizione discende direttamente da quanto abbiamo detto sopra. Essendo i vincoli fissi, il lavoro virtuale delle forze di reazione vincolare è uguale a quello reale. Essendo però i vincoli lisci, tale lavoro è nullo, ed è quindi nulla anche la potenza associata. Di conseguenza, l'unico contributo residuo è quello delle forze attive, come stabilito dalla precedente Proposizione, e di conseguenza

$$(4.32) \quad \frac{dT}{dt} = \Pi^{(a)} = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T + V) = \frac{dE}{dt} = 0. \quad \square$$



Quando le ipotesi della precedente Proposizione sono verificate, si dice che l'energia meccanica è un *integrale primo del moto*. L'energia meccanica può conservarsi anche nel caso in cui esistano forze attive non conservative *purché* queste siano associate a potenza nulla, di modo che il secondo passaggio della precedente dimostrazione sia legittimo.

1.3.1. *Integrali primi del moto.* Come vedremo, lo studio della dinamica può essere di molto semplificato dall'osservazione che alcune quantità *rimangono costanti* durante il moto. Abbiamo già visto, per esempio, il caso della conservazione dell'energia. Vale la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.6 (Integrale primo). Consideriamo un sistema generico olonomo e descritto da  $n$  coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$ ; una funzione  $\Psi(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  si dice integrale primo del moto se

$$(4.33) \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \sum_{a=1}^n \frac{\partial\Psi}{\partial q_a} \dot{q}_a + \sum_{a=1}^n \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a = 0,$$

dove la derivate di  $\mathbf{q}$  sono da intendersi sulla soluzione  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(t)$  delle equazioni del moto.

Un integrale primo del moto ha un valore che tipicamente dipende dalle condizioni iniziali, ma una volta fissato nell'istante iniziale, esso rimane costante durante il moto: si dice che  $\Psi$  *si conserva*. Il problema dell'individuazione degli integrali primi di un moto è non triviale, tuttavia possiamo già identificare due possibili integrali primi che appaiono in particolari condizioni e la cui esistenza è suggerita dalle equazioni cardinali della dinamica.

Oltre all'energia meccanica, due quantità già incontrate possono esibire un principio di conservazione sotto certe condizioni. Dalla prima equazione cardinale della dinamica, dato che  $\langle \vec{Q}, \hat{u} \rangle = \langle \vec{R}^{(\text{ext})}, \hat{u} \rangle$ , possiamo derivare per esempio la seguente Proposizione.

PROPOSIZIONE 1.3 (Conservazione della quantità di moto). *Sia  $\hat{u}$  un versore fisso. Se  $\langle \vec{R}^{(\text{ext})}, \hat{u} \rangle = 0$ , allora la quantità  $\langle \vec{Q}, \hat{u} \rangle$  si conserva.*

In particolare, se  $\vec{R}^{(\text{ext})} = \vec{0}$ , allora  $\vec{Q}$  è un integrale primo del moto.

Analogamente, la seconda equazione cardinale suggerisce la seguente Proposizione.

PROPOSIZIONE 1.4 (Conservazione del momento angolare). *Sia  $\hat{u}$  un versore fisso e sia  $\vec{\tau}_G^{(\text{ext})}$  il momento risultante delle forze calcolato rispetto al centro di massa  $G$ . Se  $\langle \vec{\tau}_G^{(\text{ext})}, \hat{u} \rangle = 0$ , allora la quantità  $\langle \vec{L}_G, \hat{u} \rangle$  si conserva. In particolare, se  $\vec{\tau}_G^{(\text{ext})} = \vec{0}$  allora  $\vec{L}_G$  si conserva.*

## 2. Equilibrio e vincoli

Il vincolo di contatto liscio è naturalmente una astrazione, e in realtà si ha più spesso a che fare con vincoli *dissipativi di contatto scabro*. Un vincolo di contatto scabro si manifesta come un vincolo di contatto che oppone una reazione vincolare con componente tangente al vincolo stesso  $\vec{\Phi}_t$ , oltre che normale  $\vec{\Phi}_n$ , di modo che  $\vec{\Phi}_P = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_t$ .

Supponiamo per esempio di avere un punto materiale in equilibrio e in contatto con un vincolo: il fatto che il punto sia in equilibrio significa che la forza totale agente sul punto materiale è

$$\vec{F}_P^{(a)} + \vec{\Phi}_P = \vec{0}.$$

Questa equazione corrisponde alla condizione che una configurazione di equilibrio  $\vec{x}_0$  deve soddisfare. Nel caso in cui siamo interessati ad individuare le posizioni di equilibrio, ma la reazione vincolare  $\vec{\Phi}_P$  sia ignota, l'equazione può però essere insufficiente a individuare tutte le “incognite” del problema, ovvero le tre coordinate  $\vec{x}_0$  e le tre componenti di  $\vec{\Phi}_P$ .

Se il vincolo è liscio, indicando con  $\hat{n}_P$  il versore normale in  $P$ , sappiamo che  $\vec{\Phi}_t = \vec{0}$ , ovvero  $\vec{\Phi} = \Phi \hat{n}_P$ . Se  $\vec{F}_n^{(a)} = \langle \vec{F}^{(a)}, \hat{n}_P \rangle \hat{n}_P$  è la componente delle forze attive *normale* alla superficie e  $\vec{F}_t^{(a)} = \vec{F}^{(a)} - \vec{F}_n^{(a)}$  quella *tangente* alla superficie, la condizione di equilibrio si può scrivere come una coppia di equazioni

$$(4.34) \quad \vec{F}_t^{(a)} = \vec{0}, \quad \vec{F}_n^{(a)} + \vec{\Phi} = \vec{0},$$

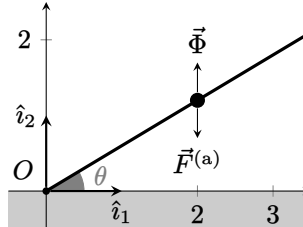
la seconda delle quali fornisce  $\Phi = -\langle \vec{F}^{(a)}, \hat{n}_P \rangle$ . La condizione  $\vec{F}_t^{(a)} = \vec{0}$  è una *equazione pura dell'equilibrio* del punto, dato che non dipende dalle forze di reazione, e fornisce un criterio per individuare l'insieme dei punti di equilibrio. Se il vincolo è *unilatero*,  $\vec{\Phi}$  può avere solo un verso e quindi occorrerà verificare che  $\Phi$  abbia un segno compatibile con la configurazione del sistema (ovvero, che  $\vec{\Phi}$  punti nella porzione ammessa di spazio).

Se invece il punto materiale è soggetto ad un vincolo scabro, la situazione è più complessa e occorre disporre di qualche informazione sulla possibile componente tangente  $\vec{\Phi}_t$  della reazione vincolare, ricavata per esempio dall'esperienza. Si osserva sperimentalmente che, nei sistemi reali, le due componenti normale e tangenziale della reazione vincolare prodotta dal vincolo soddisfano la *disuguaglianza di Coulomb–Morin*,

$$(4.35) \quad \|\vec{\Phi}_t\| \leq \mu_s \|\vec{\Phi}_n\|$$

dove  $\mu_s$  è detto *coefficiente di attrito statico* e dipende dai materiali in contatto reciproco. In altre parole, il contatto può esibire una reazione vincolare tangenziale pari in modulo, *al più*, a  $\mu_s \|\vec{\Phi}_n\|$ . La componente  $\vec{\Phi}_t$  è detta *di attrito statico* ed è diretta in modo tale da annullare l'accelerazione del punto di contatto: essa appare in realtà anche in vincoli ideali come il puro rotolamento: il fatto che vi sia una forza d'attrito statico non implica dunque che si abbia a che fare con un vincolo dissipativo, e occorre verificare che la condizione di lavoro virtuale infinitesimo non negativo sia soddisfatta per decidere se il vincolo è in effetti ideale o meno.

**Esempio 4.8** (Guida inclinata) — Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una guida scabra di coefficiente d'attrito statico  $\mu_s$ . La guida si sviluppa lungo una retta passante per l'origine  $O$  di un riferimento cartesiano e che forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $\mathcal{X}$  del riferimento cartesiano parallelo a  $\hat{i}_1$ . Essa giace nel piano passante per  $O$  e generato dai vettori  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$ .



Sul punto materiale agisce la forza peso, che in questo riferimento ha la forma  $\vec{F}^{(a)} = -mg\hat{i}_2$ , con  $g$  accelerazione di gravità. Questo significa che si ha equilibrio se

$$(4.36) \quad \vec{F}^{(a)} + \vec{\Phi} = \vec{0}$$

dove  $\vec{\Phi}$  è la reazione della guida. Decomponiamo nella direzione *tangente* alla guida e in quella *normale* le forze in gioco: si ha equilibrio se

$$(4.37) \quad -mg \cos \theta + \Phi_n = 0, \quad -mg \sin \theta + \Phi_t = 0$$

da cui

$$(4.38) \quad \Phi_n = mg \cos \theta, \quad \Phi_t = mg \sin \theta.$$

D'altra parte sappiamo che  $|\Phi_t| \leq \mu_s |\Phi_n| = mg \mu_s \cos \theta$ , per cui la seconda equazione può essere soddisfatta solo se

$$(4.39) \quad mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s.$$

Se questa disuguaglianza non è soddisfatta, il punto non può essere in equilibrio. Viceversa, se lo è, *ogni punto della guida* è di equilibrio.

Se invece il punto materiale è in moto sulla guida, la situazione è differente e si parla di vincolo di contatto *con strisciamento*. In questo caso, si vede sperimentalmente che esiste una quantità  $\mu_d$ , detta *coefficiente di attrito dinamico* e dipendente dalle superfici in contatto (ma non, in prima approssimazione, dalla velocità di strisciamento), tale per cui vale la *legge di Coulomb–Morin dinamica*

$$(4.40) \quad \|\vec{\Phi}_t\| = \mu_d \|\vec{\Phi}_n\|.$$

In questo contesto,  $\vec{\Phi}_t$  si dice *attrito dinamico*. Sperimentalmente,  $\mu_d \leq \mu_s$ , mentre la forza  $\vec{\Phi}_t$  ha direzione opposta alla velocità di strisciamento. È chiaro che una forza di attrito dinamico ammette un lavoro virtuale negativo, ed è pertanto associata ad un vincolo dissipativo. Torneremo su casi rilevanti in cui l'attrito ha un ruolo essenziale nel generare speciali tipi di moto.

Come si vede, lo studio dell'equilibrio di un punto materiale può essere piuttosto complesso in presenza di vincoli, anche quando essi sono lisci, per via della comparsa delle reazioni vincolari. Esistono però criteri molto utili per la ricerca dell'equilibrio in sistemi olonomi lisci, che approfondiamo nella seguente sottosezione.

**2.1. Teorema dei lavori virtuali.** Consideriamo un *sistema*  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  di  $N$  punti materiali e indichiamo, come sopra, con  $\vec{X} = (\vec{x}_k)_{k=1}^N$  la concatenazione delle loro posizioni, per compattezza. Indicheremo con  $\delta\vec{X}$  il vettore di  $N$  triplette, ciascuna corrispondente ad uno spostamento virtuale  $\delta\vec{x}_k$  del punto  $P_k$ . Sia  $\vec{F}_k^{(a)}(\vec{X}, \dot{\vec{X}})$  è la forza attiva totale agente su  $P_k$ , in generale funzione delle posizioni e velocità di tutti i punti materiali, che assumeremo essere indipendente (esplicitamente) dal tempo. Il sistema fisico  $\mathcal{S}$  in esame è in equilibrio nella configurazione  $\vec{X}_0$  se e solo se

$$(4.41) \quad \vec{F}_k^{(a)}(\vec{X}_0, \vec{0}) + \vec{\Phi}_k(\vec{X}_0) = \vec{0} \quad \forall k,$$

dove  $\vec{\Phi}_k(\vec{X}_0)$  è l'eventuale reazione vincolare applicata su  $P_k$ . Se il sistema è soggetto a *soli vincoli ideali*, un importante criterio *necessario e sufficiente* perché il sistema sia in equilibrio è fornito dal seguente Teorema, detto *principio* per ragioni storiche.

**TEOREMA 2.1** (Principio dei lavori virtuali). *Sia dato un sistema meccanico di  $N$  punti materiali,  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , soggetto a vincoli ideali. Condizione necessaria e sufficiente perché una certa configurazione  $\vec{X}_0$  sia di equilibrio è che il lavoro virtuale infinitesimo  $\tilde{w}^{(a)}$  delle forze attive per un qualsivoglia spostamento virtuale  $\delta\vec{X} = (\delta\vec{x}_k)_{k=1}^N$  da  $\vec{X}_0$  sia non positivo, ovvero*

$$(4.42) \quad \tilde{w}^{(a)}(\vec{X}, \delta\vec{X}) = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k^{(a)}(\vec{X}_0, \vec{0}), \delta\vec{x}_k \rangle \leq 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\vec{F}_k^{(a)}(\vec{X}_0, \vec{0}) \equiv \vec{F}_k^{(a)}$  la forza attiva risultante agente su  $P_k$  nella configurazione  $\vec{X}_0$ , assumendo il sistema in quiete, e sia  $\vec{\Phi}_k$  l'eventuale forza di reazione vincolare sullo stesso punto materiale  $P_k$ . Partizioniamo  $\mathcal{S}$  in due sottoinsiemi,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_l \cup \mathcal{S}_v$ ,  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_v = \emptyset$ : sia in particolare  $\mathcal{S}_l$  il sottoinsieme di punti liberi, mentre  $\mathcal{S}_v$  è il sottoinsieme dei punti vincolati. Immaginiamo che  $\mathcal{S}$  sia nella configurazione  $\vec{X}_0$  in quiete. Il lavoro virtuale infinitesimo associato alle forze attive in questa configurazione è dato da

$$(4.43) \quad \tilde{w}^{(a)}(\vec{X}_0, \delta\vec{X}) = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k^{(a)}, \delta\vec{x}_k \rangle = \sum_{P_k \in \mathcal{S}_l} \langle \vec{F}_k^{(a)}, \delta\vec{x}_k \rangle + \sum_{P_k \in \mathcal{S}_v} \langle \vec{F}_k^{(a)}, \delta\vec{x}_k \rangle.$$

Equilibrio  $\Rightarrow \tilde{w}^{(a)} \leq 0$  — Se  $\vec{X}_0$  è di equilibrio, in tale configurazione deve essere  $\vec{F}_k^{(a)} = \vec{0}$  se  $P_k \in \mathcal{S}_l$ , mentre  $\vec{F}_k^{(a)} = -\vec{\Phi}_k$  per  $P_k \in \mathcal{S}_v$ . Allora

$$(4.44) \quad \tilde{w}^{(a)}(\vec{X}_0, \delta\vec{X}) = \sum_{P_k \in \mathcal{S}_v} \langle \vec{F}_k^{(a)}, \delta\vec{x}_k \rangle = - \sum_{P_k \in \mathcal{S}_v} \langle \vec{\Phi}_k, \delta\vec{x}_k \rangle \leq 0,$$

dove la disuguaglianza segue dalla definizione di vincolo ideale.

$\tilde{w}^{(a)} \leq 0 \Rightarrow$  Equilibrio — Viceversa, supponiamo che  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$  per ogni spostamento virtuale attorno a  $\vec{X}_0$ . Se per esempio consideriamo uno spostamento virtuale  $\delta\vec{X}$  in cui tutti i punti  $P_k$  hanno  $\delta\vec{x}_k = \vec{0}$ , eccezion fatta per un singolo punto libero  $P_\kappa \in \mathcal{S}_l$ , per ipotesi avremo  $\tilde{w}^{(a)}(\vec{X}_0, \delta\vec{X}) = \langle \vec{F}_\kappa^{(a)}, \delta\vec{x}_\kappa \rangle \leq 0$ ; ma, essendo il punto libero e quindi lo spostamento reversibile, potremo considerare lo spostamento virtuale opposto  $-\delta\vec{x}_\kappa$ , ottenendo  $\tilde{w}^{(a)}(\vec{X}_0, -\delta\vec{X}) = -\langle \vec{F}_\kappa^{(a)}, \delta\vec{x}_\kappa \rangle \leq 0$ : queste due condizioni sono compatibili se e solo se  $\langle \vec{F}_\kappa^{(a)}, \delta\vec{x}_\kappa \rangle = 0$  che, per via dell'arbitrarietà dello spostamento, implica  $\vec{F}_\kappa^{(a)} = \vec{0}$ . Considerando invece uno spostamento virtuale  $\delta\vec{X}$  tale che  $\delta\vec{x}_k = \vec{0}$  per ogni punto eccezion fatta per un punto vincolato  $P_{\bar{\kappa}} \in \mathcal{S}_v$ , otterremo  $\langle \vec{F}_{\bar{\kappa}}^{(a)}, \delta\vec{x}_{\bar{\kappa}} \rangle \leq 0$ . Osserviamo ora che, detta  $\vec{\Phi}_k$  la reazione vincolare su  $P_{\bar{\kappa}}$ , una reazione  $\vec{\Phi}_{\bar{\kappa}} = -\vec{F}_{\bar{\kappa}}^{(a)}$  è *ammissibile*, dato che  $\langle \vec{\Phi}_{\bar{\kappa}}, \delta\vec{x}_{\bar{\kappa}} \rangle = -\langle \vec{F}_{\bar{\kappa}}^{(a)}, \delta\vec{x}_{\bar{\kappa}} \rangle \geq 0$ , come deve essere per un vincolo ideale: ciò significa che in effetti questa reazione vincolare si realizza, e il punto vincolato è in equilibrio.  $\square$

Si noti che l'ultimo passaggio è piuttosto delicato. La definizione di vincolo ideale richiede che  $\langle \vec{\Phi}_k, \delta\vec{x}_k \rangle \geq 0$  per ogni spostamento virtuale ammissibile  $\delta\vec{x}_k$ : questo non specifica univocamente  $\vec{\Phi}_k$  ed in effetti ci sono infinite reazioni vincolari che, a priori, soddisfano questa disuguaglianza. A noi è sufficiente che esista una possibile forza che

è compatibile col vincolo ideale, dato che questo significa che il sistema può essere in equilibrio nella configurazione studiata.

**COROLLARIO 2.2.** *Se ogni spostamento virtuale  $\delta\vec{X}$  attorno ad una configurazione di equilibrio  $\vec{X}_0$  è reversibile, allora  $\tilde{w}^{(a)}(\vec{X}_0, \delta\vec{X}) = 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se ogni spostamento virtuale dalla configurazione  $\vec{X}_0$  è reversibile, dovrà valere

$$(4.45) \quad \tilde{w}^{(a)}(\vec{X}_0, \delta\vec{X}) = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k^{(a)}(\vec{X}_0, \vec{0}), \delta\vec{x}_k \rangle \leq 0 \text{ ma anche } -\tilde{w}^{(a)} = -\sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k^{(a)}(\vec{X}_0, \vec{0}), \delta\vec{x}_k \rangle \leq 0$$

(considerando lo spostamento virtuale opposto), da cui  $\tilde{w}^{(a)}(\vec{X}_0, \vec{0}) = 0$ .  $\square$

Il principio dei lavori virtuali è particolarmente utile, dato che fornisce una *relazione pura di equilibrio*, ovvero una relazione che coinvolge le sole forze attive, e non le reazioni vincolari. Grazie a questo principio, è possibile ottenere delle condizioni ancora più semplici nel caso in cui i vincoli, oltre ad essere ideali, siano anche *olonomi*.

**2.2. Statica dei sistemi olonomi fissi e lisci.** Il caso dei sistemi olonomi fissi e lisci è particolarmente interessante: ci focalizzeremo, in particolare, su vincoli olonomi fissi bilaterali. Come sappiamo, in un sistema olonomo è possibile individuare  $n$  variabili lagrangiane  $\mathbf{q} = (q_i)_{i=1}^n \in \Omega$  che parametrizzano localmente le configurazioni del sistema tenendo conto dei vincoli in un opportuno spazio delle configurazioni  $\Omega$ . Come prima, supponiamo che il sistema sia costituito da  $N$  punti materiali  $P_k$ , ciascuno in posizione  $\vec{x}_k$  secondo un opportuno riferimento inerziale, massa  $m_k$  e sottoposto ad una forza attiva totale  $\vec{F}_k^{(a)}$ . Una configurazione  $\vec{X} = (\vec{x}_k)_{k=1}^N$  del sistema si può parametrizzare in termini di  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , vettore in uno spazio  $n$ -dimensionale. In particolare, per ogni  $k$  possiamo scrivere  $\vec{x}_k \equiv \vec{x}_k(\mathbf{q})$ , di modo che

$$(4.46) \quad \delta\vec{x}_k = \sum_{a=1}^n \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_a} \delta q_a.$$

Analogamente,  $\dot{\vec{X}} = \dot{\vec{X}}(\mathbf{q})$ , e indicheremo quindi  $\vec{F}_k^{(a)}(\vec{X}(\mathbf{q}), \dot{\vec{X}}(\mathbf{q})) \equiv \vec{F}_k^{(a)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . In questo caso, il lavoro virtuale delle forze attive in un punto  $\vec{X}_0$ , corrispondente alle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}_0$ , si può scrivere come

$$(4.47) \quad \tilde{w}^{(a)}(\mathbf{q}_0, \delta\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k^{(a)}(\mathbf{q}_0, \vec{0}), \delta\vec{x}_k(\mathbf{q}) \rangle = \sum_{a=1}^n f_a(\mathbf{q}_0) \delta q_a,$$

dove appaiono le forze generalizzate nella configurazione  $\vec{X}_0$  corrispondente alle coordinate generalizzate  $\mathbf{q}_0$ ,

$$(4.48) \quad f_a(\mathbf{q}_0) := \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k^{(a)}(\mathbf{q}_0), \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_a}(\mathbf{q}) \rangle.$$

Nelle formule precedenti sia la forza attiva che le posizioni  $\mathbf{x}_k$  sono state riesprese in termini delle variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$ . Consideriamo queste relazioni calcolate ora nelle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}_0$ , associate ad una candidata posizione di equilibrio. Se

indichiamo con  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_0) = (f_a(\mathbf{q}_0))_{a=1}^n$  il vettore delle forze generalizzate, possiamo scrivere in forma più compatta

$$(4.49) \quad \tilde{w}^{(a)} = \mathbf{f}^\top(\mathbf{q}_0) \delta \mathbf{q}.$$

A questo punto, possiamo applicare il Teorema dei lavori virtuali, osservando che si può avere a che fare con due diverse situazioni.

**Configurazioni ordinarie:** Se il sistema è soggetto a vincoli bilaterali e  $\mathbf{q}_0$  è associato ad una configurazione  $\bar{X}_0$  non di frontiera, allora tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili e di conseguenza  $\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{q}_0, \delta \mathbf{q}) = \mathbf{f}^\top(\mathbf{q}_0) \delta \mathbf{q} \leq 0$  per ogni  $\delta \mathbf{q}$  implica che

$$(4.50) \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}.$$

Come si vede, un sistema olonomo si comporta come un *punto materiale libero* in cui la condizione di equilibrio è semplicemente che la forza generalizzata su di esso (intesa come vettore) sia nulla.

**Configurazioni di frontiera:** Qualora esistano configurazioni di confine, esse corrispondono a valori  $\mathbf{q}_0 \in \partial\Omega$  e occorre verificare se esse sono tali che  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_0)^\top \delta \mathbf{q}_0 \leq 0$  in un intorno di  $\mathbf{q}_0$ . In questo caso, chiaramente, entra in gioco la geometria di  $\Omega$ .

In generale, quindi, la seguente Proposizione riformula il Teorema dei lavori virtuali nel caso di sistemi olonomi, fornendo i criteri da applicare per calcolare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine di un sistema olonomo fisso e bilaterale.

**PROPOSIZIONE 2.3.** *Una configurazione ordinaria  $\mathbf{q}_0$  è di equilibrio se  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ . Una configurazione  $\mathbf{q}_0$  di confine è di equilibrio se*

- $f_a(\mathbf{q}_0) = 0$  se  $\delta q_a$  può avere qualsivoglia segno (ovvero, ci si può spostare reversibilmente in  $q_a$ );
- $f_a(\mathbf{q}_0) \geq 0$  se si può solo avere  $\delta q_a \leq 0$  (spostamento irreversibile in  $q_a$ );
- $f_a(\mathbf{q}_0) \leq 0$  se si può solo avere  $\delta q_a \geq 0$  (spostamento irreversibile in  $q_a$ ).

Se le forze attive sono conservative, abbiamo visto che, aggiuntivamente, vale la seguente relazione:

$$(4.51) \quad f_a = -\frac{\partial V(\mathbf{q}_0)}{\partial q_a}, \quad a \in [n].$$

La Proposizione precedente fornisce, in questo caso, condizioni quindi sul gradiente del potenziale. Vale il seguente Teorema.

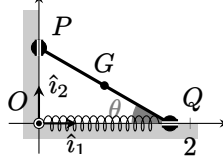
**TEOREMA 2.4** (Stazionarietà del potenziale). *Le configurazioni ordinarie di equilibrio di un sistema olonomo soggetto a forze conservative sono tutte e sole quelle che annullano il gradiente del potenziale,*

$$\nabla V(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0},$$

*ovvero coincidono con i punti stazionari di  $V$ .*

**Esempio 4.9** — Consideriamo un sistema piano, costituito da due punti materiali  $P$  e  $Q$ , di uguale massa  $m$ , connessi da un'asta rigida  $\overline{PQ}$  di lunghezza  $\ell$ . L'asta è vincolata agli assi cartesiani, in modo che la posizione del punto  $P$  sia individuata da un vettore  $\vec{x}_P = y\hat{e}_2$  e che la

posizione del punto  $Q$  sia individuata da  $\vec{x}_Q = x\hat{i}_1$ . Tali coordinate sono vincolate ad essere tali che  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  e il moto di  $P$  e  $Q$  lungo gli assi avviene tramite due carrelli, che permettono uno scorrimento senza attrito. Infine, una molla ideale, di costante elastica  $k$ , collega il punto  $Q$  all'origine. Il sistema è quindi soggetto a vincoli olonomi ed è possibile parametrizzare le configurazioni ammesse utilizzando un angolo  $\theta$  indicato in figura.



Nel sistema,  $\theta \in \Omega := [0, \frac{\pi}{2}]$  e le configurazioni  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  sono di confine. Il potenziale del sistema si può scrivere

$$(4.52) \quad V(\theta) = mgy + \frac{1}{2}kx^2 = mg\ell \sin \theta + \frac{k(\ell \cos \theta)^2}{2}.$$

Il primo contributo è quello dovuto al potenziale gravitazionale, che si può stimare immaginando l'intera massa  $2m$  concentrata nel centro di massa del sistema; il secondo contributo invece è dovuto alla presenza della molla. Chiamando  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ , le configurazioni di equilibrio si possono trovare studiando

$$(4.53) \quad \partial_\theta V = k\ell^2 \cos \theta (\eta - \sin \theta).$$

Le configurazioni di equilibrio *ordinarie* vanno cercate in  $\mathring{\Omega} = (0, \pi/2)$ , imponendo

$$(4.54) \quad \cos \theta (\eta - \sin \theta) = 0.$$

Nell'intervallo aperto che stiamo studiando  $\cos \theta > 0$  e  $\sin \theta > 0$ , per cui occorre trovare  $\theta$  tale che

$$(4.55) \quad \eta - \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \eta.$$

Se  $\eta < 1$ , allora questa equazione ammette una soluzione, ovvero

$$(4.56) \quad \theta = \arcsin \eta;$$

diversamente, non esistono soluzioni.

Consideriamo ora le due configurazioni di confine. Per  $\theta = 0$ , i possibili spostamenti virtuali sono sempre  $\delta\theta \geq 0$ , per cui, perché questa configurazione sia di equilibrio, deve valere  $\partial_\theta V|_{\theta=0} \geq 0$ . In effetti, troviamo che  $\partial_\theta V|_{\theta=0} = -k\ell^2\eta \leq 0$ , che è sempre soddisfatto, per cui  $\theta = 0$  è *sempre* di equilibrio. La configurazione di confine  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , invece, ammette solo  $\delta\theta \leq 0$ , per cui deve valere  $\partial_\theta V|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \leq 0$ : sostituendo si vede che  $\partial_\theta V|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , per cui anche questa configurazione è sempre di equilibrio. Se tracciamo un grafico dei punti di equilibrio al variare di  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ , troviamo le curve raffigurate in Fig. 1 (sinistra).

**2.3. Stabilità.** Le considerazioni espresse finora sono utili per identificare le configurazioni di equilibrio, ma non sono sufficienti per studiarne la *stabilità*. Supponiamo che il nostro sistema meccanico sia posto *vicino* ad una certa posizione di equilibrio. Diciamo che la posizione è di equilibrio *stabile* se il sistema rimane nelle vicinanze della configurazione di equilibrio durante l'evoluzione dinamica successiva; viceversa, se si allontana dalla configurazione di equilibrio, si dice che essa è di *equilibrio instabile*.

Ci focalizzeremo sul caso di sistemi soggetti a vincoli olonomi lisci: una definizione più precisa è la seguente, basata sul concetto di *intorno* di  $\mathbf{q}_0$  associato ad una certa

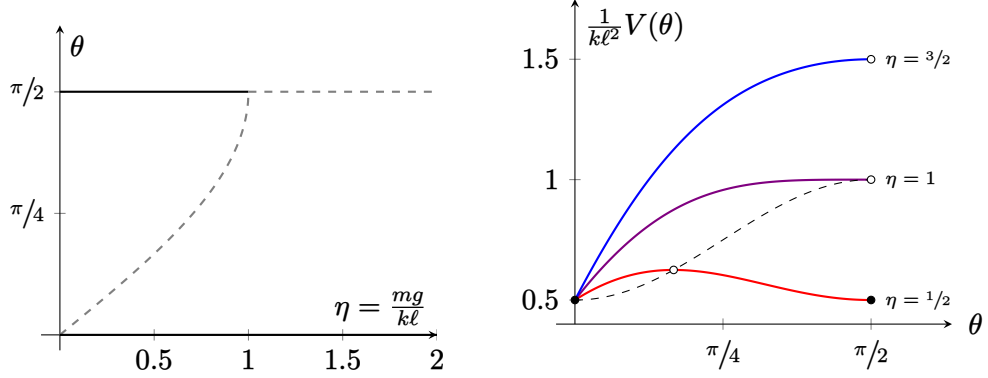


FIGURA 1. (*Sinistra*) Configurazioni stabili (linea continua) e instabili (linea tratteggiata) al variare del parametro  $\eta$  del sistema studiato a pagina 59. (*De-stra*) Energia potenziale  $V(\theta)$  per diversi valori di  $\eta$ : per ogni curva sono indicati i punti di equilibrio stabile (nero) o instabile (bianco). La linea tratteggiata corrisponde al luogo dei punti associati alla posizione del punto di equilibrio ordinario al variare di  $\eta$ .

configurazione di equilibrio  $\vec{X}_0$ . L'idea qui è caratterizzare il punto di equilibrio sulla base del lavoro fatto dalle forze attive per portare il sistema da un suo intorno al punto stesso: se tale lavoro è negativo, ciò significa che le forze attive “resistono” all'allontanamento da  $\mathbf{q}_0$  agendo contro di esso. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 2.1** (Stabilità in senso statico). Sia dato un sistema olonomo parametrizzato localmente da un insieme di variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$ . Si dice che una configurazione di equilibrio di coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}_0$  è stabile in senso statico se esiste  $\epsilon > 0$  tale che per ogni  $\mathbf{q}$  con  $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| \leq \epsilon$  nello spazio delle configurazioni, il lavoro compiuto dalle forze attive per spostare il sistema da  $\mathbf{q}_0$  a  $\mathbf{q}$  è negativo lungo qualsivoglia traiettoria da  $\mathbf{q}_0$  a  $\mathbf{q}$ .

Questa definizione è di difficile applicazione in generale, ma si traduce in un criterio molto semplice se si ha a che fare con un sistema olonomo le cui forze in gioco sono *conservative*, ovvero associate ad un potenziale  $W$ . Infatti in questo caso il lavoro delle forze attive nel passare da  $\mathbf{q}_0$  a  $\mathbf{q}$  è  $W(\mathbf{q}_0 \rightarrow \mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_0) - V(\mathbf{q}) < 0$ ,  $V(\mathbf{q}) > V(\mathbf{q}_0)$ . Il criterio di stabilità, in altre parole, richiede che  $\mathbf{q}_0$  sia un *minimo locale isolato*. Segue perciò la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 2.5.** *In un sistema olonomo conservativo, un minimo relativo isolato dell'energia potenziale corrisponde ad una configurazione di equilibrio stabile in senso statico.*

Perché una configurazione di equilibrio ordinaria  $\mathbf{q}_0$  sia di equilibrio ordinaria è quindi sufficiente (ma non necessario) che la matrice hessiana

$$(4.57) \quad \text{Hess}(V)(\mathbf{q}_0) := \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0) \right)_{ab}$$



sia definita positiva, ovvero abbia tutti gli autovalori strettamente positivi. Se  $n = 1$ , allora la condizione sopra associata a  $q_0$  si riduce ad una condizione di derivata seconda positiva del potenziale in  $q_0$ . Si noti che se la matrice hessiana ha autovalori nulli, uno studio della matrice hessiana non è concludente in generale.

**Esempio 4.10** — Riprendiamo il sistema discusso a pagina 59. Abbiamo già visto che le configurazioni di equilibrio sono

$$(4.58) \quad \theta = \arcsin \eta \quad \text{per } \eta < 1, \quad \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

dove  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ . Non abbiamo però studiato la stabilità delle configurazioni. Se calcoliamo la derivata seconda di  $V$  nella configurazione di equilibrio ordinaria  $\theta = \arcsin \eta$ , otteniamo

$$(4.59) \quad \partial_\theta^2 V(\theta)|_{\theta=\arcsin \eta} = k\ell^2(\eta^2 - 1).$$

Nel regime di valori ammesso per questa configurazione di valori,  $\eta < 1$ , questa derivata è negativa, per cui si tratta di una configurazione instabile.

Lo studio delle configurazioni di confine è più delicato. Per capire se esse sono di massimo o minimo locale, occorre studiare la funzione potenziale nel loro intorno. In un intorno di  $\theta = 0$ , la funzione potenziale è

$$(4.60) \quad V(\theta) = \frac{k\ell^2}{2} + k\ell^2\eta\theta + o(\theta),$$

per cui la funzione è crescente in un intorno positivo di  $\theta = 0$ , che è quindi un minimo locale. Intorno a  $\theta = \pi/2$ , abbiamo invece

$$(4.61) \quad V(\theta) = k\ell^2 + \frac{k\ell^2}{2} (1 - \eta) \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 + o((\theta - \pi/2)^2),$$

che mostra come  $V(\theta)$  decresca per  $\theta \rightarrow \pi/2$  se  $\eta < 1$  e quindi  $\theta = \frac{\pi}{2}$  è una configurazione di equilibrio stabile per  $\eta < 1$ ; per  $\eta > 1$ , invece,  $V$  cresce per  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e il punto  $\theta = \frac{\pi}{2}$  è un massimo locale del potenziale: di conseguenza si tratta di una configurazione instabile. Il caso  $\eta = 1$  necessita di una espansione di ordine superiore, dato che  $\partial_\theta V(\pi/2) = \partial_\theta^2 V(\pi/2) = 0$ . Calcolando la derivata terza si trova che anche  $\partial_\theta^3 V(\pi/2) = 0$ . Occorre perciò arrivare al *quarto* ordine nell'espansione, che per  $\eta = 2$  si trova essere

$$(4.62) \quad V(\theta) = k\ell^2 - \frac{k\ell^2}{8} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^4 + o((\theta - \pi/2)^2)$$

La prima correzione quindi è sempre negativa, ovvero  $\theta = \pi/2$  è un massimo (e perciò instabile) anche per  $\eta = 1$ .

Possiamo quindi produrre un grafico delle posizioni di equilibrio in cui indichiamo quali sono stabili (in linea continua) e instabili (in linea tratteggiata) al variare di  $\eta$  come in Fig. 1 (sinistra).

### 3. Moto unidimensionale

Consideriamo ora un particolare tipo di moto vincolato, ovvero supponiamo che il punto materiale  $P$  di massa  $m$  sia *vincolato a muoversi lungo una guida unidimensionale prefissata*, che immaginiamo parametrizzata in maniera intrinseca da  $\vec{\gamma}_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . In particolare, se fissiamo una origine sulla curva e indichiamo con  $s$  l'ascissa curvilinea lungo di essa, ogni posizione del punto materiale sarà univocamente associata ad un valore dell'ascissa curvilinea e pertanto potremo scrivere

$$\vec{x}_P(t) = \vec{\gamma}(s(t)).$$

La funzione  $s(t)$  fornisce, come sappiamo, la *legge oraria* per il punto materiale, ovvero l'ascissa curvilinea al tempo  $t$ . In altre parole,  $s$  gioca il ruolo di *parametro lagrangiano* in questo sistema.

Sul punto materiale agiranno, in generale, delle forze attive con risultante  $\vec{F}_P^{(a)}$  e delle forze di reazione  $\vec{\Phi}_P$  esercitate dalla guida. Il Secondo principio può essere riscritto in termini di componenti lungo la terna intrinseca  $(\hat{v}_P, \hat{n}_P, \hat{b}_P)$  in  $P$ : dal fatto che

$$\vec{a}_P = \ddot{s}\hat{v}_P + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{b}_P,$$

dove  $\rho$  è il raggio di curvatura in  $P$ , segue che

$$(4.63) \quad m\ddot{s} = \langle \vec{F}_P^{(a)} + \vec{\Phi}_P, \hat{v}_P \rangle, \quad \frac{m\dot{s}^2}{\rho} = \langle \vec{F}_P^{(a)} + \vec{\Phi}_P, \hat{n}_P \rangle, \quad 0 = \langle \vec{F}_P^{(a)} + \vec{\Phi}_P, \hat{b}_P \rangle.$$

Supponiamo ora che il vincolo sia *ideale*, ovvero la guida sia liscia: ciò significa che  $\langle \vec{\Phi}_P, \hat{v}_P \rangle = 0$  e la prima di queste equazioni, può essere espressa in termini della *forza generalizzata*  $f := \langle \vec{F}_P^{(a)}, \hat{v}_P \rangle$  come

$$(4.64) \quad f := \langle \vec{F}, \hat{v}_P \rangle = m\ddot{s}.$$

Se  $\vec{F}_P^{(a)}$  è ovunque ortogonale alla curva, ovvero  $f \equiv 0$ , allora  $\ddot{s} = 0$ , ovvero  $\dot{s}(t) = \dot{s}(t_0) = \text{costante} \equiv v_0$  e quindi  $s(t) = v_0 t$ . Se  $\vec{F}_P^{(a)}$  è in generale non ortogonale a  $\hat{v}_P$  ma posizionale, ovvero dipendente solo dal punto lungo la curva, possiamo scrivere  $f = f(s)$ . L'equazione da risolvere è  $m\ddot{s} = f(s)$ , che implica

$$(4.65) \quad \dot{s}(m\ddot{s} - f(s)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s) \right) = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$(4.66) \quad V(s) := - \int_0^s f(x) dx.$$

In altre parole, la quantità

$$(4.67) \quad E := \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s)$$

è un integrale del moto, esattamente *come se* la forza in gioco fosse conservativa e *come se*  $E$  fosse l'energia meccanica corrispondente ad un problema unidimensionale parametrizzato dalla sola variabile  $s$  in presenza di un potenziale  $V(s)$ . I punti di equilibrio, in particolare, si potranno ottenere studiando l'equazione  $f(s) = -\partial_s V(s) = 0$ . La funzione

$$(4.68) \quad \Phi(s) := 2 \frac{E - V(s)}{m}$$

contiene tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse: il moto è ammesso solo nelle regioni in cui  $\Phi(s) > 0$ , dovendo essere  $\Phi(s) = \dot{s}^2$ , mentre gli zeri della funzione, se esistono, separano rami in cui  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$  da rami in cui  $\dot{s} = -\sqrt{\Phi(s)}$ . Supponiamo per

esempio di iniziare il moto a  $t = 0$  in  $s_0$ , e che  $\Phi(s_0) > 0$  in tale punto: se  $\Phi(s) > 0$  per ogni  $s > s_0$ , allora

$$(4.69) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(s)}} \Rightarrow t(s) = \int_{s_0}^s \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}$$

esprime il tempo in funzione della distanza percorsa. Si tratta di una funzione monotona e quindi invertibile. Se esiste  $\hat{s} > s_0$  tale che  $\Phi(\hat{s}) = 0$ , il tempo necessario per raggiungere tale punto a partire da  $s_0$  è dato da

$$(4.70) \quad \hat{t} = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Questa quantità può essere finita o infinita dipendentemente dal fatto che  $\hat{s}$  sia uno zero semplice o multiplo di  $\Phi(s)$ , rispettivamente. Nel primo caso,  $\hat{s}$  verrà toccato in un tempo finito, mentre nel secondo caso il sistema raggiungerà  $\hat{s}$  solo asintoticamente: il moto sarà perciò limitato alla regione  $s < \hat{s}$  durante l'evoluzione. In generale, gli zeri multipli di  $\Phi(s)$  sono punti inaccessibili (e invalicabili) per il punto materiale, a meno che esso non si trovi esattamente in uno di essi nel suo stato iniziale  $s_0$ . Gli zeri semplici di  $\Phi(s)$  sono invece detti *punti di inversione*: vengono raggiunti in un tempo finito e lì il moto si inverte tornando indietro. Vale il seguente

**TEOREMA 3.1.** *Il moto tra due punti di inversione consecutivi  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+ > \hat{s}_-$  è periodico di periodo*

$$(4.71) \quad \tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $s_0 \in (s_-, s_+)$  e  $v_0 > 0$ . Per ipotesi

$$\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(s - \hat{s}_+)\phi(s)$$

con  $\phi(s) > 0$  per  $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$ . Abbiamo che  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$ , per cui  $\dot{s} = 0$  per  $s = s_{\pm}$ . D'altra parte, la forza in questi punti ha segno opposto:

$$(4.72) \quad f(s_+) = \Phi'(s_+) = -(s_+ - s_-)\phi(s_+) < 0, \quad f(s_-) = \Phi'(s_-) = (s_+ - s_-)\phi(s_-),$$

di modo che il moto si inverte in questi punti estremali. Partendo da  $s_0$  con  $v_0 > 0$ , il moto prosegue perciò fino a  $s_+$  dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, subisce una accelerazione verso  $s_-$  che lo fa ripassare da  $s_0$  con velocità  $-v_0$ , fino ad arrivare in  $s_-$ , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in  $s_0$  con stessa velocità  $v_0$  dopo un tempo  $\tau$ : da qui in poi il moto si riproduce *identico* essendosi verificate nuovamente, al tempo  $\tau$ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo  $t_0$ . Il tempo del periodo quindi è

$$(4.73) \quad \tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} + \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}. \quad \square$$

**Esempio 4.11** (Pendolo matematico nelle piccole oscillazioni) — Un pendolo ideale è costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una guida circolare liscia verticale di raggio  $\ell$ , che assumiamo centrata nell'origine di un riferimento cartesiano ortonormale inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Su di esso agiscono la forza peso  $\vec{F}_g = -mg\hat{i}_3$  e la reazione del vincolo, supposto ideale. La sua posizione può essere parametrizzata da un parametro lagrangiano  $\theta$ , angolo tra  $\vec{x}_P = \vec{OP}$  e la direzione  $-\hat{i}_3$ , come rappresentato in Fig. 2. Possiamo introdurre l'ascissa curvilinea  $s = \ell\theta$ , che quantifica la lunghezza dell'arco della circonferenza di raggio  $\ell$  sotteso dall'angolo  $\theta$  rispetto al punto di quota più bassa. L'equazione del moto

$$(4.74) \quad m\ddot{\vec{x}}_P = -mg\hat{i}_3 + \vec{\Phi}_P$$

può essere riscritta osservando che il raggio di curvatura è proprio  $\ell$  e lungo la guida vale

$$(4.75) \quad \ddot{\vec{x}}_P = \ddot{s}\hat{v}(s) + \frac{\dot{s}^2}{\ell}\hat{b}(s),$$

dove  $\hat{v}(s)$  e  $\hat{b}(s)$  sono i versori tangente e normale alla guida nel punto di ascissa curvilinea  $s$ . Moltiplicando scalarmente per  $\hat{v}(s)$ , l'equazione diventa

$$(4.76) \quad m\ddot{s} = -mg\langle\hat{v}(s), \hat{i}_3\rangle,$$

dato che la guida è liscia e ideale, e quindi  $\vec{\Phi}_P$  è ortonormale ad essa. Ora, osservando che

$$(4.77) \quad \langle\vec{v}(s), \hat{i}_3\rangle = \sin\theta,$$

e osservando che  $\ddot{s} = \ell\ddot{\theta}$ , possiamo riscrivere

$$(4.78) \quad \ddot{\theta} = -g\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0, \quad \omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Questa equazione differenziale è non lineare e la sua integrazione può eseguirsi numericamente. Sappiamo che la quantità

$$(4.79) \quad E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$$

si conserva durante il moto. Questa relazione permette di calcolare facilmente alcune utili quantità senza la necessità di integrare le equazioni del moto. Per esempio, indicando con  $\theta_{\max}$  l'angolo massimo raggiunto dal pendolo, e punto di inversione del moto, l'energia cinetica a  $\theta = 0$  si potrà ottenere da  $T - mg\ell = -mg\ell\cos\theta_{\max} \Rightarrow T = g\ell(1 - \cos\theta_{\max})$ . A valore di  $E$  fissato, i valori di  $\theta$  ammessi saranno quelli per cui

$$(4.80) \quad \frac{2}{\ell^2 m}(E + mg\ell\cos\theta) \geq 0$$

con associati punti di inversione

$$(4.81) \quad \theta_{\pm} = \pm \arccos\left(-\frac{E}{mg\ell}\right) \quad \text{se} \quad -mg\ell \leq E \leq mg\ell.$$

Valori  $E < -mg\ell$  non sono ammessi, mentre per  $E > mg\ell$  il pendolo ha sufficiente energia da compiere rivoluzioni complete attorno al punto in cui è vincolato, e pertanto non vi sono punti di inversione. Il *periodo* del moto per  $|E| < mg\ell$  vale

$$\tau = \int_{\theta_-}^{\theta_+} \sqrt{\frac{2m}{E + mg\ell\cos\theta}} d\theta.$$

Questa formula è piuttosto complessa da trattare, tuttavia qualcosa di più può essere detto *nel limite delle piccole oscillazioni*, ovvero assumendo che  $|\theta_{\pm}|$  piccoli di modo che si possa approssimare  $\sin\theta \simeq \theta$ . In questa approssimazione, l'equazione è esattamente quella di un moto

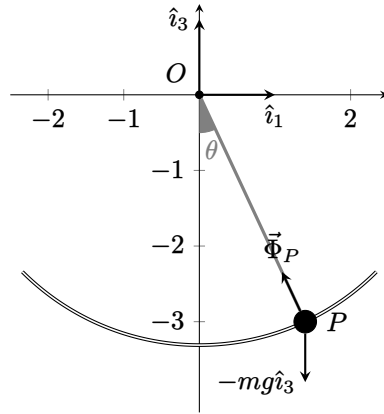


FIGURA 2. Pendolo matematico in un piano verticale.

armonico, per cui, se  $\theta_0 = \theta(0)$  e  $\eta_0 = \dot{\theta}(0)$ ,

$$(4.82) \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\eta_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Si tratta cioè di un moto di *periodo* è pari a

$$(4.83) \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Si osservi che questa quantità *non* dipende dalla massa né, nel detto limite di piccole oscillazioni, dall'energia del pendolo.



## Il corpo rigido: aspetti cinematici e dinamici

### 1. Cinematica del corpo rigido

**1.1. Corpo rigido e sistema solidale.** Un importante tipo di sistema soggetto a vincoli *interni* è il cosiddetto *corpo rigido*. Un insieme di punti materiali  $\mathcal{B}$  si dice essere un *corpo rigido* se le distanze tra tutte le coppie di punti che lo costituiscono rimangono inalterate nel tempo. Un corpo rigido può essere soggetto solo a *moti rigidi*, ovvero moti che rispettano questo vincolo lasciando siffatte distanze inalterate. Un fatto cruciale riguardante lo studio dei corpi rigidi è costituito dalla possibilità di introdurre un *sistema di riferimento solidale* al corpo rigido stesso, ovvero un sistema di riferimento cartesiano  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  che “partecipa” del moto del corpo e tale che, rispetto ad esso, le coordinate dei punti del corpo rimangano inalterate al variare del tempo.

**Q** Tre punti non allineati di un corpo rigido, siano  $O_*$ ,  $P_1$  e  $P_2$  permettono di fissare un riferimento solidale ad esso rispetto ad un riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ : uno dei tre punti, sia  $O_*$ , può essere scelto come origine del nuovo riferimento; una base ortonormale solidale  $\{\hat{e}_k\}_{k=1}^3$  può essere quindi costruita utilizzando per esempio

$$(5.1) \quad \hat{e}_1 := \frac{\overrightarrow{O_*P_1}}{\|\overrightarrow{O_*P_1}\|}, \quad \hat{e}_2 := \frac{\overrightarrow{O_*P_2} - \langle \overrightarrow{O_*P_2}, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1}{\|\overrightarrow{O_*P_2} - \langle \overrightarrow{O_*P_2}, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1\|}, \quad \hat{e}_3 := \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2.$$

**1.2. Moti rigidi.** Un certo punto generico  $P$  del corpo, individuato dal vettore  $\overrightarrow{OP} = \vec{x}_P$  in un riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , sarà individuato, nel riferimento solidale, da  $\overrightarrow{O_*P} = \vec{x}_P^*$  di modo che

$$(5.2) \quad \vec{x}_P(t) = \vec{x}_*(t) + \sum_{a=1}^3 x_a^* \hat{e}_a(t) = \vec{x}_*(t) + \sum_{a=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_a^* R_{ak}(t) \hat{i}_k.$$

dove  $\vec{x}_* = \overrightarrow{OO_*}$  e si noti che ogni  $x_a^*$  non dipende dal tempo, mentre  $\mathbf{R}(t)$  è la matrice che esegue il cambio di base dal riferimento fisso a quello mobile. L'equazione ottenuta è detta *equazione cartesiana di un moto rigido* e mostra come l'evoluzione delle coordinate di un punto del corpo possa essere descritta in termini dell'evoluzione della posizione di un punto solidale (l'origine  $O_*$  del riferimento solidale) e di una matrice di rotazione: possiamo quindi caratterizzare il moto usando solo sei parametri lagrangiani, ovvero le tre coordinate di  $O_*$  e i tre angoli di Eulero necessari per scrivere  $\mathbf{R}(t)$ .

L'esistenza di un riferimento solidale col corpo permette di associare ad esso, e quindi al corpo rigido stesso, una *velocità angolare*, che indicheremo con  $\vec{\omega}$ . Il teorema di Poisson

ci aiuta a *caratterizzare* in maniera semplice un moto rigido, dato che mostra che l'informazione sul moto di rotazione è contenuta in  $\vec{\omega}$ , vettore tridimensionale, eventualmente dipendente dal tempo.

**TEOREMA 1.1** (Legge di distribuzione delle velocità). *Siano dati due punti  $P$  e  $Q$  di un corpo in moto. Essi si muovono di moto rigido se e solo se esiste un vettore  $\vec{\omega}$  tale per cui*

$$(5.3) \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{QP}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La formula di Poisson implica direttamente l'Eq. (5.3) se applicata al vettore solidale  $\vec{u} = \overrightarrow{QP}$ . D'altra parte, l'Eq. (5.3) è sufficiente per avere moto rigido. Ciò si può vedere osservando che, se la formula sopra è verificata, le distanze tra i due punti rimangono costanti:

$$(5.4) \quad \frac{d \|\overrightarrow{QP}\|^2}{dt} = 2 \langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP} \rangle = 2 \langle \overrightarrow{QP}, \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{QP} \rangle = 0. \quad \square$$

La legge in Eq. (5.3) è anche detta *legge fondamentale del moto rigido* ed è alla base delle peculiari proprietà di questo tipo di moto. Essa ha anche come conseguenza diretta la legge di distribuzione delle accelerazioni. Basta infatti derivare ancora una volta per ottenere

$$(5.5) \quad \vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{QP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{QP}),$$

dove abbiamo usato la formula di Poisson su  $\overrightarrow{QP}$ , che è solidale.

**1.3. Asse di moto.** L'Eq. (5.3) mostra un fatto cruciale, ovvero che le velocità  $\vec{v}_P$  dei punti che costituiscono il corpo rigido seguono la *stessa legge* che abbiamo derivato per i momenti di un sistema di vettori applicati, con la differenza che il ruolo lì assunto da  $\vec{R}$  è qui preso da  $\vec{\omega}$ . Questo fatto suggerisce una serie di osservazioni. Per esempio, è naturale l'introduzione dell'*invariante cinematico*,

$$(5.6) \quad \mathcal{I}_c := \langle \vec{\omega}, \vec{v}_P \rangle.$$

Questa quantità non dipende da  $P$ , ovvero la componente della velocità lungo  $\vec{\omega}$  *non dipende dal punto  $P$  in cui la si calcola*. L'insieme dei vettori applicati  $\{(P_k, \vec{v}_k)\}$  in un dato istante è detto *atto di moto rigido*: esso si può associare ad un *asse centrale* esattamente come nel caso dei momenti di un sistema di vettori applicati. Nel contesto del moto rigido, questo asse è detto *asse istantaneo di moto*. La Proposizione 3.3 viene riformulata in questo contesto nel seguente Teorema.

**TEOREMA 1.2** (Mozzi–Chasles). *Dato un atto di moto rigido con  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , esiste un asse, detto asse istantaneo di moto, i cui punti hanno velocità parallela all'asse stesso. Inoltre, i punti sull'asse di moto hanno velocità di modulo minimo nel corpo rigido.*

Gli atti di moto con  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  si dicono *elicoidali*, proprio per via dell'esistenza di un asse istantaneo di moto. Come nel caso generale, si può qui scrivere l'equazione dell'asse *mutatis mutandis*, osservando come si diceva che il ruolo dei momenti è qui preso dalle



velocità e quello della risultante è preso da  $\vec{\omega}$ , per cui un punto  $Z$  appartiene alla retta se, dato un punto  $X$  del corpo,

$$(5.7) \quad \overrightarrow{XZ} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_X}{\|\vec{\omega}\|^2} + \lambda \vec{\omega}$$

per un qualche valore  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nell'ipotesi  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , se l'invariante cinematico è  $\mathcal{I}_c = \langle \vec{\omega}, \vec{v}_Y \rangle = 0$  per un punto  $Y$  dell'asse di moto, ciò significa che  $\vec{v}_Y$  è nullo sull'asse stesso (dovendo esso essere parallelo a  $\vec{\omega}$ ): in questo caso l'atto di moto si dice *rotatorio*, e ogni altro punto ha velocità  $\vec{v}_X = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{YX}$ . Questa formula implica anche che in un atto di moto rotatorio  $\vec{v}_X$  è sempre ortogonale a  $\vec{\omega}$ .

1.3.1. *Particolari moti rigidi.* Esistono diversi tipi di moti rigidi che possono essere distinti per mezzo delle quantità introdotte. I moti rigidi in cui tutte le velocità sono sempre parallele ad un certo piano si dicono *piani*, e il piano in questione si dice *direttore*: i moti rigidi piani hanno perciò un invariante cinematico nullo.

**Q** Un moto rigido piano viene tipicamente ottenuto per mezzo di dispositivi vincolari. Tre esempi ricorrenti di vincoli ideali usati nei moti rigidi piani sono i seguenti.

**Cerniera:** Una *cerniera piana* vincola uno o più corpi rigidi nel piano a ruotare attorno al punto in cui è applicata, che può essere fisso (cerniera fissa) o libero di muoversi nel piano (cerniera mobile – in questo caso, la cerniera vincola due corpi rigidi). Una cerniera fissa è un vincolo ideale (il punto in cui è applicata non può muoversi); una cerniera mobile, è anch'essa ideale in quanto non ammette spostamenti relativi tra i punti dei due corpi a cui è applicata.

**Carrelli e pattini:** Un *carrello* vincola un estremo di un corpo rigido a scorrere lungo un binario consentendo una rotazione attorno al punto in cui è applicata. In un carrello ideale, non viene prodotta alcuna reazione lungo la direzione *parallela* al moto del carrello, mentre l'unica possibile reazione del vincolo è nella direzione ortogonale: il carrello è infatti un vincolo ideale liscio bilatero. Un *pattino* agisce come un carrello ma, in aggiunta, non permette una rotazione del corpo attorno al punto in cui è applicato: anche in questo caso l'eventuale reazione vincolare è ortogonale alla direzione di scorrimento.

**Incastro:** Un *incastro* può essere interpretato come il più estremo tipo di vincolo tra due corpi rigidi, ovvero come una cerniera mobile che non ne permette la rotazione relativa. Si tratta quindi di una completa saldatura dei due corpi. Non permettendo alcuno spostamento relativo, è un vincolo ideale.

L'asse di moto è una proprietà *istantanea* del corpo, e in istanti diversi l'asse può essere orientato in maniera diversa. Dipendentemente dal comportamento di  $\vec{\omega}$ , si può inoltre dare una classificazione del tipo di moto rigido con cui si ha a che fare. Se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  ha *direzionale costante*, ovvero  $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{\omega}$  per un qualche versore  $\hat{\omega}$  fisso, si dice che il moto è *rototraslatorio*. Si noti che questo non vuol dire che l'asse è fisso, ma solo che la sua direzione non cambia. Esiste quindi una direzione  $\hat{\omega}$  solidale che non viene alterata durante il moto e si può sempre scegliere quindi un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  con  $\hat{i}_3 = \hat{\omega}$  e scrivere  $\vec{\omega} = \dot{\alpha}\hat{i}_3$  dove  $\alpha$  è quindi *l'angolo di rotazione* attorno a  $\hat{i}_3$ . In particolare, se l'asse di moto è fisso il moto si dice *elicooidale*; se la velocità calcolata sull'asse è nulla il moto si dice *rotatorio*. Se  $\vec{\omega} = \vec{0}$  il moto è detto semplicemente *traslatorio*: in questo caso, tutti i punti del corpo hanno la stessa velocità e la stessa accelerazione. I moti

piani sono quindi o moti traslatori (se  $\vec{\omega} = \vec{0}$ ) o moti rotatori (se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , dato che in questo caso la velocità dei punti sull'asse di rotazione deve essere nulla).

Un tipo diverso di moto rigido è quello *polare*. In un moto polare un punto  $P$  del corpo è *fisso* nel riferimento fisso. La configurazione del corpo rigido è perciò identificata, in generale, dai soli tre parametri euleriani. Un generico punto  $Q$  del corpo ha, in questo riferimento,  $\vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$ , sicché tutti i punti del corpo che giacciono sull'asse di moto hanno velocità nulla. Tra i moti polari esiste una famiglia di moti con una proprietà particolare, detti *moti precessionali*: in tali moti è possibile scegliere un sistema di riferimento solidale  $P\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  e un sistema di riferimento fisso  $P\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  tali per cui  $\langle \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle$  sia costante. Essendo  $\hat{i}_3$  fisso, questa condizione si può scrivere come  $\frac{d}{dt}\langle \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle = \langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{i}_3 \rangle = 0$ .

LEMMA 1.3. *Un moto è precessionale se e solo se  $\vec{\omega}$  ha la forma*

$$(5.8) \quad \vec{\omega}(t) = \omega_e(t)\hat{e}_3(t) + \omega_i(t)\hat{i}_3.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $\langle \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle$  è costante, derivando rispetto al tempo otteniamo che  $\langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{i}_3 \rangle = \langle \vec{\omega} \wedge \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle = 0$ , ovvero  $\vec{\omega}$ ,  $\hat{e}_3$  e  $\hat{i}_3$  sono complanari. Viceversa, se si assume che  $\vec{\omega}$  abbia la decomposizione proposta dal Lemma,  $\langle \vec{\omega} \wedge \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle = 0$ .  $\square$

1.3.2. *Base e ruletta*. Un moto rigido piano ha, come detto,  $\mathcal{I}_c = 0$  dato che i vettori velocità sono ortogonali al vettore di velocità angolare. Possono aversi due casi. Se  $\vec{\omega} = \vec{0}$  si tratta, come abbiamo visto, di un moto traslatorio piano. Se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , il moto è rotatorio e possiamo identificare un punto  $C$  intersezione tra il piano direttore del moto piano e l'asse istantaneo di rotazione: tale punto è detto *centro istantaneo di rotazione* e vale il seguente teorema che porta il nome di Michel Chasles.

TEOREMA 1.4 (Chasles). *In un moto rigido piano, le normali alle velocità  $\vec{v}_P$  e  $\vec{v}_Q$  in due punti  $P$  e  $Q$  distinti si intersecano nel centro di istantanea rotazione se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , mentre invece sono parallele se  $\vec{\omega} = \vec{0}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Detto  $C$  il centro istantaneo di rotazione, identificato da un vettore  $\vec{x}_C$  rispetto ad un riferimento fisso dato, il teorema discende dal fatto che, se il moto ha  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}$  e  $\vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CQ}$ .  $\square$

Il centro istantaneo di rotazione  $C$  può essere trovato usando la relazione in Eq. (5.7), scrivendo, dato un punto  $P$  in movimento solidale col corpo,

$$(5.9) \quad \overrightarrow{PC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P}{\|\vec{\omega}\|^2}.$$

Questa equazione vale naturalmente ad ogni istante di tempo, e, utilizzata in diversi istanti di tempo, fornisce la posizione di  $C$  al variare di  $t$  nel riferimento fisso: la traiettoria descritta da  $C$  si dice *base* o *polare fissa*. Si può anche calcolare la traiettoria del centro di rotazione  $C$  in un sistema di riferimento solidale  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ . Basta scegliere nella formula precedente  $P = O_*$  per ottenere

$$(5.10) \quad \overrightarrow{O_*C} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_*}{\|\vec{\omega}\|^2}.$$

La curva ottenuta applicando questa relazione, da intendersi nel sistema di riferimento solidale, si chiama *ruletta* o *polare mobile*. Ci si riferisce a base e ruletta come alle *traiettorie polari* del moto rigido. Si noti che, in generale,  $C$  non è solidale (diversamente,

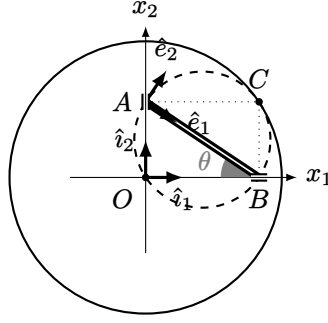


FIGURA 1. Asta rigida con estremi vincolati a scorrere lungo gli assi tramite due carrelli. Sono evidenziate la base (linea continua) e la rulletta (linea tratteggiata) del moto.

la rulletta sarebbe semplicemente un punto): esso corrisponde alla posizione in cui un punto solidale ha velocità nulla, ma questa posizione stessa *cambia nel tempo* e infatti in generale  $\vec{v}_C^* \neq \vec{0}$ .

**Esempio 5.1** (Asta con estremi vincolati agli assi) — Calcoliamo base e rulletta del seguente semplice sistema. Abbiamo un'asta rigida di lunghezza  $\ell$  di estremi  $A$  e  $B$ : gli estremi sono vincolati entrambi a *scorrere* lungo i due assi cartesiani di un riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2$  nel piano tramite due carrelli. Un *carrello* è un dispositivo che vincola il moto traslatorio di un punto lungo una certa curva, ma permette al resto del sistema di ruotare liberamente attorno al punto stesso. Questo significa nel nostro caso che  $\vec{OA} = a\hat{i}_2$  e  $\vec{OB} = b\hat{i}_1$ , con  $a$  e  $b$  funzioni del tempo. Determiniamo base e rulletta di questo sistema. Anzitutto, naturalmente  $a^2 + b^2 = \ell^2$  lunghezza quadra dell'asta, che è rigida. Possiamo parametrizzare in particolare  $a = \ell \sin \theta$  e  $b = \ell \cos \theta$ , in modo che  $\theta$ , angolo indicato in figura, sia l'unico parametro di cui tener traccia durante l'evoluzione. Per costruzione,  $\vec{v}_A = \ell\dot{\theta} \cos \theta \hat{i}_2$  e  $\vec{v}_B = -\ell\dot{\theta} \sin \theta \hat{i}_1$ , per cui il centro istantaneo di rotazione  $C$  può essere individuato trovando l'intersezione delle due rette ortogonali ai due vettori velocità, ovvero usando il fatto che  $\langle \vec{CA}, \vec{v}_A \rangle = 0$  e  $\langle \vec{CB}, \vec{v}_B \rangle = 0$ . Scrivendo  $\vec{OC} = c_1\hat{i}_1 + c_2\hat{i}_2$  questo significa  $a - c_2 = 0$  e  $b - c_1 = 0$ , per cui  $\vec{OC} = b\hat{i}_1 + a\hat{i}_2 = \ell \cos \theta \hat{i}_1 + \ell \sin \theta \hat{i}_2$ . Questa espressione fornisce già la traiettoria della base, essendo espressa nel riferimento fisso: dato che  $\theta \in \mathbb{R}$ , al variare dell'angolo il centro istantaneo di rotazione descrive una circonferenza di raggio  $\ell$  centrata nell'origine. Per ottenere l'equazione della rulletta, basta osservare che il triangolo avente come vertici i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  è sempre rettangolo per costruzione: questo vuol dire che  $C$  è sempre su una circonferenza che ha come diametro l'asta, che naturalmente è solidale. Tale circonferenza è proprio la rulletta. Questo stesso risultato può essere derivato in una maniera più esplicita, usando l'equazione per il centro istantaneo di rotazione in un riferimento solidale. Scegliamo per esempio un riferimento solidale avente l'origine in  $A$ ,  $\hat{e}_1$  con la stessa direzione del vettore  $\vec{AB}$  (la direzione dell'asta),  $\hat{e}_2$  ad esso ortogonale in modo da fornire un riferimento positivamente orientato nel piano, e  $\hat{e}_3 = \hat{i}_3$  (comunque irrilevante dato che il moto è piano). In tal caso

$$(5.11) \quad \hat{e}_1 = \cos \theta \hat{i}_1 - \sin \theta \hat{i}_2, \quad \hat{e}_2 = \sin \theta \hat{i}_1 + \cos \theta \hat{i}_2, \quad \hat{e}_3 = \hat{i}_3,$$

ovvero

$$(5.12) \quad \hat{i}_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2, \quad \hat{i}_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2, \quad \hat{i}_3 = \hat{e}_3.$$

Dunque

$$(5.13) \quad \overrightarrow{AC} = \ell \cos \theta^2 \hat{e}_1 + \ell \cos \theta \sin \theta \hat{e}_2 = \frac{\ell}{2} \hat{e}_1 + \frac{\ell}{2} \cos(2\theta) \hat{e}_1 + \frac{\ell}{2} \sin(2\theta) \hat{e}_2,$$

che è una circonferenza centrata in  $\frac{\ell}{2} \hat{e}_1$  (cioè al centro dell'asta) e di raggio  $\frac{\ell}{2}$ , come avevamo anticipato.

**1.4. Rotolamento.** Supponiamo ora di avere due sistemi rigidi aventi come supporto due curve regolari  $\vec{\gamma}$  e  $\vec{\psi}$  nello spazio tridimensionale. Assumiamo che  $\vec{\gamma}$  sia fissa rispetto ad un certo riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , mentre  $\vec{\psi}$  è mobile ma tale da mantenere sempre un unico punto di contatto  $C$  con  $\vec{\gamma}$  in ogni momento del suo moto, in modo che i vettori tangenti alle due curve in  $C$  siano paralleli: in questo caso si dice che le due curve sono in un *moto di rotolamento*. Il punto di contatto  $C$  non corrisponde ad un preciso punto materiale delle due curve, ma ad un luogo geometrico, ovvero alla *posizione* in cui le curve sono tangenti. Supponiamo ora di avere un riferimento mobile  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , solidale con  $\vec{\psi}$ . Il riferimento mobile e solidale con  $\vec{\psi}$  avrà una certa velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto al riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Se nel riferimento fisso la velocità del punto di contatto è data da  $\vec{v}_C$ , nel riferimento mobile lo stesso punto ha velocità  $\vec{v}_C^*$ , di modo che

$$(5.14) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_C^* + \vec{v}_C^T, \quad \vec{v}_C^T := \vec{v}_* + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_*C}$$

dove  $\vec{v}_C^T$  è la velocità di trascinamento, detta in questo contesto specifico *velocità di strisciamento*. Il punto  $C$  è sempre un punto di tangenza tra le curve, e dovendo essere  $\vec{v}_C$  e  $\vec{v}_C^*$  tangenti alle due curve in  $C$ , lo sarà anche la velocità di strisciamento.

Possono a questo punto verificarsi diversi casi. Se  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , allora il moto si dice *di puro strisciamento*: in questo caso la velocità di strisciamento corrisponde alla velocità di traslazione dell'origine del riferimento solidale.

Un caso molto speciale e importante è quello in cui  $\vec{v}_C^* = \vec{0}$  e, di conseguenza,  $\vec{v}_C = \vec{v}_C^*$ : il moto è detto *di rotolamento puro*. Richiedere che valga la condizione di rotolamento puro equivale ad imporre un vincolo sulle velocità: tuttavia, se si stanno considerando curve in rotolamento reciproco, il fatto che le velocità del punto di tangenza nei due riferimenti (fisso e solidale) siano uguali implica che *il punto di tangenza percorre cammini di lunghezza uguale lungo le due curve in tempi uguali*. La condizione di rotolamento puro diventa così una condizione sulle *lunghezze*: si tratta perciò di un *vincolo olonomo*.

**1.4.1. Base, rulletta e rotolamento puro.** Siamo già incappati in un moto di rotolamento puro tra curve. In effetti, un moto di rotolamento puro compare in *ogni moto rigido piano* anche se in forma spesso nascosta.

**TEOREMA 1.5.** *Due curve nel piano rotolano senza strisciare l'una sull'altra se e solo se sono base e rulletta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo una base e una rulletta di un moto rigido piano avente velocità angolare  $\vec{\omega}$ , e sia  $C$  il centro istantaneo di rotazione. Questo soddisfa l'equazione  $\vec{v}_* + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_*C} = \vec{0}$ , dove  $O_*$  è l'origine di un riferimento solidale rispetto al riferimento fisso. Ma questa quantità coincide esattamente con la velocità di strisciamento  $\vec{v}_C^T$  nel punto di contatto  $C$ , ovvero base e rulletta sono soggetti a rotolamento puro con punto di contatto  $C$ .

Viceversa, siano date due curve rigide nel piano  $\vec{\gamma}$  e  $\vec{\psi}$  soggette a rotolamento puro. Per definizione la velocità di trascinamento nel loro punto di contatto è nulla, ovvero il loro punto di contatto  $C$  soddisfa la condizione  $\vec{v}_* + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_*C} = \vec{0}$ , dove  $O_*$  è il centro di un riferimento solidale con  $\vec{\psi}$ . Questa condizione però *definisce* un centro istantaneo di rotazione, per cui  $C$  è centro istantaneo di rotazione. Dato che le due curve sono precisamente la traiettoria descritta dal punto di contatto nei rispettivi sistemi di riferimento, esse sono una base e una rulletta.  $\square$

Da quanto abbiamo detto, il concetto di rotolamento puro può essere esteso al di là dei problemi in cui si ha a che fare in maniera evidente con curve in rotolamento: in effetti, in ogni *moto piano* si può identificare un centro istantaneo di rotazione, e, di conseguenza, un moto di rotolamento puro tra la base e la rulletta associate.

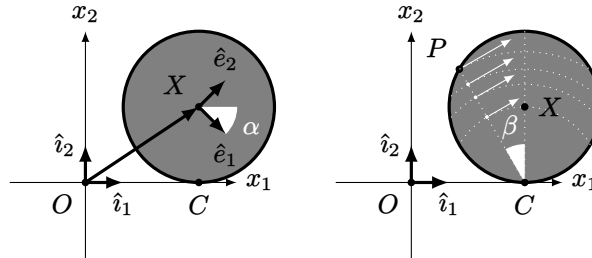
**Esempio 5.2** (Disco che rotola) — Consideriamo un disco rigido di raggio  $R$  che rotola senza strisciare lungo una guida coincidente con l'asse orientato secondo  $\hat{i}_1$  rimanendo nel piano generato da  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2\}$ . La condizione di rotolamento puro vuol dire che, detto  $X$  il centro del disco, il punto  $C$  di contatto tra disco e guida deve soddisfare l'equazione

$$(5.15) \quad \vec{v}_X + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{XC} = \vec{0},$$

dove  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare del disco. Essendo, con riferimento alla figura,  $\vec{v}_X = \dot{x}\hat{i}_1$ ,  $\vec{\omega} = \dot{\alpha}\hat{i}_3$  e  $\overrightarrow{XC} = -R\hat{i}_2$ , questa equazione si riscrive

$$(5.16) \quad \dot{x} = -R\dot{\alpha} \Rightarrow x = -R\alpha + x_0$$

dove  $x_0$  corrisponde al valore di  $x$  per  $\alpha = 0$ . Come anticipato, il rotolamento puro nel moto piano fornisce un vincolo sulle *posizioni*, nonostante appaia espresso inizialmente come una condizione sulle velocità.



Trattandosi di un moto piano, il punto  $C$  è anche il *centro istantaneo di rotazione*. Come esercizio, possiamo ulteriormente verificare questo fatto usando l'Eq. (5.9): la posizione del centro di rotazione rispetto all'origine è infatti

$$(5.17) \quad \overrightarrow{OX} + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_X}{\|\vec{\omega}\|^2} = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2 + \frac{\dot{\alpha}\hat{i}_3 \wedge \hat{i}_1}{|\dot{\alpha}|^2} = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2 + \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}}\hat{i}_2 = x\hat{i}_1 \equiv \overrightarrow{OC}.$$

Senza bisogno di eseguire dei calcoli, si vede che in questo moto di rotolamento puro la *base* è costituita dall'asse delle ascisse, mentre la *rulletta* è proprio il bordo del disco. Sulla base di questo fatto, un generico punto  $P$ , individuato dal vettore  $\vec{x}_P$  nel riferimento fisso, ha velocità

$$(5.18) \quad \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}.$$

Inoltre, la velocità del centro del disco è  $\vec{v}_X = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CX} = R\dot{\alpha}\hat{i}_2$ . Usando questo risultato, possiamo per esempio calcolare il modulo della velocità di un punto  $P$  del *bordo* del disco usando

$$(5.19) \quad \|\vec{\omega}\| = \frac{\|\vec{v}_P\|}{\|\overrightarrow{CP}\|} = \frac{\|\vec{v}_X\|}{\|\overrightarrow{CX}\|} \Rightarrow \|\vec{v}_P\| = \|\vec{v}_X\| \frac{\|\overrightarrow{CP}\|}{\|\overrightarrow{CX}\|} = \|\vec{v}_X\| \frac{2R \cos \beta}{R} = 2\|\vec{v}_X\| \cos \beta,$$

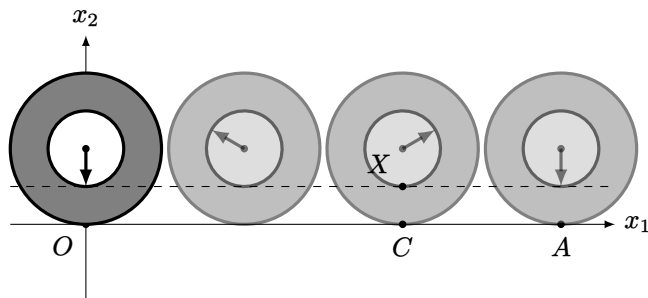
dove  $\beta$  è l'angolo tra  $\hat{i}_2$  e la direzione  $\overrightarrow{CP}$  come rappresentato in figura. Questo significa che  $P$  raggiunge la velocità massima quando  $\beta = 0$ : in tal caso,  $\|\vec{v}_P\| = 2\|\vec{v}_X\| = 2R\dot{\alpha}$ .

**Q** Il rotolamento puro è un vincolo olonomo solo nel caso di rotolamento tra curve. Non vale altrettanto quando si considera un rotolamento che coinvolga una superficie nello spazio. Consideriamo per esempio una sfera rigida di raggio  $R$  che rotola di rotolamento puro su un piano. Sia  $X$  il centro della sfera. Se  $C$  è il punto di contatto, la condizione di rotolamento puro si scrive

$$(5.20) \quad \vec{v}_X + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{XC} = \vec{0}.$$

Questa condizione, analoga a quella fatta per il disco che rotola su una guida orizzontale, *non* può essere messa in forma olonoma e rimane una condizione sulle velocità, ovvero una condizione anolonoma. In altre parole, non equivale ad una relazione finita tra le coordinate cartesiane.

**Esempio 5.3** (Ruota di Aristotele) — Nella *Meccanica* dello pseudo-Aristotele e scritta attorno al 300 a.C., compare il seguente problema. Sia dato un disco che rotola su un piano, e si consideri un disco più piccolo ad esso concentrico e su esso fissato in maniera rigida, di modo che i due dischi siano solidali. Il disco maggiore rotola come in figura, andando dal punto  $O$  al punto  $A$  senza strisciare compiendo una rivoluzione completa. Le distanze percorse dalle circonferenze di entrambi i dischi sono quindi uguali, essendo essi rigidamente saldati. Questo induce però ad un apparente paradosso: la distanza percorsa dal cerchio più grande è uguale alla sua circonferenza, mentre il disco più piccolo ha compiuto una rotazione completa percorrendo un tragitto maggiore della sua propria circonferenza, apparentemente rotolando con maggiore rapidità (cosa impossibile, dato che i due dischi sono saldati). Come è possibile?



La soluzione al paradosso discende da quanto abbiamo detto sopra. Infatti, se è vero che il punto di contatto tra il disco maggiore e il piano di rotolamento ha velocità istantanea nulla per via della condizione di rotolamento puro, immaginando un ipotetico piano di rotolamento su cui poggia il disco minore durante il moto (linea tratteggiata in figura), il punto di contatto  $X$  del disco più piccolo con il piano ipotetico *non* sarebbe istantaneamente fermo: la sua velocità sarà infatti data dalla condizione  $\vec{v}_X = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CX}$ , dove  $C$  è il punto di contatto al suolo del disco

maggiore. In altre parole, il disco più piccolo non è in rotolamento puro sul suo piano ipotetico di appoggio, ma viene trascinato durante il moto “strisciando” su di esso.

## 2. Equazioni cardinali per i corpi rigidi e tensore d'inerzia

**2.1. Tensore d'inerzia di un corpo rigido.** Il calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido o del suo momento angolare fa naturalmente emergere una particolare quantità che racchiude le necessarie informazioni su come la massa del corpo è distribuita nello spazio.

**DEFINIZIONE 2.1** (Tensore d'inerzia). Sia dato un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$ . Il suo tensore d'inerzia rispetto ad un punto  $P$  è dato da

$$(5.21) \quad \tilde{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|\overrightarrow{PX}\|^2 \mathbb{I} - \overrightarrow{PX} \otimes \overrightarrow{PX}) \rho(X) \, dX.$$

Analogamente, se il corpo  $\mathcal{B}$  è costituito da un insieme di  $N$  punti,  $\mathcal{B} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , di modo che  $m_k$  sia la massa del punto  $P_k$ ,

$$(5.22) \quad \tilde{I}_P := \sum_{k=1}^N m_k (\|\overrightarrow{PP_k}\|^2 \mathbb{I} - \overrightarrow{PP_k} \otimes \overrightarrow{PP_k}).$$

Il tensore d'inerzia è un operatore che agisce su vettori e produce nuovi vettori. Nella formula precedente,  $\mathbb{I}$  è l'operatore identità, tale che, per qualsiasi vettore  $\vec{u}$ ,  $\mathbb{I}\vec{u} = \vec{u}$ . Compare, tuttavia, anche un *prodotto tensoriale* tra due vettori. Il prodotto tensore tra due vettori produce un *operatore lineare* che agisce come segue: dati due vettori generici  $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$  in uno spazio vettoriale con prodotto scalare,  $\vec{v} \otimes \vec{u}$

$$(5.23) \quad (\vec{v} \otimes \vec{u}): \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \quad \vec{w} \in \mathbb{V} \mapsto (\vec{v} \otimes \vec{u})\vec{w} = \vec{v}\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

per qualsiasi vettore  $\vec{w} \in \mathbb{V}$ . In altre parole, la scrittura precedente è una forma compatta per indicare che, dato un generico vettore  $\vec{u}$ ,

$$(5.24) \quad \tilde{I}_P \vec{u} = \int_{\mathcal{B}} (\|\overrightarrow{PX}\|^2 \vec{u} - \overrightarrow{PX} \langle \overrightarrow{PX}, \vec{u} \rangle) \rho(X) \, dX.$$

Data la linearità del prodotto tensoriale e dell'operatore identità, il tensore d'inerzia è quindi esso stesso un operatore *lineare*: dati due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ , allora  $\tilde{I}_P(\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) = \alpha\tilde{I}_P\vec{v} + \beta\tilde{I}_P\vec{u}$ . Scelta una base  $\{\hat{i}_k\}_{k=1}^3$ , è perciò possibile costruire una rappresentazione *matriciale* del tensore d'inerzia, ovvero costruire una matrice  $\mathbf{I}_P$ , detta *di inerzia*, che contiene tutte le informazioni in  $\tilde{I}_P$  secondo la base scelta. L'elemento  $[\mathbf{I}_P]_{ij}$  della matrice si calcola come

$$(5.25) \quad [\mathbf{I}_P]_{ij} = \langle \hat{i}_i, \tilde{I}_P \hat{i}_j \rangle = \int_{\mathcal{B}} (\|\overrightarrow{PX}\|^2 \delta_{ij} - \langle \hat{i}_i, \overrightarrow{PX} \rangle \langle \overrightarrow{PX}, \hat{i}_j \rangle) \rho(X) \, dX.$$

Come si vede dalla formula, la matrice di inerzia è *simmetrica*, ovvero  $[\mathbf{I}_P]_{ij} = [\mathbf{I}_P]_{ji}$ . I termini  $[\mathbf{I}_P]_{ij}$  con  $i \neq j$  si dicono *prodotti d'inerzia*, mentre  $[\mathbf{I}_P]_{ii}$  è il *momento di inerzia rispetto all'asse  $\hat{i}_i$* .

Se è nota la matrice di inerzia, si possono facilmente esprimere quantità come  $\langle \vec{u}, \tilde{I}_P \vec{u} \rangle$  su un vettore  $\vec{u} = \sum_k u_k \hat{v}_k$  in termini delle sue componenti, ovvero

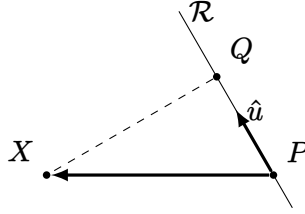
$$(5.26) \quad \langle \vec{u}, \tilde{I}_P \vec{u} \rangle = \sum_{ij} u_i u_j \langle \hat{v}_i, \tilde{I}_P \hat{v}_j \rangle = \sum_{ij} u_i u_j [\mathbf{I}_P]_{ij} = \mathbf{u}^\top \mathbf{I}_P \mathbf{u}.$$

**Q** Il prodotto tensore è distributivo, per cui per esempio  $\vec{v} \otimes (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \otimes \vec{u} + \vec{v} \otimes \vec{w}$ , ma *non* commutativo:  $\vec{u} \otimes \vec{v} \neq \vec{v} \otimes \vec{u}$ . Usando questa notazione si possono scrivere varie quantità. Per esempio, in  $d = 3$  vale l'identità

$$(5.27) \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \mathbb{I} - (\vec{c} \otimes \vec{a})) \vec{b}.$$

2.1.1. *Proprietà del tensore d'inerzia.* Per comprendere meglio il significato fisico del tensore di inerzia, consideriamo una direzione individuata dal versore  $\hat{u}$  nello spazio e calcoliamo  $\langle \hat{u}, \tilde{I}_P \hat{u} \rangle$ . Abbiamo

$$(5.28) \quad \langle \hat{u}, \tilde{I}_P \hat{u} \rangle = \int_{\mathcal{B}} (\|\vec{PX}\|^2 - \langle \vec{PX}, \hat{u} \rangle^2) \rho(X) dX.$$



La costruzione geometrica sopra permette di vedere che

$$(5.29) \quad \|\vec{PX}\|^2 - \langle \vec{PX}, \hat{u} \rangle^2 = d^2(X, \mathcal{R}),$$

distanza quadra tra il punto  $X$  e la retta  $\mathcal{R}$  passante per  $P$  e di direzione  $\hat{u}$ : infatti,  $\|\vec{PX}\|^2$  è proprio la distanza tra  $X$  e  $P$ , mentre  $|\langle \vec{PX}, \hat{u} \rangle|$  è la lunghezza del segmento  $PQ$  in figura. Chiamiamo  $\langle \hat{u}, \tilde{I}_P \hat{u} \rangle$  *momento d'inerzia del corpo rispetto alla retta  $\mathcal{R}$* , scrivendo

$$(5.30) \quad I_{\mathcal{R}} := \langle \hat{u}, \tilde{I}_P \hat{u} \rangle = \int_{\mathcal{B}} d^2(X, \mathcal{R}) \rho(X) dX.$$

La quantità

$$(5.31) \quad \delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{\frac{I_{\mathcal{R}}}{m}}$$

è detta *raggio di girazione* e costituisce una sorta di *distanza quadratica media* dalla retta del corpo pesata sulla sua densità di massa: il momento di inerzia, infatti, si può scrivere come  $I_{\mathcal{R}} = m \delta_{\mathcal{R}}^2$ , che è il momento d'inerzia rispetto ad  $\mathcal{R}$  di un punto materiale di massa  $m$  a distanza  $\delta_{\mathcal{R}}$  dalla retta  $\mathcal{R}$ . Poiché per qualunque  $\hat{u}$  si ha che  $\langle \hat{u}, \tilde{I}_P \hat{u} \rangle \geq 0$ , l'operatore  $\tilde{I}_P$  è *semidefinito positivo*, e in particolare la matrice di inerzia  $\mathbf{I}_P$  è simmetrica semidefinita positiva, ovvero ha autovalori non-negativi, detti *momenti principali d'inerzia*. I suoi autovettori si dicono invece *assi principali d'inerzia* rispetto a  $P$  e, se in particolare  $P = G$  centro di massa, si dicono *assi centrali*.



Indicando con  $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$  gli autovettori di  $\tilde{I}_P$ , di modo che  $\tilde{I}_P \hat{b}_a = I_{P,a} \hat{b}_a$ . In questa base, come noto,

$$(5.32) \quad [\mathbf{I}_P]_{ab} = \langle \hat{b}_a, \tilde{I}_P \hat{b}_b \rangle = I_{P,a} \delta_{ab}$$

ovvero la rappresentazione matriciale del tensore di inerzia è diagonale. La conoscenza di tale base permette di calcolare facilmente come  $\tilde{I}_P$  agisce su un versore  $\hat{u}$ . Se infatti decomponiamo  $\hat{u} = \sum_a u_a \hat{b}_a$ , allora

$$(5.33) \quad \langle \hat{u}, \tilde{I}_P \hat{u} \rangle = \sum_{ab} u_a u_b \langle \hat{b}_a, \tilde{I}_P \hat{b}_b \rangle = \sum_a u_a^2 I_{P,a}.$$

Si noti che gli autovettori non sono necessariamente univocamente determinati

**Esempio 5.4** (Asta omogenea) — Consideriamo un'asta di densità lineare uniforme  $\lambda$  parametrizzata come

$$(5.34) \quad \vec{\gamma}(t) = t \hat{i}_1, \quad t \in [-1/2\ell, 1/2\ell],$$

in un riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $\mathcal{Z}$  diretto come  $\hat{i}_3$  e passante per il suo centro è

$$(5.35) \quad I_Z = \lambda \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} t^2 dt = \frac{\lambda \ell^3}{12}.$$

**2.1.2. Formula di Huygens–Steiner.** Esiste una relazione semplice tra i tensori di inerzia calcolati rispetto a punti diversi dello spazio, fornito dal seguente Teorema.

**TEOREMA 2.1** (Huygens–Steiner). *Il tensore d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad un punto  $P$  è pari alla somma*

$$(5.36) \quad \tilde{I}_P = \tilde{I}_G + m \left( \|\vec{GP}\|^2 \mathbb{I} - \vec{GP} \otimes \vec{GP} \right).$$

dove  $\tilde{I}_G$  è il tensore d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa  $G$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo di avere un corpo rigido con centro di massa  $G$ , e voler calcolare  $\tilde{I}_P$  rispetto ad un certo punto  $P$ . Osservando che  $\vec{PX} = \vec{PG} + \vec{GX}$ , abbiamo

$$(5.37) \quad \begin{aligned} \tilde{I}_P &= \int_B \rho(X) \left[ \|\vec{PX}\|^2 \mathbb{I} - \vec{PX} \otimes \vec{PX} \right] dX \\ &= \int_B \rho(X) \left[ \left( \|\vec{PG}\|^2 + 2\langle \vec{PG}, \vec{GX} \rangle + \|\vec{GX}\|^2 \right) \mathbb{I} \right. \\ &\quad \left. - (\vec{PG} \otimes \vec{PG} + \vec{PG} \otimes \vec{GX} + \vec{GX} \otimes \vec{PG} + \vec{GX} \otimes \vec{GX}) \right] dX \\ &= \int_B \rho(X) \left[ \|\vec{GX}\|^2 \mathbb{I} - \vec{GX} \otimes \vec{GX} \right] dX + m \left( \|\vec{PG}\|^2 \mathbb{I} - \vec{PG} \otimes \vec{PG} \right) \\ &= \tilde{I}_G + m \left( \|\vec{GP}\|^2 \mathbb{I} - \vec{GP} \otimes \vec{GP} \right). \end{aligned}$$

In questa derivazione abbiamo usato il fatto che  $\int \rho(X) \vec{GX} dX = m \vec{GG} = \vec{0}$ . □

**COROLLARIO 2.2** (Huygens–Steiner). *Il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  è pari alla somma*

$$(5.38) \quad I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R})$$

dove  $I_{\mathcal{R}_G}$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta parallela a  $\mathcal{R}$  e passante per il centro di massa  $G$  del corpo stesso.

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente considerare  $\tilde{I}_P$  con  $P \in \mathcal{R}$  e moltiplicare scalarmente per la direzione  $\hat{u}$  della retta  $\mathcal{R}$  il risultato del teorema generale. Si ha

$$(5.39) \quad I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{u}, \tilde{I}_P \hat{u} \rangle = \langle \hat{u}, \tilde{I}_G \hat{u} \rangle + m \left( \|\overrightarrow{GP}\|^2 - \langle \hat{u}, \overrightarrow{GP} \rangle^2 \right) = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R}). \quad \square$$

Il teorema ha come ulteriore importante corollario il fatto seguente.

**COROLLARIO 2.3.** *Dato il momento di inerzia  $I_{\mathcal{R}'}$  di un corpo di massa  $m$  rispetto ad una retta  $\mathcal{R}'$ , il momento d'inerzia rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  parallela a  $\mathcal{R}'$  è pari a*

$$(5.40) \quad I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}'} + m \left( d^2(G, \mathcal{R}') - d^2(G, \mathcal{R}) \right)$$

dove  $G$  è il centro di massa del corpo.

**2.2. Momento angolare di un corpo rigido.** Nel caso dei corpi rigidi, esiste una relazione importante tra tensore di inerzia, momento angolare e velocità angolare (che in parte giustifica l'introduzione del primo). Vale infatti la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 2.4.** *Il momento angolare rispetto ad un polo  $C$  che appartiene ad un asse istantaneo di rotazione di un corpo rigido con velocità angolare  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  può scriversi*

$$(5.41) \quad \vec{L}_C = \tilde{I}_C \vec{\omega}.$$

Inoltre, il momento angolare rispetto al centro di massa si scrive

$$(5.42) \quad \vec{L} = \tilde{I}_G \vec{\omega}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dato un punto  $X$  del corpo, vale  $\vec{v}_X = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CX}$ . Pertanto usando la definizione di momento angolare,

$$(5.43) \quad \begin{aligned} \vec{L}_C &= \int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{CX} \wedge \vec{v}_X \rho(X) dX = \int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{CX} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CX}) \rho(X) dX \\ &= \int_{\mathcal{B}} [\|\overrightarrow{CX}\|^2 \mathbf{I} - \overrightarrow{CX} \otimes \overrightarrow{CX}] \vec{\omega} \rho(X) dX = \tilde{I}_C \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che vale anche  $\vec{L}_C = \vec{L}_G + \overrightarrow{CG} \wedge \vec{Q}$  per via della legge di cambiamento di polo. Ricordando che  $\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$ , possiamo scrivere

$$(5.44) \quad \overrightarrow{CG} \wedge \vec{Q} = m \overrightarrow{CG} \wedge \vec{v}_G = m \overrightarrow{CG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}) = m [\|\overrightarrow{CG}\|^2 \mathbf{I} - \overrightarrow{CG} \otimes \overrightarrow{CG}] \vec{\omega}$$

per cui

$$(5.45) \quad \vec{L}_G = \tilde{I}_C \vec{\omega} - m [\|\overrightarrow{CG}\|^2 \mathbf{I} - \overrightarrow{CG} \otimes \overrightarrow{CG}] \vec{\omega} = \tilde{I}_G \vec{\omega}.$$

L'ultima uguaglianza segue dal teorema di Huygens–Steiner.  $\square$

Una conseguenza della relazione precedente è il seguente corollario.

COROLLARIO 2.5. *Dato un generico punto  $P$ ,*

$$(5.46) \quad \vec{L}_P = \vec{I}_G \vec{\omega} + \vec{PG} \wedge \vec{Q}$$

**2.3. Energia cinetica di un corpo rigido.** Oltre al momento angolare, il tensore di inerzia permette di scrivere in forma compatta anche l'energia cinetica di un corpo rigido.

PROPOSIZIONE 2.6. *L'energia cinetica di un corpo rigido di massa  $m$  e centro di massa  $G$  si può esprimere come*

$$(5.47a) \quad T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_P\|^2 + m \langle \vec{v}_P, \vec{\omega} \wedge \vec{PG} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, \vec{I}_P \vec{\omega} \rangle$$

dove  $P$  è un generico punto del corpo,  $\vec{\omega}$  la sua velocità angolare e  $\vec{I}_P$  è il tensore d'inerzia rispetto al punto  $P$ . In particolare scegliendo come punto  $P$  il centro di massa  $G$  si ha

$$(5.47b) \quad T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, \vec{I}_G \vec{\omega} \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo dimostrare la Proposizione sopra direttamente usando la legge fondamentale del moto rigido. Sia  $\rho$  la densità del corpo. Allora

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\vec{v}_X\|^2 \rho(X) dX = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{PX}\|^2 \rho(X) dX \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\vec{v}_P\|^2 \rho(X) dX + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\vec{\omega} \wedge \vec{PX}\|^2 \rho(X) dX + \int_{\mathcal{B}} \langle \vec{v}_P, \vec{\omega} \wedge \vec{PX} \rangle \rho(X) dX \\ &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}_P\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\vec{\omega} \wedge \vec{PX}\|^2 \rho(X) dX + m \langle \vec{v}_P, \vec{\omega} \wedge \vec{PG} \rangle. \end{aligned}$$

Ora, sappiamo che dati tre vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle$ , per cui

$$(5.48) \quad \|\vec{\omega} \wedge \vec{PX}\|^2 = \langle \vec{\omega} \wedge \vec{PX}, \vec{\omega} \wedge \vec{PX} \rangle = \langle \vec{\omega}, \vec{PX} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{PX}) \rangle.$$

D'altra parte, essendo  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \mathbb{I} - \vec{c} \otimes \vec{a}) \vec{b}$ , possiamo ulteriormente semplificare

$$(5.49) \quad \vec{PX} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{PX}) = (\|\vec{PX}\|^2 \mathbb{I} - \vec{PX} \otimes \vec{PX}) \vec{\omega},$$

per cui abbiamo ottenuto la riscrittura

$$(5.50) \quad \|\vec{\omega} \wedge \vec{PX}\|^2 = \langle \vec{\omega}, (\|\vec{PX}\|^2 \mathbb{I} - \vec{PX} \otimes \vec{PX}) \vec{\omega} \rangle$$

e in definitiva

$$(5.51) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\vec{\omega} \wedge \vec{PX}\|^2 \rho(X) dX = \frac{1}{2} \left\langle \vec{\omega}, \left[ \int_{\mathcal{B}} (\|\vec{PX}\|^2 \mathbb{I} - \vec{PX} \otimes \vec{PX}) \rho(X) dX \right] \vec{\omega} \right\rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, \vec{I}_P \vec{\omega} \rangle,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo identificato l'espressione del tensore di inerzia rispetto a  $P$

$$(5.52) \quad \vec{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|\vec{PX}\|^2 \mathbb{I} - \vec{PX} \otimes \vec{PX}) \rho(X) dX.$$

È immediato vedere che se  $P \equiv G$  si ottiene come caso particolare il caso proposto dal teorema.  $\square$

Scrivendo  $\vec{\omega} = \omega \hat{\omega}$ , l'energia cinetica di un corpo rigido si può scrivere anche come

$$(5.53) \quad T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \langle \hat{\omega}, \tilde{I}_G \hat{\omega} \rangle \omega^2 = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} m \left( \|\vec{v}_G\|^2 + \delta_G^2 \omega^2 \right),$$

dove  $I_G$  è il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per il centro di massa  $G$  e di direzione  $\hat{\omega}$  e  $\delta_G$  il corrispondente asse di girazione.

**Esempio 5.5** (Rigido con asse fisso) — Supponiamo che il corpo rigido in esame abbia un asse fisso, per esempio l'asse passante per i punti del corpo  $O$  e  $P$ . Possiamo scegliere per esempio  $O$  come origine di un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e tale che il vettore  $\vec{OP} = x_3\hat{i}_3$ . Indichiamo con  $\mathcal{Z}$  l'asse passante per  $O$  di direzione  $\hat{i}_3$ . Di conseguenza,  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{i}_3$  per un opportuno angolo di rotazione  $\theta$ . Il centro di massa  $G$  avrà quindi  $\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{OG}$ , da cui  $\|\vec{v}_G\|^2 = \dot{\theta}^2 d^2(G, \mathcal{Z})$ . L'Eq. (5.47) si scrive

$$(5.54) \quad T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \langle \hat{i}_3, \tilde{I}_G \hat{i}_3 \rangle = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m d^2(G, \mathcal{Z}) + I_{\mathcal{Z}}) = \frac{1}{2} I_{\mathcal{Z}} \dot{\theta}^2,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner. Si noti che il caso di un rigido con asse fisso si applica anche al caso in cui si abbia a che fare con un sistema rigido planare che ruota *nel piano* attorno ad un punto del piano, ovvero attorno ad un asse perpendicolare al piano passante per detto punto.

**Esempio 5.6** (Rigido con punto fisso) — Se il corpo rigido ha un punto  $O$  fisso, scegliendo come origine tale punto avremo come prima che il centro di massa  $G$  del rigido ha velocità  $\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{OG}$ . In questo caso, l'asse di rotazione istantaneo varierà nel tempo e sarà orientato come  $\hat{\omega}$ , di modo che potremo scrivere

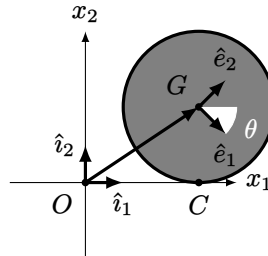
$$(5.55) \quad \|\vec{v}_G\|^2 = \langle \vec{\omega} \wedge \vec{OG}, \vec{\omega} \wedge \vec{OG} \rangle = \omega^2 \langle \hat{\omega}, (\|\vec{OG}\|^2 \mathbb{I} - \vec{OG} \otimes \vec{OG}) \hat{\omega} \rangle$$

sicché inserendo questa relazione nella formula generale

$$(5.56) \quad T = \frac{1}{2} \omega^2 \left\langle \hat{\omega}, \left[ m(\|\vec{OG}\|^2 \mathbb{I} - \vec{OG} \otimes \vec{OG}) + \tilde{I}_G \right] \hat{\omega} \right\rangle \equiv \frac{1}{2} \omega^2 \langle \hat{\omega}, \tilde{I}_O \hat{\omega} \rangle.$$

dove abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner per il tensore di inerzia.

**Esempio 5.7** (Disco rigido che rotola) — Calcoliamo l'energia cinetica di un disco rigido omogeneo di raggio  $R$  che rotola senza strisciare su una guida orizzontale:



Sappiamo che il sistema ha un solo parametro lagrangiano: possiamo usare per esempio l'ascissa  $x$  del centro di massa, che qui coincide col centro geometrico  $G$  in figura, oppure l'angolo di rotazione  $\theta$ . Inoltre, il punto di contatto  $C$  tra disco e guida è un centro istantaneo di rotazione. Per il Secondo teorema di König, l'energia cinetica è data da

$$(5.57) \quad T = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2.$$

In questa espressione  $I_G$  è il momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse  $\mathcal{G}$  perpendicolare al piano e passante per  $G$ , che nel caso del disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  vale  $I_G = \frac{1}{2}mR^2$ . Abbiamo poi già visto che  $\vec{v}_G = \dot{x}\hat{i}_1 = -R\dot{\theta}\hat{i}_1$  e che  $\omega = \dot{\theta}$ , sicché

$$(5.58) \quad T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2.$$

In effetti  $I_C = \frac{3}{2}mR^2$  è proprio il momento d'inerzia del disco rispetto alla retta ortogonale al piano passante per il punto di contatto  $C$ . Questo non deve sorprendere: istante per istante,  $C$  è un centro istantaneo di rotazione con velocità  $\vec{v}_C = \vec{0}$ , per cui l'unico contributo che appare nell'energia cinetica usando l'Eq. (5.47a) scegliendo  $P \equiv C$  è quello rotatorio, purché il tensore d'inerzia usato sia quello rispetto al punto  $C$ .

**2.4. Lavoro e potenza di sistemi di forze su rigidi.** Dati due punti  $P_i$  e  $P_j$  di un sistema rigido  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , come sappiamo tra le loro velocità deve valere la relazione  $\vec{v}_j = \vec{v}_i + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{P_i P_j}$ , dove appare la velocità angolare del corpo rigido  $\vec{\omega}$ . Questa relazione si può scrivere in forma differenziale. Introducendo un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , di modo che  $\vec{x}_k = \overrightarrow{OP_k}$  per il generico punto  $P_k$ ,

$$(5.59) \quad d\vec{x}_2 = d\vec{x}_1 + (\vec{\omega} dt) \wedge \overrightarrow{P_1 P_2} = d\vec{x}_1 + (\vec{\omega} dt) \wedge (\vec{x}_2 - \vec{x}_1).$$

Questo significa che, scelto un punto  $P$  in moto solidale col corpo rigido individuato da  $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, d\vec{x}_k \rangle &= \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, d\vec{x} \rangle + \sum_{k=1}^N \langle \vec{F}_k, \vec{\omega} \wedge (\vec{x}_k - \vec{x}) \rangle dt = \langle \vec{R}, d\vec{x} \rangle + \left\langle \sum_{k=1}^N (\vec{x} - \vec{x}_k) \wedge \vec{F}_k, \vec{\omega} \right\rangle dt \\ &= \langle \vec{R}, d\vec{x} \rangle + \langle \vec{\tau}_P, \vec{\omega} \rangle dt, \end{aligned}$$

dove  $\vec{F}_k$  è come solito la risultante su  $P_k$ , ovvero

$$(5.60) \quad \Pi = \langle \vec{R}, \dot{\vec{x}} \rangle + \langle \vec{\tau}_P, \vec{\omega} \rangle,$$

che mostra come nel caso del corpo rigido si possa esprimere il lavoro infinitesimo e la potenza di un sistema di forze in termini dei vettori caratteristici. Se  $\vec{R} = \vec{0}$ , allora  $\vec{\tau}_P \equiv \vec{\tau}$  non dipende dal polo, per cui  $w = \langle \vec{\tau}, \vec{\omega} \rangle dt$  e  $\Pi = \langle \vec{\tau}, \vec{\omega} \rangle$ .

**COROLLARIO 2.7.** *Il lavoro infinitesimo e la potenza associati alle forze interne di un corpo rigido sono nulli.*

**DIMOSTRAZIONE.** Considerato un corpo rigido di velocità angolare  $\vec{\omega}$ , detto  $P$  un punto ad esso solidale individuato dal vettore  $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$  rispetto ad un riferimento con origine  $O$ , il lavoro infinitesimo  $w^{(\text{in})} = \langle \vec{R}^{(\text{in})}, d\vec{x} \rangle + \langle \vec{\tau}^{(\text{in})}, \vec{\omega} \rangle dt$  e la potenza  $\Pi^{(\text{in})} = \langle \vec{R}^{(\text{in})}, \dot{\vec{x}} \rangle + \langle \vec{\tau}^{(\text{in})}, \vec{\omega} \rangle$  sono nulli in quanto proporzionali alla risultante e al momento totale delle forze interne, a loro volta nulli.  $\square$

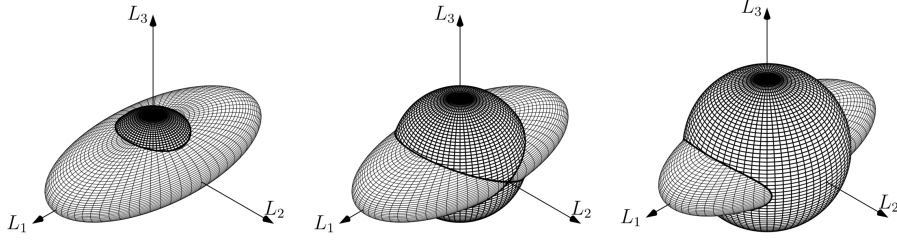


FIGURA 2. Rappresentazione delle due condizioni di conservazione in Eq. (5.63) per un corpo rigido non soggetto a forze esterne per diversi valori di  $L^2$  e  $T$ . In rosso è rappresentata la condizione derivata dalla conservazione del momento angolare, in blu quella derivata dalla conservazione dell'energia cinetica. Il vettore  $\vec{x}$  (e quindi  $\vec{\omega}$ ) è vincolato a evolvere lungo l'intersezione tra le due superfici. In questa figura,  $I_1 < I_2 < I_3$ .

Dal fatto che la potenza delle forze interne di un corpo rigido è sempre nulla, discende immediatamente la seguente Proposizione, che adatta al corpo rigido il teorema delle forze vive.

PROPOSIZIONE 2.8. *Nel caso di un corpo rigido, vale*

$$(5.61) \quad \frac{dT}{dt} = \Pi^{(\text{ext})} \Rightarrow \Delta T = W^{(\text{ext})}$$

dove la potenza è quella dovuta alle sole forze esterne, mentre  $\Delta T$  è la variazione di energia cinetica in un certo intervallo temporale in cui le forze esterne eseguono un lavoro  $W^{(\text{ext})}$ .

2.4.1. *Conservazione del momento angolare ed ellissoide d'inerzia.* Sia dato un corpo rigido in rotazione in assenza di forze esterne. Scegliamo un riferimento solidale col centro di massa (che, per quanto detto, sarà fermo o avrà velocità costante rispetto ad un riferimento inerziale). In questo sistema  $\vec{L}_G = \vec{I}_G \vec{\omega}$  si manterrà costante durante tutta la durata del moto per via dell'assenza di momenti delle forze. Inoltre, si conserverà anche l'energia cinetica,

$$(5.62) \quad T = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, \vec{I}_G \vec{\omega} \rangle.$$

Esprimiamo ora il modulo quadro del momento angolare e l'energia cinetica rispetto nella base degli assi principali d'inerzia, siano essi  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Scriviamo in questa base  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$ , ma soprattutto ricordiamo che  $\vec{I}_G$  ha una rappresentazione diagonale, di modo che  $\vec{I}_G \hat{e}_i = I_i \hat{e}_i$ , con  $I_i$  momento principale d'inerzia rispetto all'asse  $\hat{e}_i$ . Si ottiene

$$(5.63) \quad L^2 := \sum_{i=1}^3 L_i^2, \quad 2T = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{I_i} L_i^2$$

che esprimono il fatto che il vettore  $\vec{L}_G$  deve appartenere, per tutta la durata del moto, all'intersezione tra un ellissoide, detto *ellissoide d'inerzia*, e una sfera, di raggio pari al suo modulo, come in Fig. 2. Le proprietà geometriche di questa intersezione possono

essere molto diverse al variare delle dimensioni relative tra queste due superfici. Si vede geometricamente che, se per esempio  $I_1 < I_2 < I_3$ , se  $\vec{L}_G$  inizia la sua evoluzione con direzione prossima a  $\hat{e}_1$  o  $\hat{e}_3$ , essa vi rimane vicina durante il moto, mentre se inizia il suo moto con direzione prossima a  $\hat{e}_2$  essa può allontanarsi notevolmente dalla configurazione iniziale. Questo risultato è a volte indicato come *effetto Džanibekov*.

### 3. Statica e dinamica del corpo rigido

**3.1. Equilibrio dei corpi rigidi.** Quando soggetto a forze conservative e vincoli ideali, l'equilibrio di un corpo rigido viene solitamente studiato, con successo, utilizzando il formalismo generale introdotto nel caso dei sistemi olonomi. Una conseguenza importante del Teorema dei lavori virtuali tuttavia è che, nel caso del corpo rigido, le equazioni cardinali della statica sono *sufficienti* per l'equilibrio: questo significa più in generale è possibile utilizzare le equazioni cardinali per caratterizzare l'equilibrio di un corpo rigido.

**TEOREMA 3.1.** *Un corpo rigido è in equilibrio se e solo se le equazioni cardinali sono soddisfatte, ovvero se il sistema di forze esterne è equilibrato.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo già che la condizione è necessaria. Vediamo se è sufficiente. Decomponiamo le forze esterne agenti sul corpo rigido tra attive e di reazione vincolare. Ad esse corrispondono rispettivamente una risultante delle forze esterne attive  $\vec{R}^{(a,ext)}$  e una risultante delle forze esterne vincolari,  $\vec{R}^{(v,ext)}$ , così come un momento totale delle forze esterne attive,  $\vec{\tau}_P^{(a,ext)}$ , e un momento totale delle forze esterne di reazione,  $\vec{\tau}_P^{(v,ext)}$ , entrambi rispetto ad un punto solidale  $P$ . Indicando con  $\vec{\omega}\delta t$  uno spostamento angolare infinitesimo del corpo rigido, un generico lavoro virtuale compiuto su di esso può scriversi come

$$(5.64) \quad \tilde{w} = \langle \vec{R}^{(ext)}, \delta \vec{x}_P \rangle + \langle \vec{\tau}_P^{(ext)}, \vec{\omega} \rangle \delta t \\ = \langle \vec{R}^{(a,ext)}, \delta \vec{x}_P \rangle + \langle \vec{\tau}_P^{(a,ext)}, \vec{\omega} \rangle \delta t + \langle \vec{R}^{(v,ext)}, \delta \vec{x}_P \rangle + \langle \vec{\tau}_P^{(v,ext)}, \vec{\omega} \rangle \delta t = 0$$

dove l'ultima uguaglianza discende dalla condizione che le equazioni cardinali della statica siano soddisfatte. Questa espressione può essere scritta come

$$(5.65) \quad \tilde{w} = \tilde{w}^{(a,ext)} + \tilde{w}^{(v,ext)} = 0.$$

Possiamo sommare il contributo (nullo!) delle forze *interne*, attive e di reazione,  $\tilde{w}^{(a,in)} + \tilde{w}^{(v,in)} = 0$ , senza alterare l'uguaglianza: questo però ci permette di scrivere

$$(5.66) \quad \tilde{w} = \tilde{w}^{(a,ext)} + \tilde{w}^{(a,in)} + \tilde{w}^{(v,ext)} + \tilde{w}^{(v,in)} = \tilde{w}^{(a)} + \tilde{w}^{(v)} = 0.$$

Ma, essendo  $\tilde{w}^{(v)} \geq 0$ , questo implica che  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$ , e quindi, per il principio dei lavori virtuali, che ci sia equilibrio.  $\square$

**Esempio 5.8** (Corpo rigido con punto fisso) — Consideriamo un corpo rigido avente un punto fisso, che possiamo pensare nell'origine  $O$  del nostro riferimento. Nella solita notazione, equazioni cardinali si scrivono

$$(5.67) \quad \vec{R}^{(a,ext)} + \vec{\Phi}_O = \vec{0}, \quad \vec{\tau}_O^{(a,ext)} = \vec{0},$$

dove abbiamo calcolato il momento totale delle forze esterne rispetto all'origine, punto dove è applicata l'unica reazione vincolare esterna,  $\vec{\Phi}_O$ . La seconda equazione *non* dipende dalla reazione vincolare (e quindi è una equazione di equilibrio pura) e può essere utilizzata per individuare la posizione del corpo all'equilibrio, dato che a questo scopo sono necessari solo tre angoli: condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio in questa configurazione dunque è che il momento totale delle forze attive esterne agenti sul corpo sia nullo. Questa stessa condizione si ottiene dal principio dei lavori virtuali: in questo caso ogni spostamento virtuale è reversibile, per cui

$$(5.68) \quad \tilde{w}^{(a)} = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{\tau}_O^{(a, \text{ext})}, \vec{\omega} \rangle \delta t = 0 \quad \forall \vec{\omega} \Leftrightarrow \vec{\tau}_O^{(a, \text{ext})} = \vec{0}.$$

Si noti che dalla prima equazione cardinale dalla statica si può ottenere la reazione vincolare applicata nell'origine, che invece è inaccessibile utilizzando il principio dei lavori virtuali.

**Esempio 5.9** (Corpo rigido con asse fisso) — Consideriamo un corpo rigido con un asse fisso, ovvero tale per cui due suoi punti,  $O$  e  $P$ , sono fissi. Possiamo assumere per esempio che la retta passante per tali punti corrisponda con l'asse di riferimento cartesiano orientato come  $\hat{i}_3$ , e che  $O$  corrisponda all'origine del riferimento inerziale in cui operiamo. Essendo  $O$  fisso, deve valere la condizione trovata sopra per il corpo rigido con un punto fisso,

$$(5.69) \quad \langle \vec{\tau}_O^{(a, \text{ext})}, \vec{\omega} \rangle \delta t = 0;$$

tuttavia in questo caso non possiamo effettuare un moto rotatorio qualsiasi, ma si può avere solo  $\vec{\omega} \delta t = \omega \delta t \hat{i}_3$ , ovvero una rotazione infinitesima compatibile con il vincolo di asse fisso. Questo significa che dobbiamo avere

$$(5.70) \quad \langle \vec{\tau}_O^{(a, \text{ext})}, \hat{i}_3 \rangle = 0$$

che fornisce le condizioni di equilibrio del corpo: questa condizione è sufficiente, dato che è necessario un solo parametro (un angolo) per caratterizzare la posizione del corpo rigido. Pertanto condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido con un asse fisso sia in equilibrio è che il momento assiale delle forze esterne attive rispetto all'asse fisso sia nullo. Si noti che questa condizione non fornisce informazioni sulle reazioni vincolari, per le quali occorre ricorrere alle equazioni cardinali

$$(5.71) \quad \vec{R}^{(a, \text{ext})} + \vec{\Phi}_O + \vec{\Phi}_P = \vec{0}, \quad \vec{\tau}_O^{(a, \text{ext})} + \vec{x}_P \wedge \vec{\Phi}_P = \vec{0}.$$

Incidentalmente, osserviamo che dalla seconda equazione si ottiene la condizione imposta dal principio dei lavori virtuali (per vedere questo fatto basta moltiplicarla scalarmente per  $\hat{i}_3$  e usare il fatto che  $\hat{i}_3$  e  $\vec{x}_P$  sono paralleli).

**3.2. Dinamica del corpo rigido: equazioni di Eulero.** Lo studio della *dinamica* di un corpo rigido passa dallo studio delle equazioni cardinali. In tali equazioni compare la derivata del momento angolare. Abbiamo già visto che nel caso di un corpo rigido possiamo scrivere il momento angolare rispetto ad un polo in termini del momento d'inerzia rispetto al centro di massa  $G$  sostituendo  $\vec{L}_G = \vec{I}_G \vec{\omega}$ . Possiamo calcolare la derivata temporale di questo momento angolare, ottenendo la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 3.2.** *La derivata temporale del momento angolare baricentrale in un corpo rigido è*

$$(5.72) \quad \dot{\vec{L}}_G = \vec{I}_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_G.$$



**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo un riferimento solidale al corpo rigido. Sappiamo che esiste una relazione tra la derivata temporale  $\dot{\vec{u}}$  di un vettore  $\vec{u}$  nel riferimento fisso e la derivata temporale  $\vec{u}'$  dello stesso vettore in quello solidale data da  $\dot{\vec{u}} = \vec{u}' + \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ . Applichiamo questa formula al momento angolare baricentrale,

$$(5.73) \quad \dot{\vec{L}}_G = \vec{L}'_G + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_G.$$

Nel riferimento solidale il tensore d'inerzia  $\vec{I}_G$  non cambia, per cui  $\vec{L}' = (\vec{I}_G \vec{\omega})' = \vec{I}_G \vec{\omega}' = \vec{I}_G \dot{\vec{\omega}}$ , dove abbiamo usato il fatto che la derivata temporale di  $\vec{\omega}$  è invariante nei due sistemi: ciò fornisce il risultato cercato. Il ragionamento si ripete identico nel caso in cui si consideri un punto  $C$  di un asse istantaneo di rotazione, dato che in questo caso  $\vec{L}_C = \vec{I}_C \vec{\omega}$ .  $\square$

La seguente Proposizione, che combina le equazioni cardinali della dinamica con il risultato appena dimostrato, si ottiene immediatamente.

**PROPOSIZIONE 3.3.** *Sia  $G$  il centro di massa di un corpo rigido di massa  $m$ , individuato dal vettore  $\vec{x}_G$  rispetto ad un sistema inerziale. Allora*

$$(5.74) \quad m\ddot{\vec{x}}_G = \vec{R}^{(\text{ext})}, \quad \vec{\tau}_G^{(\text{ext})} = \vec{I}_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{I}_G \vec{\omega}.$$

Da questa Proposizione si possono ottenere delle equazioni relativamente semplici, dette *equazioni di Eulero*, se scriviamo le equazioni cardinali rispetto alla base degli assi principali di inerzia  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ , dato che in questo caso la matrice  $\mathbf{I}_G$  che rappresenta  $\vec{I}_G$  è diagonale, con elementi che indichiamo  $I_1, I_2, I_3$ . Usando questa base, possiamo scrivere

$$(5.75) \quad \vec{\tau}_G^{(\text{ext})} = \tau_1^{(\text{ext})} \hat{e}_1 + \tau_2^{(\text{ext})} \hat{e}_2 + \tau_3^{(\text{ext})} \hat{e}_3$$

e inoltre

$$(5.76) \quad \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}' = \dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + \dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + \dot{\omega}_3 \hat{e}_3.$$

Le equazioni così diventano

$$(5.77) \quad \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= \tau_1^{(\text{ext})}, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= \tau_2^{(\text{ext})}, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= \tau_3^{(\text{ext})}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, come detto più volte, la configurazione in cui si trova un corpo rigido è individuata dalla posizione di un punto che si muove di moto solidale col corpo e di una terna di vettori solidali. Possiamo scegliere per esempio come punto solidale il centro di massa  $G$ , e come base di un riferimento solidale i tre assi principali d'inerzia del corpo. Stando così le cose, sarà necessario tracciare l'evoluzione del vettore  $\vec{x}_G$ , ovvero delle *tre coordinate* che identificano il centro di massa, e dei *tre angoli di Eulero* che permettono di passare dalla base del riferimento fisso alla base solidale. Ciò significa che è in generale sufficiente determinare l'evoluzione di *sei* parametri: le equazioni cardinali sono quindi sufficienti per descrivere la dinamica del corpo rigido, dato che consistono di tre equazioni per il centro di massa e tre equazioni di Eulero. La presenza di vincoli aggiuntivi, tuttavia, può ridurre il numero di parametri necessari. Facciamo qualche esempio più specifico.

**Esempio 5.10** (Corpo rigido libero) — Se il corpo è libero, ovvero non ci sono vincoli, le forze esterne sono tutte attive ed è possibile individuare tutti e sei i parametri necessari a descrivere il moto tramite le sei condizioni fornite dalla prima equazione cardinale della dinamica,  $m\ddot{\vec{x}}_G = \vec{R}^{(\text{ext})}$ , e dalle tre equazioni di Eulero. Infatti, è possibile scrivere le componenti della velocità angolare in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime, di modo che le equazioni di Eulero coinvolgono al più derivate seconde di questi angoli. Di conseguenza, per via del Teorema di Cauchy, a condizioni iniziali date, le equazioni cardinali sono *necessarie e sufficienti* nel caso di un corpo rigido.

**Esempio 5.11** (Corpo rigido con punto fisso) — Se il corpo ha un suo punto  $P$  forzatamente fisso, è possibile per esempio scegliere tale punto come origine del riferimento solidale, mentre la configurazione del corpo è identificata dalla terna di angoli di Eulero che permettono di ottenere la terna solidale da quella fissa. In questo caso, però, comparirà tra le forze esterne anche la reazione vincolare  $\vec{\Phi}$  applicata sul corpo in  $P$ . Le equazioni cardinali saranno

$$(5.78) \quad m\ddot{\vec{x}}_G = \vec{R}^{(\text{a,ext})} + \vec{\Phi}_P, \quad \vec{\tau}_P^{(\text{a,ext})} = \vec{L}_P$$

dove, avendo calcolato il momento delle forze rispetto a  $P$ , il contributo del momento di  $\vec{\Phi}_P$  non appare (e inoltre,  $\vec{v}_P = \vec{0}$  essendo il punto fisso). Le due equazioni vettoriali forniscono sei equazioni scalari per sei quantità: i tre angoli di Eulero e le tre componenti della reazione vincolare  $\vec{\Phi}_P$ . Avviene però che  $P$  è anche un punto di un asse istantaneo di rotazione, per cui vale la stessa relazione che abbiamo visto per il momento angolare baricentrale (ma con l'opportuno tensore d'inerzia)

$$(5.79) \quad \dot{\vec{L}}_P = \vec{I}_P \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{I}_P \vec{\omega},$$

di modo che, esattamente come nel caso del corpo libero, la seconda equazione cardinale *non* coinvolge  $\vec{\Phi}_P$ : una volta integrata, il vettore di reazione si potrà ottenere dalla prima equazione cardinale, dato che la posizione del centro di massa e la risultante delle forze attive saranno funzione dei soli angoli di Eulero.

**Esempio 5.12** (Corpo rigido con asse fisso) — Infine, consideriamo il caso di un corpo rigido in moto ma con il vincolo di mantenere fisso l'asse passante per due sue punti, che chiamiamo  $O$  e  $P$ . Come sappiamo, in questo caso una configurazione del corpo è individuata da un solo parametro angolare, che esprime la rotazione del corpo attorno ad un asse. Scegliendo  $O$  come origine del nostro riferimento, le equazioni cardinali sono

$$(5.80) \quad m\ddot{\vec{x}}_G = \vec{R}^{(\text{a,ext})} + \vec{\Phi}_O + \vec{\Phi}_P, \quad \dot{\vec{L}}_O = \vec{\tau}_O^{(\text{a,ext})} + \vec{x}_P \wedge \vec{\Phi}_P.$$

Esattamente come sopra,  $O$  è un punto di un asse istantaneo di rotazione, per cui  $\dot{\vec{L}}_O = \vec{I}_O \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{I}_O \vec{\omega}$ . Dato che è necessaria una sola equazione, possiamo moltiplicare la seconda equazione cardinale della dinamica per il versore  $\hat{i}_3$  che assumiamo parallelo alla retta passante per  $O$  e  $P$ , di modo che otteniamo (usando il fatto che  $\vec{\omega}$ ,  $\hat{i}_3$  e  $\vec{x}_P$  sono paralleli)

$$(5.81) \quad \langle \hat{i}_3, \vec{I}_O \dot{\vec{\omega}} \rangle = \langle \hat{i}_3, \vec{\tau}_O^{(\text{a,ext})} \rangle,$$

che è una equazione pura sufficiente per ottenere informazione sull'unico parametro necessario a descrivere le configurazioni del corpo. Osservando ora che in questo caso  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{i}_3$ , l'equazione diventa

$$(5.82) \quad \langle \hat{i}_3, \vec{\tau}_O^{(\text{a,ext})} \rangle = \langle \hat{i}_3, \vec{I}_O \hat{i}_3 \rangle \ddot{\theta} \equiv I_Z \ddot{\theta}$$

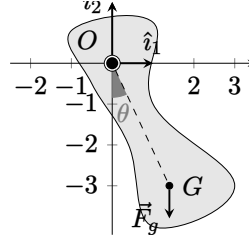


FIGURA 3. Pendolo fisico in moto in un piano verticale.

dove  $I_Z$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso  $Z$ , passante per  $O$  e di direzione  $\hat{i}_3$ .

**Esempio 5.13** (Pendolo fisico) — Un esempio classico di corpo rigido in moto con asse fisso è il pendolo fisico. Si immagina di avere un corpo fissato in modo tale che esso sia libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale, non passante per il suo centro di massa  $G$ : il corpo è soggetto alla forza peso. Scegliamo quindi un riferimento in modo tale che l'origine sia nell'intersezione  $O$  tra l'asse fisso  $Z$  e il piano ad esso perpendicolare passante per  $G$ . Scegliamo inoltre una base  $\{\hat{i}_i\}_{i=1}^3$  tale che la forza peso del corpo sia  $\vec{F}_g = -mg\hat{i}_2$  e  $\hat{i}_3 = \hat{i}_1 \wedge \hat{i}_2$  sia la direzione dell'asse  $Z$ . Secondo quanto detto sopra, il momento della forza peso rispetto all'origine è il momento della risultante delle forze: la forza peso può essere pensata applicata nel centro di massa, che assumiamo individuato dal vettore  $\vec{x}_G$  nel riferimento scelto, di modo che  $\vec{\tau}_O^{(a, \text{ext})} = -mg\vec{x}_G \wedge \hat{i}_2$ . Sia  $r$  la distanza del centro di massa dall'origine (costante, essendo il corpo rigido), e introduciamo un angolo  $\theta$  di modo che

$$(5.83) \quad \vec{x}_G = r \sin \theta \hat{i}_1 - r \cos \theta \hat{i}_2.$$

Conoscendo  $\theta$  conosceremo la configurazione del corpo:  $\theta$  è il parametro lagrangiano la cui evoluzione dovremo studiare. Il momento della forza peso è quindi  $\vec{\tau}_O^{(a, \text{ext})} = -mgr \sin \theta \hat{i}_3$ . Da quanto detto sopra, l'equazione che descrive il moto del sistema è quindi

$$(5.84) \quad I_Z \ddot{\theta} = -mgr \sin \theta$$

ovvero è equivalente al moto di un pendolo ideale di massa  $m$  e di lunghezza  $\ell := \frac{I_Z}{mr}$ . Questo vuol dire che, nel limite di piccole oscillazioni, il periodo del pendolo fisico è

$$(5.85) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_Z}{mgr}}.$$



## CAPITOLO 6

### Principio di d'Alembert ed equazioni di Lagrange

#### 1. Principio di d'Alembert

##### 1.1. Forma simbolica delle equazioni del moto.

#### 2. Equazioni di Lagrange

TBA