

INTRODUZIONE ALLA
MECCANICA RAZIONALE
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

— 16 FEBBRAIO 2025 —

GABRIELE SICURO



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

PREMESSA. Le note sono un sunto di materiale in grandissima parte raccolto dai seguenti volumi.

V. I. ARNOLD, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 1974.

A. FASANO, S. MARMI, *Meccanica analitica*, Bollati Boringhieri, 2002.

L. D. LANDAU, *Fisica teorica I. Meccanica*, Editori Riuniti, 1976.

Meriti delle note da darsi alle fonti, errori da assegnarsi all'estensore.

Indice

Capitolo 1. Meccanica newtoniana	1
1. Preambolo matematico	1
2. Spaziotempo galileiano e leggi della meccanica	11
3. Vincoli	18
4. Moto unidimensionale	20
5. Moto in un campo centrale	28
6. Sistemi a molti punti materiali	34
Capitolo 2. Meccanica lagrangiana	41
1. Formalismo lagrangiano	41
2. Equilibrio ed oscillazioni	57
3. Formalismo hamiltoniano	61
Capitolo 3. Meccanica del corpo rigido	65
1. Cambi di riferimento	65
2. Aspetti cinematici del moto rigido	74
3. Aspetti dinamici del moto rigido	80

CAPITOLO 1

Meccanica newtoniana

1. Preambolo matematico

Prima di iniziare con i concetti della meccanica, è utile un preambolo matematico su alcune strutture geometriche in \mathbb{R}^n che saranno di importanza fondamentale.

1.1. Curve in \mathbb{R}^n . Una *curva* in \mathbb{R}^n è una applicazione $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo di \mathbb{R} , tale che ciascuna sua componente sia *continua*. In tale definizione *parametrica* della curva, denotiamo $\Gamma = \text{Im } \gamma$ l'immagine di I attraverso γ ,

$$\Gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists u \in I \text{ tale che } \mathbf{x} = \gamma(u)\}.$$

Se le componenti di γ sono derivabili in un certo $u_0 \in I$, possiamo associare al punto $\gamma(u_0)$ un *vettore velocità* dato da

$$(1.1) \quad \frac{d\gamma}{du}(u_0) := \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\gamma(u) - \gamma(u_0)}{u - u_0},$$

dove il limite si intende componente per componente. Se $\frac{d\gamma}{du}(u_0) \neq \mathbf{0}$, la retta $\mathbf{x}(u) = \gamma(u_0) + (u - u_0) \frac{d\gamma}{du}(u_0)$, con $u \in \mathbb{R}$, si dice *tangente alla curva* essendo $\|\mathbf{x}(u) - \gamma(u_0)\| = o(u - u_0)$ in un intorno di u_0 . È in questo caso possibile definire un *versore tangente* alla curva in $\gamma(u_0)$ come

$$(1.2) \quad \hat{\mathbf{t}}(u_0) := \left\| \frac{d\gamma}{du}(u_0) \right\|^{-1} \frac{d\gamma}{du}(u_0).$$

Se invece $\frac{d\gamma}{du}(u_0) = \mathbf{0}$, allora *non* esiste una retta tangente alla curva in $\gamma(u_0)$, né un versore tangente.

DEFINIZIONE 1.1 (Curva semplice, curva chiusa e curva di Jordan). Una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è semplice se iniettiva. Se $I = [a, b]$, la curva è detta chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta di Jordan se è chiusa e se $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ per ogni $u \neq v$ con $u, v \in (a, b)$.

DEFINIZIONE 1.2 (Curva regolare). Una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare se ha versore tangente in ogni punto di I . La curva invece si dice regolare a tratti se è continua ed esiste una partizione di I in un numero finito di sottointervalli in cui la curva è regolare.

Si noti che la regolarità di una curva dipende dall'applicazione γ e *non* dal sostegno Γ : dipende cioè dalla *rappresentazione* che si dà di Γ .

Esempio 1.1 — Consideriamo la seguente curva in \mathbb{R}^2 :

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}, \quad u \in [-\pi, \pi].$$

Essa descrive una circonferenza Γ ed è una curva regolare e chiusa. La curva

$$\psi(u) = \begin{pmatrix} \cos u^2 \\ \sin u^2 \end{pmatrix}, \quad u \in [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$$

rappresenta esattamente la stessa circonferenza Γ , e tuttavia non è regolare, perché $\frac{d\psi}{du}(0) = \mathbf{0}$.

Le due curve nell'esempio precedente sono *equivalenti* nel senso della seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.3 (Equivalenza tra curve). Due curve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, si dicono equivalenti se esiste una funzione biettiva strettamente monotona $\tau: I \rightarrow J$ di classe C^1 tale che $\gamma(u) = \psi(\tau(u))$. Si dice che le due curve hanno lo stesso verso se $\frac{d\tau}{du} > 0$, diversamente si dice che hanno verso opposto.

PROPOSIZIONE 1.1. *Se γ e ψ sono due curve equivalenti regolari e con lo stesso verso, esse hanno lo stesso versore tangente in ogni punto del loro sostegno.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$\hat{\mathbf{t}}_{\gamma}(u) = \frac{\frac{d\gamma}{du}(u)}{\left\| \frac{d\gamma}{du}(u) \right\|} = \frac{\frac{d\psi}{du}(\tau(u)) \frac{d\tau}{du}(u)}{\left\| \frac{d\psi}{du}(\tau(u)) \right\| \left\| \frac{d\tau}{du}(u) \right\|} = \frac{\frac{d\psi}{du}(\tau(u))}{\left\| \frac{d\psi}{du}(\tau(u)) \right\|} = \hat{\mathbf{t}}_{\psi}(\tau(u)). \quad \square$$

In altre parole, il versore tangente nel punto $\gamma(u)$ è una funzione del punto e della direzione di percorrenza, e non della parametrizzazione.

1.1.1. *Lunghezza di una curva e integrali curvilinei.* Si dà la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.4 (Lunghezza di una curva). Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare a tratti, la sua lunghezza $\ell(\Gamma)$ è definita come

$$\ell(\Gamma) := \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{du}(u) \right\| du.$$

La seguente diseguaglianza stabilisce che il percorso più breve fra due punti in geometria euclidea è dato dal segmento che li unisce.

TEOREMA 1.2. *La lunghezza di una curva regolare $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è sempre maggiore o uguale allo spostamento, ovvero alla distanza tra i suoi estremi,*

$$\ell(\Gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Assumendo uno spostamento non nullo, abbiamo che, per un generico vettore \mathbf{v}

$$\langle \mathbf{v}, \gamma(b) - \gamma(a) \rangle = \int_a^b \left\langle \mathbf{v}, \frac{d\gamma}{du}(u) \right\rangle du \leq \|\mathbf{v}\| \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{du}(u) \right\| du = \|\mathbf{v}\| \ell(\Gamma).$$

Scegliendo $\mathbf{v} = \gamma(b) - \gamma(a)$ si prova la tesi. \square

TEOREMA 1.3. *Due curve regolari equivalenti $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hanno la stessa lunghezza.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si basa sul fatto che, supponendo per esempio $\frac{d\tau}{du}(u) > 0$, $\left\| \frac{d\gamma}{du}(u) \right\| = \left\| \frac{d\psi}{du}(\tau(u)) \right\| \left\| \frac{d\tau}{du}(u) \right\|$, per cui $\ell(\Gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{du}(u) \right\| du = \int_a^b \left\| \frac{d\psi}{du}(\tau(u)) \right\| \left\| \frac{d\tau}{du}(u) \right\| du = \int_c^d \left\| \frac{d\psi}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau$. La dimostrazione è analoga se $\frac{d\tau}{du}(u) < 0$. \square

Data una curva regolare $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, esiste una curva equivalente $\psi: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove ℓ è la lunghezza del sostegno di γ . Questa parametrizzazione è facilmente trovata come

$$s(u) := \int_a^u \left\| \frac{d\gamma}{dv}(v) \right\| dv,$$

di modo che $s(a) = 0$ e $s(b) = \ell$ e $\gamma = \psi \circ s$: tale parametrizzazione si dice *intrinseca* e preserva la direzione di percorrenza. La funzione s è monotona strettamente crescente, quindi invertibile.

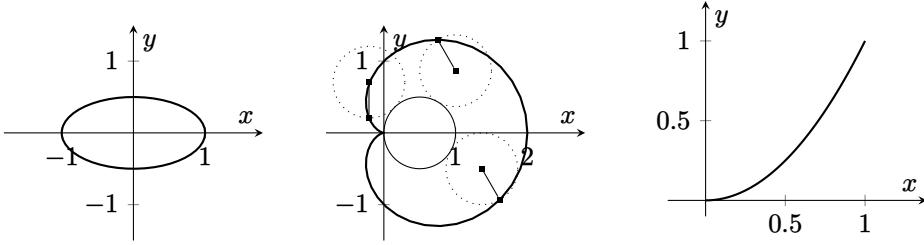


FIGURA 1. Da sinistra a destra: ellisse, cardioide, ramo di parabola.

Ci si riferisce ad s come all'*ascissa curvilinea* lungo la curva. La parametrizzazione $\psi = \gamma \circ s^{-1}$ perciò è tale che $\left\| \frac{d\psi}{ds}(s) \right\| = 1$ per ogni $s \in [0, \ell]$.

Alla luce di quanto detto, si può in generale definire un *integrale curvilineo* di una funzione $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ (detto talvolta campo scalare) lungo una curva regolare γ di supporto Γ scrivendo

$$(1.3) \quad \int_{\Gamma} f d\Gamma := \int_a^b f(\gamma(u)) \left\| \frac{d\gamma}{du}(u) \right\| du.$$

Questo integrale è detto *integrale di linea di prima specie*. Analogamente, sia $\mathbf{F}: \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale su Γ . L'integrale curvilineo di \mathbf{F} lungo γ è definito come

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\gamma \rangle := \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\gamma(u)), \frac{d\gamma}{du}(u) \right\rangle du.$$

Questo tipo di integrale è detto *integrale di linea di seconda specie*. Se γ e ψ sono curve equivalenti, l'integrale curvilineo di f su γ ha lo stesso valore dell'integrale curvilineo di f su ψ : in altre parole, esattamente come avviene per la lunghezza, il suo valore dipende dal *sostegno* della curva, e non da come questa è parametrizzata (purché la parametrizzazione sia regolare).

Esempio 1.2 — Una ellisse nel piano con centro l'origine e semiassi 1 e $a \in (0, 1]$ può essere scritta in forma parametrica come

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} a \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi].$$

La curva è regolare: per ogni $u \in [0, 2\pi]$, abbiamo

$$\frac{d\gamma}{du}(u) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ a \cos(u) \end{pmatrix},$$

per cui $\left\| \frac{d\gamma}{du} \right\|^2 = 1 + (a-1)\cos^2 u \neq 0$. La sua lunghezza è

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 u + a^2 \cos^2 u} du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (1-a^2) \cos^2 u} du = 4E\left(\sqrt{1-a^2}\right),$$

dove $E(x)$ è l'integrale ellittico completo di seconda specie, tale che $E(0) = \frac{\pi}{2}$.

Esempio 1.3 — Talvolta le curve nel piano sono date non in coordinate cartesiane ma polari, ovvero per mezzo una assegnata coppia di funzioni $(\rho(u), \theta(u))$ di un certo parametro $u \in I$, tale che $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\theta: I \rightarrow [0, 2\pi]$, intendendo che $\gamma(u) = (\rho(u) \cos \theta(u), \rho(u) \sin \theta(u))^T$. A titolo di esempio, la coppia di funzioni

$$\rho(u) = 1 + \cos u, \quad \theta = u, \quad u \in [0, 2\pi].$$

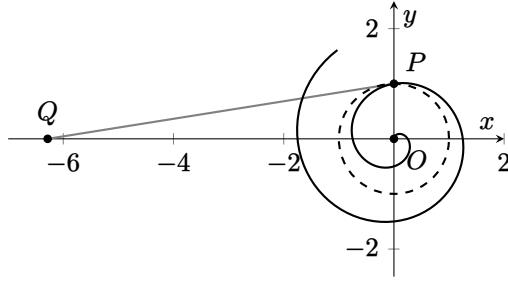


FIGURA 2. Spirale di Archimede.

describe una *cardioide*

$$(1.4) \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} (1 + \cos u) \cos u \\ (1 + \cos u) \sin u \end{pmatrix} \quad u \in [0, 2\pi],$$

curva ottenibile, facendo rotolare una circonferenza attorno ad un'altra fissa avente lo stesso raggio (usando, per esempio, uno spirografo). Con un po' di algebra, $\left\| \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{du}(u) \right\| = \sqrt{2(1 + \cos u)}$. La lunghezza della curva è

$$\ell(\Gamma) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos u} \, du = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{u}{2} \right| \, du = 8.$$

Esempio 1.4 — Un importante esempio di applicazione dei concetti esposti è il calcolo della lunghezza del grafico di una funzione reale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tale grafico consiste nel supporto della curva $\boldsymbol{\gamma}(u) = (u, f(u))^\top \in \mathbb{R}^2$ con $u \in [a, b]$. Supponendo $f \in C^1([a, b])$, la lunghezza del grafico è

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{du}(u) \right\| \, du = \int_a^b \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2} \, du.$$

Per esempio, consideriamo il ramo di parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ con $x \in [0, 1]$. Allora

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \, du = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

Esempio 1.5 (Spirale di Archimede) — Consideriamo la cosiddetta *spirale di Archimede* nel piano, parametrizzata come

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = \frac{au}{2\pi} \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^+,$$

dove $a \in \mathbb{R}^+$ è un parametro della spirale. Sia P il punto della spirale corrispondente a $u = 2\pi$, avente come coordinate $(0, a)^\top$. Tracciamo ora la tangente alla spirale in P e sia Q il punto di intersezione della tangente con l'asse delle ascisse. Troviamone le coordinate: da

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{du} \Big|_{u=2\pi} = \frac{a}{2\pi} \begin{pmatrix} \sin u + u \cos u \\ \cos u - u \sin u \end{pmatrix} \Big|_{u=2\pi} = \frac{a}{2\pi} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La retta tangente ha perciò equazione

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \frac{at}{2\pi} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

la cui intersezione con l'asse delle ascisse è il punto di coordinate $(-2\pi a, 0)$: il punto Q è cioè ad una distanza dall'origine O pari alla lunghezza della circonferenza centrata in O passante per P , e di conseguenza il triangolo QOP ha area uguale a quella del cerchio centrato in O e passante per il punto P , fatto osservato per la prima volta da Archimede¹.

1.1.2. Teorema di Frenet. Sia γ una curva regolare di lunghezza ℓ con parametrizzazione naturale, $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Abbiamo già introdotto il versore tangente alla curva: poiché stiamo assumendo una parametrizzazione intrinseca

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds},$$

dove la condizione di normalizzazione $\|\hat{\mathbf{t}}(s)\| = 1$ è realizzata automaticamente. È possibile introdurre una ulteriore quantità, detta *versore normale principale*, come segue.

DEFINIZIONE 1.5 (Versore normale principale). Sia $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare con parametrizzazione naturale avente componenti di classe C^2 . Nei punti in cui $\frac{d^2\gamma(s)}{ds^2} \neq \mathbf{0}$ è definito il *versore normale principale*

$$\hat{\mathbf{n}}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d^2\gamma(s)}{ds^2} = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds}, \quad \kappa(s) := \left\| \frac{d^2\gamma(s)}{ds^2} \right\|,$$

dove $\kappa(s)$ è detta *curvatura* della curva e $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$ è il raggio di curvatura della curva in $\gamma(s)$. Se $\kappa(s) \neq 0$ per ogni $s \in [0, \ell]$, la curva è detta *non-degenere*.

Ove definito, il versore $\hat{\mathbf{n}}(s)$ è ortogonale a $\hat{\mathbf{t}}(s)$, essendo

$$0 = \frac{d\|\hat{\mathbf{t}}(s)\|^2}{ds} = 2\kappa(s)\langle \hat{\mathbf{n}}(s), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle.$$

Il versore $\hat{\mathbf{n}}(s)$ e il raggio di curvatura $R(s)$ hanno una interessante proprietà che ne giustifica il nome: essi caratterizzano il *cerchio osculatore* in $\gamma(s)$, ovvero il cerchio tangente alla curva in $\gamma(s)$ che meglio la approssima. Per essere più precisi, supponiamo di avere un cerchio di centro $\mathbf{x}_0 = \gamma(s_0) + R\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ e raggio R , quindi avente in comune $\gamma(s_0)$ con la curva. La distanza tra un punto della circonferenza e la curva è

$$g(s) = \|\gamma(s) - \mathbf{x}_0\| - R,$$

dove s è intesa in un intorno di s_0 . Abbiamo che $g(s_0) = 0$, mentre

$$\frac{dg}{ds}(s_0) = \frac{1}{R} \langle \gamma(s_0) - \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{t}}(s_0) \rangle = 0, \quad \frac{d^2g}{ds^2}(s_0) = \frac{1 - \kappa(s_0)R}{R}.$$

Il secondo termine è nullo precisamente se $R = \kappa^{-1}(s_0)$: con questa scelta, $g(s) = O((s - s_0)^3)$ nel punto di tangenza tra curva e cerchio.

Il piano generato da $\hat{\mathbf{t}}(s)$ e $\hat{\mathbf{n}}(s)$ in un certo punto $\gamma(s)$ si dice *piano osculatore* della curva in tale punto. Esso è ortogonale ad un terzo versore unitario, definito come segue.

DEFINIZIONE 1.6 (Versore binormale). Il vettore unitario

$$\hat{\mathbf{b}}(s) := \hat{\mathbf{t}}(s) \wedge \hat{\mathbf{n}}(s)$$

è detto *versore binormale*.

¹Archimede, *Sulle spirali*, 225 a.C. circa.

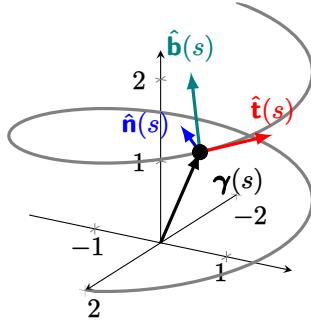


FIGURA 3. Curva in \mathbb{R}^3 con rappresentazione della sua terna intrinseca in una certa posizione.

Per comprendere il significato di questo nuovo versore, consideriamo il fascio di piani passante per un certo punto $\gamma(s_0)$ della curva. Esso è identificato da $\gamma(s_0)$ e da tutti i possibili versori ν di modo che un punto x appartiene all'elemento del fascio di versore ν se $\langle x - \gamma(s_0), \nu \rangle = 0$. D'altra parte, la distanza tra un punto della curva di ascissa curvilinea s e lo stesso piano è

$$g(s) := \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \nu \rangle.$$

Procedendo come prima, osserviamo che naturalmente $g(s_0) = 0$, mentre

$$\frac{dg}{ds}(s_0) = \langle \hat{t}(s_0), \nu \rangle, \quad \frac{d^2g}{ds^2}(s_0) = \kappa(s_0) \langle \hat{n}(s_0), \nu \rangle.$$

Entrambe queste relazioni sono pari a zero se scegliamo $\nu = \hat{b}(s_0)$. D'altra parte *questa è l'unica possibile scelta se $n = 3$* , ovvero se stiamo considerando una curva nello spazio tridimensionale, il che rende la scelta del piano unica e il piano stesso prende il nome di *piano osculatore*, essendo il piano in cui giace il cerchio osculatore.

Nel caso $n = 3$, quindi, la terna introdotta fornisce, localmente, una base, che “evolve” lungo la curva. Per studiarne l’evoluzione, discuteremo il cosiddetto *teorema di Frenet*, ma dopo aver introdotto il seguente Lemma ausiliario.

LEMMA 1.4. *Sia $\mathbf{R}: \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(m)$ differenziabile in un intorno di $s = 0$, ovvero tale che $R_{ij}(s)$ sia differenziabile in un intorno di $s = 0 \forall i, j$, $\mathbf{R}(s)^\top \mathbf{R}(s) = \mathbf{I}$ e $\det \mathbf{R}(s) = 1$. Indicando con*

$$\mathbf{Y} := \left. \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \right|_{s=0}.$$

Allora la matrice $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è antisimmetrica, ovvero $\mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^\top$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\mathbf{R}(s)$ ortogonale, in un intorno di $s = 0$ potremo scrivere

$$\mathbf{R}(s)^\top \mathbf{R}(s) = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}(s)^\top}{ds} \mathbf{R}(s) = -\mathbf{R}(s)^\top \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \stackrel{s=0}{=} \mathbf{Y}^\top = -\mathbf{Y}. \quad \square$$

Vale il seguente teorema.

TEOREMA 1.5 (Frenet). *Sia $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare non-degenere, parametrizzata naturalmente. Valgono le seguenti equazioni di Frenet*

$$(1.5) \quad \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \\ \hat{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\chi(s) \\ 0 & \chi(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \\ \hat{b}(s) \end{pmatrix}$$

dove $\chi(s)$ è detta torsione.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo per brevità $\mathbf{v}(s) = (\hat{\mathbf{t}}(s), \hat{\mathbf{n}}(s), \hat{\mathbf{b}}(s))^\top$. Allora esiste una matrice $\mathbf{O}_s(\sigma) \in \text{SO}(3)$, dipendente da s , tale che $\mathbf{v}(s + \sigma) = \mathbf{O}_s(\sigma)\mathbf{v}(s)$ e che $\mathbf{O}_s(0) = \mathbf{I}$. In particolare

$$\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbf{O}_s(\sigma) - \mathbf{I}}{\sigma} \mathbf{v}(s) = \mathbf{Y}_s \mathbf{v}(s), \quad \mathbf{Y}_s := \frac{d\mathbf{O}_s}{d\sigma}(0).$$

La matrice $\mathbf{O}_s(\sigma)$ ha derivata \mathbf{Y}_s antisimmetrica per il Lemma 1.4. La sua prima riga ha $\kappa(s)$, come nella tesi, come unico elemento non nullo per definizione, per cui basta indicare come $\chi(s)$ l'unico elemento non specificato dalle definizioni già date. \square

Esiste una relazione *univoca* tra una curva passante per un punto e la coppia *torsione e curvatura*, come mostrato dal seguente risultato.

TEOREMA 1.6. *Siano date due funzioni $\kappa(s) > 0$ e $\chi(s)$ continue con derivate continue sull'intervallo $[0, \ell]$. Esiste allora un'unica curva in \mathbb{R}^3 (a meno di congruenze) avente curvatura $\kappa(s)$ e torsione $\chi(s)$.*

DIMOSTRAZIONE. Le equazioni di Frenet implicano che $\hat{\mathbf{t}}(s)$ soddisfa la seguente equazione:

$$(1.6) \quad \frac{d^2 \hat{\mathbf{t}}}{ds^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{ds} \hat{\mathbf{t}} + \kappa^2 \hat{\mathbf{t}} + \chi \hat{\mathbf{t}} \wedge \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = 0,$$

che corrisponde ad una equazione differenziale del terzo ordine per $\gamma(s)$, dato che $\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\gamma}{ds}$. Poste quindi un insieme di condizioni iniziali $\gamma(0) = \gamma_0$, $\frac{d\gamma}{ds}(0) = \hat{\mathbf{t}}_0$, e $\frac{d^2\gamma}{ds^2}(0) = \kappa(0)\hat{\mathbf{n}}_0$, che impongono la posizione γ_0 , la direzione $\hat{\mathbf{t}}_0$ e la direzione della curvatura $\hat{\mathbf{n}}_0$ nel punto iniziale della curva, la soluzione è unica purché la curvatura si mantenga non nulla come per ipotesi. \square

L'analisi fatta finora ha utilizzato l'ipotesi che la curva fosse parametrizzata naturalmente. Se così non è, e disponiamo di una curva regolare $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, sia $s(u)$ l'ascissa curvilinea, di modo che $\gamma = \psi \circ s$ dove ψ è la parametrizzazione naturale equivalente. Supponendo ψ non degenere ed applicando il teorema della funzione composta, la "velocità" associata alla parametrizzazione γ in u risulta parallela al versore tangente

$$\mathbf{v}(u) := \frac{d\gamma(u)}{du} = \frac{d\psi(s)}{ds} \Big|_{s=s(u)} \frac{ds}{du} = \frac{ds}{du} \hat{\mathbf{t}}(s)$$

mentre l'"accelerazione" è

$$\mathbf{a}(u) := \frac{d^2\gamma(u)}{du^2} = \frac{d^2s}{du^2} \hat{\mathbf{t}}(s) + \left(\frac{ds}{du} \right)^2 \kappa(s) \hat{\mathbf{n}}(s),$$

dove si vede che quest'ultima ha due componenti, una tangente e una ortogonale alla curva e la cui intensità degrada con l'aumentare del raggio di curvatura. Incidentalmente, la quantità sopra permette di stimare $\kappa(s)$ da velocità e accelerazione come

$$\kappa(s) = \frac{1}{\|\mathbf{v}(u)\|^2} \left\| \mathbf{a}(u) - \frac{\langle \mathbf{v}(u), \mathbf{a}(u) \rangle}{\|\mathbf{v}(u)\|^2} \mathbf{v}(u) \right\|.$$

1.1.3. Campi vettoriali. Concludiamo questa breve sezione sulle curve in \mathbb{R}^n introducendo il concetto di *campo vettoriale*.

DEFINIZIONE 1.7 (Campo vettoriale). Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Un campo vettoriale d -dimensionale su U è una funzione $\mathbf{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ lipschitziana. Se $\mathbf{x} \in U \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$, diremo che $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è applicato in \mathbf{x} .

DEFINIZIONE 1.8 (Curva integrale). Una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice curva integrale del campo vettoriale $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se per ogni $u \in I$ si ha che $\gamma(u) \in U$ e inoltre $\frac{d\gamma}{du}(u) = \mathbf{F}(\gamma(u))$. Un campo vettoriale si dice completo se ogni punto \mathbf{x} del suo dominio ammette una curva integrale con dominio \mathbb{R} .

La condizione $\mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(u)) = \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{du}(u)$, insieme al teorema di Cauchy, implica che esiste sempre, unica, una curva integrale di un campo vettoriale passante per un dato punto, purché il campo sia sufficientemente regolare.

1.2. Superfici in \mathbb{R}^3 . Nella seconda parte di questo preambolo ci focalizzeremo sulle superfici in \mathbb{R}^3 . Iniziamo dalla seguente

DEFINIZIONE 1.9 (Superficie regolare). Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare se, per ogni $P \in S$, esiste un suo intorno $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che esiste una omeomorfismo $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow V \cap S$ su un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ differenziabile su \mathcal{U} e tale che

$$(1.7) \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})}{\partial u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})}{\partial v} \neq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{w} = (u, v) \in U.$$

Sotto queste ipotesi, si dice che σ è una *superficie regolare*.

La condizione sul prodotto vettoriale, detta *di regolarità*, è dovuta al fatto seguente. Sia $P \in S$ tale che le sue coordinate siano $\mathbf{x}_0 = \sigma(\mathbf{w}_0)$ secondo una certa mappa σ , con $\mathbf{w}_0 \in U$, nella stessa notazione della definizione. Possiamo costruire una curva regolare $\mathbf{w}: [a, b] \rightarrow U$ passante in \mathbf{w}_0 per un certo $\eta_0 \in [a, b]$. Sia $\boldsymbol{\gamma}(\eta) := \sigma(\mathbf{w}(\eta))$ curva sulla superficie immagine della curva \mathbf{w} in U . Indicando con $\mathbf{w}(\eta) = (u(\eta), v(\eta))^T$ la parametrizzazione della curva in U , il vettore tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ in $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\gamma}(\eta_0)$ sarà

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\eta}(\eta_0) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_0)}{\partial u} \frac{du(\eta_0)}{d\eta} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}_0)}{\partial v} \frac{dv(\eta_0)}{d\eta}.$$

Perché la curva $\boldsymbol{\gamma}$ sia regolare, occorre che questo vettore sia non nullo: essendo $\frac{d u}{d \eta}$ e $\frac{d v}{d \eta}$ non entrambi nulli per via della regolarità di \mathbf{w} , ciò è garantito se i due vettori che appaiono nella somma non sono paralleli, da cui la condizione in Eq. (1.7).

In generale, data una superficie regolare, possiamo definire lo *spazio tangente* in un suo punto P individuato dalla terna \mathbf{x} come segue.

DEFINIZIONE 1.10 (Spazio tangente). Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ applicato in P , punto di coordinate \mathbf{x} , si dice tangente a S nel punto P , ovvero $\mathbf{v} \in T_P S$, se e solo se esiste una curva $\boldsymbol{\gamma}: [a, b] \rightarrow S$ tale che $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(\eta_0)$ e $\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\eta}(\eta_0)$ per un qualche $\eta_0 \in [a, b]$.

Per quanto detto sopra, se P è identificato da $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{w})$ per $\mathbf{w} \in U$, allora

$$T_P S = \text{span} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})}{\partial v} \right\}.$$

Essendo $\partial_u \boldsymbol{\sigma}$ e $\partial_v \boldsymbol{\sigma}$ tangenti alla superficie, il vettore $\partial_u \boldsymbol{\sigma} \wedge \partial_v \boldsymbol{\sigma}$ è normale alla superficie e in particolare si può definire il versore normale a $\boldsymbol{\sigma}$ in \mathbf{x} come

$$(1.8) \quad \hat{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) := \frac{\partial_u \boldsymbol{\sigma} \wedge \partial_v \boldsymbol{\sigma}}{\|\partial_u \boldsymbol{\sigma} \wedge \partial_v \boldsymbol{\sigma}\|} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\sigma}(u,v)}.$$

Questo versore genera uno spazio *ortogonale* alla superficie in \mathbf{x} , che indichiamo come $(T_P S)^\perp$.

Osserviamo ora che una superficie S può essere assegnata tramite una funzione $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 su U , come

$$S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \varphi(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Se $\nabla \varphi \neq \mathbf{0}$ in un certo punto $\mathbf{x} \in S$, il punto si dice *non singolare*, e per il teorema della funzione implicita, una delle tre componenti di \mathbf{x} può essere *localmente* scritta in termini delle altre due: per esempio, se $\partial_{x_3} \varphi|_{\mathbf{x}} \neq 0$, esisterà un intorno $U \in \mathbb{R}^2$ di (x_1, x_2) in cui esiste $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui

$$\text{grafico}(f) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\} \subseteq S.$$

Questa legge individua una superficie in modo locale, per mezzo dell'applicazione $\sigma_\varphi: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$, alla quale possono applicarsi tutte le considerazioni fatte sopra. La condizione di regolarità di una superficie data in forma parametrica corrisponde esattamente alla condizione $\nabla\varphi \neq \mathbf{0}$ quando questa viene data nella forma sopra, detta *forma implicita*. Nel caso di superfici regolari, quindi, la descrizione parametrica e quella implicita sono equivalenti. Vale inoltre il fatto seguente.

TEOREMA 1.7. *Sia P un punto non singolare di coordinate \mathbf{x} su una superficie S individuata implicitamente dalla legge $\varphi = 0$. Allora $\mathbf{T}_P S = (\text{span}\{\nabla\varphi(\mathbf{x})\})^\perp$.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo il punto non-singolare, esiste in un suo intorno una rappresentazione parametrica di S , nella forma $\mathbf{x} = \sigma(u, v)$, ovvero $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\sigma(u, v)) = 0$, per cui la condizione $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ implica derivando che $\langle \nabla\varphi, \partial_u \sigma \rangle = \langle \nabla\varphi, \partial_v \sigma \rangle = 0$, cioè $\nabla\varphi$ è ortogonale allo spazio tangente in P . \square

Come conseguenza, il piano passante per $P \in S$ tangente alla superficie ha come vettore normale $\nabla\varphi(\mathbf{x})$.

DEFINIZIONE 1.11. Un campo vettoriale \mathbf{F} su S è una funzione che associa ad ogni punto $\mathbf{x} \in S$ un vettore $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$: in particolare, se $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbf{T}_P S$ per ogni $P \in S$ il campo si dice tangente. Se invece $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in (\mathbf{T}_P S)^\perp$ il campo si dice ortogonale.

I campi vettoriali permettono di fissare alcune proprietà della superficie, per esempio la sua orientazione.

DEFINIZIONE 1.12. Una superficie connessa S è orientata quando è univocamente assegnato un campo vettoriale unitario su di essa.

Il campo vettoriale $\hat{\mathbf{n}}_\sigma$ definito sopra fornisce di per sé una naturale orientazione, tuttavia scegliere $-\hat{\mathbf{n}}_\sigma$ come campo di riferimento per l'orientazione è ugualmente legittimo. Fissare una orientazione non è sempre possibile ed esistono superfici non orientabili.

1.2.1. Proprietà metriche delle superfici. Data una superficie regolare identificata, in un intorno del punto P , dalla legge $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, sia assegnata su di essa la curva $\gamma = \sigma \circ \psi$, dove $\psi: [a, b] \rightarrow U$ regolare. Indicando con $\psi(\eta) \equiv (u(\eta), v(\eta))^\top$, la lunghezza di questa curva è

$$\ell = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma(\psi(\eta))}{d\eta} \right\| d\eta = \int_a^b \left\| \frac{du}{d\eta} \partial_u \sigma + \frac{dv}{d\eta} \partial_v \sigma \right\| d\eta.$$

Il calcolo della norma passa, in particolare, dal calcolo di

$$(1.9) \quad \left\| \frac{du}{d\eta} \partial_u \sigma + \frac{dv}{d\eta} \partial_v \sigma \right\|^2 = E(u, v) \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 + 2F(u, v) \frac{du}{d\eta} \frac{dv}{d\eta} + G(u, v) \left(\frac{dv}{d\eta} \right)^2$$

dove

$$E(u, v) := \|\partial_u \sigma\|^2, \quad F(u, v) := \langle \partial_u \sigma, \partial_v \sigma \rangle, \quad G(u, v) := \|\partial_v \sigma\|^2,$$

che definiscono la cosiddetta *prima forma fondamentale della superficie*

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 = \langle d\mathbf{w}, \mathbf{g} d\mathbf{w} \rangle,$$

dove abbiamo usato la forma compatta $d\mathbf{w} = (du \ dv)^\top$ e

$$\mathbf{g}(u, v) = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}.$$

La forma si dice associata ad una parametrizzazione *ortogonale* se $F = 0$, ovvero se \mathbf{g} è diagonale; se poi inoltre $E(u, v) = G(u, v) \equiv g(u, v)$ e quindi $ds^2 = g(u, v) (du^2 + dv^2)$ la parametrizzazione si dice *conforme* dato che l'angolo tra due curve in U viene preservato su S tramite σ .

Si può dimostrare che una parametrizzazione ortogonale e una parametrizzazione conforme sono sempre possibili su superfici regolari.

La prima forma fondamentale è estremamente utile per il calcolo dell'area di una superficie regolare. Diamo la seguente definizione, che assume che sia sufficiente una sola parametrizzazione della superficie ma può essere generalizzata al caso in cui ne siano necessarie di più.

DEFINIZIONE 1.13 (Area di una superficie). Sia $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una superficie regolare S . L'area della superficie è definita come

$$A(S) := \int_U \|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\| dudv = \int_U \sqrt{\det g(u, v)} dudv.$$

La ragione *intuitiva* per questa definizione è la seguente: il rettangolo di lati du e dv in U attorno ad un certo punto $w \in U$ viene mappato, tramite σ , in un parallelogramma nello spazio tridimensionale i cui lati sono $du \partial_u \sigma$ e $dv \partial_v \sigma$: la quantità $\|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\| dudv$ corrisponde esattamente all'area di questo parallelogramma infinitesimo. L'integrale quindi somma questi contributi infinitesimi che tassellano la superficie che ci interessa e $\sqrt{\det g(u, v)} dudv$ è un infinitesimo di superficie. La quantità $\det g = EG - F^2$ è anche detta *forma quadratica di Gauss*.

TEOREMA 1.8. *La prima forma fondamentale è un tensore covariante di rango 2.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo di voler passare dalla parametrizzazione $w = (u, v)^\top$ alla parametrizzazione $w' = (u', v')$ sul dominio U . Se introduciamo la matrice Jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial w}{\partial w'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$$

abbiamo che $d w = \mathbf{J} d w'$, per cui

$$ds^2 = \langle dw, g dw \rangle = \langle \mathbf{J} dw', g \mathbf{J} dw' \rangle = \langle d w', \mathbf{J}^\top g \mathbf{J} dw' \rangle,$$

ovvero $g \mapsto \mathbf{J}^\top g \mathbf{J}$, che è la trasformazione di un tensore covariante di rango 2. \square

Esempio 1.6 (Sfera) — Calcoliamo la matrice g associata alla sfera in \mathbb{R}^3 , parametrizzata come

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

Da quanto detto sopra,

$$E(u, v) = \sin^2 v, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1,$$

per cui la parametrizzazione fornita è ortogonale ma non conforme. Essendo $\det g = \sin^2 v$, la superficie sferica ha area

$$A(S) = \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \sin v dv = 4\pi.$$

Esempio 1.7 — Un'applicazione analoga a quella che abbiamo visto per gli integrali curvilinei è il calcolo di aree di superfici definite da funzioni tipo $z = f(x, y)$, dove $f \in C^1(U)$ per un qualche insieme $U \subset \mathbb{R}^2$. Queste funzioni possono essere scritte nel formalismo sopra come

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in U.$$

Di conseguenza

$$\|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2},$$

ovvero l'area della superficie è data da

$$A = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(u, v)\|^2} \, dudv.$$

Per esempio, consideriamo il paraboloido individuato dall'equazione

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Allora la superficie del paraboloido è

$$A = \int_U \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} (\sqrt[3]{25} - 1).$$

Esempio 1.8 — Una seconda applicazione, estremamente utile, del formalismo sopra è il calcolo delle aree di *superfici di rotazione*, ovvero superfici ottenute ruotando attorno all'asse z funzioni definite sul piano $y = 0$ da un'equazione del tipo $x = f(z)$, con $z \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f(z) > 0$ funzione continua derivabile. Questo vuol dire che la superficie generata può essere scritta in forma parametrica come

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u), \quad (u, v) = [a, b] \times [0, 2\pi].$$

In questo caso un calcolo diretto mostra che

$$\|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\| = f(u) \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2}$$

Questo significa che l'area di tali superfici si può scrivere come

$$A = 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2} \, du.$$

Per esempio, il paraboloido considerato nell'esempio precedente può essere visto come la rotazione attorno all'asse z della parabola $z = x^2$ nel piano $y = 0$, ovvero $x = f(z) = \sqrt{z}$ per $z \in [0, 1]$. La formula che abbiamo ottenuto dice quindi che possiamo calcolarne l'area come

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u} \sqrt{1 + \frac{1}{4u}} \, du = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4u} \, du = \frac{\pi}{6} (\sqrt[3]{25} - 1).$$

2. Spaziotempo galileiano e leggi della meccanica

2.1. Generalità. La struttura matematica sottesa a gran parte dell'esposizione che verrà data sarà quella di spazio affine euclideo \mathbb{E}^n , ovvero uno spazio affine su uno spazio vettoriale reale prehilbertiano V di dimensione n . Per ogni coppia (P, Q) di punti dello spazio \mathbb{E}^n , si assume quindi che esista una applicazione $\vec{\sigma}: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow V$ tale che $\vec{PQ} \in V$ biunivocamente a P fissato. Il vettore \vec{PQ} si dice “applicato in P ”. La definizione di spazio affine richiede inoltre che valga la cosiddetta *uguaglianza di Chasles*, ovvero $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$. Essendo prehilbertiano, lo spazio vettoriale V è inteso dotato di una operazione di prodotto interno, che indicheremo con $\langle \bullet, \bullet \rangle$, che permette di introdurre il concetto di *base ortonormale* come un set di n vettori $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^n$ tale che $V = \text{span}\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_k$ e $\langle \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \delta_{ij}$ per $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Il prodotto scalare induce una norma sullo spazio V , di modo che detto $\mathbf{v} \in V$ definiamo la sua norma $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ e, di conseguenza, possiamo introdurre il concetto di distanza $d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tra punti di \mathbb{E}^n come

$$d(P, Q) := \|\vec{PQ}\|.$$

Scegliendo un punto $O \in \mathbb{E}^n$ come *origine*, possiamo costruire una biiezione tra \mathbb{E}^n e V , associando ad ogni punto P il vettore $\vec{OP} \in V$, che indichiamo semplicemente con \mathbf{x}_P . Fissando

ulteriormente una base ortonormale, $\{\hat{\mathbf{i}}_i\}_{i=1}^n$, $\mathbf{x}_P = \sum_k x_k \hat{\mathbf{i}}_k$, dove $\mathbf{x}_P = (x_k)_k \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle coordinate di P in tale base. La combinazione di origine e base, indicata con $O\hat{\mathbf{i}}_1 \dots \hat{\mathbf{i}}_n$, si dice sistema di riferimento cartesiano. Fissando un riferimento cartesiano, quindi, esiste un isomorfismo $\phi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che associa $P \in \mathbb{E}^n \mapsto \mathbf{x}_P \in \mathbb{R}^n$, vettore delle sue coordinate nello spazio lineare reale \mathbb{R}^n .

Lo *spaziotempo* della meccanica classica è uno spazio affine quadridimensionale costruito per mezzo di uno spazio euclideo, di modo che $\mathbb{A}^4 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$, i cui punti $e = (t, P)$ si chiamano *punti di universo o eventi*. Dati due punti di universo $e = (t, P)$ e $e' = (t', P')$, l'applicazione $\tau: \mathbb{A}^4 \times \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tau(e, e') \equiv \hat{\tau}(t, t') \in \mathbb{R}$ misura l'*intervallo di tempo* tra gli eventi e ed e' , di modo che se $\tau(e, e') = 0$ i due eventi sono *contemporanei*. Il nucleo dell'applicazione τ

$$\mathbb{E}^3(e) = \{e' \in \mathbb{A}^4 : \tau(e', e) = 0\}$$

è un sottospazio affine euclideo tridimensionale costituito dagli eventi contemporanei ad e : se $e_1 = (t, P_1)$ e $e_2 = (t, P_2)$ sono entrambi elementi di $\mathbb{E}^3(e)$ la loro distanza è

$$d(e_1, e_2) = d(P_1, P_2).$$

L'*operazione di distanza si intende significativa solo tra eventi contemporanei*. Naturalmente, se $e_1, e_2 \in \mathbb{E}^3(e)$, $\mathbb{E}^3(e) = \mathbb{E}^3(e_1) = \mathbb{E}^3(e_2)$. Fissato quindi un *evento origine* $e_O = (t_O, O)$, possiamo utilizzare O come origine di un riferimento cartesiano in \mathbb{E}^3 , sia $\psi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e costruire la mappa

$$\psi: \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \text{ tale che } e = (t, P) \in \mathbb{A}^4 \mapsto \psi(e) = (\tau(t_O, t), \phi(P)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

Questo isomorfismo è detta *sistema galileiano di coordinate cartesiane*: incorpora la scelta di una *origine* e di una *base* in \mathbb{E}^3 , ma anche di una origine temporale rispetto a cui misurare i tempi.

Nello spazio così costruito si può considerare lo studio di un *punto materiale*: il concetto di punto materiale è assunto primitivo e si può pensare come un corpo di cui si possono trascurare le dimensioni. Un punto materiale P è associato ad una *linea di universo* $\gamma_P = \psi^{-1} \circ (\text{id}, \mathbf{x}_P): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}^4$, dove $\mathbf{x}_P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è assunta essere una curva regolare. Una linea di universo corrisponde all'evoluzione di un *punto* nello spazio euclideo: ad ogni istante t , infatti, possiamo associare \mathbf{x}_P e quindi $P = \phi^{-1}(\mathbf{x}_P) \in \mathbb{E}^3$. Indicheremo punto materiale e corrispondente punto geometrico associato con lo stesso simbolo P , e diremo che questo punto ha posizione individuata dalle coordinate \mathbf{x}_P al tempo t . L'applicazione $\dot{\gamma}$ può quindi essere intesa come il grafico di γ . In analogia con quanto detto sulle curve, fissato ψ , definiremo la *velocità* del punto materiale P come

$$\mathbf{v}_P := \frac{d \mathbf{x}_P}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}_P.$$

e la sua *accelerazione* come

$$\mathbf{a}_P := \frac{d^2 \mathbf{x}_P}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{x}}_P.$$

Se abbiamo una collezione $\mathcal{S} = \{P_i\}_{i=1}^n$ da n punti, lo studio dovrà tenere conto di n linee di universo, e quindi n applicazioni $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, con $\mathbf{x}_i = \phi^{-1}(P_i): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. La concatenazione $\mathbf{X} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{x}_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ descrive il *sistema* di n punti e vive in uno spazio di dimensione $3n$, detto *spazio delle configurazioni*, che contiene collettivamente le informazioni delle loro linee universo in \mathbb{A}^4 .

2.2. Gruppo di Galilei. La struttura che abbiamo introdotto è detta *struttura galileiana*: essa associa a due eventi e e e' una distanza temporale e, se i due eventi sono contemporanei, una distanza spaziale. Queste quantità *non* devono dipendere dalla scelta di ψ : per esempio, due eventi contemporanei secondo un certo riferimento devono rimanere tali secondo un altro. Richiedere che valga questa proprietà induce un gruppo di trasformazioni di simmetria dello

spaziotempo, detto *gruppo galileiano*. Per essere più precisi, supponiamo di disporre di due sistemi galileiani di coordinate cartesiane ψ e $\hat{\psi}$ (corrispondenti cioè a due diverse scelte di origine e base). La mappa

$$\Psi := \hat{\psi} \circ \psi^{-1}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

deve essere una trasformazione affine, dato che deve preservare la struttura di spazio vettoriale, quindi nella forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_c \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle + t_c \\ \mathbf{v}_2 t + \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

Inoltre, perché la struttura galileiana sia preservata, dovrà essere tale che, dati due eventi $e_1 = (t_1, P_1)$ e $e_2 = (t_2, P_2)$ qualsivoglia

$$t_2 - t_1 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1 = a(t_2 - t_1) + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle, \quad \text{se } \tau(e_1, e_2) = 0 \quad \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|$$

dove abbiamo indicato $\psi(e_i) = (t_i, \mathbf{x}_i)$ e $\hat{\psi}(e_i) = (\hat{t}_i, \hat{\mathbf{x}}_i)$. Le uguaglianze sono realizzate se $a = 1$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A} \in O(3)$, e qualsivoglia scelta di t_c e \mathbf{c} , ovvero se la trasformazione Ψ ha la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_c \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad t_c \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{R} \in O(3).$$

In altre parole, il gruppo è esprimibile *univocamente* in termini delle seguenti trasformazioni

Traslazione dell'origine: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t + t_c, \mathbf{x} + \mathbf{c})$ per un dato $(t_c, \mathbf{c}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Rotazione della componente spaziale: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{Rx})$ per qualche $\mathbf{R} \in O(3)$.

Moto rettilineo uniforme: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{x} + \mathbf{vt})$ per qualche $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Da un computo del numero di parametri necessari per specificare ciascuna delle trasformazioni elencate, il gruppo ha quindi dimensione $10 = 4 + 3 + 3$. L'invarianza per traslazione dell'origine del riferimento quadridimensionale manifesta l'assunzione che spazio e tempo siano *omogenei*, ovvero che una qualunque legge fisica non può dipendere da posizioni o istanti di tempo particolari se vogliamo che sia compatibile con l'invarianza galileiana. L'invarianza dello spazio sotto rotazioni ne esprime l'*isotropia*, ovvero il fatto che non vi sono direzioni privilegiate.

2.3. Principî della meccanica. Avendo fissato le proprietà dello spazio in cui opereremo, il primo passo per una trattazione della meccanica è l'introduzione di una serie di postulati che riguardano le proprietà dinamiche dei punti materiali. I punti materiali si assumono in grado di influenzare le loro linee universo reciprocamente: in altre parole, le linee universo di due punti saranno soggette a delle reciproche condizioni matematiche che devono soddisfare certe proprietà generali. Queste proprietà sono specificate dai principî, o postulati, della meccanica. Anzitutto, introduciamo il seguente postulato, anche detto di Galilei, che assume l'esistenza di una classe speciale di sistemi di riferimento galileiani.

POSTULATO 2.1 (Primo postulato della meccanica). *Esistono osservatori inerziali, ovvero riferimenti per i quali l'accelerazione di un punto materiale isolato è nulla in ogni istante qualunque sia il suo stato cinematico.*

Il postulato si basa sul concetto impreciso di “isolato”, che possiamo qualitativamente immaginare come equivalente a “infinitamente distante da ogni altro sistema con cui il punto materiale possa interagire. Se esiste un osservatore inerziale, ne esistono infiniti altri: il gruppo di Galilei ha infatti la proprietà di lasciare invariate le accelerazioni delle linee di universo, e si può utilizzare per trasformare un dato riferimento inerziale in un nuovo riferimento inerziale. In gran parte della trattazione seguente supporremo di osservare il moto in un riferimento inerziale: diversamente, renderemo esplicito il fatto che questa ipotesi non è verificata.

POSTULATO 2.2 (Secondo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali P_1 e P_2 , le loro corrispondenti accelerazioni \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 secondo un osservatore inerziale sono tali da avere moduli in rapporto m_{12} indipendente dallo stato cinematico del sistema e dall'istante della misura. Ovvero,*

$$\|\mathbf{a}_1\| = m_{12} \|\mathbf{a}_2\|.$$

Dato un sistema isolato $\hat{S} = \{P_0, P_1\}$ costituito da uno dei due punti considerati, per esempio P_1 , ed un terzo punto materiale P_0 , nelle stesse ipotesi precedenti $\|\hat{\mathbf{a}}_1\| = m_{10} \|\hat{\mathbf{a}}_0\|$ (dove abbiamo evidenziato che le accelerazioni in gioco saranno in generale diverse), e similmente, considerando il sistema isolato $\tilde{S} = \{P_0, P_2\}$, $\|\tilde{\mathbf{a}}_2\| = m_{20} \|\tilde{\mathbf{a}}_0\|$. Allora vale

$$\frac{m_{10}}{m_{20}} = m_{12}.$$

In altre parole, il postulato ammette la scelta di un “punto materiale campione”, per esempio P_0 , da usare come riferimento per assegnare ad ogni punto materiale P_i una *massa inerziale* $m_i \equiv m_{i0}$ (nella notazione adottata), ovvero uno scalare positivo corrispondente al rapporto delle accelerazioni indotte dall’interazione con il punto materiale campione. In seguito utilizzeremo la notazione (P_i, m_i) per indicare che la massa assegnata al punto P_i è m_i .

Il terzo postulato ci informa sulle direzioni delle accelerazioni in un sistema isolato di due punti materiali.

POSTULATO 2.3 (Terzo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali P_1 e P_2 in posizioni \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 rispettivamente, per un osservatore inerziale le corrispondenti accelerazioni \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 hanno la direzione di $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ e versi tra loro opposti.*

Prima di procedere è utile una riflessione aggiuntiva sul primo postulato e sulle sue conseguenze alla luce degli altri due. La formulazione data da Galilei è in effetti più profonda e generale.



SALVIATI: Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coperta di alcun gran navilio, e qui fate d’aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti: siavi anco un gran vaso d’acqua, e dentrovi de’ pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell’acqua in un altro vaso di angusta bocca che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza. [...] Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia mentre il vascello sta fermo non debbano succedere così: fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur di moto uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti; né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina, o pure sta ferma.

Galileo Galilei
Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo (1632)

L’intuizione di Galilei nel formulare questo principio ha una implicazione molto profonda anche sulla nostra interpretazione della struttura matematica di A^4 . In effetti, il principio stabilisce che *non è possibile, per mezzo di un esperimento fisico realizzato entro un riferimento inerziale, rilevare se il riferimento stesso è in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro riferimento inerziale*. La conseguenza è la negazione del concetto aristotelico di *spazio assoluto*: non è possibile *identificare* punti dello spazio in istanti diversi, dato che non abbiamo modo di seguire la posizione di un punto rispetto ad un riferimento assoluto, né ha senso farlo. Di

conseguenza, in letteratura² è stato osservato come sia più coerente pensare $\mathbb{A}^4 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ associando *ad ogni elemento* di \mathbb{E}^1 una *diversa copia* di \mathbb{E}^3 . Per questa ragione non ha senso parlare di distanza tra punti di \mathbb{E}^3 riferiti a istanti diversi, come abbiamo anticipato sopra: ciò equivale a misurare la distanza tra punti in due spazi diversi. Questo tipo di struttura è quella matematicamente formalizzata dal concetto di *fibrato*, in cui \mathbb{E}^3 è la *fibra* associata ad ogni punto della *base* \mathbb{E}^1 .

I postulati dati finora sono in realtà insufficienti per lo studio della meccanica, dato che riguardano sistemi isolati di al più due punti materiali. Il seguente postulato ausiliario permette di superare questa difficoltà e comporre gli effetti delle interazioni a due corpi finora considerate.

POSTULATO 2.4 (Principio di sovrapposizione). *L'accelerazione prodotta su un punto materiale P di massa m dall'interazione con n punti materiali è la somma delle accelerazioni che verrebbero prodotte se P interagisse con ciascuno di essi separatamente in un sistema isolato a due corpi.*

Alla luce di quanto detto possiamo dare la seguente

DEFINIZIONE 2.1 (Forza). Dato un punto materiale P di massa m e soggetto ad una accelerazione \mathbf{a}_P , la forza su di esso applicata è definita come

$$\mathbf{F}_P := m\mathbf{a}_P.$$

Questa definizione permette, in ultima analisi, di studiare per esempio sistemi isolati $\mathcal{S} = \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ di n punti materiali: per ciascuno di essi vale una equazione nella forma $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$, dove \mathbf{F}_i sarà la forza applicata al punto P_i di massa m_i : in molti casi, come vedremo, informazioni aggiuntive sulla forma funzionale di \mathbf{F}_i (dovute per esempio all'esperienza sperimentale) renderanno la definizione una equazione differenziale per la dinamica del punto a cui è applicata. Il tipo di dipendenza funzionale in \mathbf{F}_i dalle posizioni $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$ è dato dal seguente

POSTULATO 2.5 (Principio di determinismo di Newton). *Lo stato cinematico di un sistema isolato, ovvero la posizione e le velocità di tutti i punti materiali che lo compongono, identifica univocamente il suo moto.*

Il principio di determinismo di Newton e quello galileiano hanno delle conseguenze sulla forma funzionale delle quantità \mathbf{F}_i nelle equazioni sopra. Infatti, dovendo essere posizioni e velocità sufficienti all'integrazione delle equazioni del moto, non possono apparire in dette equazioni derivate temporali superiori alla prima, ovvero in generale $\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}_i(\{\mathbf{x}_i\}_i, \{\dot{\mathbf{x}}_i\}_i, t)$. Un fatto interessante è che se imponiamo l'invarianza sotto il gruppo di Galilei delle equazioni del moto, possiamo dedurre una serie di proprietà sulla forma funzionale che \mathbf{F}_i può assumere.

Anzitutto, il gruppo di Galilei include le traslazioni temporali, per cui se richiediamo che le leggi della natura non dipendano da un tempo specifico t , deve essere $\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}_i(\{\mathbf{x}_i\}_i, \{\dot{\mathbf{x}}_i\}_i)$. Il gruppo include anche *invarianza per traslazioni* e *invarianza per cambi di riferimento in moto rettilineo uniforme reciproco*. Se abbiamo quindi un sistema isolato $\mathcal{S} = \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ di n punti, dovrà essere

$$\mathbf{F}_i \equiv \mathbf{F}_i(\{\mathbf{x}_{jk}\}_{j < k}, \{\dot{\mathbf{x}}_{jk}\}_{j < k}), \quad \mathbf{x}_{jk} := \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k.$$

Infine, lo spazio è *isotropo*: la legge del moto non può cambiare se eseguiamo una rotazione del riferimento. Detta $\mathbf{R} \in O(3)$, ed indicando $\mathbf{x}_{jk} := \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$, $\mathbf{F}_i(\{\mathbf{R}\mathbf{x}_{jk}\}_{j < k}, \{\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}_{jk}\}_{j < k}) = \mathbf{R}\mathbf{F}_i(\{\mathbf{x}_{jk}\}_{j < k}, \{\dot{\mathbf{x}}_{jk}\}_{j < k})$.

Una conseguenza di tutte le osservazioni fatte finora è che se si considera un *singolo punto materiale*, in assenza di altri punti materiali, esso deve essere sottoposto ad una forza nulla: abbiamo così verificato la compatibilità del secondo postulato e dell'invarianza galileiana con il primo postulato.

²R. Penrose, *Structure of space-time*, in *Battelle Rencontres*, 121-235 (1968).

Un apparente paradosso con tutto quanto detto è che è spesso utile studiare equazioni di singoli punti materiali nella forma $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, in palese violazione con queste osservazioni. Leggi di questo tipo, sebbene in violazione con l'invarianza galileiana, sono però utili *approssimazioni*, in cui l'effetto del moto di P sugli altri punti materiali con cui interagisce viene trascurato, per esempio perché si assume che la loro massa sia di molto maggiore di m (come accade nello studio della caduta dei gravi).

2.4. Lavoro e forze conservative. Consideriamo ora un punto materiale (P, m) in posizione \mathbf{x} e soggetto ad una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ che si muove con velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. La *potenza* associata è definita come

$$\Pi(t) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle.$$

A tale funzione è associato il *lavoro* eseguito durante la dinamica a partire da un certo tempo t_0 , e definito come l'integrale di linea della forza sulla traiettoria del punto materiale

$$W[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] = \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau.$$

L'espressione dipende in generale dallo stato cinematico del corpo in tutti gli istanti tra t_0 e t , e ha suggerito l'introduzione della quantità *energia cinetica* associata al punto materiale.

DEFINIZIONE 2.2. L'energia cinetica al tempo t di un punto materiale (P, m) che si muove con velocità $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ è

$$T := \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2.$$

Il legame tra lavoro svolto ed energia cinetica è espresso dal seguente semplice

TEOREMA 2.6 (delle “forze vive”). *Dato un punto materiale (P, m) in moto lungo una traiettoria $\mathbf{x}(t)$, il lavoro svolto dalla forza totale agente su di esso tra un tempo t_0 e un tempo $t > t_0$ è uguale alla variazione della sua energia cinetica, ovvero*

$$T(t) - T(t_0) = W[\mathbf{x}].$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$\frac{dT}{dt} = m\langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = \Pi,$$

e integrare questa relazione nel tempo per ottenere la definizione di $W[\mathbf{x}]$. \square

Se $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$, ovvero non appare dipendenza dalla velocità o dal tempo, allora è possibile utilizzare una parametrizzazione naturale della traiettoria $\boldsymbol{\gamma}(s(\tau)) = \mathbf{x}(\tau)$, dove $s \in [0, \ell]$ essendo ℓ lunghezza della curva,

$$W[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] = \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_0^\ell \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) \rangle ds \equiv W[\Gamma].$$

L'espressione dipende quindi *puramente dalla traiettoria* percorsa e non da *come* essa è stata percorsa, ovvero è invariante per riparametrizzazioni temporali, come abbiamo già visto. Un'ulteriore semplificazione si verifica quando la forza è un *campo conservativo*, ovvero esiste un *potenziale*, detto *energia potenziale*, $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

In tal caso, detto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t)$,

$$(1.10) \quad W[\Gamma] = \int_{\gamma} \langle \mathbf{F}(\gamma), d\gamma \rangle = - \int_{\gamma} dV = V(\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x})$$

ovvero il lavoro svolto dipende solo dalla posizione finale e iniziale della curva seguita. Questo cruciale fatto permette di enunciare il seguente, importante teorema.

TEOREMA 2.7 (Conservazione dell'energia meccanica). *Dato un punto materiale soggetto a sole forze conservative associate ad un potenziale V , la sua energia meccanica*

$$E := T + V$$

rimane costante durante il moto.

DIMOSTRAZIONE. Il risultato si ottiene combinando l'Eq. (1.10) con il teorema delle forze vive si ottiene

$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = -V(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}_0) \Rightarrow E := T(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_0) + V(\mathbf{x}_0). \quad \square$$

Il teorema rimane valido se sul punto materiale agiscono forze aventi potenza nulla. Un campo conservativo ha anche la proprietà di essere *irrotazionale*, ovvero $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$, come diretta conseguenza della sua definizione: viceversa l'irrotazionalità garantisce l'esistenza di un potenziale purché il dominio sia semplicemente connesso.

2.5. Quantità di moto e momento della quantità di moto. Due quantità svolgeranno un ruolo importante nell'analisi delle equazioni del moto e in generale nella teoria che verrà sviluppata in seguito.

DEFINIZIONE 2.3 (Quantità di moto e momento della quantità di moto). Sia dato un punto materiale (P, m) . La sua quantità di moto è definita come

$$\mathbf{Q} := m\mathbf{v},$$

mentre il momento della quantità di moto rispetto ad un polo Y in posizione \mathbf{y} è definito come

$$\mathbf{L}_Y = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{Q}.$$

Analogamente si introduce il *momento della forza* \mathbf{F} applicata ad un punto materiale (P, m) rispetto ad un polo.

DEFINIZIONE 2.4. Sia dato un punto materiale (P, m) in posizione \mathbf{x} su cui agisce una forza \mathbf{F} . Il momento della forza rispetto ad un polo Y in posizione \mathbf{y} è

$$\boldsymbol{\tau}_Y = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{F}.$$

Il polo scelto per il calcolo del momento della quantità di moto o il momento della forza può essere cambiato utilizzando una semplice regola di cambio di polo di facile verifica: se Z è un punto di posizione \mathbf{z} , $\mathbf{L}_Z = (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{L}_Y$; similmente, $\boldsymbol{\tau}_Z = (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mathbf{F} + \boldsymbol{\tau}_Y$.

Così come la legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \dot{\mathbf{Q}}$ esprime la conservazione della quantità di moto quando $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, esiste una relazione analoga tra il momento di una forza e il momento della quantità di moto, indotta proprio dalle equazioni del moto, da cui si deriva immediatamente.

PROPOSIZIONE 2.8. *Sia dato un punto materiale (P, m) in posizione \mathbf{x} con velocità \mathbf{v} , su cui agisce la forza \mathbf{F} . Dato un polo di riferimento Y , fisso nel riferimento galileiano, si ha*

$$\dot{\mathbf{L}}_Y = \boldsymbol{\tau}_Y.$$

Di conseguenza, se $\boldsymbol{\tau}_Y = \mathbf{0}$ allora \mathbf{L}_Y si conserva.

3. Vincoli

La forza che appare nell'equazione $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ per un punto materiale nasce dall'interazione di tale punto con altri sistemi. In particolare, se il sistema è soggetto ad un *vincolo*, essa incorpora anche l'azione del vincolo sul punto materiale. Per esempio, supponiamo che un punto materiale P sia vincolato a muoversi su una superficie mobile individuata dall'equazione

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Un vincolo siffatto è detto *semplice*. Si può avere anche con un vincolo *doppio*, individuato da due superfici (in questo caso, il vincolo corrisponderà in generale ad una curva),

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \varphi_2(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Vincoli nella forma qui presentata, dipendenti solo dalla posizione del punto materiale e al più dal tempo, sono detti *olonomi*. Il fatto che la posizione del punto materiale debba soddisfare le equazioni di vincolo implica l'esistenza di una opportuna forza vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ applicata dal vincolo al punto. In generale, possiamo scomporre la forza \mathbf{F} applicata al punto materiale in un contributo vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$, dovuto all'azione di vincoli olonomi, e un restante *contributo attivo*, $\mathbf{F}^{(a)}$, espresso tipicamente da funzioni esplicite dello stato cinematico del punto materiale e del tempo. Torneremo sui vincoli olonomi più dettagliatamente in seguito, ma per ora è utile fissare alcune definizioni e fatti.

DEFINIZIONE 3.1 (Principio di d'Alembert–Lagrange, o degli spostamenti virtuali). La reazione vincolare prodotta da un vincolo *ideale* o *liscio* su un punto materiale non compie lavoro. Di conseguenza, se il punto materiale è soggetto a sole forze conservative e vincoli lisci, la legge di conservazione dell'energia resta valida.

Questa definizione implica che $\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \lambda(t)\nabla\varphi(\mathbf{x}, t)$ per un vincolo semplice espresso, per esempio, dall'equazione $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$. Similmente, se il vincolo è per esempio doppio, $\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \lambda_1(t)\nabla\varphi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2(t)\nabla\varphi_2(\mathbf{x}, t)$ per qualche coppia incognita di funzioni λ_1 e λ_2 . In altre parole, la forza vincolare deve essere ortogonale al vincolo: diversamente, essa compierebbe lavoro a seguito di uno spostamento lungo di esso. Tale forza può essere caratterizzata anche in termini dei cosiddetti *spostamenti virtuali*. Supponendo per esempio di essere in presenza di un vincolo semplice, e indicando con $\mathbf{v} \in T_P S$, spazio tangente della superficie specificata dalla condizione di vincolo, questo vettore si dice rappresentare uno “spostamento virtuale”, ovvero una direzione tangente alla superficie *ad un certo istante fissato t*. La condizione di vincolo olonomo ideale quindi equivale a dire che la reazione vincolare applicata ad un punto P sulla superficie deve soddisfare $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Supponiamo ora di avere un punto materiale soggetto ad una forza attiva *conservativa*, ovvero $\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V$ per un certo potenziale V , e che sia vincolato a muoversi su una superficie equipotenziale, ovvero $V(\mathbf{x}) = c$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 3.2 (Geodetica). La curva γ sulla superficie S è una geodetica se in ogni punto P della sua traiettoria il suo versore normale $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ è parallelo al versore $\hat{\mathbf{n}}_\sigma$ normale alla superficie, ovvero

$$\hat{\mathbf{n}}_\gamma(P) \in (T_P S)^\perp.$$

PROPOSIZIONE 3.1. *Un punto materiale (P, m) soggetto ad una forza attiva conservativa, e vincolato, tramite vincolo liscio, a muoversi su una superficie equipotenziale, segue delle traiettorie geodetiche sulla superficie. Analogamente, un punto materiale soggetto al solo vincolo liscio si muove lungo geodetiche del vincolo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia data una traiettoria $\mathbf{x}_P(t)$ non banale (ovvero con $\dot{\mathbf{x}}_P \neq 0$) seguita dal punto P sul vincolo. Per ipotesi $\mathbf{F}^{(v)} = \lambda \nabla V$, essendo la superficie equipotenziale; ma d'altronde $\mathbf{m}\mathbf{a}_P = \mathbf{F} = (\lambda - 1)\nabla V$, ovvero \mathbf{a} è parallela a ∇V , direzione normale al vincolo. Basta ora semplicemente ricordare che $\mathbf{a}_P = \ddot{s}\hat{\mathbf{t}}_P + \dot{s}^2\kappa\hat{\mathbf{n}}_P$, con κ curvatura, $\hat{\mathbf{n}}_P$ versore normale della curva ed s sua parametrizzazione naturale, per concludere che la traiettoria è una geodetica (l'unico contributo in \mathbf{a}_P in grado di concordare con \mathbf{F} è $\hat{\mathbf{n}}_P$ purché $\hat{\mathbf{n}}_P$ sia parallelo a ∇V). Analogamente si prova il caso di moto spontaneo su vincolo liscio. \square

3.1. Vincoli scabri. L'ipotesi di vincolo liscio è importante in meccanica ma, naturalmente, risultato di una semplificazione estrema e, più realisticamente, la reazione vincolare presenta una componente tangenziale $\mathbf{F}_t^{(v)}$ oltre a quella normale $\mathbf{F}_\perp^{(v)}$, ovvero $\mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{F}_\perp^{(v)} + \mathbf{F}_t^{(v)}$. Focalizziamoci su vincoli olonomi fissi. Nel caso statico, ovvero quando il punto materiale è fermo sul vincolo, sperimentalmente si osserva che vale la diseguaglianza

$$\|\mathbf{F}_t^{(v)}\| \leq \mu_s \|\mathbf{F}_\perp^{(v)}\|$$

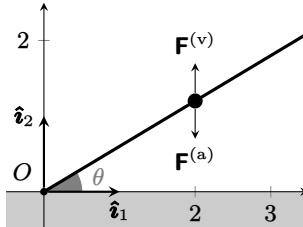
dove μ_s è detto *coefficiente di attrito statico*. La forza $\mathbf{F}^{(v)}$ vive perciò entro doppio un cono, il cui asse è ortogonale al vincolo nel caso di vincolo semplice e ad esso tangente nel caso di vincolo doppio, detto *cono di attrito statico*: di conseguenza, le posizioni di equilibrio, cioè tali per cui $\ddot{\mathbf{x}} = 0$, sono quelle per cui $\mathbf{F}^{(a)}$ è anch'essa in tale cono.

Nel caso dinamico, ovvero se il punto materiale è in moto, la relazione tra componente tangente e normale di $\mathbf{F}^{(v)}$ coinvolge il cosiddetto *coefficiente di attrito dinamico* μ_d , e si scrive

$$\|\mathbf{F}_t^{(v)}\| = \mu_d \|\mathbf{F}_\perp^{(v)}\|.$$

Si osserva che $0 < \mu_d < \mu_s$. In questo caso l'attrito *completa lavoro*; inoltre $\mathbf{F}_t^{(v)}$ è sempre *opposto* alla velocità del punto materiale, ovvero la presenza dell'attrito induce *dissipazione* di energia meccanica, in quanto il lavoro fatto è negativo.

Esempio 1.9 (Guida inclinata scabra) — Consideriamo un punto materiale di massa m vincolato a muoversi lungo una guida scabra di coefficiente d'attrito statico μ_s . La guida si sviluppa lungo una retta passante per l'origine O di un riferimento cartesiano e che forma un angolo θ con l'asse del riferimento parallelo a $\hat{\mathbf{i}}_1$. Essa giace nel piano passante per O e generato dai vettori $\hat{\mathbf{i}}_1$ e $\hat{\mathbf{i}}_2$.



Sul punto materiale agisce la forza peso, che in questo riferimento assumiamo avere la forma $\mathbf{F}^{(a)} = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$, con g accelerazione di gravità. Questo significa che si ha equilibrio se $\mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{F}_t^{(v)} + \mathbf{F}_\perp^{(v)}$ è la reazione vincolare della guida. La condizione di equilibrio nelle due direzioni ortogonale tangenziale si scrive

$$-mg \cos \theta + F_\perp^{(v)} = 0, \quad -mg \sin \theta + F_t^{(v)} = 0$$

da cui $F_\perp^{(v)} = mg \cos \theta$ e $F_t^{(v)} = mg \sin \theta$. D'altra $|F_t^{(v)}| \leq \mu_s |F_\perp^{(v)}| = mg \mu_s \cos \theta$, per cui la seconda equazione può essere soddisfatta solo se

$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s.$$

Se questa diseguaglianza non è soddisfatta, il punto non può essere in equilibrio.

Concludiamo con una breve osservazione riguardante il caso in cui il vincolo sia nella forma

$$\varphi(\mathbf{x}) \leq 0,$$

di modo che questo delimiti una regione di spazio, piuttosto che una superficie. Il vincolo, in questo caso, si “attiva” solo quando il punto materiale P è in una posizione tale da soddisfare l’uguaglianza: in tal caso compariranno reazioni vincolari del tipo discusso sopra. Diversamente, il punto non viene influenzato dal vincolo. Come riflessione aggiuntiva, notiamo che, se il punto materiale interagisce in modo *istantaneo* (urto) con la frontiera della regione ammessa, tale urto può essere assunto come ideale (ovvero, indurre una semplice inversione della componente della velocità ortogonale alla frontiera della regione ammessa) o dissipativo. Nel caso ideale, l’energia cinetica del punto materiale viene conservata. Il caso di urto ideale può essere formalmente descritto introducendo un potenziale improprio $V(\mathbf{x})$ pari a 0 per $\varphi(\mathbf{x}) < 0$ e a $+\infty$ per $\varphi(\mathbf{x}) \geq 0$, effettivamente proibendo l’accesso alla regione vietata.

4. Moto unidimensionale

Sia dato un punto materiale (P, m) vincolato a muoversi su una curva fissa e liscia, che indichiamo con γ di cui supponiamo di conoscere la parametrizzazione naturale. Di conseguenza, la posizione del punto materiale durante il moto è $\mathbf{x} = \gamma \circ s$, dove $s(t)$ fornisce l’ascissa curvilinea al tempo t , che in questo contesto prende il nome di *legge oraria*. È utile ora scomporre l’equazione $m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)}$ nella base fornita dalla terna di Frenet della curva per sfruttare la natura intrinsecamente unidimensionale del moto. Sappiamo infatti che

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\hat{\mathbf{t}}_\gamma + \dot{s}^2\kappa\hat{\mathbf{n}}_\gamma$$

per cui nel punto di ascissa curvilinea s devono valere tre equazioni

$$(1.11) \quad m\ddot{s} = \langle \mathbf{F}^{(a)}(s, \dot{s}, t), \hat{\mathbf{t}}_\gamma(s) \rangle,$$

$$(1.12) \quad m\kappa(s)\dot{s}^2 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(s, \dot{s}, t) + \mathbf{F}^{(v)}(s, t), \hat{\mathbf{n}}_\gamma(s) \rangle,$$

$$(1.13) \quad 0 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(s, \dot{s}, t) + \mathbf{F}^{(v)}(s, t), \hat{\mathbf{b}}_\gamma(s) \rangle.$$

L’obiettivo è ottenere la legge oraria $s(t)$ disponendo di opportune condizioni iniziali, per esempio $s(0) = s_0$ e $\dot{s}(0) = v_0$. Il fatto che il vincolo sia liscio fa sì che la prima delle tre equazioni non dipenda dalla reazione vincolare. Chiamando

$$f(s, \dot{s}, t) := \langle \mathbf{F}^{(a)}(s, \dot{s}, t), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle$$

la prima equazione assume la forma più semplice

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}, t).$$

In due casi è possibile risolvere esplicitamente il problema.

TEOREMA 4.1. *Il problema $m\ddot{s} = f$ è integrabile per quadrature nel caso in cui f dipenda solo da s o solo da \dot{s} .*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \equiv f(s)$, il moto equivale a quello di un punto materiale soggetto ad una forza conservativa in una dimensione. È infatti possibile introdurre il potenziale

$$V(s) := - \int_{s_0}^s f(x) \, dx,$$

di modo che la quantità

$$E = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s)$$

risulti conservata durante il moto. Inoltre, il fatto che il contributo cinetico debba essere sempre positivo fa sì che il moto possa avvenire solo in regioni in cui

$$E - V(s) \geq 0.$$

Se $E - V(s) > 0$, l'espressione dell'energia meccanica implica

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(s)}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(x)}} dx,$$

che è la soluzione implicita del problema.

Se invece $f \equiv f(\dot{s})$,

$$m\ddot{s} = f(\dot{s}) \Rightarrow m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{du}{f(u)} = t,$$

che permette di ottenere una equazione per $v(t)$ la cui successiva integrazione permette, in linea di principio, di ottenere s . \square

Il caso in cui $f \equiv f(s)$ è di importanza speciale. La funzione

$$\Phi(s) := 2 \frac{E - V(s)}{m}$$

contiene tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse: il moto è ammesso solo nelle regioni in cui $\Phi(s) > 0$, mentre gli zeri della funzione, se esistono, separano rami in cui $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$ da rami in cui $\dot{s} = -\sqrt{\Phi(s)}$. Supponiamo per esempio di avere, nella notazione precedente, $v_0 > 0$ e $\Phi(s_0) > 0$: se $\Phi(s) > 0$ per ogni $s > s_0$, allora

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}$$

è una funzione strettamente monotona crescente e quindi invertibile. Viceversa, se esiste $\hat{s} > s_0$ tale che $\Phi(\hat{s}) = 0$ e $\Phi(s) > 0$ per $s \in [s_0, \hat{s})$, il tempo necessario per raggiungere tale punto a partire da s_0 è dato da

$$\hat{t} = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Questa quantità può essere finita o infinita dipendentemente dal fatto che \hat{s} sia uno zero semplice o multiplo di $\Phi(s)$, rispettivamente. Nel primo caso, \hat{s} verrà toccato in un tempo finito, mentre nel secondo caso il sistema raggiungerà \hat{s} solo asintoticamente: il moto sarà perciò limitato alla regione $s < \hat{s}$ durante l'evoluzione. In generale, gli zeri multipli di $\Phi(s)$ sono punti inaccessibili (e invalicabili) per il punto materiale, a meno che quest'ultimo non si trovi esattamente in uno di essi nel suo stato iniziale s_0 .

Se $\Phi(s_0) = 0$, sarà il valore di $\Phi'(s_0) = \frac{2}{m}f(s_0)$ a determinare il segno dell'accelerazione \ddot{s} nell'istante iniziale e quindi il verso del moto. Infine, se $\Phi(s_0) = \Phi'(s_0) = 0$, il punto è in equilibrio e $s(t) = s_0$ è soluzione del problema.

DEFINIZIONE 4.1. Gli zeri semplici di $\Phi(s)$ sono detti punti di inversione.

TEOREMA 4.2. *Il moto tra due punti di inversione consecutivi \hat{s}_- ed $\hat{s}_+ > \hat{s}_-$ è periodico di periodo*

$$\tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2 dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $s_0 \in (\hat{s}_-, \hat{s}_+)$ e $v_0 > 0$. Per ipotesi $\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(s - \hat{s}_+)\phi(s)$ con $\phi(s) > 0$ per $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$. Abbiamo che $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$, per cui $\dot{s} = 0$ per $s = \hat{s}_\pm$. D'altra parte, la forza in questi punti ha segno opposto:

$$f(\hat{s}_+) = \Phi'(\hat{s}_+) = -(\hat{s}_+ - \hat{s}_-) \phi(\hat{s}_+) < 0, \quad f(\hat{s}_-) = \Phi'(\hat{s}_-) = (\hat{s}_+ - \hat{s}_-) \phi(\hat{s}_-) > 0,$$

di modo che il moto si inverta in questi punti estremali. Partendo da s_0 con $v_0 > 0$ al tempo $t = 0$, il moto prosegue fino a \hat{s}_+ dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, subisce una accelerazione verso \hat{s}_- che lo fa ripassare da s_0 con velocità opposta in segno, fino ad arrivare in \hat{s}_- , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in s_0 con stessa velocità v_0 dopo un tempo τ : da qui in poi il moto si riproduce *identico* essendosi verificate nuovamente, al tempo τ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo $t = 0$. Il tempo del periodo quindi è

$$\tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} + \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}. \quad \square$$

4.1. Spazio delle fasi. Nella forma $m\ddot{s} = f(s, \dot{s}, t)$, l'equazione del moto equivale ad una coppia di equazioni del primo ordine in uno spazio bidimensionale; ovvero, rinominando x la variabile s ,

$$\dot{y} = \frac{1}{m} f(x, y, t), \quad \dot{x} = y.$$

DEFINIZIONE 4.2. Il piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ prende il nome di spazio delle fasi. Su di esso, è definito il campo vettoriale $\mathbf{f}: (x, y) \mapsto (y, \frac{1}{m} f(x, y, t))$ le cui curve integrali sono dette *curve di fase del sistema*. L'operatore

$$\mathbf{g}^t: (x_0, y_0) = (x(t), y(t)), \quad x(t - t_0) = x_0, \quad y(t - t_0) = y_0$$

lungo una curva di fase si dice flusso di fase del sistema.

In altre parole, \mathbf{g}^t associa alle condizioni iniziali (x_0, y_0) al tempo t_0 il risultato dell'integrazione del moto fino al tempo t . Se $f \equiv f(s)$, ovvero se il sistema è *autonomo*, le equazioni del moto implicano la conservazione dell'energia

$$E := \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s),$$

dove come sopra $V(s) := - \int_{s_0}^s f(x) dx$, pertanto le curve di fase sono isoenergetiche: fissato $E \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{M}(E) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) := \frac{1}{2} m y^2 + V(x) = E \right\}$$

contiene le curve di fase di energia E . $\mathcal{M}(E)$ è in generale costituito da diverse componenti connesse, la cui regolarità è garantita se $\nabla E = (V'(x), my) \neq \mathbf{0}$: punti in cui questa condizione è violata sono detti *critici*, o *di equilibrio* e vivono necessariamente sulla retta $y = 0$. Una definizione generale di punto di equilibrio è la seguente.

DEFINIZIONE 4.3. Un punto $(x_0, 0)$ si dice di equilibrio se la curva di fase passante per esso si riduce al punto stesso.

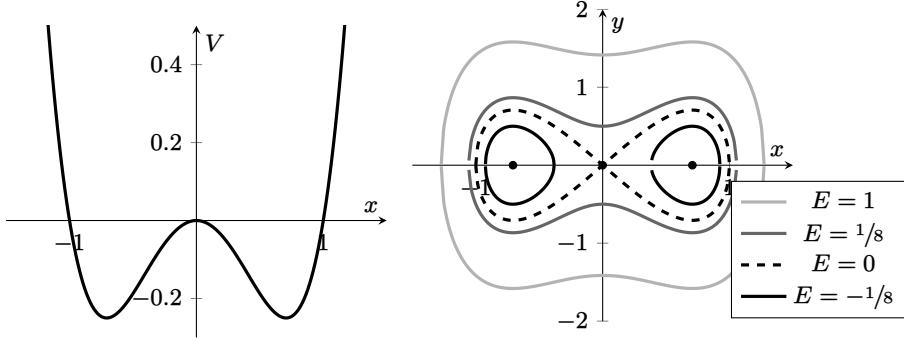


FIGURA 4. Potenziale nell’Esempio 1.10. Sono segnati i punti critici e le sepatratici in linea tratteggiata.

In questo contesto unidimensionale, poiché assumiamo V differenziabile, la condizione di punto di equilibrio equivale a richiedere che $V'(x_0) = 0$, ovvero che x_0 sia un punto critico del potenziale, in virtù del teorema di esistenza e unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali.

Esempio 1.10 — A titolo esemplificativo, consideriamo un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto al potenziale $V(x) = x^2(x-1)^2(x+1)^2$. In Fig. 4 è possibile osservare il diagramma di fase e alcune curve di fase per diversi valori dell’energia meccanica totale E . Questo potenziale

Per caratterizzare i punti critici, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.4. Un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0)$ si dice stabile secondo Lyapunov se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ per cui, denotato $\mathbf{z}_0 = (x(0), y(0))$ si ha che

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{g}^t \mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Il punto si dice asintoticamente stabile se esiste $\delta > 0$ tale per cui

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0.$$

Se $I_\delta(\mathbf{x}_0) := \{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| < \delta : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{x}_0\}$, allora $I_{\max}(\mathbf{x}_0) = \bigcup_\delta I_\delta(\mathbf{x}_0)$ è detto bacino di attrazione di \mathbf{x}_0 . Un punto non stabile si dice infine instabile.

In altre parole, un punto è stabile secondo Lyapunov se avviando il moto in prossimità di tale punto nello spazio delle fasi non ce ne si allontana mai. Nel caso del moto unidimensionale che stiamo analizzando questa definizione ci porta alla seguente

PROPOSIZIONE 4.3. *Se V ha un punto di minimo relativo isolato in x_0 , allora esso è un punto di equilibrio stabile secondo Lyapunov.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un qualunque intorno I di $\mathbf{x}_0 := (x_0, 0)$, sia

$$J_\delta(\mathbf{x}_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) < E(x_0, 0) + \delta\}.$$

Per δ sufficientemente piccolo, la componente connessa J_δ contenente \mathbf{x}_0 è in I : tale componente sarà invariante sotto \mathbf{g}^t per via della conservazione dell’energia. \square

Esempio 1.11 — Si noti che se un punto è di equilibrio stabile non è necessariamente un punto di minimo relativo dell’energia potenziale: questo si vede facilmente ammettendo che $V(s)$ sia non analitica. Supponiamo, per esempio, di avere un punto materiale di massa unitaria in moto nel potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

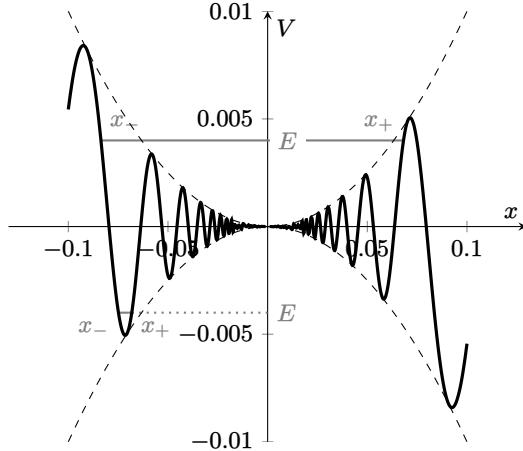


FIGURA 5. Potenziale nell'Esempio 1.11.

L'energia potenziale considerata ha tutte le derivate nulle in $x = 0$: tale punto non è di minimo relativo per $V(s)$, dato che per ogni $\delta > 0$ esiste un $x \neq 0$ tale che $V(x) < 0$. Tuttavia, $x = 0$ è di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Supponiamo infatti che il sistema abbia energia $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) > 0$. Possiamo individuare due $x_{\pm}(E)$ tali per cui il moto avvenga sempre nell'intervallo $[x_{-}(E), x_{+}(E)]$ (vedasi figura) con $|x_{\pm}(E)| \rightarrow 0$ per $E \rightarrow 0^+$. Inoltre, in tale intervallo, $V(x) > -E$ e quindi $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) > \frac{1}{2}y^2 - E \Rightarrow |y| < \sqrt{2E}$. La dimensione dell'intorno dello spazio delle fasi $[x_{-}(E), x_{+}(E)] \times [-\sqrt{2E}, \sqrt{2E}]$ in cui il moto è confinato può essere reso piccolo a piacere, mostrando che $s = 0$ è di equilibrio per $E > 0$. Un ragionamento analogo può essere fatto per $E < 0$, dove un intervallo arbitrariamente vicino all'origine può essere scelto di modo che il suo corrispondente intervallo nello spazio delle fasi sia arbitrariamente piccolo per $E \rightarrow 0^-$.

DEFINIZIONE 4.5. Un insieme $\mathcal{M}(e)$ contenente un punto critico instabile si dice curva separatrice.

Una separatrice è per costruzione data dall'unione dei punti di equilibrio instabili e da curve connesse che esprimono traiettorie di moto che tendono asintoticamente ai detti punti di equilibrio instabile, senza mai raggiungerli. Vedremo ora un esempio particolarmente importante che esemplificherà i concetti discussi.

4.2. Pendolo. Il *pendolo semplice* è un dispositivo meccanico che consiste di un punto materiale vincolato, tramite vincolo olonomo liscio, a muoversi su una circonferenza di raggio ℓ in un piano verticale. Il moto è soggetto alla forza di gravità di modo che, indicando con $\theta \in [0, 2\pi]$ la deviazione dalla verticale del dispositivo, l'equazione del moto ha la forma

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \cos \theta = 0.$$

dove $g > 0$ è l'accelerazione di gravità. Si tratta di un sistema autonomo che sviluppa il suo moto in una dimensione, e la sua energia meccanica è

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

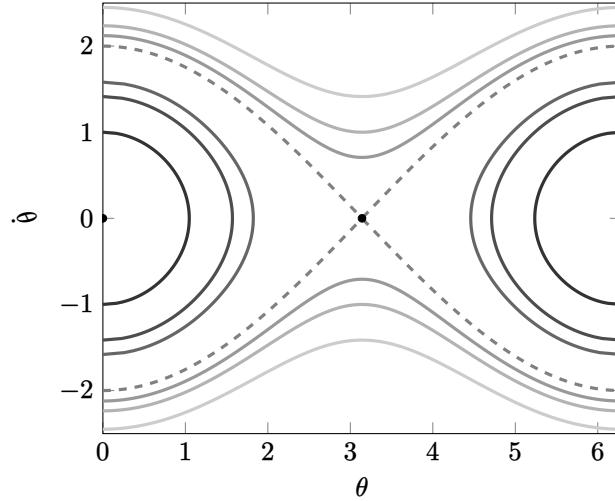


FIGURA 6. Spazio delle fasi del pendolo con $\tau = 1$. Sono visualizzate le traiettorie per diversi valori di e , inclusa la separatrice ($e = 1$, linea tratteggiata) e i due punti critici.

a meno di una costante additiva arbitraria. Indicando con $e := \frac{E}{mg\ell}$ e $\tau^2 := \frac{\ell}{g}$, questa relazione si riscrive

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + e) \equiv \Phi(\theta),$$

che richiede $e > -1$. Al variare di e possono distinguersi diversi tipi di moto. Se $e > 1$, allora $\Phi(\theta)$ non ammette zeri e il moto consiste di *rotazioni* lungo l'intera circonferenza ammessa. È utile visualizzare queste traiettorie nello spazio delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$, che in questo caso è $S_1 \times \mathbb{R}$, ovvero un cilindro infinito. Nel caso $e > 1$ le traiettorie si avvolgono infatti attorno al cilindro. Se invece $|e| < 1$, $\Phi(e)$ ammette degli zeri: in questo caso il moto è periodico e il moto consiste di *oscillazioni*. Le traiettorie non si avvolgono attorno al cilindro e possono essere deformate con continuità in un punto (a differenza del caso $e > 1$), ovvero l'unica soluzione di equilibrio *stabile* $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$. Il caso $e = 1$ è marginale: l'equazione

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + 1)$$

identifica la *separatrice* nello spazio delle fasi che delimitano i due diversi regimi: essa passa infatti per l'unica soluzione di equilibrio *instabile*, $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$. Il caso $e = -1$ invece ammette come uniche possibili soluzioni le soluzioni di equilibrio stabile e instabile.

Il moto del pendolo può essere integrato esattamente ricorrendo ad alcune funzioni speciali. Qui ci limiteremo all'integrazione delle equazioni del moto lungo la separatrice, ovvero al caso $e = 1$. Dal fatto che $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ si può scrivere

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\tau^2} \Leftrightarrow \frac{\dot{u}}{1 - u^2} = \frac{1 - u^2}{\tau^2},$$

dove abbiamo introdotto $u = \sin \frac{\theta}{2}$, che si integra direttamente tenendo conto che $u \in [-1, 1]$. Assumendo che $u(t_0) = 0$, avremo

$$\frac{t - t_0}{\tau} = \int_0^u \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{atanh} u \Rightarrow u(t) = \tanh \left(\frac{t - t_0}{\tau} \right),$$

dove t_0 dovrà essere fissato in base alle condizioni iniziali.

4.3. Piccole oscillazioni. Lo studio di un sistema unidimensionale autonomo in prossimità di un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0)$ di equilibrio nel corrispondente spazio delle fasi può essere effettuato in una certa generalità in approssimazione di *piccole oscillazioni*. Assumiamo che il potenziale a cui il sistema è soggetto sia analitico. Introduciamo la variabile $\xi := x - x_0$, di modo che il sistema di equazioni da studiare possa scriversi

$$\dot{\xi} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m} V'(x_0 + \xi).$$

Essendo x_0 di equilibrio, la seconda equazione si può riscrivere espandendo in serie di potenze

$$\dot{y} = -\frac{1}{2m} V''(x_0) \xi^2 + o(\xi^2)$$

Trascurando gli ordini superiori al primo, e ridefinendo $\omega^2 := \frac{1}{m} |V''(x_0)|$, l'equazione assume la formula molto semplice

$$\ddot{\xi} - \text{sign}(V''(x_0)) \omega^2 \xi = 0,$$

che descrive un *oscillatore armonico* se il punto è di equilibrio *stabile*, ovvero $\text{sign}(V''(x_0)) > 0$. Essa ha soluzioni

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi(0) \cos(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sin(\omega t) & \text{se } V''(x_0) > 0 \\ \xi(0) \cosh(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sinh(\omega t) & \text{se } V''(x_0) < 0. \end{cases}$$

di modo che le traiettorie corrispondenti nello spazio delle fasi sono ellissi o iperboli a seconda che il punto sia di equilibrio stabile o instabile rispettivamente. È importante osservare che la soluzione è stata derivata nell'ipotesi di *piccole deviazioni* dalla posizione di equilibrio, ed è quindi non valida quando ξ assume valori troppo grandi.

Esempio 1.12 (Moto armonico smorzato e forzato) — In molte applicazioni occorre considerare, nello studio di un moto armonico attorno ad un punto di equilibrio stabile, la presenza di una forza aggiuntiva che agisce sul punto materiale P tentando di frenarne il moto: tale forza esprime la *resistenza del mezzo* ed è tipicamente nella forma $\mathbf{F}_v = -\sigma \mathbf{v}_P$, con $\sigma > 0$, di modo che la forza frenante è tanto più intensa quanto più grande è la velocità del corpo. In aggiunta alla forza di richiamo e alla forza dissipativa, è possibile anche includere la presenza di una certa forza esterna *forzante* $\mathbf{F}(t)$ nella direzione del moto. Assumeremo in particolare che, detta $\hat{\mathbf{t}}$ il versore tangente alla traiettoria di P , $\mathbf{F}(t) = F \cos(\omega_* t + \phi_0) \hat{\mathbf{t}}$.

Dati i nuovi contributi, l'equazione per ξ viene ad essere modificata ed assume la forma

$$(1.14) \quad \ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{F(t)}{m},$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\mathbf{v}_P = s\hat{\mathbf{t}} = \dot{\xi}\hat{\mathbf{t}}$, e si è ridefinito $\beta := \frac{\sigma}{2m}$. Data la natura periodica della forzante, possiamo convertire il problema in una equazione differenziale per la funzione complessa z , che soddisfa l'equazione

$$\ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \omega^2 z = \frac{F}{m} e^{i(\omega_* t + \phi)}$$

di cui prenderemo la parte reale come soluzione. La procedura da applicare è standard: si cerca anzitutto una soluzione generica dell'equazione omogenea, nella forma $\xi(t) = e^{\lambda t}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale e ottenendo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \hat{\omega}, \quad \text{dove } \hat{\omega} := \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Si ha così che la soluzione dell'equazione omogenea ha la forma

$$z_0(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \hat{\omega} = 0. \end{cases}$$

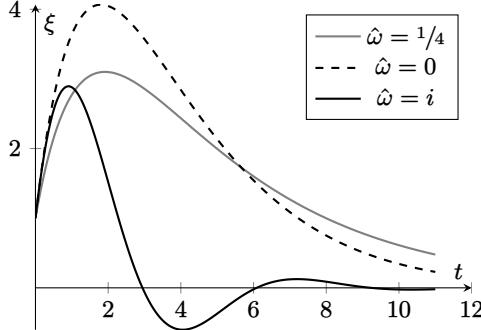


FIGURA 7. Evoluzione di ξ in un generico moto armonico smorzato con stesse condizioni iniziali ma diversi parametri β e $\hat{\omega}$.

Dobbiamo ora cercare una soluzione particolare z_p al problema. Un ansatz possibile è $z_p(t) = b e^{i\omega_* t}$. Inserendo questo ansatz nell'equazione si trova che in effetti essa è soddisfatta scegliendo

$$b = \frac{F}{m} \frac{e^{i\phi_0}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2}.$$

La nostra soluzione generale è quindi

$$z(t) = \frac{F}{m} \frac{e^{i(\omega_* t + \phi_0)}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2} + \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \hat{\omega} = 0, \end{cases}$$

Per semplificare i nostri calcoli e la nostra analisi, consideriamo anzitutto il caso $F = 0$, ovvero rimuoviamo la forzante e assumiamo ci sia solo dissipazione. Analizziamo i diversi casi separatamente.

$\text{Im}(\hat{\omega}) = 0$: Supponiamo $\hat{\omega} > 0$ reale. In questo caso, essendo $\hat{\omega} < \beta$, il moto è tale che $\xi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ monotonicamente, ovvero la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile. Imponendo le condizioni iniziali $\xi(0) = \xi_0$ e $\dot{\xi}(0) = v_0$, si trova che

$$\alpha_+ + \alpha_- = \xi_0, \quad \alpha_+(\hat{\omega} - \beta) - \alpha_-(\hat{\omega} + \beta) = v_0 \Rightarrow \xi(t) = e^{-\beta t} \left(s_0 \cosh \hat{\omega} t + \frac{v_0 + \beta s_0}{\hat{\omega}} \sinh \hat{\omega} t \right).$$

Se $\xi_0 \neq 0$, gli istanti in cui il sistema passa per la posizione di equilibrio ($\xi(t) = 0$) soddisfano l'equazione

$$\tanh(\hat{\omega} t) = -\frac{\hat{\omega} \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0},$$

che ha una *unica* soluzione se e solo se $\left| \frac{\hat{\omega} \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \right| < 1$: se ciò non avviene, il sistema non passa mai dal punto di equilibrio. Se $\hat{\omega} = 0$, il moto è detto *criticamente smorzato* e la soluzione generale del problema, una volta imposte le condizioni iniziali, ha la forma

$$s(t) = e^{-\beta t} (s_0 + (v_0 + \beta s_0)t).$$

Se $\xi_0 \neq 0$ il sistema passa per il punto di equilibrio una sola volta se $v_0 < -\beta s_0$, diversamente ciò non avviene mai.

$\text{Im}(\hat{\omega}) \neq 0$: Se $\hat{\omega} = i\hat{\omega}_0$ è immaginario puro, $\xi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, ma eseguendo un certo numero di oscillazioni. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\xi(t) = e^{-\beta t} \left(s_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + \frac{v_0 + \beta s_0}{\hat{\omega}_0} \sin(\hat{\omega}_0 t) \right).$$

Un sistema con $\xi_0 \neq 0$ passa dalla posizione di equilibrio negli infiniti istanti di tempo che soddisfano l'equazione

$$\tan(\hat{\omega}_0 t) = -\frac{\hat{\omega}_0 s_0}{v_0 + \beta s_0}.$$

L'analisi si può ripetere in maniera simile nel caso in cui sia presente una forzante per quanto riguarda il trattamento della soluzione omogenea al variare del campo in cui vive $\hat{\omega}$: ne consegue che il contributo omogeneo alla soluzione è sempre *smorzato* e diventa trascurabile rispetto al contributo forzante per $t \gg 0$ quando quest'ultimo è presente:

$$\xi(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_*^2)^2 + 4\beta^2\omega_*^2}} \cos\left(\omega_* t + \phi_0 + \arctan \frac{2\beta\omega_*}{\omega_*^2 - \omega^2}\right) + \text{termini di ordine superiore.}$$

Il termine forzante, dominante per $t \gg 0$, è indipendente dalle precise condizioni iniziali ma mantiene una dipendenza dalla frequenza propria ω del sistema. In particolare, l'ampiezza del termine forzante è massima quando

$$\omega_* = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \quad \text{se } \omega^2 > 2\beta^2.$$

Questo valore è detto *frequenza di risonanza*.

Esempio 1.13 (Battimenti) — Il fenomeno dei *battimenti* si verifica quando il moto emerge da una sovrapposizione di due moti oscillatori con frequenze molto vicine, nella forma

$$\xi(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Se $a = a_1 = a_2$, possiamo applicare l'identità $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

$$\xi(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

e osservare che, se $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$, il primo termine produce una oscillazione di frequenza simile a quella delle due componenti originarie, mentre il secondo fattore manifesta una frequenza molto più bassa, e apparirà come un termine che "modula" il primo contributo su scale temporali più lunghe.

5. Moto in un campo centrale

Il secondo caso di equazione del moto prototipica che considereremo è quella in cui un punto materiale (P, m) in posizione \mathbf{x} e soggetto ad una *forza centrale*, di modo che l'equazione del moto sia

$$m\mathbf{a} = f(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Qui $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione regolare. In tal caso la forza è sempre diretta lungo la congiungente con un *centro* di un campo di forze che qui si assume essere l'origine O . Una forza centrale è *sempre* conservativa, dato che può essere scritta come il gradiente del potenziale

$$V(\mathbf{x}) := - \int_0^{\|\mathbf{x}\|} f(r) \, dr.$$

Un'altra caratteristica cruciale dei moti in un campo centrale (che ne permette l'integrazione) è che, essendo il momento della forza rispetto all'origine nullo, il momento angolare del punto materiale si conserva, $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$.

Se $\mathbf{L}_O = \mathbf{0}$ ciò significa che posizione iniziale \mathbf{x}_0 e velocità iniziale \mathbf{v}_0 sono vettori paralleli e si manterranno paralleli durante tutto il moto, che pertanto, avrà una evoluzione nella forma $\mathbf{x}(t) = s(t) \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|}$, ovvero sarà un moto unidimensionale con equazione $m\ddot{s} = f(s)$. Assumeremo in seguito che $\mathbf{L}_O \neq \mathbf{0}$ per studiare quindi il caso più interessante.

Supponiamo quindi $\mathbf{L}_O \neq \mathbf{0}$. Essendo il momento angolare costante, esso identifica un piano ad esso normale passante per la posizione iniziale della traiettoria, detto *piano dell'orbita*: il moto si manterrà sempre in questo piano. Assumeremo che il riferimento ortonormale $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$

sia tale che $\mathbf{L}_0 = L_z \hat{\mathbf{i}}_3$, per cui potremo parametrizzare il moto in coordinate cilindriche per mezzo di due funzioni $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$(1.15) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ x_{0,3} \end{pmatrix}.$$

Ignoreremo da questo punto in poi la terza componente, che rimane fissa. Scrivendo esplicitamente in questa parametrizzazione L_z si ottiene

$$L_z = m(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) = mr^2 \dot{\theta}.$$

La quantità

$$\frac{L_z t}{2m} = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} r^2 d\vartheta$$

è l'area spazzata dal raggio vettore \mathbf{x} nell'intervallo temporale $[0, t]$, sicché la conservazione di \mathbf{L} corrisponde alla *seconda legge di Keplero*, secondo cui il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali. La quantità

$$v := \frac{L_z}{2m}$$

è detta anche *velocità areolare*. Una volta passati alle coordinate polari, la legge del moto produce una coppia di equazioni, ovvero

$$2mr\dot{\theta} + mr\ddot{\theta} \equiv \frac{1}{r} \dot{L}_z = 0, \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \equiv m\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} = f(r),$$

dove la prima equazione fornisce nuovamente la conservazione di L_z . La seconda, invece, sempre in virtù di tale conservazione, è una equazione nella sola variabile radiale una volta fissato L_z , e fornisce

$$(1.16) \quad m\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}, \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r),$$

che descrive il moto unidimensionale di un punto materiale soggetto al potenziale efficace V_{eff} . L'integrazione può quindi essere eseguita esattamente come fatto nel caso unidimensionale. Assumendo che in $t = 0$ si abbia $r = r_0$ e $\theta = \theta_0$,

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

Una volta integrata l'equazione per r , la legge per θ si può trovare dal fatto che

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{L_z}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

Quella ottenuta è detta *prima forma dell'equazione delle orbite* e fornisce, in forma implicita, la relazione tra θ ed r . Essa dipende da un segno fissato dalle condizioni iniziali del problema. La sua integrazione ci permette di ottenere

$$\theta(r) = \theta_0 \pm \frac{L_z}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{(E - V_{\text{eff}}(\rho))}}.$$

Una forma diversa, ma utile, in cui mettere l'equazione delle orbite è ottenuta introducendo la variabile

$$u = \frac{L_z}{\sqrt{mr}}.$$

Eseguendo questo cambio di variabili nell'Eq. (1.16), si ottiene la *seconda forma dell'equazione delle orbite*,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{dW(u)}{du}, \quad W(u) := V_{\text{eff}}\left(\frac{L_z}{\sqrt{mu}}\right) = \frac{u^2}{2} + V\left(\frac{L_z}{\sqrt{mu}}\right).$$

Infine, l'espressione per l'energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + W(u),$$

riflette ancora una volta la natura intrinsecamente unidimensionale del problema.

5.1. Orbite chiuse. Ha senso chiedersi se il moto descritto può produrre orbite chiuse, ovvero se data una certa condizione iniziale il punto materiale ritorna esattamente nello stesso configurazione. Un primo *ansatz* per studiare questa domanda è richiedere che le orbite siano circolari, ovvero cercare soluzioni nella forma

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 + \omega t, \quad \omega := \frac{L_z}{mr_0^2}.$$

Si noti che la conservazione del momento angolare impone una legge lineare per θ . Il valore r_0 deve necessariamente essere critico rispetto al potenziale efficace, per quanto detto nel caso del moto unidimensionale, ovvero questa soluzione può esistere se e solo se $V'(r_0) = 0$. A tale soluzione corrisponderà l'energia meccanica

$$E = V_{\text{eff}}(r_0) = V(r_0) + \frac{L_z^2}{2mr_0^2}.$$

Ammesso quindi che tale soluzione esista, essa può essere o meno stabile. La definizione di stabilità di un'orbita circolare è dovuta a Lagrange.

DEFINIZIONE 5.1 (Stabilità secondo Lagrange). Si supponga L_z fissato. Un'orbita circolare di raggio r_0 è stabile se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale per cui, dato una coppia $(r(0), \dot{r}(0))$ di condizioni iniziali con $|r(0) - r_0| < \delta$ e $|\dot{r}(0)| < \delta$, l'evoluzione che ne segue soddisfa $|r(t) - r_0| \leq \epsilon$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

La definizione corrisponde a quella di Lyapunov se pensata limitata al moto nella direzione radiale ma, come si vede, ignora volutamente la variabile angolare (ed è per questo più debole). Quanto detto sul moto unidimensionale si traduce quindi nell'analisi della stabilità secondo Lagrange. In particolare

PROPOSIZIONE 5.1. *Un'orbita circolare di raggio r_0 è stabile secondo Lagrange se il potenziale efficace V_{eff} ha un minimo relativo isolato in r_0 .*

Se studiare la presenza e stabilità di orbite circolari è piuttosto semplice, valutare se il potenziale ammette orbite non circolari chiuse è più complicato. Si può partire dall'osservazione che un'orbita ad energia e sarà in una regione $\mathcal{M}(e) = \{(r, \theta) : V_{\text{eff}}(r) \leq e\}$. Questo insieme ha come frontiera una o più circonferenze: ciascuna regione ammessa ha un raggio minimo, o pericentro r_p , e un raggio massimo, o apocentro r_a , ammissibile. L'angolo ϑ descritto dal vettore posizione nel muoversi tra pericentro e apocentro è

$$\vartheta = \frac{L_z}{\sqrt{m}} \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perché l'orbita sia chiusa è che

$$\frac{\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

La domanda è quindi per quali forme di V una condizione siffatta si realizza *sempre* quando si ha a che fare con orbite limitate. Possiamo cominciare chiedendoci che proprietà delle orbite che si mantengono vicine ad un'orbita circolare stabile. Per far questo, utilizziamo la seconda forma dell'equazione delle orbite. Essa ha la forma di una equazione per la dinamica di un punto materiale nella variabile "temporale" θ di modo che il "semiperiodo" di questo moto, ovvero in questo caso l'angolo tra un punto estremale e l'altro del moto (pericentro ed apocentro) è

$$\vartheta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{2(E - W(u))}},$$

dove u_a e $u_p > u_a$ sono due zeri del potenziale $W(u)$ corrispondenti ad apocentro e pericentro della regione ammessa di moto considerata.

Supponiamo ora di occuparci di orbite vicine ad un'orbita circolare *stabile* di raggio r_c , ovvero tale che $V'_{\text{eff}}(r_c) = W'(u_c) = 0$ e $V''_{\text{eff}}(r_c) > 0$ per un certo $r_c = \frac{L_z}{\sqrt{mu_c}}$. La seconda forma dell'equazione delle orbite può essere studiata nel limite di piccole oscillazioni attorno a u_c , sostituendo $x = u - r_c$ e quindi

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\omega_c^2 u + o(u), \quad \omega_c^2 := W''(u_c) > 0.$$

Si tratta dell'equazione di un oscillatore armonico, il cui semiperiodo è

$$\vartheta = \frac{\pi}{\omega_c} = \pi \sqrt{\frac{V'(r_c)}{r_c V''(r_c) + 3V'(r_c)}}.$$

Questa quantità dipende da r_c in maniera continua, in generale. Vi sono però due casi in cui essa *non* dipende dal valore di r_c ma solo dalla forma del potenziale V . Questi casi possono essere trovati per ispezione diretta, imponendo che esista una costante $c > 0$ tale che

$$\frac{V'(r_c)}{r_c V''(r_c) + 3V'(r_c)} \equiv c \Rightarrow V''(r_c) = \frac{1-3c}{cr_c} V'(r_c).$$

Questa equazione ammette come soluzione³ $V'(r) = ar^{\frac{1-3c}{c}}$ se $c \neq 1/3$, ed è compatibile con due forme per V , ovvero

$$V(r) = ar^b \quad b > -2 \wedge b \neq 0, \quad V(r) = a \ln r.$$

Sostituendo nell'espressione trovata per ϑ si trova quindi che, associando formalmente $b = 0$ al potenziale $V(r) = a \ln r$, possiamo scrivere

$$(1.17) \quad \vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2+b}} \quad b > -2.$$

LEMMA 5.2. *Sia $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = +\infty$ e $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) = 0$. Allora $\lim_{E \rightarrow +\infty} \vartheta = \frac{\pi}{2}$ se il limite è preso a L_z fissato.*

DIMOSTRAZIONE. Il semiperiodo è dato da

$$\vartheta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{dx}{\sqrt{2(E - W(u))}} = \int_{u_a}^{u_p} \frac{dx}{\sqrt{2(W(u_p) - W(u))}}.$$

³Il caso $c = 1/3$ è escluso perché implicherebbe $V''(r_c) = 0$.

Eseguiamo ora il cambio di variabili $u = yu_p$, di modo che

$$(1.18) \quad \vartheta = \int_{y_a}^1 \frac{dy}{\sqrt{2(\hat{W}(1) - \hat{W}(y))}}, \quad \hat{W}(y) := \frac{W(u_p y)}{u_p^2} = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{u_p^2} V\left(\frac{L_z}{\sqrt{m u_p y}}\right).$$

Nel limite $E \rightarrow +\infty$, $u_p \rightarrow +\infty$ e $y_a \rightarrow 0$, e l'integrale prende il valore limite

$$\vartheta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Questo risultato è utile alla dimostrazione del seguente

TEOREMA 5.3 (Bertrand). *In un campo centrale di potenziale analitico $V(r)$, tutte le orbite limitate sono chiuse se e solo se*

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad o \quad V(r) = kr^2$$

per una qualche costante positiva k .

DIMOSTRAZIONE. Se tutte le orbite limitate sono chiuse, allora $\frac{\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, come abbiamo detto. Per quanto abbiamo mostrato sopra, le orbite che si tengono vicine a quella circolare di raggio r_c hanno in generale $\vartheta = \vartheta(r_c)$: potendo alterare il valore di r_c con continuità in ogni potenziale (l'equazione che specifica r_c dipende, per esempio, da L_z che può essere arbitrario) perché le orbite siano tali da rimanere chiuse questa dipendenza deve essere assente. Ciò significa che le uniche forme funzionali ammesse sono $V(r) = ar^b$, con $b > -2$ e $b \neq 0$, o $V(r) = a \ln b$. D'altra parte, nel secondo caso $\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ e dunque le orbite non possono essere chiuse. Studiamo quindi $V(r) = ar^b$, Questo significa che, nella notazione sopra e a meno di costanti additive irrilevanti

$$W(u) = \frac{u^2}{2} + au^{-b}, \quad b > -2, \quad b \neq 0.$$

Distinguiamo tra $b > 0$ e $b < 0$. Se $b > 0$, assumiamo $a = k > 0$ (perché il potenziale sia confinante): siamo così entro le ipotesi del Lemma 5.2 e pertanto, dovendo essere per $E \rightarrow +\infty$ $\vartheta = \pi/2$ (valore che genera orbite chiuse), l'unico valore ammesso è $b = 2$. Si noti che in questo caso tutte le orbite sono limitate e chiuse. Se invece $b < 0$, occorre assumere $a = -k < 0$ per ottenere un potenziale confinante. Possiamo quindi calcolare di nuovo, a L_z fisso, il limite $E \rightarrow 0^-$ del semiperiodo. In questo limite $u_a = 0$, mentre $u_p = (2k)^{\frac{1}{2+b}} \left(\frac{L_z}{\sqrt{m}} \right)^{\frac{1}{2+b}}$. La funzione \hat{W} introdotta in Eq. (1.18) si scrive

$$\hat{W}(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^b}.$$

Procedendo ora come in Eq. (1.18),

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \vartheta = \lim_{E \rightarrow 0^-} \int_{u_a}^{u_p} \frac{dy}{\sqrt{2(E - W(u))}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-b} + y^2}} = \frac{\pi}{2+b}.$$

Questo risultato è compatibile con l'Eq. (1.17) se e solo se $b = -1$: per tale valore $\vartheta = \pi$, che risulta accettabile. \square

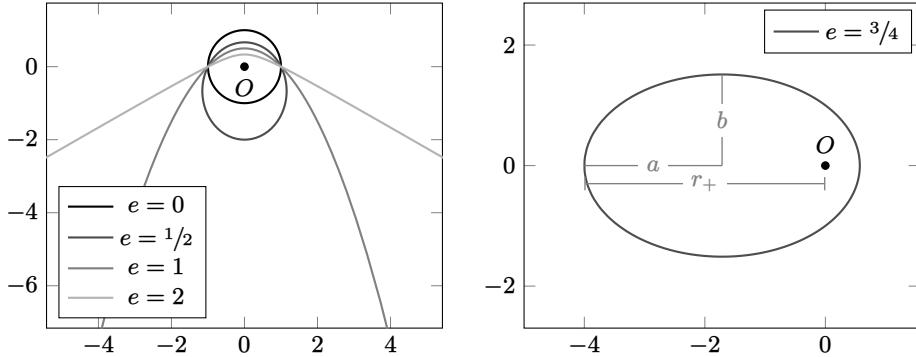


FIGURA 8. Orbite del problema di Keplero per $p = 1$ e diversi valori dell'eccentricità e .

Esempio 1.14 (Problema di Keplero) — Il caso $V(r) = -\frac{k}{r}$ con $k > 0$ corrisponde al cosiddetto problema di Keplero. Alla luce di quanto discusso, la seconda forma dell'equazione delle orbite diventa in questo caso

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{km}{L_z^2}$$

la cui soluzione si può ottenere componendo una soluzione particolare dell'equazione con la soluzione del caso omogeneo. Una soluzione generica del problema omogeneo si può scrivere come $u = a \cos(\theta - \theta_0)$, dove a e θ_0 saranno parametri da fissare per mezzo delle condizioni iniziali. Una soluzione particolare è invece l'orbita circolare $u = 1/r_c$, dove r_c è il raggio dell'unica orbita circolare ammessa, ovvero

$$r_c = \frac{L_z^2}{mk},$$

avente energia meccanica

$$E_c = -\frac{k^2 m}{2L_z^2}.$$

Se ridefiniamo $a = e/r_c$, la soluzione generale è quindi

$$u(\theta) = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{r_c}.$$

La corrispondente relazione

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

è detta *prima legge di Keplero*. Essa parametrizza una conica di eccentricità e e parametro $p \equiv r_c$: se $e = 0$, essa descrive una orbita circolare; se $e \in (0, 1)$ essa descrive una ellisse; se $e = 1$ essa corrisponde ad una parabola; se $e > 1$ corrisponde ad una iperbole. Nel caso ellittico, è noto dalla geometria elementare che la dimensione dei semiassi maggiore a e minore b sono

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Dalla formula stessa si osserva anche che la distanza massima dal centro del campo di forza è

$$r_+ = \frac{p}{1 - e}.$$

Queste osservazioni geometriche permettono di legare eccentricità ed energia meccanica, osservando che per $r = r_+$ l'energia è massima e solo dovuta al potenziale efficace, ovvero

$$E = V_{\text{eff}}(r_+) = -\frac{k(1 - e)}{p} - \frac{L_z^2 k (1 - e)^2}{2mp^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{E}{|E_c|}}.$$

La seconda legge di Keplero, infine, implica che, detto τ il periodo dell'orbita,

$$\pi ab = \frac{|L_z|}{2m} \tau.$$

Essendo ora $|L_z| = \sqrt{akm(1 - e^2)}$ e $b = a\sqrt{1 - e^2}$, questa stessa legge diventa

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{k}{4\pi^2 m},$$

che non è altro che la *terza legge di Keplero*.

6. Sistemi a molti punti materiali

Abbiamo finora considerato il problema di un singolo punto materiale in moto soggetto ad una dinamica unidimensionale o effettivamente unidimensionale. Più in generale, dato un sistema di $n \geq 2$ punti materiali $\mathcal{S} := \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$, possibilmente soggetto a dei vincoli, il problema della meccanica consiste nel risolverne le traiettorie per mezzo delle equazioni del moto, che assumono la forma

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove \mathbf{a}_i è l'accelerazione del punto materiale P_i , soggetto ad una forza totale \mathbf{F}_i . Due quantità "globali" saranno oggetto di interesse, ovvero la quantità di moto totale

$$\mathbf{Q} := \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

e il momento della quantità di moto totale

$$\mathbf{L}_A := \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_A) \wedge (m_i \mathbf{v}_i),$$

qui calcolato rispetto ad un polo A individuato dal vettore \mathbf{x}_A . Come osservato nel caso di un singolo punto materiale, esiste una relazione semplice tra \mathbf{L}_A , calcolato rispetto al polo A individuato dal vettore \mathbf{x}_A , e \mathbf{L}_B , calcolato rispetto al polo B individuato dal vettore \mathbf{x}_B , e quantità di moto, ovvero $\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{Q}$. Questa relazione è a volte detta *legge del cambiamento di polo*. Segue subito che se $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_B$, indipendentemente dal polo. Inoltre, se $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ e \mathbf{Q} sono paralleli, il momento angolare non cambia.

Avendo introdotto queste quantità cruciali, le loro derivate temporali sono infatti uguali rispettivamente a

$$(1.19) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i =: \mathbf{R},$$

$$(1.20) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \wedge (m_i \mathbf{v}_i)) = \sum_i \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} =: \boldsymbol{\tau}_O,$$

dove \mathbf{R} e $\boldsymbol{\tau}_O$ sono la risultante di tutte le forze e il momento risultante di tutte le forze rispetto ad O . È possibile anche scegliere come polo rispetto a cui calcolare il momento angolare un punto P del sistema, sia esso per esempio il punto di coordinate \mathbf{x}_P : in tal caso, si vede facilmente che la seconda equazione cardinale diventa

$$\dot{\mathbf{L}}_P = \boldsymbol{\tau}_P + \mathbf{v}_P \wedge \mathbf{Q}.$$

Queste equazioni possono essere semplificate osservando che ciascuna forza \mathbf{F}_i applicata ad un punto materiale P_i contiene contributi di natura diversa. Vi sarà, anzitutto, un contributo *interno* $\mathbf{F}_i^{(\text{in})}$, dovuto all'interazione di P_i con tutti gli altri elementi in \mathcal{S} , ed un contributo rimanente *esterno* $\mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$, dovuto all'interazione con sistemi non in \mathcal{S} , o ai vincoli. Indichiamo

con \mathbf{F}_{ij} la contributo alla forza interna applicata ad i dovuto alla presenza punto materiale j : possiamo ora derivare il seguente risultato.

TEOREMA 6.1. *La risultante e il momento delle forze interne di un sistema \mathcal{S} sono sempre nulli.*

DIMOSTRAZIONE. Per via del terzo principio della meccanica, le forze interne sono a due a due opposte, ovvero $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Ne segue che la risultante delle forze interne è nulla

$$\mathbf{R}^{(\text{in})} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Sempre usando il terzo principio, il momento totale delle forze interne è

$$\boldsymbol{\tau}_O^{(\text{in})} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_i \wedge \sum_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Si noti che la scelta del polo è irrilevante essendo $\mathbf{R}^{(\text{in})} = \mathbf{0}$. \square

Come conseguenza di quanto detto,

COROLLARIO 6.2 (Prima e seconda equazione cardinale). *Valgono le seguenti equazioni cardinali per un sistema di punti*

$$(1.21) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(\text{ext})},$$

$$(1.22) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}.$$

Come conseguenza, dato un versore $\hat{\mathbf{v}}$, se $\langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0$ allora $\langle \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{v}} \rangle$ si conserva. Similmente, se $\langle \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0$ allora $\langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{v}} \rangle$ si conserva.

Si noti che \mathbf{Q} si può immaginare come la quantità di moto di un punto materiale G di massa $m := \sum_i m_i$ in posizione data dal *centro di massa*

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{x}_i,$$

ovvero

$$m \ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}.$$

COROLLARIO 6.3. *In assenza di forze esterne, il centro di massa G di un sistema di n punti materiali di massa totale m ha accelerazione nulla.*

Il centro di massa può quindi sempre essere considerato come conveniente origine di un riferimento inerziale in cui svolgere una analisi.

La suddivisione tra contributo interno ed esterno può essere applicata anche a livello di potenza dovuta alle varie forze. Infatti, derivando l'energia cinetica

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{(\text{ext})} + \Pi^{(\text{int})}, \quad \Pi^{(\text{ext})} := \sum_i \langle \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}, \mathbf{v}_i \rangle, \quad \Pi^{(\text{in})} := \sum_i \langle \mathbf{F}_i^{(\text{in})}, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Se abbiamo a che fare con un sistema *isolato*, per quanto detto sopra disporremo di nove integrali primi del moto: sei legati a posizione e velocità del centro di massa, tre espressi dalla conservazione del momento angolare. Se inoltre le forze interne in gioco sono conservative, anche l'energia meccanica si conserva, per un totale di dieci integrali primi. In generale, tuttavia, questo numero di integrali primi non è sufficiente per determinare completamente la soluzione del problema dinamico.

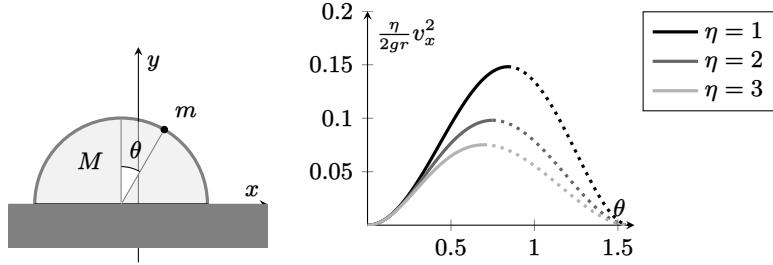


FIGURA 9. Punto materiale di massa m su emisfero di raggio r e massa M e funzione di v_x^2 in funzione dell'angolo con la verticale θ per diversi valori di $\eta = 1 + \frac{m}{M}$.

Esempio 1.15 (Distacco da emisfero) — Un punto materiale P di massa m giace in cima ad un emisfero di massa M e raggio r , a sua volta poggiato su un piano liscio. In un certo istante, il punto materiale subisce un impulso infinitesimo, in modo da acquisire una velocità iniziale $\mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{0}$ tangente all'emisfero. Supponendo il contatto tra punto materiale ed emisfero anch'esso liscio, calcoliamo l'angolo θ , misurato dalla sommità dell'emisfero, a cui il punto materiale si distacca.

Il moto avviene nel piano verticale passante per il centro dell'emisfero e in cui giace la velocità \mathbf{v}_0 iniziale del punto materiale. Utilizziamo un riferimento come in Fig. 9. Il sistema composto da emisfero e punto materiale è soggetto alla sola forza esterna applicata dal piano come reazione vincolare. Essendo quest'ultimo un vincolo ideale, essa è diretta verticalmente e pertanto nella direzione orizzontale non vi sono forze esterne applicate e la quantità di moto si conserva. Indicando con $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ la velocità del punto materiale e con $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ la velocità dell'emisfero nel riferimento in figura, dovremo perciò avere

$$mv_x + MV_x = 0.$$

Osserviamo ora che se la particella si trova in posizione \mathbf{x} ad un angolo θ dalla verticale sull'emisfero, detto \mathbf{c} la posizione del centro dell'emisfero, esso avrà

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + r \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{V} + r\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v_y}{V_x - v_x}.$$

Infine, nel sistema deve conservarsi l'energia, ovvero, indicando con g l'accelerazione di gravità,

$$mgr(1 - \cos \theta) = m \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{MV_x^2}{2} \Rightarrow v_x^2 = \frac{2gr(1 - \cos \theta)}{\eta(1 + \eta \tan^2 \theta)}, \quad \eta := 1 + \frac{m}{M}.$$

La quantità v_x^2 ha un andamento non monotono, e in particolare raggiunge un valore massimo per poi decrescere fino a raggiungere valore nullo in $\theta = \frac{\pi}{2}$: tuttavia, v_x^2 non può decrescere non essendo il punto materiale sottoposto ad alcuna forza decelerante nella direzione orizzontale. Il punto di massimo infatti, corrisponde ad un valore per cui $v_x \frac{dv_x}{d\theta} = v_x \dot{\theta}^{-1} \dot{v}_x = 0$, per cui se $v_x \dot{\theta}^{-1} = \frac{d\dot{x}}{d\theta} \neq 0$, è associato ad una forza applicata nulla nella direzione orizzontale, ovvero una reazione dell'emisfero assente in tale punto. Con un po' di algebra si arriva quindi alla condizione

$$(\eta - 1) \cos^3 \theta - 3\eta \cos \theta + 2\eta = 0.$$

Nel caso speciale $\eta = 1$, ovvero $M \rightarrow +\infty$, si trova

$$\cos \theta = \frac{2}{3}.$$

L'equazione può essere risolta anche per $\eta = 2$, dato che in questo caso diventa

$$\cos^3 \theta - 6 \cos \theta + 4 = 0 \Rightarrow (\cos \theta - 2)(\cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2) = 0 \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{3} - 1.$$

Per $\eta \rightarrow +\infty$, naturalmente, non c'è moto (in questo caso occorrerebbe un'energia infinita per mettere in movimento il punto materiale).

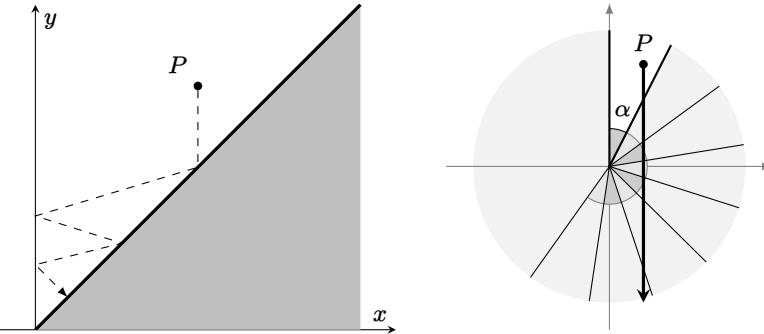
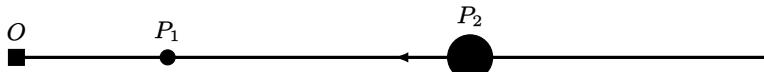


FIGURA 10. Problema di Galperin (a sinistra) e descrizione equivalente in termini di biliardo su settore del primo quadrante.

Esempio 1.16 (Un esempio di biliardo⁴) — Due punti materiali P_1 e P_2 , di massa rispettivamente $m_1 = 1$ e $m_2 = \eta$, con $\eta > 1$, sono vincolati a scorrere lungo una guida liscia. La guida consiste in una semiretta, di modo che si possa considerare parametrizzata da $\gamma(s) = (0, 0, s)^\top$ con $s \in \mathbb{R}^+$. Nell'origine della semiretta appare un fermo invalicabile. La configurazione di P_1 e P_2 è quindi univocamente determinata dalla loro ascissa curvilinea che indichiamo con x ed y , entrambe assunte sempre positive. Assumiamo come condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, con $0 \leq x_0 \leq y_0$ al tempo $t = 0$, il che implica $0 \leq x \leq y$ ad ogni t , dato che i punti non possono attaversarsi reciprocamente. Inoltre, a $t = 0$, assumiamo che P_1 sia fermo, $\dot{x}(0) = 0$, mentre P_2 ha velocità $\dot{y}(0) = -v_0$ con $v_0 > 0$, ovvero è diretto verso l'origine della semiretta, e quindi andrà a collidere con P_1 .



Ci si chiede ora *quanti urti* (tra i punti materiali o tra P_1 e il fermo in O) *avranno luogo durante l'evoluzione del sistema* assumendo che le collisioni siano *elastiche*, ovvero che si conservi sia la quantità di moto che l'energia cinetica ad ogni urto. Lo spazio delle configurazioni è un settore del primo quadrante nel piano (x, y) con angolo al centro $\frac{\pi}{4}$, come in Fig. 10: il sistema è individuato da un punto $P = (x, y)$ nella porzione di spazio compresa tra l'asse y e la retta $y = x$ per $x > 0$: se P tocca l'asse y , significa che P_1 urta O ; se P tocca la retta $y = x$, significa che P_1 urta P_2 . Questo punto *si muove di moto rettilineo uniforme* tra un urto e l'altro dato che non vi sono altre forze agenti lungo la traiettoria dei punti materiali: la velocità di P è (\dot{x}, \dot{y}) , ovvero ha come componenti le velocità di P_1 e P_2 . Un fatto molto interessante della dinamica di questo sistema è che gli urti sulla frontiera del suo dominio possono essere studiati come in un *biliardo*. Per essere più precisi, immediatamente dopo $t = 0$, P si muoverà verticalmente nello spazio delle configurazioni con velocità $\mathbf{v}_0 = (0, -v_0)$, fino ad urtare la retta $y = x$. A quel punto la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica impongono che subito dopo l'urto la velocità di P sia $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$ tale che

$$u_1 + \eta v_1 = -\eta v_0, \quad \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} \eta v_1^2 = \frac{1}{2} \eta v_0^2.$$

Dopo la collisione, P_1 continuerà a muoversi verso O (essendo $\eta > 1$) con velocità u_1 , in modulo minore di v_1 per ragioni di conservazione dell'energia. Ciò significa che P_1 raggiungerà O prima di essere raggiunta da P_2 e quindi il secondo urto sarà tra P_1 e l'origine: la velocità di P passerà da $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$ a $\mathbf{v}_2 = (u_2, v_2) = (-u_1, v_1)$. A questo punto P_1 tornerà indietro, urtando nuovamente P_2 in un terzo urto. Le equazioni che forniscono la velocità di P dopo il terzo urto, sia $\mathbf{v}_3 = (u_3, v_3)$, sono

$$u_3 + \eta v_3 = u_2 + \eta v_2 = -u_1 + \eta v_1, \quad \frac{1}{2} u_3^2 + \frac{1}{2} \eta v_3^2 = \frac{1}{2} \eta v_0^2$$

⁴G. Galperin, *Playing pool with π*, Regular and chaotic dynamics, 8(4), 375 (2003).

che occorrerà analizzare in termini di η , etc. Per fare progressi sul problema, è utile, come anticipato, mapparlo in un vero “biliardo”. L’“urto” di P sulla retta $y = x$ non produce, in generale, una riflessione “ottica”, ovvero tale per cui l’angolo di incidenza e di riflessione sono uguali. Si può però eseguire una speciale trasformazione lineare che rende questa riflessione del tipo desiderato. Introduciamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}$$

di modo che $\mathbf{x} = (x, y)^\top \mapsto \mathbf{X} = (X, Y)^\top = \mathbf{A}\mathbf{x} = (x, \sqrt{\eta}y)^\top$. Si tratta di un cambio di scala, che modifica l’angolo al centro del settore ammesso da $\frac{\pi}{4}$ ad un nuovo angolo α tale per cui

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\eta}}.$$

Se l’asse y viene mappato in se stesso da questa trasformazione, la retta $y = x$ viene mappata nella retta $Y = \sqrt{\eta}X$, che ha direzione

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\eta} \end{pmatrix}.$$

Vediamo come cambiano ora le condizioni di conservazione di quantità di moto ed energia cinetica utilizzando le nuove variabili. L’urto con l’asse Y non cambia natura, dato che $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{v} = (v_x, \sqrt{\eta}v_y)^\top \mapsto (-v_x, \sqrt{\eta}v_y)^\top$ (già in forma adeguata prima della trasformazione). La legge che regola gli urti tra P_1 e P_2 invece si riscrive in modo piuttosto elegante: se il k -esimo urto avviene tra P_1 e P_2 , la velocità dopo l’urto \mathbf{V}_k è legata alla velocità prima dell’urto \mathbf{V}_{k-1} come

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_k \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_{k-1} \rangle, \quad \|\mathbf{V}_k\|^2 = \|\mathbf{V}_{k-1}\|^2,$$

che equivale a dire che l’urto ruota il vettore velocità mantenendone costante il modulo e la proiezione nella direzione della frontiera \mathbf{t} : questo è esattamente quel che accade in un urto “ottico”, dove la velocità conserva il suo modulo e mantiene uguale la proiezione lungo la direzione tangente alla superficie di impatto. Nelle nuove coordinate, quindi, P si muove nella regione ammessa esattamente come un punto materiale in un biliardo ideale. L’utilità di questo fatto è che possiamo studiare il moto di P con una semplice costruzione geometrica. Basta osservare che esiste una corrispondenza biunivoca tra la traiettoria in questo speciale biliardo e la costruzione in Fig. 10. Il diagramma rappresentato è stato ottenuto replicando un angolo α nel piano, ottenendo una infinità di settori ciascuno con angolo al centro α , e considerando la traiettoria che P seguirebbe nel piano stesso se non ci fosse riflessione sulla retta $Y = \eta X$. La traiettoria che esso segue nel secondo settore è *speculare* rispetto a $Y = \eta X$ a quella che P segue nel primo in presenza di riflessione, ovvero coincide con una traiettoria reale a meno di una riflessione attorno alla bisettrice del settore e una traslazione di α . La traiettoria di P nel terzo settore è *uguale* a quella seguita nel primo settore a meno di una rotazione di 2α , e così via. Il numero di collisioni corrisponde quindi al numero di settori attraversati da P . Questa traiettoria interseca necessariamente un numero *finito* di settori n , pari a $n = \lceil \frac{\pi}{\alpha} \rceil - 1$, dove ricordiamo che α è tale che $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{\eta}}$. Se $\eta = 100^N$, per esempio, $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\arctan 10^{-N}} = 10^N + \frac{1}{3 \cdot 10^N} + o(10^{-N})$ e quindi, per $N \gg 1$, $n = \lceil \pi 10^N \rceil$, ovvero il numero di urti corrisponde all’intero ottenuto considerando le prime N cifre di π .

6.1. Problema a due corpi. Il caso $n = 2$ è particolarmente semplice e merita un commento a parte. Siano dati due punti materiali, (P_1, m_1) in posizione \mathbf{x}_1 , e (P_2, m_2) in posizione \mathbf{x}_2 , interagenti per mezzo di un potenziale $V(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)$. Studiare questo problema equivale a studiare un problema di un punto materiale in un campo centrale. Definendo infatti

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_G = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2},$$

rispettivamente vettore posizione relativa e vettore del centro di massa G , si ha che l’accelerazione di G è nulla rispetto ad un riferimento inerziale, e, adottando un riferimento inerziale con origine

il detto centro di massa, l'equazione del moto si riduce a

$$\hat{m}\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad \hat{m} := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

che è il moto in un campo centrale di un punto materiale di massa \hat{m} : tale massa è detta *massa ridotta*.

6.2. Considerazioni di similitudine. Concludiamo con una osservazione generale ma importante⁵. È spesso possibile ottenere informazioni qualitative dalle equazioni del moto senza necessariamente procedere alla loro risoluzione ma osservando come queste si comportano rispetto a trasformazioni di similitudine dei loro parametri. La più semplice considerazione di questo tipo è la seguente. Supponiamo di disporre di un punto materiale P di massa m e soggetto a sole forze conservative di potenziale V . Sappiamo che il suo moto è caratterizzato dall'equazione

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V.$$

Il termine a destra dipende esclusivamente da \mathbf{x} , mentre il termine a sinistra è invariante per trasformazioni $m \mapsto \alpha^2 m$, $t \mapsto \alpha t$ per $\alpha \neq 0$. Ciò significa che le traiettorie ottenute come soluzione del problema originale varranno per problemi in cui la massa è riscalata di un fattore α^2 purché il tempo venga rescalato di un fattore α . Si noti che è anche ammesso che l'orientamento del tempo venga invertito: le equazioni del moto sono infatti *invarianti per inversione temporale* se le forze non dipendono esplicitamente dal tempo.

Analogamente, se V è una funzione omogenea di grado ν , ovvero gode della proprietà $V(\beta \mathbf{x}) = \beta^\nu V(\mathbf{x})$ per $\beta > 0$, se \mathbf{x} è una soluzione dell'equazione del moto lo sarà anche $\beta \mathbf{x}$ purché si riscali il tempo come $t \mapsto t\beta^{1-\frac{\nu}{2}}$. Questa semplice osservazione permette di derivare immediatamente risultati fondamentali. Il potenziale del problema di Keplero, infatti, è omogeneo con $\nu = -1$, il che significa che orbite di a^2 volte più grandi vengono percorse in tempi rascalati di un fattore a^3 . Similmente, nel caso del moto del pendolo (in approssimazione di piccole oscillazioni), $\nu = 2$ e di conseguenza una variazione di scala delle traiettorie *non* induce una variazione dei tempi di percorrenza, che è la nota isocronia delle oscillazioni.

Esempio 1.17 — Valutiamo come scala l'altezza raggiungibile con un salto da un animale con la sua taglia ℓ . L'energia meccanica necessaria per compiere un salto di altezza h è $V \sim h\ell^3$, essendo il peso dell'animale proporzionale al suo volume. D'altro canto, la forza esprimibile dalla muscolatura dell'animale dipende dall'area della sezione dei suoi muscoli, ovvero $F \sim \ell^2$, e il lavoro eseguibile dagli stessi scala come $W \sim F\ell \sim \ell^3$. Ne segue che deve valere $h\ell^3 \sim \ell^3$, ovvero $h \sim 1$. In altre parole, h non dipende dalle dimensioni dell'animale e in effetti *il topo delle piramidi e il canguro saltano più o meno alla stessa altezza*.

⁵Per questa sezione si veda in particolare V. I. Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori riuniti (1974), da cui l'esempio è riprodotto pressoché verbatim.

CAPITOLO 2

Meccanica lagrangiana

1. Formalismo lagrangiano

1.1. Coordinate lagrangiane. Abbiamo introdotto il concetto di *vincolo olonomo* e mostrato come un vincolo siffatto imponga una limitazione geometrica ad un punto materiale costringendone la dinamica su un sottospazio di \mathbb{E}^3 . La necessità di sviluppare una adeguata teoria per sistemi vincolati, in particolare in presenza di vincoli olonomi fissi, ha motivato la nascita della meccanica lagrangiana, che ha permesso come conseguenza di inquadrare in un potente quadro geometrico la meccanica, e di individuare proprietà non banali del moto meno evidenti nel formalismo newtoniano. Come abbiamo visto, un vincolo olonomo su un punto materiale può essere specificato, per esempio da un vincolo semplice o doppio, che forza il punto a muoversi su una superficie o una curva.

Il caso di n punti materiali è più complesso, perché ci costringe a studiare il sistema in uno spazio, in generale, di dimensione più alta di 3: quello che faremo, quindi, sarà generalizzare alcune idee introdotte per lo studio di superfici in \mathbb{R}^3 al caso di ipersuperficie in \mathbb{R}^{3n} . Supponiamo quindi di considerare un sistema di n punti P_1, \dots, P_n , in \mathbb{E}^3 , le cui posizioni sono soggette in generale ad evoluzione rispetto ad una variabile temporale t . Ogni punto P_i quindi è associato, secondo un certo riferimento, ad una certa terna \mathbf{x}_i : abbiamo già introdotto la concatenazione $\mathbf{X} = \bigoplus_i \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{3n}$ che rappresenta la configurazione del sistema. Se qualsivoglia configurazione è ammessa, il sistema si dice *libero*, e lo spazio esplorabile da \mathbf{X} è effettivamente \mathbb{R}^{3n} . Viceversa, un sistema *vincolato* presenta una condizione su \mathbf{X} da rispettare durante tutta l'evoluzione nella forma

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0},$$

dove $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n-m}$, con $m \leq 3n$. Si noti che il vincolo è potenzialmente mobile. Il vincolo determinerà un sottoinsieme di \mathbb{R}^{3n} , eventualmente dipendente dal tempo, che è lo *spazio delle configurazioni* del sistema,

$$\mathcal{M}(t) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3n} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}\}.$$

Nel caso in cui \mathcal{M} sia *indipendente* dal tempo, si dice che il vincolo è *scleronomo*, viceversa si dice *reonomo*. Sotto certe ipotesi, che assumeremo soddisfatte, il vincolo così introdotto fissa una *sottovarietà regolare*.

DEFINIZIONE 1.1. Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ aperto connesso, con $N > 1$, e sia $\boldsymbol{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$, $1 \leq m < N$, una applicazione liscia. Sia definito ora l'insieme $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ supposto non vuoto. Se la matrice jacobiana dell'applicazione $\boldsymbol{\varphi}$ ha rango m in ogni punto di \mathcal{M} , allora \mathcal{M} si dice *sottovarietà regolare* di dimensione m di \mathbb{R}^N .

La definizione sopra corrisponde precisamente al tipo di sottospazi con cui abbiamo a che fare, con la condizione aggiuntiva che i nostri spazi possono eventualmente dipendere da un parametro tempo. Vale il seguente teorema.

TEOREMA 1.1. *Data una sottovarietà regolare m -dimensionale $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^N$, per ogni $P_0 \in \mathcal{M}$ di coordinate \mathbf{x}_0 esiste un intorno aperto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ ove è definita una*

funzione differenziabile con continuità $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ per un certo $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{V}$ e tale che $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{M}$ per $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$.

DIMOSTRAZIONE. Il rango massimo della matrice jacobiana di $\boldsymbol{\varphi}$ equivale al fatto che in ogni punto P di \mathcal{M} esiste un minore $l \times l$ non nullo della matrice stessa, con $l = N - m$. Indichiamo con

$$J_{j_1 \dots j_l}(P) := \det \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_{j_b}} \right)_{\substack{1 \leq a \leq m \\ 1 \leq b \leq l}} \Rightarrow \mathcal{U}_{j_1 \dots j_l} := \{P \in \mathcal{M}: J_{j_1 \dots j_l}(P) \neq 0\}.$$

L'unione di questa collezione finita di insiemi copre \mathcal{M} ed inoltre, in ciascuno di essi, è possibile esprimere in un intorno di ciascun punto in essi, l componenti di \mathbf{x} in funzione delle altre m sfruttando il teorema della funzione implicita di Dini. \square

Come anticipato, assumeremo che $\mathcal{M}(t)$ sia una sottovarietà regolare di dimensione m in ogni istante t , ovvero che valga

$$3n - m = \text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i} (\mathbf{X}, t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3n \\ 1 \leq j \leq 3n-m}} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}(t), \quad \forall t.$$

In un intorno di un punto P , individuato da $\mathbf{X} \in \mathcal{M}(t)$, sarà possibile introdurre (non univocamente) m coordinate locali, dette *coordinate lagrangiane*, $\mathbf{q} \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$, in cui potremo ri-esprimere le vecchie variabili cartesiane, ovvero $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ per una opportuna $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ (se il vincolo non dipende dal tempo, allora semplicemente $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$). L'ipotesi di regolarità implica

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial q_a} \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3n \\ 1 \leq a \leq m}} = m$$

(diversamente, la scelta di m parametri locali non sarebbe minima). I vettori¹ $\partial_a \boldsymbol{\chi}$, calcolati in un P , sono quindi *linearmente indipendenti* e sono una *base* per uno spazio che chiamiamo *spazio tangente* in P ,

$$\mathsf{T}_P \mathcal{M}(t) = \text{span}\{\partial_a \boldsymbol{\chi}\}_{i=1}^m.$$

Una *qualunque* curva regolare $\boldsymbol{\gamma}: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{M}$ con $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{X}$, ovvero passante per P , può essere riparametrizzata in termini delle coordinate lagrangiane, ovvero $\boldsymbol{\gamma}(u) \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(u), t)$, in modo che il suo vettore tangente sia

$$\left. \frac{d \boldsymbol{\gamma}}{d u} \right|_{u=0} = \sum_{a=1}^m \left. \frac{d q_a}{d u} \partial_a \boldsymbol{\chi} \right|_{u=0}.$$

Si ha quindi che $\frac{d \mathbf{q}}{d u} \in \mathsf{T}_P \mathcal{M}(t)$: lo spazio tangente è quindi lo spazio in cui vivono i vettori tangenti alle curve in P su $\mathcal{M}(t)$, e quindi lo spazio dei vettori tangenti ad $\mathcal{M}(t)$ in P . Se ora la curva in analisi è proprio la traiettoria $\mathbf{X}(t)$ del nostro sistema meccanico, ad ogni *istante fissato* t di tempo, una coppia $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è in corrispondenza biunivoca con un certo stato cinematico $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ compatibile con i vincoli: lo spazio in cui varia la coppia $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è detto *spazio delle fasi*.

La quantità $3n - m$ è la dimensione dello *spazio normale*: in un intorno di un punto \mathbf{X} , infatti, esistono $3n - m$ vettori normali a $\mathcal{M}(t)$, ovvero $\{\nabla \varphi_j\}_{j=1}^{3n-m}$, e la condizione di rango massimo significa che tali vettori sono linearmente indipendenti. Scriveremo

$$(\mathsf{T}_P \mathcal{M}(t))^{\perp} = \text{span}\{\nabla \varphi_j(\mathbf{X}, t)\}_{j=1}^{3n-m}.$$

¹Nel seguito useremo la notazione compatta $\partial_a := \frac{\partial}{\partial q_a}$.

Un fatto interessante è che $\mathcal{M}(t)$ può essere naturalmente dotato di struttura *riemanniana* indotta dalla metrica naturale su \mathbb{R}^{3n} : possiamo infatti introdurre una metrica in ogni punto $P \in \mathcal{M}$ localmente data da

$$g_{ab}(P, t) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)}{\partial q_b} \right\rangle.$$

Questa metrica è simmetrica definita positiva e si trasforma come un *tensore metrico*. Quel che questa espressione significa è che, supponendo che $\hat{\mathbf{q}}$ sia una diversa parametrizzazione locale per l'intorno di \mathbf{X} , allora ad essa sarà associata una diversa matrice $\hat{g}(P)$ legata alla precedente come un *tensore*

$$\hat{g}_{ab}(P, t) = \sum_{uv} \frac{\partial q_u}{\partial \hat{q}_a} \frac{\partial q_v}{\partial \hat{q}_b} g_{uv}(P, t).$$

Questo oggetto permette di introdurre un *prodotto interno* nello spazio $T_P \mathcal{M}$, ovvero $(\bullet, \bullet) : T_P \mathcal{M} \times T_P \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$: se una curva $\gamma(u) = (\mathbf{x} \circ \mathbf{q})(u)$ giace su \mathcal{M} passando per P , allora il suo infinitesimo di lunghezza quadro in un intorno di P si scrive

$$ds^2 = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle = \sum_{ab} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b} \right\rangle dq_a dq_b = (d\mathbf{q}, d\mathbf{q}),$$

coerentemente con la metrica definita.

1.1.1. Velocità virtuale e potenza virtuale. Consideriamo quindi un sistema di n punti materiali soggetto a vincoli olonomi. Se, come abbiamo detto, la traiettoria del sistema può essere scritta come $\mathbf{X} \equiv \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$, allora

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_{a=1}^m \dot{q}_a \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t},$$

che esibisce due termini diversi: il primo,

$$\hat{\mathbf{V}} := \sum_a \dot{q}_a \partial_a \mathbf{X}$$

è detto *velocità virtuale* e vive nello spazio tangente $T_P \mathcal{M}(t)$. Si tratta del contributo alla velocità *a vincolo fisso*: $\hat{\mathbf{V}}$ è effettivamente tangente a $\mathcal{M}(t)$ nel senso usuale nell'istante di tempo t . Il secondo termine, $\partial_t \mathbf{X}$ è dovuto invece alla sola dipendenza del vincolo dal tempo: questa velocità è detta *velocità di trascinamento* ed è nulla se i vincoli sono scleronomi. Vale il seguente fatto.

PROPOSIZIONE 1.2. *La proiezione della velocità di trascinamento sullo spazio normale non dipende dalla scelta di coordinate lagrangiane.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo di effettuare un cambio di coordinate lagrangiane, introducendone di nuove secondo la trasformazione $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$, avente trasformazione inversa $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\hat{\mathbf{q}}, t)$. Sia $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\mathbf{q}(\hat{\mathbf{q}}, t), t)$: abbiamo quindi che

$$\partial_t \hat{\mathbf{X}} - \partial_t \mathbf{X} = \sum_{a=1}^m \dot{q}_a \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a}$$

che mostra come, cambiando parametrizzazione, compare un contributo esclusivamente nello spazio tangente, mentre il contributo normale rimane inalterato. \square

In un sistema di n punti materiali vincolati sul $\mathcal{M}(t)$, ciascun punto (P_i, m_i) sarà sottoposto ad una forza totale $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(v)}$, dove $\mathbf{F}_i^{(a)}$ è il contributo *attivo* ed $\mathbf{F}_i^{(v)}$ è il contributo vincolare, dovuto proprio alla presenza del vincolo. Possiamo concatenare tali contributi vincolari in un

unico vettore di dimensione $3n$ scrivendo $\mathbf{F}^{(v)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(v)}$, similmente possiamo concatenare le forze attive $\mathbf{F}^{(a)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(a)}$ e introdurre $\mathbf{Q} := \bigoplus_i (m_i \mathbf{v}_i)$, di modo che

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)}.$$

La *potenza* espressa da queste reazioni vincolari è

$$\Pi^{(v)} = \sum_i \langle \mathbf{F}_i^{(v)}, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle = \langle \mathbf{F}^{(v)}, \dot{\mathbf{X}} \rangle = \sum_{a=1}^m \dot{q}_a \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle = \left\langle \hat{\mathbf{V}}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle.$$

Il primo contributo nell'espressione precedente si dice *potenza virtuale della reazione vincolare*. Il suo valore è discriminante, come già abbiamo anticipato per il caso del singolo punto materiale, per distinguere tra vincoli lisci e scabri nel caso di sistemi di punti soggetti a vincoli olonomi.

DEFINIZIONE 1.2 (Principio di d'Alembert–Lagrange, o degli spostamenti virtuali). Un sistema olonomo si dice a vincoli lisci se la potenza virtuale del sistema di reazioni vincolari è nulla in qualsiasi istante e in corrispondenza di qualunque stato cinematico del sistema. Ne consegue che se il sistema è soggetto a sole forze conservative e vincoli lisci, la legge di conservazione dell'energia resta valida.

Come nel caso del singolo punto materiale, questa condizione equivale a richiedere che $\mathbf{F}^{(v)}$ sia ortogonale allo spazio tangente e generalizza il concetto di vincolo liscio al caso di moto su sottovarietà. Questo significa anche che in caso di vincoli lisci \mathbf{Q} e $\mathbf{F}^{(a)}$ devono avere la stessa proiezione sullo spazio tangente $T_P \mathcal{M}(t)$.

1.2. Intermezzo: problemi variazionali. La struttura che abbiamo introdotto è molto generale, e verrà ulteriormente generalizzata durante il corso di studio. La sua versatilità permette lo studio di diversi problemi. Una classe di questi problemi sono i cosiddetti *problem variazionali*. Cominciamo supponendo che \mathcal{M} non dipenda dal tempo, ovvero che il vincolo sia scleronomo: nel seguito considereremo principalmente la pur vasta classe di vincoli olonomi scleronomi.

Supponiamo di avere una curva regolare γ su \mathcal{M} e assumiamo che essa giaccia in una porzione $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ tale per cui ogni $\mathbf{X} = \chi(\mathbf{q}) \in \mathcal{U}$ è parametrizzabile con la stessa applicazione $\chi: \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{U}$: questa assunzione può essere rilassata ma non influisce sul risultato. Vale quindi $\gamma^* = \chi \circ \mathbf{q}^*$. Possiamo definire una sorta di “intorno” di questa curva come segue.

DEFINIZIONE 1.3. Sia data una curva regolare $\gamma = \chi \circ \mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ su sottovarietà regolare m -dimensionale. Chiamiamo

$$(2.1) \quad \mathcal{Q}(\gamma) := \{ \gamma_u = \chi \circ \mathbf{q}_u: [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{U} \mid u \in \mathbb{R}, \mathbf{q}_u: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ regolare,} \\ \mathbf{q}_u(t_i) = \mathbf{q}(t_i) \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{q}_0(t) = \mathbf{q}(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \}$$

l'insieme di tutte le curve in \mathcal{U} avente gli stessi estremi di γ .

Consideriamo ora un funzionale $\mathcal{S}: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ di una generica curva $\gamma_u = \chi \circ \mathbf{q}_u: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U}$ nella forma

$$\mathcal{S}(\gamma_u) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}_u, \dot{\mathbf{q}}_u, t) dt$$

dove \mathcal{L} si assume differenziabile nei suoi argomenti.

DEFINIZIONE 1.4. Il funzionale $\mathcal{S}(\gamma_u)$ si dice essere stazionario su γ se

$$\frac{d\mathcal{S}(\gamma_u)}{du} \Big|_{u=0} = 0, \quad \forall \gamma_u \in \mathcal{Q}(\gamma).$$

TEOREMA 1.3. *Il funzionale*

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\gamma}_u) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}_u, \dot{\mathbf{q}}_u, t) dt$$

è stazionario su $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}$ se le \mathbf{q} soddisfa le equazioni di Eulero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}, \quad a = 1, \dots, m.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano quindi $\mathbf{q}_u(t)$ le coordinate lagrangiane della generica curva $\boldsymbol{\gamma}_u \in \mathcal{Q}(\boldsymbol{\gamma})$, di modo che, come da costruzione, $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}_0(t)$ siano le coordinate lagrangiane di $\boldsymbol{\gamma}(t)$. Possiamo scrivere

$$(2.2) \quad \left. \frac{d\mathcal{S}(\boldsymbol{\gamma}_u)}{du} \right|_{u=0} = \sum_{a=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{u,a}} \frac{dq_{u,a}}{du} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{u,a}} \frac{d\dot{q}_{u,a}}{du} \right) dt \Big|_{u=0}.$$

Integrando per parti il secondo termine, e usando il fatto che $\frac{d\mathbf{q}_u(t_1)}{du} = \frac{d\mathbf{q}_u(t_0)}{du} = \mathbf{0}$,

$$(2.3) \quad \left. \frac{d\mathcal{S}(\boldsymbol{\gamma}_u)}{du} \right|_{u=0} = \sum_{a=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \frac{dq_{u,a}}{du} \Big|_{u=0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) dt.$$

Questa formula mostra come le equazioni di Eulero siano sufficienti per la stazionarietà. Dato però che questa vogliamo che la quantità sopra sia nulla per ogni $\boldsymbol{\gamma}_u \in \mathcal{Q}(\boldsymbol{\gamma})$, le equazioni sono anche necessarie. \square

Queste equazioni, che sono state di facile derivazione, hanno una importanza assolutamente centrale in questo capitolo e in generale nella meccanica.

1.2.1. *Geodetiche.* Un caso relativamente semplice da studiare riguarda la ricerca di una curva di distanza estremale tra due punti. In questo caso abbiamo già visto come la lunghezza di una generica curva $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}$ si scriva

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \rangle} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) \rangle} dt.$$

In questo caso quindi

$$(2.4) \quad \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}) = \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) \rangle} = \sqrt{\sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) \dot{q}_a \dot{q}_b} \equiv \dot{s},$$

dove abbiamo indicato con \dot{s} l'ascissa curvilinea. Applichiamo le equazioni di Eulero per cercare la curva che rende *stazionario* il funzionale \mathcal{S}

$$(2.5) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = -\frac{1}{2\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \sum_{bc} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \dot{q}_b \dot{q}_c,$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \frac{d \ln \mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b - \frac{1}{\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \sum_{bc} \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} \dot{q}_b \dot{q}_c - \frac{1}{\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \sum_b g_{ab} \ddot{q}_b \\ &= -\frac{1}{2\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \sum_{bc} \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} \dot{q}_b \dot{q}_c - \frac{1}{2\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \sum_{bc} \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} \dot{q}_b \dot{q}_c - \frac{1}{\mathcal{L}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \sum_b g_{ab} \ddot{q}_b \end{aligned}$$

per cui, raccogliendo tutti i termini,

$$\sum_b g_{ab} \ddot{q}_b + \frac{1}{2} \sum_{bc} \left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} \dot{q}_b \dot{q}_c + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} \dot{q}_b \dot{q}_c - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \dot{q}_b \dot{q}_c \right) = \frac{d \ln \mathcal{L}(\dot{\gamma})}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b$$

Moltiplichiamo ora per la *matrice inversa* della matrice metrica \mathbf{g} , i cui elementi indichiamo con g^{ab} . Otteniamo

$$\ddot{q}_u + \frac{1}{2} \sum_{abc} g^{ua} \left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \dot{q}_b \dot{q}_c = \frac{d \ln \mathcal{L}(\dot{\gamma})}{dt} \dot{q}_u.$$

Si tratta di una equazione piuttosto complessa, in particolare per via del termine a destra che abbiamo lasciato implicito. Ricordiamo ora che se introduciamo l'ascissa curvilinea s lungo la curva, $\dot{s} \equiv \mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}})$ e osserviamo che, se invece di utilizzare t come variabile tempo utilizziamo l'ascissa curvilinea, il termine a destra scompare

$$\frac{d^2 q_u}{ds^2} + \frac{1}{2} \sum_{abc} g^{ua} \left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} = 0.$$

Quella ottenuta è *l'equazione di una geodetica* su \mathcal{M} . Abbiamo già definito, nel caso in cui \mathcal{M} è una superficie regolare nello spazio tridimensionale, una geodetica come una curva regolare non degenera su \mathcal{M} versore normale principale ortogonale ad \mathcal{M} stesso, ed è naturale chiedersi se la nomenclatura utilizzata nel caso di una superficie è compatibile con quella utilizzata qui, come dovrebbe. Partiamo dall'equazione per la geodetica, moltiplichiamo per g_{vu} e sommiamo su u ,

$$\sum_u g_{vu} \frac{d^2 q_u}{ds^2} + \frac{1}{2} \sum_{bc} \left(\frac{\partial g_{vb}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{vc}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_v} \right) \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} = 0$$

dove abbiamo usato $\sum_u g_{vu} g^{ua} = \delta_{va}$. Ora eseguiamo qualche manipolazione nel termine tra parentesi, ricordando che $g_{ab} = \langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b} \rangle$:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{vb}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{vc}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_v} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_c} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial q_b} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_c} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial q_v} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_c} \right\rangle \right) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_v}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_b \partial q_c} \right\rangle. \end{aligned}$$

L'equazione quindi si può riscrivere come

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_v}, \sum_u \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_u} \frac{d^2 q_u}{ds^2} + \sum_{bc} \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_b \partial q_c} \right\rangle = 0.$$

Essendo $\boldsymbol{\gamma}(s) = (\mathbf{x} \circ \mathbf{q})(s)$, il secondo termine del prodotto è esattamente $\frac{d^2 \boldsymbol{\gamma}}{ds^2}$. Abbiamo cioè ottenuto che il vettore normale principale della curva è ortogonale al vettore tangente $\partial_v \mathbf{x}$, ovvero ortogonale a \mathcal{M} . Essendo questa direzione unica per superfici bidimensionali, in quel caso la condizione è caratterizzante per le geodetiche.

Possiamo così dare una definizione generale, che include quella vista nel caso delle superfici come caso particolare.

DEFINIZIONE 1.5 (Geodetica). Data una varietà differenziabile m -dimensionale \mathcal{M} , una curva regolare $\boldsymbol{\gamma}$ su di essa è una geodetica se, data una sua parametrizzazione locale $\mathbf{q}(s)$ in un intorno del punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$, questa soddisfa

$$\frac{d^2 q_c}{ds^2} + \sum_{ab} \Gamma_{ab}^c \frac{dq_a}{ds} \frac{dq_b}{ds} = 0, \quad \Gamma_{ab}^c := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g^{ci} \left(\frac{\partial g_{bi}}{\partial q_a} + \frac{\partial g_{ai}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_i} \right),$$

dove g^{ab} è l'elemento (a, b) della matrice inversa della matrice metrica, la quantità Γ_{ab}^c è detta *simbolo di Christoffel*, ed s parametrizzazione affine della curva, ovvero tale che $(\frac{d\mathbf{q}}{ds}, \frac{d\mathbf{q}}{ds}) = 1$.

1.3. Equazioni di Lagrange. Cerchiamo ora di riscrivere le equazioni del moto e le quantità derivate nel caso del punto materiale in questo contesto più generale in cui il sistema, che immaginiamo composto da n punti materiali $\{(P_k, m_k)\}_{k=1}^n$, si muove su una sottovarietà di dimensione $m \leq 3n$, ovvero nell'assunzione di aver a che fare con vincoli olonomi. Anzitutto possiamo considerare l'energia cinetica: ricordando che localmente $\mathbf{X} = \chi(\mathbf{q}, t)$, essa può essere riscritta come

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \dot{\mathbf{x}}_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b A_{ab}(\mathbf{q}, t) + \sum_a \dot{q}_a B_a(\mathbf{q}, t) + C(\mathbf{q}, t).$$

dove abbiamo denotato con

$$A_{ab}(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle, \quad B_a(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \right\rangle, \quad C(\mathbf{q}, t) := \frac{1}{2} \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t} \right\rangle.$$

L'espressione si riscrive più semplicemente come

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \mathbf{B}, \dot{\mathbf{q}} \rangle + C.$$

Nel caso di *vincoli fissi*, localmente $\mathbf{X} \equiv \chi(\mathbf{q})$ per opportune variabili lagrangiane, e quindi i termini in \mathbf{B} e C sono nulli. La matrice \mathbf{A} , a volte detta *matrice di massa*, ha l'importante proprietà stabilita dal seguente teorema.

TEOREMA 1.4. *La forma*

$$\hat{T}[\mathbf{v}] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle$$

è una forma quadratica definita positiva, e di conseguenza \mathbf{A} è definita positiva.

DIMOSTRAZIONE. Basta semplicemente esplicitare la forma in termini di velocità virtuali: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n m_k \langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \rangle > 0$ purché $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. \square

Dall'energia cinetica è possibile definire anche delle variabili coniugate a \mathbf{q} , detti *momenti cinetici o coniugati*

$$\mathbf{p} := \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B},$$

che hanno la caratteristica di essere le *componenti lagrangiane* del vettore \mathbf{Q} , ovvero la proiezione di \mathbf{Q} sullo spazio tangente,

$$p_a = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a = \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle.$$

Derivando ulteriormente p_a rispetto al tempo si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) =: \dot{p}_a = \left\langle \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_a} \right\rangle.$$

L'ultimo termine a destra si può scrivere come

$$\left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_a} \right\rangle = \sum_k m_k \left\langle \mathbf{v}_k, \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_a} \right\rangle = \frac{\partial T}{\partial q_a}.$$

In definitiva abbiamo ottenuto l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = f_a, \quad f_a := \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle.$$

Di nuovo, f_a sono le componenti lagrangiane della forza totale (a volte indicate con Q_a , ma eviteremo questa notazione dato che potrebbe indurre in confusione). Quelle ottenute per $a = 1, \dots, m$ sono le *equazioni di Lagrange*.

TEOREMA 1.5. *Le equazioni di Lagrange ammettono una e una sola soluzione date le condizioni iniziali $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{v}_0$.*

DIMOSTRAZIONE. Il risultato discende dal fatto che le equazioni sono del secondo ordine in \mathbf{q} e possono essere messe in forma normale, ovvero $\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, dove $\boldsymbol{\phi}$ dipende anche da f_a , assunta regolare e funzione al più della derivata prima nel tempo di \mathbf{q} . Infatti, indicando con \mathbf{f} il vettore di componenti $f_a := \langle \mathbf{F}, \partial_a \mathbf{X} \rangle$, possiamo riscrivere le equazioni di Lagrange come

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}} - \left(\frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{f}.$$

Osservando ora che \mathbf{A} è una matrice definita positiva, possiamo invertirla e scrivere

$$\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{B}} + \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad \square$$

1.3.1. Forze conservative. Più interessante è il caso in cui le forze attive siano *conservative*, ovvero che esista un potenziale V tale che

$$\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V.$$

In questo caso, si ha che il contributo dovuto alla forza attiva $\mathbf{F}^{(a)}$ nel termine destro dell'equazione di Lagrange è

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \left\langle \nabla V, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \frac{\partial V}{\partial q_a}$$

dove, nell'ultimo passaggio, V è da intendersi ristretta alla varietà, ovvero $V = V(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t))$. Le equazioni di Lagrange diventano così

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \left\langle \mathbf{F}^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle,$$

dove abbiamo introdotto la funzione *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T - V.$$

Una lagrangiana nella forma sopra può più in generale ottenersi se esiste una funzione \hat{V} tale che

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \frac{\partial \hat{V}}{\partial q_a} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a},$$

quindi non esclusivamente con forze conservative: anche in questo caso si ottengono le stesse equazioni di Lagrange nella forma in Eq. (2.8). Una funzione \hat{V} che soddisfi le equazioni la condizione precedente è detta *potenziale generalizzato*.

Se i vincoli sono lisci, $\left\langle \mathbf{F}^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = 0$ e l'equazione di Lagrange assume la forma molto compatta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0.$$

Esempio 2.1 (Potenziali generalizzati) — Un caso particolare ma importante di potenziale generalizzato è quello utile per lo studio del moto di punti materiali carichi in campo elettromagnetico. Si assume che esistano due campi \mathbf{E} e \mathbf{B} definiti in tutto lo spazio, di modo che la forza applicata ad un punto materiale P di carica e sia espressa dalla *forza di Lorentz*

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right)$$

dove c è la velocità della luce e \mathbf{v} la velocità del punto. I campi \mathbf{E} ed \mathbf{B} devono soddisfare le *equazioni di Maxwell*, che in presenza di una densità di carica ϱ e di una densità di corrente \mathbf{j} nello spazio assumono la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\varrho, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Immaginiamo che la particella sia soggetta *esclusivamente* all'azione di \mathbf{E} ed \mathbf{B} : in questo caso, quindi, non sarà necessario introdurre coordinate lagrangiane: potremo utilizzare $(\mathbf{q}, \dots, \mathbf{q}) \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ essendo $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^3$.

La prima equazione di Maxwell permette di scrivere $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, per un certo campo \mathbf{A} detto *potenziale vettore*. La seconda equazione può quindi essere scritta come

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

per una certa funzione scalare φ . La forza di Lorentz si può quindi riscrivere

$$\mathbf{F} = e \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right).$$

Ora utilizziamo l'identità formale $\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) = \nabla \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \nabla \rangle \mathbf{b}$ per riscrivere

$$\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle - \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{A} = \nabla \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle - \frac{d \mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Sostituendo nell'espressione di \mathbf{F} abbiamo

$$\mathbf{F} = e \left(-\nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{c} \frac{d \mathbf{A}}{dt} \right) = -\nabla \hat{V} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \mathbf{v}}, \quad \hat{V} := \varphi - \frac{1}{c} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle.$$

Detta m la massa del punto materiale, la lagrangiana è quindi

$$(2.9) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 - e \left(\varphi - \frac{1}{c} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle \right).$$

Esempio 2.2 (Forze dissipative) — Si osserva sperimentalmente che, nel caso di vincoli scabri, una possibilità è che la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ abbia una componente diretta lungo il moto nella forma $\mathbf{F}_{k,t}^{(v)} = -\mu_k \dot{\mathbf{x}}_k$ per un qualche coefficiente di attrito dinamico $\mu_k > 0$. Questa componente produce nel contributo nell'equazione di Lagrange

$$\left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_a} \right\rangle = - \sum_k \sum_b \mu_k \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle$$

che può essere pensata come il risultato di un “potenziale” delle variabili cinematiche, detto *funzione di dissipazione di Rayleigh*,

$$\mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2} \sum_k \sum_{ab} \mu_k \dot{q}_a \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_a} \right\rangle = - \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a}.$$

Se le reazioni vincolari dissipative sono solo in questa forma, allora le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a} = 0.$$

Un esempio di applicazione di questo formalismo è il caso di un punto materiale su una guida soggetto a una forza armonica e ad uno smorzamento. Se q è l'ascissa curvilinea del punto materiale di massa m lungo una guida, e se il punto è soggetto ad una forza elastica di modo che vi sia applicato un potenziale $V(q) = \frac{1}{2} k q^2$, la lagrangiana sarà

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2.$$

Questa lagrangiana produce, come atteso, le equazioni del moto dell'oscillatore armonico. La presenza di un termine di smorzamento si può includere considerando la funzione di Rayleigh

$$\mathcal{R}(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sigma \dot{q}^2,$$

con $\sigma > 0$, di modo che le equazioni di Eulero–Lagrange siano quelle che abbiamo già visto per il moto armonico smorzato in Eq. (1.14), ovvero

$$(2.10) \quad m\ddot{q} + \sigma\dot{q} + kq = 0.$$

1.4. Principî variazionali. La notazione utilizzata ha già probabilmente fatto notare che le equazioni di Lagrange che abbiamo ottenuto riproducono esattamente le equazioni di Eulero per la risoluzione di problemi variazionali su varietà, e sono infatti spesso chiamate *equazioni di Eulero–Lagrange*. Questo fatto ha condotto Hamilton a formalizzare questa corrispondenza nel seguente teorema.

TEOREMA 1.6 (Principio di Hamilton). *Il moto naturale di un sistema soggetto a vincoli olonomi lisci e forze conservative rende stazionario l’azione hamiltoniana, definita come*

$$\mathcal{S}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

sulla classe di tutti i moti sincroni (ovvero, seguenti la stessa scala temporale) che tengano fisse le configurazioni $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$, dove $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è ottenuta considerando la differenza tra una forma quadratica in $\dot{\mathbf{q}}$, detta energia cinetica, e una applicazione differenziabile $V: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ detta energia potenziale.

Questo principio introduce un punto di vista largamente utilizzato in meccanica analitica, ovvero il punto di vista *variazionale*, in cui il moto fisico di un sistema viene caratterizzato come stazionario rispetto ad una certa misura rispetto a tutti gli altri moti possibili. È importante notare che il funzionale azione è *invariante* se a \mathcal{L} si aggiunge una *derivata totale* nel tempo di una funzione che ha uguale valore negli estremi di integrazione,

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \frac{d}{dt} f, \quad f(\mathbf{q}, t_0) = f(\mathbf{q}, t_1).$$

La corrispondenza tra \mathcal{L} e \mathcal{S} non è perciò univoca, ma due lagrangiane che differiscono per una derivata totale descrivono la stessa dinamica.

Esempio 2.3 — Consideriamo un sistema olonomo autonomo non soggetto a forze eccettuata la reazione vincolare, che vive su una varietà \mathcal{M} . La sua lagrangiana coincide con la sola energia cinetica, che in coordinate locali avrà la forma

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle.$$

Osserviamo ora che l’energia cinetica è una forma quadratica definita positiva. Possiamo *definire* la distanza propria infinitesima del moto su \mathcal{M}

$$ds^2 = \sum_{uv} a_{uv}(\mathbf{q}) dq_u dq_v =: (\mathbf{d}\mathbf{q}, \mathbf{d}\mathbf{q}).$$

Questo equivale ad identificare \mathbf{A} con un “tensor metrico”, di modo che la lagrangiana, e quindi l’energia cinetica, assumono la forma semplice

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle \Rightarrow \mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle dt.$$

Il funzionale che abbiamo ottenuto è molto simile a quello in Eq. (2.4): applicando il criterio variazionale di Hamilton, e ripetendo esattamente gli stessi calcoli si ottiene che le variabili \mathbf{q} devono evolvere secondo l’equazione per le geodetiche *in accordo con la metrica \mathbf{A}* : in altre parole, \mathbf{A} rimpiazza \mathbf{g}

nelle equazioni di Eulero–Lagrange, mostrando che il moto avviene non secondo la “metrica naturale” $g_{uv} = \sum_{k=1}^n \langle \partial_u \mathbf{x}_k, \partial_v \mathbf{x}_k \rangle$ ma secondo una metrica modificata,

$$a_{uv} = \sum_{k=1}^n m_k \langle \partial_u \mathbf{x}_k, \partial_v \mathbf{x}_k \rangle.$$

1.4.1. Ancora vincoli olonomi e il principio di d'Alembert–Lagrange. Il principio variazionale di Hamilton è in realtà equivalente al principio di d'Alembert con cui si caratterizzano i vincoli ideali. Supponiamo che il nostro sistema sia soggetto soggetto a sole forze conservative indotte da un potenziale V , oltre al vincolo che lo costringe a vivere su \mathcal{M} . Qui ci limitiamo ad osservare che, nell'Eq. (2.3), la condizione di stazionarietà ha la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_u} \right), \frac{d\mathbf{q}_u}{du} \right\rangle \Big|_{u=0} dt = 0$$

che deve valere per ogni \mathbf{q}_u deformata. Assumendo ora che il sistema sia autonomo, e che quindi $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{Q}} \right) = -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} (\nabla V + \dot{\mathbf{Q}})$$

dove abbiamo omesso il pedice in \mathbf{q}_u per alleggerire la notazione. L'integrale si riscrive

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \nabla V + \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{du} \right\rangle dt = 0.$$

Il vettore $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{du}$ è un vettore diretto tangenzialmente al vincolo, mentre $\dot{\mathbf{Q}} + \nabla V = \mathbf{F}^{(v)}$, reazione vincolare, e quindi in definitiva la condizione di stazionarietà richiede che per ogni campo vettoriale tangente la reazione vincolare sia ortogonale al vincolo. Data l'arbitrarietà delle deformazioni, questo equivale al principio di d'Alembert–Lagrange:

$$\langle \dot{\mathbf{Q}} + \nabla V, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in T_P \mathcal{M}.$$

Questo principio è interpretato in termini di criterio per l'equilibrio.

TEOREMA 1.7. *Un punto $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$ è di equilibrio se e solo se la forza totale vive nello spazio perpendicolare.*

1.4.2. Principio di Maupertuis e metrica di Jacobi. Il principio variazionale di Hamilton è basato sulla corrispondenza con le equazioni di Eulero. Nel derivare queste equazioni abbiamo considerato perturbazioni *sincrone*, ovvero tali per cui la parametrizzazione temporale rimane la stessa: tutte le curve in $\mathcal{Q}(\gamma)$ condividono lo stesso “orologio”. Esiste una formulazione variazionale alternativa al principio di Hamilton, storicamente antecedente e meno esplicita ma dal significato profondo, detta *principio di Maupertuis*, o *dell'azione stazionario*, che ricorre a perturbazioni *asincrone ad energia costante* specificamente nello studio di sistemi autonomi. Il principio si basa sulla cosiddetta *azione abbreviata* in cui compare il prodotto scalare tra le velocità e i *momenti cinetici* calcolata su una curva $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}$, ovvero

$$\mathcal{A}(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle dt, \quad \mathbf{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}.$$

Come solito, \mathbf{q} corrisponde ad una parametrizzazione locale della curva. In assenza di potenziali generalizzati, l'argomento dell'integrale non è altro che l'energia cinetica del sistema, essendo

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}$, per cui $\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle = 2T = \mathcal{L} + E$. In altre parole, in assenza di potenziali generalizzati, l'azione ridotta può essere scritta come

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) := \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + E) dt$$

Come abbiamo detto, la prima differenza sostanziale nella classe di variazioni ammesse è che esse vanno intese ad *energia meccanica costante*: E , quindi, diventa un parametro da tenere fisso. Inoltre, come detto, le variazioni possono essere *asincrone*. In altre parole, data una curva $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}$, le sue variazioni sono espresse in funzione di una riparametrizzazione del tempo $\tau: \mathbb{R} \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ supposta di classe \mathcal{C}^2 e con $\partial_t \tau(u, t) > 0$ su $[t_1, t_2]$: ciò che importa è che tutte le curve abbiano lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Indicando con $\tau_u(t) \equiv \tau(u, t)$, l'insieme

$$(2.11) \quad \mathcal{Q}(\boldsymbol{\gamma}; \tau) := \left\{ \boldsymbol{\gamma}_u = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}_u \circ \tau_u \mid u \in \mathbb{R}, \mathbf{q}_u: [\tau_u(t_1), \tau_u(t_2)] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ regolare}, \right. \\ \left. \mathbf{q}_u(\tau_u(t_i)) = \mathbf{q}(t_i) \quad i = 1, 2, \mathbf{q}_0(\tau_0(t)) = \mathbf{q}(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \right\}$$

contiene tutte le curve avente gli stessi estremi di $\boldsymbol{\gamma}^*$ ma diversi “tempi iniziali e finali”: ciascuna di queste curve è indicizzata da $u \in \mathbb{R}$, che parametrizza, tramite τ_u , anche la scala temporale. Il corrispondente funzionale tra gli stessi punti iniziali e finali allora diventa

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}_u) = \int_{\tau_u(t_1)}^{\tau_u(t_2)} (\mathcal{L}(\mathbf{q}_u, \dot{\mathbf{q}}_u) + E) dt$$

e la condizione di stazionarietà si ottiene come solito derivando rispetto al parametro u e imponendo l'uguaglianza a zero del risultato calcolato per $u = 0$:

$$(2.12) \quad \left. \frac{d\mathcal{A}}{du} \right|_{u=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{q}_u}{\partial u} \Big|_{u=0}, \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right\rangle dt + \left\langle \frac{\partial \mathbf{q}_u}{\partial u} \Big|_{u=0}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\rangle \Big|_{t_1}^{t_2} \\ + \left. \frac{\partial \tau_u}{\partial u} \right|_{u=0} (\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + E) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Abbiamo ora che, dalla condizione di estremi fissi,

$$0 = \frac{d\mathbf{q}_u(\tau_u(t_i))}{du} = \frac{\partial \mathbf{q}_u(\tau_u(t_i))}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{q}_u(\tau_u(t_i))}{\partial \tau} \frac{\partial \tau_u}{\partial u}, \quad i = 1, 2$$

che calcolata in $u = 0$ implica

$$\left. \frac{\partial \mathbf{q}_u}{\partial u} \right|_{u=0} (t_i) = -\dot{\mathbf{q}} \left. \frac{\partial \tau_u}{\partial u} \right|_{u=0} (t_i).$$

Sostituendo questa espressione, i due termini di frontiera si elidono e l'arbitrarietà della variazione implica le equazioni di Eulero–Lagrange.

Il principio di Maupertuis appare come una versione più convoluta del principio di Hamilton, ma permette di apprezzare un fatto geometrico importante. Abbiamo già visto che il moto libero del sistema si sviluppa effettivamente secondo geodetiche in accordo con la metrica indotta da \mathbf{A} . Questa corrispondenza geometrica è meno trasparente in presenza di un contributo in energia potenziale usando il principio di Hamilton, ma può invece essere recuperata utilizzando il principio variazionale di Maupertuis tramite l'intuizione seguente. Supponiamo di considerare il moto ad energia E fissata, e considerare la *metrica di Jacobi*

$$ds^2 = (E - V(\mathbf{q})) \sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{q}) dq_i dq_j.$$

Questa metrica è definita solo su punti P tali che $V(\mathbf{q}) \leq E$. Con questa scelta di metrica, l'energia cinetica diventa

$$T = \sqrt{2(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}$$

dove (\bullet, \bullet) è il prodotto scalare secondo la metrica $\mathbf{g}_J := (E - V(\mathbf{q}))\mathbf{A}(\mathbf{q})$. L'energia cinetica quindi coincide ora *esattamente* con la lunghezza dell'arco percorso e il moto avviene secondo geodetiche *in accordo con la metrica di Jacobi*.

1.5. Teorema di Noether e leggi di conservazione. Abbiamo già incontrato un certo numero di leggi di conservazione, riguardanti per esempio il momento angolare o l'energia meccanica. Un'altra legge di conservazione che emerge dalle equazioni di Lagrange riguarda il momento coniugato

$$p_a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}.$$

Infatti le equazioni di Lagrange implicano immediatamente il risultato seguente.

TEOREMA 1.8. *Il momento p_a coniugato alla variabile lagrangiana q_a si conserva se e solo se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0$.*

Se p_a si conserva, la variabile q_a si chiama *ciclica* e non compare esplicitamente nella lagrangiana.

È naturale chiedersi se esista o meno una relazione tra le leggi di conservazione e la lagrangiana di un sistema meccanico che ne caratterizza la dinamica, ovvero se le leggi di conservazione hanno a che fare in qualche modo con una qualche proprietà di \mathcal{L} . La risposta a questa domanda è contenuta in un fondamentale teorema presentato in questa sezione. ·

Indichiamo come al solito \mathcal{M} il nostro spazio delle configurazioni e con $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ la lagrangiana del nostro sistema. Diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.6. Si dice che la famiglia ad un parametri $G^s: \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, è un *gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili* se, dette $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, t)$ le coordinate lagrangiane locali e il tempo, valgono le seguenti proprietà:

- $G^0\mathbf{z} = \mathbf{z}$ per ogni \mathbf{z} ;
- $G^{s_1}(G^{s_2}\mathbf{z}) = G^{s_1+s_2}\mathbf{z}$;
- $G^s\mathbf{z}$ è differenziabile rispetto ad s con derivata continua.

L'idea è esplorare l'effetto di una invarianza dell'azione sotto di esso.

DEFINIZIONE 1.7. Un gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili $G^s: \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ è *ammissibile* per un sistema lagrangiano se

$$\frac{d}{ds} \int_{t_{0,s}}^{t_{1,s}} \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}'_s, t_s) dt_s = 0$$

dove abbiamo indicato con $G^s\mathbf{z} = (\mathbf{q}_s, t_s)$ e $\dot{\mathbf{q}}'_s = \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s}$.

Possiamo ora enunciare il seguente teorema.

TEOREMA 1.9 (Noether). *Se un sistema lagrangiano ammette un gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili $G^s: \mathbb{R} \times \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, di modo che $G^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}_s, t_s)$, allora le equazioni di Lagrange corrispondenti hanno un integrale primo che in coordinate locali assume la forma*

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L}, \quad \boldsymbol{\xi} := \left. \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right|_{s=0}, \quad \tau := \left. \frac{dt_s}{ds} \right|_{s=0}.$$

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo osservando che possiamo riscrivere l'azione variata in termini del parametro temporale non trasformato,

$$\int_{t_{0,s}}^{t_{1,s}} \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}'_s, t_s) dt_s = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\left(\mathbf{q}_s, \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{\dot{t}_s}, t_s\right) \dot{t}_s dt.$$

Imponiamo ora l'invarianza. Adoperando questa formula, imporre la derivata a zero dell'azione variata equivale a richiedere che la derivata dell'argomento dell'integrale rispetto ad s sia nulla, ovvero

$$0 = \frac{d}{ds} [\mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}'_s, t_s) \dot{t}_s] = \dot{t}_s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_s} \frac{d \mathbf{q}_s}{d s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'_s} \frac{d \dot{\mathbf{q}}'_s}{d s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_s} \frac{d t_s}{d s} \right) + \mathcal{L} \frac{d \dot{t}_s}{d s}.$$

Calcoliamo l'espressione precedente in $s = 0$, ottenendo

$$0 = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \frac{d \dot{\mathbf{q}}'_s}{d s} \Big|_{s=0} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau}$$

dove, come da enunciato

$$\tau(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{d t_s(\mathbf{q}, t)}{d s} \right|_{s=0}, \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{d \dot{\mathbf{q}}'_s(\mathbf{q}, t)}{d s} \right|_{s=0}.$$

Occorre calcolare con una certa cura la derivata di $\dot{\mathbf{q}}'_s = \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{\dot{t}_s}$ rispetto ad s . Scriviamo

$$\left. \frac{d \dot{\mathbf{q}}'_s}{d s} \right|_{s=0} = \left. \left(\frac{1}{\dot{t}_s} \frac{d \mathbf{q}_s}{d s} - \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{\dot{t}_s^2} \frac{d t_s}{d s} \right) \right|_{s=0} = \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}}$$

che ci permette di riscrivere

$$0 = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau}.$$

Questa equazione si può riarrangiare nella forma

$$\frac{d}{dt} \left[\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L} \right] = \left\langle \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto le equazioni di Eulero–Lagrange, dimostrando il teorema. \square

COROLLARIO 1.10. *Se il sistema è autonomo e $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}_s, t)$ è un gruppo ad un parametro di trasformazioni ammissibile, allora la quantità*

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle, \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{d \mathbf{q}_s}{d s} \right|_{s=0}$$

è conservata.

Si può dimostrare che l'integrale primo non dipende dalla scelta delle coordinate locali.

Esempio 2.4 (Invarianza traslazionale) — Un primo esempio di applicazione riguarda la possibilità che la lagrangiana sia invariante per traslazioni in una certa direzione \mathbf{r} , ovvero sotto l'azione di $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q} + s\mathbf{r}, t)$. In questo caso $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r}$ e la quantità conservata è

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle,$$

ovvero la proiezione del momento coniugato \mathbf{p} lungo \mathbf{r} . Se in particolare la lagrangiana è invariante rispetto a *qualsivoglia* traslazione, allora \mathbf{p} si conserva. Come abbiamo già visto, \mathbf{p} contiene le componenti lagrangiane della quantità di moto: se il moto avviene senza vincoli, allora $\mathbf{p} = \mathbf{Q}$. La conservazione della quantità di moto, quando valida, esprime precisamente l'omogeneità dello spazio in cui il moto avviene.

Esempio 2.5 (Invarianza rotazionale) — Supponiamo che la lagrangiana sia invariante sotto rotazioni, ovvero che detta $\mathbf{R}(s) \in \text{SO}(m)$ dipendente da un unico parametro, $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{R}(s)\mathbf{q}, t)$. $\mathbf{R}(s)$ può essere ad esempio una rotazione di un angolo s attorno ad un asse, di modo che $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$. Utilizziamo ora il Lemma 1.4 per studiare la trasformazione sopra. Nel calcolo dell'invariante, abbiamo bisogno di

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \left. \frac{d(\mathbf{R}(s)\mathbf{q})}{ds} \right|_{s=0} = \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{q}.$$

L'invariante è quindi

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{q} \right\rangle.$$

Consideriamo ora il caso di un sistema meccanico di un punto materiale di massa m e posizione \mathbf{x} , non soggetto a vincoli e con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - V(\mathbf{x}).$$

La formula trovata in questo caso diventa

$$I = m \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{x} \rangle \equiv \langle \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{q} \rangle,$$

dove \mathbf{Q} è la quantità di moto del punto materiale. Indichiamo

$$\dot{\mathbf{R}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_3 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo esplicitamente

$$I = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y}\mathbf{x} \rangle = (x_1 Q_2 - Q_1 x_2)\omega_3 - (x_1 Q_3 - Q_1 x_3)\omega_2 + (x_2 Q_3 - Q_2 x_3)\omega_1 \equiv \langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega} \rangle \text{ dove } \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

ovvero la quantità conservata è la proiezione del momento angolare in una certa direzione $\boldsymbol{\omega}$ associata all'azione infinitesima della trasformazione gruppale. Se il sistema è invariante per qualsivoglia rotazione nello spazio, ovvero lo spazio è *isotropo*, il momento angolare si conserva.

Esempio 2.6 (Indipendenza dal tempo) — Abbiamo derivato il nostro risultato supponendo di considerare un sistema autonomo. Questo significa che $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}, t+s)$ è una simmetria della lagrangiana. In questo caso, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ e $\tau = 1$, per cui l'invariante è

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H}.$$

Come vedremo questa quantità ha il nome di *hamiltoniana*. Se $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$, dove \mathbf{A} è la matrice cinetica e V è l'energia potenziale, si trova subito che

$$I = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q}) \equiv E,$$

ovvero l'invariante associato all'invarianza traslazionale è l'energia meccanica, la cui conservazione può quindi essere vista come una sorta di conseguenza dell'omogeneità temporale.

Esempio 2.7 (Brachistocrona) — Vediamo ora come la conoscenza di invarianti aiuta la risoluzione di problemi in cui non necessariamente compare una variabile tempo. Supponiamo di voler sagomare una opportuna guida liscia in un piano verticale, su cui far scivolare un punto materiale P sotto l'azione gravitazionale, indichiamola con $\boldsymbol{\gamma}(u) = (u, -h(u))^\top$, $u \in [0, \bar{u}]$ (la prima coordinata indica l'ascissa, la seconda l'ordinata con asse inteso orientato in maniera opposta al campo gravitazionale). La guida deve avere $h(0) = 0$ e $h(\bar{u}) = -\bar{h}$, di modo che $\boldsymbol{\gamma}(0)$ sarà il punto iniziale della corsa di P . Vorremmo inoltre trovare la sagoma tale da rendere il tempo di percorrenza *minimo*². Poiché ipotizziamo il moto soggetto

²Il problema è stato propriamente formulato per la prima volta da Johann Bernoulli nel 1696 e risolto da Isaac Newton l'anno successivo.

solo a forze conservative e vincoli lisci, quando il punto sarà ad altezza h lungo γ la sua velocità sarà in modulo $\|\mathbf{v}_P\| = \sqrt{2gh}$. Il tempo per arrivare dal punto di partenza a quello di destinazione è

$$\tau(\gamma) = \int_0^{\ell} \frac{1}{\|\mathbf{v}_P\|} ds = \int_0^{\bar{u}} \frac{\sqrt{1+h'^2}}{\sqrt{2gh}} du \equiv \int_0^{\bar{u}} \mathcal{L}(h, \partial_u h) du, \quad \mathcal{L}(h, \partial_u h) := \sqrt{\frac{1+h'^2}{2gh}}.$$

Si tratta di un funzionale rispetto a h e alla sua derivata, da estremizzare rispetto ad h , totalmente analogo a quelli già studiati, in cui h svolge il ruolo di “coordinata lagrangiana” e u svolge il ruolo di “tempo”. La forma della lagrangiana ci suggerisce subito che una quantità verrà “conservata”, ovvero non dipenderà da u , per via dell’invarianza gruppale $\mathbf{G}^s(h, u) = (h, u + s)$, ovvero

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h'} h' - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2gh(1+h'^2)}},$$

che assume una forma più semplice quadrando,

$$h(1-h'^2) = c^2, \quad c^2 := \frac{1}{8gI^2}.$$

Da questa espressione si ottiene

$$\frac{dh}{\sqrt{\frac{c^2}{h} - 1}} = du.$$

Questa equazione può essere risolta introducendo una variabile ausiliaria ϕ ,

$$h = c^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{c^2}{2} (1 - \cos \phi) \Rightarrow u = \frac{c^2}{2} (\phi - \sin \phi),$$

dove c va determinata imponendo la condizione di passaggio per il punto finale. La curva è matematicamente detta *cicloide*.

Esempio 2.8 (Trasformazioni di gauge) — Le trasformazioni contemplate dal teorema di Noether non sono il solo tipo in grado, in generale, di lasciare invariata una lagrangiana. Consideriamo la lagrangiana ottenuta per una punto materiale carico in un campo elettromagnetico statico in Eq. (2.9),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 - e \left(\varphi - \frac{1}{c} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \rangle \right).$$

Se eseguiamo la trasformazione

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f, \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

dove $f \equiv f(\mathbf{x}, t)$, la lagrangiana viene mappata in

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} - \frac{e}{c} \frac{df}{dt}.$$

Lagrangiana ha acquisito un termine di derivata totale e quindi produce le stesse equazioni del moto. In effetti questo significa che il potenziale φ e il potenziale \mathbf{A} sono definiti a meno di una *gauge* f che si può fissare arbitrariamente. Tuttavia questo tipo di trasformazione non è del tipo contemplato dal teorema (è un gruppo di simmetrie che dipende da una *funzione*) e i principi di conservazione ad esso legati (che riguardano i *campi* che appaiono nella lagrangiana) necessitano di una trattazione più generale di quella qui presentata.

2. Equilibrio ed oscillazioni

Passiamo ora allo studio di come le equazioni di Lagrange permettano di individuare e caratterizzare le posizioni di equilibrio su $\mathcal{M}(t)$. Ci focalizzeremo sui *sistemi autonomi*. Abbiamo in particolare che in questo caso deve valere un sistema di equazioni differenziali nella forma

$$(2.13) \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$$

per una opportuna funzione regolare $\boldsymbol{\phi}$ in un intorno di $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, di modo che esista una mappa $\boldsymbol{\chi}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}$ che produce $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$. Nel seguito indicheremo con

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0) := (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$$

la soluzione del sistema al tempo t avendo utilizzato le condizioni iniziali $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$: in altre parole, \mathbf{g}^t produce il *flusso di fase* associato al sistema in coordinate locali. Possiamo a questo punto generalizzare tutto quanto abbiamo detto nel caso unidimensionale a questo caso più generale. Si dà in particolare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.1. Un punto $\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0) \in \mathcal{M}$ è detto *di equilibrio* se la coppia $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è soluzione del problema in Eq. (2.13). Un punto di equilibrio \mathbf{X}_0 è *stabile* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Diversamente il punto è detto *instabile*.

È evidente che un punto $\mathbf{X}(\mathbf{q}_0)$ può essere di equilibrio se e solo se $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

TEOREMA 2.1 (Dirichlet). *Supponiamo di avere un sistema olonomo con vincoli lisci e soggetto a forze conservative indotte da un potenziale V . Se \mathbf{q}_0 è un minimo dell'energia potenziale, la corrispondente configurazione è stabile.*

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo per iniziare che il sistema sia soggetto a sole forze conservative. Per ipotesi, $\partial_{\mathbf{q}} V|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \mathbf{0}$ ed esiste un intorno \mathcal{U} di \mathbf{q}_0 tale che $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{q}_0\}$ si ha che $V(\mathbf{q}) \geq V(\mathbf{q}_0)$. Supponiamo in particolare che $V(\mathbf{q}_0) = 0$ e consideriamo un intorno \mathcal{B} del punto $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ dello spazio delle fasi. Osservando ora che esiste sempre un $a_0 > 0$ tale che $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) > a_0 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$, definiamo

$$\Omega_\epsilon := \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \mid a_0 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + V(\mathbf{q}) < \epsilon\}.$$

Ogni traiettoria che ha origine in Ω_ϵ rimane in Ω_ϵ per via della conservazione dell'energia; d'altra parte, per ϵ sufficientemente piccolo $\Omega_\epsilon \subset \mathcal{B} = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \mid \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|^2 \leq \delta\}$, cosa che fornisce la condizione di stabilità cercata. Il ragionamento è valido a maggior ragione nel caso in cui siano presenti forze dissipative, dato che l'energia durante il moto non potrà aumentare e il moto sarà comunque limitato a Ω_ϵ . \square

Una conseguenza di questo fatto è che, dato un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci le cui forze attive sono solo dovute alla gravità, le posizioni di equilibrio stabile sono minimi isolati della quota del baricentro.

2.1. Piccole oscillazioni. Supponiamo che \mathbf{q}_0 sia una posizione di equilibrio stabile in un sistema autonomo soggetto a vincoli lisci e forze conservative. La lagrangiana, in generale nella forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}(\mathbf{q}) \dot{q}_a \dot{q}_b - V(\mathbf{q})$$

può essere riscritta in termini di nuove variabili $\underline{\mathbf{q}} := \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ utilizzando una *approssimazione quadratica* per il termine di potenziale, che possiamo sempre supporre tale che $V(\mathbf{q}_0) = 0$,

$$\mathcal{L}(\underline{\mathbf{q}}, \dot{\underline{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \sum_{ab} A_{ab}(\mathbf{q}_0) \dot{\underline{q}}_a \dot{\underline{q}}_b - \frac{1}{2} \sum_{ab} \hat{V}_{ab} \underline{q}_a \underline{q}_b \equiv \frac{\langle \dot{\underline{\mathbf{q}}}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} \rangle - \langle \underline{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{V}} \underline{\mathbf{q}} \rangle}{2}.$$

dove abbiamo indicato con $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{q}_0)$ e

$$\hat{V}_{ab} := \left. \frac{\partial^2 V_{ab}(\mathbf{q})}{\partial q_a \partial q_b} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}.$$

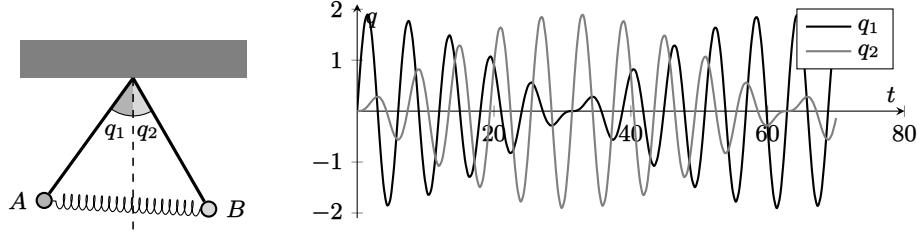


FIGURA 1. Problema dei pendoli accoppiati (sinistra). Fenomeno dei battimenti per $0 < k \ll 1$ (destra).

Questo sistema è di semplice analisi, dato che le corrispondenti equazioni di Lagrange sono lineari,

$$(2.14) \quad \hat{\mathbf{A}}\ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Sappiamo già che $\hat{\mathbf{A}}$ è simmetrica definita positiva, e, se il potenziale ha derivate continue fino alla seconda, questo vale anche per $\hat{\mathbf{V}}$. Sotto queste ipotesi, vale il seguente teorema.

TEOREMA 2.2. *Esiste una trasformazione lineare che disaccoppia il sistema in Eq. (2.14) in m oscillazioni armoniche indipendenti, dette modi normali del sistema, ciascuno con una propria frequenza, detta frequenza propria.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che esiste una trasformazione ortogonale \mathbf{S} che mappa $\hat{\mathbf{A}}$ in una matrice diagonale, avente reali positivi α_i , $i = 1, \dots, m$, sulla diagonale, ovvero $\mathbf{S}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{S}^\top = \text{diag}(\alpha_i)$. Definiamo ora la sua radice, $\hat{\mathbf{A}}^{1/2} := \mathbf{S}^\top \text{diag}(\sqrt{\alpha_i}) \mathbf{S}$, e introduciamo la variabile

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{A}}^{1/2}\mathbf{q}$$

che ci permette di riscrivere il problema come

$$\ddot{\mathbf{Y}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\Omega} := \hat{\mathbf{A}}^{1/2}\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{A}}^{-1/2}.$$

Cerchiamo una soluzione nella forma $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{u}e^{i\omega t}$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Sostituendo nell'equazione si trova l'equazione agli autovalori

$$(\omega^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

Essendo $\boldsymbol{\Omega}$ simmetrica e definita positiva, anch'essa ha m autovalori (non necessariamente distinti) positivi. Sia \mathbf{O} una matrice ortogonale che diagonalizza $\boldsymbol{\Omega}$, di modo che $\text{diag}(\omega_i^2) = \mathbf{O}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{O}$. Introduciamo ancora una volta una nuova variabile $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{u}$: l'equazione diventa nuovamente

$$\ddot{\mathbf{z}} - \text{diag}(\omega_i^2)\mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \ddot{z}_i - \omega_i^2 z_i = 0.$$

In questa equazione le componenti di \mathbf{z} sono disaccoppiate e soddisfano ciascuna una equazione armonica con pulsazione ω_i , come anticipato nella tesi. \square

Esempio 2.9 (Pendoli accoppiati) — Due pendoli di uguale lunghezza ℓ e uguale massa m sono uniti da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Essi sono attaccati allo stesso punto, vincolati a oscillare in un piano verticale passante per il punto a cui sono agganciati. Siano q_1 e q_2 gli angoli che i due pendoli descrivono rispetto alla verticale, come in Fig. 1. L'energia cinetica del sistema è

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

mentre quella potenziale è

$$U(q_1, q_2) = -mgl \cos q_1 - mgl \cos q_2 + \frac{k\ell^2}{2} ((\cos q_1 - \cos q_2)^2 + (\sin q_2 - \sin q_1)^2).$$

Si vede facilmente che $q_1 = q_2 = 0$ è di equilibrio *stabile*. Possiamo quindi studiare le piccole oscillazioni attorno a questa configurazione scrivendo

$$U(q_1, q_2) = -2m\ell + \frac{m\ell^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{k\ell^2}{2}(q_1 - q_2)^2 + O(\|\mathbf{q}\|^2)$$

per cui, in approssimazione di piccole oscillazioni e trascurando costanti additive irrilevanti,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m\ell^2}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} \rangle, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} m\ell + k\ell^2 & -k\ell^2 \\ -k\ell^2 & m\ell + k\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Per semplicità, assumiamo di utilizzare unità di massa, lunghezza e tempo tali che $m = 1$, $\ell = 1$ e $g = 1$. L'espressione diventa più maneggevole:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} \rangle, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica \mathbf{A} in questo problema è già diagonale, per cui possiamo semplicemente fare un cambio di base che diagonalizzi $\hat{\mathbf{V}}$: troviamo in particolare che

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto detto sopra, possiamo quindi introdurre una nuova variabile

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{q_1-q_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

che soddisfa le equazioni

$$\dot{z}_1 - z_1 = 0, \quad \dot{z}_2 - \omega^2 z_2 = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$\omega = \sqrt{1+2k}.$$

Le equazioni per la nuova variabile \mathbf{z} ammettono due speciali tipi di soluzione:

Oscillazioni in fase: Se $z_2 \equiv 0$ per ogni t , allora $q_1 = q_2$ e i due pendoli oscillano *in fase* con frequenza $\omega_1 = 1$.

Oscillazioni in opposizione di fase: Se $z_1 \equiv 0$ per ogni t , allora $q_1 = -q_2$ e i due pendoli oscillano *in opposizione di fase* con frequenza $\omega_2 = \omega = \sqrt{1+2k} > 1$.

Supponiamo ora che in $t = 0$ si ha $q_1 = q_2 = 0$, e che $\dot{q}_1 = v_0$, mentre $\dot{q}_2 = 0$. Con queste condizioni iniziali, $z_1(0) = z_2(0) = 0$, mentre $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0$, per cui la soluzione del problema è

$$z_1(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin t, \quad z_2(t) = \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}} \sin \omega t,$$

per cui, tornando alle coordinate q_1 e q_2 ,

$$q_1(t) = v_0 \left(\sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad q_2(t) = v_0 \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Se $0 < k \ll 1$, $\omega^{-1} = 1 - o(k)$ e si verificano dei *battimenti*, come abbiamo già visto: questo significa che periodicamente il moto di un pendolo si smorza completamente e tutta l'energia è trasferita nell'altro.

Invertendo la relazione tra \mathbf{z} e \mathbf{q} , si può esprimere l'energia meccanica del sistema in termini delle variabili \mathbf{z} . Si trova

$$E = \frac{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}{2} + \frac{z_1^2 + \omega^2 z_2^2}{2}.$$

Le due variabili descrivono due oscillatori *non accoppiati* che conservano *separatamente* le loro energie, di modo che in ogni istante di tempo vale

$$\frac{\dot{z}_1^2}{2} + \frac{z_1^2}{2} = E_1, \quad \frac{\dot{z}_2^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} = E_2, \quad E_1 + E_2 = E,$$

e il moto avviene nel piano (z_1, z_2) è circoscritto al rettangolo

$$z_1^2 \leq 2E_1, \quad z_2^2 \leq 2E_2.$$

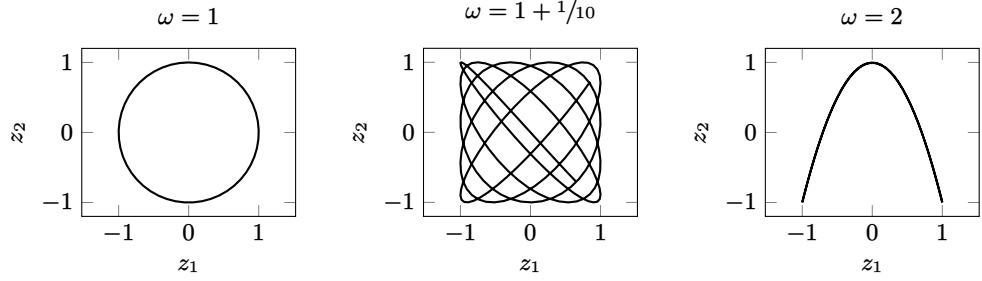


FIGURA 2. Esempi di figure Lissajous per diversi valori di ω .

In questo rettangolo, la traiettoria del sistema è individuata da una curva bidimensionale $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$ che produce una cosiddetta *figura di Lissajous*, tipicamente osservata negli oscillosografi. Se $\omega = 1$ la figura è una ellisse. Tra le curve con $\omega = n$ vi sono dei polinomi, detto *di Chebyshev*, di interesse indipendente.

2.2. Funzioni di Lyapunov. Se sono presenti forze dissipative, come intuibile esse possono “stabilizzare” il sistema, portandolo in una posizione di equilibrio stabile da posizioni vicine agendo per un tempo sufficientemente lungo. La definizione di punto di equilibrio asintoticamente stabile nel contesto lagrangiano è la seguente.

DEFINIZIONE 2.2. Un punto di equilibrio $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$ si dice *asintoticamente stabile* se esiste un $\delta > 0$ tale che, detto $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$,

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| = 0.$$

La caratterizzazione dei punti asintoticamente stabili avviene tramite una funzione speciale, detta *funzione di Lyapunov*.

TEOREMA 2.3. Sia $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$ punto di equilibrio del sistema. Se esiste una funzione $\Lambda \in C^1(\Omega)$ su un intorno Ω di $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ tale che

$$\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} \leq 0$$

e $\Lambda(\mathbf{z}_0)$ è un minimo isolato di Λ su Ω , il punto è di equilibrio stabile. In particolare, se $\dot{\Lambda} < 0$ su $\mathbf{z} \neq \mathbf{z}_0$, il punto \mathbf{X}_0 è asintoticamente stabile. Viceversa, se esiste una funzione $\Lambda_* \in C^1(\Omega)$ tale che $\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} > 0$ per ogni $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$, il punto \mathbf{z}_0 è di equilibrio instabile.

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo $\Lambda(\mathbf{z}_0) = 0$. Sia $\epsilon > 0$ tale che $\Omega_\epsilon := \{\mathbf{z} \in \Omega | \Lambda(\mathbf{z}) \leq \epsilon\} \subseteq \Omega$. Essendo $\dot{\Lambda} \leq 0$ lungo le traiettorie generate in questo intorno, una traiettoria attraversa frontiere $\partial\Omega_\epsilon$ corrispondenti a ϵ decrescente, avvicinandosi a \mathbf{z}_0 e mai allontanandosene. In particolare, se $\dot{\Lambda} < 0$ il valore di ϵ dovrà monotonicamente decrescere fino al minimo valore possibile — raggiunto eventualmente asintoticamente — corrispondente a \mathbf{X}_0 .

Viceversa, supponiamo che esista una funzione $\Lambda_* \in C^1(\Omega)$ su un intorno Ω di \mathbf{z}_0 tale che $\dot{\Lambda}_* > 0$ per ogni $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$. Assumiamo che $\Lambda_*(\mathbf{z}_0) = 0$. Consideriamo ora un intorno $\mathcal{B}_\delta = \{\mathbf{z} \in \Omega | 0 < \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta\}$: per ogni $\mathbf{z} \in \mathcal{B}_\delta$, $\Lambda_*(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) > \Lambda_*(\mathbf{z})$, mentre d'altra parte Λ_* è limitata su \mathcal{B}_δ , per cui necessariamente, dovendo Λ_* crescere monotonicamente, ad un certo punto $\mathbf{g}^t \mathbf{z}$ uscirà da \mathcal{B}_δ . \square

Esempio 2.10 (Oscillatore smorzato) — Abbiamo già introdotto il caso del moto dell'oscillatore smorzato e mostrato che può essere studiato per mezzo del formalismo lagrangiano se viene introdotta una opportuna funzione di Rayleigh. L'equazione del moto risultante per un punto materiale di massa m in moto unidimensionale è nella forma

$$m\ddot{q} + \sigma\dot{q} + kq = 0$$

dove $\sigma > 0$ è un coefficiente di smorzamento e $k > 0$ è una costante elastica opportuna. Abbiamo già studiato questo moto e sappiamo che $q = 0$ è una posizione di equilibrio, e in particolare che essa è asintoticamente stabile. Vediamo come è possibile vedere questo fatto tramite una opportuna funzione di Lyapunov. In questo problema (e in molti altri casi) una naturale scelta per Λ è l'energia meccanica,

$$\Lambda \equiv E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Questa funzione è nulla in $(q, \dot{q}) = (0, 0)$. D'altra parte, in ogni punto di un qualunque intorno di tale punto si ha

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \dot{q}(m\ddot{q} + kq) = -\sigma\dot{q}^2 < 0.$$

Dal teorema sopra, il punto di equilibrio è quindi asintoticamente stabile.

3. Formalismo hamiltoniano

3.1. Trasformata di Legendre. Nel formalismo lagrangiano lo spazio delle fasi è lo spazio delle variabili $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Esiste però una scelta di variabili differente che permette di riscrivere le equazioni del moto in termini di derivate del primo ordine e che mette in evidenza proprietà profonde della dinamica. Il formalismo che introdurremo ha inoltre il pregio di essere direttamente generalizzabile a contesti molto diversi, come la meccanica quantistica, che però non tratteremo nel corso. Questa nuova formulazione si può realizzare tramite uno strumento matematico di interesse generale, detta *trasformata di Legendre*, definita come segue.

DEFINIZIONE 3.1 (Trasformata di Legendre). Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di classe C^2 sul suo dominio di definizione Ω , supposto convesso. Sia inoltre

$$\Omega^* := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m : \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} (\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - f(\mathbf{x})) < +\infty\}.$$

La trasformata di Legendre di f è una funzione $f^*: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f^*(\mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} (\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - f(\mathbf{x})).$$

Nell'ipotesi che $f \in C^2(\Omega)$ e che la matrice hessiana

$$\text{Hess}[f](\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}}$$

sia definita positiva in un intorno di $\mathbf{x} \in \Omega$, la trasformata di Legendre di f in \mathbf{x} è

$$f^*(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}) \rangle - f(\mathbf{x}(\mathbf{p})),$$

dove $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ è la funzione che si ottiene invertendo

$$\mathbf{p} = \nabla f(\mathbf{x}).$$

La condizione di hessiana definita positiva garantisce la risolubilità locale dell'equazione $\mathbf{x} = \nabla f(\mathbf{x})$ e la sua *involutività*, nel senso che vale la seguente

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $f \in C^2(\Omega)$ con matrice hessiana definita positiva sul suo dominio. La trasformata di Legendre di f^* è la funzione f stessa, ovvero $(f^*)^* = f$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$\nabla_{\mathbf{p}} f^*(\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}) + \langle \mathbf{p}, \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}) \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}(\mathbf{p})), \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}) \rangle = \mathbf{x}(\mathbf{p}) + \langle \mathbf{p}, \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}) \rangle - \langle \mathbf{p}, \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}) \rangle = \mathbf{x}(\mathbf{p}).$$

La matrice hessiana di g coincide quindi con la matrice jacobiana di $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ e quindi con l'inversa della matrice hessiana di $f(\mathbf{x})$, che è definita positiva. Di conseguenza, si può quindi invertire localmente il sistema $\nabla_{\mathbf{p}} f^*(\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p})$ ottenendo $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. La trasformata di Legendre di f^* è quindi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) \rangle - f^*(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}) \rangle - f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

□.

LEMMA 3.2 (Diseguaglianza di Young). *Sia f come sopra. Vale*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \mathbf{p} \in \Omega^*.$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue dalla definizione, essendo, per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ e $\mathbf{p} \in \Omega^*$,

$$f^*(\mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle - f(\mathbf{y})) \geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle - f(\mathbf{x}). \quad \square$$

3.2. Equazioni di Hamilton. L'idea del formalismo hamiltoniano è quella di "rimuovere" le variabili $\dot{\mathbf{q}}$ che appaiono nella funzione lagrangiana per mezzo di una trasformata di Legendre, introducendo delle nuove, opportune variabili \mathbf{p} . Nell'ipotesi che la lagrangiana sia convessa in $\dot{\mathbf{q}}$, le nuove variabili devono essere tali da soddisfare

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

ovvero sono proprio i già introdotti momenti cinetici, o generalizzati. La trasformata di Legendre ottenuta dalla lagrangiana è detta *funzione di Hamilton* o molto più comunemente *Hamiltoniana*

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \langle \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{p} \rangle - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)), t).$$

Le nuove variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) sono dette *variabili canoniche coniugate* e lo spazio in cui vivono è detto anch'esso *spazio delle fasi*. L'hamiltoniana ha un ruolo importante in meccanica, anche per via del seguente teorema.

TEOREMA 3.3. *In assenza di potenziali generalizzati, la funzione hamiltoniana fornisce l'energia meccanica del sistema.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle ipotesi del teorema, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e $\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, per cui

$$\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle = 2T,$$

per cui

$$\mathcal{H} = 2T - \mathcal{L} = 2T - (T - V) = T + V. \quad \square$$

Le equazioni del moto di Lagrange in $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ devono essere riscritte, in questo formalismo, in termini di (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . È immediato vedere che le equazioni ottenute sono *del primo ordine* (uno dei grandi vantaggi del formalismo hamiltoniano) e in una forma molto compatta.

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}}.$$

La prima equazione è una riscrittura diretta delle equazioni di Lagrange nelle nuove variabili: basta osservare che

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = \left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}.$$

La seconda equazione specifica la relazione tra $\dot{\mathbf{q}}$ e H imposta dall'involutività della trasformata di Legendre. Vale inoltre la seguente proposizione, che si prova immediatamente a partire dalle equazioni di Hamilton.

PROPOSIZIONE 3.4. *Siano $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ soluzioni delle equazioni di Hamilton. Allora*

$$\frac{d \mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

In particolare, il valore dell'hamiltoniana rimane costante durante il moto se questa non dipende esplicitamente dal tempo.

L'introduzione del vettore

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$$

e della matrice simplettica

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$$

consente di scrivere le equazioni di Hamilton in maniera ancora più compatta come

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}.$$

Questo equivale ad introdurre un *campo vettoriale* $\mathbf{v} := \mathbf{J} \partial_{\mathbf{x}} \mathcal{H}$ nello spazio delle fasi dove vive \mathbf{x} che determina l'evoluzione di un punto in tale spazio nel tempo: l'equazione esprime il fatto che \mathbf{x} evolve tangenzialmente a \mathbf{v} e, in particolare, se $\partial_t \mathcal{H} = 0$, lungo linee di flusso di fase in cui $\mathcal{H} = \text{costante}$.

3.3. Principio variazionale. Anche le equazioni di Hamilton possono essere derivate da un opportuno principio variazionale, che può essere ottenuto da quello presentato per le equazioni di Lagrange. L'*azione* va però riscritta in termini delle nuove variabili introdotte, ovvero, per un funzionale su traiettorie (\mathbf{q}, \mathbf{p}) nello spazio delle fasi con supporto su $[t_0, t_1]$

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rangle - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt.$$

Il principio pertanto è che il moto avvenga secondo una traiettoria che renda stazionario il funzionale. Occorre quindi applicare le equazioni di Eulero, ricordando che la nostra curva (\mathbf{q}, \mathbf{p}) vive ora in uno spazio di dimensione $2m$ e che $\dot{\mathbf{q}} \equiv \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è tale che $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}$. Per la dipendenza da \mathbf{q} otteniamo

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \mathcal{H}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \mathcal{H}) = \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}},$$

mentre per la dipendenza da \mathbf{p} si ha

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \mathcal{H}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \mathcal{H}) = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}},$$

che sono precisamente le equazioni di Hamilton.

3.4. Teorema di Liouville e teorema di Poincaré. Il formalismo di Hamilton apre ad una interpretazione “fluidodinamica” dell’evoluzione, in cui le traiettorie sono indotte direttamente dal gradiente della funzione hamiltoniana che mappa lo spazio delle fasi in se stesso in maniera invertibile (per via della reversibilità del moto). Il campo hamiltoniano ha anche una proprietà aggiuntiva interessante, di immediata verifica.

PROPOSIZIONE 3.5. *Se \mathcal{H} ha derivate seconde continue rispetto a \mathbf{q} e \mathbf{p} , allora $\mathbf{v} = \mathbf{J} \partial_{\mathbf{x}} \mathcal{H}$ ha divergenza nulla.*

Come nel caso lagrangiano, indichiamo con $\mathbf{g}^t(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ la traiettoria nello spazio delle fasi ottenuta risolvendo le equazioni di Hamilton per un tempo t a partire dalle condizioni iniziali $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. Più in generale, dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ nello spazio delle fasi, indicheremo con

$$\mathbf{g}^t \Omega := \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2m} \mid \exists (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in \Omega \text{ tale che } (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{g}^t(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)\}.$$

In altre parole, $\mathbf{g}^t \Omega$ è l’evoluzione di Ω sotto l’azione di \mathbf{v} . Questo vero e proprio *flusso* nello spazio delle fasi soddisfa il seguente teorema.

TEOREMA 3.6 (Liouville). *Il flusso nello spazio delle fasi preserva i volumi a condizione di avere divergenza nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Il volume di $\mathbf{g}^t \Omega$ può essere scritto come

$$|\mathbf{g}^t \Omega| = \int_{\mathbf{g}^t \Omega} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \det \frac{\partial \mathbf{g}^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Per $t = o(1)$ possiamo scrivere

$$\mathbf{g}^t \mathbf{x} = \mathbf{x} + t \mathbf{v}(\mathbf{x}) + o(t)$$

e quindi lo jacobiano nell’integrale si scrive

$$\frac{\partial \mathbf{g}^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} + t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + o(t) \Rightarrow \det \frac{\partial \mathbf{g}^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 1 + t \operatorname{tr} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + o(t) = 1 + t \operatorname{div} \mathbf{v} + o(t).$$

In altre parole,

$$\frac{d|g^t\Omega|}{dt} \Big|_{t=0} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Essendo per ipotesi $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, la derivata è nulla e il teorema è dimostrato. \square

COROLLARIO 3.7. *Un punto non singolare non può essere asintoticamente stabile.*

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{x}_0 è punto asintoticamente stabile, le traiettorie nate in una sfera centrata in esso tenderebbero a \mathbf{x}_0 , ovvero il volume della sfera verrebbe compresso tendendo a 0 per $t \rightarrow +\infty$: ciò è in contraddizione col teorema di Liouville, a meno che \mathbf{x}_0 sia non regolare, sia un punto di discontinuità per \mathcal{H} o per le sue derivate fino alla seconda. \square

Concludiamo questa introduzione al formalismo hamiltoniano con un importante teorema, dovuto a Poincaré.

TEOREMA 3.8 (del ritorno di Poincaré). *Si consideri un sistema hamiltoniano autonomo di funzione hamiltoniana \mathcal{H} , la cui dinamica è vincolata ad una regione limitata dello spazio delle fasi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m}$. Sia $\mathcal{B}_0 \subseteq \Omega$ un sottoinsieme di Ω di misura non nulla, e sia $\mathcal{B}_t := g^t \mathcal{B}_0 \subseteq \Omega$, con g^t flusso di fase indotto da \mathcal{H} . Allora $\forall \tau > 0$, $\exists t > \tau$ tale che $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_0 \neq \emptyset$. Inoltre, tutte le traiettorie originate in \mathcal{B}_0 vi fanno ritorno infinite volte.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la successione $t_n = n\tau$, con $n \in \mathbb{N}_0$, e sia $\mathcal{B}_n := g^{n\tau} \mathcal{B}_0$. Per via del teorema di Liouville, per ogni n si avrà $|\mathcal{B}_n| = |\mathcal{B}_0|$. Poiché ciascun insieme deve essere in Ω , che è assunto avere volume finito, dovranno esistere necessariamente due interi a e $a+k > a$ tali per cui $\mathcal{S} := \mathcal{B}_a \cap \mathcal{B}_{a+k} \neq \emptyset$, diversamente la misura di $\bigcup_{n=1}^N \mathcal{B}_n$ divergerebbe con N , cosa impossibile essendo limitata da $|\Omega|$. Se $a = 0$ la tesi è dimostrata. Se viceversa che $a \geq 1$, consideriamo le traiettorie dei punti di \mathcal{S} : in virtù del fatto che la dinamica è del primo ordine, queste traiettorie possono anche essere percorse all'indietro fino a $t = 0$, utilizzando cioè i punti di \mathcal{S} come condizione iniziale e invertendo $t \mapsto -t$. Così facendo, si otterrà un insieme $\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_k \neq \emptyset$. Gli infiniti ritorni si dimostrano per applicazione successiva di questo risultato. \square

Il teorema stabilisce in definitiva che un sistema hamiltoniano autonomo ritorna arbitrariamente vicino alla sua condizione iniziale dopo un tempo sufficientemente lungo, per una infinità di volte. Questo fatto semplice ma fondamentale ha avuto forti conseguenze sul dibattito scientifico in meccanica statistica.

CAPITOLO 3

Meccanica del corpo rigido

1. Cambi di riferimento

Abbiamo finora considerato la meccanica dei sistemi fisici rispetto ad un riferimento assunto fisso e inerziale, parametrizzando lo spazio euclideo \mathbb{E}^3 tramite la scelta di un punto di origine e di una opportuna terna ortonormale, in modo da fissare un riferimento cartesiano $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$. Ha però senso chiedersi come le quantità introdotte si trasformino passando da un certo riferimento fisso ad un altro che è *mobile* rispetto al riferimento di partenza, e possibilmente non inerziale. In particolare, consideriamo l'eventualità in cui esistano due osservatori, uno “fisso” (non necessariamente inerziale), con un associato riferimento cartesiano $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, ed uno “mobile” rispetto al primo, con un riferimento cartesiano $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, che assumiamo orientato come il riferimento fisso, in cui O_* sia individuato dal vettore¹ $\mathbf{x}_*(t) = \overrightarrow{OO_*}$ nel vecchio riferimento, e ugualmente $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, siano i versori della base del nuovo riferimento mobile². La terna mobile $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ deve essere ortonormale in ogni istante di tempo: così, per esempio, se osserviamo l’evoluzione nell’intervallo temporale $[t_0, t_1]$, richiederemo

$$\|\hat{\mathbf{e}}_1(t)\| = \|\hat{\mathbf{e}}_2(t)\| = 1, \quad \langle \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t) \rangle = 0, \quad \hat{\mathbf{e}}_3(t) = \hat{\mathbf{e}}_1(t) \wedge \hat{\mathbf{e}}_2(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

La conoscenza dell’evoluzione della terna ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}_i(t)\}_{i=1}^3$ e $\mathbf{x}_*(t)$ rispetto al riferimento fisso sono sufficienti a riscrivere l’evoluzione temporale delle coordinate $\mathbf{x}_P(t)$ di un punto P , nota rispetto ad un riferimento fisso. Infatti, il vettore $\mathbf{x}_P^*(t) := \mathbf{x}_P(t) - \mathbf{x}_*(t)$, che individua il punto nel *nuovo* riferimento, ha componenti $x_i^*(t) = \langle \mathbf{x}_P(t) - \mathbf{x}_*(t), \hat{\mathbf{e}}_i(t) \rangle$ rispetto alla nuova base, di modo che $\mathbf{x}_P^*(t) = \sum_{i=1}^3 x_i^*(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t)$. Come sappiamo dall’algebra lineare, a t fissato, è possibile individuare una matrice di cambio di base $\mathbf{R}(t) \in \text{SO}(3)$ che permette di passare dalla base fissa $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$ alla base mobile $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ mantenendo l’orientazione, scrivendo la nuova base in termini della vecchia come

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t) = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(t) \hat{\mathbf{i}}_j.$$

In questo modo si ha la seguente relazione tra le coordinate di P nel vecchio e nel nuovo riferimento,

$$(3.1) \quad \mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}_*(t) + \mathbf{R}(t)^\top \mathbf{x}_P^*(t),$$

dove $\mathbf{x}_P^*(t) \in \mathbb{R}^3$ è la terna di coordinate del punto nella base mobile, e $\mathbf{x}_P(t) \in \mathbb{R}^3$ è la terna di coordinate dello stesso punto nel riferimento fisso. Vale la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.1. Si dice che un punto materiale P evolve in maniera *solidale* col nuovo riferimento se in esso è individuato da un vettore \mathbf{x}_P^* tale che

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}_P^*(t), \hat{\mathbf{e}}_i(t) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

In altre parole, un punto che si muove in modo solidale con la terna mobile ha coordinate che *non* cambiano rispetto a questa terna.

¹Dato che in questo capitolo sarà frequente avere a che fare con oggetti vettoriali rappresentati in basi diverse, indicheremo con \mathbf{x} un vettore in uno spazio d dimensionale e con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ le sue componenti secondo una certa base specificata.

²In questo capitolo, indicheremo con un \mathbf{u}_* una quantità *associata* al riferimento mobile ma espressa *relativamente* al riferimento fisso, e con \mathbf{u}^* una quantità *espressa* nel riferimento mobile.

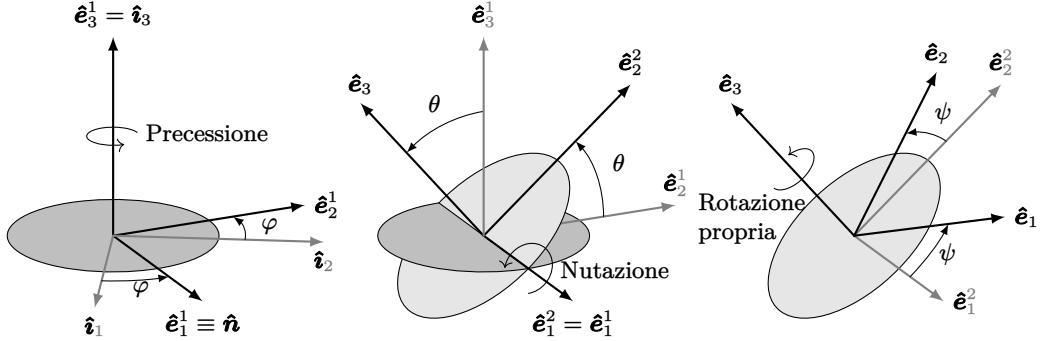


FIGURA 1. Angoli di Eulero.

1.1. Angoli di Eulero. Ogni matrice $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ è caratterizzata da soli *tre* parametri arbitrari: ciò significa che per caratterizzare un cambio di riferimento ortonormale sono necessarie le tre coordinate di $\mathbf{x}_*(t)$ della nuova origine rispetto al riferimento fisso, e tre parametri per fissare la matrice $\mathbf{R}(t)$, come si vede dall'Eq. (3.1). Per introdurre una opportuna parametrizzazione di \mathbf{R} utilizzeremo il metodo di Eulero: questo metodo *non* è unico, e in effetti altre scelte di metodo sono possibili, ma è quello più diffusamente utilizzato per via di una serie di vantaggi legati a come la parametrizzazione di \mathbf{R} viene introdotta.

Immaginiamo quindi di voler fare il cambio di terna ortonormale

$$(\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3).$$

Supponiamo che $\hat{\mathbf{i}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 \neq \mathbf{0}$ (ovvero che $\hat{\mathbf{i}}_3$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ non siano paralleli) e definiamo il versore

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{i}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3}{\|\hat{\mathbf{i}}_3 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3\|}.$$

Questo versore indica il cosiddetto *asse dei nodi*. In base a questo asse possiamo definire tre angoli, detti *angoli di Eulero*:

Angolo di precessione: Angolo $\varphi \in [0, 2\pi]$ di cui bisogna ruotare $\hat{\mathbf{i}}_1$, nel piano ortogonale a $\hat{\mathbf{i}}_3$, per sovapporlo a $\hat{\mathbf{n}}$.

Angolo di nutazione: Angolo $\theta \in [0, \pi]$ di cui bisogna ruotare $\hat{\mathbf{i}}_3$, nel piano ortogonale a $\hat{\mathbf{n}}$, per ottenere $\hat{\mathbf{e}}_3$.

Angolo di rotazione propria: Angolo $\psi \in [0, 2\pi]$ di cui bisogna ruotare $\hat{\mathbf{n}}$ per sovrapporlo a $\hat{\mathbf{e}}_1$ nel piano ortogonale a $\hat{\mathbf{e}}_3$.

Questi angoli si possono mettere in corrispondenza con tre *rotazioni* attorno ad assi coordinati, che permettono di trasformare la base di partenza in quella di arrivo. Tali rotazioni si intendono in senso antiorario rispetto al versore ortogonale specificato. Per essere più precisi, con riferimento alla Fig. 1, passiamo dalla base $(\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3)$ alla base $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ eseguendo i seguenti passi:

$$(\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_1^1, \hat{\mathbf{e}}_2^1, \hat{\mathbf{e}}_3^1) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_1^2, \hat{\mathbf{e}}_2^2, \hat{\mathbf{e}}_3^2) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3),$$

Il primo passo corrisponde ad una rotazione attorno a $\hat{\mathbf{i}}_3$,

$$\hat{\mathbf{e}}_1^1 = \cos \varphi \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \varphi \hat{\mathbf{i}}_2 \equiv \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2^1 = -\sin \varphi \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \varphi \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_3^1 = \hat{\mathbf{i}}_3,$$

seguita da una rotazione attorno al nuovo asse $\hat{\mathbf{e}}_1^1$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^2 = \hat{\mathbf{e}}_1^1, \quad \hat{\mathbf{e}}_2^2 = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1^1 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3^1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3^2 = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1^1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3^1,$$

e infine una rotazione attorno all'asse $\hat{\mathbf{e}}_3^2$, che coincide con l'asse finale desiderato $\hat{\mathbf{e}}_3$,

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1^2 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2^2, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = -\sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1^2 + \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2^2, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3^2.$$

Con un po' di algebra si può esprimere direttamente la nuova base in termini della vecchia come

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\hat{\mathbf{i}}_1 + (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)\hat{\mathbf{i}}_2 + \sin\theta\sin\psi\hat{\mathbf{i}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= (-\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\hat{\mathbf{i}}_1 + (-\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta)\hat{\mathbf{i}}_2 + \sin\theta\cos\psi\hat{\mathbf{i}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \sin\varphi\sin\theta\hat{\mathbf{i}}_1 - \cos\varphi\sin\theta\hat{\mathbf{i}}_2 + \cos\theta\hat{\mathbf{i}}_3. \end{aligned}$$

Le formule sopra equivalgono alla seguente forma per \mathbf{R} ,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La parametrizzazione della rotazione \mathbf{R} qui introdotta richiede che $\hat{\mathbf{i}}_3$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ non siano paralleli: questa difficoltà, ovvero l'impossibilità di associare biunivocamente tutte le rotazioni ad un singolo tipo di parametrizzazione, appare per *qualsiasi* costruzione. Se d'altra parte $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_3$, è chiaro che abbiamo bisogno solo di un movimento di rotazione, e più precisamente di una precessione, in cui $\hat{\mathbf{i}}_1 \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_1$, per cui le Eq. (3.2) diventano

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \cos\alpha\hat{\mathbf{i}}_1 + \sin\alpha\hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\sin\alpha\hat{\mathbf{i}}_1 + \cos\alpha\hat{\mathbf{i}}_2 \Leftrightarrow \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \hat{\mathbf{i}}_3. \end{aligned}$$

In questo caso, α è semplicemente detto *angolo di rotazione*. Si noti che la forma sopra di \mathbf{R} si ottiene anche dalla costruzione di Eulero nel limite $\theta \rightarrow 0$ e identificando $\alpha = \varphi + \psi$.

1.2. Velocità angolare e formule di Poisson. Il riferimento mobile dipende naturalmente, in generale, dalla variabile temporale t ed è quindi utile studiarne l'evoluzione in senso differenziale. Possiamo anzitutto osservare che, dovendo la nuova terna mantenersi ortonormale in ogni istante,

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow 0 = \frac{d\langle \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle}{dt} = \langle \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle + \langle \hat{\mathbf{e}}_i, \dot{\hat{\mathbf{e}}}_j \rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

In particolare, per $i = j$, $\langle \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i, \hat{\mathbf{e}}_i \rangle = 0$, ovvero la derivata temporale di $\hat{\mathbf{e}}_i$ è ortogonale al versore $\hat{\mathbf{e}}_i$ stesso. Il seguente teorema, dovuto a Poisson, fornisce una informazione più precisa su come evolvono questi versori ortonormali.

TEOREMA 1.1 (Poisson). *Sia $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ una terna ortonormale tale che $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2$ che evolve nel tempo rispetto ad una terna fissa $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$. Allora esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$, detto vettore velocità angolare tale per cui*

$$(3.4) \quad \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Inoltre, ogni terna solidale alla terna $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ evolve con la stessa velocità angolare.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$ un elemento della terna solidale al tempo t e $\hat{\mathbf{e}}_i(t+\tau)$ lo stesso elemento al tempo $t+\tau$. Sappiamo che esiste una matrice $\mathbf{R}(\tau) \in \text{SO}(3)$ tale che $\mathbf{e}_i(t+\tau) = \mathbf{R}(\tau)\mathbf{e}_i(t)$, dove $\mathbf{e}_i(t)$ è la terna che identifica $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$ secondo la base fissa. Abbiamo quindi che

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_i(t+\tau) - \mathbf{e}_i(t)}{\tau} = \left. \frac{d\mathbf{R}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \mathbf{e}_i(t).$$

Sappiamo che, in virtù del Lemma 1.4, la matrice $\dot{\mathbf{R}}(0)$ è antisimmetrica, e può quindi essere espressa come

$$\dot{\mathbf{R}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si osserva, per ispezione diretta, che indicando con $\boldsymbol{\omega} = \sum_k \omega_k \hat{\mathbf{i}}_k$,

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i.$$

Il vettore è unico (se esistesse un diverso $\boldsymbol{\omega}'$ tale per cui la relazione precedente è soddisfatta, si avrebbe $(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') \wedge \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0}$ per ogni i). Infine, dimostriamo che $\boldsymbol{\omega}$ è lo stesso per ogni terna solidale alla terna

mobile considerata. Supponiamo quindi di avere una diversa terna ortonormale $\{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3\}$ solidale alla terna $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$. Abbiamo che

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} (\langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle \hat{\mathbf{e}}_j) = \sum_{j=1}^3 \frac{d\langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle}{dt} \hat{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle \dot{\hat{\mathbf{e}}}_j = \boldsymbol{\omega}_* \wedge \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle \hat{\mathbf{e}}_j = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{b}}_i$$

dove abbiamo usato il fatto che $\langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle$ non dipende dal tempo essendo la terna $\{\hat{\mathbf{b}}_i\}_{i=1}^3$ solidale. \square

Si noti che la formula nell'enunciato del Teorema di Poisson può essere invertita e il vettore $\boldsymbol{\omega}$ si può scrivere come

$$(3.5) \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \wedge \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i.$$

Usando l'identità $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, basta infatti osservare che

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \wedge \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i) = \sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\omega} - \langle \boldsymbol{\omega}, \hat{\mathbf{e}}_i \rangle \hat{\mathbf{e}}_i) = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Supponiamo ora di avere un vettore \mathbf{u} generico, espresso in termini della terna fissa come $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 u_j \hat{\mathbf{i}}_j$, e calcoliamone la derivata temporale. Rispetto alla terna fissa, questa derivata sarà $\dot{\mathbf{u}} = \sum_j \dot{u}_j \hat{\mathbf{i}}_j$. Questo stesso vettore può scriversi rispetto alla terna mobile come $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{\mathbf{e}}_i$, dove sia i coefficienti che i versori di base sono in generale dipendenti dal tempo. Derivando questa espressione, avremo

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^* \hat{\mathbf{e}}_i + \boldsymbol{\omega} \wedge \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{\mathbf{e}}_i \equiv \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}.$$

La quantità $\mathbf{u}' := \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^* \hat{\mathbf{e}}_i$ è la derivata temporale del vettore *nel riferimento mobile*: in effetti, un osservatore solidale al riferimento mobile vede la terna $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ come *fissa*, e nel calcolo della velocità tiene conto della dipendenza temporale delle sole coordinate, non della base. In particolare applicando questo risultato a $\boldsymbol{\omega}$ si trova

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'.$$

ovvero le derivate temporali di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto ad un riferimento fisso e rispetto ad un riferimento mobile sono uguali.

1.3. Trasformazioni delle quantità cinematiche. Avendo ottenuto la relazione tra derivate temporali in due sistemi di riferimento per un generico vettore, possiamo ora applicare questo risultato ad un vettore posizione. Supponiamo quindi di avere un punto materiale P in posizione $\mathbf{x}_P(t)$ rispetto ad un riferimento cartesiano fisso $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$. In un riferimento mobile $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, la stessa posizione è individuata dal vettore $\mathbf{x}_P^*(t) = \mathbf{x}_P(t) - \mathbf{x}_*(t)$, vettore da intendersi applicato in O_* , origine del riferimento mobile individuato da \mathbf{x}_* rispetto ad O . Varrà la seguente legge di composizione

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_* + \mathbf{x}_P^*.$$

Derivando rispetto al tempo otterremo

$$\mathbf{v}_P := \dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_* + \dot{\mathbf{x}}_P^* \equiv \mathbf{v}_* + \dot{\mathbf{x}}_P^*,$$

dove $\mathbf{v}_* := \dot{\mathbf{x}}_*$ è la velocità della nuova origine O_* rispetto al sistema di riferimento fisso. Per quanto detto sopra

$$\dot{\mathbf{x}}_P^* = \mathbf{v}_P^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P^*$$

dove $\mathbf{v}_P^* := \mathbf{x}_P^{*\prime}$ è la velocità osservata nel riferimento mobile. Abbiamo ottenuto così la *legge di composizione delle velocità di Galilei*

$$(3.7) \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}_P^\tau, \quad \text{dove } \mathbf{v}_P^\tau := \mathbf{v}_* + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P^*.$$

Il termine di differenza tra le velocità nei due riferimenti, \mathbf{v}_P^τ , è detta *velocità di trascinamento*.

Ripetendo i ragionamenti sopra sulla formula per le velocità otteniamo la legge delle composizioni per le accelerazioni. Derivando rispetto al tempo l'Eq. (3.7) otteniamo infatti

$$(3.8a) \quad \boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_P^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x}_P^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x}_P^*),$$

dove abbiamo scritto $\ddot{\boldsymbol{x}}_* = \boldsymbol{a}_*$ e

$$(3.8b) \quad \boldsymbol{a}_P^\tau := \boldsymbol{a}_* + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x}_P^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x}_P^*), \quad \boldsymbol{a}_P^c := 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_P^*$$

sono dette rispettivamente *accelerazione di trascinamento* e *accelerazione di Coriolis*. L'accelerazione di trascinamento corrisponde all'accelerazione di un punto impermeato al riferimento mobile, privo di velocità relativa rispetto ad esso. Il termine aggiuntivo è dovuto ad una ulteriore accelerazione che appare quando $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_P^* \neq \mathbf{0}$.

Si noti che se $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, ovvero la velocità angolare è costantemente nulla (osservatore mobile traslante) la legge di composizione delle velocità è semplicemente $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_* + \boldsymbol{v}_P^*$. Infine, se anche $\boldsymbol{a}_* = \mathbf{0}$, le accelerazioni nei due riferimenti sono uguali: in questo caso, la trasformazione è infatti *galileiana*, ovvero corrisponde ad un cambio di riferimento del gruppo di Galilei.

Rimane da specificare come possono essere composte le velocità angolari. Supponiamo per esempio di avere un riferimento fisso $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ con base $\{\hat{\mathbf{i}}_j\}_{j=1}^3$, e un riferimento rispetto ad esso mobile $O_\bullet\hat{\mathbf{b}}_1\hat{\mathbf{b}}_2\hat{\mathbf{b}}_3$ con velocità angolare associata $\boldsymbol{\omega}_\bullet$ rispetto al riferimento fisso. Supponiamo quindi di avere un terzo riferimento $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, anch'esso mobile, avente velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_*$ rispetto al riferimento fisso. Vogliamo calcolare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\bullet|*}$ del riferimento mobile $O_\bullet\hat{\mathbf{b}}_1\hat{\mathbf{b}}_2\hat{\mathbf{b}}_3$ rispetto al riferimento mobile $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$. Come osservazione preliminare, supponiamo che si abbia un vettore \boldsymbol{u} solidale con il riferimento $O_\bullet\hat{\mathbf{b}}_1\hat{\mathbf{b}}_2\hat{\mathbf{b}}_3$. Ciò significa che

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\omega}_\bullet \wedge \boldsymbol{u}.$$

Nel riferimento $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ si osserva la stessa relazione

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{\omega}_{\bullet|*} \wedge \boldsymbol{u}$$

per un certo — in generale diverso — vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\bullet|*}$ associato a $O_\bullet\hat{\mathbf{b}}_1\hat{\mathbf{b}}_2\hat{\mathbf{b}}_3$ da un osservatore nel riferimento $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ (qui, come sopra, \boldsymbol{u}' è la derivata di \boldsymbol{u} nel riferimento mobile $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$). D'altra parte conosciamo la relazione tra la derivata temporale in $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ e la derivata in $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{\omega}_* \wedge \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_\bullet \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}_{\bullet|*} \wedge \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\omega}_* \wedge \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{\omega}_{\bullet|*} + \boldsymbol{\omega}_*) \wedge \boldsymbol{u}.$$

Essendo \boldsymbol{u} arbitrario, questo significa che

$$\boldsymbol{\omega}_\bullet = \boldsymbol{\omega}_{\bullet|*} + \boldsymbol{\omega}_*,$$

che è la legge che lega le tre velocità angolari. La legge di composizione delle velocità angolari può essere utile per scrivere una espressione esplicita del momento angolare in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate quando si passa da un sistema fisso ad uno mobile. Per essere più precisi, dato un riferimento fisso $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, introduciamo tre riferimenti mobili.

- Il riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1^1\hat{\mathbf{e}}_2^1\hat{\mathbf{e}}_3^1$ ruota, rispetto al riferimento fisso, attorno all'asse $\hat{\mathbf{e}}_3^1 \equiv \hat{\mathbf{i}}_3$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{i}}_3$.
- Il riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1^2\hat{\mathbf{e}}_2^2\hat{\mathbf{e}}_3^2$ ruota, rispetto al riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1^1\hat{\mathbf{e}}_2^1\hat{\mathbf{e}}_3^1$, attorno all'asse $\hat{\mathbf{e}}_1^2 \equiv \hat{\mathbf{e}}_1^1$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_1^1$.
- Il riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ ruota, rispetto al riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1^2\hat{\mathbf{e}}_2^2\hat{\mathbf{e}}_3^2$, attorno all'asse $\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv \hat{\mathbf{e}}_3^2$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\psi}\hat{\mathbf{e}}_3^2$.

In questo modo, in base a quanto detto sopra, la velocità angolare del riferimento mobile finale rispetto al riferimento fisso di partenza è

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{i}}_3 + \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_1^1 + \dot{\psi}\hat{\mathbf{e}}_3^2.$$

Esprimendo i vettori $\hat{\mathbf{e}}_1^1$ e $\hat{\mathbf{e}}_3^2$ in termini della base fissa si ottiene, dopo un po' di algebra,

$$(3.9a) \quad \boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) \hat{\mathbf{i}}_1 + (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{i}}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}_3$$

o viceversa, scrivendo tutto in termini della base mobile finale

$$(3.9b) \quad \boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{\mathbf{e}}_3.$$

1.3.1. Forze apparenti. Abbiamo visto che in un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale P di massa costante m e traiettoria $\mathbf{x}_P(t)$ soggetto ad una forza totale \mathbf{F} deve soddisfare la legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$. Questa legge, così come tutti i principi della meccanica, rimane inalterata se si effettua un cambio di riferimento passando da un sistema inerziale ad un altro sistema inerziale per mezzo di una trasformazione galileiana, che come abbiamo visto preserva le accelerazioni. Se il punto non è soggetto a forze e ha quindi accelerazione nulla nel primo riferimento, avrà accelerazione nulla anche nel secondo, rispettando così il primo postulato della meccanica e l'invarianza galileiana già discussa.

La validità dei principi della meccanica non è però garantita se il nuovo riferimento è non inerziale, ovvero se la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del nuovo riferimento e l'accelerazione \mathbf{a}_* della sua origine sono non nulli. Utilizzando la legge di composizione delle accelerazioni in Eq. (3.8), infatti, contributi aggiuntivi dovuti all'accelerazione di trascinamento e all'accelerazione di Coriolis appaiono nella legge del moto,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P = m\mathbf{a}_P^* + m\mathbf{a}_P^\tau + m\mathbf{a}_P^c.$$

Ciò equivale a dire che nel nuovo riferimento, sarà in generale necessario introdurre due nuove "forze"

$$\mathbf{F}^\tau := -m\mathbf{a}_P^\tau, \quad \mathbf{F}^c := -m\mathbf{a}_P^c,$$

dette *forza di trascinamento* e *forza di Coriolis* rispettivamente, in modo che

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^\tau + \mathbf{F}^c = m\mathbf{a}_P^*.$$

Queste "forze" sono dette *apparenti* in quanto compaiono nell'equazione del moto esclusivamente perché il nuovo sistema di riferimento è non inerziale e presenta una accelerazione e una velocità angolare non nulle rispetto al sistema inerziale di partenza. In particolare, la forza apparente di trascinamento

$$\mathbf{F}^\tau = -m(\mathbf{a}_* + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_P^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P^*))$$

è posizionale, mentre la forza di Coriolis

$$\mathbf{F}^c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P^*$$

dipende dalla velocità. A dispetto del nome, le forze apparenti hanno conseguenze reali molto concrete e importanti.

Esempio 3.1 (Forza centrifuga) — Supponiamo che l'osservatore non inerziale sia tale che $\mathbf{a}_* = \mathbf{0}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, ma $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}} \neq \mathbf{0}$, dove $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ è un versore fisso. In questo caso, la forza di trascinamento assume una forma molto più semplice, ovvero

$$\mathbf{F}^\tau = m\omega^2(\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle \hat{\boldsymbol{\omega}}).$$

Questa forza è detta *forza centrifuga*. La ragione è che la quantità $\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle \hat{\boldsymbol{\omega}}$ è esattamente la componente di \mathbf{x}_P^* parallela all'asse \mathcal{R} individuato da $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ passante per O_* : se chiamiamo \mathbf{x}_0^* il punto dell'asse più vicino a \mathbf{x}_P^* , possiamo in effetti scrivere

$$\mathbf{F}^\tau = m\omega^2(\mathbf{x}_P^* - \mathbf{x}_0^*).$$

La forza centrifuga ha una ulteriore proprietà: essa è *conservativa*, dato che è possibile scriverla come il *gradiente* di un potenziale:

$$\mathbf{F}^\tau = -\nabla_{\mathbf{x}_P^*} V^{\text{cen}}, \quad \text{dove } V^{\text{cen}}(\mathbf{x}_P^*) = -\frac{1}{2}m\omega^2\|\mathbf{x}_P^* - \mathbf{x}_0^*\|^2 \equiv -\frac{1}{2}\omega^2 m d^2(P, \mathcal{R}).$$

Vedremo in seguito che $m d^2(P, \mathcal{R})$ è detto *momento d'inerzia* del punto materiale in P rispetto all'asse \mathcal{R} .

Esempio 3.2 (Una correzione non-inerziale a g) — Un riferimento solidale con la Terra *non* è un sistema di riferimento inerziale per via di vari moti di rotazione e rivoluzione che la Terra compie e che tipicamente vengono trascurati in prima approssimazione. Una prima correzione non-inerziale da tenere in conto è l'effetto della *rotazione* terrestre: come ben noto, la Terra ruota attorno ad un suo asse con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ costante, compiendo una rotazione completa nell'arco di 24 ore. Indichiamo con $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ un riferimento che *assumiamo* inerziale, con origine nel centro della Terra³ e tale che $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{i}}_3$.

³Stiamo trascurando ogni altro moto terrestre fuorché quello di rotazione

Introduciamo altresì un riferimento mobile solidale col moto della Terra, $O\hat{\mathbf{b}}_1\hat{\mathbf{b}}_2\hat{\mathbf{b}}_3$, con origine sempre il centro della Terra ma solidale ad essa, tale per cui

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \phi \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{b}}_2 = -\sin \phi \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{b}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_3,$$

dove $\dot{\phi} = \omega$, quantità costante. Immaginiamo ora di avere un punto materiale P di massa m sulla superficie, fermo nel sistema solidale con la Terra e con coordinate rispetto ad esso date da

$$\mathbf{x}_P^* = R_T \cos \lambda \hat{\mathbf{b}}_1 + R_T \sin \lambda \hat{\mathbf{b}}_3.$$

Qui λ è l'angolo di \mathbf{x}_P con il piano dell'equatore, vedasi Fig. 2. Su tale punto materiale è attiva la forza peso, che nel riferimento solidale con la Terra si scrive

$$\mathbf{F} = -mg \cos \lambda \hat{\mathbf{b}}_1 - mg \sin \lambda \hat{\mathbf{b}}_3.$$

Come abbiamo visto, per effetto della non-inerzialità del sistema compare anche una *forza di trascinamento*, che in questo caso, essendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{i}}_3$ con direzione costante, ha la forma di una forza centrifuga,

$$\mathbf{F}^\tau = m\omega^2(\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle \hat{\mathbf{i}}_3) = m\omega^2(\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\mathbf{b}}_3 \rangle \hat{\mathbf{b}}_3) = m\omega^2 R_T \cos \lambda \hat{\mathbf{b}}_1.$$

In generale è presente una ulteriore forza di Coriolis: tuttavia abbiamo assunto il punto materiale essere fermo nel sistema solidale con la Terra, per cui questo contributo è nullo. Nel sistema non inerziale, quindi, il punto materiale P ha una accelerazione \mathbf{a}_P^* tale da soddisfare

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^\tau = m(\omega^2 R_T - g) \cos \lambda \hat{\mathbf{b}}_1 - mg \sin \lambda \hat{\mathbf{b}}_3 = m\mathbf{a}_P^*.$$

In altre parole, nel riferimento della Terra il punto materiale è soggetto ad una accelerazione diversa in modulo da g e pari a

$$\|\mathbf{a}_P^*\| = \sqrt{g^2 \sin^2 \lambda + (g - R_T \omega^2)^2 \cos^2 \lambda}.$$

Ne risulta che l'accelerazione percepita in un riferimento solidale con il moto terrestre ha in effetti un andamento che dipende dalla latitudine a cui il punto materiale si trova: in particolare, essendo $R_T \omega^2 < g$, essa è massima ai poli ($\lambda = \frac{\pi}{2}$), dove è semplicemente pari a g , mentre è minima all'equatore ($\lambda = 0$), dove è pari a $g - R_T \omega^2$. Si tratta comunque di una fluttuazione sul valore di g di poco più del 3%.

Immaginiamo, infine, che il punto materiale *abbia* una velocità nel riferimento non inerziale, per esempio nella direzione sud-nord tangenzialmente alla sfera, di modo che, nel riferimento solidale,

$$\mathbf{v}_P^* = -\dot{\lambda} R_T \sin \lambda \hat{\mathbf{i}}_1 + \dot{\lambda} R_T \cos \lambda \hat{\mathbf{i}}_3.$$

per cui la forza di Coriolis è

$$\mathbf{F}^c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P^* = \omega \dot{\lambda} R_T \sin \lambda \hat{\mathbf{i}}_2.$$

La forza punta quindi verso est se il corpo si muove verso nord, viceversa punta verso ovest se il corpo si muove verso sud.

Esempio 3.3 (Pendolo di Foucault) — Consideriamo un pendolo di lunghezza ℓ , in cui un punto materiale P di massa m è in oscillazione sulla superficie terrestre in una località a latitudine λ . Il pendolo è sospeso in un punto Q che è solidale alla superficie della Terra: vogliamo valutare l'effetto del moto di rotazione terrestre sul pendolo, trascurando ogni altro moto del pianeta, *nel limite di piccole oscillazioni* del pendolo. Approssimiamo quindi come inerziale un riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ con origine O nel centro della Terra, in modo che il moto di rotazione terrestre avvenga con velocità $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{i}}_3$, dove ω è costante. Si veda Fig. 2. Supponiamo inoltre che sia dato un secondo riferimento $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2$ con origine O_* , punto di intersezione tra il segmento \overline{QO} e la superficie terrestre, di modo che la posizione di Q sia $\mathbf{x}_Q = \ell \hat{\mathbf{e}}_3$. Scegliamo inoltre $\hat{\mathbf{e}}_1$ diretto nella direzione da sud-nord, mentre di conseguenza $\hat{\mathbf{e}}_2$ è diretto nella direzione est-ovest. Questo secondo riferimento si assume solidale col pianeta. Indichiamo con θ l'angolo tra il pendolo e la direzione $\hat{\mathbf{e}}_3$. Come conseguenza di questa scelta, in ogni momento del moto

$$\hat{\mathbf{i}}_3 = \cos \lambda \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \lambda \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Osserviamo ora che le coordinate del punto P nel riferimento mobile sono⁴

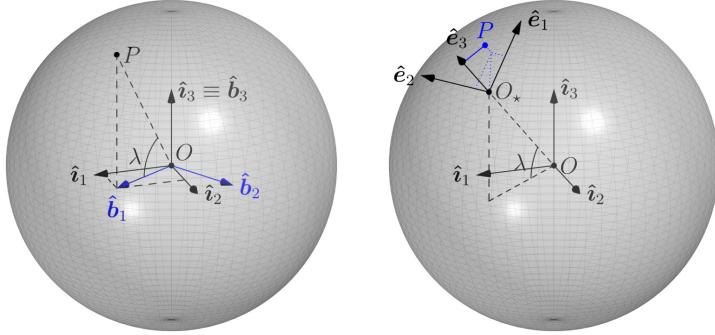


FIGURA 2. Schema per le correzioni non inerziali a g (sinistra) e per il problema del pendolo di Foucault (destra).

$$\mathbf{x}_P^* = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \ell(1 - \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_3 \simeq x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2$$

essendo $x_1 = O(\theta)$ e $x_2 = O(\theta)$, mentre la terza componente è $o(\theta)$: in altre parole, il moto ha luogo approssimativamente in un piano ortogonale a $\hat{\mathbf{e}}_3$. Il pendolo è inoltre sottoposto ad un potenziale⁵

$$V(\mathbf{x}^*) = mgx_3 = mg(h - \ell \cos \theta) \simeq \frac{mg\ell\theta^2}{2} + \text{costante} \simeq \frac{mg(x_1^2 + x_2^2)}{2\ell} + \text{costante}$$

dove abbiamo utilizzato l'approssimazione di piccole oscillazioni $\theta \sim \sin \theta$.

Vediamo ora come riscrivere queste quantità dal punto di vista del sistema di riferimento inerziale $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$. La velocità di trascinamento è data da

$$\mathbf{v}_P^\tau = \mathbf{v}_* + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P^*.$$

Osserviamo ora che $\mathbf{x}_* = R_T \hat{\mathbf{e}}_3$, e quindi $\mathbf{v}_* = R_T \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_3$, ed infine $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_P^* + \mathbf{x}_* = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + R_T \hat{\mathbf{e}}_3$, con R_T raggio della Terra, per cui

$$\mathbf{v}_P^\tau = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}.$$

Essendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3 = -\omega \cos \lambda \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega \sin \lambda \hat{\mathbf{e}}_3$, il prodotto vettoriale può essere eseguito nel riferimento mobile e fornisce

$$\mathbf{v}_P^\tau = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x} = -\omega x_2 \sin \lambda \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega(R_T \cos \lambda - x_1 \sin \lambda) \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega x_2 \cos \lambda \hat{\mathbf{e}}_3,$$

mentre la velocità nel riferimento inerziale si ottiene sommando a questa la velocità relativa, $\mathbf{v}^* = \dot{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_2$, in modo che infine $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}^\tau$, da cui è possibile calcolare l'energia cinetica. Questo calcolo può essere semplificato tenendo conto del fatto che ω ha un valore piccolo, essendo $\omega \simeq 10^{-5} \text{ Hz}$, per cui si possono trascurare i termini quadratici in esso, eccetto $\omega^2 R_T$ (il raggio della Terra è molto grande, $R_T \simeq 10^6 \text{ m}$). Si ottiene così

(3.10)

$$T \simeq \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_2 R_T \omega \cos \lambda + R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda + 2\omega(x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) \sin \lambda - 2R_T x_1 \omega^2 \cos \lambda \sin \lambda)$$

e quindi (trascurando costanti additive non importanti) la lagrangiana

$$(3.11) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\omega(x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) \sin \lambda - 2R_T \omega \dot{x}_2 \cos \lambda - R_T \omega^2 x_1 \sin(2\lambda)) - \frac{mg}{2\ell}(x_1^2 + x_2^2).$$

Le equazioni di Eulero–Lagrange si ottengono nella maniera solita: si trova

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{\ell}x_1 = 2\omega \dot{x}_2 \sin \lambda - \frac{1}{2}R_T \omega^2 \sin(2\lambda), \quad \ddot{x}_2 + \frac{g}{\ell}x_2 = -2\omega \dot{x}_1 \sin \lambda.$$

⁴Dovremmo usare la notazione x_i^* , essendo le componenti di \mathbf{x}_P^* espresse rispetto al riferimento mobile. Ometteremo l'apice per alleggerire la notazione.

⁵Abbiamo visto che in realtà un contributo aggiuntivo dovrebbe tener conto delle correzioni non inerziali a g . Trascureremo qui la correzione per semplicità.

Per $\omega = 0$ o $\lambda = 0$ si recuperano le solite equazioni del moto armonico: diversamente, le due componenti dell'oscillazione sono accoppiate. Introducendo $x = x_1 + \frac{1}{2g} R_T \ell \omega^2 \sin(2\lambda)$ e $y = x_2$, indicando con $\omega_0^2 := \frac{g}{\ell}$ la pulsazione propria del pendolo, e con $\Omega := \omega \sin \lambda$, le equazioni assumono una forma leggermente più semplice,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega \dot{x}.$$

Questa coppia di equazioni può essere studiata in maniera compatta introducendo $z = x + iy$, così che si può riscrivere

$$\ddot{z} + 2i\Omega \dot{z} + \omega_0^2 z = 0,$$

che è una equazione differenziale lineare a coefficienti complessi del tipo che abbiamo studiato nel caso del moto armonico smorzato, e ha soluzione

$$z(t) = e^{-i\Omega t} (\alpha_+ e^{i\omega t} + \alpha_- e^{-i\omega t})$$

per due opportune costanti α_{\pm} da individuare per mezzo delle condizioni iniziali. Il fatto da sottolineare qui è che il termine tra parentesi corrisponda alle oscillazioni "pure", ovvero in assenza di rotazione terrestre ($\Omega = 0$), per cui la presenza del moto di rotazione del pianeta induce una *rotazione* del vettore $z_0(t) = \alpha_+ e^{i\omega t} + \alpha_- e^{-i\omega t}$ nel piano complesso e dunque, in ultima analisi, del piano in cui il pendolo oscilla. Si noti che il periodo di rotazione completa del piano dipende dalla latitudine ed è $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda}$, per cui è minimo al polo e massimo (infinito) all'equatore.

1.3.2. Teoremi di König. I seguenti teoremi permettono di mettere in relazione il momento angolare calcolato in un certo sistema di riferimento assunto fisso con un *sistema di riferimento traslante* centrato nel centro di massa G del sistema, ovvero un sistema di riferimento solidale con G a velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ rispetto al riferimento fisso.

TEOREMA 1.2 (Primo teorema di König). *Dato un corpo B di massa m , quantità di moto \mathbf{Q} e centro di massa G , vale la seguente relazione per un generico punto P :*

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{L}_G^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q},$$

dove \mathbf{L}_G^* è il momento angolare calcolato in un riferimento traslante con origine il centro di massa G .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che il sistema sia composto da n punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ e indichiamo con \mathbf{x}_i la posizione del punto materiale P_i . Per ogni elemento del sistema, la velocità nel riferimento fisso \mathbf{v}_i e quella nel riferimento traslante \mathbf{v}_i^* sono legate dalla semplice relazione $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i^*$. Se \mathbf{x}_G è il vettore che identifica G nel riferimento fisso, abbiamo

(3.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_P &= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge (\mathbf{v}_k^* + \mathbf{v}_G) = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_k^* + \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_G \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_k^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q} \equiv \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_P^*) \wedge \mathbf{v}_k^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q} \equiv \mathbf{L}_P^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q} \end{aligned}$$

dove il termine \mathbf{L}_P^* è il momento angolare rispetto a P nel riferimento traslante. Il fatto notevole, ora, è che questo momento *non* dipende dal punto P e può quindi essere indicato con \mathbf{L}_G^* . In tale riferimento infatti il centro di massa ha velocità nulla, e quindi la quantità di moto \mathbf{Q}^* è nulla: di conseguenza, per via della legge di cambiamento di polo, il punto rispetto al quale \mathbf{L}_G^* viene calcolato è irrilevante. \square

COROLARIO 1.3. *Il momento angolare \mathbf{L}_G calcolato rispetto a G nel riferimento fisso coincide con il momento angolare \mathbf{L}_G^* calcolato nel riferimento traslante centrato nel centro di massa G .*

TEOREMA 1.4 (Secondo teorema di König). *L'energia cinetica di un sistema materiale di massa m può essere espressa come*

$$T = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + T_G^*$$

dove T_G^* è l'energia cinetica del sistema in un riferimento traslante con velocità \mathbf{v}_G pari a quella del centro di massa.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso di un corpo composto da n punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ e indichiamo con \mathbf{x}_i la posizione di un punto materiale P_i di massa m_i . Sia inoltre il centro di massa G del sistema individuato dal vettore \mathbf{x}_G . Per ottenere la decomposizione proposta dal teorema, possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galilei e scrivere

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^* + \mathbf{v}_G,$$

dove \mathbf{v}_k^* è la velocità di P_k rispetto ad un riferimento *traslante* centrato in G . Abbiamo quindi che

$$\|\mathbf{v}_k\|^2 = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \|\mathbf{v}_k^*\|^2 + \|\mathbf{v}_G\|^2 + 2\langle \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \rangle.$$

Dunque possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_G\|^2 \sum_{k=1}^n m_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \|\mathbf{v}_k^*\|^2 + \sum_{k=1}^n m_k \langle \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \rangle = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + T_G^*.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la linearità del prodotto scalare: infatti, $\sum_{k=1}^n m_k \langle \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \rangle = \langle \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \rangle = 0$, dato che $\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k^*$ è la quantità di moto nel riferimento del centro di massa, che è zero. \square

2. Aspetti cinematici del moto rigido

Cominciamo lo studio dei sistemi rigidi dandone una definizione.

DEFINIZIONE 2.1 (Corpo rigido). Un sistema di $n \geq 2$ punti materiali $S = \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ è un sistema rigido se, indicato con \mathbf{x}_i il vettore che identifica la posizione del punto P_i , la quantità $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = r_{ij} > 0$ è costante durante il moto.

Se $n > 2$, dati tre punti non allineati del sistema $\{P_1, P_2, P_3\}$, è possibile da essi costruire un riferimento cartesiano Σ , per esempio scegliendo P_1 come origine e costruendo una base ortonormalizzando la terna $\{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)\}$. Per definizione di sistema rigido, tutti i punti restanti sono quindi solidali a Σ e si dice che Σ è un *riferimento solidale* al sistema rigido. Conoscere la configurazione di un corpo rigido equivale a conoscere la legge del cambio di riferimento che produce il riferimento solidale. Vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.1. *Lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido di punti nello spazio euclideo tridimensionale che contenga almeno tre punti non allineati è $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$. Se il sistema ha un punto fisso, allora il suo spazio delle configurazioni è $\text{SO}(3)$.*

Il moto di un sistema rigido è quindi caratterizzato dalla posizione di un suo punto e da un vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$, velocità angolare del suo sistema solidale. In particolare, vale il seguente teorema.

TEOREMA 2.2. *Il campo di velocità di un moto rigido è espresso dalla formula*

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q)$$

where P e Q sono due punti solidali col sistema e $\boldsymbol{\omega}$ è indipendente dalla coppia di punti ed è detta velocità di rotazione.

Il teorema precedente è una immediata conseguenza del teorema di Poisson applicato al vettore solidale $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$. Come abbiamo già visto, il moto è puramente traslatorio se e solo se $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$: in tal caso la proposizione precedente si riduce alla condizione che tutti i punti del corpo abbiano la stessa velocità. Come si nota, data la velocità \mathbf{v}_Q di un punto materiale Q del sistema rigido, la formula fornisce un *campo di velocità* per ogni punto P in moto solidale non necessariamente occupato da un punto materiale: ovvero, fornisce la velocità che un ipotetico punto materiale solidale dovrebbe avere qualora fosse collocato in \mathbf{x}_P . Ci si riferisce al campo di velocità in un certo istante come *atto di moto*. Esso è caratterizzato da un *invariante*, detto *invariante cinematico*, ovvero una quantità indipendente dalla posizione e definita come

$$\mathcal{I} = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_P \rangle.$$

Questa quantità può essere utile per distinguere atti di moto con proprietà diverse, insieme ad un altro oggetto introdotto e caratterizzato dal seguente

TEOREMA 2.3 (Mozzi–Chasles). *Si consideri un sistema rigido avente $\omega \neq \mathbf{0}$ ad un certo istante. Allora esiste istantaneamente un asse, detto asse istantaneo di moto, parallelo a ω , i cui punti sono associati a velocità parallela a ω di modulo minimo nel campo di velocità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbf{v}_P la velocità di un atto di moto rigido in un suo punto P : essa avrà una componente parallela ad ω ed una ortogonale ad essa. Cerchiamo ora il punto Y nel piano ortogonale al vettore ω passante per P tale che $\mathbf{v}_Y \wedge \omega = \mathbf{0}$: in altre parole, assumendo che esista un asse di moto rigido \mathcal{R} , cerchiamone il punto Y più vicino a X . Usando la formula dell'atto di moto rigido

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \mathbf{0} = \mathbf{v}_Y \wedge \omega &= (\mathbf{v}_P + \omega \wedge (\mathbf{x}_Y - \mathbf{x}_P)) \wedge \omega = \\ &= \mathbf{v}_P \wedge \omega + \|\omega\|^2(\mathbf{x}_Y - \mathbf{x}_P) - \langle \mathbf{x}_Y - \mathbf{x}_P, \omega \rangle \omega = \mathbf{v}_P \wedge \omega + \|\omega\|^2(\mathbf{x}_Y - \mathbf{x}_P), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ciò significa che

$$\mathbf{x}_Y - \mathbf{x}_P = \frac{\omega \wedge \mathbf{v}_P}{\|\omega\|^2}.$$

Pertanto un punto Z dell'asse di moto passante per Y con direzione ω è individuato in generale da un vettore

$$(3.14) \quad \mathbf{x}_Z = \mathbf{x}_P + \frac{\omega \wedge \mathbf{v}_P}{\|\omega\|^2} + \lambda \omega.$$

per un qualche valore $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione precedente fornisce, al variare di λ , tutti i punti dell'asse di moto. Tali punti hanno per costruzione una velocità parallela a ω . D'altra parte $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Y + \omega \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Y)$, da cui, essendo \mathbf{v}_Y e $\omega \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ortogonali, $\|\mathbf{v}_P\|^2 = \|\mathbf{v}_Y\|^2 + \|\omega \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Y)\|^2 \geq \|\mathbf{v}_Y\|^2$: i punti sull'asse di moto hanno velocità in modulo minima. \square

Si noti che, nell'ipotesi $\omega \neq \mathbf{0}$, se $\mathcal{I} = \langle \omega, \mathbf{v}_Y \rangle = 0$ per un punto Y dell'asse di moto, ciò significa che \mathbf{v}_Y è nullo (dovendo esso essere parallelo a ω): in questo caso l'atto di moto si dice *rotatorio*, e ogni altro punto P ha velocità $\mathbf{v}_P = \omega \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Y)$. Questa formula implica anche \mathbf{v}_P è sempre ortogonale a ω . Se viceversa $\mathcal{I} \neq 0$ l'atto di moto si dice *elicoidale*.

2.1. Rotolamento. Siano ora dati due sistemi rigidi la cui frontiera supponiamo regolare e individuata da σ e $\hat{\sigma}$ (ciascuna delle quali può essere intesa come una superficie o come una curva). Assumiamo che σ sia fissa nel riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, mentre $\hat{\sigma}$ è mobile ma tale da mantenere sempre un unico *punto di tangenza* C con σ in ogni momento del suo moto: in questo caso si dice che i due sistemi sono in un *moto di rotolamento*. Il punto di contatto C non corrisponde ad un preciso punto materiale delle due frontiere, ma ad un luogo geometrico, ovvero alla *posizione di tangenza*. Sia ora $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ il riferimento mobile solidale con $\hat{\sigma}$, e sia O_* individuata dal vettore $\mathbf{x}_* = \overrightarrow{OO_*}$ rispetto al riferimento fisso. Il riferimento mobile sarà caratterizzato da una velocità angolare ω . Così, se nel riferimento fisso la velocità del punto di contatto è \mathbf{v}_C , il medesimo punto ha velocità \mathbf{v}_C^* nel riferimento mobile tale che

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^* + \mathbf{v}_C^\tau, \quad \mathbf{v}_C^\tau := \mathbf{v}_* + \omega \wedge \mathbf{x}_C^*$$

dove \mathbf{v}_C^τ è detta, in questo contesto specifico, *velocità di slittamento*. Il punto C è sempre un punto di tangenza, e dovendo essere \mathbf{v}_C e \mathbf{v}_C^* anch'essi tangentи a σ e $\hat{\sigma}$ in C , lo sarà anche la velocità di slittamento.

Se $\omega = \mathbf{0}$, allora il moto si dice *di puro slittamento*: in questo caso la velocità di slittamento corrisponde alla velocità di traslazione dell'origine del riferimento solidale.

Se invece $\mathbf{v}_C^\tau = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^*$ e il moto è detto *di rotolamento puro*. La condizione di rotolamento puro è in generale un vincolo imposto sulle *velocità*, quindi non olonomo. Nel caso specifico in cui sia σ che $\hat{\sigma}$ siano delle *curve*, il vincolo di tangenza è però effettivamente olonomo. Supponiamo per esempio che $\sigma \equiv \gamma$ e $\hat{\sigma} \equiv \psi$ siano due curve regolari. Il fatto che le velocità del punto di tangenza nei due riferimenti (fisso e solidale) siano uguali implica che *il punto di tangenza percorre cammini di lunghezza uguale lungo le due curve in tempi uguali*. Poiché il vincolo fissa come uguali le lunghezze percorse da C in un certo intervallo, il vincolo è dunque olonomo. Infine, un rotolamento puro *non dissipava energia meccanica*: la quantità \mathbf{v}_C^τ è infatti esattamente la velocità del *punto materiale* che occupa la posizione C di contatto, e il fatto che $\mathbf{v}_C^\tau = \mathbf{0}$ implica che la potenza della forza di reazione vincolare, applicata proprio a tale punto materiale, sia nulla, nonostante il vincolo non sia liscio.

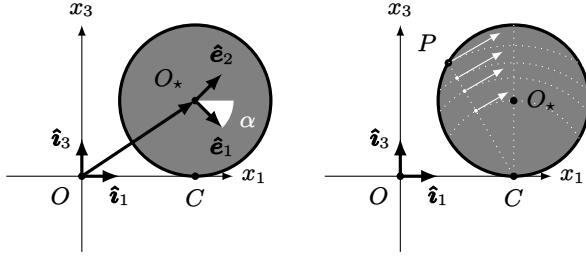


FIGURA 3. Disco che rotola.

Esempio 3.4 (Disco rigido che rotola) — Sia dato un riferimento fisso $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ e consideriamo un disco rigido di raggio R che rotola senza strisciare lungo una guida orizzontale γ , ovvero che giace nel piano generato da $\hat{\mathbf{i}}_1$ e $\hat{\mathbf{i}}_2$ passante per l'origine. Il disco è vincolato ad essere tangente a γ e a giacere in un piano ortogonale al piano orizzontale. Sia C il punto di tangenza individuato da $\mathbf{x}_C = x_1\hat{\mathbf{i}}_1 + x_2\hat{\mathbf{i}}_2$. Il centro del disco, sia esso O_* , è individuato da $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_C + R\hat{\mathbf{i}}_3$, da cui segue che $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_C = \dot{x}_1\hat{\mathbf{i}}_1 + \dot{x}_2\hat{\mathbf{i}}_2$, che assumiamo essere sempre non nulla.

Introduciamo ora un riferimento solidale $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con origine O_* , tale che $\hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_2$ giacciono nel piano del disco e $\hat{\mathbf{e}}_3$ sia ad essi ortogonale, condizione che può essere imposta scegliendo

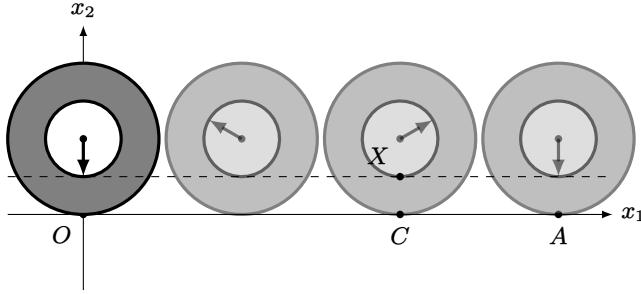
$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{v}_C \wedge \hat{\mathbf{i}}_3}{\|\mathbf{v}_C\|} = \frac{\dot{x}_2\hat{\mathbf{i}}_1 - \dot{x}_1\hat{\mathbf{i}}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\dot{\alpha}\dot{x}_2\hat{\mathbf{i}}_1 - \dot{\alpha}\dot{x}_1\hat{\mathbf{i}}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}},$$

per una certa funzione α . Indichiamo per brevità $\dot{s}(t) := \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$ il modulo della velocità di C . La condizione di rotolamento puro diventa quindi

$$(3.15) \quad \mathbf{v}_* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_*) = \dot{x}_1\hat{\mathbf{i}}_1 + \dot{x}_2\hat{\mathbf{i}}_2 + \left(\frac{\dot{\alpha}\dot{x}_2\hat{\mathbf{i}}_1 - \dot{\alpha}\dot{x}_1\hat{\mathbf{i}}_2}{\dot{s}} \right) \wedge (-R\hat{\mathbf{i}}_3) \\ = (\dot{s} - R\dot{\alpha}) \left(\frac{\dot{x}_1}{\dot{s}}\hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{\dot{x}_2}{\dot{s}}\hat{\mathbf{i}}_2 \right) = (\dot{s} + R\dot{\alpha})\hat{\mathbf{t}}_\gamma = \mathbf{0}.$$

Nell'equazione precedente abbiamo riconosciuto il versore tangente $\hat{\mathbf{t}}_\gamma$ alla curva γ descritta C sul piano orizzontale durante il rotolamento. La condizione di rotolamento puro quindi equivale ad una condizione tra la distanza percorsa *lungo la curva* e la velocità angolare, $s(t) = s(t_0) - R \int_{t_0}^t \dot{\alpha} d\tau$: come anticipato, il rotolamento puro tra curve fornisce un vincolo sulle *posizioni*, nonostante appaia espresso inizialmente come una condizione sulle *velocità*. Si noti anche che questa informazione è completa solo perché abbiamo assunto essere nota la curva su cui C scorre: se invece non disponiamo di una particolare informazione sulla traiettoria di C , la condizione $\dot{s} = -R\dot{\alpha}$ è insufficiente a determinare la curva e *non* è una condizione sulla posizione, ma solo sulla velocità con cui la traiettoria incognita viene percorsa: si tratta cioè di un vincolo *anologomo*.

Esempio 3.5 (Ruota di Aristotele) — Nella *Meccanica* dello pseudo-Aristotele e scritta attorno al 300 a.C., compare il seguente problema. Sia dato un disco che rotola su un piano, e si consideri un disco più piccolo ad esso concentrico e su esso fissato in maniera rigida. Il disco maggiore rotola come in figura, andando dal punto O al punto A senza strisciare compiendo una rivoluzione completa. Le distanze percorse dalle circonferenze di entrambi i dischi sono quindi uguali, essendo essi rigidamente saldati. Questo induce però ad un apparente paradosso: la distanza percorsa dal cerchio più grande è uguale alla sua circonferenza, mentre il disco più piccolo ha compiuto una rotazione completa percorrendo un tragitto maggiore della sua propria circonferenza. Come è possibile?



La soluzione al paradosso discende da quanto abbiamo detto sopra. Infatti, se è vero che il punto di contatto tra il disco maggiore e il piano di rotolamento ha velocità istantanea nulla, immaginando un ipotetico piano di rotolamento del disco minore (linea tratteggiata in figura), il punto di contatto X del disco minore con tale piano ipotetico è soggetto a strisciamento. La sua velocità sarà infatti data dalla condizione $\mathbf{v}_X = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)$, dove \mathbf{x}_C è il vettore che identifica il punto di contatto reale C del disco maggiore.

2.2. Rigate. La cinematica del moto rigido è caratterizzata da speciali luoghi geometrici, detti *rigate*.

DEFINIZIONE 2.2. Si dice *rigata fissa* di un moto rigido il luogo geometrico delle rette che assumono il ruolo di asse istantaneo di moto durante l'evoluzione rispetto al riferimento fisso. Si dice *rigata mobile* il luogo geometrico delle rette che assumono il ruolo di asse istantaneo di moto rispetto al riferimento solidale.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA 2.4. *In un moto rigido generico la rigata solidale rotola sulla rigata fissa. Detto $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ il versore dell'asse di contatto, la velocità di slittamento è pari a $I\hat{\boldsymbol{\omega}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Il *rotolamento* tra le rigate equivale alla loro tangenza in ogni istante. Dato un punto P del sistema in moto, abbiamo già mostrato che un generico punto Z dell'asse istantaneo di moto ha

$$\mathbf{x}_Z = \mathbf{x}_P + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le rigate sono generate dal moto assoluto e dal moto relativo di questa retta. Sappiamo che la velocità di trascinamento di Z è

$$\mathbf{v}_Z^\tau = \mathbf{v}_Z - \mathbf{v}_Z^* = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_Z - \mathbf{x}_P).$$

Le due velocità sono tangenti rispettivamente alle due rigate fissa e mobile, poiché Z si muove sulle rigate per definizione, per cui anche \mathbf{v}_Z^τ è tangente ad entrambe le rigate. Osserviamo ora che la formula per \mathbf{v}_Z^τ è, per via della legge di composizione delle velocità dei moti rigidi, uguale alla velocità del punto *in moto solidale* che occupa la posizione Z : questa velocità è per definizione diretta lungo l'asse di moto stesso. Se $\mathbf{v}_Z = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v}_Z^* = \mathbf{0}$, la velocità non nulla tra le due sarà parallela a $\boldsymbol{\omega}$, verificando la condizione di tangenza alla rigata. Se $\mathbf{v}_Z^\tau = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_Z = \mathbf{v}_Z^*$, condizione che verifica nuovamente la tangenza. Diversamente, $\mathbf{v}_Z^\tau = \mathbf{0}$ è parallela a $\boldsymbol{\omega}$ e i tre vettori sono complanari (dovendo chiudere un triangolo). Abbiamo ora che il piano Π_1 generato da $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{v}_Z è tangente alla rigata fissa, mentre il piano Π_2 generato da $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{v}_Z^* è tangente alla rigata mobile. La complanarità dei tre vettori implica che questi due piani siano in realtà lo stesso piano, $\Pi_1 = \Pi_2$, e quindi le rigate sono tangenti. La seconda parte del teorema discende direttamente dall'espressione di \mathbf{v}_Z^τ . \square

Nel caso dei cosiddetti *moti pianii*, ovvero tali per cui $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ ha direzione costante e $I = 0$, gli assi di moto sono necessariamente ortogonali al campo di velocità (che vive appunto nello spazio ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$). In questo caso, dati due punti distinti P e Q con velocità rispettivamente \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_Q , si individua facilmente un punto C dato dall'intersezione delle normali a \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_Q passanti rispettivamente per P e Q : per costruzione, esso è il punto di intersezione tra l'asse istantaneo di moto e il piano ad esso

ortogonale passante per P e Q , che funge da piano rappresentativo per l'evoluzione del sistema. Il luogo delle posizioni occupate da C nel riferimento fisso (mobile) sul piano rappresentativo è l'intersezione con esso della rigata fissa (mobile) ed è detto *base (rullo)*. Come conseguenza di quanto detto riguardo il moto delle rigate in generale, base e rullo saranno sempre in moto di rotolamento relativo. Questo moto di rotolamento, tuttavia, ha una ulteriore caratteristica.

COROLLARIO 2.5. *Dato un moto rigido piano, base e rullo sono in moto di rotolamento puro relativo.*

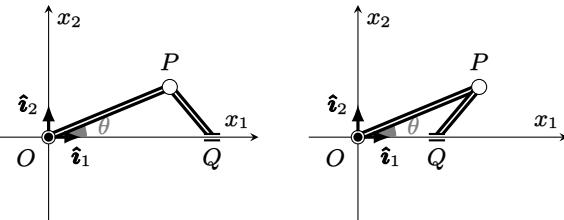
DIMOSTRAZIONE. Sia Z il punto di tangenza tra base e rullo. Nella notazione del teorema sopra, dato un punto P solidale, $\mathbf{v}_Z^\tau = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{0}$, essendo il moto piano. \square

Esempio 3.6 (Biella e manovella) — Il sistema biella–manovella è un sistema che evolve secondo un moto piano. È costituito da due *aste rigide*, che indichiamo come \overline{OP} e \overline{PQ} . La configurazione di ciascuna asta è caratterizzata univocamente quando sono date le coordinate dei due suoi estremi. L'asta \overline{OP} , detta *manovella* e che supponiamo di lunghezza 2ℓ , è tale che il suo primo estremo O , è nell'origine, mentre il suo secondo estremo P è individuato dal vettore \mathbf{x}_P . L'estremo O è *vincolato* con una *cerniera fissa*, ovvero un dispositivo tale da permettere una rotazione del corpo rigido attorno al punto in cui è applicata, ma non una traslazione. Il punto O è quindi, per costruzione, un centro di rotazione dell'asta \overline{OP} , la cui configurazione è individuata automaticamente dal solo vettore \mathbf{x}_P .

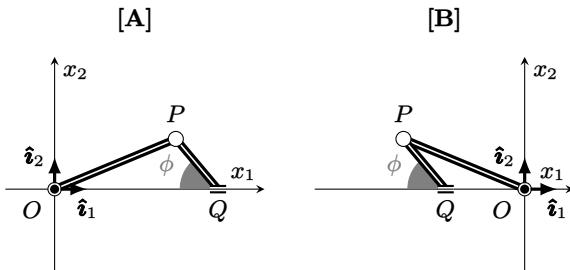
L'asta \overline{PQ} , detta *biella* e che supponiamo di lunghezza ℓ , è soggetta all'azione di due diversi vincoli. In P è applicata una *cerniera mobile*, ovvero un dispositivo che permette la rotazione attorno a P senza vincolare però la posizione di P stesso. Inoltre, la cerniera forza l'estremo P della prima asta a coincidere con l'estremo omonimo della seconda. Il secondo estremo Q , invece, individuato dal vettore \mathbf{x}_Q , è vincolato, tramite un carrello, a muoversi lungo l'asse delle ascisse. Il sistema è quindi soggetto al seguente insieme di vincoli olonomi, due dei quali interni (quelli che esprimono la rigidezza delle due aste):

$$\|\mathbf{x}_P\| = 2\ell, \quad \|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P\| = \ell, \quad \langle \mathbf{x}_Q, \hat{\mathbf{i}}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = \langle \mathbf{x}_Q, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = 0.$$

Come conseguenza dei vincoli applicati, il sistema richiede solo un parametro lagrangiano per essere caratterizzato. Dalla figura si può intuire in effetti che fissando per esempio l'angolo θ tra \mathbf{x}_P e l'asse delle ascisse, il vettore \mathbf{x}_P è univocamente determinato come $\mathbf{x}_P = 2\ell \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + 2\ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2$. Esistono però *due* possibili posizioni per Q compatibili con questo angolo, corrispondenti a due diverse configurazioni dell'intero sistema:



Utilizzando come parametro lagrangiano l'angolo ϕ tra $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$ e la direzione $-\hat{\mathbf{i}}_1$ indicato in figura seguente si riscontra la stessa ambiguità



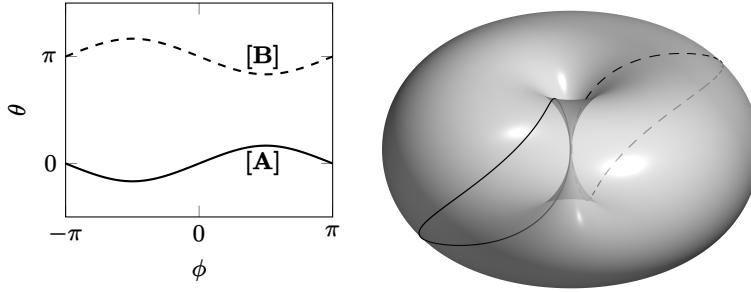


FIGURA 4. Spazio delle configurazioni del sistema biella-manovella. Sono da assumersi condizioni periodiche in entrambi gli assi. La curva continua corrisponde alla relazione tra θ e ϕ in una configurazione di tipo [A], la curva tratteggiata in una configurazione di tipo [B].

La ragione è che *non* è possibile identificare una rappresentazione globale per lo spazio delle configurazioni, essendo quest'ultimo disconnesso. Esso è infatti composto da due componenti connesse che ammettono ciascuna una rappresentazione globale rispetto alla variabile ϕ , come si vede dal fatto che deve valere

$$2 \sin \theta = \sin \phi.$$

Questa equazione ha soluzione solo se $2 \sin \theta \in [-1, 1]$, ovvero se

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{oppure} \quad \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$$

a meno di multipli di 2π : i due intervalli corrispondono a configurazioni di tipo [A] e [B] rispettivamente, che individuano due bande disconnesse sul toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Il dominio di possibili valori di θ è quindi disconnesso e θ non può passare, con continuità, da un intervallo ad un altro. Ciò si può vedere scrivendo θ in funzione di ϕ : si ottengono *due* possibili soluzioni,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sin \phi}{2}\right), \quad \theta = \pi - \arcsin\left(\frac{\sin \phi}{2}\right)$$

che corrispondono alle due curve in Fig. 4.

Poiché ϕ parametrizza globalmente ciascuna componente connessa⁶, scegliamo questa variabile come parametro lagrangiano e cerchiamo ora base e rulletta delle due componenti del sistema. La base e la rulletta della *manovella* sono entrambe facili a trovarsi: esse coincidono con il centro di rotazione O , la cui posizione non cambia sia nel riferimento fisso sia in quello solidale con la manovella. Base e rulletta della biella, invece, sono meno triviali. Il centro di rotazione istantaneo C della biella può essere trovato osservando che \mathbf{v}_Q è sempre diretto lungo $\hat{\mathbf{i}}_1$, mentre \mathbf{v}_P è sempre ortogonale a \mathbf{x}_P . Di conseguenza, la posizione \mathbf{x}_C di C è ottenuta intersecando la retta passante per P di direzione \mathbf{x}_P e la retta passante per Q di direzione $\hat{\mathbf{i}}_2$. In altre parole, $\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_Q + \alpha \hat{\mathbf{i}}_2$ per un qualche α e $\mathbf{x}_C = \beta \mathbf{x}_P$ per un qualche β , ovvero $\mathbf{x}_Q + \alpha \hat{\mathbf{i}}_2 = \beta \mathbf{x}_P$, da cui $\beta = \frac{x_{Q,1}}{x_{P,1}}$, e quindi

$$\mathbf{x}_C = x_{Q,1} \hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{x_{Q,1} x_{P,2}}{x_{P,1}} \hat{\mathbf{i}}_2.$$

La rulletta può essere trovata scegliendo un riferimento solidale con la biella, per esempio con l'origine in Q , e i vettori solidali

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_1 - \sin \phi \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \sin \phi \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_2$$

in modo che

$$\mathbf{x}_C^* = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_Q = \frac{x_{Q,1} x_{P,2}}{x_{P,1}} \hat{\mathbf{i}}_2 = -\frac{x_{Q,1} x_{P,2}}{x_{P,1}} \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{x_{Q,1} x_{P,2}}{x_{P,1}} \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_2.$$

⁶Si noti che se la lunghezza di \overline{OP} fosse stata minore della lunghezza di \overline{PQ} sarebbe stata θ a parametrizzare globalmente ciascuna delle due componenti connesse.

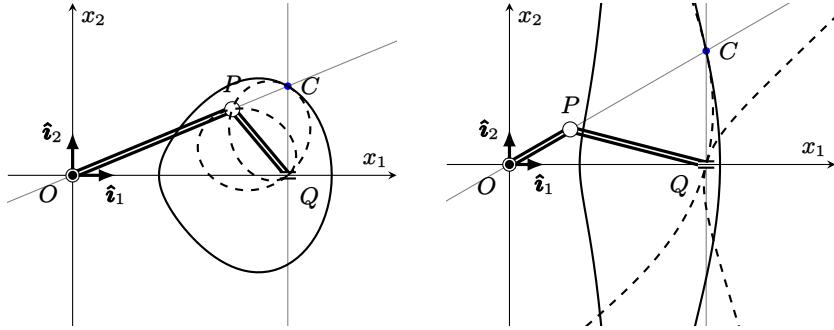


FIGURA 5. Sistema biella-manovella con base (linea continua) e rulletta (linea tratteggiata) della biella. A sinistra, caso in cui la manovella è lunga il doppio della biella; a destra, caso in cui la manovella è lunga la metà della biella. Come si vede, non è detto che le traiettorie polari siano curve semplici o chiuse.

Queste curve sono rappresentate nel grafico in Fig. 5.

3. Aspetti dinamici del moto rigido

Nel trattare la *dinamica* dei sistemi rigidi è necessario considerare la distribuzione della massa sul sistema stesso, ovvero la corrispondenza tra posizione dei punti materiali e loro massa. Un sistema rigido è in genere costituito da molti punti materiali, in numero talvolta così grande da rendere necessaria l'introduzione di un *modello continuo* della distribuzione delle loro masse. Tale distribuzione viene formalizzata introducendo una funzione sullo spazio euclideo affine \mathbb{E}^3 tale che associa ad un punto P un valore $\rho(P) > 0$, di modo che la massa totale del sistema \mathcal{B} sia individuata da

$$m = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nell'espressione precedente, abbiamo usato la corrispondenza tra $P \in \mathbb{E}^3$, vettore corrispondente nello spazio vettoriale associato $\mathbf{V} \in \mathbb{V}$, e sua rappresentazione in coordinate $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in virtù di una opportuno sistema di riferimento. Abbiamo inoltre indicato con \mathcal{B} la porzione di \mathbb{R}^3 corrispondente alla porzione di spazio occupata dal sistema, individuata dal criterio $\rho(P) > 0$. Analogamente si definirà la posizione del centro di massa $G \in \mathbb{E}^3$, associato al vettore $\mathbf{x}_G \in \mathbf{V}$ di coordinate

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

In generale, le relazioni introdotte per il formalismo discreto nella forma $\sum_i m_i f(\mathbf{x}_i)$ per una certa funzione $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, potranno così essere sostituite da $\int_{\mathcal{B}} f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. Dopo questa premessa, rivisitiamo alcuni concetti essenziali della dinamica dal punto di vista di un sistema rigido.

3.1. Omografia di un sistema rigido. Nel caso di un sistema rigido, l'energia cinetica si può decomporre in un contributo traslatorio e uno rotatorio grazie alla relazione che lega le velocità di punti diversi del corpo che abbiamo già studiato. Scrivere la formula per l'energia cinetica di un corpo rigido, tuttavia, fa naturalmente emergere una particolare quantità che racchiude le necessarie informazioni su come la massa del corpo è distribuita nello spazio.

DEFINIZIONE 3.1 (Omografia d'inerzia). Sia \mathbf{V} lo spazio vettoriale associato allo spazio affine \mathbb{E}^3 in cui stiamo operando, e sia dato un sistema rigido \mathcal{B} di densità ρ . Detto P un punto associato al vettore

\mathbf{x}_P , l'applicazione lineare $\mathbf{I}_P: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ che associa

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{I}_P \mathbf{v} = \int_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{v} - \langle \mathbf{y} - \mathbf{x}_P, \mathbf{v} \rangle (\mathbf{y} - \mathbf{x}_P)) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

è detta omografia d'inerzia.

È utile introdurre una rappresentazione dell'operatore nella forma seguente

$$\mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{y} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{x}_P)) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

dove con $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ intendiamo un operatore tale che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}$. L'utilità dell'operatore di omografia di inerzia nasce dalla seguente

PROPOSIZIONE 3.1. *L'energia cinetica di un corpo rigido di massa m e centro di massa \mathbf{x}_G si può esprimere come*

$$(3.16a) \quad T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_P\|^2 + m\langle \mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega} \rangle$$

dove \mathbf{x}_P è il vettore che identifica la posizione di un punto a scelta P del corpo, $\boldsymbol{\omega}$ la sua velocità angolare e \mathbf{I}_P è l'operatore dell'omografia d'inerzia rispetto al punto P . In particolare scegliendo come punto P il centro di massa G si ha

$$(3.16b) \quad T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo dimostrare la Proposizione sopra direttamente usando la legge fondamentale di composizione delle velocità dei sistemi rigidi. Sia ρ la densità del corpo. Allora

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}_X\|^2 \rho d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}_P\|^2 \rho d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}} \langle \mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \rangle \rho d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_P\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho d\mathbf{x} + m\langle \mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \rangle. \end{aligned}$$

Dal fatto che, dati tre vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, dato un vettore \mathbf{u} , vale $\|\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) \rangle$. D'altra parte, essendo $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{a})\mathbf{b}$, possiamo ulteriormente semplificare in $\mathbf{u} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = (\|\mathbf{u}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\boldsymbol{\omega}$, per cui

$$\|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 = \langle \boldsymbol{\omega}, (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)) \boldsymbol{\omega} \rangle$$

e in definitiva

$$(3.17) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega} \rangle,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo identificato l'azione dell'omografia di inerzia rispetto a P . È immediato verificare la semplificazione ottenuta per $P = G$. \square

3.2. Proprietà dell'omografia d'inerzia. L'omografia d'inerzia è un oggetto molto importante e per questo merita una trattazione piuttosto dettagliata. Come abbiamo visto, nel caso di un corpo \mathcal{B} di densità ρ esso si scrive come

$$(3.18) \quad \mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \right) \rho d\mathbf{x}.$$

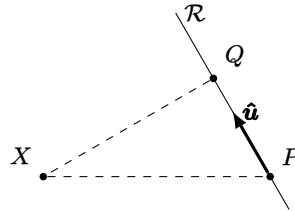
Analogamente, se il sistema in esame è costituito da n particelle in posizioni $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$ e masse $\{m_k\}_{k=1}^n$, la corrispondente formula è data da

$$(3.19) \quad \mathbf{I}_P := \sum_{k=1}^n m_k \left(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \right).$$

Dato un versore $\hat{\mathbf{u}}$ nello spazio, la quantità

$$\langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\mathcal{B}} \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{u}} \rangle^2 \right) \rho d\mathbf{x}$$

è detto *momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta \mathcal{R}* passante per P e di direzione $\hat{\mathbf{u}}$.



La costruzione geometrica sopra permette di vedere che $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{u}} \rangle^2 = d^2(X, \mathcal{R})$, distanza quadrata tra il punto X individuato dal vettore \mathbf{x} e la retta \mathcal{R} passante per P e di direzione $\hat{\mathbf{u}}$: infatti, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|$ è proprio la distanza tra X e P , mentre $|\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{u}} \rangle|$ è la lunghezza del segmento \overline{PQ} in figura. Possiamo quindi scrivere l'espressione formalmente più semplice

$$I_{\mathcal{R}} := \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\mathcal{B}} d^2(X, \mathcal{R}) \rho d\mathbf{x}.$$

La quantità

$$\delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{\frac{I_{\mathcal{R}}}{m}}$$

è detta *raggio di girazione* e costituisce una sorta di *distanza quadratica media* dalla retta del corpo pesato sulla sua densità di massa.

Il raggio di girazione può essere utilizzato per mettere in una forma più semplice l'energia cinetica: scrivendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}$, dove sia il modulo ω che il versore $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ possono dipendere dal tempo, l'energia cinetica di un corpo rigido può riscriversi come

$$T = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{I}_G \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle \omega^2 = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} m \left(\|\mathbf{v}_G\|^2 + \delta_G^2 \omega^2 \right),$$

dove I_G è il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per il centro di massa G e di direzione $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ e δ_G il corrispondente raggio di girazione.

3.3. Rappresentazioni dell'omografia. Focalizziamoci per iniziare su \mathbf{I}_O , ovvero sull'operatore rispetto all'origine. In questo caso, dato un riferimento cartesiano ortonormale $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, possiamo darne una rappresentazione in termini della cosiddetta *matrice d'inerzia* $\mathbf{I}_O \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, avente elementi

$$\langle \hat{\mathbf{i}}_i, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \int_{\mathcal{B}} \left(\|\mathbf{x}\|^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) \rho d\mathbf{x}.$$

Questa rappresentazione dell'omografia permette di chiarire come mai ci si riferisca ad essa come ad un *tensores di inerzia*. Supponiamo infatti di eseguire un cambio di riferimento ortogonale, introducendo una nuova base $\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_j O_{ij} \hat{\mathbf{i}}_j$, con \mathbf{O} matrice ortogonale. Si ha allora che, indicando con \mathbf{I}_O la rappresentazione matriciale di \mathbf{I}_O nella vecchia base e con \mathbf{I}'_O la rappresentazione nella nuova base,

$$\mathbf{I}'_O = \mathbf{O} \mathbf{I}_O \mathbf{O}^\top.$$

Una siffatta trasformazione esprime il fatto che \mathbf{I}_O è un *tensore covariante di rango 2*.

In ogni data rappresentazione, i valori sulla diagonale sono detti *momenti d'inerzia rispetto agli assi cartesiani*, mentre gli elementi fuori diagonale sono detti *prodotti d'inerzia o momenti deviatori*. L'operatore \mathbf{I}_O definisce una forma quadratica definita positiva individua degli insiemi di livello, detti *ellissoidi d'inerzia*, individuati dalla condizione

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{I}_O \mathbf{x} \rangle = \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Questi ellissoidi sono detti *centrali* se il punto O coincide col centro di massa. Gli autovettori $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ individuano i cosiddetti *assi principali d'inerzia*, mentre i suoi autovalori $\{I_{O,i}\}_{i=1}^3$ si dicono *momenti principali d'inerzia*. Gli assi di simmetria degli ellissoidi d'inerzia associati a \mathbf{I}_O sono esattamente gli assi principali d'inerzia: essendo $\mathbf{I}_O \mathbf{x} = \frac{1}{2} \nabla f(\mathbf{x})$, l'azione dell'omografia di inerzia è produrre la direzione normale alla superficie dell'ellissoide di inerzia in un dato punto.

Gli assi principali d'inerzia sono univocamente determinati se gli autovalori sono tutti diversi: viceversa, se c'è degenerazione, per esempio $I_{O,1} = I_{O,2} \neq I_{O,3}$, sono assi d'inerzia quelli corrispondenti alla direzione di $\hat{\mathbf{e}}_3$ e a qualsivoglia coppia ortonormale che generi lo spazio ortogonale a $\hat{\mathbf{e}}_3$: in questa circostanza, se O coincide con il centro di massa, si dice che il sistema è un *giroscopio* con *asse giroscopico* individuato da $\hat{\mathbf{e}}_3$. Infine, se $I_{O,1} = I_{O,2} = I_{O,3}$, allora *tutte le terne* ortonormali sono assi principali d'inerzia e l'ellissoide d'inerzia associato a \mathbf{I}_O è una sfera.

L'individuazione degli assi principali può essere agevolata dalle simmetrie del sistema.

DEFINIZIONE 3.2. Un piano di simmetria materiale Π di un sistema rigido è tale che punti simmetrici rispetto a tale piano sono associati alla stessa massa o densità.

Valgono le seguenti proprietà.

PROPOSIZIONE 3.2. Se Π è un piano di simmetria materiale del corpo, allora il vettore ortogonale ad esso, sia esso $\hat{\mathbf{e}}_3$, corrisponderà ad un asse principale d'inerzia.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, se se infatti $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ è un riferimento ortonormale, con $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ paralleli quindi al piano, si ha che $\langle \hat{\mathbf{e}}_1, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle = \langle \hat{\mathbf{e}}_2, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle = 0$, essendo l'integrale che definisce questi momenti dispari nella terza componente. \square

PROPOSIZIONE 3.3. Se Π_1 e Π_2 sono due piani di simmetria materiale del corpo, di versori normali $\hat{\mathbf{v}}_1$ e $\hat{\mathbf{v}}_2$ rispettivamente, indicando con $\hat{\mathbf{v}}_3 = \hat{\mathbf{v}}_1 \wedge \hat{\mathbf{v}}_2$, esso è asse principale d'inerzia. Inoltre, se $\hat{\mathbf{v}}_1 \perp \hat{\mathbf{v}}_2$ allora $\{\hat{\mathbf{v}}_k\}_{k=1}^3$ è una terna ortonormale di assi principali d'inerzia; diversamente, $\text{span}\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$ contiene una infinità di coppie di assi principali d'inerzia.

Esempio 3.7 — Consideriamo un anello di centro O , massa m , raggio R e densità lineare uniforme. Dato un riferimento cartesiano $O \hat{\mathbf{i}}_1 \hat{\mathbf{i}}_2 \hat{\mathbf{i}}_3$, questo può essere parametrizzato come una curva che giace nel piano generato da $\hat{\mathbf{i}}_1$ e $\hat{\mathbf{i}}_2$ come

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Introduciamo la densità lineare $\rho(t) = \frac{m}{2\pi R}$, di modo che $\int_{\gamma} \rho d\gamma = \int_0^{2\pi} \rho \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\| dt = m$. Il momento d'inerzia rispetto all'asse \mathcal{Z} ortogonale all'anello e passante per il suo centro è

$$I_{\mathcal{Z}} = \int_{\gamma} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \rho d\gamma = \frac{m}{2\pi R} \int_0^{2\pi} R^3 dt = mR^2.$$

Il momento rispetto ad un asse nel piano dell'anello e passante per il suo centro, per esempio all'asse \mathcal{X} di direzione $\hat{\mathbf{e}}_1$ e passante per l'origine, è

$$I_{\mathcal{X}} = \int_{\gamma} (\gamma_1^2 + \gamma_3^2) \rho d\gamma = \frac{m}{2\pi R} \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2 t dt = \frac{1}{2} m R^2.$$

Per ragioni di simmetria, questo momento è uguale se calcolato rispetto ad *ogni* asse dello stesso piano passante per il centro dell'anello.

Una relazione semplice, di grande utilità pratica, è fornita dal seguente

TEOREMA 3.4 (Huygens–Steiner). *Il tensore d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un punto P individuato dal vettore \mathbf{x}_P è pari alla somma*

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_G + m \left(\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \otimes (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \right).$$

dove \mathbf{I}_G è il tensore d'inerzia del corpo rispetto al centro di massa G del corpo, individuato dal vettore \mathbf{x}_G .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo di avere un corpo rigido con centro di massa G nell'origine del nostro riferimento, e voler calcolare \mathbf{I}_P rispetto ad un certo punto P . Abbiamo

$$\begin{aligned} (3.20) \quad \mathbf{I}_P &= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) [\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) [(\|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_P \rangle + \|\mathbf{x}_P\|^2) \mathbf{I} - (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x}_P)] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) [\|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}] d\mathbf{x} + m (\|\mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x}_P) = \mathbf{I}_G + m (\|\mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x}_P), \end{aligned}$$

dato che ogni integrale lineare in \mathbf{x} è nullo essendo il centro di massa nell'origine. Naturalmente, nel caso in cui G non sia nell'origine ma sia identificato da un vettore \mathbf{x}_G , occorre modificare leggermente la formula sopra eseguendo uno cambio di origine, e scrivendo

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_G + m \left(\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \otimes (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \right).$$

□

Il seguente corollario è spesso di una certa utilità pratica.

COROLLARIO 3.5 (Huygens–Steiner). *Il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad una retta \mathcal{R} è pari alla somma*

$$I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R})$$

dove $I_{\mathcal{R}_G}$ è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta parallela a \mathcal{R} e passante per il centro di massa G del corpo stesso.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente considerare \mathbf{I}_P per un punto $P \in \mathcal{R}$ moltiplicare scalarmente per la direzione $\hat{\mathbf{u}}$ della retta \mathcal{R} . Si ha

$$I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_G \hat{\mathbf{u}} \rangle + m (\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G\|^2 - \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G \rangle^2) = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R}).$$

□

COROLLARIO 3.6. *Dato il momento di inerzia $I_{\mathcal{R}'}$ di un corpo di massa m rispetto ad una retta \mathcal{R}' , il momento d'inerzia rispetto ad una retta \mathcal{R} parallela a \mathcal{R}' è pari a*

$$I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}'} + m (d^2(G, \mathcal{R}') - d^2(G, \mathcal{R}))$$

dove G è il centro di massa del corpo.

COROLLARIO 3.7. *Sia $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ una terna di assi principali d'inerzia rispetto al centro di massa G , individuato dal vettore \mathbf{x}_G . Il tensore \mathbf{I}_Q rispetto ad un punto Q individuato da un vettore $\mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_G + \lambda \hat{\mathbf{e}}_i$ ha la stessa terna di assi principali d'inerzia.*

Esempio 3.8 (Rigido con asse fisso) — Supponiamo che il corpo rigido in esame abbia un asse fisso, per esempio l'asse passante per i punti del corpo O e P . Possiamo scegliere O come origine del nostro riferimento inerziale e P tale che il vettore \mathbf{x}_P che lo individua rispetto a O sia orientato come l'elemento di base $\hat{\mathbf{e}}_3$ e che quindi O e P giacciano sull'asse Z del riferimento associato. Di conseguenza, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3$ per un opportuno angolo di rotazione θ . Il centro di massa G avrà quindi $\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G$, da cui $\|\mathbf{v}_G\|^2 = \dot{\theta}^2 d^2(G, Z)$. Ora, nell'Eq. (3.16) $\langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{I}_G \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle \equiv \langle \hat{\mathbf{e}}_3, \mathbf{I}_G \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle$ è il momento d'inerzia rispetto alla retta parallela a Z passante per il centro di massa, per cui possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \langle \hat{\mathbf{e}}_3, \mathbf{I}_G \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 (md^2(G, Z) + \langle \hat{\mathbf{e}}_3, \mathbf{I}_G \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle) = \frac{1}{2}I_Z\dot{\theta}^2,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner. Si noti che il caso di un rigido con asse fisso si applica nel caso, per esempio, in cui si abbia a che fare con un sistema rigido planare che ruota *nel piano* attorno ad un punto del piano, ovvero attorno ad un asse perpendicolare al piano passante per detto punto.

Esempio 3.9 (Rigido con punto fisso) — Se il corpo rigido ha un punto O fisso, scegliendo come origine tale punto avremo come prima che il centro di massa G del rigido ha velocità $\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G$. In questo caso, l'asse di rotazione istantaneo varierà nel tempo e sarà orientato come $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, di modo che potremo scrivere

$$\|\mathbf{v}_G\|^2 = \langle \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G \rangle = \omega^2 \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, (\|\mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_G \otimes \mathbf{x}_G) \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle$$

sicché inserendo questa relazione nella formula generale

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, [m(\|\mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_G \otimes \mathbf{x}_G) + \mathbf{I}_G] \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle \equiv \frac{1}{2}\omega^2 \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{I}_O \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle.$$

dove abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner per il tensore di inerzia.

Esempio 3.10 (Disco rigido che rotola) — Calcoliamo l'energia cinetica di un disco rigido di raggio R che rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Sappiamo che il sistema ha un solo parametro lagrangiano, che possiamo fissare essere la coordinata curvilinea s del punto di contatto. Per il secondo teorema di König, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2.$$

In questa espressione I_G è il momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse G perpendicolare al disco e passante per G , che nel caso del disco omogeneo di massa m e raggio R vale $I_G = \frac{1}{2}mR^2$. Abbiamo poi già visto che, scegliendo $\omega = \dot{\alpha}$, $\|\mathbf{v}_G\| = \dot{x}^2 = R\dot{\alpha}^2$, sicché

$$T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\alpha}^2.$$

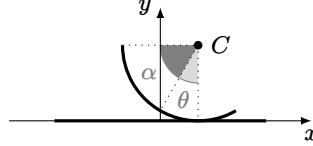
In effetti $I_G = \frac{3}{2}mR^2$ è proprio il momento d'inerzia del disco rispetto alla retta ortogonale al piano passante per il punto di contatto C . Questo non deve sorprendere, dato che, istante per istante, C è un centro istantaneo di rotazione con velocità nulla, per cui l'unico contributo che appare nell'energia cinetica usando l'Eq. (3.16a) scegliendo $P \equiv C$ è quello rotatorio.

Esempio 3.11 — Consideriamo un arco di circonferenza di densità lineare ρ , apertura 2α e raggio r , di modo che la sua massa sia $m = 2\alpha\rho r$. L'arco rotola senza strisciare su una guida orizzontale rettilinea, mantenendosi nel piano verticale che contiene anche la guida. Vogliamo scrivere le equazioni del moto del sistema e studiarne le piccole oscillazioni. Detto G il centro di massa dell'arco e C il suo centro, possiamo parametrizzare la configurazione del sistema in termini dell'angolo tra \overline{GC} e la verticale passante per C , sia esso $\theta \in (-\alpha, \alpha)$. Il centro di massa si troverà sull'asse di simmetria dell'arco. Sia s_G la distanza di G da C lungo tale asse: abbiamo che

$$s_G = \frac{1}{2\alpha\rho r} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho r^2 \cos \vartheta d\vartheta = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} =: r\eta$$

dove abbiamo introdotto $\eta = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Dato un riferimento fisso nel piano in cui il sistema evolve $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2$ in cui $\mathbf{x}_C = x\hat{\mathbf{i}}_1 + r\hat{\mathbf{i}}_2$, come in figura, abbiamo perciò che

$$\mathbf{x}_G = \mathbf{x}_C + \eta r (\sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1 - \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2) = (x + r\eta \sin \theta) \hat{\mathbf{i}}_1 + r(1 - \eta \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}_2.$$



In linea di principio, il sistema è descritto completamente se sono date la posizione di C e l'angolo θ dalla verticale: la condizione di rotolamento puro, tuttavia, impone una relazione tra queste quantità. Se, per $\theta = 0$, la posizione di C è data da $\mathbf{x}_C = r\hat{\mathbf{i}}_2$, allora durante il moto $\mathbf{x}_C = -r\theta\hat{\mathbf{i}}_1 + r\hat{\mathbf{i}}_2$. Per scrivere le equazioni del moto, partiamo dalla lagrangiana del sistema. Il contributo cinetico può essere scritto ricorrendo al teorema di König. Il momento di inerzia rispetto ad un asse \mathcal{C} ortogonale al piano passante per C si calcola come

$$I_{\mathcal{C}} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho r^3 d\vartheta = 2\rho\alpha r^3 = mr^2 \Rightarrow I_G = I_{\mathcal{C}} - mr^2\eta^2 = mr^2(1 - \eta^2),$$

dove \mathcal{G} è un asse parallelo a \mathcal{C} passante per G . Osservando ora che

$$\mathbf{v}_G = r(-1 + \eta \cos \theta)\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}}_1 + r\eta \sin \theta\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}}_2 \Rightarrow \|\mathbf{v}_G\|^2 = r^2\dot{\theta}^2(1 + \eta^2 - 2\eta \cos \theta).$$

l'energia cinetica è quindi

$$T(\theta) = \frac{1}{2}mr^2(1 - \eta^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2(1 + \eta^2 - 2\eta \cos \theta) = mr^2\dot{\theta}^2(1 - \eta \cos \theta).$$

L'energia potenziale è invece dovuta al solo campo gravitazionale, per cui

$$V(\theta) = mgr(1 - \eta \cos \theta).$$

Essendo il rotolamento puro, le forze di reazione non svolgono lavoro e l'energia meccanica

$$E = T(\theta) + V(\theta) = mr(r\dot{\theta}^2 - g)(1 - \eta \cos \theta)$$

si conserva. Questo significa che, per $\alpha \in (0, \pi)$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{mr} \frac{E}{1 - \eta \cos \theta} - \frac{g}{r}} =: \Phi(\theta).$$

Ripetendo l'analisi fatta per la dinamica di un sistema unidimensionale, troviamo quindi che il moto è periodico di periodo $\tau = 2 \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(\vartheta)}} d\vartheta$, dove $\theta_{\pm} = \pm \arccos\left(\frac{1}{\eta} - \frac{E}{mgr}\right)$ sono gli zeri di $\Phi(\theta)$. Perché $|\theta_{\pm}| < \alpha$ deve essere quindi $\frac{1}{\eta} - \frac{E}{mgr\eta} \geq \cos \alpha$, ovvero $E \leq mgr(1 - \eta \cos \alpha)$.

Possiamo utilizzare il formalismo lagrangiano per ottenere le equazioni del moto (alternativamente, si può derivare la condizione di conservazione dell'energia meccanica), scrivendo

$$\mathcal{L}(\theta) = mr^2\dot{\theta}^2(1 - \eta \cos \theta) - mgr(1 - \eta \cos \theta) = mr(r\dot{\theta}^2 - g)(1 - \eta \cos \theta).$$

Le equazioni del moto sono pertanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2r(1 - \eta \cos \theta)\ddot{\theta} + \eta \sin \theta(g + r\dot{\theta})^2 = 0.$$

La traiettoria $\theta(t) = 0$ è soluzione del sistema ed è posizione di equilibrio: studiando le equazioni del moto per piccole oscillazioni attorno a questa soluzione si ottiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g\eta}{2r(1 - \eta)}\theta = 0,$$

da cui otteniamo il periodo (in questa approssimazione) $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{2r(1 - \eta)}{g\eta}}$. Si noti che per $\alpha \rightarrow \pi$ si ha che $\eta \rightarrow 0$ e τ diverge: in questo caso, infatti, tutte le configurazioni $\theta = \theta_0$ del sistema diventano di equilibrio indifferente.

3.3.1. Momento angolare di un sistema rigido. Concludiamo questa trattazione del tensore d'inerzia osservando che esso è utile per il calcolo di una grandezza fondamentale nello studio del moto rigido, ovvero il momento angolare. Vale infatti la seguente Proposizione.

PROPOSIZIONE 3.8. *Il momento angolare rispetto ad un polo C che appartiene ad un asse istantaneo di rotazione di un corpo rigido con velocità angolare ω può scriversi*

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}.$$

Inoltre, il momento angolare rispetto al centro di massa si scrive

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}.$$

DIMOSTRAZIONE. Rispetto al polo C , individuato dal vettore \mathbf{x}_C in un opportuno riferimento cartesiano, si ha che ogni punto X del corpo in posizione \mathbf{x} ha $\mathbf{v}_X = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)$. Pertanto usando la definizione

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}_C &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{v}_X \rho d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)) \rho d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{B}} [\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_C\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)] \boldsymbol{\omega} \rho d\mathbf{x} = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che vale anche $\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_G + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{Q}$ per via della legge di cambiamento di polo. Ricordando che $\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C)$, possiamo scrivere

$$(3.22) \quad \begin{aligned} (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{Q} &= m(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{v}_G = m(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C)) \\ &= m[\|\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \otimes (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C)] \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

per cui

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} - m[\|\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \otimes (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C)] \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}.$$

L'ultima uguaglianza segue dal teorema di Huygens–Steiner. \square

Una conseguenza della relazione precedente è il seguente corollario.

COROLLARIO 3.9. *Dato un generico punto P individuato da \mathbf{x} ,*

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q}.$$

In generale ovviamente il momento angolare e la velocità angolare non sono paralleli, per via del contributo geometrico prodotto dall'omografia di inerzia. Se H è un punto dell'asse istantaneo di rotazione o il centro di massa, allora $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{L}_H sono paralleli se e solo se $\boldsymbol{\omega}$ è orientato come un asse principale di inerzia $\hat{\mathbf{e}}_k$ di \mathbf{I}_H . In tal caso, $\mathbf{I}_H \boldsymbol{\omega} = I_k \boldsymbol{\omega}$ con I_k corrispondente autovalore.

3.4. Equazioni di Eulero. Un corpo rigido è vincolato a evolvere secondo le stesse equazioni cardinali di ogni sistema di punti materiali. Detto G il suo centro di massa, deve perciò valere

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{L}}_G = \boldsymbol{\tau}_G,$$

dove $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^{(\text{ext})}$ è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema e $\boldsymbol{\tau}_G \equiv \boldsymbol{\tau}_G^{(\text{ext})}$ il corrispondente momento rispetto al polo G . Nel caso di sistemi *liberi*, la coppia di equazioni equivale alle condizioni

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0},$$

dove la dipendenza dal polo di $\boldsymbol{\tau}$ è irrilevante essendo la risultante delle forze nulla. Si tratta di sei equazioni per sei gradi di libertà del sistema, e pertanto sufficienti, nel caso di corpi rigidi, a determinare la dinamica del sistema: dalle equazioni emerge che sistemi liberi aventi stessa risultante delle forze e stesso momento totale sono a tutti gli effetti matematicamente equivalenti.

Nel caso in cui siano presenti vincoli, le equazioni cardinali vengono modificate e occorre distinguere tra il contributo delle forze attive e quelle vincolari,

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(\text{a})} + \mathbf{R}^{(\text{v})} \quad \dot{\mathbf{L}}_G = \boldsymbol{\tau}_G^{(\text{a})} + \boldsymbol{\tau}_G^{(\text{v})}.$$

Se siamo in presenza di *vincoli olonomi e lisci*, il moto del sistema (che si svolge in uno spazio di dimensione non più grande di 6) è sempre risolubile utilizzando le equazioni di Lagrange, per cui le equazioni cardinali sono utili per estrarre informazione sulle reazioni vincolari e i corrispondenti momenti.

Il caso speciale in cui un punto O del sistema rigido è fissato da un vincolo ha una rilevanza particolare, dato che rimuove i tre gradi di libertà traslazionali necessari per specificare la configurazione del sistema rigido, e ci lascia con la trattazione dei soli gradi di libertà angolari. In questo caso, l'integrazione del moto può così avvenire tramite lo studio dell'equazione

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \boldsymbol{\tau}_O.$$

Tre equazioni differenziali del secondo ordine sono infatti sufficienti in questo caso a descrivere il moto, sviluppandosi esso in $\text{SO}(3)$. La quantità $\boldsymbol{\tau}_O$ può contenere diversi tipi di contributi: per esempio, nel caso di vincolo non liscio in O , un contributo di frizione può apparire nella forma $\boldsymbol{\tau}_O^{(v)} = -\mu\boldsymbol{\omega}$, con $\mu > 0$, analogamente a quanto visto nel caso dell'attrito dinamico di strisciamento. Essendo il punto O fisso, esso appartiene ad un asse istantaneo di rotazione e quindi varrà la relazione $\mathbf{I}_O\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_O$. Le equazioni della dinamica discendono dal seguente risultato, dovuto ad Eulero.

TEOREMA 3.10 (Eulero). *Vale la relazione, detta di Eulero,*

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{L}'_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_O = \mathbf{I}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_O.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare ricordare che per un generico vettore \mathbf{u} , detta $\dot{\mathbf{u}}$ la derivata temporale nel sistema fisso e \mathbf{u}' quella nel sistema mobile di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$. Questo risultato può quindi essere applicato a \mathbf{L}_O , osservando che nel riferimento solidale \mathbf{I}_O è fisso e $\boldsymbol{\omega}' = \dot{\boldsymbol{\omega}}$. \square

Possiamo scegliere di lavorare in un *sistema solidale*, usando la base degli assi principali d'inerzia di \mathbf{I}_O , siano essi $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$. In questa base, indicando con

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_i \omega_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{L}_O = \sum_i L_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{I}_O = \sum_i I_i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_i,$$

le equazioni del moto prendono una forma relativamente semplice, e hanno il nome di *equazioni di Eulero*. Esse riguardano l'evoluzione temporale delle componenti di \mathbf{L}_O nel riferimento solidale

$$(3.23) \quad \dot{L}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} L_2 L_3 + \langle \boldsymbol{\tau}_O, \hat{\mathbf{e}}_1 \rangle,$$

$$(3.24) \quad \dot{L}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} L_3 L_1 + \langle \boldsymbol{\tau}_O, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle,$$

$$(3.25) \quad \dot{L}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} L_1 L_2 + \langle \boldsymbol{\tau}_O, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle,$$

o similmente, ricordando che in questa base $L_i = I_i \omega_i$,

$$(3.26) \quad I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + \langle \boldsymbol{\tau}_O, \hat{\mathbf{e}}_1 \rangle,$$

$$(3.27) \quad I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + \langle \boldsymbol{\tau}_O, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle,$$

$$(3.28) \quad I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + \langle \boldsymbol{\tau}_O, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle.$$

3.4.1. Moto di inerzia. Un moto particolarmente importante è quello di un corpo rigido avente un punto O fisso in un riferimento inerziale in assenza di momento torcente: questo moto è talvolta detto *moto di inerzia*.

TEOREMA 3.11. *Se $\boldsymbol{\tau}_O = 0$, le equazioni di Eulero hanno due integrali primi quadratici, ovvero*

$$2E := \sum_i \frac{L_i^2}{I_i}, \quad L^2 := \sum_i L_i^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo integrale primo corrisponde all'energia meccanica: la tesi è quindi conseguenza della legge di conservazione dell'energia. In questo caso infatti $E = T = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i I_i^{-1} L_i^2$. Il secondo integrale primo corrisponde invece alla conservazione del momento angolare nel riferimento fisso inerziale, che implica la conservazione della norma quadra nel riferimento mobile, essendo questo ottenuto per isometrie. \square

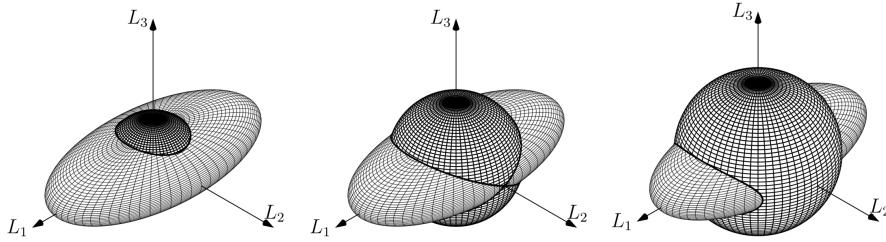


FIGURA 6. Rappresentazione delle due condizioni di conservazione per un sistema rigido non soggetto a forze esterne per un fissato valore di E al variare di L^2 . In blu è rappresentata la condizione derivata dalla conservazione del momento angolare, in rosso quella derivata dalla conservazione dell'energia cinetica. Il vettore \mathbf{L}_O è vincolato a evolvere lungo l'intersezione tra le due superfici. In questa figura, $I_3 < I_2 < I_1$.

Si noti che a momento delle forze nullo, $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$, ma $\mathbf{L}'_O \neq \mathbf{0}$. Supponiamo, per fissare le idee, $I_1 > I_2 > I_3$. Nel riferimento mobile il vettore \mathbf{L}_O evolve sull'intersezione tra una sfera di raggio L ed un ellissoide di semiassi $\sqrt{2EI_1} > \sqrt{2EI_2} > \sqrt{2EI_3}$, superfici determinate rispettivamente dalla conservazione di L^2 ed E . Se il raggio della sfera è minore del semiasse più piccolo o maggiore del semiasse più grande, il moto non è ammesso. Se il raggio della sfera è esattamente uguale al semiasse più piccolo o al semiasse più grande, l'intersezione è costituita da due punti; nei restanti casi si ottengono delle curve non banali. Per $\sqrt{2EI_3} < L < \sqrt{2EI_2}$, tali traiettorie si sviluppano attorno ai punti estremali del semiasse più piccolo fino al punto $L = \sqrt{2EI_2}$, in cui l'intersezione consiste di due circonferenze che attraversano l'ellissoide, mentre aumentando L le traiettorie si avvicinano agli estremi del semiasse maggiore. Soluzioni nella forma $\mathbf{L}_O = \pm\sqrt{2EI_i}\hat{\mathbf{e}}_i$ sono tutte stazionarie secondo le equazioni di Eulero: il moto in tal caso è una *rotazione stazionaria o permanente*.

TEOREMA 3.12. *Il sistema di equazioni di Eulero ammette soluzioni nella forma $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0$ con $\boldsymbol{\omega}_0$ costante e parallelo ad uno degli assi principali d'inerzia. Viceversa, se $\boldsymbol{\omega}(t)$ ha direzione costante, allora esso è costante anche in modulo, e parallelo ad un asse principale di inerzia.*

DIMOSTRAZIONE. Come abbiamo visto, l'implicazione diretta è ovvia. Viceversa, se $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0$ è soluzione delle equazioni del moto, sia $\boldsymbol{\omega}_0 = \sum_i \omega_i \hat{\mathbf{e}}_i$. Se almeno una componente di $\boldsymbol{\omega}_0$ è nulla, per esempio $\omega_1 = 0$, allora si ha che $\omega_2 \omega_3 = 0$ (da cui la tesi) o che $I_2 = I_3$, il che significa che ogni asse in $\text{span}(\hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ è di inerzia. Assumendo invece $\omega_1 \omega_2 \omega_3 \neq 0$, usiamo il fatto che per ipotesi $\boldsymbol{\omega}' = f(t)\boldsymbol{\omega}$. Dalle equazioni di Eulero, $\omega_i f(t) = (I_j - I_k) \omega_1 \omega_2 \omega_3$ per una terna ciclicamente ordinata (i, j, k) , e quindi, sommando le tre relazioni e ricordando che $E = T = \frac{1}{2} \sum_i I \omega_i^2$, $2Tf(t) = 0$, da cui $f(t) = 0$. \square

Le soluzioni stazionarie $\mathbf{L}_O = \pm\sqrt{2EI_i}\hat{\mathbf{e}}_i$ sono stabili per $i = 1$ e $i = 3$, mentre la soluzione $\mathbf{L}_O = \pm\sqrt{2EI_2}\hat{\mathbf{e}}_2$ è instabile. Questo fatto si vede geometricamente osservando che una deviazione attorno a $\mathbf{L}_O = \pm\sqrt{2EI_i}\hat{\mathbf{e}}_i$ per $i = 1$ e $i = 3$ corrisponde ad orbite attorno ai punti estremali degli assi maggiore e minore. Viceversa, una perturbazione attorno a $\mathbf{L}_O = \pm\sqrt{2EI_2}\hat{\mathbf{e}}_2$ genera un'orbita che percorre estensivamente il sistema.

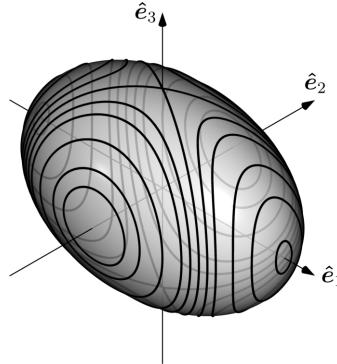
3.4.2. Moto secondo Poinsot. Possiamo considerare l'ellissoide di rotazione come un luogo dei punti individuati da

$$\mathcal{E} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{I}_O \mathbf{x} \rangle = 2E\}.$$

Nel riferimento solidale, l'ellissoide \mathcal{E} naturalmente è una superficie fissa. Nel riferimento fisso, invece, esso descrive un certo moto che è descritto dal teorema di Poinsot.

TEOREMA 3.13 (Poinsot). *L'ellissoide di rotazione ruota senza strisciare su un piano fisso ortogonale a \mathbf{L}_O .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Pi(t)$ un piano ortogonale a \mathbf{L}_O e tangente all'ellissoide di rotazione al tempo t . Nel punto di tangenza, sia \mathbf{x} , un vettore ortogonale alla superficie dell'ellissoide è $\nabla \langle \mathbf{x}, \mathbf{I}_O \mathbf{x} \rangle = 2\mathbf{I}_O \mathbf{x}$:

FIGURA 7. Poloidi sull'ellissoide $\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} \rangle = 2E$.

dovendo questo vettore essere parallelo a \mathbf{L}_O , deve esistere un certo $\lambda \neq 0$ tale che $\mathbf{I}_O \mathbf{x} = \lambda \mathbf{L}_O = \lambda \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}$ in detto punto, da cui si trova che i due possibili punti di tangenza sono $\mathbf{x}_{\pm} := \pm \boldsymbol{\omega}$, ovvero sono sull'intersezione tra l'ellissoide e l'asse diretto come $\boldsymbol{\omega}$ passante per O . D'altra parte, la distanza tra O e il piano $\Pi(t)$ è $|\langle \mathbf{L}_O, \mathbf{x}_{\pm} \rangle| = \langle \mathbf{L}_O, \boldsymbol{\omega} \rangle = 2E$, che è costante, ovvero il piano è fisso. Essendo il punto di tangenza sull'asse istantaneo di rotazione, esso ha velocità nulla e il rotolamento è quindi puro. \square

COROLLARIO 3.14. *Condizioni iniziali vicine alla rotazione stazionaria intorno all'asse maggiore o minore d'inerzia rimangono vicine a tale posizione iniziale sia nello spazio fisso che in quello solidale.*

La traiettoria seguita dal punto di tangenza sull'ellissoide di rotazione è detta *poloide*, mentre il corrispondente tracciato su Π è detto *erpoloide*. Una poloide è individuata dall'intersezione di due ellisoidi: infatti, $\boldsymbol{\omega}$ deve muoversi rispettando le leggi di conservazione

$$2E = \sum_i I_i \omega_i^2, \quad L^2 = \sum_i I_i^2 \omega_i^2.$$

Queste due condizioni descrivono curve chiuse sull'ellissoide $2E = \sum_i I_i \omega_i^2$, che appaiono come in Fig. 7. Una rotazione completa del punto di tangenza C lungo una poloide non corrisponde necessariamente ad una rotazione completa dell'ellissoide attorno a \mathbf{L}_O . Detto α l'angolo descritto dal punto di tangenza rispetto all'asse \mathbf{L}_O dopo una rotazione dello stesso sulla poloide, il moto è *periodico* se $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$: in tal caso, l'ellissoide tornerà periodicamente nella stessa configurazione anche nel riferimento fisso, diversamente il corpo non tornerà mai al suo stato di partenza.

Esempio 3.12 (Precessione) — Un *giroscopio* è un sistema rigido avente $I \equiv I_1 = I_2 \neq I_3$. Un moto di inerzia di un tale sistema ha una proprietà particolare: l'asse $\hat{\mathbf{e}}_3$, l'asse istantaneo di rotazione e \mathbf{L}_O giacciono sempre sullo stesso piano Π , generato da $\hat{\mathbf{e}}_3$ e $\mathbf{v} = \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2$. Basta osservare che, nel riferimento degli assi principali, $\mathbf{L}_O = I\mathbf{v} + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$, mentre $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$. Inoltre, dalle equazioni di Eulero, sempre nella base degli assi principali di inerzia $\dot{\omega}_3 = 0$, ovvero $\langle \boldsymbol{\omega}, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle$ è costante, così come $\langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle = I_3 \langle \boldsymbol{\omega}, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle$, ovvero i tre vettori $\hat{\mathbf{e}}_3$, \mathbf{L}_O e $\boldsymbol{\omega}$ mantengono i loro angoli reciproci costanti: i due vettori $\hat{\mathbf{e}}_3$ e $\boldsymbol{\omega}$, quindi, descrivono dei *coni di rotazione* ruotando attorno a \mathbf{L}_O , che è fisso. Una conseguenza di questo fatto è che il punto di tangenza dell'ellissoide descrive una circonferenza sul piano Π .

Il moto descritto si chiama *precessione*. Se scomponiamo $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{I} \mathbf{L}_O + \left(\omega_3 - \frac{I_3 \omega_3}{I} \right) \hat{\mathbf{e}}_3$, si vede subito che la componente di velocità angolare nella direzione di \mathbf{L}_O ha modulo $\omega_{\text{pr}} = \frac{L}{I}$: questa quantità si dice *velocità angolare di precessione*.

3.4.3. Trottola di Lagrange. Concludiamo con lo studio del moto rigido di una trottola soggetta al proprio peso. A differenza del caso studiato finora, in cui non abbiamo considerato forze esterne, l'oggetto in esame è questa volta massivo e le equazioni di Eulero presenteranno un termine aggiuntivo dovuto al contributo della forza peso. Una *trottola* è un corpo rigido con simmetria assiale, di modo che $I \equiv I_1 = I_2 \neq I_3$, vincolato in un punto O fisso passante per il suo asse di simmetria $\hat{\mathbf{e}}_3$, e di massa m soggetto all'azione del campo gravitazionale. Assumendo che in O sia applicato un vincolo ideale, ne risulta che il suo spazio delle configurazioni è $SO(3)$, come nel caso puramente inerziale. La descrizione completa del moto può avvenire utilizzando una parametrizzazione di $SO(3)$, e in particolare una parametrizzazione che abbiamo già introdotto: gli angoli di Eulero. Dato un riferimento fisso $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, parametrizziamo il nuovo riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ solidale con la trottola per mezzo della terna (ϕ, ψ, θ) già introdotta. Detta ℓ la distanza del centro di massa della trottola dal suo punto di contatto O , che immaginiamo ad altezza minore, l'energia potenziale del sistema è quindi

$$V(\theta) = mgl \cos \theta$$

a meno di costanti additive arbitrarie. Per calcolare l'energia cinetica, invece, utilizziamo l'Eq. (3.9), che esprime ω in funzione degli angoli di Eulero. Nel riferimento solidale, quindi, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

per cui la lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L}(\varphi, \psi, \theta) = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta.$$

Possiamo notare che ψ and φ sono cicliche. Questo significa che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\phi} (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} I_3 \cos \theta \equiv L_z$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \equiv L_3$$

si conservano durante il moto. Queste due quantità corrispondono precisamente alla proiezione del momento angolare lungo la direzione $\hat{\mathbf{i}}_3$ e lungo la direzione $\hat{\mathbf{e}}_3$, ovvero $L_z = \langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle$ e $L_3 = \langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle$: la loro conservazione esprime l'invarianza del sistema per rotazioni attorno all'asse principale di inerzia $\hat{\mathbf{e}}_3$ e attorno all'asse $\hat{\mathbf{i}}_3$. Il primo risultato di questa analisi è il seguente, ottenibile con un po' di algebra direttamente da questa osservazione.

TEOREMA 3.15. *L'inclinazione θ rispetto alla verticale varia come nel sistema unidimensionale equivalente di energia*

$$E' = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta,$$

dove $L_z = \langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle$ e $L_3 := \langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle$.

Il risultato è che la dinamica di θ è accessibile in maniera semplice. Sempre con semplici manipolazioni algebriche si ottiene

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I \sin^2 \theta}.$$

Indichiamo con

$$a := \frac{L_z}{I}, \quad b := \frac{L_3}{I}, \quad \alpha := \frac{2E'}{I}, \quad \beta := \frac{2mg\ell}{I}, \quad u := \cos \theta \in [-1, 1].$$

Abbiamo quindi che

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2 =: f(u), \quad \dot{\phi} = \frac{a - bu}{1 - u^2} =: g(u).$$

Abbiamo ora che $f(u)$ è un polinomio di terzo grado con $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$ purché $a \neq \pm b$. Dovendo f avere valori positivi nell'intervallo in cui il moto è ammesso, questo significa che la dinamica è compatibile con un insieme di parametri tali per cui f ha due zeri, u_- e u_+ , nell'intervallo $[-1, 1]$: la

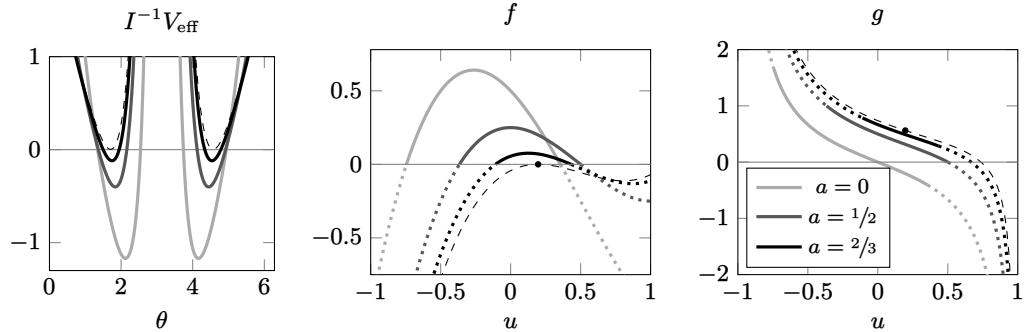


FIGURA 8. Esempio di grafico delle funzioni f e g e del potenziale efficace nella dinamica della trottola di Lagrange per $2\alpha = \beta = b = 1$. La linea tratteggiata corrisponde al caso limite in cui $u_- \rightarrow u_+$.

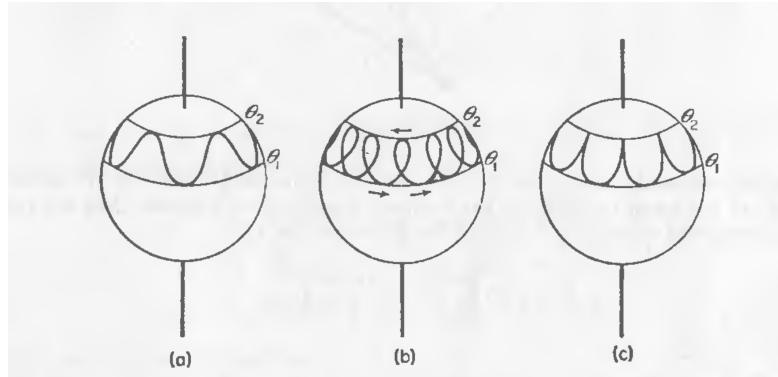


FIGURA 9. Moto di una trottola di Lagrange per diversi valori dei suoi parametri. Figura dalla monografia *Fisica teorica I. Meccanica* di L.D. Landau e E.M. Lifshits (1976).

dinamica si svolgerà quindi in tale intervallo in cui θ varierà periodicamente con un moto detto *nutazione*. Una maniera pittorica di visualizzare la dinamica si ha osservando che

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1 - \cos \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_3,$$

individua un punto sulla superficie di una sfera unitaria. Questo punto cambierà, durante il moto, il suo angolo rispetto alla verticale e precederà attorno ad esso secondo l'angolo φ . Questo punto quindi si muoverà in una banda $[\theta_-, \theta_+]$, corrispondente ai due valori u_- e u_+ . Il moto lungo l'azimuth, ovvero quello descritto da φ , invece, è caratterizzato dalla legge per $\dot{\varphi} = g(u)$: se $u = a/b$, valore per cui g si annulla, è fuori dall'intervallo $[u_-, u_+]$, allora φ crescerà o decrescerà monotonicamente. Se invece esso è all'interno dell'intervallo, vi saranno punti di inversione, di modo che $\hat{\mathbf{e}}_3$ disegni dei nodi. Infine, se $u = a/b$ in uno dei due estremi dell'intervallo, il moto sulla sfera presenterà cuspidi. I tre tipi di moto sono raffigurati in Fig. 9. Il moto azimutale risultante si dice *precessione*, come nel caso giroscopico. La trottola ha perciò un moto di rotazione attorno al proprio asse, un moto di precessione e uno di nutazione, ciascuno con una propria frequenza caratteristica.