CAPITOLO 1

Il campo dei numeri complessi

1. Operazioni aritmetiche

Lo studio delle equazioni algebriche di secondo grado, ovvero nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

con x incognita da determinare, ha rapidamente portato alla constatazione di un fatto semplice ma al tempo stesso profondo: l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è *algebricamente chiuso.* Un insieme (più precisamente, come vedremo in seguito, un *campo*) è algebricamente chiuso se qualsivoglia polinomio non costante su di esso ha una radice nell'insieme stesso. Questo non è il caso di $\mathbb{R}$: se per esempio consideriamo il polinomio $x^2 + 1$, l'equazione associata

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni reali. Nasce ora la domanda se sia possibile introdurre un insieme più vasto, che include $\mathbb{R}$, tale che ogni equazione algebrica non triviale abbia effettivamente soluzione in esso.

È questa la motivazione che ha portato all'introduzione dell'insieme dei numeri complessi, che denotiamo $\mathbb{C}$. Il punto di partenza è proprio quello di definire un particolare numero, detto *unità immaginaria* i, con la proprietà speciale che

$$i^2 = -1. \tag{1.1}$$

Questo numero è proprio la soluzione all'equazione $x^2 + 1 = 0$. L'unità immaginaria è tale che i^n, dipendentemente da $n = 0, 1, \dots$, assume solo quattro valori, ovvero $\{1, i, -1, -i\}$: infatti $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ etc. Tuttavia, una volta introdotto tale numero, occorre anche introdurre una struttura aritmetica "sensata", che permetta in qualche modo di combinare questo numero speciale con i numeri reali. La prima porzione di questo capitolo sarà focalizzata su questo aspetto in particolare.

Un generico *numero complesso* z si ottiene combinando questa unità immaginaria con due numeri reali, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, in modo tale che

$$z = \alpha + i\beta. \tag{1.2}$$

Scriviamo che $\alpha = \mathrm{Re}(z)$ è la *parte reale* di z e $\beta = \mathrm{Im}(z)$ è la *parte immaginaria* di z: in definitiva, un numero complesso è una coppia di valori (α, β) corrispondente a due componenti (reale e immaginaria). Se $\alpha = 0$ il numero si dice *immaginario puro*, mentre se $\beta = 0$ il numero è naturalmente un reale standard.

Le operazioni di somma e prodotto si definiscono in analogia con quelle su $\mathbb{R}$, ma tenendo conto del fatto che $i \cdot i = -1$ per definizione. Così per esempio $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, allora

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2),$$

mentre

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2).$$

Come si vede, operazioni di somma e prodotto sono commutative. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è quindi, come si dice, *chiuso* rispetto alle operazioni di somma e prodotto: sommando e moltiplicando numeri complessi si ottengono numeri complessi.

Non è ovvio che sia sempre possibile *dividere* due numeri complessi e rimanere in $\mathbb{C}$. Supponiamo che *esista* un numero complesso $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ che sia consistente con l'equazione $z_1 = z_2 z_3$ assumendo che $z_2 \neq 0$, in modo tale che si possa dare un senso alla scrittura $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Per far ciò imponiamo quindi

$$z_1 z_3 = (\alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3) + i(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) = \alpha_2 + i\beta_2 = z_2$$

Ciò significa che

$$\alpha_2 = \alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3, \qquad \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 = \beta_2$$

che è un sistema di equazioni che possiamo risolvere per α_3 e β_3 ottenendo

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}, \qquad \beta_3 = \frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}. \tag{1.3}$$

Infine possiamo scrivere quindi

$$\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\alpha_2 + i\beta_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + i\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}. \tag{1.4}$$

che è ancora un numero complesso.

In generale, dividere per un numero complesso $z = \alpha + i\beta$ equivale a moltiplicare per il suo *reciproco*, ovvero per il numero che indichiamo $\frac{1}{z}$, tale per cui $z\frac{1}{z} = \frac{1}{z}z = 1$. Esso è dato da

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{1}{\alpha + i\beta}\frac{\alpha - i\beta}{\alpha - i\beta} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{1.5}$$

1.1. La struttura di campo. In algebra, dato un insieme $\mathbb{K}$, è possibile definirlo *campo* se è soddisfatta la definizione seguente.

Definizione 1.1 (Campo). *Un campo* $\mathbb{K}$ *è un insieme dotato di due operazioni binarie, chiamate addizione* $+\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ *e moltiplicazione* $\cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, *tali per cui valgono le seguenti proprietà:*

Addizione: *è commutativa e associativa. Esiste inoltre un elemento neutro, indicato con* 0, *tale per cui se* $x \in \mathbb{K}$, $x + 0 = 0 + x = x$. *Infine, per ogni* $x \in \mathbb{K}$ *esiste un elemento, detto opposto,* $-x$ *tale per cui* $x + (-x) = 0$.

Moltiplicazione: *è associativa, commutativa ed esiste un elemento neutro, indicato con* 1, *tale per cui, se* $x \in \mathbb{K}$, *allora* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. *Infine, per ogni* $x \neq 0$ *esiste un inverso,* x^{-1}, *tale per cui* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Infine, la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione: se $a, b, c \in \mathbb{K}$ *allora* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è quindi un campo rispetto alle operazioni di *addizione* e *moltiplicazione* che tutti conosciamo. Un campo è sempre un *dominio integrale*, ovvero se $x, y \in \mathbb{K}$ e $xy = 0$, allora $x = 0$ o $y = 0$. Ma, a ben vedere, anche $\mathbb{C}$ ha la stessa struttura, rispetto alle medesime operazioni di somma e prodotto che abbiamo introdotto sopra: anche $\mathbb{C}$ è un campo. In particolare, $\mathbb{R}$ è un *sottocampo* di $\mathbb{C}$, dato che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ed è esso stesso un campo. La struttura di campo è molto importante in algebra e, come vedremo in seguito, permette di definire spazi di grande utilità.

Se, da un lato, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono senz'altro i campi più comunemente adoperati e godono entrambi della struttura introdotta sopra, ci sono però delle differenze importanti tra di essi. Una di queste è stata la nostra motivazione per introdurre $\mathbb{C}$, ovvero $\mathbb{R}$ *non* è algebricamente chiuso, mentre $\mathbb{C}$

lo è. Si può infatti provare che l'introduzione dei numeri complessi è sufficiente per permettere di trovare almeno una radice di qualsivoglia polinomio a coefficienti in generale complessi.

TEOREMA 1.1 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio non-costante di grado $n \geq 1$ in una variabile z a coefficienti complessi $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ ammette almeno una radice complessa.*

Una ulteriore differenza è legata al fatto che $\mathbb{R}$ è dotato di una relazione d'ordine, mentre $\mathbb{C}$ non lo è: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ possiamo infatti dire se $\alpha < \beta$ o $\beta < \alpha$ o $\beta = \alpha$ considerando $\beta - \alpha$ e valutandone il segno. Questa proprietà non può essere traslata in $\mathbb{C}$ dato che la differenza di due numeri complessi non ha, in generale, un segno definito.

1.2. Estrazione di radice quadra. Finora abbiamo parlato di addizioni e moltiplicazioni, ma l'interesse per i numeri complessi in matematica nacque da un problema che riguarda una diversa operazione, ovvero *l'estrazione di radice*. La radice di un numero complesso può essere *sempre* trovata in forma esplicita, e questa è una delle ragioni per cui i numeri complessi sono stati introdotti. Estrarre la radice di $\alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, equivale a trovare una coppia di reali x e y tali che

$$\alpha + i\beta = (x + iy)^2. \tag{1.6}$$

Sviluppando il quadrato otteniamo facilmente che

$$x^2 - y^2 = \alpha, \qquad 2xy = \beta. \tag{1.7}$$

che sono due equazioni da cui possiamo ottenere informazioni sulle nostre incognite x e y. In particolare

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

ovvero

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Possiamo ora procedere e scrivere

$$\alpha = x^2 - y^2 = x^2 + y^2 - 2y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 2y^2$$

e similmente

$$\alpha = x^2 - y^2 = -x^2 - y^2 + x^2 = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 2x^2$$

che forniscono le equazioni finali

$$x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}, \qquad y^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \tag{1.8}$$

Queste due equazioni sembrano suggerire la possibilità di due possibili valori per ciascuno due due numeri reali x e y. Tuttavia non tutte e quattro le possibili coppie sono accettabili: il motivo è che il segno relativo di x e y è fissato dall'equazione $2xy = \beta$, per cui $\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y) = \operatorname{sign}(\beta)$. Possiamo quindi concludere che, se $\beta \neq 0$,

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \operatorname{sign}(\beta) \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right). \tag{1.9}$$

Se $\beta = 0$ invece otteniamo una diversa coppia di soluzioni. Se $\alpha > 0$, le radici sono (come atteso) $\pm\sqrt{\alpha}$; se $\alpha < 0$, le radici sono $\pm i\sqrt{-\alpha}$. In generale quindi la radice quadrata di un numero complesso esiste ed è data da due opposti numeri complessi.

La formula che abbiamo ottenuto appare piuttosto convoluta, e la sua derivazione vale come un esercizio che tuttavia ci mostra come possiamo costruire una radice quadrata di un numero complesso: deriveremo un altro formalismo, detto *trigonometrico*, che semplifica enormemente le estrazioni di radice di un numero complesso.

1.3. Coniugazione e modulo. Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ ha, come detto, la struttura generica $z = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Esiste una operazione molto semplice ed estremamente utile per rendere compatte molte delle formule introdotte e molte formule che introdurremo, detta *coniugazione complessa*. Consiste, semplicemente, nel rimpiazzare $i \mapsto -i$ nell'espressione di z, e si indica come $\bar{z}$:

$$z = \alpha + i\beta \mapsto \bar{z} = \alpha - i\beta. \tag{1.10}$$

In questo modo possiamo scrivere

$$\alpha = \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \beta = \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{1.11}$$

L'operazione di coniugazione ha delle semplici proprietà: dati due numeri complessi a e b, allora

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}, \qquad \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}. \tag{1.12}$$

Il prodotto $z\bar{z}$ inoltre è dato da

$$z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0, \tag{1.13}$$

e scriviamo $|z|^2 \coloneqq z\bar{z}$: il numero positivo $|z|$ è detto *modulo* di z e coincide con il solito valore assoluto se $z \in \mathbb{R}$. Esso ha ulteriori proprietà facili da verificare, ovvero

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|. \tag{1.14}$$

In altre parole, il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli. Infine vale la seguente uguaglianza:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \tag{1.15}$$

Per ottenerla, basta osservare che

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

1.4. La disuguaglianza triangolare. L'operazione di modulo ha forti analogie con quella di valore assoluto nota nel campo dei numeri reali, ma anche alcune rilevanti differenze, dato che si applica ad una quantità dotata di due componenti. Anzitutto, per definizione sappiamo che

$$-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|, \qquad -|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.16}$$

Abbiamo però anche visto che, dati due numeri complessi z_1 e z_2, $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$. Ma quindi, dato che $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1|\,|\overline{z_2}| = 2|z_1|\,|z_2|$, possiamo scrivere

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

ovvero il modulo soddisfa la *disuguaglianza triangolare*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.17}$$

Applicando il principio di induzione, si può estendere questa disuguaglianza ad un set di n numeri complessi $\{z_k\}_{k=1}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|. \tag{1.18}$$

La disuguaglianza triangolare permette di ottenere altre disuguaglianze interessanti. Se $z_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ e $z_2 = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, allora

$$|\alpha + i\beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \tag{1.19}$$

Un ulteriore esempio: da

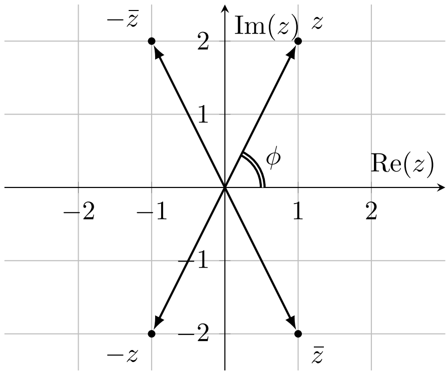
$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

e, invertendo z_1 e z_2, $|z_2| - |z_1| \le |z_1 - z_2|$, per cui

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|. \tag{1.20}$$

2. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Un numero complesso è associato, sulla base di quanto detto sopra, a due numeri reali: la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Questo vuol dire che possiamo rappresentarlo in un *piano*, detto *piano di Gauss* o *diagramma di Argand*, in cui l'asse delle ascisse è associato alla parte reale e l'asse delle coordinate alla parte immaginaria, in modo che il punto di coordinate (α, β) rappresenti univocamente il numero complesso $\alpha + i\beta$. In particolare, possiamo immaginare che ogni numero complesso sia associato ad un *vettore*, ovvero una freccia che, partendo dall'origine, termina nel punto rappresentante il numero stesso.



Il modulo $|z|$ ha anche esso un significato geometrico chiaro: essendo $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, il modulo è semplicemente la lunghezza del vettore associato a z. Il coniugato di z, invece, è rappresentato da un vettore *simmetrico* al vettore rappresentante z rispetto all'asse delle ascisse.

Come noto, i punti del piano possono essere individuati per mezzo di coordinate cartesiane, oppure di coordinate *polari*: per fornire le coordinate polari di un punto occorre dare una distanza dall'origine e un angolo rispetto all'asse delle ascisse. Un numero complesso z è associato ad un punto che dista dall'origine, come abbiamo visto, $|z|$. Sia ora ϕ l'angolo del vettore corrispondente rispetto all'asse delle ascisse: allora possiamo scrivere

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cos\phi, \qquad \mathrm{Im}(z) = |z| \sin\phi. \tag{1.21}$$

L'angolo ϕ è detto *argomento* di z, si denota con $\arg(z)$: esso *non è univocamente determinato*, dato che, sostituendo $\phi \mapsto 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ nelle Eqs. (1.21), le espressioni rimangono invariate. Per rimuovere tale ambiguità ci si riferisce talvolta all'argomento compreso nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ *argomento principale di z*, indicato con $\mathrm{Arg}(z)$. Questa ambiguità nel determinare l'argomento (a volte detto *fase*) del numero complesso ha un'importanza che emergerà in seguito. Introducendo l'argomento di z possiamo riscrivere il nostro numero complesso nella sua forma trigonometrica,

$$z = |z| \left(\cos\phi + i \sin\phi\right), \tag{1.22}$$

Seguendo Eulero, riscriviamo questa formula in una forma molto più compatta, ed estremamente utile. *Definiamo* la seguente funzione:

$$\mathrm{e}^{i\phi} := \cos\phi + i \sin\phi \tag{1.23}$$

L'utilizzo della forma su introdotta da parte di Eulero è giustificato dal fatto seguente. Se espandiamo in serie di Taylor le funzioni trigonometriche seno e coseno e raccordiamo le due serie (cosa possibile dato che esse sono assolutamente convergenti) ciò che appare è effettivamente lo sviluppo in serie di un esponenziale complesso:

$$\begin{aligned}\cos\phi + i\sin\phi &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k}\frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1}\frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\phi)^k}{k!} = \mathrm{e}^{i\phi}\,.\end{aligned}\tag{1.24}$$

La funzione esponenziale introdotta sopra si può invertire in modo da ottenere due eleganti espressioni per seno e coseno, ovvero

$$\sin\phi = \frac{\mathrm{e}^{i\phi} - \mathrm{e}^{-i\phi}}{2i}, \qquad \cos\phi = \frac{\mathrm{e}^{i\phi} + \mathrm{e}^{-i\phi}}{2}.\tag{1.25}$$

Inoltre permette di scrivere in maniera compatta ogni numero complesso come $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\phi}$.

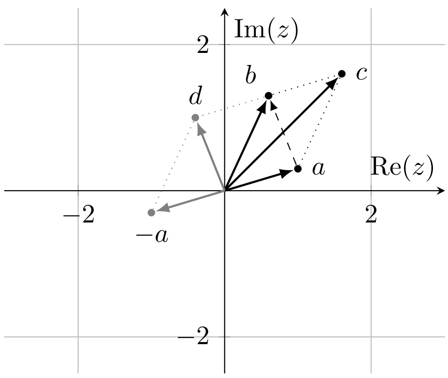
Si noti che $\bar{z} = |z|\,\mathrm{e}^{-i\phi}$: questo implica che $\overline{\mathrm{e}^{i\phi}} = \mathrm{e}^{-i\phi}$. La funzione è anche tale che $|\,\mathrm{e}^{i\phi}\,|^2 = \mathrm{e}^{i\phi}\,\mathrm{e}^{-i\phi} = 1$.

L'identità dimostrata sopra implica anche che $\mathrm{e}^{i\phi}$ è in effetti una funzione periodica in ϕ: $\mathrm{e}^{i(\phi+2k\pi)} = \mathrm{e}^{i\phi}$. Infine, dalla rappresentazione cartesiana è evidente che il numero reale $z = -1$ ha argomento principale $\phi = \pi$, per cui $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$, ovvero possiamo scrivere la *formula di Eulero*

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0.$$

L'utilità di questa rappresentazione sarà evidente a breve: essa permetterà di interpretare alcune proprietà introdotte sopra in termini *geometrici* ed eseguire con grande facilità operazioni di elevamento a potenza ed estrazione di radice.

2.1. Addizione e moltiplicazione. Le operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri complessi possono essere interpretate in termini di manipolazioni dei vettori che li rappresentano. Supponiamo che a e b siano due numeri complessi nel piano (identificheremo il numero complesso z generico con il vettore che lo rappresenta). La loro *somma* $c = a + b$ è il vettore ottenuto per mezzo della cosiddetta *regola del parallelogramma*, ovvero il vettore somma corrisponde precisamente alla diagonale con vertice nell'origine del parallelogramma costruito sui lati a e b.



La seconda diagonale del parallelogramma ottenuto ha anche essa un significato. Se infatti consideriamo $d = b - a$, questa corrisponde alla somma tra il vettore associato a b e il vettore associato a $-a$: il vettore associato a d ha esattamente la lunghezza della seconda diagonale ottenuta costruendo il parallelogramma della somma tra a e b.

A questo punto le disuguaglianze che abbiamo discusso in precedenza acquistano tutte una geometrica: la disuguaglianza triangolare $|a+b| \leq |a| + |b|$ per esempio esprime esattamente la disuguaglianza nota per i triangoli dalla geometria euclidea, secondo cui ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due. Ugualmente $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ è la legge del parallelogramma.

Come la somma, anche il prodotto tra numeri complessi ha un significato geometrico, che appare più chiaro se utilizziamo la forma trigonometrica per rappresentarli. Dati $a = |a|\,\mathrm{e}^{i\phi_a}$ e $b = |b|\,\mathrm{e}^{i\phi_b}$, è immediato vedere che $ab = |a|\,|b|\,\mathrm{e}^{i(\phi_a+\phi_b)}$, ovvero il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli (come sapevamo) e l'argomento del prodotto è uguale alla somma degli argomenti dei fattori. Questo può essere visto esplicitamente usando delle semplici identità trigonometriche:

$$\begin{aligned} ab &= |a|\,|b|\,\mathrm{e}^{i\phi_a}\,\mathrm{e}^{i\phi_b} \\ &= |a|\,|b|(\cos\phi_a + i\sin\phi_a)(\cos\phi_b + i\sin\phi_b) \\ &= |a|\,|b|\,((\cos\phi_a\cos\phi_b - \sin\phi_a\sin\phi_b) + i(\cos\phi_a\sin\phi_b + \sin\phi_a\cos\phi_b)) \\ &= |a|\,|b|\,(\cos(\phi_a+\phi_b) + i\sin(\phi_a+\phi_b)) \\ &=: |a|\,|b|\,\mathrm{e}^{i(\phi_a+\phi_b)}\,. \end{aligned} \tag{1.26}$$

La funzione esponenziale con argomento immaginario si comporta quindi esattamente come ci si aspetterebbe, ovvero $\mathrm{e}^{i\phi_a}\,\mathrm{e}^{i\phi_b} = \mathrm{e}^{i(\phi_a+\phi_b)}$. Geometricamente questo vuol dire che se abbiamo due vettori a e b, il vettore ab può essere inteso, per esempio, come il risultato di una dilatazione (o contrazione) del vettore a di un fattore $|b|$ seguita da una rotazione di un angolo ϕ_b.

2.2. Formula di de Moivre. Il risultato precedente rigurdo il prodotto implica (come si può vedere facilmente per induzione) che

$$z^n = (|z|\,\mathrm{e}^{i\phi})^n = |z|^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |z|^n\,\mathrm{e}^{in\phi}\,. \tag{1.27}$$

Otteniamo quindi immediatamente la *formula di de Moivre*,

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi \tag{1.28}$$

che può essere scritta come $(\mathrm{e}^{i\phi})^n = \mathrm{e}^{in\phi}$ (che ancora una volta mostra come la funzione esponenziale ad argomento compesso si comporti esattamente come quella ad argomento reale nota).

Il risultato ottenuto sembra suggerire una semplice soluzione per equazioni del tipo

$$z^n = a$$

per $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Apparentemente, basta infatti scrivere $a = |a|\,\mathrm{e}^{i\phi}$, dove $\phi = \mathrm{Arg}(a)$, e quindi

$$z = \sqrt[n]{|a|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{n}} = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\phi}{n} + i\sin\frac{\phi}{n}\right).$$

Questa tuttavia *non* è in generale l'unica soluzione. Infatti come abbiamo specificato in precedenza, se $\phi = \mathrm{Arg}(a)$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $a = |a|\,\mathrm{e}^{i(\phi+2\pi k)}$ corrisponde allo stesso numero complesso. Nell'estrazione di radice, quindi, occorre tenere conto che del fatto tutti questi argomenti hanno pari dignità, e in generale le soluzioni distinte sono n e date da

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Si noti che non occorre considerare *tutti* i valori di k ma solo $k = 0, \dots, n-1$. Se infatti consideriamo $k = n$ otteniamo la stessa espressione ottenuta per $k = 0$, $k = n+1$ fornisce la stessa espressione ottenuta per $k = 1$ e così via. Ne consegue che una equazione del tipo $z^n = a$ ha n radici distinte nel piano complesso, tutte con lo stesso modulo ed collocate sui vertici di un poligono regolare di n lati. In particolare, se $a = 1$, le n soluzioni sono le n *radici dell'unità*,

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k}{n}}, \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

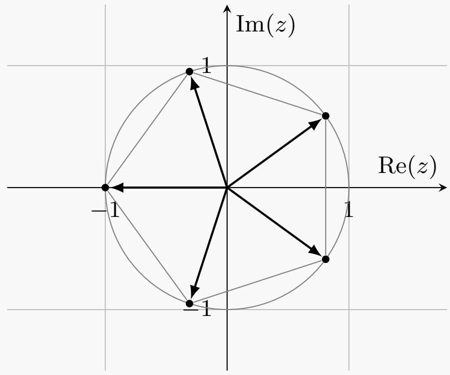
Supponiamo di voler risolvere l'equazione

$$z^5 = -1.$$

Abbiamo già visto che $-1 = \mathrm{e}^{\pi i}$. L'equazione ha quindi cinque radici, date da

$$z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}, \qquad k = 0, \dots, 4.$$

Solo una di esse è reale pura, ovvero quella ottenuta per $k = 2$, per la quale $z_3 = -1$.



Abbiamo mostrato che, se $z = \alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + i\,\mathrm{sign}(\beta)\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right).$$

D'altra parte, il risultato presentato in questa sezione fornisce la seguente formula per le radici di $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\phi}$:

$$\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right), \quad -\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right),$$

ovvero

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right).$$

Queste due espressioni sono naturalmente equivalenti. Sappiamo anzitutto che $|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha = |z|\cos\phi$ e $\beta = |z|\sin\phi$. Di conseguenza la prima espressione può scriversi

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\left(\sqrt{\frac{\cos\phi + 1}{2}} + i\,\mathrm{sign}(\sin\phi)\sqrt{\frac{-\cos\phi + 1}{2}}\right).$$

A questo punto il risultato si ottiene utilizzando le formule di bisezione,

$$\cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1+\cos\phi}{2}, \qquad \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{2}.$$

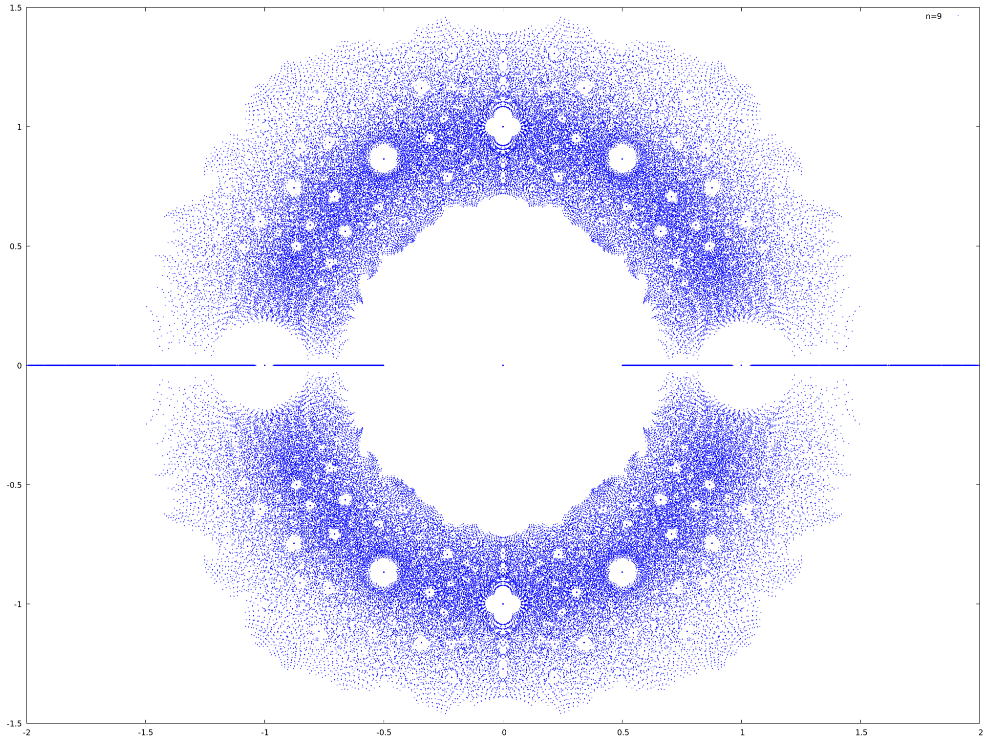


FIGURA 1. Zeri di tutti i polinomi del tipo $a_9z^0 + a_8z^8 + \cdots + a_0$ con $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ nel piano di Argand.