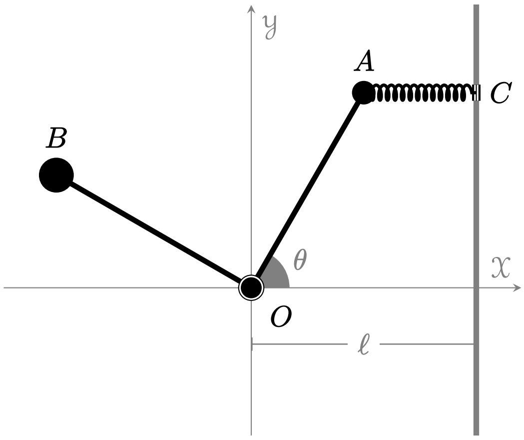
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

13 Gennaio 2025

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. Il voto minimo per l'accesso all'orale è 15/30.

In un piano verticale sono date due aste di massa trascurabile identificate dai segmenti ortogonali $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ rispettivamente, ciascuno di lunghezza ℓ: come visibile in figura, esse sono saldate tramite un giunto rigido "ad L" in O, di modo che durante il loro moto sia sempre $\overline{OA} \perp \overline{OB}$. Il giunto è imperniato nell'origine di un riferimento cartesiano tramite una cerniera che permette al sistema di aste di ruotare liberamente attorno ad esso mantenendosi nel piano verticale. L'estremo A di una delle due aste è inoltre collegato, tramite una molla ideale di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k, ad un carrello C che scorre su una guida verticale e a distanza ℓ da O, di modo che $\overline{AC}$ rimanga sempre orizzontale. In A, B ed O sono collocate delle masse puntiformi, pari a m, $2m$ ed m rispettivamente.



A Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse ortogonale al piano in cui esso giace e passante per il suo centro di massa.
Suggerimento. Una possibile maniera di procedere è calcolare inizialmente il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e quindi utilizzare il teorema di Huygens–Steiner.

B Detto g il modulo dell'accelerazione di gravità, si assuma la seguente relazione:

$$k\ell = 2mg.$$

Sotto questa ipotesi, si mostri che il sistema è associabile ad un potenziale in una variabile lagrangiana θ, nella forma

$$U(\theta) = a(\sin\theta + \cos^2\theta)$$

a meno di costanti additive e per una certa costante reale a. Si calcolino le posizioni di equilibrio del sistema, e si valuti se sono stabili o meno.
Suggerimento. Sull'intervallo $[-\pi, \pi)$, l'equazione $\sin\theta = 1/2$ ha come soluzioni $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

C Si calcoli la reazione vincolare $\vec{\Phi}_O$ in O in condizioni statiche. Per quale valore di θ il suo modulo è massimo?

SOLUZIONE

A Calcoliamo anzitutto la posizione del centro di massa del sistema. Sia $\overrightarrow{OA}$ la posizione di A, $\overrightarrow{OB}$ la posizione di B. Il centro di massa G del sistema è quindi in

$$\overrightarrow{OG}=\frac{m\overrightarrow{OA}+2m\overrightarrow{OB}+m\vec{0}}{4m}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{4}=\ell\frac{\cos\theta-2\sin\theta}{4}\hat{\imath}_1+\ell\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{4}\hat{\imath}_2.$$

Come da suggerimento, la maniera più semplice di procedere è quella di utilizzare il teorema di Huygens–Steiner: calcoliamo prima il momento d'inerzia rispetto all'asse ortogonale al piano passante per O,

$$I_O = md^2(A,O) + 2md^2(B,O) = 3m\ell^2,$$

dove abbiamo usato il fatto che $d(A,O) = d(B,O) = \ell$, mentre la massa in O non contribuisce essendo esattamente sull'asse. "Trasliamo" ora questa quantità riferendola a G usando il teorema. Tenendo conto del fatto che i vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\boldsymbol{x}_B$ sono ortogonali e hanno entrambi modulo ℓ,

$$d^2(G,O) = \|\overrightarrow{OG}\|^2 = \langle\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OG}\rangle = \frac{\|\overrightarrow{OA}\|^2 + 4\|\boldsymbol{x}_B\|^2}{16} = \frac{5\ell^2}{16}.$$

Osservando che la massa totale del sistema è $4m$,

$$I_G = I_O - 4md^2(G,O) = 3m\ell^2 - 4m\frac{5\ell^2}{16} = \frac{7}{4}m\ell^2.$$

B Sul sistema agiscono solo forze attive conservative, ovvero la forza gravitazionale e quella elastica, per cui possiamo studiare il potenziale in funzione del parametro lagrangiano θ che, a meno di periodicità, possiamo intendere su $[-\pi,\pi)$, e scrivere

$$V(\theta)=4mgy_G+\frac{1}{2}k(\ell-x_A)^2+c=mg\ell(\sin\theta+2\cos\theta)+\frac{1}{2}k\ell^2(1-\cos\theta)^2+c'$$

dove $y_G = \ell\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{4}$ e $x_A = \ell\cos\theta$ sono rispettivamente l'ordinata del centro di massa e l'ascissa di A, mentre c, c' sono costanti. Espandendo e imponendo il fatto che $m = \frac{k\ell}{2g}$ si trova

$$V(\theta) = \frac{k\ell^2}{2}\left(\sin\theta + \cos^2\theta\right) + c''.$$

Non essendoci punti estremali nel supporto di U, cerchiamo direttamente i punti di equilibrio imponendo

$$\partial_\theta U(\theta) = \frac{k\ell^2}{2}(\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta) = \frac{k\ell^2}{2}\cos\theta(1-2\sin\theta) = 0$$

che fornisce $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = 1/2$, ovvero, a meno di periodicità di 2π,

$$\theta_\pm = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \theta_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad \theta_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5}{6}\pi.$$

Per studiarne la stabilità, consideriamo la derivata seconda,

$$\partial_\theta^2 V(\theta) = -\frac{k\ell^2}{2}\left(\sin\theta - 4\sin^2\theta + 2\right).$$

Abbiamo che $\partial_\theta^2 V(\theta)|_{\theta=\theta_+} = \frac{1}{2}k\ell^2 > 0$ e $\partial_\theta^2 V(\theta)|_{\theta=\theta_-} = \frac{3}{2}k\ell^2 > 0$, ovvero $\theta_\pm$ sono punti di minimo per V e quindi stabili; viceversa, $\theta_{1,2}$ hanno $\sin\theta_{1,2} = 1/2$ per cui $\partial_\theta^2 V(\theta)|_{\theta=\theta_{1,2}} = -\frac{3}{4}k\ell^2 < 0$, per cui i punti sono di equilibrio instabile.

C Dalla prima equazione cardinale della statica, abbiamo che la reazione vincolare $\vec{\Phi}_O$ in O deve essere opposta a tutte le forze attive, ovvero

$$\vec{\Phi}_O = -4m\boldsymbol{g} - k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 4mg\hat{\imath}_2 + k\ell(1-\cos\theta)\hat{\imath}_1,$$

dove $\boldsymbol{g} = -g\hat{\imath}_2$ è l'accelerazione di gravità e abbiamo usato $2mg = k\ell$. Il modulo quadro del vettore è $\|\vec{\Phi}_O\|^2 = 16m^2g^2 + k^2\ell^2(1-\cos\theta)^2$, che è massimo quando il secondo termine è massimo, ovvero $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$, a meno di periodicità (alternativamente, si possono calcolare derivata prima e seconda per verificare questo fatto).