

CAPITOLO 1

Meccanica newtoniana

1. Spaziotempo galileiano e leggi della meccanica

La struttura matematica sottesa a gran parte dell'esposizione che verrà data sarà quella di spazio affine euclideo \mathbb{E}^n , ovvero uno spazio affine su uno spazio vettoriale reale prehilbertiano \mathbb{V} di dimensione n .

Uno spazio affine di dimensione n \mathbb{A}_n è un *insieme di punti* associato ad uno spazio vettoriale n -dimensionale \mathbb{V}_n di *vettori liberi* su un campo \mathbb{K} , di modo che sia definita una mappa

$$+ : \mathbb{A}_n \times \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{A}_n, \quad (P, \mathbf{v}) \mapsto P + \mathbf{v},$$

con le seguenti proprietà:

- $\forall P \in \mathbb{A}_n, P + \mathbf{0} = P$, dove $\mathbf{0}$ è il vettore nullo in \mathbb{V}_n .
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_n$ e $\forall P \in \mathbb{A}_n, (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (associatività¹).
- $\forall P \in \mathbb{A}_n$, l'applicazione $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_n \mapsto P + \mathbf{v}$ è una biiezione.

Ciò implica anche che $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_n$, la mappa $P \in \mathbb{A}_n \mapsto P + \mathbf{v}$ è una biiezione². Si definisce quindi anche la *sottrazione* tra elementi dello spazio affine, ovvero per ogni $P, Q \in \mathbb{A}_n$ si indica con $Q - P$ l'unico $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_n$ tale che $P + \mathbf{v} = Q$.

Dati due spazi affini \mathbb{A}_n e \mathbb{A}'_n di uguale dimensione finita n e campi vettoriali \mathbb{V}_n e \mathbb{V}'_n rispettivamente, un isomorfismo affine tra essi

$$\mathbf{A} : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}'_n,$$

è tale che esiste una mappa lineare $\mathbf{L} : \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{V}'_n$ biettiva che soddisfa $\mathbf{A}(e + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(e) + \mathbf{L}(\mathbf{v})$, di modo che l'isomorfismo inverso \mathbf{A}^{-1} sia associato alla mappa \mathbf{L}^{-1} .

Se lo spazio vettoriale \mathbb{V}_n è inoltre prehilbertiano, esso è inteso dotato di una operazione di prodotto interno, che indicheremo con $\langle \bullet, \bullet \rangle$, che permette di introdurre il concetto di *base ortonormale* come un set di n vettori $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^n$ tale che $\mathbb{V}_n = \text{span}\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_k$ e $\langle \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \delta_{ij}$ per $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Il prodotto scalare induce una norma sullo spazio \mathbb{V}_n , di modo che detto $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_n$ definiamo la sua norma $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Lo spazio affine si dice essere quindi *euclideo di dimensione n* e si indica con \mathbb{E}^n . Possiamo introdurre il concetto di *distanza* $d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tra punti di \mathbb{E}^n come

$$d(P, Q) := \|Q - P\|.$$

1.1. Spaziotempo galileiano. Lo *spaziotempo* della meccanica classica è uno spazio affine quadridimensionale \mathbb{A}_4 su uno spazio vettoriale reale \mathbb{V}_4 , i cui punti $e \in \mathbb{A}_4$ si chiamano *punti di universo* o *eventi*. Lo spaziotempo è altresì dotato di una *applicazione lineare* (non nulla) $\tau : \mathbb{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}$, detta *tempo*, tale che $\tau(e_2 - e_1) \in \mathbb{R}$ fornisca l'*intervallo di tempo* tra gli eventi e_1 ed e_2 . Due eventi e_1 ed e_2 sono in particolare *simultanei* se $\tau(e_2 - e_1) = 0$. Il nucleo dell'applicazione

¹Il secondo $+$ indica l'operazione di somma in \mathbb{V}_n .

²Se esitessero per assurdo $P, Q \in \mathbb{A}_n$ tali che $P + \mathbf{v} = Q + \mathbf{v}$,

τ , sia $\text{Ker}(\tau)$, corrisponde all'insieme degli eventi simultanei. In particolare, possiamo introdurre le classi di equivalenza

$$[e] := \{e' \in \mathbb{A}_4 \mid e' - e \in \text{Ker}(\tau)\}$$

nello spazio affine \mathbb{A}_4 . Ciascuna di queste classi è uno spazio affine tridimensionale: basta infatti osservare che, essendo τ una applicazione lineare non nulla, $\dim \text{Ker}(\tau) = \dim \mathbb{V}_4 - \dim \mathbb{R} = 3$ per il teorema del rango.

Il kernel di τ si assume infine dotato di prodotto scalare $\langle \bullet, \bullet \rangle$ che permette di definire la *distanza* tra eventi e ed e' simultanei come $d(e, e') = \|e_2 - e_1\| := \sqrt{\langle e_2 - e_1, e_2 - e_1 \rangle}$. In virtù di questa ulteriore struttura, ogni classe di equivalenza $[e]$ è uno spazio euclideo \mathbb{E}^3 .

Lo spaziotempo galileiano consiste perciò nella combinazione di quattro ingredienti: lo spazio affine quadridimensionale \mathbb{A}_4 ; il corrispondente spazio vettoriale reale quadridimensionale su cui è costruito, \mathbb{V}_4 ; l'applicazione lineare tempo $\tau: \mathbb{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}$; l'operazione di prodotto scalare $\langle \bullet, \bullet \rangle$ su $\text{Ker}(\tau)$. Scriveremo quindi $\mathcal{G} = (\mathbb{A}_4, \mathbb{V}_4, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$.

Un isomorfismo tra *spazi galileiani* richiede condizioni più stringenti rispetto al semplice isomorfismo tra spazi affini, ovvero dovrà richiedere di preservare la struttura galileiana.

DEFINIZIONE 1.1. Siano $\mathcal{G} = (\mathbb{A}_4, \mathbb{V}_4, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ e $\mathcal{G}' = (\mathbb{A}'_4, \mathbb{V}'_4, \tau', \langle \bullet, \bullet \rangle)$ due spazi galileiani. Un isomorfismo $\mathbf{A}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ corrisponde ad un isomorfismo affine \mathbf{A} con associato isomorfismo lineare $\mathbf{L}: \mathbb{V}_4 \rightarrow \mathbb{V}'_4$ tale che

- \mathbf{L} preserva il tempo, $\tau' \circ \mathbf{L} = \tau$ (e quindi $\mathbf{L}(\text{Ker}(\tau)) = \text{Ker}(\tau')$);
- $\langle \mathbf{L}(\mathbf{v}), \mathbf{L}(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Ker}(\tau)$.

La ragione della definizione sta nel fatto che esiste uno spazio galileiano di speciale interesse, ovvero quello ottenuto canonicamente scegliendo $\mathbb{A}'_4 = \mathbb{V}'_4 = \mathbb{R}^4$, detto *spaziotempo galileiano di coordinate*. Indicheremo un punto di tale spazio con (t, \mathbf{x}) , dove $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, in modo che l'operazione somma $(P, \mathbf{v}) \in \mathbb{A}_4 \times \mathbb{V}_4 \mapsto P + \mathbf{v} \in \mathbb{A}_4$ si riduca alla usuale somma di elementi di \mathbb{R}^4 . L'applicazione tempo su di esso agisce in modo tale che $\tau: (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4 \mapsto t \in \mathbb{R}$, mentre il prodotto scalare è il prodotto scalare canonico in \mathbb{R}^3 . In questo spazio potremo utilizzare facilmente gli strumenti dell'analisi per lo studio della meccanica.

DEFINIZIONE 1.2. Un isomorfismo $\Phi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ da uno spaziotempo galileiano generico ad uno spaziotempo galileiano di coordinate \mathbb{R}^4 è detto *sistema di riferimento*.

Richiedere che Φ sia un isomorfismo galileiano significa che esso deve soddisfare certe precise proprietà ed in particolare queste proprietà devono essere anche soddisfatte dalla mappa

$$\Psi := \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

che compone due sistemi di riferimento Φ e $\hat{\Phi}$ e che permette di passare da un certo spaziotempo di coordinate ad un altro. Pittorialmente

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_4 & \\ \swarrow \Phi & & \searrow \hat{\Phi} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\Psi = \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Siano ora dati due eventi e_1 ed e_2 di \mathbb{A}_4 . Indichiamo $\Phi(e_i) = (t_i, \mathbf{x}_i)$ e $\hat{\Phi}(e_i) = (\hat{t}_i, \hat{\mathbf{x}}_i)$, $i = 1, 2$, le corrispondenti immagini in \mathbb{R}^4 secondo due riferimenti di coordinate. La mappa $\Psi = \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ deve essere una trasformazione affine, quindi nella forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + t_0 \\ \mathbf{v}t + \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}$$

per uno scalare $a \in \mathbb{R}$, due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e una matrice $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Inoltre, essa stessa deve essere un isomorfismo galileiano, e dunque, perché la struttura galileiana sia preservata, dovrà

valere

$$t_2 - t_1 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1 = a(t_2 - t_1) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle, \quad \text{se } \tau(e_1 - e_2) = 0 \quad \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1\| = \|\mathbf{R}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|.$$

Le uguaglianze sono realizzate per qualsivoglia coppia di eventi se $a = 1$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} \in \mathcal{O}(3)$, e per qualsivoglia scelta di t_0 e \mathbf{x}_0 , ovvero se la trasformazione Ψ ha la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{R} \in \mathcal{O}(3).$$

In altre parole, Ψ è esprimibile *univocamente* in termini delle seguenti trasformazioni

Traslazione dell'origine: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t + t_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$ per un dato $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Rotazione della componente spaziale: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{R}\mathbf{x})$ per qualche $\mathbf{R} \in \mathcal{O}(3)$.

Moto rettilineo uniforme: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t)$ per qualche $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Come si verifica facilmente si tratta di un *gruppo*, detto *di Galilei*. Da un computo del numero di parametri necessari per specificare ciascuna delle trasformazioni elencate, il gruppo ha quindi dimensione $10 = 4 + 3 + 3$.

1.2. Traiettorie in un riferimento cartesiano. Nello spazio così costruito si può considerare lo studio di un *punto materiale*: il concetto di punto materiale è assunto primitivo e si può pensare come un corpo di cui si possono trascurare le dimensioni spaziali. In altre parole, un punto materiale P è associato ad una *linea di universo* nella forma $\Gamma_P = (\Phi^{-1} \circ (\text{id}, \mathbf{x}_P))(I) \subset \mathbb{A}_4$, dove $\Phi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ è un riferimento di coordinate e $\mathbf{x}_P: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva su un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ che assumeremo continua con derivate continue fino alla seconda³, e id è l'applicazione identità. Una linea di universo corrisponde perciò all'evoluzione di un *punto* in \mathbb{R}^3 . Indicheremo punto materiale e corrispondente punto geometrico in \mathbb{R}^3 con lo stesso simbolo P , e diremo che questo punto ha posizione individuata dalle coordinate \mathbf{x}_P al tempo t . In analogia con quanto detto sulle curve, definiremo la *velocità* del punto materiale P come

$$\mathbf{v}_P := \frac{d\mathbf{x}_P}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}_P.$$

e la sua *accelerazione* come

$$\mathbf{a}_P := \frac{d^2\mathbf{x}_P}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{x}}_P.$$

Se abbiamo una collezione $\mathcal{S} = \{P_i\}_{i=1}^n$ di n punti, lo studio dovrà tenere conto di n linee di universo, e quindi n applicazioni $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. La concatenazione $\mathbf{X} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{x}_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ descrive il *sistema* di n punti e vive in uno spazio di dimensione $3n$, detto *spazio delle configurazioni*: le traiettorie nello spazio delle configurazioni contengono collettivamente le informazioni sulle loro linee universo in \mathbb{A}_4 .

1.3. Principî della meccanica. Avendo fissato le proprietà dello spazio in cui opereremo, il primo passo per una trattazione della meccanica è l'introduzione di una serie di postulati che riguardano le proprietà dinamiche dei punti materiali. I punti materiali si assumono in grado di influenzare le loro linee universo reciprocamente: in altre parole, le linee universo di due punti saranno soggette a delle reciproche condizioni matematiche. Queste proprietà sono specificate dai principî, o postulati, della meccanica. Anzitutto, introduciamo il seguente postulato, anche detto di Galilei, che assume l'esistenza di una classe speciale di sistemi di riferimento.

POSTULATO 1.1 (Primo postulato della meccanica). *Esiste uno speciale sistema di riferimento, detto inerziale, nel quale l'accelerazione di un punto materiale isolato è nulla in ogni istante, qualunque sia il suo stato cinematico, ovvero la sua posizione e la sua velocità.*

³In seguito considereremo casi in cui la derivata prima ammette discontinuità su un insieme numerabile del supporto: essi saranno idealizzazioni utili allo studio degli *urti*.

Il postulato si basa sul concetto impreciso di “isolato”, che possiamo qualitativamente immaginare come equivalente a “infinitamente distante da ogni altro sistema con cui il punto materiale possa interagire”. Se esiste un riferimento inerziale, ne esistono infiniti altri: il gruppo di Galilei ha infatti la proprietà di lasciare invariate le accelerazioni delle linee di universo, e si può utilizzare per trasformare un dato riferimento inerziale in un nuovo riferimento inerziale.

I successivi postulati fanno riferimento alle proprietà meccaniche di punti materiali osservate in sistemi inerziali.

POSTULATO 1.2 (Secondo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali P_1 e P_2 , le loro corrispondenti accelerazioni \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 in un sistema di riferimento inerziale sono tali da soddisfare la relazione*

$$m_{12}\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\|,$$

per un qualche scalare $m_{12} > 0$ indipendente dallo stato cinematico del sistema e dall'istante della misura. Dato un sistema isolato $\hat{S} = \{P_0, P_1\}$ costituito da uno dei due punti già considerati, per esempio P_1 , ed un terzo, diverso punto materiale P_0 , nelle stesse ipotesi precedenti $m_{10}\|\hat{\mathbf{a}}_1\| = \|\hat{\mathbf{a}}_0\|$ (dove abbiamo evidenziato che le accelerazioni in gioco saranno in generale diverse), e similmente, considerando il sistema isolato $\tilde{S} = \{P_0, P_2\}$, $m_{20}\|\tilde{\mathbf{a}}_2\| = \|\tilde{\mathbf{a}}_0\|$. Allora vale

$$\frac{m_{10}}{m_{20}} = m_{12}.$$

In altre parole, il postulato ammette la scelta di un “punto materiale campione”, per esempio P_0 , da usare come riferimento per assegnare ad ogni altro punto materiale P_i una *massa inerziale* $m_i \equiv m_{i0}$ (nella notazione adottata), ovvero uno scalare positivo corrispondente al rapporto delle accelerazioni indotte dall'interazione con il punto materiale campione. In seguito utilizzeremo la notazione (P_i, m_i) per indicare che la massa assegnata al punto P_i è m_i .

Il terzo postulato ci informa sulle direzioni delle accelerazioni in un sistema isolato di due punti materiali.

POSTULATO 1.3 (Terzo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali P_1 e P_2 in posizioni \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 rispettivamente, per un osservatore inerziale le corrispondenti accelerazioni \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 hanno la direzione di $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ e versi tra loro opposti.*

I postulati dati finora sono ancora insufficienti per lo studio della meccanica, dato che riguardano sistemi isolati di al più due punti materiali. Il seguente postulato ausiliario permette di superare questa difficoltà e comporre gli effetti delle interazioni a due corpi finora considerate.

POSTULATO 1.4 (Principio di sovrapposizione). *L'accelerazione prodotta su un punto materiale P di massa m dall'interazione con n punti materiali in un riferimento inerziale è la somma delle accelerazioni che verrebbero prodotte se P interagisse con ciascuno di essi separatamente in un sistema isolato a due corpi.*

Alla luce di quanto detto è utile dare la seguente

DEFINIZIONE 1.3 (Forza). Dato un punto materiale P di massa m e soggetto ad una accelerazione \mathbf{a} , la forza su di esso applicata è definita come

$$\mathbf{F} := m\mathbf{a}.$$

Questa definizione permette, in ultima analisi, di studiare per esempio sistemi isolati $\mathcal{S} = \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ di n punti materiali: per ciascuno di essi vale una equazione nella forma $m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k$, dove \mathbf{F}_k sarà la forza applicata al punto P_i di massa m_k e accelerazione \mathbf{a}_k . In molti casi, come vedremo, informazioni aggiuntive sulla forma funzionale di \mathbf{F}_i (dovute per esempio all'esperienza sperimentale) renderanno la definizione una equazione differenziale per la dinamica del punto a cui è applicata. Il tipo di dipendenza funzionale in \mathbf{F}_k dalle traiettorie $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ è dato dal seguente

POSTULATO 1.5 (Principio di determinismo di Newton). *Lo stato cinematico di un sistema isolato, ovvero la posizione e le velocità di tutti i punti materiali che lo compongono, identifica univocamente il suo moto.*

Questo postulato ha infatti una conseguenza importante: dovendo essere posizioni e velocità sufficienti all'integrazione delle equazioni del moto, la dipendenza funzionale della forza \mathbf{F}_k agente su un punto materiale P_k in un sistema isolato $\mathcal{S} = \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ di n punti può essere solo del tipo $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(t, \{\mathbf{x}_i\}_i, \{\dot{\mathbf{x}}_i\}_i)$. Dovendo infatti essere sufficienti velocità e posizioni di tutti i punti del sistema per determinare l'evoluzione del sistema stesso, le quantità \mathbf{F}_k non possono manifestare una dipendenza funzionale da derivate di ordine superiore al primo⁴.

1.3.1. *Invarianza galileiana e sue conseguenze.* Abbiamo già detto che una trasformazione galileiana trasforma un sistema inerziale in un altro sistema inerziale. Il contenuto di tutti e tre i principi è invariante sotto queste trasformazioni. Alla luce di questo, un passo ulteriore è quello proposto da Galilei, ovvero richiedere che *tutte le leggi della fisica siano invarianti sotto trasformazioni galileiane*. Si tratta di un principio formulato nel 1632 ed assunto valido per quasi trecento anni durante tutto lo sviluppo della meccanica classica⁵.

Ciascun tipo di trasformazioni con cui si costruisce la generica trasformazione galileiana ha un significato fisico profondo. L'invarianza per traslazione dell'origine del riferimento quadridimensionale manifesta l'assunzione che spazio e tempo siano *omogenei*, ovvero che una qualunque legge fisica non può dipendere da posizioni o istanti di tempo particolari se vogliamo che sia compatibile con l'invarianza galileiana. L'invarianza dello spazio sotto rotazioni ne esprime l'*isotropia*, ovvero il fatto che non vi sono direzioni privilegiate. Infine, l'intuizione di Galilei ha una implicazione profonda anche sulla nostra interpretazione dello spaziotempo. Dato che non è possibile, per mezzo di un esperimento fisico realizzato entro un riferimento inerziale, rilevare se il riferimento stesso è in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro riferimento inerziale, ogni riferimento inerziale ha pari dignità. La conseguenza è la negazione del concetto aristotelico di *spazio assoluto*: non è possibile *identificare* punti dello spazio in istanti diversi,

⁴Ha senso chiedersi perché escludiamo la dipendenza funzionale da derivate di ordine secondo, ovvero perché escludiamo il caso in cui \mathbf{F}_k dipenda in forma funzionale dalle accelerazioni dei punti del sistema. La ragione è che una dipendenza siffatta può portare a delle inconsistenze fisiche. Supponiamo per semplicità di avere un punto materiale P di massa m e traiettoria \mathbf{x} , per cui vale la legge $m\ddot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0)$, per esempio in effetto dell'interazione con un altro punto materiale P_0 . Dipendentemente dalla forma funzionale di \mathbf{F}_0 , questa legge potrebbe *non* permettere di identificare \mathbf{a}_0 univocamente in un certo istante in cui è dato lo stato cinematico. Anche ignorando questo fatto, inconsistenze ulteriori possono emergere per via del principio di sovrapposizione: se l'interazione con un secondo punto materiale P_1 produce la forza $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, allora in presenza di entrambi i punti P_0 e P_1 , deve valere per P l'equazione $m(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) + \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0) + \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, ovvero $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0)$, dove evidentemente risulta che \mathbf{F}_0 dipende da \mathbf{a}_1 , il che non fisico. Per ulteriori dettagli, si veda L. A. Pars, *A treatise on analytical mechanics* (1965).

⁵Galilei ha espresso il principio in una celebre pagina piuttosto chiara del suo *Dialogo*:

SALVIATI: Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti: siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza. [...] Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia mentre il vascello sta fermo non debbano succedere così: fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur di moto uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti; né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina, o pure sta ferma.

Galileo Galilei
Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo (1632)

dato che non abbiamo modo di seguire la posizione di un punto rispetto ad un riferimento assoluto, né ha senso farlo. Di conseguenza, in letteratura⁶ è stato osservato come sia più coerente pensare $\mathbb{A}_4 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ associando *ad ogni elemento* dello spazio euclideo di tipo tempo \mathbb{E}^1 una *diversa copia* di \mathbb{E}^3 , rappresentante l'usuale spazio. È questa la ragione per cui, nella definizione di spaziotempo, abbiamo escluso la possibilità di parlare di distanza spaziale tra eventi riferiti a istanti diversi: ciò equivarrebbe a tentare una impossibile misura di distanza tra punti in spazi diversi. Questo tipo di struttura è quella matematicamente formalizzata dal concetto di *fibrato*, in cui \mathbb{E}^3 è la *fibra* associata ad ogni punto della *base* \mathbb{E}^1 . L'approfondimento di questo aspetto è però oltre gli obiettivi del modulo e verrà omessa.

Come abbiamo già in parte visto, il principio di determinismo di Newton e quello galileiano hanno delle conseguenze sulla forma funzionale delle forze nelle equazioni sopra. Se abbiamo cioè un sistema isolato di n punti $\mathcal{S} = \{(P_k, m_k)\}_{k=1}^n$, se *imponiamo* l'invarianza sotto il gruppo di Galilei delle equazioni del moto, possiamo dedurre una serie di proprietà sulla forma funzionale che, per ciascun k , la forza \mathbf{F}_k che agisce sul punto materiale P_k può assumere.

Anzitutto, il gruppo di Galilei include le traslazioni temporali, per cui se richiediamo che le leggi della natura non dipendano da un tempo specifico t , deve essere $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_i\}_i, \{\dot{\mathbf{x}}_i\}_i)$. Il gruppo include anche *invarianza per traslazioni* e *invarianza per cambi di riferimento in moto rettilineo uniforme reciproco*. Dovrà essere

$$\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i<j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i<j}), \quad \mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j.$$

Infine, lo spazio è *isotropo*: la legge del moto non può cambiare se eseguiamo una rotazione del riferimento. Detta $\mathbf{R} \in O(3)$, indicando $\mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $\mathbf{F}_k(\{\mathbf{R}\mathbf{x}_{ij}\}_{i<j}, \{\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i<j}) = \mathbf{R}\mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i<j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i<j})$.

Una conseguenza di tutte le osservazioni fatte finora è che se si considera un *singolo punto materiale*, in assenza di altri punti materiali, esso deve essere sottoposto ad una forza nulla: abbiamo così verificato la compatibilità del secondo postulato e dell'invarianza galileiana con il primo postulato. Questo è apparentemente in contrasto con la gran frequenza con cui vengono studiate in meccanica equazioni di singoli punti materiali nella forma $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, in palese violazione con le osservazioni elencate. Leggi di questo tipo, sebbene in violazione con l'invarianza galileiana, sono utili *approssimazioni* in cui l'effetto del moto di P sugli altri punti materiali con cui interagisce viene trascurato (per esempio perché si assume che la loro massa sia di molto maggiore della massa di P , come accade nello studio della caduta dei gravi). Nel seguito ci focalizzeremo sulla meccanica del *singolo punto materiale* e su una dipendenza funzionale di \mathbf{F} del tipo indicato, ovvero $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, tenendo a mente del fatto che si tratta di una utile approssimazione.

1.4. Lavoro e forze conservative. Consideriamo ora un punto materiale (P, m) individuato dalla traiettoria \mathbf{x} e soggetto ad una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ che si muove con velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. La *potenza* associata all'azione della forza \mathbf{F} sul punto materiale al tempo t è definita come

$$\Pi(t) := \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle.$$

A tale funzione è associato il *lavoro* eseguito durante la dinamica a partire da un certo tempo t_0 fino al tempo $t > t_0$, e definito come l'integrale di linea della forza sulla traiettoria del punto materiale

$$W(t_0, t) := \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \langle \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau.$$

L'espressione dipende in generale dallo stato cinematico del corpo in tutti gli istanti tra t_0 e t , e ha suggerito l'introduzione della quantità *energia cinetica* associata al punto materiale.

⁶R. Penrose, *Structure of space-time*, in *Battelle Rencontres*, 121-235 (1968).

DEFINIZIONE 1.4. L'energia cinetica di un punto materiale (P, m) che si muove su una traiettoria \mathbf{x} è

$$T(\dot{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2.$$

Il legame tra lavoro svolto ed energia cinetica è espresso dal seguente semplice

TEOREMA 1.6 (delle “forze vive”). *Dato un punto materiale (P, m) in moto lungo una traiettoria $\mathbf{x}(t)$, il lavoro svolto dalla forza totale agente su di esso tra un tempo t_0 e un tempo $t > t_0$ è uguale alla variazione della sua energia cinetica, ovvero*

$$T(\dot{\mathbf{x}}(t)) - T(\dot{\mathbf{x}}(t_0)) = W(t_0, t).$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$\frac{dT(\dot{\mathbf{x}})}{dt} = m \langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \Pi,$$

e integrare questa relazione nel tempo per ottenere la definizione di W . \square

Se $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$, ovvero la forza applicata a P dipende esclusivamente dalla sua posizione, allora è possibile utilizzare una parametrizzazione naturale della traiettoria $\boldsymbol{\gamma}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove ℓ è la lunghezza della traiettoria percorsa nell'intervallo $[t_0, t]$, introducendo una ascissa curvilinea $s: [t_0, t] \rightarrow [0, \ell]$, così che $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} \circ s$:

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_0^\ell \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) \rangle ds.$$

L'espressione dipende quindi *puramente dalla traiettoria* percorsa e non da *come* essa è stata percorsa, ovvero è invariante per riparametizzazioni temporali. Un'ulteriore semplificazione si verifica quando la forza è un *campo conservativo*, ovvero esiste un *potenziale*, detto *energia potenziale*, $V: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $V \in \mathcal{C}^2(A)$, tale per cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

In tal caso, detto $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{x} := \mathbf{x}(t)$,

$$(1.1) \quad W(t_0, t) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}), d\boldsymbol{\gamma} \rangle = - \int_{\boldsymbol{\gamma}} dV = V(\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x})$$

ovvero il lavoro svolto dipende solo dalla posizione finale e iniziale della curva seguita. Questo cruciale fatto permette di enunciare il seguente, importante teorema.

TEOREMA 1.7 (Conservazione dell'energia meccanica). *Dato un punto materiale P di traiettoria \mathbf{x} soggetto a sole forze conservative associate ad un potenziale V , la sua energia meccanica*

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})$$

rimane costante durante il moto.

DIMOSTRAZIONE. Il risultato si ottiene combinando l'Eq. (1.1) con il teorema delle forze vive, indicando per brevità $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(t_0)$, $\dot{\mathbf{x}} \equiv \dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}_0 \equiv \dot{\mathbf{x}}(t_0)$,

$$T(\dot{\mathbf{x}}) - T(\dot{\mathbf{x}}_0) = -V(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}_0) \Rightarrow E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x}) = T(\dot{\mathbf{x}}_0) + V(\mathbf{x}_0). \quad \square$$

Il teorema rimane valido se sul punto materiale agiscono forze anche non conservative ma aventi potenza nulla. Un campo di forze conservativo ha la proprietà di essere *irrotazionale*, ovvero $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$, come diretta conseguenza della sua definizione: viceversa l'irrotazionalità garantisce l'esistenza di un potenziale purché il dominio di definizione di \mathbf{F} sia semplicemente connesso.

1.5. Quantità di moto e momento della quantità di moto. Due quantità svolgeranno un ruolo importante nell'analisi delle equazioni del moto e in generale nella teoria che verrà sviluppata in seguito.

DEFINIZIONE 1.5 (Quantità di moto e momento della quantità di moto). Sia dato un punto materiale (P, m) di traiettoria \mathbf{x} . Detta $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}}$, la sua *quantità di moto* è definita come

$$\mathbf{Q} := m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{x}},$$

mentre il suo *momento della quantità di moto* rispetto ad un polo Y in posizione \mathbf{y} è definito come

$$\mathbf{L}_Y := (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{Q}.$$

Analogamente si introduce il *momento della forza* \mathbf{F} applicata ad un punto materiale (P, m) rispetto ad un polo.

DEFINIZIONE 1.6. Sia dato un punto materiale (P, m) in posizione \mathbf{x} su cui agisce una forza \mathbf{F} . Il momento della forza rispetto ad un polo Y in posizione \mathbf{y} è

$$\boldsymbol{\tau}_Y := (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{F}.$$

Il polo scelto per il calcolo del momento della quantità di moto o il momento della forza può essere cambiato utilizzando una semplice regola di cambio di polo di facile verifica: se Z è un punto di posizione \mathbf{z} , $\mathbf{L}_Z = (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{L}_Y$; similmente, $\boldsymbol{\tau}_Z = (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mathbf{F} + \boldsymbol{\tau}_Y$.

Così come la relazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \dot{\mathbf{Q}}$ esprime la conservazione della quantità di moto quando $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, esiste una relazione analoga tra il momento di una forza e il momento della quantità di moto, indotta proprio dalle equazioni del moto, da cui si deriva immediatamente.

PROPOSIZIONE 1.8. Sia dato un punto materiale (P, m) in posizione \mathbf{x} con velocità \mathbf{v} in un riferimento inerziale, su cui agisce la forza \mathbf{F} . Dato un polo di riferimento Y , fisso, si ha

$$\dot{\mathbf{L}}_Y = \boldsymbol{\tau}_Y.$$

Di conseguenza, se $\boldsymbol{\tau}_Y = \mathbf{0}$ allora \mathbf{L}_Y si conserva.

1.6. Vincoli e principio di D'Alembert. La forza che appare nell'equazione $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ per un punto materiale P di massa m e traiettoria \mathbf{x} nasce dall'interazione di tale punto con altri sistemi. In particolare, se il sistema è soggetto ad un *vincolo*, essa incorpora anche l'azione del vincolo sul punto materiale. Per esempio, supponiamo che un punto materiale P sia vincolato a muoversi su una superficie regolare mobile individuata in forma implicita dall'equazione

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

L'insieme dei punti della superficie $S(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\mathbf{x}, t) = 0\}$ dipende quindi dal tempo. Ciò significa che in ogni istante t la posizione del punto dovrà soddisfare la condizione precedente. Un vincolo siffatto è detto *semplice*. Si può avere anche con un vincolo *doppio*, individuato da due superfici regolari (in questo caso, il vincolo può risultare in una curva⁷),

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \varphi_2(\mathbf{x}, t) = 0.$$

⁷Un vincolo doppio, costituito quindi da due superfici regolari $S_1(t)$ ed $S_2(t)$, non necessariamente fornisce una curva: escludendo il caso in cui le due superfici non si intersecano (che implica che non esistono punti dello spazio ammessi per il punto materiale), le due superfici individuano una curva regolare in un intorno di un loro punto $P \in S_1(t) \cap S_2(t)$ se sono *trasversali*, ovvero non tangenti, in P . Se la condizione vale per ogni punto della loro intersezione, si scrive $S_1(t) \pitchfork S_2(t)$. In altre parole, è necessario che i loro spazi tangenti in P non coincidano, e che quindi i loro versori normali in quel punto non siano paralleli: diversamente, P potrebbe essere un singolo punto isolato di tangenza. Il concetto di trasversalità può essere reso più preciso e generale nel contesto della topologia differenziale.

Alternativamente, un vincolo su una curva può essere assegnato fornendo direttamente una equazione in forma parametrica del supporto della curva stessa, nella forma $\gamma: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ per un qualche $I \in \mathbb{R}$, di modo che a t fissato, $\gamma(u, t)$ parametrizzi la configurazione della curva nell'istante t al variare di $u \in I$, e richiedendo che \mathbf{x} appartenga al supporto di γ durante tutto il moto. Vedremo in dettaglio questo caso nella sezione successiva.

Vincoli nella forma qui presentata, dipendenti solo dalla posizione del punto materiale e al più dal tempo, sono detti *olonomi*. Il fatto che la posizione del punto materiale debba soddisfare le equazioni di vincolo implica l'esistenza di una opportuna forza vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ applicata dal vincolo al punto. In generale, possiamo perciò scomporre la forza totale come $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(v)} + \mathbf{F}^{(a)}$, dove $\mathbf{F}^{(a)}$ è il restante *contributo attivo* espresso tipicamente da funzioni esplicite dello stato cinematico del punto materiale e del tempo. Una classe di vincoli olonomi ha importanza particolare in meccanica.

DEFINIZIONE 1.7 (Vincolo liscio). Un vincolo è detto *ideale* o *liscio* se la reazione vincolare da esso prodotta su un punto materiale è ortogonale al vincolo in ogni istante indipendentemente dallo stato cinematico del punto.

La definizione data sopra implica che $\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \lambda(t)\nabla\varphi(\mathbf{x}, t)$ per un vincolo semplice espresso dall'equazione $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$. Similmente, se il vincolo è doppio, $\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \lambda_1(t)\nabla\varphi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2(t)\nabla\varphi_2(\mathbf{x}, t)$ per qualche coppia incognita di funzioni λ_1 e λ_2 . La forza di reazione può essere caratterizzata anche in termini dei cosiddetti *spostamenti virtuali*, da cui il nome della definizione sopra. Supponendo per esempio di essere in presenza di un vincolo semplice, e indicando con $\mathbf{v} \in T_P S(t)$, spazio tangente della superficie $S(t)$ specificata dalla condizione di vincolo $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ ad un certo istante fissato t , questo vettore si dice rappresentare una “velocità virtuale”, ovvero una direzione tangente alla superficie. La condizione di vincolo olonomo ideale quindi equivale a dire che la reazione vincolare applicata ad un punto P sulla superficie deve soddisfare $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle = 0$ per *qualsunque* vettore tangente alla superficie: introducendo un intervallo temporale infinitesimo δt , possiamo interpretare $\mathbf{v}\delta t$ come lo spostamento infinitesimo di un punto materiale sul vincolo nella direzione $\mathbf{v}\delta t$, tangenzialmente al vincolo ma *assumendo il vincolo fisso*, di modo che $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle \delta t = 0$ diventi l'espressione di un ipotetico “lavoro” infinitesimo svolto dalla forza in un moto sul vincolo a vincolo fisso, a cui ci si riferisce come ad un *lavoro virtuale*. La condizione $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle = 0$ può essere vista come una formulazione del cosiddetto *principio dei lavori virtuali* o di *d'Alembert–Lagrange*, che può quindi essere visto come un principio che *definisce* un vincolo liscio. Osserviamo qui che essendo $\mathbf{F}^{(v)} = m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}^{(a)}$, se $\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V$, ovvero la forza attiva è una forza conservativa derivata da un potenziale V , la condizione $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle = 0$ per ogni \mathbf{v} diventa

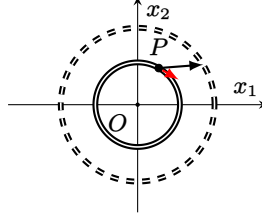
$$\langle m\ddot{\mathbf{x}} + \nabla V, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in T_P S$$

che è una condizione in cui *non* compaiono forze di reazione, da cui l'interesse per tale principio. Torneremo sul principio di d'Alembert–Lagrange in seguito.

Esempio 1.1 — La differenza tra “spostamenti virtuali” e spostamenti reali si vede più chiaramente nel caso di vincoli mobili. Supponiamo di avere un punto materiale P soggetto al moto su una guida circolare $\gamma: [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$, individuata dall'equazione

$$(1.2) \quad \gamma(u, t) = \begin{pmatrix} t \cos u \\ t \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Qui t indica l'istante di tempo, assunto positivo: la guida è quindi una circonferenza che il cui raggio, all'istante t , è uguale a t .



Con riferimento alla figura, ad un tempo t fissato, un vettore di velocità virtuale \mathbf{v} è il vettore tangente alla curva in quell'istante (linea doppia continua). In un intervallo infinitesimo di tempo δt , esso è associato ad uno spostamento virtuale $\mathbf{v}\delta t$ *tangente alla circonferenza* (in rosso): questo spostamento non corrisponde ad uno spostamento *reale* del punto, dato che nell'intervallo δt la circonferenza si dilaterà (linea doppia tratteggiata) e il punto dovrà necessariamente evolvere seguendo la guida, di modo che il suo spostamento *reale* infinitesimo (in nero) *non* parallelo a \mathbf{v} ma avrà una componente diretta radialmente in modo da seguire il vincolo nel suo moto. Gli spostamenti virtuali sono quindi una maniera diversa di intendere lo spazio tangente al vincolo *in un istante fissato*.

Nel caso di vincolo olonomo liscio *fisso*, la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ non compie lavoro su un punto materiale sul vincolo che si muove di traiettoria \mathbf{x} , dato che necessariamente un punto in moto sul vincolo ha velocità tangente al vincolo stesso e la definizione implica quindi che la potenza associata è nulla, ovvero $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0$. Ciò significa che un vincolo fisso liscio non compie lavoro: se il punto materiale è in moto su un vincolo liscio ed è soggetto a sole forze attive *conservative*, l'energia meccanica si conserva.

1.6.1. *Punto su superficie liscia equipotenziale.* A titolo di esempio, supponiamo di avere un punto materiale soggetto ad una forza attiva *conservativa*, ovvero $\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V$ per un certo potenziale V , e che sia vincolato a muoversi su una superficie equipotenziale, ovvero il vincolo assume la forma $V(\mathbf{x}) - c = 0$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$. Se assumiamo che la superficie sia regolare, allora ciò significa che in ogni suo punto $\nabla V \neq \mathbf{0}$ specifica la direzione normale al piano tangente.

DEFINIZIONE 1.8 (Geodetica). Una curva non degenera γ sulla superficie regolare S è una geodetica se in ogni suo punto P il suo versore normale $\hat{\mathbf{n}}(P)$ è nello spazio normale alla superficie, ovvero

$$\hat{\mathbf{n}}(P) \in (\mathcal{T}_P S)^\perp.$$

PROPOSIZIONE 1.9. *Un punto materiale (P, m) che si muove di traiettoria non degenera sotto l'azione di una forza attiva conservativa su una superficie equipotenziale regolare liscia, segue delle traiettorie geodetiche sulla superficie. Analogamente, un punto materiale soggetto al solo vincolo liscio si muove lungo geodetiche del vincolo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia data una traiettoria $\mathbf{x}(t)$ regolare seguita dal punto P sul vincolo. Per ipotesi $\mathbf{F}^{(v)} = \lambda \nabla V$, essendo la superficie equipotenziale; ma d'altronde $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} = (\lambda - 1)\nabla V$, dove per ipotesi $\lambda \neq 1$ (la traiettoria è assunta non degenera) e $\nabla V \neq \mathbf{0}$ (la superficie è assunta regolare), per cui l'accelerazione $\mathbf{a} := \ddot{\mathbf{x}}$ è parallela a ∇V , direzione normale al vincolo. Basta ora semplicemente ricordare che in una curva non degenera $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{s}\hat{\mathbf{t}} + \dot{s}^2\kappa\hat{\mathbf{n}}$, con κ curvatura, $\hat{\mathbf{n}}$ versore normale della traiettoria nel punto \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{t}}$ versore tangente ad essa nello stesso punto ed s parametrizzazione naturale della traiettoria. Possiamo così concludere che la traiettoria è una geodetica: l'unico contributo nell'accelerazione in grado di concordare con \mathbf{F} è infatti quello orientato come $\hat{\mathbf{n}}$, purché $\hat{\mathbf{n}}$ sia parallelo a ∇V (il contributo $\hat{\mathbf{t}}$ è sicuramente ortogonale a ∇V e pertanto dovrà essere $\ddot{s} = 0$). Analogamente si prova il caso di moto spontaneo su vincolo liscio. \square

1.6.2. *Vincoli scabbi*. L'ipotesi di vincolo liscio è importante in meccanica ma, naturalmente, è il risultato di una semplificazione estrema: più realisticamente, la reazione vincolare presenta una componente tangenziale al vincolo $\mathbf{F}_t^{(v)}$ oltre a quella normale $\mathbf{F}_\perp^{(v)}$, di modo che la reazione vincolare complessiva sia nella forma $\mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{F}_\perp^{(v)} + \mathbf{F}_t^{(v)}$. Focalizziamoci su vincoli olonomi *fissi*. Nel caso *statico*, ovvero quando il punto materiale è fermo sul vincolo, sperimentalmente si osserva che il vincolo genera una reazione tangenziale $\mathbf{F}_t^{(v)}$ atta a mantenere nulla l'accelerazione del punto materiale e tale che

$$\|\mathbf{F}_t^{(v)}\| \leq \mu_s \|\mathbf{F}_\perp^{(v)}\|$$

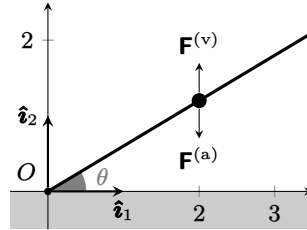
dove μ_s è detto *coefficiente di attrito statico*. La forza $\mathbf{F}^{(v)}$ vive perciò entro doppio un cono, il cui asse è ortogonale al vincolo nel caso di vincolo semplice e ad esso tangente nel caso di vincolo doppio, detto *cono di attrito statico*: di conseguenza, le posizioni di *equilibrio*, cioè tali per cui $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, sono quelle per cui $\mathbf{F}^{(a)}$ è anch'essa in tale cono, di modo che $\mathbf{F}^{(v)}$ possa annullarla.

Nel caso dinamico, ovvero se il punto materiale è in moto, la relazione tra componente tangente e normale di $\mathbf{F}^{(v)}$ coinvolge il cosiddetto *coefficiente di attrito dinamico* μ_d , e si trova che

$$\|\mathbf{F}_t^{(v)}\| = \mu_d \|\mathbf{F}_\perp^{(v)}\|.$$

Si osserva che $0 < \mu_d < \mu_s$. In questo caso l'attrito *compie lavoro*; inoltre $\mathbf{F}_t^{(v)}$ è sempre *opposto* alla velocità del punto materiale, ovvero la presenza dell'attrito induce *dissipazione* di energia meccanica, in quanto il lavoro fatto è negativo.

Esempio 1.2 (Guida inclinata scabra) — Consideriamo un punto materiale di massa m vincolato a muoversi lungo una guida scabra di coefficiente d'attrito statico μ_s . La guida si sviluppa lungo una retta passante per l'origine O di un riferimento cartesiano e che forma un angolo θ con l'asse del riferimento parallelo a $\hat{\mathbf{i}}_1$. Essa giace nel piano passante per O e generato dai vettori $\hat{\mathbf{i}}_1$ e $\hat{\mathbf{i}}_2$.



Sul punto materiale agisce la forza peso, che in questo riferimento assumiamo avere la forma $\mathbf{F}^{(a)} = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$, con g accelerazione di gravità. Questo significa che si ha equilibrio se $\mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{F}_t^{(v)} + \mathbf{F}_\perp^{(v)}$ è la reazione vincolare della guida. La condizione di equilibrio nelle due direzioni ortogonale e tangenziale si scrive rispettivamente

$$-mg \cos \theta + F_\perp^{(v)} = 0, \quad -mg \sin \theta + F_t^{(v)} = 0$$

da cui $F_\perp^{(v)} = mg \cos \theta$ e $F_t^{(v)} = mg \sin \theta$. D'altra $|F_t^{(v)}| \leq \mu_s |F_\perp^{(v)}| = mg \mu_s \cos \theta$, per cui la seconda equazione può essere soddisfatta solo se

$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s.$$

Se questa disuguaglianza non è soddisfatta, il punto non può essere in equilibrio.

1.6.3. *Vincoli unilateri.* Concludiamo con una breve osservazione riguardante il caso in cui il vincolo sia nella forma

$$\varphi(\mathbf{x}) \leq 0,$$

di modo che questo delimiti una regione di spazio, piuttosto che una superficie. Il vincolo, in questo caso, si “attiva” solo quando il punto materiale P è in una posizione tale da soddisfare l’uguaglianza: in tal caso compariranno reazioni vincolari del tipo discusso sopra. Diversamente, il punto non viene influenzato dal vincolo. Come riflessione aggiuntiva, notiamo che, se il punto materiale interagisce in modo *istantaneo* (urto) con la frontiera della regione ammessa, tale urto può essere assunto come ideale (ovvero, indurre una semplice inversione della componente della velocità ortogonale alla frontiera della regione ammessa) o dissipativo. Nel caso di *urto ideale*, l’energia cinetica del punto materiale viene conservata. Il caso di urto ideale può essere formalmente descritto introducendo un potenziale improprio $V(\mathbf{x})$ pari a 0 per $\varphi(\mathbf{x}) \leq 0$ e a $+\infty$ per $\varphi(\mathbf{x}) > 0$, effettivamente proibendo l’accesso alla regione vietata.