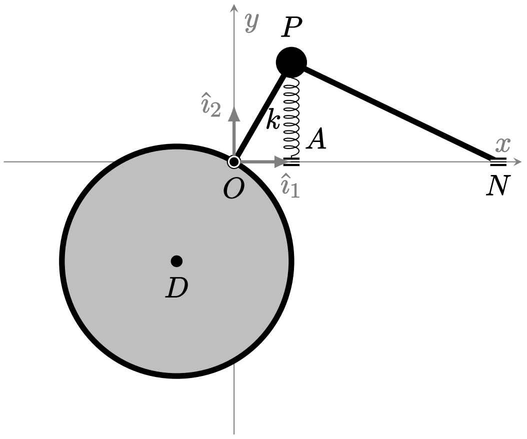
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Simulazione di prova d'esame

ISTRUZIONI. Questa simulazione comprende, a titolo esemplificativo, una collezione di domande per un punteggio massimo maggiore di quello solitamente richiesto in una prova d'esame.

Un disco omogeneo di massa m e raggio ℓ è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un suo punto O, centro di un riferimento inerziale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ come in figura, mantendosi nel piano generato da $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$. Sul punto O è altresì incastrata un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza ℓ, alla cui estremità opposta P si trova una massa $2m$, come mostrato in figura. Detta massa è collegata all'asse del riferimento $\mathcal{X}$, corrispondente alla direzione $\hat{\imath}_1$, da una molla ideale di costante elastica k: l'estremo opposto della molla A scorre sull'asse senza attrito per mezzo di un carrello. Infine, la massa P è collegata, tramite un'asta rigida $\overline{PN}$ di lunghezza 2ℓ, all'asse delle ascisse: l'asta è vincolata a scorrere lungo l'asse per mezzo di un carrello ideale nel suo estremo N.



Dopo aver individuato un insieme adeguato di variabili lagrangiane, si risolvano i seguenti quesiti.

- **A** Si determini la posizione del centro di massa del sistema in funzione di opportune variabili lagrangiane. [`5 pt`]
- **B** Si calcoli la risultante $\vec{R}^{(\mathrm{a})}$ e il trinomio invariante del sistema di forze attive. [`5 pt`]
- **C** Si calcoli il momento d'inerzia $I_{\mathcal{Z}}$ del sistema rispetto all'asse $\mathcal{Z}$ passante per O e ortogonale al piano. [`5 pt`]
- **D** Si esprima l'energia cinetica in funzione dell'evoluzione temporale delle variabili lagrangiane del sistema. [`7 pt`]
- **E** Si determino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità. [`12 pt`]
- **F** Usando il fatto che $\hat{\imath}_3$ è un asse principale di $\mathbf{I}_D$, tensore d'inerzia del disco rispetto al suo centro, calcoli il momento angolare del sistema rispetto all'origine in funzione delle variabili lagrangiane scelte. [`7 pt`]
- **G** Si calcoli la traiettoria della *base* dell'asta $\overline{PN}$. [`7 pt`]

SOLUZIONE

Chiamiamo θ l'angolo $\widehat{PON}$ formato dal vettore $\overrightarrow{OP}$ che individua il punto P con l'asse $\mathcal{X}$, di modo che

$$\overrightarrow{OP} = \ell\cos\theta\,\hat{\imath}_1 + \ell\sin\theta\,\hat{\imath}_2.$$

A Essendo il disco $\mathcal{D}$ omogeneo, il suo centro di massa G coincide con il suo centro geometrico D, che si trova in

$$\overrightarrow{OD} = -\ell\cos\theta\,\hat{\imath}_1 - \ell\sin\theta\,\hat{\imath}_2 \equiv -\overrightarrow{OP}.$$

L'unico altro contributo in massa è dovuto alla presenza del punto P. Il centro di massa del sistema è quindi in

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OD} + 2m\overrightarrow{OP}}{3m} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}.$$

B Sul sistema agiscono la forza peso e la forza elastica. La prima può considerarsi applicata nel centro di massa G e vale $\vec{F}_g = -3mg\hat{\imath}_2$. La seconda è applicata in P e vale $\vec{F}_e = -k\ell\sin\theta\,\hat{\imath}_3$. La risultante è quindi

$$\vec{R}^{(\mathrm{a})} = -(3mg + k\ell\sin\theta)\hat{\imath}_3.$$

Essendo il sistema piano, il trinomio invariante è nullo, dato che il momento τ_O delle forze è perpendicolare al piano.

C Il momento d'inerzia del disco *rispetto alla retta $\mathcal{R}$ parallela a $\mathcal{Z}$ ma passante per il suo centro* è $I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\ell^2$. Il centro D è anche il centro di massa del disco, per cui il contributo del disco al momento $I_{\mathcal{Z}}$ si può ottenere grazie al teorema di Huygens–Steiner, ovvero

$$I_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{D}} = I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + m\ell^2 = \frac{1}{2}m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{3}{2}m\ell^2.$$

Il momento d'inerzia totale si ottiene aggiungendo il contributo della massa puntiforme:

$$I_{\mathcal{Z}} = \frac{3}{2}m\ell^2 + 2m\ell^2 = \frac{7}{2}m\ell^2.$$

D Il contributo all'energia cinetica del punto P si può scrivere semplicemente come

$$T_P = \frac{1}{2}(2m)\|\vec{v}_P\|^2 = m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Il contributo del disco si può scrivere usando il Secondo teorema di König, ovvero, indicando con $I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\ell^2$ il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa,

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_D\|^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2$$

dove, detta $\vec{v}_D := \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OD}}{\mathrm{d}t}$, abbiamo usato il fatto che deve essere $\vec{\omega} = \omega\hat{\imath}_3$ (il moto è piano e il disco può solo ruotare con velocità angolare perpendicolare al piano stesso). Basta osservare che $\omega = \dot{\theta}$: infatti un riferimento solidale con il disco si può ottenere ruotando di θ il riferimento fisso. Per cui

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_D\|^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

per cui l'energia cinetica totale è

$$T = T_{\mathcal{D}} + T_P = \frac{7}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

E È utile prima di tutto scrivere l'energia potenziale del sistema, dovuta alla forza gravitazionale e alla presenza della molla

$$V{=}3mg\langle\overrightarrow{OG},\hat{\imath}_2\rangle{+}\frac{1}{2}k\langle\overrightarrow{OP},\hat{\imath}_2\rangle^2{+}\text{costante}{=}mg\ell\sin\theta{+}\frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta{+}\text{costante}.$$

Indicando con $\eta = \frac{mg}{k\ell}$, le configurazioni di equilibrio si possono trovare da

$$\partial_\theta V = mg\ell\cos\theta + k\ell^2\sin\theta\cos\theta = k\ell^2\cos\theta(\eta + \sin\theta) = 0.$$

Restringendoci per semplicità all'intervallo $[-\pi,\pi]$ (tutti i risultati varranno a meno di multipli interi di 2π), tale equazione ha come soluzioni $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$, e le due soluzioni corrispondenti a $\sin\theta=-\eta$, ovvero

$$\theta=-\arcsin\eta,\quad \theta=-\pi+\arcsin\eta\qquad\text{solo se}\quad \eta\leq 1.$$

Per studiare la stabilità, calcoliamo la derivata seconda:

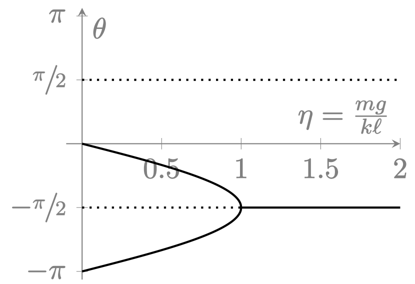
$$\partial^2_\theta V=k\ell^2\left(-\eta\sin\theta+(1-2\sin^2\theta)\right).$$

Abbiamo che

$\theta=\frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial^2_\theta V=-k\ell^2(1+\eta)<0$, ovvero questa configurazione di equilibrio è sempre instabile.

$\theta=-\frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial^2_\theta V=k\ell^2(\eta-1)$, ovvero questa configurazione di equilibrio è stabile solo se $\eta>1$.

$\sin\theta=\eta$: In questo caso $\partial^2_\theta V=k\ell^2\left(1-\eta^2\right)<0$, ovvero queste configurazioni di equilibrio sono sempre stabili, quando esistono.



F Il momento angolare $\vec{L}_O$ si può calcolare come somma del contributo della massa in P e del disco. Essendo $\vec{v}_P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OP}=\ell\dot\theta(-\sin\theta\hat\imath_1+\cos\theta\hat\imath_2)$, la sua velocità angolare rispetto all'origine è $\vec{L}^P_O=\overrightarrow{OP}\wedge(2m\vec{v}_P)=2m\ell^2\dot\theta\hat\imath_3$. Il contributo del disco invece può essere scritto utilizzando il Primo teorema di König come

$$\vec{L}^{\mathfrak{D}}_O=\vec{L}^{\mathfrak{D}}+\overrightarrow{OD}\wedge\vec{Q}_{\mathfrak{D}}=\mathbf{I}^{\mathfrak{D}}_D\vec\omega+\overrightarrow{OD}\wedge\vec{Q}_{\mathfrak{D}}.$$

Qui, $\vec{Q}_{\mathfrak{D}}=m\vec{v}_D$, in modo che $\overrightarrow{OD}\wedge(m\vec{v}_D)=m\ell^2\dot\theta\hat\imath_3$. Essendo $\vec\omega=\dot\theta\hat\imath_3$, $\mathbf{I}_D\vec\omega=\dot\theta I_{\mathfrak{R}}\hat\imath_3=\frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta\hat\imath_3$. Concludendo

$$\vec{L}_O=\vec{L}^{\mathfrak{D}}_O+\vec{L}^P_O=\left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta+3m\ell^2\dot\theta\right)\hat\imath_3=\frac{7}{2}m\ell^2\dot\theta\hat\imath_3.$$

G Il centro istantaneo di rotazione C si troverà, per il teorema di Chasles, nell'intersezioni tra le perpendicolari delle velocità del punto P e del punto N, ovvero all'intersezione della retta passante per P e orientata come $\overrightarrow{OP}$ con la retta passante per N e orientata come $\hat\imath_2$. In altre parole, il centro istantaneo di rotazione $\overrightarrow{OC}$ è tale che $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+t'\hat\imath_2$, dove $\overrightarrow{ON}$ è il vettore che identifica la posizione di N. Essendo l'asta $\overline{PN}$ di lunghezza 2ℓ, l'angolo $\phi=\widehat{PNO}$ è tale che

$$\ell\sin\theta=2\ell\sin\phi\Rightarrow\phi=\arcsin\left(\frac{\sin\theta}{2}\right),$$

che permette di scrivere $\overrightarrow{ON}=(\ell\cos\theta+2\ell\cos\phi)\hat\imath_1$ da intendersi come funzione di θ. Possiamo scrivere ora due equazioni per t e t',

$$t\ell\cos\theta=\ell\cos\theta+2\ell\cos\phi,\qquad t\ell\sin\theta=t'.$$

Dalla prima ricaviamo

$$t=1+\frac{2\cos\phi}{\cos\theta}$$

che permette di scrivere già l'equazione

$$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OP}=\left(1+\frac{2\cos\phi}{\cos\theta}\right)(\ell\cos\theta\hat\imath_1+\ell\sin\theta\hat\imath_2).$$