

## CAPITOLO 0

### Preambolo: curve e superfici

Prima di iniziare con i concetti della meccanica, è utile un sintetico preambolo su alcune strutture geometriche in  $\mathbb{R}^n$  che saranno di importanza fondamentale.

#### 1. Curve in $\mathbb{R}^n$

Una *curva* in  $\mathbb{R}^n$  è una applicazione  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo di  $\mathbb{R}$ , tale che ciascuna sua componente sia *continua*. In tale definizione *parametrica* della curva, denotiamo il *supporto* della curva come

$$\Gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists u \in I \text{ tale che } \mathbf{x} = \gamma(u)\}.$$

Se le componenti di  $\gamma$  sono derivabili in un certo  $u_0 \in I$ , possiamo associare al punto  $\gamma(u_0)$  un *vettore velocità* dato da

$$(0.1) \quad \gamma'(u_0) \equiv \gamma'(u_0) := \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\gamma(u) - \gamma(u_0)}{u - u_0},$$

dove il limite si intende componente per componente. Se  $\gamma'(u_0) \neq \mathbf{0}$ , la retta  $\mathbf{x}(u) = \gamma(u_0) + (u - u_0)\gamma'(u_0)$ , con  $u \in \mathbb{R}$ , si dice *tangente alla curva* essendo  $\|\mathbf{x}(u) - \gamma(u)\| = o(u - u_0)$  in un intorno di  $u_0$ . È in questo caso possibile definire un *versore tangente* alla curva in  $\gamma(u_0)$  come

$$(0.2) \quad \hat{\mathbf{t}}_\gamma(u_0) := \frac{\gamma'(u_0)}{\|\gamma'(u_0)\|}.$$

Se invece  $\gamma'(u_0) = \mathbf{0}$ , allora *non* esiste una retta tangente alla curva in  $\gamma(u_0)$ , né un versore tangente.

**DEFINIZIONE 1.1** (Curva semplice, curva chiusa e curva di Jordan). Una curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è semplice se iniettiva. Se  $I = [a, b]$ , la curva è detta chiusa se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta di Jordan se è chiusa e se  $\gamma(u) \neq \gamma(v)$  per ogni  $u \neq v$  con  $u, v \in (a, b)$ .

**DEFINIZIONE 1.2** (Curva regolare). Una curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è regolare se ha versore tangente in ogni punto di  $I$ . La curva invece si dice regolare a tratti se è continua ed esiste una partizione di  $I$  in un numero finito di sottointervalli in cui la curva è regolare.

Si noti che la regolarità di una curva dipende dall'applicazione  $\gamma$  e *non* dal sostegno  $\Gamma$ .

**Esempio 0.1** — Consideriamo la seguente curva in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}, \quad u \in [-\pi, \pi].$$

Essa descrive una circonferenza  $\Gamma$  ed è una curva regolare e chiusa. La curva

$$\psi(u) = \begin{pmatrix} \cos u^3 \\ \sin u^3 \end{pmatrix}, \quad u \in [-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}]$$

rappresenta esattamente la stessa circonferenza  $\Gamma$ , e tuttavia non è regolare, perché  $\frac{d\psi}{du}(0) = \mathbf{0}$ .

**DEFINIZIONE 1.3** (Equivalenza tra curve). Due curve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli, si dicono equivalenti se esiste una funzione suriettiva  $\tau: I \rightarrow J$  di classe  $\mathcal{C}^1$  con derivata sempre non nulla, detta *riparametrizzazione*, tale che  $\gamma(u) = \psi(\tau(u))$ . Si dice che le due curve hanno lo stesso verso se  $\tau' > 0$ , diversamente si dice che hanno verso opposto.

Nell'Esempio 0.1 le due curve  $\gamma$  e  $\psi$  non sono equivalenti: infatti,  $\gamma(u) = \psi(\hat{\tau}(u))$  con  $\hat{\tau}(u) = u^3$ ,  $\hat{\tau}: [-\pi, \pi] \rightarrow [-\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{\pi}]$  è biettiva e differenziabile, ma  $\hat{\tau}'(0) = 0$ .

**PROPOSIZIONE 1.1.** *Se  $\gamma$  e  $\psi$  sono due curve equivalenti regolari e con lo stesso verso, esse hanno lo stesso versore tangente in ogni punto del loro sostegno.*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che

$$\hat{\mathbf{t}}_\gamma(u) = \frac{\gamma'(u)}{\|\gamma'(u)\|} = \frac{\psi'(\tau(u))\tau'(u)}{\|\psi'(\tau(u))\|\tau'(u)} = \frac{\psi'(\tau(u))}{\|\psi'(\tau(u))\|} = \hat{\mathbf{t}}_\psi(\tau(u)). \quad \square$$

In altre parole, il versore tangente nel punto  $\gamma(u)$  è una funzione del punto e della direzione di percorrenza, e non della parametrizzazione.

**1.1. Lunghezza di una curva e integrali curvilinei.** Si dà la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.4** (Lunghezza di una curva). Data una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare a tratti, la sua lunghezza  $\ell(\Gamma)$  è definita come

$$\ell(\Gamma) := \int_a^b \|\gamma'(u)\| \, du.$$

La seguente disuguaglianza stabilisce che il percorso più breve fra due punti in geometria euclidea è dato dal segmento che li unisce.

**TEOREMA 1.2.** *La lunghezza di una curva regolare  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è sempre maggiore o uguale allo spostamento, ovvero alla distanza tra i suoi estremi,*

$$\ell(\Gamma) \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Assumendo uno spostamento non nullo, abbiamo che, per un generico vettore  $\mathbf{v}$

$$\langle \mathbf{v}, \gamma(b) - \gamma(a) \rangle = \int_a^b \langle \mathbf{v}, \gamma'(u) \rangle \, du \leq \|\mathbf{v}\| \int_a^b \|\gamma'(u)\| \, du = \|\mathbf{v}\| \ell(\Gamma).$$

Scegliendo  $\mathbf{v} = \gamma(b) - \gamma(a)$  si prova la tesi.  $\square$

**TEOREMA 1.3.** *Due curve regolari equivalenti  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  hanno la stessa lunghezza.*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione si basa sul fatto che, supponendo per esempio  $\tau'(u) > 0$ ,  $\|\gamma'(u)\| = \|\psi'(\tau(u))\|\tau'(u)$ , per cui  $\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| \, du = \int_a^b \|\psi'(\tau(u))\|\tau'(u) \, du = \int_c^d \|\psi'(\tau)\| \, d\tau$ . La dimostrazione è analoga se  $\tau'(u) < 0$ .  $\square$

Data una curva regolare  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , esiste una curva equivalente  $\psi: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $\ell$  è la lunghezza del sostegno di  $\gamma$ . Questa parametrizzazione è facilmente trovata come

$$s(u) := \int_a^u \|\gamma'(v)\| \, dv,$$

di modo che  $s(a) = 0$  e  $s(b) = \ell$  e  $\gamma = \psi \circ s$ : tale parametrizzazione si dice *intrinseca* e preserva la direzione di percorrenza. La funzione  $s$  è strettamente monotona, quindi invertibile. Ci si

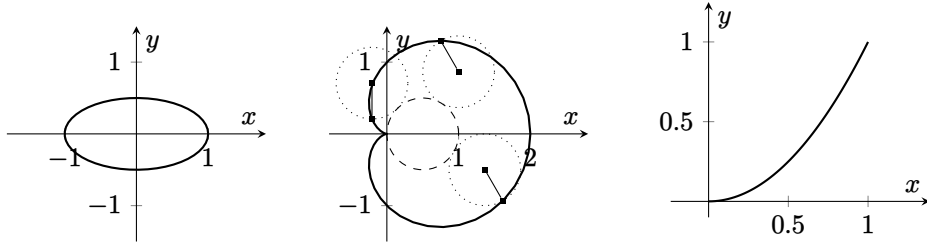


FIGURA 1. Da sinistra a destra: ellisse, cardiode, ramo di parabola.

riferisce ad  $s$  come all'*ascissa curvilinea* lungo la curva. La parametrizzazione  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\gamma} \circ s^{-1}$  perciò è tale che  $\left\| \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds}(s) \right\| = 1$  per ogni  $s \in [0, \ell]$ .

Alla luce di quanto detto, si può in generale definire un *integrale curvilineo* di una funzione  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  (detto talvolta campo scalare) lungo una curva regolare  $\boldsymbol{\gamma}$  di supporto  $\Gamma$  scrivendo

$$(0.3) \quad \int_{\boldsymbol{\gamma}} f \, ds := \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(u)) \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\| \, du.$$

Questo integrale è detto *integrale di linea di prima specie*. Analogamente, sia  $\mathbf{F}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale su  $\Gamma$ . L'integrale curvilineo di  $\mathbf{F}$  lungo  $\boldsymbol{\gamma}$  è definito come

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\gamma} \rangle := \int_a^b \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(u)), \boldsymbol{\gamma}'(u) \rangle \, du.$$

Questo tipo di integrale è detto *integrale di linea di seconda specie*. Se  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $\boldsymbol{\psi}$  sono curve equivalenti, l'integrale curvilineo di  $f$  su  $\boldsymbol{\gamma}$  ha lo stesso valore dell'integrale curvilineo di  $f$  su  $\boldsymbol{\psi}$ : in altre parole, esattamente come avviene per la lunghezza, il suo valore dipende dal *sostegno* della curva, e non da come questa è parametrizzata (purché la parametrizzazione sia regolare).

**Esempio 0.2** — Una ellisse nel piano con centro l'origine e semiassi 1 e  $a \in (0, 1]$  può essere scritta in forma parametrica come

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} a \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi].$$

La curva è regolare: per ogni  $u \in [0, 2\pi]$ , abbiamo

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ a \cos u \end{pmatrix},$$

per cui  $\left\| \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{du} \right\|^2 = 1 - (1 - a^2) \cos^2 u \neq 0$ . La sua lunghezza è

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (1 - a^2) \cos^2 u} \, du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (1 - a^2) \cos^2 u} \, du = 4E\left(\sqrt{1 - a^2}\right),$$

dove  $E(x)$  è l'integrale ellittico completo di seconda specie, tale che  $E(0) = \frac{\pi}{2}$ .

**Esempio 0.3** — Talvolta le curve nel piano sono date non in coordinate cartesiane ma polari, ovvero per mezzo una assegnata coppia di funzioni  $(\rho(u), \theta(u))$  di un certo parametro  $u \in I$ , tale che  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $\theta: I \rightarrow [0, 2\pi]$ , intendendo che  $\boldsymbol{\gamma}(u) = (\rho(u) \cos \theta(u), \rho(u) \sin \theta(u))^T$ . A titolo di esempio, la coppia di funzioni

$$\rho(u) = 1 + \cos u, \quad \theta = u, \quad u \in [0, 2\pi].$$

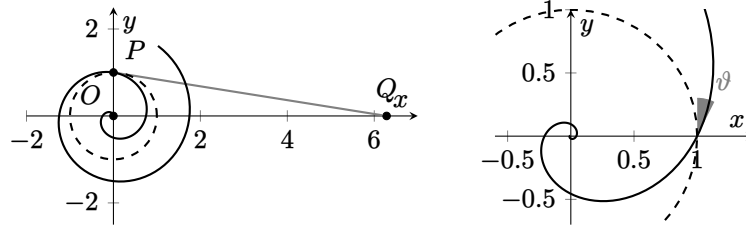


FIGURA 2. Spirale di Archimede (a sinistra) e logaritmica (a destra).

descrive una *cardioide*

$$(0.4) \quad \boldsymbol{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} (1 + \cos u) \cos u \\ (1 + \cos u) \sin u \end{pmatrix} \quad u \in [0, 2\pi],$$

curva ottenibile, facendo rotolare una circonferenza attorno ad un'altra fissa avente lo stesso raggio (usando, per esempio, uno spirografo). Con un po' di algebra,  $\|\boldsymbol{\gamma}'(u)\| = \sqrt{2(1 + \cos u)}$ . La lunghezza della curva è

$$\ell(\Gamma) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos u} \, du = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{u}{2} \right| \, du = 8.$$

**Esempio 0.4** — Un importante esempio di applicazione dei concetti esposti è il calcolo della lunghezza del grafico di una funzione reale  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Tale grafico consiste nel supporto della curva  $\boldsymbol{\gamma}(u) = (u, f(u))^\top \in \mathbb{R}^2$  con  $u \in [a, b]$ . Supponendo  $f \in C^1([a, b])$ , la lunghezza del grafico è

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\| \, du = \int_a^b \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2} \, du.$$

Per esempio, consideriamo il ramo di parabola  $y = \frac{1}{2}x^2$  con  $x \in [0, 1]$ . Allora

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \, du = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

**Esempio 0.5** (Spirale di Archimede) — Consideriamo la cosiddetta *spirale di Archimede* nel piano, parametrizzata in coordinate polari come

$$\rho(u) = \frac{au}{2\pi}, \quad \theta(u) = u + \frac{\pi}{2}, \quad u \in \mathbb{R}^+$$

dove  $a \in \mathbb{R}^+$  è un parametro della spirale. Sia  $P$  il punto della spirale corrispondente a  $u = 2\pi$ , avente come coordinate  $(0, a)^\top$ . Tracciamo ora la tangente alla spirale in  $P$  e sia  $Q$  il punto di intersezione della tangente con l'asse delle ascisse. Troviamone le coordinate: da

$$\boldsymbol{\gamma}'(2\pi) = \frac{a}{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin u - u \cos u \\ \cos u - u \sin u \end{pmatrix} \Big|_{u=2\pi} = \frac{a}{2\pi} \begin{pmatrix} -2\pi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La retta tangente ha perciò equazione

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \frac{at}{2\pi} \begin{pmatrix} -2\pi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

la cui intersezione con l'asse delle ascisse è il punto di coordinate  $(2\pi a, 0)$ : il punto  $Q$  è cioè ad una distanza dall'origine  $O$  pari alla lunghezza della circonferenza centrata in  $O$  passante per  $P$ , e di conseguenza il triangolo  $QOP$  ha area uguale a quella del cerchio centrato in  $O$  e passante per il punto  $P$ , fatto osservato per la prima volta da Archimede<sup>1</sup>.

**Esempio 0.6** (Spirale logaritmica) — Un ramo di *spirale logaritmica* è la curva  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  descritta dalle coordinate polari

$$\rho(u) = e^{ku}, \quad \theta(u) = u, \quad u \in (-\infty, a],$$

dove  $k > 0$ . Il vettore tangente alla curva nel punto  $\gamma(u)$  è

$$\gamma'(u) = e^{ku} \begin{pmatrix} \cos u - k \sin u \\ \sin u + k \cos u \end{pmatrix}$$

da cui possiamo vedere che la curva è regolare, essendo  $\|\gamma'(u)\|^2 = e^{2ku}(1+k^2) > 0$ . Una proprietà interessante della spirale logaritmica è il seguente: il versore tangente alla circonferenza centrata nell'origine e passante per  $\gamma(u)$  è

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \end{pmatrix},$$

e il suo angolo  $\vartheta$  con  $\gamma'(u)$  ha

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\|\gamma'(u)\|} \langle \hat{v}, \gamma'(u) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

ovvero  $\vartheta$  non dipende da  $u$ . Possiamo introdurre l'ascissa curvilinea

$$s(u) = \int_a^u \|\gamma'(v)\| dv = \sqrt{1+k^2} \int_a^u e^{kv} dv = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} (e^{ku} - e^{ka})$$

per cui la lunghezza della curva è  $\ell := \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} (e^{kb} - e^{ka})$ . Una parametrizzazione naturale si ottiene quindi calcolando

$$s^{-1}(v) = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{kv}{\sqrt{1+k^2}} + e^{ka} \right), \quad v \in [0, \ell],$$

per cui

$$\psi(v) = (\gamma \circ s^{-1})(v) = \left( \frac{kv}{\sqrt{1+k^2}} + e^{ka} \right) \begin{pmatrix} \cos s^{-1}(v) \\ \sin s^{-1}(v) \end{pmatrix}, \quad v \in [0, \ell].$$

Il vettore tangente a  $\psi$  nel punto di ascissa curvilinea  $v$  è quindi

$$\psi'(v) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} k \cos s^{-1}(v) - \sin s^{-1}(v) \\ \cos s^{-1}(v) + k \sin s^{-1}(v) \end{pmatrix}$$

che come si verifica facilmente ha norma unitaria, come atteso. Si noti che tutte le relazioni sopra mantengono significato per  $a \rightarrow -\infty$ .

---

<sup>1</sup>Archimede, *Sulle spirali*, 225 a.C. circa.

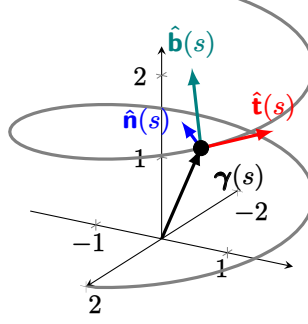


FIGURA 3. Curva in  $\mathbb{R}^3$  con rappresentazione della sua terna intrinseca in una certa posizione.

**1.2. Teorema di Frenet.** Sia  $\gamma$  una curva regolare di lunghezza  $\ell$  con parametrizzazione naturale,  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Abbiamo già introdotto il versore tangente alla curva: poiché stiamo assumendo una parametrizzazione intrinseca<sup>2</sup>

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds},$$

dove la condizione di normalizzazione  $\|\hat{\mathbf{t}}(s)\| = 1$  è realizzata automaticamente. È possibile introdurre una ulteriore quantità, detta *versore normale principale*, come segue.

**DEFINIZIONE 1.5 (Versore normale principale).** Sia  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare con parametrizzazione naturale avente componenti di classe  $C^2$ . Nei punti in cui  $\frac{d^2\gamma(s)}{ds^2} \neq \mathbf{0}$  è definito il *versore normale principale*

$$\hat{\mathbf{n}}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d^2\gamma(s)}{ds^2} = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\hat{\mathbf{t}}(s)}{ds}, \quad \kappa(s) := \left\| \frac{d^2\gamma(s)}{ds^2} \right\|,$$

dove  $\kappa(s)$  è detta *curvatura* della curva e  $R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$  è il raggio di curvatura della curva in  $\gamma(s)$ . Se  $\kappa(s) \neq 0$  per ogni  $s \in [0, \ell]$ , la curva è detta *non-degenere*.

Ove definito, il versore  $\hat{\mathbf{n}}(s)$  è ortogonale a  $\hat{\mathbf{t}}(s)$ , essendo

$$0 = \frac{d\|\hat{\mathbf{t}}(s)\|^2}{ds} = 2\kappa(s)\langle \hat{\mathbf{n}}(s), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle.$$

**DEFINIZIONE 1.6 (Versore binormale).** Il vettore unitario

$$\hat{\mathbf{b}}(s) := \hat{\mathbf{t}}(s) \wedge \hat{\mathbf{n}}(s)$$

è detto *versore binormale*.

Per comprendere il significato di questo nuovo versore, consideriamo il caso  $n = 3$ . Il fascio di piani passante per un certo punto  $\gamma(s_0)$  della curva. Esso è identificato da  $\gamma(s_0)$  e da tutti i possibili versori  $\mathbf{v}$  di modo che un punto  $\mathbf{x}$  appartiene all'elemento del fascio di versore  $\mathbf{v}$  se  $\langle \mathbf{x} - \gamma(s_0), \mathbf{v} \rangle = 0$ . D'altra parte, la distanza tra un punto della curva di ascissa curvilinea  $s$  e lo stesso piano è

$$h(s) := \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mathbf{v} \rangle.$$

<sup>2</sup>Omettiamo il pedice  $\gamma$  per semplicità.

Osserviamo che naturalmente  $h(s_0) = 0$ , mentre

$$\frac{d h}{d s}(s_0) = \langle \hat{\mathbf{t}}(s_0), \mathbf{v} \rangle, \quad \frac{d^2 h}{d s^2}(s_0) = \kappa(s_0) \langle \hat{\mathbf{n}}(s_0), \mathbf{v} \rangle.$$

Entrambe queste relazioni sono pari a zero se scegliamo  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{b}}(s_0)$ , rendendo  $h(s) = o((s - s_0)^2)$  in un intorno di  $s_0$ . D'altra parte questa è l'unica possibile scelta se  $n = 3$ , ovvero se stiamo considerando una curva nello spazio tridimensionale, il che rende la scelta del piano unica e il piano stesso prende il nome di *piano osculatore*. In questo piano, consideriamo ora un cerchio *tangente* alla curva  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $\boldsymbol{\gamma}(s_0)$ : il suo centro sarà quindi  $\mathbf{x}(s_0) = \boldsymbol{\gamma}(s_0) + R\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ , dove  $R$  è il raggio. Introduciamo

$$g(s) = \|\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{x}(s_0)\| - R,$$

dove  $s$  è intesa in un intorno di  $s_0$ . Abbiamo che  $g(s_0) = 0$ , mentre

$$\frac{d g}{d s}(s_0) = \frac{1}{R} \langle \boldsymbol{\gamma}(s_0) - \mathbf{x}(s_0), \hat{\mathbf{t}}(s_0) \rangle = 0, \quad \frac{d^2 g}{d s^2}(s_0) = \frac{1 - \kappa(s_0)R}{R}.$$

Il secondo termine è nullo precisamente se  $R = \kappa^{-1}(s_0)$ : con questa scelta,  $g(s) = O((s - s_0)^3)$  nel punto di tangenza tra curva e cerchio: con questa scelta, cioè, si ottiene il cerchio che meglio approssima la curva nel piano osculatore, detto *cerchio osculatore*. Si noti che  $\mathbf{x}(s)$ , con  $s \in [0, \ell]$ , descrive esso stesso una curva, detta *evolvente* nel caso in cui la curva giaccia internamente nel piano osculatore.

Nel caso  $n = 3$ , quindi, la terna introdotta fornisce, localmente, una base, che “evolve” lungo la curva. Per studiarne l'evoluzione, discuteremo il cosiddetto *teorema di Frenet*, ma dopo aver introdotto il seguente Lemma ausiliario.

**LEMMA 1.4.** *Sia  $\mathbf{R}: \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(m)$  differenziabile in un intorno di  $s = 0$ , ovvero tale che  $R_{ij}(s)$  sia differenziabile in un intorno di  $s = 0 \ \forall i, j$ ,  $\mathbf{R}(s)^\top \mathbf{R}(s) = \mathbf{I}$  e  $\det \mathbf{R}(s) = 1$ . Indicando con*

$$\mathbf{Y} := \left. \frac{d \mathbf{R}(s)}{d s} \right|_{s=0},$$

*la matrice  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è antisimmetrica, ovvero  $\mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^\top$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo  $\mathbf{R}(s)$  ortogonale, in un intorno di  $s = 0$  potremo scrivere

$$\mathbf{R}(s)^\top \mathbf{R}(s) = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d \mathbf{R}(s)^\top}{d s} \mathbf{R}(s) = -\mathbf{R}(s)^\top \frac{d \mathbf{R}(s)}{d s} \xrightarrow{s=0} \mathbf{Y}^\top = -\mathbf{Y}. \quad \square$$

Vale il seguente teorema.

**TEOREMA 1.5 (Frenet).** *Sia  $\boldsymbol{\gamma}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare non-degenere di classe  $\mathcal{C}^3$ , parametrizzata naturalmente. Valgono le seguenti equazioni di Frenet*

$$(0.5) \quad \frac{d}{d s} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}(s) \\ \hat{\mathbf{n}}(s) \\ \hat{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\chi(s) \\ 0 & \chi(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}(s) \\ \hat{\mathbf{n}}(s) \\ \hat{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix}$$

dove  $\chi(s)$  è detta *torsione*.

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo per brevità  $\mathbf{v}(s) = (\hat{\mathbf{t}}(s), \hat{\mathbf{n}}(s), \hat{\mathbf{b}}(s))^\top$ . Allora esiste una matrice  $\mathbf{O}_s(\sigma) \in \text{SO}(3)$ , dipendente da  $s$ , tale che  $\mathbf{v}(s + \sigma) = \mathbf{O}_s(\sigma) \mathbf{v}(s)$  e che  $\mathbf{O}_s(0) = \mathbf{I}$ . In particolare

$$\frac{d \mathbf{v}(s)}{d s} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbf{O}_s(\sigma) - \mathbf{I}}{\sigma} \mathbf{v}(s) = \mathbf{Y}_s \mathbf{v}(s), \quad \mathbf{Y}_s := \frac{d \mathbf{O}_s}{d \sigma}(0).$$

La matrice  $\mathbf{O}_s(\sigma)$  ha derivata  $\mathbf{Y}_s$  antisimmetrica per il Lemma 1.4. La sua prima riga ha  $\kappa(s)$ , come nella tesi, come unico elemento non nullo per definizione, per cui basta indicare come  $\chi(s)$  l'unico elemento non specificato dalle definizioni già date.  $\square$

Esiste una relazione *univoca* tra una curva passante per un punto e la coppia torsione e curvatura, come mostrato dal seguente risultato.

**TEOREMA 1.6.** *Siano date due funzioni  $\kappa(s) > 0$  e  $\chi(s)$  continue con derivate continue sull'intervallo  $[0, \ell]$ . Esiste allora un'unica curva in  $\mathbb{R}^3$  (a meno di congruenze) avente curvatura  $\kappa(s)$  e torsione  $\chi(s)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Le equazioni di Frenet implicano che  $\hat{\mathbf{t}}(s)$  soddisfa la seguente equazione:

$$(0.6) \quad \frac{d^2 \hat{\mathbf{t}}}{ds^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{ds} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} + \kappa^2 \hat{\mathbf{t}} + \chi \hat{\mathbf{t}} \wedge \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \mathbf{0},$$

che corrisponde ad una equazione differenziale del terzo ordine per  $\boldsymbol{\gamma}(s)$ , dato che  $\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}$ : infatti, basta osservare che

$$\frac{d^2 \hat{\mathbf{t}}}{ds^2} = \frac{d\kappa}{ds} \hat{\mathbf{n}} + \kappa \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{ds} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} - \kappa^2 \hat{\mathbf{t}} - \chi \hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{ds} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} - \kappa^2 \hat{\mathbf{t}} - \frac{\chi}{\kappa} \hat{\mathbf{t}} \wedge \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}.$$

Poste quindi un insieme di condizioni iniziali  $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\gamma}_0$ ,  $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}(0) = \hat{\mathbf{t}}_0$ , e  $\frac{d^2 \boldsymbol{\gamma}}{ds^2}(0) = \kappa(0)\hat{\mathbf{n}}_0$ , che impongono la posizione  $\boldsymbol{\gamma}_0$ , la direzione  $\hat{\mathbf{t}}_0$  e la direzione della curvatura  $\hat{\mathbf{n}}_0$  nel punto iniziale della curva, la soluzione è unica purché la curvatura si mantenga non nulla come per ipotesi.  $\square$

L'analisi fatta finora ha utilizzato l'ipotesi che la curva fosse parametrizzata naturalmente. Se così non è, e disponiamo di una curva regolare  $\boldsymbol{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sia  $s(u)$  l'ascissa curvilinea, di modo che  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\psi} \circ s$  dove  $\boldsymbol{\psi}$  è la parametrizzazione naturale equivalente. Supponendo  $\boldsymbol{\psi}$  non degenerare ed applicando il teorema della funzione composta, la “velocità” associata alla parametrizzazione  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $u$  risulta parallela al versore tangente

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = \frac{d\boldsymbol{\psi}(s)}{ds} \Big|_{s=s(u)} \frac{ds}{du} = s' \hat{\mathbf{t}}(s(u))$$

mentre l’“accelerazione” è

$$\boldsymbol{\gamma}''(u) = s''(u) \hat{\mathbf{t}}(s(u)) + (s'(u))^2 \kappa(s(u)) \hat{\mathbf{n}}(s(u)),$$

dove si vede che quest'ultima ha due componenti, una tangente e una ortogonale alla curva e la cui intensità degrada con l'aumentare del raggio di curvatura. Incidentalmente, le formule sopra permettono di scrivere  $\kappa(s)$  in termini di  $\boldsymbol{\gamma}'$  ed  $\boldsymbol{\gamma}''$ , di modo che, se  $s = s(u)$ ,

$$\kappa(s(u)) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|^2} \left\| \boldsymbol{\gamma}''(u) - \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}'(u), \boldsymbol{\gamma}''(u) \rangle}{\|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|^2} \boldsymbol{\gamma}'(u) \right\|.$$

**1.3. Campi vettoriali.** Concludiamo questa breve sezione sulle curve in  $\mathbb{R}^n$  introducendo il concetto di *campo vettoriale*.

**DEFINIZIONE 1.7** (Campo vettoriale). Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto. Un campo vettoriale  $d$ -dimensionale su  $U$  è una applicazione  $\mathbf{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Se  $\mathbf{x} \in U \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$ , diremo che  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è applicato in  $\mathbf{x}$ .

**DEFINIZIONE 1.8** (Curva integrale). Una curva  $\boldsymbol{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *curva integrale* del campo vettoriale  $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se per ogni  $u \in I$  si ha che  $\boldsymbol{\gamma}(u) \in U$  e inoltre  $\boldsymbol{\gamma}'(u) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(u))$ . Un campo vettoriale si dice *completo* se ogni punto  $\mathbf{x}$  del suo dominio ammette una curva integrale con dominio  $\mathbb{R}$ .

La condizione  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(u)) = \boldsymbol{\gamma}'(u)$ , insieme al teorema di Cauchy, implica che esiste sempre, unica, una curva integrale di un campo vettoriale passante per un dato punto, purché il campo sia sufficientemente regolare, ovvero almeno lipschitziano.



## 2. Superfici in $\mathbb{R}^3$

Nella seconda parte di questo preambolo sintetizzeremo alcuni fatti sulle superfici in  $\mathbb{R}^3$ . Iniziamo dalla seguente

**DEFINIZIONE 2.1** (Superficie regolare). Un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{R}^3$  è una *superficie regolare* se, per ogni  $P \in S$ , in un suo intorno  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  è dato un omeomorfismo differenziabile  $\sigma: U \rightarrow V \cap S$  definito su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  tale che

$$(0.7) \quad \frac{\partial \sigma(\mathbf{w})}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma(\mathbf{w})}{\partial v} \neq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{w} = (u, v) \in U.$$

Il fatto che  $\sigma$  sia un omeomorfismo differenziabile garantisce che la superficie non presenti delle autointersezioni. La condizione sul prodotto vettoriale, detta *di regolarità*, è dovuta invece al fatto seguente. Sia  $P \in S$  tale che le sue coordinate siano  $\mathbf{x}_0 = \sigma(\mathbf{w}_0)$  secondo una certa mappa  $\sigma$ , con  $\mathbf{w}_0 \in U$ , nella stessa notazione della definizione. Possiamo costruire una curva regolare  $\psi: I \rightarrow U$  passante in  $\mathbf{w}_0$  per un certo  $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ . Sia  $\gamma := \sigma \circ \psi$  curva corrispondente sulla superficie, immagine della curva  $\psi$  in  $U$ . Indicando con  $\psi(t) = (\psi_u(t), \psi_v(t))^T$  la parametrizzazione della curva in  $U$ , il vettore tangente a  $\gamma$  in  $\mathbf{x}_0 = \gamma(t_0) = (\sigma \circ \psi)(t_0)$  per un certo  $t_0 \in I$  sarà

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{w}_0) \frac{d\psi_u}{dt}(t_0) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{w}_0) \frac{d\psi_v}{dt}(t_0).$$

Perché la curva  $\gamma$  sia regolare, occorre che questo vettore sia non nullo: essendo  $\frac{d\psi_u}{dt}$  e  $\frac{d\psi_v}{dt}$  non entrambi nulli per via della regolarità di  $\psi$ , ciò è garantito se i due vettori che appaiono nella somma non sono paralleli, da cui la condizione in Eq. (0.7).

Data una superficie regolare, possiamo definire lo *spazio tangente* in un suo punto  $P$  individuato dalla terna  $\mathbf{x}$  come segue.

**DEFINIZIONE 2.2** (Spazio tangente). Un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  applicato in  $P$ , punto di coordinate  $\mathbf{x}$ , si dice tangente a  $S$  nel punto  $P$ , ovvero  $\mathbf{v} \in T_P S$ , se e solo se esiste una curva  $\gamma: I \rightarrow S$  tale che  $\mathbf{x} = \gamma(t_0)$  e  $\mathbf{v} = \frac{d\gamma}{dt}(t_0)$  per un qualche  $t_0 \in I$ .

Per quanto detto sopra, se  $P$  è identificato da  $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{w})$  per  $\mathbf{w} \in U$ , allora

$$T_P S = \text{span} \left\{ \frac{\partial \sigma(\mathbf{w})}{\partial u}, \frac{\partial \sigma(\mathbf{w})}{\partial v} \right\}.$$

Lo spazio tuttavia non dipende dalla parametrizzazione scelta. Essendo  $\partial_u \sigma$  e  $\partial_v \sigma$  tangenti alla superficie, il vettore  $\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma$  è normale alla superficie e in particolare si può definire il versore normale ad  $S$  in  $\mathbf{x}$  come

$$(0.8) \quad \hat{\mathbf{n}}_\sigma(\mathbf{x}) := \frac{\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma}{\|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\|} \Big|_{\mathbf{x}=\sigma(\mathbf{w})}.$$

Questo versore genera uno spazio *ortogonale* alla superficie in  $\mathbf{x}$ , che indichiamo come  $(T_P S)^\perp$ , e ne determina una possibile orientazione locale.

Una superficie  $S$  può essere assegnata anche *implicitamente*, ovvero tramite una funzione  $\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  su  $A \subset \mathbb{R}^3$ . Sia

$$S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \varphi(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Se  $\nabla \varphi \neq \mathbf{0}$  in un certo punto  $\mathbf{x} \in S$ , il punto si dice *non singolare*, e per il teorema della funzione implicita, una delle tre componenti di  $\mathbf{x}$  può essere *localmente* scritta in termini delle altre due: per esempio, se  $\partial_{x_3} \varphi|_{\mathbf{x}} \neq 0$ , esisteranno un intorno  $U \in \mathbb{R}^2$  di  $(x_1, x_2)$  e una funzione  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile tale per cui

$$\text{grafico}(f) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\} \subseteq S.$$

Questa legge individua una superficie in modo locale, per mezzo dell'applicazione  $\sigma: (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ , alla quale possono applicarsi tutte le considerazioni fatte sopra: la funzione è un omeomorfismo ed inoltre  $\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma \neq 0$ . La condizione  $\nabla \varphi \neq 0$  in ogni punto di  $S$  garantisce quindi la regolarità della superficie. Vale inoltre il fatto seguente.

**TEOREMA 2.1.** *Sia  $P$  un punto non singolare di coordinate  $\mathbf{x}$  su una superficie  $S$  individuata implicitamente dalla legge  $\varphi = 0$ . Allora  $T_P S = (\text{span}\{\nabla \varphi(\mathbf{x})\})^\perp$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo il punto non-singolare, esiste in un suo intorno una rappresentazione parametrica di  $S$ , nella forma  $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{w})$ , ovvero  $\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi \circ \sigma)\mathbf{w} = 0$ , per cui la condizione  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$  implica derivando che  $\langle \nabla \varphi, \partial_u \sigma \rangle = \langle \nabla \varphi, \partial_v \sigma \rangle = 0$ , cioè  $\nabla \varphi$  è ortogonale allo spazio tangente in  $P$ .  $\square$

Come conseguenza, il piano passante per  $P \in S$  tangente alla superficie ha come vettore normale  $\nabla \varphi(\mathbf{x})$ .

**DEFINIZIONE 2.3.** Un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  su  $S$  è una funzione che associa ad ogni punto  $\mathbf{x} \in S$  un vettore  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ : in particolare, se  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in T_P S$  per ogni  $P \in S$  il campo si dice tangente. Se invece  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in (T_P S)^\perp$  il campo si dice ortogonale.

Il campo vettoriale  $\hat{\mathbf{n}}_\sigma$  è per esempio un campo ortogonale.

**2.1. Proprietà metriche delle superfici.** Data una superficie regolare identificata, in un intorno del punto  $P$ , dalla legge  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sia assegnata su di essa la curva  $\gamma = \sigma \circ \psi$ , dove  $\psi: [a, b] \rightarrow U$  regolare. Indicando con  $\psi(t) \equiv (\psi_u(t), \psi_v(t))^\top$ , la lunghezza di questa curva è

$$\ell = \int_a^b \left\| \frac{d(\sigma \circ \psi)(t)}{dt} \right\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\psi_u}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \Big|_{\mathbf{w}=\psi(t)} + \frac{d\psi_v}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial v} \Big|_{\mathbf{w}=\psi(t)} \right\| dt.$$

Il calcolo della norma passa, in particolare, dal calcolo di

$$(0.9) \quad \left\| \frac{d\psi_u}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \Big|_{\mathbf{w}=\psi(t)} + \frac{d\psi_v}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial v} \Big|_{\mathbf{w}=\psi(t)} \right\|^2 \\ = E(\mathbf{w}) \Big|_{\mathbf{w}=\psi(t)} \left( \frac{d\psi_u}{dt} \right)^2 + 2F(\mathbf{w}) \Big|_{\mathbf{w}=\psi(t)} \frac{d\psi_u}{dt} \frac{d\psi_v}{dt} + G(\mathbf{w}) \Big|_{\mathbf{w}=\psi(t)} \left( \frac{d\psi_v}{dt} \right)^2$$

dove

$$E(\mathbf{w}) := \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\|^2, \quad F(\mathbf{w}) := \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\rangle, \quad G(\mathbf{w}) := \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|^2,$$

che definiscono la cosiddetta *prima forma fondamentale della superficie*

$$ds^2 = E(\mathbf{w}) du^2 + 2F(\mathbf{w}) du dv + G(\mathbf{w}) dv^2 = \langle d\mathbf{w}, \mathbf{g}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \rangle,$$

dove abbiamo usato la forma compatta  $d\mathbf{w} = (du \ dv)^\top$  e

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} E(\mathbf{w}) & F(\mathbf{w}) \\ F(\mathbf{w}) & G(\mathbf{w}) \end{pmatrix}.$$

La forma quadratica sopra si dice associata ad una parametrizzazione *ortogonale* se  $F = 0$ , ovvero se  $\mathbf{g}$  è diagonale; se poi inoltre  $E(\mathbf{w}) = G(\mathbf{w}) \equiv g(\mathbf{w})$  e quindi  $ds^2 = g(\mathbf{w}) (du^2 + dv^2)$  la parametrizzazione si dice *conforme* dato che l'angolo tra due curve in  $U$  viene preservato su  $S$  tramite  $\sigma$ . La prima forma fondamentale è estremamente utile per il calcolo dell'area di una superficie regolare. Diamo la seguente definizione, che assume per semplicità che una sola parametrizzazione sia sufficiente per l'intera superficie, ma che può essere generalizzata al caso in cui ne siano necessarie di più.

**DEFINIZIONE 2.4** (Area di una superficie). Sia  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrizzazione di una superficie regolare  $S$ . L'area della superficie è definita come

$$A(S) := \int_U \|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\| \, du \, dv = \int_U \sqrt{\det \mathbf{g}(\mathbf{w})} \, du \, dv.$$

La ragione *intuitiva* per questa definizione è la seguente: il rettangolo di lati  $du$  e  $dv$  in  $U$  attorno ad un certo punto  $\mathbf{w} \in U$  viene mappato, tramite  $\sigma$ , in un parallelogramma nello spazio tridimensionale i cui lati sono di lunghezza  $du \partial_u \sigma$  e  $dv \partial_v \sigma$ : la quantità  $\|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\| \, du \, dv$  corrisponde esattamente all'area di questo parallelogramma infinitesimo. L'integrale quindi somma questi contributi infinitesimi che tassellano la superficie che ci interessa e  $\sqrt{\det \mathbf{g}(\mathbf{w})} \, du \, dv$  è un infinitesimo di superficie. La quantità  $\det \mathbf{g} = EG - F^2$  è anche detta *forma quadratica di Gauss*. È facile mostrare che, nelle ipotesi date, l'espressione introdotta *non* dipende dalla parametrizzazione.

**Esempio 0.7** (Sfera) — Calcoliamo la matrice  $\mathbf{g}$  associata alla sfera in  $\mathbb{R}^3$ , parametrizzata come

$$\sigma(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

Da quanto detto sopra,

$$E(\mathbf{w}) = \sin^2 v, \quad F(\mathbf{w}) = 0, \quad G(\mathbf{w}) = 1,$$

per cui la parametrizzazione fornita è ortogonale ma non conforme. Essendo  $\det \mathbf{g} = \sin^2 v$ , la superficie sferica ha area

$$A(S) = \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \sin v \, dv = 4\pi.$$

**Esempio 0.8** — Un'applicazione analoga a quella che abbiamo visto per gli integrali curvilinei è il calcolo di aree di superfici definite da funzioni tipo  $z = f(x, y)$ , dove  $f$  è differenziabile su  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Queste funzioni possono essere scritte nel formalismo sopra come

$$\sigma(\mathbf{w}) = (u, v, f(u, v)), \quad \mathbf{w} = (u, v) \in U.$$

Di conseguenza

$$\|\partial_u \sigma \wedge \partial_v \sigma\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2},$$

ovvero l'area della superficie, se esiste, è data da

$$A = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(\mathbf{w})\|^2} \, du \, dv.$$

Per esempio, consideriamo il paraboloide individuato dall'equazione

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 < 1\}.$$

Allora la superficie del paraboloide è

$$A = \int_U \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

**Esempio 0.9** (Superfici di rotazione) — Una seconda applicazione, estremamente utile, del formalismo sopra è il calcolo delle aree di *superfici di rotazione*, ovvero superfici ottenute ruotando attorno all'asse  $z$  funzioni definite sul piano  $y = 0$  da un'equazione del tipo  $z = f(x)$ , con  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^+$  e  $f(x)$  funzione

continua derivabile. Questo vuol dire che la superficie generata può essere scritta in forma parametrica come

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = (u \cos v, u \sin v, f(u)), \quad \mathbf{w} = (u, v) \in (a, b) \times [0, 2\pi).$$

In questo caso un calcolo diretto mostra che

$$\|\partial_u \boldsymbol{\sigma} \wedge \partial_v \boldsymbol{\sigma}\| = u \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2}$$

Questo significa che l'area di tali superfici si può scrivere come

$$A = 2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2} \, du.$$

Per esempio, il paraboloide considerato nell'esempio precedente può essere visto come la rotazione attorno all'asse  $z$  del ramo di parabola  $z = x^2$  nel piano  $y = 0$  definito su  $[0, 1]$ . La formula che abbiamo ottenuto implica quindi che possiamo calcolarne l'area come  $A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u} \sqrt{1 + 4u} \, du = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$ . In maniera simile, si può avere con superfici di rotazione nella forma

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u), \quad \mathbf{w} = (u, v) \in (a, b) \times [0, 2\pi),$$

dove stavolta  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  e  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$  differenziabile. In questo caso si vede facilmente che

$$\|\partial_u \boldsymbol{\sigma} \wedge \partial_v \boldsymbol{\sigma}\| = f(u) \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2} \Rightarrow A = 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + (\partial_u f(u))^2} \, du.$$