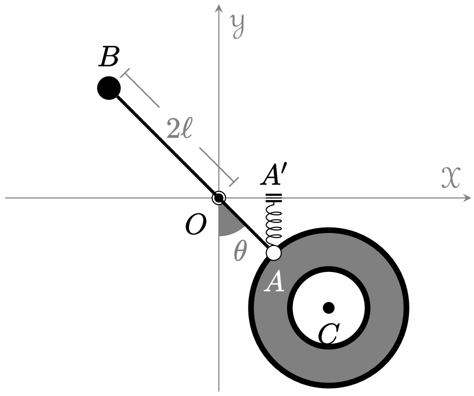
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

1 Luglio 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Il voto minimo per l'accesso all'orale è 15/30.

Si consideri il sistema in figura, che si suppone giacere in un piano verticale. Un'asta $\overline{AB}$ di massa trascurabile e di lunghezza 3ℓ è imperneata in un punto fisso O tramite una cerniera che le permette di ruotare attorno ad esso. La posizione di O è tale che $d(O,B) = 2d(O,A) = 2\ell$. In B è collocata una massa m. In A l'asta è saldata ad una corona circolare omogenea, anch'essa di massa m, di raggio ℓ, di modo che la cavità interna abbia raggio $\frac{1}{2}\ell$ e che A, O e il centro della corona siano collineari. Infine, A è collegata all'asse delle ascisse da una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. La molla è vincolata all'asse delle ascisse per mezzo di un carrello ideale in A', di modo che il segmento $\overline{AA'}$ sia sempre verticale.



Utilizzando come parametro lagrangiano l'angolo θ in figura, si risponda alle seguenti domande.

A Si determini il centro di massa del sistema.

B Si scriva il momento angolare della massa in B rispetto all'origine.

C Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $\mathbb{Z}$ ortogonale al piano e passante per O. Si scriva inoltre l'energia cinetica del sistema.
Suggerimento: Il momento d'inerzia di un disco omogeneo di raggio R e massa M rispetto ad un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro è $I = \frac{1}{2}MR^2$.

D Si identifichino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.

Soluzione

A Essendo (per ragioni di simmetria) il centro di massa della corona nel suo centro C, questo è individuato dal vettore $\boldsymbol{x}_C = 2\ell \sin\theta \hat{\imath}_1 - 2\ell\cos\theta\hat{\imath}_2 = -\boldsymbol{x}_B$, opposto cioè al vettore $\boldsymbol{x}_B$ che individua B. Risulta quindi che il centro di massa del sistema è nell'origine:

$$\boldsymbol{x}_G = \frac{m\boldsymbol{x}_C + m\boldsymbol{x}_B}{2m} = \boldsymbol{0}.$$

B La posizione di B può essere identificata, rispetto all'angolo θ scelto, come

$$\boldsymbol{x}_B = -2\ell\sin\theta\hat{\imath}_1 + 2\ell\cos\theta\hat{\imath}_2.$$

La sua quantità di moto è quindi

$$\boldsymbol{Q}_B = m\boldsymbol{v}_B = m\dot{\boldsymbol{x}}_B = -2m\ell\dot{\theta}\left(\cos\theta\hat{\imath}_1 + \sin\theta\hat{\imath}_2\right).$$

Il momento angolare si calcola usando la definizione

$$\boldsymbol{L}_O^{(B)} = \boldsymbol{x}_B \wedge \boldsymbol{Q}_B = 4m\ell^2\dot{\theta}\hat{\imath}_3.$$

C Il momento d'inerzia può essere calcolato come la somma algebrica di tre contributi: quelli positivi della massa in B e di un disco omogeneo di densità ρ centrato in C di raggio ℓ, e quello *negativo* di una disco concentrico omogeneo di stessa densità ρ ma raggio $\frac{\ell}{2}$. Essendo la superficie della corona circolare pari a $\pi\left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi\ell^2$, allora la densità superficiale è

$$\rho = \frac{4m}{3\pi\ell^2}.$$

Il momento d'inerzia rispetto ad O di un disco centrato in C di densità ρ e raggio R, e quindi di massa $M = \pi\rho R^2$, è dato da

$$I_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2(O,C) = \frac{\pi}{2}\rho R^4 + \pi\rho R^2 d^2(O,C)$$

dove abbiamo usato il teorema di Huygens–Steiner e il suggerimento nel testo. Essendo $d(O,C) = 2\ell$, abbiamo che il momento d'inerzia è quindi dato da

$$I_{\mathfrak{z}} = \underbrace{4m\ell^2}_{B} + \underbrace{\frac{\pi}{2}\rho\ell^4 + 4\pi\rho\ell^4 - \left(\frac{\pi}{32}\rho\ell^4 + \pi\rho\ell^4\right)}_{\text{corona}} = \frac{69}{8}m\ell^2.$$

Essendo il centro di massa fisso e nell'origine, l'energia cinetica del corpo rigido in esame può essere scritta in termini di un contributo esclusivamente rotazionale. Indichiamo con $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\imath}_3$ la velocità angolare: allora

$$T = \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_O\boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{2}I_{\mathfrak{z}}\dot{\theta}^2 = \frac{69}{16}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

D Essendo tutte le forze in gioco conservative e i vincoli ideali, possiamo studiare i punti di equilibrio del sistema e la loro stabilità studiando il potenziale. In questo caso, essendo il centro di massa fisso e nell'origine, il potenziale gravitazionale è costante, e l'unico contributo non triviale è quello elastico, per cui

$$U(\theta) = -\frac{1}{2}k(\ell\cos\theta)^2 + \text{costante}.$$

I punti di equilibrio si individuano quindi facilmente derivando il potenziale

$$\partial_\theta U(\theta) = k\ell^2\sin\theta\cos\theta = k\ell^2\sin(2\theta) = 0$$

che fornisce quattro possibili soluzioni (a meno di periodicità), ovvero

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \pi, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Calcolando in questi quattro punti la derivata seconda

$$\partial_\theta^2 U(\theta) = 2k\ell^2\cos(2\theta)$$

si osserva che $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=0} = \partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\pi} = 2k\ell^2$, mentre $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\frac{3\pi}{4}} = -2k\ell^2$: di conseguenza, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono configurazioni di equilibrio instabile, le restanti di equilibrio stabile. Si noti che non ci sono configurazioni di confine.