# ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

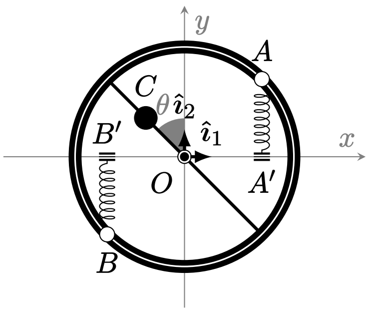
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

22 Marzo 2024
Appello straordinario per studenti fuori corso

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Un punteggio superiore a 30 corrisponde alla lode.

---

Sia dato un piano verticale con riferimento cartesiano inerziale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ come in figura. Un anello omogeneo di massa $m$ e raggio $2\ell$ è vincolato a ruotare senza attrito attorno al suo centro, coincidente con $O$, senza uscire dal piano. Il vincolo è realizzato tramite un'asta, di massa trascurabile, coincidente con un diametro dell'anello, e incernierata nel suo centro sull'origine del riferimento. Su tale asta si trova inoltre, a distanza $\ell$ dal centro, una massa pari a $2m$ (in posizione $C$ in figura). Infine, due punti $A$ e $B$ dell'anello, estremi del diametro ortogonale a $\overrightarrow{OC}$, sono collegati, tramite due molle ideali di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo trascurabile, all'asse $x$ in due punti rispettivamente indicati con $A'$ e $B'$: le molle sono vincolate all'asse per mezzo di due carrelli, in modo tale che i segmenti $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ si mantengano sempre perfettamente verticali.

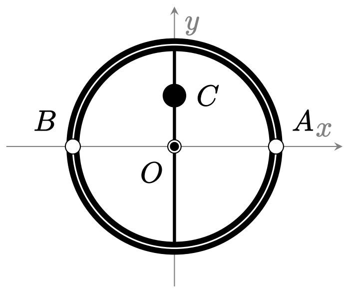



**A** Ricavare le coordinate del centro di massa del sistema in funzione di $\ell$ e dell'angolo $\theta$, indicato in figura, tra l'asse delle ordinate e $\overrightarrow{OC}$. Calcolare inoltre il momento d'inerzia $I_z$ del sistema rispetto all'asse $z$ ortogonale al piano e passante per $O$. [6 pt]

**B** Determinare le configurazioni ordinarie di equilibrio in funzione di $\eta := \frac{k\ell}{gm}$. Supponendo che $\eta = 1$, dire se la configurazione corrispondente a $\theta = 0$ è di equilibrio e, in caso, se si tratta di una configurazione di equilibrio stabile o meno. [12 pt]

**C** Determinare la reazione vincolare in $O$ in condizioni statiche e dinamiche. [6 pt]

**D** Assumendo $\theta = 0$ (ovvero nella configurazione rappresentata in basso), calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse $x$ e rispetto all'asse $y$. [6 pt].




**E** Spiegare perché il tensore d'inerzia del sistema rispetto ad $O$ è diagonale nella base ortonormale $\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{k}$, con $\hat{k} = \hat{\imath} \wedge \hat{\jmath}$, quando $\theta = 0$ [5 pt].

## Soluzione

**A** Il centro di massa $G_{\mathcal{A}}$ dell'anello $\mathcal{A}$ si trova nell'origine, $\overrightarrow{OG_{\mathcal{A}}} = \mathbf{0}$, per motivi di simmetria. Osservando che la posizione $C$ è data da

$$\overrightarrow{OC} = -\ell \sin\theta \hat{\imath}_1 + \ell \cos\theta \hat{\imath}_2$$

con $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$ versore dell'asse delle ascisse e delle ordinate rispettivamente, abbiamo che il centro di massa $G$ è individuato da

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_{\mathcal{A}}} + 2m\overrightarrow{OC}}{3m} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Il momento d'inerzia si può calcolare sommando il momento d'inerzia dell'anello $I_{\mathcal{A}} = m(2\ell)^2$ rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per l'origine a quello della massa puntiforme rispetto allo stesso asse, come

$$I_z = 4m\ell^2 + 2m\ell^2 = 6m\ell^2.$$

**B** Osservando che le posizioni dei punti $A$ e $B$ si scrivono come

$$\overrightarrow{OA} = 2\ell\cos\theta\hat{\imath}_1 + 2\ell\sin\theta\hat{\imath}_2 = -\overrightarrow{OB}$$

abbiamo che, indicando $(x_\bullet, y_\bullet)^\intercal$ le coordinate dei vari punti, l'energia potenziale è

$$V = 3mgy_G + \frac{1}{2}ky_A^2 + \frac{1}{2}ky_B^2 = 2mg\ell\cos\theta + 4k\ell^2\sin^2\theta,$$

per cui i punti di equilibrio si trovano ponendo

$$\partial_\theta V = -2mg\ell\sin\theta + 8k\ell^2\cos\theta\sin\theta = -2mg\ell\sin\theta\,(1 - 4\eta\cos\theta) = 0,$$

che è risolto per $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, oppure per $1 - 4\eta\cos\theta = 0$, equazione che ammette soluzione se e solo se $\eta \geq \frac{1}{4}$: in tal caso

$$\theta = \pm\arccos\frac{1}{4\eta} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{se } \eta \geq \frac{1}{4}.$$

Calcolando la derivata seconda,

$$\partial_\theta^2 V = 2mg\ell\left(-\cos\theta + 4\eta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right) = 2mgl\left(4\eta\cos 2\theta - \cos\theta\right).$$

Per $\theta = 0$ questa quantità è uguale a $\partial_\theta^2 V|_{\theta=0} = 2mg\ell(4\eta - 1)$, per cui si ha stabilità solo se $\eta > \frac{1}{4}$: nelle condizioni richieste la configurazione è dunque stabile.

**C** Dalla prima equazione cardinale della statica, abbiamo che la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}_O$ in $O$ deve essere opposta a tutte le forze attive, ovvero

$$\mathbf{\Phi}_O = -3m\boldsymbol{g} - k\overrightarrow{AA'} - k\overrightarrow{BB'} = 3mg\hat{\jmath}.$$

dove $\boldsymbol{g} = -g\hat{\jmath}$ è l'accelerazione di gravità e abbiamo usato il fatto che $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BB'}$. Per calcolare la reazione vincolare in condizione dinamiche, scriviamo

$$\mathbf{\Phi}_O + 3m\boldsymbol{g} + k\overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{BB'} = \mathbf{\Phi}_O - 3mg\hat{\jmath} = 3m\ddot{\boldsymbol{p}}_G \Rightarrow$$

$$\mathbf{\Phi}_O = 2m\ell(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta)\hat{\imath} + m(3g - 2\ell\ddot{\theta}\sin\theta - 2\ell\dot{\theta}^2\cos\theta)\hat{\jmath}.$$

**D** Il momento di un anello omogeneo di raggio $R$ e massa $m$ rispetto ad un asse baricentrale che giace nel piano dell'anello stesso è $\frac{1}{2}mR^2$, ovvero nel nostro caso $2m\ell^2$. Possiamo calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $x$ e all'asse $y$ sommando a questa quantità il momento della massa puntiforme nei due casi,

$$I_x = 2m\ell^2 + 2m\ell^2 = 4m\ell^2, \qquad I_y = 2m\ell^2,$$

dato che nel primo caso la massa puntiforme dista $\ell$ dall'asse e nel secondo caso dista 0.

**E** La matrice d'inerzia rispetto all'origine $\mathbf{I}_O$ è diagonale nella base ortonormale data, poiché i prodotti d'inerzia $I_{xy}$, $I_{yz}$ e $I_{xz}$ sono tutti nulli. In particolare,

- $I_{yz} = I_{xz} = 0$, essendo il sistema nel piano, ovvero sia i punti del disco che le due masse puntiformi hanno coordinata nulla lungo $z$;

- $I_{xy} = 0$ essendo la coordinata $x$ della massa puntiforme in $C$ nulla, mentre il contributo dovuto all'anello è nullo per ragioni di simmetria.

.