

## ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

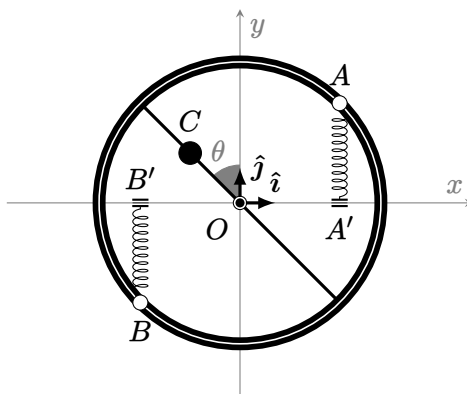
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

22 Marzo 2024

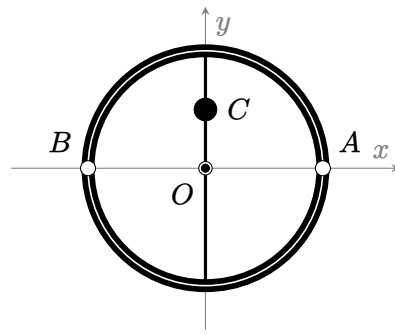
Appello straordinario per studenti fuori corso

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Un punteggio superiore a 30 corrisponde alla lode.

Sia dato un piano verticale con riferimento cartesiano inerziale  $O\hat{i}\hat{j}$  come in figura. Un anello omogeneo di massa  $m$  e raggio  $2\ell$  è vincolato a ruotare senza attrito attorno al suo centro, coincidente con  $O$ , senza uscire dal piano. Il vincolo è realizzato tramite un'asta, di massa trascurabile, coincidente con un diametro dell'anello, e incernierata nel suo centro sull'origine del riferimento. Su tale asta si trova inoltre, a distanza  $\ell$  dal centro, una massa pari a  $2m$  (in posizione  $C$  in figura). Infine, due punti  $A$  e  $B$  dell'anello, estremi del diametro ortogonale a  $\overrightarrow{OC}$ , sono collegati, tramite due molle ideali di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo trascurabile, all'asse  $x$  in due punti rispettivamente indicati con  $A'$  e  $B'$ : le molle sono vincolate all'asse per mezzo di due carrelli, in modo tale che i segmenti  $AA'$  e  $BB'$  si mantengano sempre perfettamente verticali.



- A Ricavare le coordinate del centro di massa del sistema in funzione di  $\ell$  e dell'angolo  $\theta$ , indicato in figura, tra l'asse delle ordinate e  $\overrightarrow{OC}$ . Calcolare inoltre il momento d'inerzia  $I_z$  del sistema rispetto all'asse  $z$  ortogonale al piano e passante per  $O$ . [6 pt]
- B Determinare le configurazioni ordinarie di equilibrio in funzione di  $\eta := \frac{k\ell}{gm}$ . Supponendo che  $\eta = 1$ , dire se la configurazione corrispondente a  $\theta = 0$  è di equilibrio e, in caso, se si tratta di una configurazione di equilibrio stabile o meno. [12 pt]
- C Determinare la reazione vincolare in  $O$  in condizioni statiche e dinamiche. [6 pt]
- D Assumendo  $\theta = 0$  (ovvero nella configurazione rappresentata in basso), calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse  $x$  e rispetto all'asse  $y$ . [6 pt].



**E** Spiegare perché il tensore d'inerzia del sistema rispetto ad  $O$  è diagonale nella base ortonormale  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ , con  $\hat{k} = \hat{i} \wedge \hat{j}$ , quando  $\theta = 0$  [5 pt].

# SOLUZIONE

- A** Il centro di massa dell'anello  $\mathcal{A}$  si trova nell'origine,  $\mathbf{p}_A = \mathbf{0}$ , per motivi di simmetria. Osservando che la posizione  $C$  è data da

$$\mathbf{p}_C = \begin{pmatrix} -\ell \sin \theta \\ \ell \cos \theta \end{pmatrix}$$

abbiamo che il centro di massa ha posizione

$$\mathbf{p}_G = \frac{m\mathbf{p}_A + 2m\mathbf{p}_C}{3m} = \frac{2}{3}\mathbf{p}_C.$$

Il momento d'inerzia si può calcolare sommando il momento d'inerzia dell'anello  $I_A = m(2\ell)^2$  rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per l'origine a quello della massa puntiforme rispetto allo stesso asse, come

$$I_z = 4m\ell^2 + 2m\ell^2 = 6m\ell^2.$$

- B** Osservando che le posizioni dei punti  $A$  e  $B$  si scrivono come

$$\mathbf{p}_A = 2\ell \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = -\mathbf{p}_B$$

abbiamo che, indicando  $\mathbf{p}_\bullet = (x_\bullet, y_\bullet)^\top$  le posizioni dei vari punti, l'energia potenziale<sup>1</sup> è

$$V = 3mgy_G + \frac{1}{2}ky_A^2 + \frac{1}{2}ky_B^2 = 2mg\ell \cos \theta + 4k\ell^2 \sin^2 \theta,$$

per cui i punti di equilibrio si trovano ponendo

$$\partial_\theta V = -2mg\ell \sin \theta + 8k\ell^2 \cos \theta \sin \theta = -2mg\ell \sin \theta (1 - 4\eta \cos \theta) = 0,$$

che è risolto per  $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , oppure per  $1 - 4\eta \cos \theta = 0$ , equazione che ammette soluzione se e solo se  $\eta \geq \frac{1}{4}$ : in tal caso

$$\theta = \pm \arccos \frac{1}{4\eta} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } \eta \geq \frac{1}{4}.$$

Calcolando la derivata seconda,

$$\partial_\theta^2 V = 2mg\ell (-\cos \theta + 4\eta(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) = 2mg\ell (4\eta \cos 2\theta - \cos \theta).$$

Per  $\theta = 0$  questa quantità è uguale a  $\partial_\theta^2 V|_{\theta=0} = 2mg\ell(4\eta - 1)$ , per cui si ha stabilità solo se  $\eta > \frac{1}{4}$ : nelle condizioni richieste la configurazione è dunque stabile.

- C** Dalla prima equazione cardinale della statica, abbiamo che la reazione vincolare  $\Phi_O$  in  $O$  deve essere opposta a tutte le forze attive, ovvero

$$\Phi_O = -3mg - \overrightarrow{kAA'} - \overrightarrow{kBB'} = 3mg\hat{j}.$$

dove  $\mathbf{g} = -g\hat{j}$  è l'accelerazione di gravità e abbiamo usato il fatto che  $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BB'}$ . Per calcolare la reazione vincolare in condizione dinamiche, scriviamo

$$\begin{aligned} \Phi_O + 3mg + \overrightarrow{kAA'} + \overrightarrow{kBB'} &= \Phi_O - 3mg\hat{j} = 3m\ddot{\mathbf{p}}_G \Rightarrow \\ \Phi_O &= 2m\ell(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta)\hat{i} + m(3g - 2\ell\dot{\theta}\ddot{\theta} \sin \theta - 2\ell\dot{\theta}^2 \cos \theta)\hat{j}. \end{aligned}$$

- D** Il momento di un anello omogeneo di raggio  $R$  e massa  $m$  rispetto ad un asse baricentrale che giace nel piano dell'anello stesso è  $\frac{1}{2}mR^2$ , ovvero nel nostro caso  $2m\ell^2$ . Possiamo calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse  $x$  e all'asse  $y$  sommando a questa quantità il momento della massa puntiforme nei due casi,

$$I_x = 2m\ell^2 + 2m\ell^2 = 4m\ell^2, \quad I_y = 2m\ell^2,$$

dato che nel primo caso la massa puntiforme dista  $\ell$  dall'asse e nel secondo caso dista 0.

- E** La matrice d'inerzia rispetto all'origine  $\mathbf{I}_O$  è diagonale nella base ortonormale data, poiché i prodotti d'inerzia  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  e  $I_{xz}$  sono tutti nulli. In particolare,

<sup>1</sup>Si può naturalmente utilizzare in alternativa il potenziale  $U = -V$  e cercare i suoi punti di massimo.

- $I_{yz} = I_{xz} = 0$ , essendo il sistema nel piano, ovvero sia i punti del disco che le due masse puntiformi hanno coordinata nulla lungo  $z$ ;
- $I_{xy} = 0$  essendo la coordinata  $x$  della massa puntiforme in  $C$  nulla, mentre il contributo dovuto all'anello è nullo per ragioni di simmetria.

.