

INTRODUZIONE ALLA  
**MECCANICA RAZIONALE**  
PER IL CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
— 21 MAGGIO 2025 —

GABRIELE SICURO



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



# **Indice**

Capitolo 1. Cinematica	1
1. Preambolo: richiami sui vettori	1
2. Quantità fondamentali della cinematica	6
3. Cambi di riferimento: cinematica relativa	9
4. Cinematica del corpo rigido	17
Capitolo 2. Leggi della meccanica	31
1. Massa e quantità di moto	31
2. Forze e lavoro	33
3. Principi della meccanica	42
4. Vincoli e reazioni vincolari	52
Capitolo 3. Elementi di statica	61
1. Criteri di equilibrio	61
2. Teorema dei lavori virtuali e ricerca dei punti di equilibrio	66
3. Stabilità	73
Capitolo 4. Elementi di dinamica	75
1. Energia cinetica	75
2. Dinamica del punto materiale	87
3. Dinamica dei sistemi	95



## CAPITOLO 1

# Cinematica

### 1. Preambolo: richiami sui vettori

Per introdurre il concetto di *spazio* e *tempo* così come studiati dalla meccanica classica, è utile introdurre alcuni concetti preliminari e fissare della notazione.

**1.1. Spazio vettoriale.** Iniziamo richiamando la seguente

**DEFINIZIONE 1.1** (Spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ). Uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  è un insieme non vuoto  $\mathbb{V}$  tale per cui esistono due operazioni binarie, ovvero  $+$ :  $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , detta *somma*, e  $\cdot$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , detta *prodotto per uno scalare*, con le seguenti proprietà:

- la somma  $+$  è commutativa e associativa; esiste un elemento neutro  $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ , ovvero se  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ , allora  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ ; esiste l'elemento opposto, ovvero se  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$  esiste  $-\mathbf{v} \in \mathbb{V}$  tale per cui  $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ;
- il prodotto  $\cdot$  è distributivo sulla somma di vettori (ovvero  $a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{u}$  per  $a \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{V}$ ) e sulla somma di scalari (ovvero  $(a+b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$  per  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ ).

Diremo che  $\mathbb{V} \equiv \mathbb{V}_d$  è  $d$ -dimensionale se esiste in esso una base  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^d \subset \mathbb{V}_d$  di  $d$  vettori linearmente indipendenti, tali cioè da soddisfare,

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_d \mathbf{v}_d = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0,$$

di modo che ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_d$  si possa scrivere in maniera univoca per mezzo di una combinazione lineare a coefficienti in  $\mathbb{R}$  degli elementi di tale base, ovvero

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^d v_k \hat{\mathbf{i}}_k.$$

La collezione ordinata  $\mathbf{v} = (v_k)_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d$  fornisce le *componenti* di  $\mathbf{v}$  secondo la base indicata. La rappresentazione di un vettore secondo le sue componenti non è univoca: scegliendo una diversa base  $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^d$ , si possono ottenere una diversa (unica, a base fissata) combinazione lineare per lo stesso vettore,

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^d v_k^* \hat{\mathbf{e}}_k$$

con un diverso set di coefficienti  $v^*$ . La relazione tra una rappresentazione e l'altra può essere derivata facilmente se si estrae la *matrice di cambio di base*  $\Lambda$ , tale per cui

$$\hat{\mathbf{i}}_k = \sum_{j=1}^d \Lambda_{kj} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad k = 1, \dots, d,$$

che permette di scrivere

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^\top \boldsymbol{\Lambda} \Leftrightarrow v_k^* = \sum_{j=1}^d v_j \Lambda_{jk}.$$

Si può mostrare che la matrice  $\boldsymbol{\Lambda}$  è invertibile e la sua inversa  $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$  permetterà di esprimere la base  $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^d$  in termini della base  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^d$ .

**1.2. Prodotto scalare.** Uno spazio vettoriale finito-dimensionale può essere dotato di una particolare operazione, detta *prodotto scalare* e definita come segue.

**DEFINIZIONE 1.2** (Prodotto scalare). Si dice prodotto scalare euclideo su  $\mathbb{V}_d$  una applicazione

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{V}_d \times \mathbb{V}_d \rightarrow \mathbb{R}$$

che è simmetrica (ovvero  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_d, \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ), bilineare (ovvero  $\langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$  per  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_d$ ) e definita positiva (ovvero  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_d$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ).

Per mezzo del prodotto scalare introdotto si può definire una *norma* ad esso associata. Una *norma* è una applicazione che soddisfa la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.3** (Norma). Una norma su uno spazio vettoriale reale  $\mathbb{V}_d$  è una applicazione  $\psi: \mathbb{V}_d \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\psi(\alpha \mathbf{v}) = |\alpha| \psi(\mathbf{v})$ ,  $\psi(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \leq \psi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{V}_d$ ,  $\psi(\mathbf{v}) \geq 0$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

È facile verificare che l'applicazione  $\|\bullet\|: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definita come

$$\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

è effettivamente una norma. Vale la seguente

**PROPOSIZIONE 1.1** (Disuguaglianza di Schwartz). *Dati due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  in uno spazio  $\mathbb{V}_d$  dotato di prodotto scalare, allora*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\|$$

dove

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

La disuguaglianza di Schwartz comporta anche l'esistenza di un angolo  $\theta$  tale che

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta$$

che si dice essere l'angolo tra i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . In particolare due vettori si dicono *ortogonal* se  $\cos \theta = 0$ , mentre si dicono *parallel* se  $|\cos \theta| = 1$ ; in quest'ultimo caso essite un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ .

Una base  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^d$  si dice *ortonormale* se per ogni coppia di valori  $j, k$  vale

$$\langle \hat{\mathbf{i}}_j, \hat{\mathbf{i}}_k \rangle = \delta_{jk}$$

dove  $\delta_{jk}$  è il simbolo di Kronecker, pari a 1 se  $j = k$ , e a zero diversamente. Come conseguenza, date due basi ortonormali  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^d$  e  $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^d$ , la matrice di cambio di base  $\boldsymbol{\Lambda}$  deve soddisfare la relazione

$$\boldsymbol{\Lambda}^\top \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{I}$$

ovvero deve essere una matrice ortogonale, avente perciò  $\det \Lambda = \pm 1$ . Questo comporta che

$$\mathbf{v} = \sum_k v_k \hat{\mathbf{i}}_k = \sum_k v_k^* \hat{\mathbf{e}}_k \text{ allora } v_k = \sum_j v_j^* \Lambda_{jk} \quad v_k^* = \sum_j v_j \Lambda_{kj},$$

essendo  $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$ . L'uso di una base ortonormale permette di calcolare prodotti scalari e norme in maniera piuttosto semplice. Se  $\mathbf{v} = \sum_k v_k \hat{\mathbf{i}}_k$  e  $\mathbf{u} = \sum_k u_k \hat{\mathbf{i}}_k$ , allora

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum_k v_k u_k, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_i v_i^2}.$$

È importante osservare che prodotto scalare e norma sono quantità che *non dipendono* dalla base scelta per rappresentare i vettori.

**1.3. Prodotto vettoriale.** Se  $\mathbb{V}_3$  è uno spazio vettoriale con prodotto scalare su  $\mathbb{R}$ , è possibile definire un'ulteriore operazione tra due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$ . Supponiamo di avere una base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$  di modo che  $\mathbf{v} = \sum_k v_k \hat{\mathbf{i}}_k$  e  $\mathbf{u} = \sum_k u_k \hat{\mathbf{i}}_k$ . Considerando la sequenza  $(\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3)$  come *ordinata* (ovvero fissando l'ordine dei tre vettori della base), diamo la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.4 (Prodotto vettoriale).** Il prodotto vettoriale  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  è definito come

$$(1.1) \quad \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2) \hat{\mathbf{i}}_1 + (v_3 u_1 - v_1 u_3) \hat{\mathbf{i}}_2 + (v_1 u_2 - v_2 u_1) \hat{\mathbf{i}}_3.$$

La formula data nella definizione può essere ricordata nel seguente modo. Consideriamo la matrice

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 & \hat{\mathbf{i}}_2 & \hat{\mathbf{i}}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$

Questa è, naturalmente, una matrice molto bizzarra i cui elementi sono in parte scalari e in parte vettori. Tuttavia quella che stiamo per dare è una regola *mnemonica*: possiamo *formalmente* scrivere che

$$(1.3) \quad \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 & \hat{\mathbf{i}}_2 & \hat{\mathbf{i}}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_3.$$

Dati tre vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$  e uno scalare  $c \in \mathbb{R}$ , valgono le seguenti proprietà:

- (1)  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ ;
- (2)  $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ;
- (3)  $c(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = (cv) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge (cu)$ ;
- (4)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \rangle = 0$ ;
- (5)  $\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2$ ;
- (6)  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$  se e solo se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  sono paralleli;
- (7) Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  sono linearmente indipendenti, ogni vettore ortogonale sia a  $\mathbf{v}$  che a  $\mathbf{u}$  è parallelo a  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ . Inoltre,  $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}\}$  è una base di  $\mathbb{V}_3$  concorde con la base ortonormale scelta.

La proprietà (5) in particolare può essere semplificata utilizzando l'angolo  $\theta$  definito sopra tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Infatti

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 \cos^2 \theta = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 \sin^2 \theta$$

ovvero la norma del prodotto vettoriale è

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| |\sin \theta|.$$

Inoltre sappiamo, dalla proprietà (4), che  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  è ortogonale sia a  $\mathbf{v}$  che a  $\mathbf{u}$ . È facile vedere (per esempio, usando la regola mnemonica sopra) che se consideriamo precisamente la base ortonormale, allora

$$\hat{\mathbf{i}}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 & \hat{\mathbf{i}}_2 & \hat{\mathbf{i}}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}_3$$

Possiamo scrivere una espressione simile per ogni altra coppia di vettori di base e in particolare vale la seguente relazione:

$$\hat{\mathbf{i}}_i \wedge \hat{\mathbf{i}}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{i}}_k$$

dove il simbolo  $\varepsilon_{ijk}$  è detto *di Levi–Civita* e vale

$$(1.4) \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \in \{(2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)\} \\ 0 & \text{diversamente.} \end{cases}$$

Il simbolo di Levi–Civita permette di scrivere in forma compatta i prodotti vettoriali tra due generici vettori come

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} v_i u_j \hat{\mathbf{i}}_k.$$

Il simbolo di Levi–Civita ha diverse proprietà. Per esempio,  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$  e

$$\sum_i \varepsilon_{iab} \varepsilon_{ijk} = \delta_{aj} \delta_{bk} - \delta_{ak} \delta_{bj}.$$

Il simbolo di Levi–Civita è molto utile per operare, in generale, coi determinanti. Infatti, data una matrice  $\mathbf{A}$  si verifica che

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{ia} A_{jb} A_{kc} = \varepsilon_{abc} \det \mathbf{A}.$$

Quest'ultima proprietà è utile per studiare come il prodotto vettoriale si comporta cambiando base. Supponiamo di avere una diversa base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^3$  di modo che  $\hat{\mathbf{i}}_k = \sum_j \Lambda_{kj} \hat{\mathbf{e}}_j$ . Siano detti  $\mathbf{u} = \sum_k u_k \hat{\mathbf{i}}_k = \sum_k u_k^* \hat{\mathbf{e}}_k$  e  $\mathbf{v} = \sum_k v_k \hat{\mathbf{i}}_k = \sum_k v_k^* \hat{\mathbf{e}}_k$ . Sappiamo che deve valere

$$v_k = \sum_{a=1}^3 v_j^* \Lambda_{kj}, \quad u_k = \sum_{a=1}^3 u_j^* \Lambda_{kj}, \quad u = 1, 2, 3.$$

Abbiamo quindi

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} v_i u_j \hat{\mathbf{i}}_k = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} v_a^* u_b^* \Lambda_{ia} \Lambda_{jb} \Lambda_{kc} \hat{\mathbf{e}}_c = \det \mathbf{\Lambda} \sum_{abc} \varepsilon_{abc} v_a^* u_b^* \hat{\mathbf{e}}_c.$$

Abbiamo qui usato  $\sum_{ijk} \Lambda_{ia} \Lambda_{jb} \Lambda_{kc} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{abc} \det \Lambda$ . Questo mostra che il prodotto vettoriale non dipende dalla scelta della base a meno di un segno. Si definiscono così due classi di equivalenza nell'insieme delle basi di  $\mathbb{V}_3$ , di modo che un elemento di una classe sia mappabile in ogni altro elemento della sua stessa classe da una matrice di cambio di base avente  $\det \Lambda = 1$ , e viceversa viene mappato in un elemento dell'altra classe da una matrice di cambio di base con  $\det \Lambda = -1$ . Ciascuna delle due classi è associata ad un *orientamento* e la definizione di prodotto vettoriale è ben posta se ristretta ad una classe. La scelta di quale classe usare è arbitraria: si adotta tipicamente la cosiddetta regola della mano destra, che consiste nel fissare una base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$  in modo che, disposti il pollice, il medio e l'indice della mano sinistra in tre direzioni ortogonali, il vettore  $\hat{\mathbf{i}}_1$  sia diretto secondo il pollice, il vettore  $\hat{\mathbf{i}}_2$  sia diretto secondo il indice ed il vettore  $\hat{\mathbf{i}}_3$  secondo il medio (a meno di una permutazione ciclica). Ogni altra base ottenuta da una base così orientata per mezzo di una matrice  $\Lambda$  con  $\det \Lambda = 1$  si dirà concorde ad essa e *destogira*.

Un'utile identità riguardante il prodotto vettoriale è la seguente. Siano  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_3$ . Allora

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \left( \sum_r a_r \hat{\mathbf{i}}_r \right) \wedge \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} b_i c_j \hat{\mathbf{i}}_k = \sum_{ijrkl} \varepsilon_{rkl} \varepsilon_{ijk} a_r b_i c_j \hat{\mathbf{i}}_l \\ &= \sum_{ijrl} (\delta_{li} \delta_{rj} - \delta_{lj} \delta_{ri}) a_r b_i c_j \hat{\mathbf{i}}_l = \sum_{rl} (a_r b_l c_r - a_r b_r c_l) \hat{\mathbf{i}}_l = \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\sum_k \varepsilon_{rkl} \varepsilon_{ijk} = \sum_k \varepsilon_{klr} \varepsilon_{kij} = \delta_{li} \delta_{rj} - \delta_{lj} \delta_{ri}.$$

Si noti che  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$  in generale.

Avendo introdotto sia il prodotto scalare che il prodotto vettoriale, possiamo considerare espressioni in cui *entrambi* questi prodotti appaiono, ovvero espressioni del tipo

$$\langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

per  $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$ . Questa quantità può essere calcolata direttamente, per esempio usando l'espressione appena ottenuta con il simbolo di Levi-Civita. Se  $\mathbf{w} = \sum_k w_k \hat{\mathbf{i}}_k$ , allora, essendo  $\langle \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \delta_{ij}$ ,

$$\langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \left\langle \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{i}}_i v_j u_k, \sum_r w_r \hat{\mathbf{i}}_r \right\rangle = \sum_{ijkr} \varepsilon_{ijk} w_r v_j u_k \langle \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{i}}_r \rangle = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} w_i v_j u_k = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

L'espressione in termini di un determinante implica una utile identità, ovvero

$$(1.6) \quad \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \rangle.$$

Sempre l'espressione in termini del determinante ci indica che se  $\langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$ , allora  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  devono essere linearmente dipendenti, ovvero complanari.

**1.4. Spazio affine euclideo.** Sia  $\mathbb{V}_d$  uno spazio vettoriale  $d$ -dimensionale reale munito di prodotto scalare. Un insieme  $\mathbb{E}^d$  è uno *spazio affine euclideo* di dimensione  $d$  se esiste una applicazione  $\overrightarrow{\bullet\bullet}: \mathbb{E}^d \times \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{V}_d$  che associa ad ogni coppia di elementi  $(P, Q)$  di  $\mathbb{E}^d$ , detti *punti*, un vettore  $\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{V}_d$ , detto *segmento orientato da P a Q*. Tale applicazione deve soddisfare una serie di proprietà: deve essere tale che  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ ; per ogni  $Q$  in  $\mathbb{E}^d$  e ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_d$ , deve

esistere un unico  $P \in \mathbb{E}^d$  tale che  $\overrightarrow{QP} = \mathbf{v}$ ; deve valere la relazione di Chasles, ovvero per ogni terna  $P, Q, R \in \mathbb{E}^d$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

La struttura di  $\mathbb{V}_d$  induce automaticamente una metrica su  $\mathbb{E}^d$ . In particolare possiamo definire la distanza tra  $P$  e  $Q$  come

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Una *retta* in  $\mathbb{E}^d$  passante per  $P$  e di direzione  $\mathbf{v}$  è l'insieme

$$\mathcal{R} := \{Q \in \mathbb{E}^d : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } \overrightarrow{PQ} = \lambda \mathbf{v}\}.$$

Analogamente un piano generato da  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e passante per  $P$  è definito come

$$\Pi := \{Q \in \mathbb{E}^d : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tale che } \overrightarrow{PQ} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{u}\}.$$

Se fissiamo un punto  $O \in \mathbb{E}^d$ , allora possiamo associare univocamente

$$P \mapsto \mathbf{x}_P = \overrightarrow{OP}.$$

Se inoltre è data una base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^d$  in  $\mathbb{V}_d$ , possiamo specificare le *coordinate*  $\mathbf{x}_P = (x_k)_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d$  di  $P$  secondo il *riferimento ortonormale*  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\dots\hat{\mathbf{i}}_d$  date dalle componenti di  $\mathbf{x}_P$  secondo la base, ovvero

$$P \mapsto \mathbf{x}_P = \sum_k x_k \hat{\mathbf{i}}_k = \sum_k \langle \hat{\mathbf{i}}_k, \mathbf{x} \rangle \hat{\mathbf{i}}_k.$$

## 2. Quantità fondamentali della cinematica

Consideriamo lo spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}^3$ . In questo spazio si introduce il concetto primitivo di *punto materiale* come di un corpo di dimensioni trascurabili identificato, per  $t \in [t_0, t_1]$ , con un punto dello spazio euclideo  $P(t) \in \mathbb{E}^3$ . Se ora scegliamo un *riferimento ortonormale*  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , il punto  $P(t)$  è associato ad un vettore

$$\mathbf{x}_P(t) = x_1(t)\hat{\mathbf{i}}_1 + x_2(t)\hat{\mathbf{i}}_2 + x_3(t)\hat{\mathbf{i}}_3$$

che assumiamo abbia componenti rispetto alla base data continue e due volte differenziabili rispetto a  $t$ . L'insieme dei punti  $P(t)$  occupati al variare di  $t$  dal punto materiale identifica una *curva*, detta *traiettoria* del moto. A tale traiettoria possiamo associare un vettore *velocità*, definito come la derivata prima di  $\mathbf{x}_P(t)$  rispetto a  $t$ ,

$$\mathbf{v}_P(t) := \dot{\mathbf{x}}_P(t) = \dot{x}_1(t)\hat{\mathbf{i}}_1 + \dot{x}_2(t)\hat{\mathbf{i}}_2 + \dot{x}_3(t)\hat{\mathbf{i}}_3.$$

Se  $\mathbf{v}_P \neq \mathbf{0}$  per ogni valore di  $t$  considerato, la curva si dice *regolare*. Possiamo introdurre anche il vettore *accelerazione*

$$\mathbf{a}_P(t) := \ddot{\mathbf{x}}_P(t) = \ddot{x}_1(t)\hat{\mathbf{i}}_1 + \ddot{x}_2(t)\hat{\mathbf{i}}_2 + \ddot{x}_3(t)\hat{\mathbf{i}}_3.$$

Nel caso di una curva regolare, è possibile e utile introdurre una quantità ausiliaria, detta *ascissa curvilinea* o anche *legge oraria*. Si tratta di una funzione  $s: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  definita come

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{x}}_P(\tau)\| d\tau.$$

Essa quantifica la lunghezza della traiettoria percorsa dal tempo iniziale  $t_0$  al tempo  $t$ . In particolare,  $\ell := s(t_1)$  è la lunghezza della curva percorsa durante tutto l'intervallo. In ogni sottointervallo di  $[t_0, t_1]$  in cui  $\dot{\mathbf{x}}_P \neq \mathbf{0}$ , la funzione  $s$  è invertibile essendo strettamente monotona crescente: esiste cioè una funzione  $t = t(s)$  che fornisce il tempo al quale il punto ha percorso una lunghezza  $s$  lungo la curva. Possiamo così introdurre una diversa parametrizzazione, detta *intrinseca*

$$\gamma(s) \equiv \mathbf{x}_P(t(s)),$$

che informa sulla traiettoria senza specificare come questa viene percorsa, ovvero senza riferimento al tempo: in altre parole, il vettore  $\gamma(s)$  percorre, al variare di  $s \in [0, \ell]$ , la stessa traiettoria di descritta da  $\mathbf{x}_P(t)$  al variare di  $t \in [t_0, t_1]$ , ma non contiene alcuna informazione cinematica, ovvero riguardo la maniera in cui la curva stessa viene percorsa da  $P$ . Se immaginiamo  $s$  come un “tempo proprio” della curva, possiamo calcolare la velocità e l’accelerazione associate alla parametrizzazione intrinseca come

$$\hat{\mathbf{v}}_\gamma(s) := \frac{d\gamma}{ds}, \quad \mathbf{a}_\gamma(s) := \frac{d^2\gamma}{ds^2}.$$

È interessante notare che  $\hat{\mathbf{v}}_\gamma$  è un *versore*, ovvero  $\|\hat{\mathbf{v}}_\gamma\|^2 = 1$ . Infatti basta osservare che, essendo  $\gamma(s) = \mathbf{x}(t(s))$ , allora

$$\hat{\mathbf{v}}_\gamma(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\mathbf{x}_P}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{v}_P(t(s))}{\|\mathbf{v}_P(t(s))\|}.$$

La parametrizzazione intrinseca corrisponde cioè al moto di un punto che percorre la curva a velocità unitaria. Da quanto detto discende anche che

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d\|\hat{\mathbf{v}}_\gamma(s)\|^2}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d\langle \hat{\mathbf{v}}_\gamma(s), \hat{\mathbf{v}}_\gamma(s) \rangle}{ds} = \langle \hat{\mathbf{v}}_\gamma(s), \mathbf{a}_\gamma(s) \rangle$$

ovvero  $\hat{\mathbf{v}}_\gamma$  e  $\mathbf{a}_\gamma$  sono ortogonali: essendo  $\hat{\mathbf{v}}_\gamma$  un versore tangente alla curva,  $\mathbf{a}_\gamma$  è un vettore ortogonale ad essa. Il modulo di  $\mathbf{a}_\gamma$  ha un ruolo geometrico importante in quanto definisce la *curvatura* della curva: si scrive infatti che il *raggio di curvatura*  $\rho$  nel punto di ascissa curvilinea  $s$  e la corrispondente *curvatura*  $\kappa$  sono dati da

$$\rho(s) := \frac{1}{\|\mathbf{a}_\gamma(s)\|} \quad \kappa(s) := \frac{1}{\rho(s)}.$$

Si osservi che nel caso di un cui la traiettoria sia rettilinea,  $\mathbf{a}_\gamma = \mathbf{0}$ , che è come dire che il raggio di curvatura è infinito. La denominazione “raggio di curvatura” non è casuale: in effetti, si può dimostrare che il raggio di curvatura in un certo punto è il raggio del *cerchio osculatore* della curva, ovvero del cerchio tangente alla curva in detto punto che meglio approssima la curva stessa. Chiamando

$$\hat{\mathbf{n}}_\gamma(s) = \rho(s)\mathbf{a}_\gamma(s)$$

il *versore* associato a  $\mathbf{a}_\gamma(s)$ , esso è detto *normale principale* della traiettoria.

Ad ascissa curvilinea  $s$  fissata, i versori  $\hat{\mathbf{v}}_\gamma$  e  $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$  individuano quindi due direzioni ortogonali speciali, una tangente alla curva e l’altra ortogonale ad essa. Insieme ad essi si può definire una terza direzione, detta *binormale* e data dal versore

$$\hat{\mathbf{b}}_\gamma := \hat{\mathbf{v}}_\gamma \wedge \hat{\mathbf{n}}_\gamma.$$

La terna  $(\hat{\mathbf{v}}_\gamma, \hat{\mathbf{n}}_\gamma, \hat{\mathbf{b}}_\gamma)$  è detta *terna intrinseca* ortonormale nella posizione della curva di ascissa curvilinea  $s$ . È un oggetto che dipende dalla sola geometria della curva, ed è possibile riscrivere

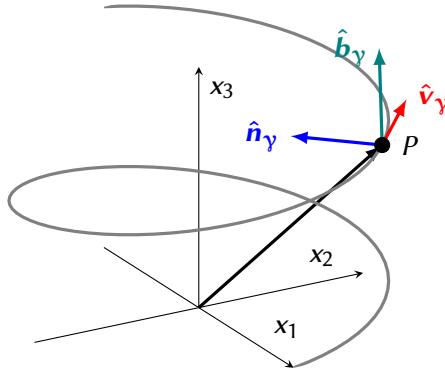


FIGURA 1. Particella che si muove lungo una traiettoria elicoideale, con rappresentazione della sua terna intrinseca in una certa posizione.

velocità e accelerazione di  $P$  in ciascun punto della traiettoria rispetto a questa terna. Basta infatti osservare che  $\mathbf{x}_P(t) = \gamma(s(t))$  per ottenere, derivando,

$$\mathbf{v}_P = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 x_j \hat{\mathbf{i}}_j = \dot{s} \sum_{j=1}^3 \frac{d\gamma_j}{ds} \hat{\mathbf{i}}_j = \dot{s} \hat{\mathbf{v}}_\gamma.$$

Si dice che il moto è *uniforme* se  $\dot{s}$  è costante. Derivando ancora una volta si ha

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \ddot{s} \hat{\mathbf{v}}_\gamma + \dot{s}^2 \mathbf{a}_\gamma = \ddot{s} \hat{\mathbf{v}}_\gamma + \frac{\dot{s}^2}{\rho(s)} \hat{\mathbf{n}}_\gamma.$$

Quest'ultima equazione mostra che l'accelerazione ha in generale una componente *parallela* alla traiettoria, nulla solo se  $\dot{s} = 0$ , e una componente *ortogonale*, tanto più rilevante (a parità di  $\dot{s}$ ) quanto più piccolo è il raggio di curvatura  $\rho$ . D'altra parte, né velocità né accelerazione hanno componenti lungo  $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ . Le decomposizioni sopra ancora una volta separano l'informazione puramente cinematica (contenuta in  $s$ ) da quella puramente geometrica (contenuta in  $\hat{\mathbf{v}}_\gamma$  e  $\hat{\mathbf{n}}_\gamma$ ) relativa alla traiettoria.

**Esempio 1.1** — Consideriamo un punto materiale  $P$  individuato dal vettore  $\mathbf{x}_P(t)$  secondo un riferimento ortonormale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  tale per cui

$$\mathbf{x}_P(t) = R \cos \omega t \hat{\mathbf{i}}_1 + R \sin \omega t \hat{\mathbf{i}}_2 + v_z t \hat{\mathbf{i}}_3, \quad t \in [0, T],$$

dove  $R, \omega, v_z, T$  sono tutte quantità positive. Un moto siffatto è rappresentato in Fig. 1. La velocità del punto ha coordinate date da

$$\mathbf{v}_P(t) = \dot{\mathbf{x}}_P(t) = -R\omega \sin \omega t \hat{\mathbf{i}}_1 + R\omega \cos \omega t \hat{\mathbf{i}}_2 + v_z \hat{\mathbf{i}}_3 \Rightarrow \|\dot{\mathbf{x}}_P(t)\| = \sqrt{R^2 \omega^2 + v_z^2} \equiv v,$$

per cui la lunghezza della traiettoria percorsa si trova immediatamente come

$$\ell = \int_0^T \|\dot{\mathbf{x}}_P(\tau)\| d\tau = \sqrt{R^2 \omega^2 + v_z^2} T = vT.$$

In particolare, possiamo introdurre l'ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\mathbf{x}}_P(\tau)\| d\tau = vt \Rightarrow t \equiv t(s) = \frac{s}{v}.$$

Stando così le cose, possiamo usare le formule precedenti per derivare la parametrizzazione intrinseca della curva

$$\gamma(s) = \mathbf{x}_P(t(s)) = R \cos \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_1 + R \sin \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_2 + \frac{v_z s}{v} \hat{\mathbf{i}}_3.$$

Da questa espressione possiamo calcolare le espressioni dei tre vettori della terna intrinseca. In particolare

$$\hat{\mathbf{v}}_\gamma = \frac{d\gamma}{ds} = -\frac{R\omega}{v} \sin \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{R\omega}{v} \cos \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_2 + v_z \hat{\mathbf{i}}_3,$$

e

$$\mathbf{a}_\gamma = \frac{d\hat{\mathbf{v}}_\gamma}{ds} = \frac{d^2\gamma}{ds^2} = -\frac{R\omega^2}{v^2} \cos \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_1 - \frac{R\omega^2}{v^2} \sin \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_2 - \frac{R\omega^2 v_z}{v^2} \hat{\mathbf{i}}_3$$

da cui possiamo estrarre il raggio di curvatura  $\rho$

$$\rho = \frac{1}{\|\mathbf{a}_\gamma\|} = \frac{v^2}{R\omega^2}.$$

Se  $v_z = 0$ , allora  $\rho = R$ : in effetti, in questo caso il punto si muove su una circonferenza di raggio  $R$ . Il secondo vettore della terna è quindi

$$\hat{\mathbf{n}}_P = \rho \mathbf{a}_\gamma = -\cos \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_2.$$

Il terzo elemento della terna,  $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ , si trova ricordando che  $\hat{\mathbf{b}}_\gamma := \hat{\mathbf{v}}_\gamma \wedge \hat{\mathbf{n}}_\gamma$ , per cui eseguendo il prodotto vettoriale esso ha coordinate

$$\hat{\mathbf{b}}_\gamma = v_z \sin \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_1 - v_z \cos \frac{\omega s}{v} \hat{\mathbf{i}}_2 + R\omega \hat{\mathbf{i}}_3.$$

### 3. Cambi di riferimento: cinematica relativa

Fissato un riferimento cartesiano, le relazioni tra punto dello spazio e vettore associato e tra vettore associato e sue coordinate sono biunivoche e, fintantoché non si esegue un cambio di riferimento, i tre oggetti possono essere considerati identici. Ciononostante, è talvolta utile considerare una base diversa, addirittura *mobile*. Un vettore nello spazio non sarà alterato da un cambio di base, ma le sue componenti secondo la nuova base saranno, naturalmente, diverse da quelle rispetto alla vecchia. Supponiamo quindi di disporre di un riferimento “fisso”  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  e di voler esprimere le quantità di interesse in un nuovo riferimento “mobile” rispetto al primo,  $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ , che assumiamo positivamente orientato, in cui  $O_*$  è un punto che evolve come il vettore  $\mathbf{x}_* = \overrightarrow{OO_*}$ , e ugualmente  $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sono versori che evolvono nel tempo rispetto al riferimento fisso<sup>1</sup>. La terna mobile  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  deve essere ortonormale in ogni istante di tempo: così, per esempio, se osserviamo l'evoluzione nell'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ , varrà

$$\hat{\mathbf{e}}_3(t) = \hat{\mathbf{e}}_1(t) \wedge \hat{\mathbf{e}}_2(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

La terna ortonormale  $\{\hat{\mathbf{e}}_i(t)\}_{i=1}^3$  e l'evoluzione  $\mathbf{x}_*(t)$  dell'origine sono sufficienti a riscrivere l'evoluzione temporale  $\mathbf{x}_P(t)$  di un punto  $P$  nel nuovo riferimento. Infatti, il vettore  $\mathbf{x}_P^*(t) := \mathbf{x}_P(t) -$

---

<sup>1</sup>In questa sezione, indicheremo con un  $\mathbf{u}_*$  una quantità *associata al riferimento mobile ma espressa relativamente al riferimento fisso*

$\mathbf{x}_*(t)$ , che individua il punto nel *nuovo* riferimento, ha componenti  $x_i^*(t) = \langle \mathbf{x}_P(t) - \mathbf{x}_*(t), \hat{\mathbf{e}}_i(t) \rangle$  rispetto alla nuova base, di modo che  $\mathbf{x}_P^*(t) = \sum_{i=1}^3 x_i^*(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t)$ , per cui possiamo scrivere

$$(1.7) \quad \mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}_*(t) + \mathbf{x}_P^*(t) = \mathbf{x}_*(t) + \sum_{i=1}^3 x_i^*(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t).$$

Come sappiamo dall'algebra lineare, a  $t$  fissato, è possibile individuare una matrice di cambio di base  $\mathbf{R}(t)$  che permette di passare dalla base fissa  $\{\hat{\mathbf{i}}_j\}_{j=1}^3$  alla base mobile  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ , scrivendo la nuova base in termini della vecchia,

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t) = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(t) \hat{\mathbf{i}}_j.$$

Questa matrice sarà *ortogonale*, ovvero  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_3$ : essa esegue una *rotazione rigida degli assi*, fornendo una terna cartesiana ortonormale a partire da una diversa terna cartesiana ortonormale senza agire sull'origine né sulla lunghezza dei vettori. In questo modo si ha

$$(1.8) \quad \mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}_*(t) + \sum_{i=1}^3 x_i^*(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t) = \mathbf{x}_*(t) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i^*(t) R_{ij}(t) \hat{\mathbf{i}}_j.$$

Vale la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 3.1.** Si dice che  $P$  evolve in maniera *solidale* col nuovo riferimento se in tale riferimento è individuato da un vettore  $\mathbf{x}_P^*$  tale che

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}_P^*(t), \hat{\mathbf{e}}_i(t) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

In altre parole, un punto che si muove in modo solidale con la terna mobile ha coordinate che *non* cambiano rispetto a questa terna.

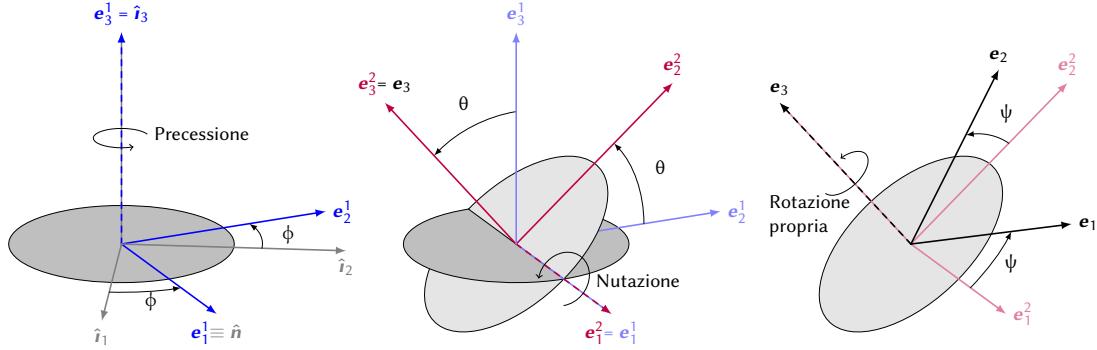
**3.1. Angoli di Eulero.** Come abbiamo detto, la matrice di cambio di base  $\mathbf{R}$  deve essere ortogonale, ovvero deve essere tale che  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_3$ , espressione che può essere scritta esplicitamente per ogni coppia  $(i, j)$  come

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Questa condizione fornisce sei equazioni distinte per nove quantità da fissare, ovvero gli elementi di  $\mathbf{R}$ . In altre parole, ogni matrice  $\mathbf{R}$  è caratterizzata da soli *tre* parametri arbitrari: ciò significa che per caratterizzare un cambio di riferimento ortonormale sono necessarie le tre coordinate di  $\mathbf{x}_*(t)$ , cioè della nuova origine rispetto al riferimento fisso, e tre parametri per fissare la matrice  $\mathbf{R}(t)$ , come si vede dall'Eq. (1.8). Per introdurre una opportuna parametrizzazione di  $\mathbf{R}$  utilizzeremo il metodo di Euler: questo metodo *non* è unico, e in effetti altre scelte di metodo sono possibili, ma è quello più diffusamente utilizzato per via di una serie di vantaggi legati a come la parametrizzazione di  $\mathbf{R}$  viene introdotta.

Immaginiamo quindi di voler fare il cambio di terna ortonormale

$$(\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3) \rightarrow (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3).$$



**FIGURA 2.** Angoli di Eulero. Il passaggio dalla terna  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$  alla terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  avviene con tre rotazioni successive: (1) precessione attorno a  $\hat{i}_3$  (tenuto fisso) che fornisce la nuova terna  $\{\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1\}$ , con  $\hat{e}_3^1 = \hat{i}_3$ ; (2) nutazione attorno a  $\hat{e}_1^1$  (tenuto fisso) che fornisce la nuova terna  $\{\hat{e}_1^2, \hat{e}_2^2, \hat{e}_3^2\}$ , con  $\hat{e}_1^2 = \hat{e}_1^1$  e  $\hat{e}_3^2 \equiv \hat{e}_3$ ; (3) rotazione propria attorno a  $\hat{e}_3^2 \equiv \hat{e}_3$  (tenuto fisso) che porta infine alla terna desiderata.

Supponiamo che  $\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3 \neq \mathbf{0}$  (ovvero che  $\hat{i}_3$  e  $\hat{e}_3$  non siano paralleli) e definiamo il versore

$$\hat{n} = \frac{\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3}{\|\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3\|}.$$

Questo versore indica il cosiddetto *asse dei nodi*. In base a questo asse possiamo definire tre angoli, detti *angoli di Eulero*:

**Angolo di precessione:** Angolo  $\phi \in [0, 2\pi]$  di cui bisogna ruotare  $\hat{i}_1$ , nel piano ortogonale a  $\hat{i}_3$ , per sovapporlo a  $\hat{n}$ .

**Angolo di nutazione:** Angolo  $\theta \in [0, \pi]$  di cui bisogna ruotare  $\hat{i}_3$ , nel piano ortogonale a  $\hat{n}$ , per ottenere  $\hat{e}_3$ .

**Angolo di rotazione propria:** Angolo  $\psi \in [0, 2\pi]$  di cui bisogna ruotare  $\hat{n}$  per sovrapporlo a  $\hat{e}_1$  nel piano ortogonale a  $\hat{e}_3$ .

Questi angoli si possono mettere in corrispondenza con tre *rotazioni* attorno ad assi coordinati, che permettono di trasformare la base di partenza in quella di arrivo. Tali rotazioni si intendono in senso antiorario rispetto al versore ortogonale specificato. Per essere più precisi, con riferimento alla Fig. 2, passiamo dalla base  $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  alla base  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  eseguendo i seguenti passi:

$$(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3) \xrightarrow[\phi]{\text{precessione}} (\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1) \xrightarrow[\theta]{\text{nutazione}} (\hat{e}_1^2, \hat{e}_2^2, \hat{e}_3^2) \xrightarrow[\psi]{\text{rot. propria}} (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3),$$

Il primo passo corrisponde ad una rotazione di  $\phi$  attorno a  $\hat{i}_3$ ,

$$\hat{e}_1^1 = \cos \phi \hat{i}_1 + \sin \phi \hat{i}_2 \equiv \hat{n}, \quad \hat{e}_2^1 = -\sin \phi \hat{i}_1 + \cos \phi \hat{i}_2, \quad \hat{e}_3^1 = \hat{i}_3,$$

seguita da una rotazione di  $\theta$  attorno al nuovo asse  $\hat{e}_1^1$

$$\hat{e}_1^2 = \hat{e}_1^1, \quad \hat{e}_2^2 = \cos \theta \hat{e}_1^1 + \sin \theta \hat{e}_3^1, \quad \hat{e}_3^2 = -\sin \theta \hat{e}_1^1 + \cos \theta \hat{e}_3^1,$$

e infine una rotazione di  $\psi$  attorno all'asse  $\hat{\mathbf{e}}_3^2$  (che coincide con l'asse finale desiderato  $\hat{\mathbf{e}}_3$  per via della rotazione precedente),

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1^2 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2^2, \quad \hat{\mathbf{e}}_2^2 = -\sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1^2 + \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2^2, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3^2.$$

Con un po' di algebra si può esprimere direttamente la nuova base in termini della vecchia come

(1.9)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_1 &= (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}_1 + (\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}_2 + \sin \theta \sin \psi \hat{\mathbf{i}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= (-\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}_1 + (-\sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}_2 + \sin \theta \cos \psi \hat{\mathbf{i}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1 - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_3.\end{aligned}$$

Le formule sopra equivalgono alla seguente forma per  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta & -\sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La parametrizzazione della rotazione  $\mathbf{R}$  qui introdotta richiede che  $\hat{\mathbf{i}}_3$  e  $\hat{\mathbf{e}}_3$  non siano paralleli: si può dimostrare tuttavia che questa difficoltà, ovvero l'impossibilità di associare biunivocamente tutte le rotazioni ad un singolo tipo di parametrizzazione, appare per *qualsiasi* costruzione. Se d'altra parte  $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_3$ , è chiaro che abbiamo bisogno solo di un movimento di rotazione, e più precisamente di una precessione, in cui  $\hat{\mathbf{i}}_1 \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_1$ , per cui le Eq. (1.9) diventano

$$(1.10) \quad \begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_1 &= \cos \alpha \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \alpha \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\sin \alpha \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \alpha \hat{\mathbf{i}}_2 \Leftrightarrow \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \hat{\mathbf{i}}_3.\end{aligned}$$

In questo caso,  $\alpha$  è semplicemente detto *angolo di rotazione*. Si noti che la forma sopra di  $\mathbf{R}$  si ottiene anche dalla costruzione di Eulero nel limite  $\theta \rightarrow 0$  e identificando  $\alpha = \phi + \psi$  (la degenerazione emerge dal fatto che ci sono infiniti valori di  $\psi$  e  $\phi$  associati allo stesso  $\alpha$ ).

**3.2. Velocità angolare e formule di Poisson.** Il riferimento mobile dipende, in generale, dalla variabile temporale  $t$  ed è quindi utile studiarne l'evoluzione nel tempo. Possiamo anzitutto osservare che, dovendo mantenersi ortonormale in ogni istante,

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow 0 = \frac{d \langle \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle}{dt} = \langle \hat{\mathbf{e}}_i, \dot{\hat{\mathbf{e}}}_j \rangle + \langle \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

In particolare, per  $i = j$ ,  $\langle \hat{\mathbf{e}}_i, \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i \rangle = 0$ , ovvero la derivata temporale di  $\hat{\mathbf{e}}_i$  è ortogonale al versore  $\hat{\mathbf{e}}_i$  stesso. Il seguente teorema, dovuto a Poisson, permette di andare oltre queste considerazioni generali e ottenere una informazione più precisa su come evolvono questi versori ortonormali. Prima di enunciarlo, stabiliamo il seguente

**LEMMA 3.1.** *Sia  $\mathbf{R}(s)$  una matrice ortogonale differenziabile in un intorno di  $s = 0$ , ovvero tale che ogni suo elemento  $R_{ij}(s)$  sia differenziabile in un intorno di  $s = 0 \forall i, j$ . Supponiamo inoltre che  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ , matrice identità. La matrice*

$$\mathbf{Y} := \left. \frac{d \mathbf{R}(s)}{ds} \right|_{s=0},$$

*è antisimmetrica, ovvero  $\mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^T$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo  $\mathbf{R}(s)$  ortogonale, in un intorno di  $s = 0$  potremo scrivere

$$\mathbf{R}(s)^\top \mathbf{R}(s) = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d \mathbf{R}(s)^\top}{ds} \mathbf{R}(s) = -\mathbf{R}(s)^\top \frac{d \mathbf{R}(s)}{ds} \xrightarrow{s=0} \mathbf{Y}^\top = -\mathbf{Y}. \quad \square$$

■ **TEOREMA 3.2 (Poisson).** Sia  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  una terna ortonormale tale che  $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2$  che evolve nel tempo rispetto ad una terna fissa  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$ . Allora esiste un unico vettore  $\boldsymbol{\omega}$ , detto vettore velocità angolare tale per cui

$$(1.11) \quad \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Inoltre, ogni terna solidale alla terna  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  evolve con la stessa velocità angolare.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\hat{\mathbf{e}}_i(t) = \sum_{k=1}^3 e_{ik}(t) \hat{\mathbf{i}}_k$  un elemento della terna solidale al tempo  $t$  e  $\hat{\mathbf{e}}_i(t + \tau) = \sum_{k=1}^3 e_{ik}(t + \tau) \hat{\mathbf{i}}_k$  lo stesso elemento al tempo  $t + \tau$ , dove abbiamo per entrambi esplicitato le componenti rispetto ad una base fissa  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$ . Sappiamo che esiste una matrice ortogonale  $\mathbf{R}(\tau)$  tale che  $\mathbf{e}_i(t + \tau) = \mathbf{R}(\tau) \mathbf{e}_i(t)$ , cioè tale che

$$\begin{pmatrix} e_{1i}(t+\tau) \\ e_{2i}(t+\tau) \\ e_{3i}(t+\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) & R_{13}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) & R_{23}(\tau) \\ R_{31}(\tau) & R_{32}(\tau) & R_{33}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1i}(t) \\ e_{2i}(t) \\ e_{3i}(t) \end{pmatrix}$$

di modo che  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ , dove  $\mathbf{e}_i(t)$  è la terna che identifica  $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$  secondo la base fissa. Abbiamo quindi che

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_i(t + \tau) - \hat{\mathbf{e}}_i(t)}{\tau} = \frac{d \mathbf{R}(\tau)}{d \tau} \Big|_{\tau=0} \mathbf{e}_i(t).$$

Sappiamo che, in virtù del Lemma 3.1, la matrice  $\dot{\mathbf{R}}(0) := \frac{d \mathbf{R}(\tau)}{d \tau} \Big|_{\tau=0}$  è antisimmetrica, e può quindi essere espressa come

$$\dot{\mathbf{R}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si osserva,

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{2i} \\ \dot{e}_{2i} \\ \dot{e}_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 e_3 - \omega_3 e_2 \\ \omega_3 e_1 - \omega_1 e_3 \\ \omega_1 e_3 - \omega_2 e_1 \end{pmatrix}$$

ovvero, indicando con  $\boldsymbol{\omega} = \sum_k \omega_k \hat{\mathbf{i}}_k$ ,

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i.$$

Il vettore è unico (se esistesse un diverso  $\boldsymbol{\omega}'$  tale per cui la relazione precedente è soddisfatta, si avrebbe  $(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') \wedge \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0}$  per ogni  $i$ ). Infine, dimostriamo che  $\boldsymbol{\omega}$  è lo stesso per ogni terna solidale alla terna mobile considerata. Supponiamo quindi di avere una diversa terna ortonormale  $\{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3\}$  solidale alla terna  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ . Abbiamo che

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} (\langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle \hat{\mathbf{e}}_j) = \sum_{j=1}^3 \frac{d \langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle}{dt} \hat{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle \dot{\hat{\mathbf{e}}}_j = \boldsymbol{\omega}_* \wedge \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle \hat{\mathbf{e}}_j = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{b}}_i$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\langle \hat{\mathbf{b}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle$  non dipende dal tempo essendo la terna  $\{\hat{\mathbf{b}}_i\}_{i=1}^3$  solidale.  $\square$

Si noti che la formula nell'enunciato del Teorema di Poisson può essere invertita e il vettore  $\omega$  si può scrivere come

$$(1.12) \quad \omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \wedge \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i.$$

Usando l'identità  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ , basta infatti osservare che

$$(1.13) \quad \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \wedge \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i \wedge (\omega \wedge \hat{\mathbf{e}}_i) = \sum_{i=1}^3 (\omega - \langle \omega, \hat{\mathbf{e}}_i \rangle \hat{\mathbf{e}}_i) = 3\omega - \omega = 2\omega.$$

Supponiamo ora di avere un vettore  $\mathbf{u}$  generico, espresso in termini della terna fissa come  $\mathbf{u} = \sum_j u_j \hat{\mathbf{i}}_j$ , e calcoliamone la derivata temporale. Rispetto alla terna fissa, questa derivata sarà  $\dot{\mathbf{u}} = \sum_j \dot{u}_j \hat{\mathbf{i}}_j$ . Questo stesso vettore può scriversi rispetto alla terna mobile come  $\mathbf{u} = \sum_i u_i^* \hat{\mathbf{e}}_i$ , dove sia i coefficienti che i versori di base sono in generale dipendenti dal tempo. Derivando questa espressione, avremo

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^* \hat{\mathbf{e}}_i + \omega \wedge \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{\mathbf{e}}_i \equiv \mathbf{u}' + \omega \wedge \mathbf{u}.$$

La quantità  $\mathbf{u}' = \sum_i \dot{u}_i^* \hat{\mathbf{e}}_i$  è la derivata temporale del vettore *nel riferimento mobile*: in effetti, un osservatore solidale al riferimento mobile vede la terna  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  come *fissa*, e nel calcolo della velocità tiene conto della dipendenza temporale delle sole coordinate, non della base. In particolare applicando questo risultato a  $\omega$  si trova

$$\dot{\omega} = \omega' + \omega \wedge \omega = \omega'.$$

ovvero le derivate temporali di  $\omega$  rispetto ad un riferimento fisso e rispetto ad un riferimento mobile sono uguali.

**3.3. Trasformazione delle grandezze cinematiche.** Avendo ottenuto la relazione tra derivate temporali in due sistemi di riferimento per un generico vettore, possiamo ora applicare questo risultato ad un vettore posizione specificatamente, e agli associati vettori velocità e accelerazione. Supponiamo quindi di avere un punto materiale  $P$  con posizione individuata dal vettore  $\mathbf{x}_P(t)$  rispetto ad un riferimento cartesiano fisso  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ .

**3.3.1. Composizione delle velocità.** In un riferimento mobile  $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ , la stessa posizione è individuata dal vettore  $\mathbf{x}_P^*(t) = \mathbf{x}_P(t) - \mathbf{x}_*(t)$ , vettore da intendersi applicato in  $O_*$ , origine del riferimento mobile. Varrà la seguente legge di composizione

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_* + \mathbf{x}_P^*.$$

Derivando rispetto al tempo otterremo

$$\mathbf{v}_P := \dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_* + \dot{\mathbf{x}}_P^* \equiv \mathbf{v}_* + \dot{\mathbf{x}}_P^*.$$

dove  $\mathbf{v}_* := \dot{\mathbf{x}}_*$  è la velocità della nuova origine  $O_*$  rispetto al sistema di riferimento fisso. Per quanto detto sopra

$$\dot{\mathbf{x}}_P^* = \mathbf{v}_P^* + \omega \wedge \mathbf{x}_P^*$$

dove  $\mathbf{v}_P^* := \mathbf{x}^{*\prime}$  è la velocità osservata nel riferimento mobile. Abbiamo ottenuto così la *legge di composizione delle velocità di Galilei*

$$(1.14) \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}_P^\tau, \quad \text{dove} \quad \mathbf{v}_P^\tau := \mathbf{v}_* + \omega \wedge \mathbf{x}_P^* = \mathbf{v}_* + \omega \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_*).$$

Il termine  $\mathbf{v}_P^\tau$  di differenza tra le velocità nei due riferimenti è detta *velocità di trascinamento*. In particolare, si parla di *trasformazione galileiana* nel caso in cui  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{a}_\star := \ddot{\mathbf{x}}_\star = \mathbf{0}$ , in modo che

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}_\star.$$

**3.3.2. Composizione delle accelerazioni.** Ripetendo i ragionamenti sopra sulla formula per le velocità otteniamo la legge delle composizioni per le accelerazioni. Derivando rispetto al tempo l'Eq. (1.14) otteniamo infatti

$$(1.15a) \quad \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_P^* + \mathbf{a}_P^\tau + \mathbf{a}_P^C,$$

dove abbiamo scritto  $\ddot{\mathbf{x}}_\star = \mathbf{a}_\star$  e

$$(1.15b) \quad \mathbf{a}_P^\tau := \mathbf{a}_\star + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_P^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P^*), \quad \mathbf{a}_P^C := 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P^*$$

sono dette rispettivamente *accelerazione di trascinamento* e *accelerazione di Coriolis*. L'accelerazione di trascinamento corrisponde all'accelerazione di un punto impenetrato al riferimento mobile, privo di velocità relativa rispetto ad esso. Il termine aggiuntivo è dovuto ad una ulteriore accelerazione che appare quando  $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P^* \neq \mathbf{0}$ . Si noti che se  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ , ovvero la velocità angolare è costantemente nulla (osservatore mobile traslante) la legge di composizione delle velocità è semplicemente  $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_\star + \mathbf{a}_P^*$ . Infine, se anche  $\mathbf{a}_\star = \mathbf{0}$ , le accelerazioni nei due riferimenti sono uguali. Il caso  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{a}_\star = \mathbf{0}$  è particolarmente importante: in questa circostanza, si dice che  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  e  $O \hat{\mathbf{i}}_1 \hat{\mathbf{i}}_2 \hat{\mathbf{i}}_3$  sono legati da una *trasformazione galileiana*, di modo che per ogni punto  $P$  valga

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\star + \mathbf{v}_P^*, \quad \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_P^*.$$

**3.3.3. Composizione delle velocità angolari.** Rimane da specificare come possono essere composte le velocità angolari. Supponiamo per esempio di avere un riferimento fisso  $O \hat{\mathbf{i}}_1 \hat{\mathbf{i}}_2 \hat{\mathbf{i}}_3$  con base  $\{\hat{\mathbf{i}}_j\}_{j=1}^3$ , e un riferimento mobile  $O_\bullet \hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$  rispetto ad esso con base  $\{\hat{\mathbf{b}}_i\}_{i=1}^3$  avente velocità angolare associata  $\boldsymbol{\omega}_\bullet$  rispetto al riferimento fisso. Supponiamo quindi di avere un terzo riferimento  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ , anch'esso mobile e con base  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ , avente velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  rispetto al riferimento fisso. Vogliamo calcolare la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}_{\bullet|\star}$  del riferimento mobile  $O_\bullet \hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$  rispetto al riferimento mobile  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ . Come osservazione preliminare, supponiamo per che si abbia un vettore  $\mathbf{u}$  solidale con il riferimento  $O_\bullet \hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$ . Ciò significa che

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega}_\bullet \wedge \mathbf{u}.$$

Nel riferimento  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  si osserva la stessa relazione

$$\mathbf{u}' = \boldsymbol{\omega}_{\bullet|\star} \wedge \mathbf{u}$$

per un certo — in generale diverso — vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}_{\bullet|\star}$  associato a  $O_\bullet \hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$  da un osservatore nel riferimento  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  (qui, come sopra,  $\mathbf{u}'$  è la derivata di  $\mathbf{u}$  nel riferimento mobile  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ ). D'altra parte sappiamo che la relazione tra la derivata temporale in  $O \hat{\mathbf{i}}_1 \hat{\mathbf{i}}_2 \hat{\mathbf{i}}_3$  e la derivata in  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_\bullet \wedge \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_{\bullet|\star} \wedge \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}_{\bullet|\star} + \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{u}.$$

Essendo  $\mathbf{u}$  arbitrario, questo significa che

$$\boldsymbol{\omega}_\bullet = \boldsymbol{\omega}_{\bullet|\star} + \boldsymbol{\omega},$$

che è la legge cercata che lega le tre velocità angolari.

**Q** La legge di composizione dei momenti angolari può essere utile per scrivere una espressione esplicita del momento angolare in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate quando si passa da un sistema fisso ad uno mobile. Per essere più precisi, dato un riferimento fisso  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , introduciamo tre riferimenti mobili.

- Il riferimento  $O\hat{\mathbf{e}}_1^1\hat{\mathbf{e}}_2^1\hat{\mathbf{e}}_3^1$  ruota, rispetto al riferimento fisso, attorno all'asse  $\hat{\mathbf{e}}_3^1 \equiv \hat{\mathbf{i}}_3$  con velocità angolare  $\omega_1 = \dot{\phi}\hat{\mathbf{i}}_3$ .
- Il riferimento  $O\hat{\mathbf{e}}_1^2\hat{\mathbf{e}}_2^2\hat{\mathbf{e}}_3^2$  ruota, rispetto al riferimento  $O\hat{\mathbf{e}}_1^1\hat{\mathbf{e}}_2^1\hat{\mathbf{e}}_3^1$ , attorno all'asse  $\hat{\mathbf{e}}_1^2 \equiv \hat{\mathbf{e}}_1^1$  con velocità angolare  $\omega_2 = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_1^1$ .
- Il riferimento  $O\hat{\mathbf{e}}_1^2\hat{\mathbf{e}}_2^2\hat{\mathbf{e}}_3^2$  ruota, rispetto al riferimento  $O\hat{\mathbf{e}}_1^2\hat{\mathbf{e}}_2^2\hat{\mathbf{e}}_3^1$ , attorno all'asse  $\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv \hat{\mathbf{e}}_3^2$  con velocità angolare  $\omega_3 = \dot{\psi}\hat{\mathbf{e}}_3^2$ .

In questo modo, in base a quanto detto sopra, la velocità angolare del riferimento mobile finale rispetto al riferimento fisso di partenza è

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\phi}\hat{\mathbf{i}}_3 + \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_1^1 + \dot{\psi}\hat{\mathbf{e}}_3^2.$$

Esprimendo i vettori  $\hat{\mathbf{e}}_1^1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_3^2$  in termini della base fissa si ottiene, dopo un po' di algebra,

$$(1.16a) \quad \boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) \hat{\mathbf{i}}_1 + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \hat{\mathbf{i}}_2 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}_3$$

o viceversa, scrivendo tutto in termini della base mobile finale

$$(1.16b) \quad \boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{\mathbf{e}}_3.$$

**Esempio 1.2** (Coordinate polari) — Sia  $P$  un punto individuato dal vettore posizione  $\mathbf{x}_P(t) = x_1(t)\hat{\mathbf{i}}_1 + x_2(t)\hat{\mathbf{i}}_2 + x_3(t)\hat{\mathbf{i}}_3$  per  $t \in [t_1, t_2]$ : si noti che  $x_3$  non dipende da  $t$ , sicché il moto di  $P$  è in un piano ortogonale a  $\hat{\mathbf{i}}_3$ . Lo studio del moto lungo la curva può essere perciò eseguito usando soltanto le due coordinate cartesiane  $(x_1, x_2)^T$ , dato che  $x_3$  è fisso: possiamo in particolare scegliere l'origine in modo tale che  $x_3 = 0$ . È possibile scrivere la posizione del punto utilizzando le coordinate polari, introducendo due funzioni,  $r: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $\theta: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  tali per cui

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ x_2(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x}_P(t) = r(t) \cos \theta(t) \hat{\mathbf{i}}_1 + r(t) \sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}}_2.$$

Si ha quindi che  $r(t)$  è la distanza di  $P$  dall'origine. Si dice che  $\hat{\mathbf{i}}_1$  svolge il ruolo di *asse polare*, essendo  $\theta(t)$  l'angolo tra  $\mathbf{x}_P(t)$  e  $\hat{\mathbf{i}}_1$  al tempo  $t$ . Il moto dato in termini di  $r(t)$  e  $\theta(t)$  si dice parametrizzato in *coordinate polari*. Introduciamo ora una coppia di versori  $\{\hat{\mathbf{e}}_r(t), \hat{\mathbf{e}}_\theta(t)\}$  così fatta

$$\hat{\mathbf{e}}_r(t) = \cos \theta(t) \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \theta(t) \hat{\mathbf{i}}_2.$$

Il versore  $\hat{\mathbf{e}}_r$  punta nella direzione radiale verso  $\mathbf{x}_P$ , mentre il versore  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  punta nella direzione trasversa, ovvero ortogonale a  $\hat{\mathbf{e}}_r$ ; inoltre  $\hat{\mathbf{e}}_r \wedge \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{i}}_3$ . Dato che  $r$  e  $\theta$  dipendono da  $t$ , questi due versori dipenderanno anch'essi da  $t$ ; essi sono inoltre *ortonormali* e, insieme a  $\hat{\mathbf{i}}_3$ , costituiscono una *base mobile*, in modo che  $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  sia un nuovo riferimento rispetto a  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . In questo riferimento,  $\mathbf{x}_P$  ha una espressione molto semplice, essendo  $\mathbf{x}_P = r\hat{\mathbf{e}}_r$ . Possiamo calcolare la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del riferimento mobile rispetto a quello fisso. Usando

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2 = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2 = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r$$

troviamo

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \dot{\hat{\mathbf{e}}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \dot{\hat{\mathbf{e}}}_2) = \dot{\theta} \hat{\mathbf{i}}_3$$

che giustifica ancora una volta la denominazione di “velocità angolare” per  $\omega$ :  $\omega$  esprime la velocità con cui l’angolo  $\theta$  varia in una rotazione attorno a  $\hat{\mathbf{i}}_3$ . Derivando si ha

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \mathbf{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Queste formule sono coerenti con le formule generali trovate sopra: in esse appaiono tutti i diversi contributi che abbiamo discusso. Notando che  $\mathbf{x}_P^* = \mathbf{x}_P$  essendo  $\mathbf{x}_* \equiv \mathbf{0}$ , basta osservare che  $\mathbf{v}_P^* = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r$ , mentre  $\mathbf{v}_P^\tau = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta$ , e così  $\mathbf{a}_P^* = \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_r$ ,  $\mathbf{a}_P^\tau = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P) = r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r$  e  $\mathbf{a}_P^c = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P^* = 2r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta$ .

#### 4. Cinematica del corpo rigido

**4.1. Corpo rigido e sistema solidale.** Abbiamo finora considerato il moto di un singolo “oggetto puntiforme”  $P$  la cui posizione evolve nel tempo. Naturalmente ciò non è sufficiente in gran parte delle applicazioni ed occorre considerare sistemi più complicati costituiti da *insiemi* di punti, che vanno a formare un *corpo* o *sistema*. Un sistema costituito da un insieme di punti la cui posizione non è in nessun modo vincolata si dice *libero*. Viceversa, se il sistema è costituito da punti la cui posizione o velocità è in qualche modo limitata, il sistema si dice *vincolato*.

Un importante tipo di sistema soggetto a vincoli è il cosiddetto *corpo rigido*. Un insieme di punti materiali  $\mathcal{B}$  si dice essere un *corpo rigido* se *le distanze tra tutte le coppie di punti che lo costituiscono rimangono inalterate nel tempo*. Si tratta quindi di un vincolo *interno*, ovvero che dipende dalle sole posizioni relative di componenti interne al sistema, e non dalla presenza di eventuali dispositivi esterni. Un corpo rigido può essere soggetto solo a *moti rigidi*, ovvero moti che rispettano questo vincolo lasciando siffatte distanze inalterate. Un fatto cruciale riguardante lo studio dei corpi rigidi è costituito dalla possibilità di introdurre un *sistema di riferimento solidale* al corpo rigido stesso, ovvero un sistema di riferimento cartesiano  $O_*\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$  che “partecipa” del moto del corpo e tale che, rispetto ad esso, le *coordinate* dei punti del corpo rimangano inalterate al variare del tempo. Chiameremo *solidali* i punti la cui posizione rimane costante rispetto al sistema di riferimento solidale, ovvero che partecipano del moto del corpo rigido. Fissare un riferimento solidale in un corpo rigido può essere fatto, per esempio, a partire da tre suoi punti non allineati, siano  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  in posizione  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$  rispetto ad un riferimento fisso: uno dei tre punti, sia  $P_1$ , può essere scelta come origine di un riferimento solidale,  $O_* \equiv P_1$  ovvero, nella notazione usata in precedenza,  $\mathbf{x}_* \equiv \mathbf{x}_1$ , di modo che rispetto a questa nuova origine le posizioni di  $P_2$  e  $P_3$  siano rispettivamente  $\mathbf{x}_2^* := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_3^* := \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$  rispettivamente, mentre una base ortonormale solidale  $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^3$  può essere costruita utilizzando per esempio:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 := \frac{\mathbf{x}_2^*}{\|\mathbf{x}_2^*\|}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 := \frac{\mathbf{x}_3^* - \langle \mathbf{x}_3^*, \hat{\mathbf{e}}_1 \rangle \hat{\mathbf{e}}_1}{\|\mathbf{x}_3^* - \langle \mathbf{x}_3^*, \hat{\mathbf{e}}_1 \rangle \hat{\mathbf{e}}_1\|}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 := \hat{\mathbf{e}}_1 \wedge \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Rispetto a questo riferimento, ogni altro punto ha una posizione *fissa*. Un certo punto generico  $P$  del corpo, individuato dal vettore  $\mathbf{x}_P$  in un riferimento fisso  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , infatti sarà individuato, nel riferimento mobile, da  $\mathbf{x}_P^* = \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_*$  che, espresso nella base solidale sarà tale che  $\mathbf{x}_P^*(t) =$

$\sum_{i=1}^3 x_i^* \hat{\mathbf{e}}_i(t)$ , dove  $x_i^*$  non dipende dal tempo. Si può perciò scrivere l'Eq. (1.8) come

$$(1.17) \quad \mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}_*(t) + \sum_{i=1}^3 x_i^* \hat{\mathbf{e}}_i(t) = \mathbf{x}_*(t) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i^* R_{ij}(t) \hat{\mathbf{i}}_j.$$

L'equazione ottenuta è detta *equazione cartesiana di un moto rigido* e mostra come l'evoluzione delle coordinate di un punto del corpo possa essere descritta in termini dell'evoluzione della posizione di un punto solidale (l'origine  $O_*$  del riferimento) e di una matrice di rotazione: possiamo quindi caratterizzare il moto usando solo sei quantità, ovvero le tre coordinate di  $O_*$  e i tre angoli di Eulero necessari per scrivere  $\mathbf{R}(t)$ .

**4.2. Moti rigidi.** Avendo introdotto gli strumenti essenziali per la parametrizzazione di un moto rigido, studiamone più in dettaglio la cinematica, ovvero le quantità necessarie per descriverne il movimento e le loro relazioni, rammentando i risultati trovati per i riferimenti mobili.

L'esistenza di un riferimento solidale col corpo permette di associare ad esso, e quindi al corpo rigido stesso, una *velocità angolare*, che indicheremo con  $\boldsymbol{\omega}$ . Il teorema di Poisson ci aiuta inoltre a *caratterizzare* in maniera semplice un moto rigido, dato che mostra che l'informazione sul moto di rotazione è contenuta in  $\boldsymbol{\omega}$ , vettore tridimensionale, eventualmente dipendente dal tempo.

**TEOREMA 4.1** (Legge di distribuzione delle velocità). *Siano dati due punti P e Q di un corpo in moto, individuati dai vettori  $\mathbf{x}_P$  e  $\mathbf{x}_Q$  rispettivamente. Allora essi si muovono di moto rigido se e solo se esiste un vettore  $\boldsymbol{\omega}$  tale per cui*

$$(1.18) \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q).$$

**DIMOSTRAZIONE.** La formula di Poisson implica direttamente l'Eq. (1.18) se applicata al vettore solidale  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$ . D'altra parte, l'Eq. (1.18) è sufficiente per avere moto rigido. Ciò si può vedere osservando che, se la formula sopra è verificata, le distanze tra i due punti rimangono costanti:

$$\frac{d \| \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q \|^2}{dt} = 2 \langle \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q, \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q \rangle = 2 \langle \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q) \rangle = 0. \quad \square$$

La legge in Eq. (1.18) è anche detta *legge fondamentale del moto rigido* ed è alla base delle peculiari proprietà di questo tipo di moto. Essa suggerisce per esempio l'introduzione di una interessante quantità, ovvero

$$\mathcal{I}_c := \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_P \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_Q \rangle + \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q) \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_Q \rangle.$$

La quantità  $\mathcal{I}_c$  è detta *invariante scalare cinematico* ed esprime il fatto che la componente della velocità lungo  $\boldsymbol{\omega}$  non dipende dal punto P in cui la si calcola. Allo stesso modo (forse meno sorprendentemente) si può osservare che la componente delle velocità di due punti distinti lungo la direzione che li congiunge è la stessa, dato che

$$\langle \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q, \mathbf{v}_P \rangle = \langle \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q, \mathbf{v}_Q \rangle + \langle \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q) \rangle = \langle \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q, \mathbf{v}_Q \rangle.$$

L'Eq. (1.18) ha anche come conseguenza diretta la legge di distribuzione delle accelerazioni. Basta infatti derivare ancora una volta per ottenere

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q)),$$

dove abbiamo usato la formula di Poisson su  $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$ , che è solidale.

4.2.1. *Particolari moti rigidi.* A seconda delle caratteristiche di  $\omega$  possono identificarsi alcuni tipi di moto rigido di speciale importanza.

**Moto traslatorio:**  $\omega(t) = \mathbf{0}$ : Un *moto traslatorio* di un corpo rigido è tale per cui *ogni* retta solidale al corpo stesso mantiene invariata la sua direzione rispetto al sistema di riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ : questo è equivalente a richiedere che  $\omega \equiv \mathbf{0}$  per ogni tempo  $t$  del moto. Per mostrare ciò, supponiamo di avere un versore solidale al corpo  $\hat{\mathbf{u}}$ , che identifica, per esempio, la direzione di una retta passante per due punti del corpo. Derivando rispetto al tempo, si ha che  $\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \omega \wedge \hat{\mathbf{u}}$ : questa quantità è nulla per ogni scelta di  $\hat{\mathbf{u}}$  se e solo se  $\omega = \mathbf{0}$ . Il fatto che  $\omega$  sia zero vuol dire che, in particolare, la terna di base solidale non cambia nel tempo: scegliendo al tempo iniziale  $\hat{\mathbf{e}}_k(t_0) = \hat{\mathbf{i}}_k$ , allora  $\hat{\mathbf{e}}_k(t) = \hat{\mathbf{i}}_k$  per tutti i tempi seguenti, e quindi, dati due punti  $P$  e  $Q$  del corpo,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q, \quad \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q.$$

In altre parole, in questo caso ha senso parlare di velocità e accelerazione del corpo, avendo tutti i punti che lo costituiscono stesse velocità e accelerazione. Se le velocità sono costanti in direzione e modulo (e quindi le accelerazioni sono identicamente nulle), si dice che il corpo si muove di *moto rettilineo uniforme*.

**Moto rototraslatorio:**  $\omega(t) = \omega(t)\hat{\omega}$ : Un moto *rototraslatorio* consiste in un moto rigido in cui *una certa direzione solidale col corpo*, individuata da un versore  $\hat{\mathbf{u}}$ , rimane invariata nel tempo rispetto al riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , ovvero  $\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{0}$ . Come specificato dal seguente Lemma, questo implica che  $\omega(t) = \omega(t)\hat{\omega}$ , ovvero  $\omega$  può cambiare modulo e verso, ma non direzione.

**LEMMA 4.2.** *Un moto è rototraslatorio se e solo se  $\omega(t) = \omega(t)\hat{\omega}$ , con  $\hat{\omega}$  direzione solidale con il corpo costante nel tempo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che la condizione  $\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \omega \wedge \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  esprime il fatto che  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\omega$  sono paralleli, ovvero  $\hat{\mathbf{u}}$  è esattamente il versore di  $\omega$ .  $\square$

Se due punti del corpo  $P$  e  $Q$  sono tali che, al tempo iniziale,  $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q \parallel \hat{\omega}$ , allora essi si manterranno paralleli a  $\hat{\omega}$  durante tutto il moto e le loro velocità saranno uguali,  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q$ : in altre parole, lungo una retta solidale parallela a  $\hat{\omega}$  i punti hanno tutti la stessa velocità.

Il fatto che in un moto rototraslatorio esista un asse privilegiato, suggerisce di scegliere un elemento di base secondo tale asse: scegliendo per esempio il riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  in modo che  $\omega = \omega(t)\hat{i}_3$ , un cambio di variabili tra il sistema di riferimento dell'osservatore fisso e quello solidale ha la forma delle Eq. (1.10), ovvero il moto viene parametrizzato da quattro (e non sei) variabili. Usando l'espressione per  $\omega$  in Eq. (1.12) in combinazione con l'Eq. (1.10) si trova

$$\omega = \dot{\alpha}\hat{i}_3,$$

ovvero il modulo di  $\omega$  è proprio la derivata dell'angolo di rotazione. Due moti rototraslatori meritano una particolare attenzione.

**Moto elicoidale:** Un moto rototraslatorio si dice *elicoidale* se esiste una retta solida di direzione  $\hat{\omega}$  i cui punti hanno velocità parallela ad  $\hat{\omega}$ . In questo caso,

scegliendo un punto  $P$  su detta retta come origine del riferimento solidale, è sufficiente conoscere la proiezione  $\langle \mathbf{x}_P, \hat{\omega} \rangle$  e l'angolo di rotazione  $\alpha$  per parametrizzare il moto. Se la velocità dei punti sulla retta è nulla, allora il moto è **rotatorio** e  $\langle \mathbf{x}_P, \hat{\omega} \rangle$  è costante, per cui l'unico parametro del sistema da conoscere per studiare il moto è l'angolo  $\alpha$ : la retta si dice essere un *asse di rotazione*.

**Moto piano:** Un moto rototraslatorio si dice *moto piano* se esiste un piano  $\Pi$  con versore normale  $\hat{\omega}$  e solidale col corpo che si mantiene sempre parallelo e a distanza fissa da un piano  $\Pi^*$  fisso, detto *piano direttore*: ciò vuol dire che ogni punto  $P$  ha  $\langle \dot{\mathbf{x}}_P, \hat{\omega} \rangle = 0$ . In altre parole, tutti i punti del corpo si muovono parallelamente a  $\Pi^*$ . La parametrizzazione del moto quindi avviene tenendo conto, oltre che dell'angolo  $\alpha$  di rotazione attorno ad un asse normale al piano direttore, della posizione di un punto di riferimento  $P$  del corpo nel piano ortogonale a  $\hat{\omega}$  passante per  $P$ . Sono pertanto necessarie tre variabili in totale, dato che la posizione del punto nel piano è identificata da sole due variabili. Studiare un moto rigido piano equivale perciò allo studio del moto di un corpo rigido bidimensionale, dato che il moto di tutti i punti è caratterizzato dalla loro proiezione sul piano direttore. Infine si noti che *un moto rotatorio è un caso particolare di moto piano*.

**Moto polare:** Un moto polare è un moto di un corpo rigido tale per cui esiste un punto  $P$  del corpo che è *fisso*, ovvero tale che il vettore posizione ad esso associato è costante  $\mathbf{x}_P(t) \equiv \mathbf{x}_0$  nel riferimento fisso. Possiamo in particolare usare questo punto come origine sia del nostro riferimento fisso che del nostro sistema solidale, di modo che  $\mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}_P^* = \mathbf{0}$ . La configurazione del corpo rigido è identificata, in generale, dai soli tre parametri euleriani. Un generico punto  $Q$  del corpo ha, in questo riferimento,  $\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_Q$ , sicché tutti i punti del corpo che giacciono nella direzione  $\boldsymbol{\omega}(t)$  al tempo  $t$  hanno velocità nulla: l'asse passante per il punto fisso e orientato come  $\boldsymbol{\omega}(t)$  si dice essere *asse di rotazione istantanea*, come vedremo di nuovo in seguito.

Tra i moti polari esiste una famiglia di moti con una proprietà particolare, detti *moti precessionali*: in tali moti è possibile scegliere un sistema di riferimento solidale  $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$  e un sistema di riferimento fisso  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  tali per cui  $\langle \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle$  sia costante. Essendo  $\hat{\mathbf{i}}_3$  fisso, questa condizione si può scrivere come  $\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = \langle \dot{\hat{\mathbf{e}}}_3, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = 0$ .

**LEMMA 4.3.** *Un moto è preessionale se e solo se  $\boldsymbol{\omega}$  ha la forma*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_e(t)\hat{\mathbf{e}}_3(t) + \omega_i(t)\hat{\mathbf{i}}_3.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\langle \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle$  è costante, derivando rispetto al tempo otteniamo che  $\langle \dot{\hat{\mathbf{e}}}_3, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = 0$ , ovvero  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_3$  e  $\hat{\mathbf{i}}_3$  sono complanari. Viceversa, se si assume che  $\boldsymbol{\omega}$  abbia la decomposizione proposta dal Lemma,  $\langle \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = 0$ .  $\square$

**4.3. Atto di moto.** Il punto di vista adottato finora è stato quello di “seguire” l’evoluzione di ciascun punto  $P$  in un intervallo temporale. Questo approccio, che si focalizza sui singoli punti seguendoli, è detto *lagrangiano*. Un punto di vista diverso è quello *euleriano*: secondo questo approccio, ci si focalizza su un preciso istante di tempo  $t^*$  annotando, per ogni posizione  $P$  occupata dal corpo la velocità osservata in quel punto: in questo modo, si ottiene un campo di velocità  $\mathbf{v}_P$ , detto *atto di moto*, ovvero una funzione che associa (al tempo dato) alla posizione  $P$  la velocità lì osservata. Dalla legge di distribuzione delle velocità sappiamo che, nel moto di

un corpo rigido deve valere

$$(1.19) \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q)$$

per un vettore di velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , dove  $\mathbf{x}_P$  e  $\mathbf{x}_Q$  identificano le posizioni  $P$  e  $Q$  rispetto ad un riferimento fisso nell'istante che stiamo analizzando. Un *atto di moto rigido* è un atto di moto che soddisfa specificatamente la relazione in Eq. (1.19), ovvero un campo di velocità *applicate* in una serie di punti nello spazio che stanno in relazione reciproca secondo l'Eq. (1.19). Esso è anche detto *atto di moto rototraslatorio*: la ragione è che, facendo riferimento ad un tempo fissato, il campo di velocità ha la caratteristica di avere una naturale *direzione privilegiata istantanea*, data, come vedremo, proprio da  $\boldsymbol{\omega}$ , a meno che, nell'istante in cui eseguiamo la nostra analisi,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  e in questo caso si dice che l'atto di moto è *traslatorio*.

È a questo punto necessaria una osservazione importante che giustificherà molti dei risultati seguenti. L'Eq. (1.19) lega tra loro le velocità dei punti in varie posizioni di un corpo rigido. Tuttavia, può essere utilizzata per associare un vettore velocità  $\mathbf{v}_X$  a un *qualsiasi* punto  $X$  dello spazio individuato dal vettore  $\mathbf{x}$ , non necessariamente occupato da un punto del corpo, utilizzando la legge

$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)$$

dove  $P$  è un punto appartenente al corpo rigido. In questo modo,  $\mathbf{v}_X$  è la velocità che avrebbe un *ipotetico punto materiale collocato nel punto  $X$  e in moto solidale col corpo*. Le proprietà di  $\mathbf{v}_X$  intesa come funzione dello spazio permettono di individuare degli interessanti luoghi geometrici, non necessariamente interni al corpo, che però ne aiutano la descrizione cinematica. Uno di questi è l'*asse istantaneo di moto*.

**TEOREMA 4.4** (Mozzi–Chasles). *Dato un atto di moto rigido con  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ , esso è elicoidale, ovvero esiste un asse, detto asse istantaneo di moto, i cui punti hanno velocità parallela all'asse stesso. Inoltre, i punti sull'asse di moto hanno velocità di modulo minimo nel corpo rigido.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{v}_X$  la velocità di un atto di moto rigido in un punto  $X$ : essa avrà una componente parallela ad  $\boldsymbol{\omega}$  ed una ortogonale ad essa. Cerchiamo ora il punto  $Y$  nel piano ortogonale al vettore  $\boldsymbol{\omega}$  passante per  $X$  tale che  $\mathbf{v}_Y \wedge \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ : in altre parole, assumendo che esista un asse di moto  $\mathcal{R}$ , cerchiamone il punto  $Y$  più vicino a  $X$ . Usando la formula dell'atto di moto rigido

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_Y \wedge \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v}_X + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{x})) \wedge \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_X \wedge \boldsymbol{\omega} + \|\boldsymbol{\omega}\|^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \rangle \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_X \wedge \boldsymbol{\omega} + \|\boldsymbol{\omega}\|^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

dove abbiamo usato l'identità  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ . Ciò significa che

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_X}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}.$$

Pertanto un punto  $Z$  della retta passante per  $Y$  con direzione  $\boldsymbol{\omega}$  è individuato in generale da un vettore

$$(1.20) \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_X}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}$$

per un qualche valore  $\lambda \in \mathbb{R}$ : l'equazione precedente fornisce, al variare di  $\lambda$ , tutti i punti dell'asse di moto. Tali punti hanno per costruzione una velocità parallela a  $\boldsymbol{\omega}$ . D'altra parte  $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_Y + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , da cui, essendo  $\mathbf{v}_Y$  e  $\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})$  ortogonali,  $\|\mathbf{v}_X\|^2 = \|\mathbf{v}_Y\|^2 + \|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2 \geq \|\mathbf{v}_Y\|^2$ : i punti sull'asse di moto hanno velocità in modulo minima.  $\square$

Si noti che, nell'ipotesi  $\omega \neq \mathbf{0}$ , se  $\mathcal{I}_c = \langle \omega, \mathbf{v}_Y \rangle = 0$  per un punto  $Y$  dell'asse di moto, ciò significa che  $\mathbf{v}_Y$  è nullo (dovendo esso essere parallelo a  $\omega$ ): in questo caso l'atto di moto si dice *rotatorio*, e ogni altro punto ha velocità  $\mathbf{v}_X = \omega \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Questa formula implica anche che in un atto di moto rotatorio  $\mathbf{v}_X$  è sempre ortogonale a  $\omega$ .

**4.3.1. Atti di moto nei moti rigidi piani.** Un moto rigido piano ha  $\mathcal{I}_c = 0$  dato che i vettori velocità sono ortogonali al vettore di velocità angolare. Possono avversi due casi. Se  $\omega = \mathbf{0}$  l'atto di moto è *traslatorio*. Se  $\omega \neq \mathbf{0}$ , il moto è rotatorio e possiamo identificare un punto  $C$  intersezione tra il piano direttore del moto piano e l'asse istantaneo di rotazione: tale punto è detto *centro istantaneo di rotazione* e vale il seguente teorema che porta il nome di Michel Chasles.

**TEOREMA 4.5 (Chasles).** *In un moto rigido piano, le normali alle velocità  $\mathbf{v}_P$  e  $\mathbf{v}_Q$  in due punti  $P$  e  $Q$  distinti si intersecano nel centro di istantanea rotazione se l'atto di moto è rotatorio, mentre invece sono parallele se l'atto di moto è traslatorio.*

**DIMOSTRAZIONE.** Detto  $C$  il centro istantaneo di rotazione, identificato da un vettore  $\mathbf{x}_C$  rispetto ad un riferimento fisso dato, il teorema discende dal fatto che, se il moto è rotatorio,  $\mathbf{v}_P = \omega \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_C)$  e  $\mathbf{v}_Q = \omega \wedge (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_C)$ .  $\square$

Il centro istantaneo di rotazione  $C$  può essere trovato usando la relazione in Eq. (1.20), scrivendo, dato un punto  $P$  in movimento solidale col corpo,

$$(1.21) \quad \mathbf{x}_C = \mathbf{x}_P + \frac{\omega \wedge \mathbf{v}_P}{\|\omega\|^2}.$$

Questa equazione vale naturalmente ad ogni istante di tempo, e, utilizzata in diversi istanti di tempo, fornisce la posizione di  $C$  al variare di  $t$  nel riferimento fisso: la traiettoria descritta da  $C$  si dice *base* o *polare fissa*. Si può anche calcolare la traiettoria  $\mathbf{x}_C^*$  del centro di rotazione  $C$  in un sistema di riferimento solidale  $O_\star \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ . Se  $\mathbf{x}_\star$  individua l'origine  $O_\star$  del sistema di riferimento mobile rispetto ad  $O$ , abbiamo che

$$\mathbf{x}_C^* = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_\star = \frac{\omega \wedge \mathbf{v}_\star}{\|\omega\|^2}.$$

La curva ottenuta applicando questa relazione, da intendersi nel sistema di riferimento solidale, si chiama *rulletta* o *polare mobile*. Ci si riferisce a base e rulletta come alle *traiettorie polari* del moto rigido. Si noti che, in generale,  $C$  non è solidale (diversamente, la rulletta sarebbe semplicemente un punto): esso corrisponde alla posizione in cui un punto solidale ha velocità nulla secondo la legge in Eq. (1.19), ma questa posizione stessa *cambia nel tempo* e infatti in generale  $\dot{\mathbf{x}}_C^* \neq \mathbf{0}$ .

**Esempio 1.3** (Asta con estremi vincolati agli assi) — Calcoliamo base e rulletta del seguente semplice sistema. Abbiamo un'asta rigida di lunghezza  $\ell$  di estremi  $A$ , in posizione  $\mathbf{x}_A$  rispetto ad un riferimento fisso  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , e  $B$ , in posizione  $\mathbf{x}_B$  rispetto allo stesso riferimento: gli estremi sono vincolati entrambi a scorrere lungo i due assi cartesiani nel piano tramite due carrelli. Un *carrello* è un dispositivo che vincola il moto traslatorio di un punto lungo una certa curva, ma permette al resto del sistema di ruotare liberamente attorno al punto stesso. Questo significa nel nostro caso che  $\mathbf{x}_A = a\hat{\mathbf{i}}_2$  e  $\mathbf{x}_B = b\hat{\mathbf{i}}_1$ , con  $a$  e  $b$  funzioni del tempo. Determiniamo base e rulletta di questo sistema. Anzitutto, naturalmente  $a^2 + b^2 = \ell^2$  lunghezza quadra dell'asta, che è rigida. Possiamo parametrizzare in particolare  $a = \ell \sin \theta$  e  $b = \ell \cos \theta$ , in modo che  $\theta$ , angolo indicato in figura, sia l'unico parametro di cui tener traccia durante l'evoluzione. Per costruzione,  $\mathbf{v}_A = \ell\dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2$  e  $\mathbf{v}_B = -\ell\dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1$ , per cui il centro istantaneo di rotazione

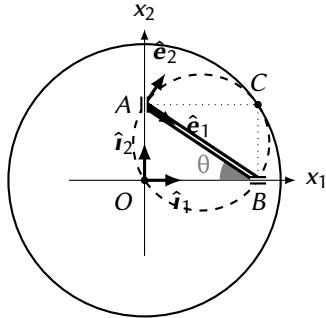


FIGURA 3. Asta rigida con estremi vincolati a scorrere lungo gli assi tramite due carrelli. Sono evidenziate la base (linea continua) e la roulette (linea tratteggiata) del moto.

$C$  può essere individuato trovando l'intersezione delle due rette ortogonalari ai due vettori velocità, ovvero usando il fatto che  $\langle \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C, \mathbf{v}_A \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C, \mathbf{v}_B \rangle = 0$ . Scrivendo  $\mathbf{x}_C = c_1 \hat{\mathbf{i}}_1 + c_2 \hat{\mathbf{i}}_2$  questo significa  $a - c_2 = 0$  e  $b - c_1 = 0$ , per cui  $\mathbf{x}_C = b \hat{\mathbf{i}}_1 + a \hat{\mathbf{i}}_2 = \ell \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + \ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2$ . Questa espressione fornisce già la traiettoria della base, essendo espressa nel riferimento fisso: dato che  $\theta \in \mathbb{R}$ , al variare dell'angolo il centro istantaneo di rotazione descrive una circonferenza di raggio  $\ell$  centrata nell'origine. Per ottenere l'equazione della roulette, basta osservare che il triangolo avente come vertici i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  è sempre rettangolo per costruzione: questo vuol dire che  $C$  è sempre su una circonferenza che ha come diametro l'asta, che naturalmente è solidale. Tale circonferenza è proprio la roulette. Questo stesso risultato può essere derivato in una maniera più esplicita, usando l'equazione per il centro istantaneo di rotazione in un riferimento solidale. Scegliamo per esempio un riferimento solidale avente l'origine in  $A$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_1$  con la stessa direzione del vettore  $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$  (la direzione dell'asta),  $\hat{\mathbf{e}}_2$  ad esso ortogonale in modo da fornire un riferimento positivamente orientato nel piano, e  $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_3$  (comunque irrilevante dato che il moto è piano). In tal caso

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 - \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_3,$$

ovvero

$$\hat{\mathbf{i}}_1 = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{i}}_2 = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Dunque

$$\mathbf{x}_C^* = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A = \ell \cos \theta^2 \hat{\mathbf{e}}_1 + \ell \cos \theta \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\ell}{2} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\ell}{2} \cos(2\theta) \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\ell}{2} \sin(2\theta) \hat{\mathbf{e}}_2,$$

che è una circonferenza centrata in  $\frac{\ell}{2} \hat{\mathbf{e}}_1$  (cioè al centro dell'asta) e di raggio  $\frac{\ell}{2}$ , come avevamo anticipato.

**Esempio 1.4** (Sistema biella–manovella) — Il sistema biella–manovella è un sistema che evolve secondo un moto piano. È costituito da due *aste rigide*, che indichiamo come  $\overline{OP}$  e  $\overline{PQ}$ . Ciascuna asta è un corpo rigido costituito da punti materiali disposti lungo i due rispettivi segmenti. La configurazione di ciascuna asta è caratterizzata univocamente quando sono date le coordinate dei due suoi estremi. Con riferimento alla Fig. 4, l'asta  $\overline{OP}$ , detta *manovella* e che supponiamo di lunghezza  $2\ell$ , è tale che il suo primo estremo  $O$ , è nell'origine, mentre il suo secondo estremo  $P$  è individuato dal vettore  $\mathbf{x}_P$ . L'estremo  $O$  è *vincolato* con una *cerniera fissa*, ovvero un dispositivo tale da permettere una rotazione del corpo rigido attorno al punto in cui è applicata, ma non una traslazione. Il punto  $O$  è quindi, per costruzione, un centro di rotazione dell'asta  $\overline{OP}$ , la cui configurazione è individuata automaticamente dal solo vettore  $\mathbf{x}_P$ .

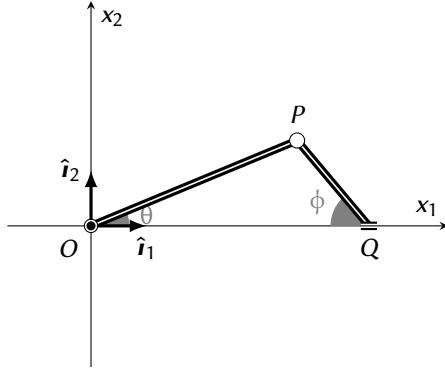
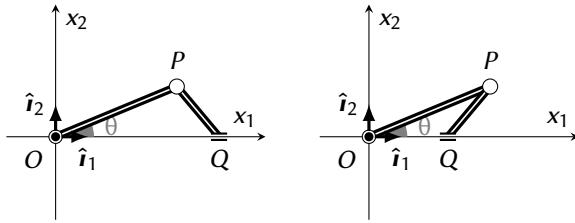


FIGURA 4. Sistema biella–manovella.

L'asta  $\overline{PQ}$ , detta *biella* e che supponiamo di lunghezza  $\ell$ , è soggetto all'azione di due diversi vincoli. In  $P$  è applicata una *cerniera mobile*, ovvero un dispositivo che permette la rotazione attorno a  $P$  senza vincolare però la posizione di  $P$  stesso. Inoltre, la cerniera forza l'estremo  $P$  della prima asta a coincidere con l'estremo omonimo della seconda. Il secondo estremo  $Q$ , invece, individuato dal vettore  $\mathbf{x}_Q$ , è vincolato, tramite un carrello, a muoversi lungo l'asse delle ascisse. Il sistema è quindi soggetto al seguente insieme di vincoli, due dei quali interni (quelli che esprimono la rigidezza delle due aste):

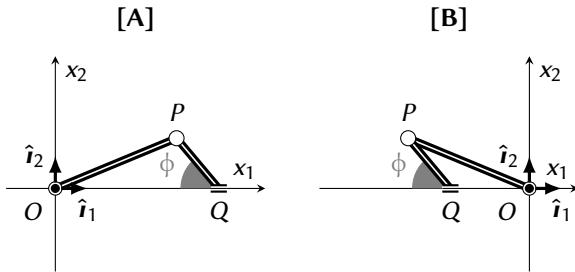
$$\|\mathbf{x}_P\| = 2\ell, \quad \|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P\| = \ell, \quad \langle \mathbf{x}_Q, \hat{\mathbf{i}}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = \langle \mathbf{x}_Q, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = 0.$$

Come conseguenza dei vincoli applicati, il sistema richiede solo un parametro per essere caratterizzato. Dalla figura si può intuire in effetti che fissando per esempio l'angolo  $\theta$  tra  $\mathbf{x}_P$  e l'asse delle ascisse, il vettore  $\mathbf{x}_P$  è univocamente determinato come  $\mathbf{x}_P = 2\ell \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + 2\ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2$ . Esistono però *due* possibili posizioni per  $Q$  compatibili con questo angolo, corrispondenti a due diverse configurazioni dell'intero sistema:



Questa ambiguità non è tuttavia troppo grave: l'insieme di possibili configurazioni assegnate ad un certo  $\theta$  ha solo due rappresentanti.

Esistono altre scelte ragionevoli di parametrizzazione del sistema. Per esempio, possiamo utilizzare l'angolo  $\phi$  tra  $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$  e la direzione  $-\hat{\mathbf{i}}_1$  indicato in figura seguente. Questa scelta è ugualmente legittima e presenta però le medesime ambiguità evidenziate sopra. Infatti un certo angolo  $\phi$  è associato a due possibili configurazioni:



Tuttavia c'è una importante differenza rispetto al caso precedente. Le due configurazioni disegnate sopra sono tali per cui il sistema, partendo dal set-up [A], *non* potrà mai raggiungere il set-up [B] durante una evoluzione: intuitivamente, questo richiederebbe all'asta  $\overline{OP}$  di fare una rotazione attorno all'origine, cosa che le è impedita precisamente dalla presenza della (più corta) asta  $\overline{PQ}$ . Per questa ragione, la variabile  $\phi$  può essere considerata una variabile "migliore" per lo studio del sistema biella-manovella: l'insieme delle possibili configurazioni del sistema può essere partizionato in due gruppi, corrispondenti a due set-up: [A] asta  $\overline{OP}$  sulla sinistra; [B] asta  $\overline{OP}$  sulla destra. Una configurazione associata ad un set-up non è raggiungibile partendo da una configurazione associata all'altro. D'altra parte, se vogliamo esplorare un set-up specifico,  $\phi$  parametrizza tutte le configurazioni possibili *compatibili con quel set-up*, senza ambiguità.

Per capire matematicamente questo fatto, osserviamo che l'ordinata del punto  $P$  si può scrivere, usando l'angolo  $\theta$ , come  $p_2 = 2\ell \sin \theta$  e allo stesso modo usando l'angolo  $\phi$ ,  $p_2 = \ell \sin \phi$ , per cui deve sempre valere

$$2 \sin \theta = \sin \phi.$$

Questa equazione ha soluzione in  $\phi$  solo se  $2 \sin \theta \in [-1, 1]$ , ovvero se

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{oppure} \quad \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$$

a meno di multipli di  $2\pi$ : i due intervalli corrispondono a configurazioni di tipo [A] e [B] rispettivamente. Il dominio di possibili valori di  $\theta$  è quindi disconnesso e  $\theta$  non può passare, con continuità, da un intervallo ad un altro. Ciò si può vedere scrivendo  $\theta$  in funzione di  $\phi$ : si ottengono *due* possibili soluzioni, ovvero

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sin \phi}{2}\right), \quad \theta = \pi - \arcsin\left(\frac{\sin \phi}{2}\right)$$

che corrispondono alle due curve in Fig. 6. Al variare di  $\phi$ , il sistema può muoversi lungo una delle due curve (ovvero può esplorare un "set-up"), ma non può "saltare" da una all'altra (ovvero da un set-up ad un altro). Per questa ragione, una volta assegnato un angolo  $\phi$ , ad esso corrisponderà un solo punto su una delle due curve, dipendentemente da come il sistema è stato costruito, e durante l'evoluzione rimarrà sulla stessa curva senza ambiguità. Scegliendo quindi  $\phi$  come parametro, possiamo esplorare *interamente* ciascuna curva (ovvero, ciascun "set-up" del sistema). Si noti che, per esempio, se la lunghezza della biella fosse stata maggiore di quella della manovella, allora sarebbe stata  $\theta$ , e non  $\phi$ , ad avere il ruolo di "buona variabile" in grado di esplorare completamente ciascuna delle due porzioni connesse, dato che in questo caso la manovella sarebbe stata in grado di compiere una rotazione completa attorno all'origine (e la biella non avrebbe potuto effettuare rotazioni complete attorno a  $Q$ ).

Cerchiamo ora base e rullo della due componenti del sistema. La base e la rullo della *manovella* sono entrambe facili a trovarsi: esse coincidono con il centro di rotazione  $O$ , la cui posizione non cambia sia nel riferimento fisso sia in quello solidale con la manovella. Base e rullo della *biella*, invece, sono meno triviali. Il centro di rotazione istantaneo  $C$  della biella può essere trovato osservando che  $v_Q$  è sempre diretto lungo  $\hat{i}_1$ , mentre  $v_P$  è sempre ortogonale a  $x_P$ . Di conseguenza, la posizione di  $C$  è ottenuta intersecando la retta passante per  $P$  di direzione  $x_P$  e la retta passante per  $Q$  di direzione  $\hat{i}_2$ . In altre parole,  $x_C = x_Q + t\hat{i}_2$  per un qualche  $t$  e  $x_C = t'\hat{i}_1$  per un qualche  $t'$ , ovvero  $x_Q + t\hat{i}_2 = t'\hat{i}_1$ . Se

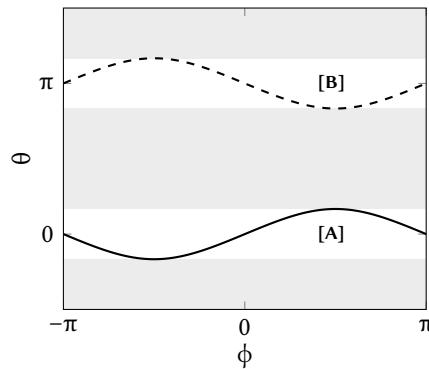


FIGURA 5. Spazio delle configurazioni del sistema biella-manovella. Sono da assumersi condizioni periodiche in entrambi gli assi. La curva continua corrisponde alla relazione tra  $\theta$  e  $\phi$  in una configurazione di tipo [A], la curva tratteggiata in una configurazione di tipo [B]. Le bande grigie corrispondono a zone proibite.

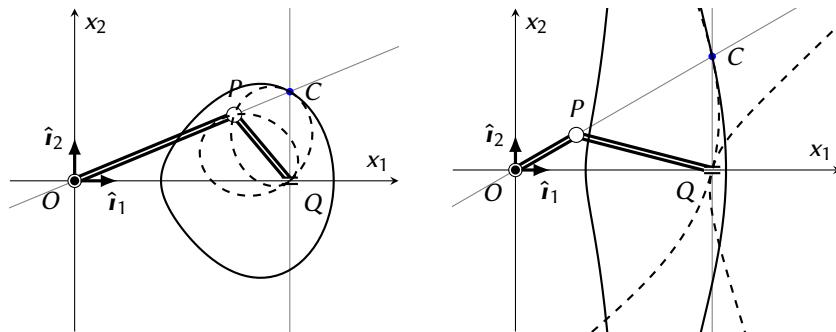


FIGURA 6. Sistema biella-manovella con base (linea continua) e rulletta (linea tratteggiata) della biella. A sinistra, caso in cui la manovella è lunga il doppio della biella; a destra, caso in cui la manovella è lunga la metà della biella. Come si vede, non è detto che le traiettorie polari siano curve semplici o chiuse.

indichiamo  $\mathbf{x}_P = p_1\hat{\mathbf{i}}_1 + p_2\hat{\mathbf{i}}_2$  e  $\mathbf{x}_Q = q_1\hat{\mathbf{i}}_1 + q_2\hat{\mathbf{i}}_2$ , risolvendo questo sistema si trova che  $t' = \frac{q_1}{p_1}$ , ovvero

$$\mathbf{x}_C = q_1\hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{q_1 p_2}{p_1}\hat{\mathbf{i}}_2.$$

La rulletta può essere trovata scegliendo un riferimento solidale con la biella, per esempio con l'origine in Q, e i vettori solidali

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_1 - \sin \phi \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \sin \phi \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_2$$

in modo che

$$\mathbf{x}_C^* = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_Q = \frac{q_1 p_2}{p_1} \hat{\mathbf{i}}_2 = -\frac{q_1 p_2}{p_1} \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{q_1 p_2}{p_1} \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Queste curve sono rappresentate nel grafico in Fig. 6.

**4.4. Rotolamento.** Supponiamo ora di avere due sistemi rigidi aventi come supporto due curve regolari  $\gamma$  e  $\psi$  nello spazio tridimensionale. Assumiamo che  $\gamma$  sia fissa rispetto ad un certo riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , mentre  $\psi$  è mobile ma tale da mantenere sempre un unico punto di contatto  $C$  con  $\gamma$  in ogni momento del suo moto, in modo che i vettori tangenti alle due curve in  $C$  siano paralleli: in questo caso si dice che le due curve sono in un *moto di rotolamento*. Il punto di contatto  $C$  non corrisponde ad un preciso punto materiale delle due curve, ma ad un luogo geometrico, ovvero alla *posizione* in cui le curve sono tangenti. Supponiamo ora di avere un riferimento mobile  $O_\star\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ , solidale con  $\psi$ , e sia  $O_\star$  individuata dal vettore  $\mathbf{x}_\star = \overrightarrow{OO_\star}$  rispetto al riferimento fisso. Il riferimento mobile è solidale con  $\psi$  avrà una certa velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  rispetto al riferimento fisso. Se nel riferimento fisso la velocità del punto di contatto è data da  $\mathbf{v}_C$ , il medesimo punto è identificato dal vettore  $\mathbf{x}_C^* = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_\star$  nel riferimento mobile, dove ha velocità  $\mathbf{v}_C^*$ , di modo che

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^* + \mathbf{v}_C^\tau, \quad \mathbf{v}_C^\tau := \mathbf{v}_\star + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_C^*$$

dove  $\mathbf{v}_C^\tau$  è detta, in questo contesto specifico, *velocità di strisciamento*. Il punto  $C$  è sempre un punto di tangenza tra le curve, e dovendo essere  $\mathbf{v}_C$  e  $\mathbf{v}_C^*$  tangenti alle due curve in  $\mathbf{x}_C$ , lo sarà anche la velocità di strisciamento.

Possono a questo punto verificarsi diversi casi. Se  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , allora il moto si dice di *puro strisciamento*: in questo caso la velocità di strisciamento corrisponde alla velocità di traslazione dell'origine del riferimento solidale.

Un caso molto speciale e importante è quello in cui  $\mathbf{v}_C^\tau = \mathbf{0}$  e, di conseguenza,  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^*$ : il moto è detto *di rotolamento puro*. Come si vede, la condizione di rotolamento puro è un vincolo imposto sulle velocità. Quando associato però a *curve* in rotolamento reciproco (come stiamo considerando qui) il fatto che le velocità del punto di tangenza nei due riferimenti (fisso e solidale) siano uguali implica che *il punto di tangenza percorre cammini di lunghezza uguale lungo le due curve in tempi uguali*. La condizione di rotolamento puro diventa così una condizione sulle *lunghezze*.

**4.4.1. Base, rullo e rotolamento puro.** Siamo in effetti già incappati in un moto di rotolamento puro tra curve.

**TEOREMA 4.6.** *Due curve nel piano rotolano senza strisciare l'una sull'altra se e solo se sono base e rullo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo una base e una rullo di un moto rigido piano avente velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , e sia  $C$  il centro istantaneo di rotazione. Questo soddisfa l'equazione  $\mathbf{v}_\star + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_\star) = \mathbf{0}$ , dove, come prima,  $\mathbf{v}_\star$  e  $\mathbf{x}_\star$  sono velocità e posizione dell'origine  $O_\star$  di un riferimento solidale rispetto al riferimento fisso. Ma questa quantità coincide esattamente con la velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_C^\tau$  del punto  $C$ , e quindi  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^*$ , ovvero base e rullo sono soggetti a rotolamento puro con punto di contatto  $C$ .

Viceversa, siano date due curve rigide nel piano  $\gamma$  e  $\psi$  soggette a rotolamento puro. Per definizione la velocità di trascinamento nel loro punto di contatto è nulla, ovvero il loro punto di contatto  $C$ , individuato dal vettore  $\mathbf{x}_C$  rispetto al riferimento solidale con una delle due curve, soddisfa la condizione  $\mathbf{v}_\star + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_\star) = \mathbf{0}$ , dove abbiamo usato la stessa convenzione di prima: ma questa è esattamente la condizione che *definisce* un centro istantaneo di rotazione. Dato che le due curve sono precisamente la traiettoria descritta dal punto di contatto nei rispettivi sistemi di riferimento, esse sono una base e una rullo.  $\square$

Da quanto abbiamo detto, il concetto di rotolamento puro può essere esteso al di là dei problemi in cui si ha a che fare in maniera evidente con curve in rotolamento: in effetti, in ogni *moto piano* si può identificare un centro istantaneo di rotazione, e, di conseguenza, un moto di rotolamento puro tra la base e la rulloetta associate.

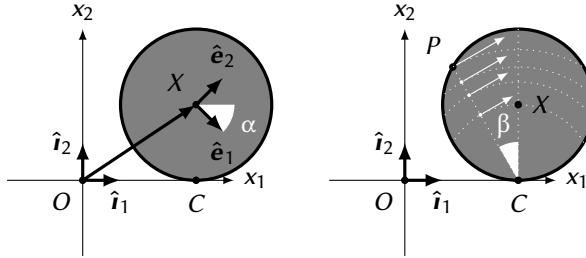
**Esempio 1.5** (Disco che rotola) — Consideriamo un disco rigido di raggio  $R$  che rotola senza strisciare lungo una guida coincidente con l'asse orientato secondo  $\hat{i}_1$  rimanendo nel piano generato da  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2\}$ . La condizione di rotolamento puro vuol dire che, detta  $\mathbf{x} = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2$  la posizione del centro del disco  $X$ , il punto  $C$  di contatto tra disco e guida deve soddisfare l'equazione

$$\mathbf{v}_X + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}) \equiv \mathbf{v}_C^\tau = \mathbf{0},$$

dove  $\boldsymbol{\omega}$  è la velocità angolare del disco. Essendo, con riferimento alla figura,  $\mathbf{v}_X = \dot{x}\hat{i}_1$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\hat{i}_3$  e  $\mathbf{x}_C - \mathbf{x} = -R\hat{i}_2$ , questa equazione si riscrive

$$\dot{x} = -R\dot{\alpha} \Rightarrow x = -R\alpha + x_0$$

dove  $x_0$  corrisponde al valore di  $x$  per  $\alpha = 0$ . Come anticipato, il rotolamento puro nel moto piano fornisce un vincolo sulle *posizioni*, nonostante appaia espresso inizialmente come una condizione sulle velocità.



Trattandosi di un moto piano, il punto  $C$  è anche il *centro istantaneo di rotazione*. Come esercizio, possiamo ulteriormente verificare questo fatto usando l'Eq. (1.21): la posizione del centro di rotazione è infatti

$$\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_X}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2 + \frac{\dot{\alpha}\dot{x}\hat{i}_3 \wedge \hat{i}_1}{|\dot{\alpha}|^2} = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2 + \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}}\hat{i}_2 = x\hat{i}_1 \equiv \mathbf{x}_C.$$

Senza bisogno di eseguire dei calcoli, si vede che in questo moto di rotolamento puro la *base* è costituita dall'asse delle ascisse, mentre la *rulloetta* è proprio il bordo del disco. Sulla base di questo fatto, un generico punto  $P$ , individuato dal vettore  $\mathbf{x}_P$  nel riferimento fisso, ha velocità

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_C).$$

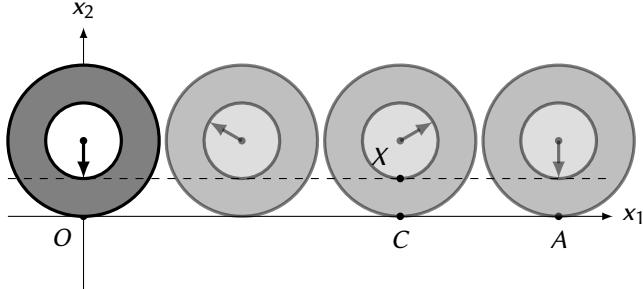
Inoltre, la velocità del centro del disco è  $\mathbf{v}_X = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) = R\dot{\alpha}\hat{i}_2$ . Usando questo risultato, possiamo per esempio calcolare il modulo della velocità di un punto  $P$  del *bordo* del disco usando

$$\|\boldsymbol{\omega}\| = \frac{\|\mathbf{v}_P\|}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_C\|} = \frac{\|\mathbf{v}_X\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_C\|} \Rightarrow \|\mathbf{v}_P\| = \|\mathbf{v}_X\| \frac{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_C\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_C\|} = \|\mathbf{v}_X\| \frac{2R \cos \beta}{R} = 2\|\mathbf{v}_X\| \cos \beta,$$

dove  $\beta$  è l'angolo tra  $\hat{i}_2$  e la direzione  $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_C$  come rappresentato in figura. Questo significa che  $P$  raggiunge la velocità massima quando  $\beta = 0$ : in tal caso,  $\|\mathbf{v}_P\| = 2\|\mathbf{v}_X\| = 2R\dot{\alpha}$ .

**Esempio 1.6** (Ruota di Aristotele) — Nella *Meccanica* dello pseudo-Aristotele e scritta attorno al 300 a.C., compare il seguente problema. Sia dato un disco che rotola su un piano, e si consideri un disco più piccolo ad esso concentrico e su esso fissato in maniera rigida, di modo che i due dischi siano solidali. Il disco maggiore rotola come in figura, andando dal punto  $O$  al punto  $A$  senza strisciare compiendo una rivoluzione completa. Le distanze percorse dalle circonferenze di entrambi i dischi sono quindi uguali,

essendo essi rigidamente saldati. Questo induce però ad un apparente paradosso: la distanza percorsa dal cerchio più grande è uguale alla sua circonferenza, mentre il disco più piccolo ha compiuto una rotazione completa percorrendo un tragitto maggiore della sua propria circonferenza, apparentemente rotolando con maggiore rapidità (cosa impossibile, dato che i due dischi sono saldati). Come è possibile?



La soluzione al paradosso discende da quanto abbiamo detto sopra. Infatti, se è vero che il punto di contatto tra il disco maggiore e il piano di rotolamento ha velocità istantanea nulla per via della condizione di rotolamento puro, immaginando un ipotetico piano di rotolamento su cui poggia il disco minore durante il moto (linea tratteggiata in figura), il punto di contatto  $X$  del disco più piccolo con il piano ipotetico *non* sarebbe istantaneamente fermo: la sua velocità sarà infatti data dalla condizione  $\mathbf{v}_X = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)$ , dove  $\mathbf{x}_C$  è il vettore che identifica il punto di contatto reale  $C$  del disco maggiore. In altre parole, il disco più piccolo non è in rotolamento puro sul suo piano ipotetico di appoggio, ma viene trascinato durante il moto “strisciando” su di esso.



## CAPITOLO 2

# Leggi della meccanica

### 1. Massa e quantità di moto

Abbiamo finora analizzato la cinematica dei “punti materiali” e dei “corpi rigidi” focalizzandoci sull’evoluzione delle loro posizioni ed ignorandone altre possibili proprietà intrinseche. Abbiamo inoltre ignorato come il moto stesso sia legato all’interazione tra i sistemi considerati e altri sistemi. Se vogliamo andare oltre la mera *descrizione* geometrica del moto nello spazio, è importante specificare quale sia l’effetto dell’interazione tra corpi sul loro stato cinematico. Una grandezza essenziale da introdurre a tale scopo è la *massa*: la massa di un corpo è una grandezza scalare non negativa associata al corpo stesso. Diremo che ad un punto *materiale*  $P$  è associata una certa massa  $m \geq 0$ . Si ha però spesso a che fare con corpi estesi che occupano una porzione di spazio  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  di misura non nulla: questi corpi possono essere immaginati come composti da un numero “enormemente grande” di punti materiali aventi ciascuno massa “enormemente piccola”, di modo che la somma di tutti i contributi in massa delle componenti produce un valore totale finito. Si introduce così una *densità volumetrica di massa*<sup>1</sup>  $\rho_X > 0$  con supporto  $\mathcal{B}$ , di modo che  $\rho_X d\mathbf{x}$  sia la massa associata al volumetto infinitesimo  $d\mathbf{x}$  attorno al punto  $X$ . La massa totale di un corpo che occupa una porzione di spazio  $\mathcal{B}$  e di densità  $\rho_X$  è quindi

$$m = \int_{\mathcal{B}} \rho_X d\mathbf{x}.$$

Analogamente, se il corpo occupa invece una *superficie*  $\sigma$ , si introduce una densità *superficiale*  $\rho_X^\sigma$ , di modo che, detto  $d\sigma$  l’elemento di superficie attorno ad  $X$ ,  $\rho_X^\sigma d\sigma$  sia la sua massa, e che la massa totale sia calcolata per mezzo di un integrale di superficie  $m = \int_{\sigma} \rho_X^\sigma d\sigma$ ; se infine il corpo occupa una curva  $\gamma$ , si introduce una densità *lineare*  $\rho_X^\ell$  tale per cui l’infinitesimo elemento  $d\gamma$  della curva attorno a  $X$  ha massa  $\rho_X^\ell d\gamma$  e la massa totale è ottenuta come un integrale di linea  $m = \int_{\gamma} \rho_X^\ell d\gamma$ . Nel seguito indicheremo in generale  $m = \int_{\mathcal{B}} \rho_X d\mathbf{x}$  come l’integrale sul supporto geometrico del corpo, che sarà un volume, una superficie o una curva a seconda dei casi.

**1.1. Centro di massa.** Avendo introdotto i concetti di massa e densità, possiamo definire quello di *centro di massa* come segue. Detta  $\rho$  la densità del corpo  $\mathcal{B}$ , e detta  $m$  la sua massa, il centro di massa  $G$  del corpo è individuato dal vettore

$$\mathbf{x}_G := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \rho_X d\mathbf{x}.$$

---

<sup>1</sup>Usiamo la notazione  $\rho$  per sottolineare che  $\rho$  dipende dal *punto*  $X$  e non dal vettore che lo individua rispetto ad un riferimento.

Se  $\rho_X \equiv \rho$  ha un valore costante indipendente dalla posizione, si dice che il centro di massa coincide con il centro geometrico del corpo: in questo caso, detto  $V := \int_{\mathcal{B}} d\mathbf{x}$  il volume del corpo,  $m = \rho V$  e  $\mathbf{x}_G = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{x} d\mathbf{x}$ . Il punto  $G$  non dipende dall'origine del riferimento cartesiano in uso ma il vettore che la individua ovviamente sì. Essendo il centro di massa definito come un integrale, se scriviamo  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$  con  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^k$  insiemi quasi disgiunti, allora

$$\mathbf{x}_G := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \rho_X d\mathbf{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{B}_i} \mathbf{x} \rho_X d\mathbf{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{x}_{G_i},$$

dove  $\mathbf{x}_{G_i}$  sono le coordinate del centro di massa  $G_i$  corrispondente alla porzione  $\mathcal{B}_i$  e  $m_i$  la sua massa.

Alcune proprietà del centro di massa possono essere facilmente ottenute dalla sua definizione, che esprime il centro di massa come combinazione *lineare* delle posizioni delle componenti del corpo. Il centro di massa di due punti materiali individuati da  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, per esempio, si trova sul segmento che li congiunge. Se il sistema che si sta considerando è piano, ovvero i punti materiali che lo costituiscono giacciono tutti in un certo piano  $\Pi$ , il centro di massa sarà sul medesimo piano. Il calcolo del centro di massa può essere poi ulteriormente facilitato dalla presenza di simmetrie nel sistema. Un esempio è il caso in cui il sistema abbia un *piano di simmetria materiale*.

**DEFINIZIONE 1.1** (Piano di simmetria materiale). Un piano è di simmetria materiale per un corpo  $\mathcal{B}$  se, dato un punto materiale  $P$  di massa  $m$  (o associato alla densità  $\rho_P$ ) del corpo, il punto  $Q$  diametralmente opposto a  $P$  rispetto a  $\Pi$  appartiene al corpo e ha stessa massa (o densità).

I punti  $P$  e  $Q$  sono in posizioni diametralmente opposte rispetto ad un piano  $\Pi$  se  $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$  è ortogonale al piano e il punto individuato da  $\frac{\mathbf{x}_P + \mathbf{x}_Q}{2}$  appartiene al piano. Un analogo esempio è quello di *asse di simmetria materiale*.

**DEFINIZIONE 1.2** (Asse di simmetria materiale). Una retta  $\mathcal{R}$  è un asse di simmetria materiale per un corpo  $\mathcal{B}$  se per ogni punto  $P$  di massa  $m$  (o densità  $\rho_P$ ) del corpo, ne esiste un altro  $Q$  di uguale massa (o densità) diametralmente opposto rispetto alla retta.

Come prima, due punti  $P$  e  $Q$  sono diametralmente opposti rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  se  $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$  è ortogonale alla retta e il punto individuato da  $\frac{\mathbf{x}_P + \mathbf{x}_Q}{2}$  appartiene ad essa.

**LEMMA 1.1.** *Se il corpo è dotato di un piano o di un asse di simmetria materiale, allora il suo centro di massa si troverà su di essi.*

Essendo il centro di massa una combinazione convessa delle posizioni di tutti i punti del corpo, se quest'ultimo è convesso il centro di massa si troverà all'interno del corpo stesso; in maniera simile, se il corpo è contenuto dentro una porzione di spazio convessa, il centro di massa sarà nella medesima porzione di spazio.

**1.2. Quantità di moto.** Dato un corpo  $\mathcal{B}$  caratterizzato da una densità  $\rho_X$ , si definisce *quantità di moto* del corpo il vettore  $\mathbf{Q}$  dato da

$$\mathbf{Q} := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_X \rho_X d\mathbf{x},$$

dove  $\mathbf{v}_X$  è la velocità osservata nel punto  $X$  individuato dal vettore  $\mathbf{x}$ . Se il corpo è costituito da  $N$  masse puntiformi  $\{m_k\}_{k=1}^N$ , di modo che la massa  $m_k$  abbia posizione  $\mathbf{x}_k$  e velocità  $\mathbf{v}_k$ , allora l'espressione precedente si scrive

$$\mathbf{Q} := \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{x}}_k.$$

Vale la seguente Proposizione, che esprime il fatto che la quantità di moto di un corpo coincide con quella di un corpo puntiforme di ugual massa concentrato nel centro di massa.

**PROPOSIZIONE 1.2.** *Sia  $\mathbf{v}_G$  la velocità del centro di massa  $\mathbf{x}_G$  di un corpo  $\mathcal{B}$  di massa  $m$ . Allora*

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Svolgiamo la dimostrazione per il caso di un sistema di  $N$  corpi puntiformi. Basta applicare la definizione, osservando che

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k = m \dot{\mathbf{x}}_G = m\mathbf{v}_G. \quad \square$$

## 2. Forze e lavoro

Una forza  $\mathbf{F}_P$  è definita in maniera intuitiva come *una azione applicata su un punto materiale  $P$  in grado di cambiarne la quantità di moto in una certa direzione*. Una forza è una quantità *invariante* rispetto a cambi di riferimento, ovvero indipendente dall'osservatore, sempre associata ad un certo *punto di applicazione*: si dice quindi che una forza è un *vettore applicato*. Essa può essere funzione del tempo, della posizione  $\mathbf{x}_P$  dell'oggetto materiale  $P$  a cui è applicata, e della sua velocità  $\mathbf{v}_P$ , ovvero in generale  $\mathbf{F}_P \equiv \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_P, \mathbf{v}_P)$ . La retta passante per  $P$  e parallela a  $\mathbf{F}_P$  si dice *retta di applicazione* della forza. La forza si dice *costante*,  $\mathbf{F}_P \equiv \mathbf{F}_0$ , se non dipende da alcuna delle quantità menzionate sopra, ovvero non dipende né dal tempo, né dalla posizione del punto né dalla sua velocità. Si dice invece che la forza è *posizionale* se essa dipende solo dalla posizione di  $P$ ,  $\mathbf{F}_P \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ . Può anche avversi il caso in cui la forza dipenda solo dalla velocità del punto a cui è applicata,  $\mathbf{F}_P \equiv \mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}_P) \equiv \mathbf{F}_P(\mathbf{v}_P)$ . Si chiamano *forze attive* le forze di cui sia nota *a priori* la dipendenza funzionale dalle tre quantità suddette, ovvero tempo, posizione e velocità del punto di applicazione, indipendentemente dalla presenza di altre forze applicate al medesimo oggetto.

Per evitare di appesantire la notazione, in seguito ometteremo il pedice in  $\mathbf{F}_P$ , ricordando tuttavia che  $\mathbf{F}$  va sempre intesa come una quantità applicata in un punto. Il risultato dell'azione di una forza su un punto materiale (e su un corpo generico) può essere quantificato attraverso una serie di grandezze.

**2.1. Lavoro.** Consideriamo un punto materiale  $P$  individuato dal vettore  $\mathbf{x}_P(t)$  che evolve nell'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ . Si dice che

$$w := \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x}_P \rangle = \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}}_P \rangle dt$$

è il *lavoro elementare* della forza  $\mathbf{F}$ , supposta applicata in  $P$ , lungo lo spostamento infinitesimo  $d\mathbf{x}_P$ . Il lavoro elementare è una *forma differenziale* associata al campo vettoriale  $\mathbf{F}$ . È chiaro

quindi come calcolare il lavoro di una forza lungo una traiettoria  $\mathbf{x}_P(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$ : è sufficiente integrare la forma differenziale lungo la curva,

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}}_P \rangle dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt.$$

Nell'espressione precedente abbiamo introdotto la *potenza* associata ad una forza, definita come

$$\Pi := \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}}_P \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}_P \rangle.$$

**2.1.1. Forze posizionali e forze conservative.** Nel caso di forze posizionali, le espressioni integrali introdotte sopra diventano indipendenti dalla “cinematica”, ovvero da *come* una certa traiettoria viene percorsa, ma mantengono una dipendenza dalla sola *geometria* della traiettoria. Possiamo infatti riscrivere l'espressione del lavoro di una forza  $\mathbf{F}$  lungo una certa traiettoria in funzione della parametrizzazione intrinseca della curva, che assumiamo avere lunghezza  $\ell$ , eseguendo un cambio di variabili e sostituendo la dipendenza da  $t$  con una dipendenza dall'ascissa curvilinea  $s := \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{x}}_P(\tau)\| d\tau$ , e scrivendo  $\gamma(s) = \mathbf{x}_P(t(s))$ ,

$$w = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}_P(t)), \dot{\mathbf{x}}_P(t) \rangle dt = \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}_P(t)), \frac{\dot{\mathbf{x}}_P(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}_P(t)\|} \right\rangle \|\dot{\mathbf{x}}_P(t)\| dt = \langle \mathbf{F}(\gamma(s)), \hat{\mathbf{v}}_\gamma(s) \rangle ds$$

per cui

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}_P), \dot{\mathbf{x}}_P \rangle dt = \int_0^\ell \langle \mathbf{F}(\gamma), \hat{\mathbf{v}}_\gamma \rangle ds.$$

Come anticipato, ogni dipendenza dalla legge oraria è scomparsa e il lavoro diventa l'integrale della proiezione di  $\mathbf{F}$  lungo la direzione tangente alla curva. In altre parole, il lavoro di una data forza posizionale lungo una curva *non* dipende da come la curva viene percorsa, ma solo dalla curva stessa.

Il lavoro elementare, come abbiamo detto, è una forma differenziale, e sappiamo che una forma differenziale può essere chiusa e, in particolare, esatta: la proprietà di esattezza semplifica di molto il calcolo di integrali di linea e quindi, nel nostro contesto, il calcolo del lavoro di una forza. Il seguente risultato stabilisce che solo le forze posizionali possono essere associate a una forma differenziale esatta.

**TEOREMA 2.1.** *Condizione necessaria perché il lavoro elementare sia una forma esatta è che la forza sia posizionale.*

**DIMOSTRAZIONE.** La forma differenziale  $w = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle$  può essere intesa come una forma in uno spazio a 7 dimensioni  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  (dato che queste sono le possibili variabili del campo vettoriale  $\mathbf{F}$ ), in cui però i contributi lungo le direzioni associate a  $d\mathbf{t}$  e  $d\mathbf{v}$  sono assenti. Se la forma è chiusa (condizione necessaria per l'esattezza), dal teorema di Schwartz segue che tutte le derivate parziali rispetto alla velocità e al tempo devono essere nulle, ovvero la forza è posizionale,  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$ .  $\square$

La forma non può perciò essere chiusa, e quindi tantomeno esatta, se  $\mathbf{F}$  dipende da  $t$  o dalla velocità del punto materiale a cui è applicata. D'altra parte, se  $\mathbf{F}$  è posizionale, non è detto che

la forma sia chiusa: a tal fine è richiesto che essa soddisfi la definizione

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad \forall i, j.$$

Queste condizioni sono equivalenti alla condizione

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Una forza che soddisfa questa proprietà si dice *irrotazionale*. Sappiamo inoltre che se il dominio di definizione di  $\mathbf{F}$  è connesso per archi, una forma chiusa è anche esatta, ovvero esiste una funzione scalare  $V$ , detta in meccanica *energia potenziale* e determinata a meno di una costante additiva, tale che  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . Questo fatto è di grande importanza, dato che il lavoro infinitesimo di una forza siffatta si può scrivere come un differenziale esatto,

$$w = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = -\langle \nabla V, d\mathbf{x} \rangle = -dV.$$

Una forza associata ad una forma esatta si dice *conservativa*. La potenza di una forza conservativa si scrive

$$\Pi = -\frac{dV}{dt}.$$

Il lavoro di una forza conservativa lungo una curva  $\mathbf{x}_P(t)$  associata alla traiettoria di un punto materiale  $P$ , data per  $t \in [t_0, t_1]$  e di estremi  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$  e  $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(t_1)$ , si calcola semplicemente come

$$W = - \int_{\mathbf{x}_P} dV = V(\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x}_1)$$

e dipende perciò *solo* dai punti iniziale e finale della traiettoria, ma *non* dipende dalla traiettoria seguita. In particolare, se la traiettoria è chiusa, il lavoro di una forza conservativa è nullo. Questa proprietà è *caratterizzante* per le forze conservative. L'energia potenziale di una forza conservativa è talvolta rimpiazzata, nell'analisi, dal *potenziale*  $U = -V$ . Le due quantità svolgono lo stesso ruolo ma è importante prestare attenzione a quale si utilizza, dato che questo determina una differenza di segno. Ribadiamo che  $V$  è *sempre* dato a meno di costanti additive irrilevanti. Nel seguito ometteremo tali costanti per semplicità.

**Esempio 2.1** (Forze costanti) — Le forze costanti sono un esempio di forza conservativa. In effetti, se  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$  vettore costante, allora si vede subito che

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad \text{con} \quad V(\mathbf{x}) = -\langle \mathbf{F}_0, \mathbf{x} \rangle.$$

Un esempio notevole di forza costante è la *forza peso* che agisce su un corpo puntiforme di massa  $m$  in prossimità della superficie terrestre, che si può approssimare come  $\mathbf{F}_0 = -mg\hat{\mathbf{i}}_3$  per una certa costante  $g$ , assumendo un riferimento cartesiano in cui  $\hat{\mathbf{i}}_3$  è orientato dal basso verso l'alto. In questo caso, se  $\mathbf{x} = \sum_i x_i \hat{\mathbf{i}}_i$ ,  $V(\mathbf{x}) = mgx_3$ .

**Esempio 2.2** (Forze centrali) — Un'importante famiglia di forze conservative è costituita dalle cosiddette *forze centrali* aventi la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -V'(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \quad \text{dove} \quad V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

dove  $\mathbf{x}_0$  è un certo vettore fissato e  $\mathbf{x}$  individua la posizione in cui la forza è applicata. Una forza siffatta è sempre orientata secondo la congiungente tra la posizione  $\mathbf{x}$  e quella del “centro”  $\mathbf{x}_0$ . Si tratta di forze

conservative di energia potenziale  $V(\mathbf{x}) = \Phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$ , come si vede prendendo il gradiente. Un esempio di forza centrale è la *forza elastica* associata all'energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}k\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$$

detta anche *potenziale elastico*. La forza elastica dipende da un coefficiente positivo  $k$  e modellizza matematicamente l'azione di una *molla ideale* avente lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k > 0$ . La molla va intesa come fissata nella posizione individuata da  $\mathbf{x}_0$  e applicata ad un punto materiale in posizione  $\mathbf{x}$ . Data la sua importanza, torneremo sullo studio della forza elastica in seguito.

**Esempio 2.3** (Forza di gravitazione universale) — La *legge di gravitazione universale* nasce da una serie di osservazioni sperimentali sul moto dei corpi, e in particolare dei corpi celesti. Siano dati due punti materiali  $P$  e  $X_0$  di massa  $m$  e  $M$  e in posizione  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$  rispettivamente secondo un riferimento cartesiano ortonormale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Si osserva che  $X_0$  esercita sul  $P$  una forza pari a

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \equiv -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0.$$

Nella formula precedente, la costante  $G$  è detta *costante di gravitazione universale*: se le masse sono misurate in chilogrammi, le distanze in metri e il tempo in secondi, essa è circa pari a  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ . Come vedremo, la forza quindi è *attrattiva*, ovvero tende ad avvicinare i corpi in questione. La forza è anche conservativa: infatti

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad V(\mathbf{x}) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}.$$

Dalla definizione data sopra, la forza gravitazionale è una *forza centrale*. Assumendo di avere, al posto del punto materiale  $X_0$ , un corpo esteso  $\mathcal{B}$  con densità  $\rho$  e massa totale  $M$ , la formula precedente si scrive

$$\mathbf{F}_P = -Gm \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\mathbf{z})(\mathbf{x}-\mathbf{z})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^3} d\mathbf{z} = -Gm \nabla \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|} d\mathbf{z} \equiv -\nabla V(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{x}) := -Gm \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|} d\mathbf{z}$$

che mostra come la forza risulti anche in questo caso da un potenziale  $V(\mathbf{x})$ .

La formula per  $V$  scritta sopra può semplificarsi ulteriormente in caso di simmetrie del sistema. Supponiamo per esempio che  $\mathcal{B}$  sia una *sfera omogenea* di raggio  $R$ , centrata nell'origine del riferimento cartesiano. Essendo la sfera omogenea e di massa  $M$ , essa ha quindi densità  $\rho(\mathbf{z}) \equiv \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$  per  $\|\mathbf{z}\| \leq R$ : di conseguenza, il centro della sfera è anche il centro di massa di  $\mathcal{B}$ . Sceglieremo l'orientazione dei nostri assi in modo tale che la seconda massa  $m$  considerata, assunta puntiforme, sia in posizione  $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{i}}_3$ . Il potenziale può essere calcolato usando le coordinate sferiche, scrivendo (a meno di costanti additive)

$$V(\mathbf{x}) = -Gm\rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta}} = -2\pi Gm\rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta}}.$$

Per procedere, eseguiamo ora un cambio di variabili introducendo, al posto della variabile  $\theta$  una nuova variabile  $s$  tale che

$$s^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta \Rightarrow 2s ds = 2xr\sin\theta d\theta,$$

per cui l'integrale nella variabile  $\theta$  diventa

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta}} = \frac{1}{xr} \int_{|r-x|}^{r+x} ds = \frac{r+x-|r-x|}{xr}.$$

Per integrare in  $r$ , dobbiamo distinguere tra il caso  $x > R$  (la massa  $m$  è *fuori* dalla sfera  $\mathcal{B}$ ) e il caso  $x \leq R$  (la massa  $m$  è *dentro* la sfera  $\mathcal{B}$ ):

$$V(\mathbf{x}) = -2\pi \frac{Gm\rho}{x} \int_0^R r(r+x-|r-x|) dr = \begin{cases} \frac{GmM}{x} & \text{se } x > R, \\ 2\pi\rho Gm \left( R^2 - \frac{x^2}{3} \right) & \text{se } x \leq R, \end{cases}$$

ovvero, riassorbendo i termini costanti,

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{GmM}{x} & \text{se } x > R \\ -\frac{2\pi\rho Gmx^2}{3} & \text{se } x \leq R \end{cases}$$

sempre a meno di costanti additive arbitrarie. Ciò vuol dire che la forza applicata su un punto lungo l'asse di direzione  $\hat{\mathbf{i}}_3$  punta verso il centro della sfera  $\mathcal{B}$ : basta infatti derivare per ottenere

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \begin{cases} -\frac{GmM}{x^2} \hat{\mathbf{i}}_3 & \text{se } x > R, \\ -\frac{GmM_x}{x^2} \hat{\mathbf{i}}_3 & \text{se } x \leq R, \end{cases}$$

dove  $M_x = \frac{4\pi}{3}\rho x^3$  è la massa entro una sfera di raggio  $x$  centrata nell'origine: questo fatto è molto interessante, perché significa che, se  $x \leq R$  (cioè se la massa  $m$  è dentro la sfera), la forza esercitata su di essa è dovuta al *solo contributo* della porzione di massa di  $\mathcal{B}$  inclusa nella sfera di raggio  $x$  centrata in  $O$ .

Supponiamo quindi che, in primissima approssimazione, la Terra sia una sfera di raggio  $R_T$ , con densità a simmetria sferica (di modo che il suo centro di massa corrisponda col centro geometrico della sfera) e massa  $M_T$ . Esattamente come nel caso di una sfera omogenea, anche in questo caso è possibile mostrare che la forza esercitata dalla Terra su un punto materiale di massa  $m$  a quota  $h$  sulla superficie terrestre è

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_T m}{(R_T + h)^2} \hat{\mathbf{r}},$$

dove  $\hat{\mathbf{r}}$  è il versore associato al vettore che, partendo dal centro della Terra, punta la posizione del corpo considerato. Assumendo ora  $R_T \gg h$ , ovvero che l'oggetto non sia a distanze molto grandi dalla superficie del pianeta, la formula precedente si può approssimare come

$$\mathbf{F} \simeq -\frac{GM_T m}{R_T^2} \hat{\mathbf{r}} \equiv -mg\hat{\mathbf{r}}, \quad g := \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

La quantità  $g$ , che abbiamo già incontrato, è detta *accelerazione di gravità* e si può considerare costante fintantoché  $h \ll R_T$ . Questa osservazione permette di semplificare molto lo studio della caduta dei gravi e in generale della gravità a distanze minime dalla superficie terrestre: in tale approssimazione, possiamo scrivere  $\mathbf{F}_P = -\nabla \hat{V}$  con  $\hat{V}(\mathbf{x}) = mg\langle \mathbf{x}, \hat{\mathbf{r}} \rangle$ , pertanto anche in questa approssimazione la forza rimane conservativa. Analizzeremo più in là l'effetto della forza gravitazionale in questa utile approssimazione.

**2.2. Sistemi di forze.** Una quantità che giocherà un ruolo rilevante nello studio della meccanica è il *momento di una forza  $\mathbf{F}$  applicata in  $P$  rispetto ad un polo*, che chiameremo  $A$  e supporremo essere individuato dal vettore  $\mathbf{x}_A$  rispetto ad una certa origine  $O$  di un riferimento dato. Tale momento è dato dalla quantità

$$\tau_A := (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}.$$

La distanza del polo dalla retta di applicazione di  $\mathbf{F}$ , pari a  $\|\tau_A\| \|\mathbf{F}\|^{-1}$ , si dice *braccio* della forza rispetto al polo. È facile trovare una relazione tra il momento calcolato rispetto ad un polo  $A$  e il momento calcolato rispetto ad un polo  $B$ , dato che

$$\tau_B = (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{F} = (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{F} = \tau_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{F}.$$

Si noti che se ci si sposta parallelamente alla retta di applicazione (ovvero, se  $\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$  e  $\mathbf{F}$  sono paralleli) il momento non cambia.

Se  $\hat{\mathbf{u}}$  è il versore di una retta  $\mathcal{R}$  che passa per  $A$ , si dice che il momento *assiale* della forza rispetto alla direzione  $\hat{\mathbf{u}}$  è pari a

$$\tau_{\mathcal{R}} = \langle \tau_A, \hat{\mathbf{u}} \rangle.$$

Questa quantità non dipende dal punto  $A$ , ma solo dalla retta  $\mathcal{R}$ : adoperando come polo un qualsivoglia punto della retta  $\mathcal{R}$  si ottiene lo stesso risultato (che quindi dipende dalla retta stessa). Scegliendo per esempio  $B \in \mathcal{R}$  diverso da  $A$ ,

$$\langle \tau_B, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \tau_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \tau_A, \hat{\mathbf{u}} \rangle$$

essendo  $\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$  e  $\hat{\mathbf{u}}$  paralleli. Se decomponiamo  $\mathbf{F}$  nelle due componenti parallela,  $\mathbf{F}_{\parallel} := \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \hat{\mathbf{u}}$ , e perpendicolare,  $\mathbf{F}_{\perp} := \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\parallel}$ , a  $\mathcal{R}$ , è immediato vedere che solo quest'ultima conta nel calcolo del momento assiale,

$$\tau_{\mathcal{R}} = \langle \tau_A, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_A) \wedge (\mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}), \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_{\perp}, \hat{\mathbf{u}} \rangle.$$

**2.2.1. Classificazione dei sistemi di forze.** Un *sistema di forze*  $\mathcal{F} := \{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^N$  è una collezione di forze  $\mathbf{F}_k$ , ciascuna intesa applicata in un certo punto  $P_k$ . Un sistema di forze è associabile a due vettori, la *risultante*  $\mathbf{R}$  e il *momento risultante*  $\tau_A$  rispetto al polo  $A$ , detti *vettori caratteristici del sistema di forze* e definiti come

$$\mathbf{R} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k, \quad \tau_A := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_k \equiv \sum_{k=1}^N \tau_{k,A}.$$

Due sistemi di forze che hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante si dicono *equivalenti*. Il momento risultante soddisfa la stessa legge di cambiamento di polo vista per il momento di una singola forza: per passare dal polo  $A$  al polo  $B$  possiamo scrivere

$$\tau_B = \tau_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{R}.$$

Il momento totale quindi non cambia se si sposta il polo parallelamente a  $\mathbf{R}$ , dato che in questo caso  $\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B \parallel \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$ . Se  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  il momento delle forze *non dipende dal polo scelto* e quindi potremo semplicemente scrivere  $\tau$ . Si noti che se due sistemi  $\mathcal{F}$  e  $\hat{\mathcal{F}}$  sono equivalenti rispetto ad un certo polo, lo sono rispetto ad ogni altro. Se per esempio  $\tau_A = \hat{\tau}_A$  sono i due momenti risultanti rispetto ad  $A$  dei due sistemi di forze equivalenti  $\mathcal{F}$  e  $\hat{\mathcal{F}}$ , di forza risultante  $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}$ ,

$$\tau_B = \tau_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{R} = \hat{\tau}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \hat{\mathbf{R}} = \hat{\tau}_B.$$

Dato un sistema di forze  $\mathcal{F}$ , se ne può ottenere uno equivalente  $\hat{\mathcal{F}}$  tramite le seguenti operazioni:

- traslando una forza del sistema lungo la sua retta di applicazione;
- sostituendo un sottoinsieme di forze di  $\mathcal{F}$  con la loro risultante (su una opportuna retta di applicazione);

- aggiungendo o sottraendo un insieme di forze avente risultante e momento globali nulli.

Esiste un oggetto matematico di particolare interesse che lega i due vettori caratteristici di un sistema di forze, detto *invariante scalare* o *trinomio invariante*,

$$\mathcal{I} := \langle \mathbf{R}, \boldsymbol{\tau}_A \rangle.$$

Questo oggetto non dipende da  $A$ , come si vede subito usando la legge di cambiamento del polo: ciò implica che la componente di  $\mathbf{R}$  lungo  $\boldsymbol{\tau}_A$  non cambia al variare del polo  $A$  scelto. Vale la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 2.2** (Asse centrale). *Sia  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ : esiste un asse  $\mathcal{A}$ , detto asse centrale, parallelo ad  $\mathbf{R}$  e rispetto ai cui punti il momento totale delle forze è minimo e parallelo a  $\mathbf{R}$ . Inoltre, se  $\mathcal{I} = 0$ , allora il momento rispetto a punti di questa retta, detta in questo caso retta di applicazione del risultante, è nullo.*

Se  $\boldsymbol{\tau}_A$  è il momento delle forze rispetto ad un polo generico  $A$ , l'asse centrale è parametrizzabile come l'insieme dei punti individuati da

$$\mathbf{z}(\lambda) = \mathbf{x}_A + \frac{\mathbf{R} \wedge \boldsymbol{\tau}_A}{\|\mathbf{R}\|^2} + \lambda \mathbf{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Non sarà sfuggita l'analogia con l'espressione dell'asse istantaneo di moto nel teorema di Moysi-Chasles, come dell'invariante scalare con l'invariante cinematico. La ragione è che stiamo analizzando campi vettoriali che soddisfano lo stesso tipo di legge. Nel caso dell'atto di moto, valeva infatti

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = \mathbf{v}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \boldsymbol{\omega}$$

mentre qui vale

$$\boldsymbol{\tau}_B = \boldsymbol{\tau}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{R}.$$

La forma funzionale delle due relazioni è la stessa: il ruolo che lì aveva il campo di velocità  $\mathbf{v}_A$  è qui preso dai momenti delle forze  $\boldsymbol{\tau}_A$ , mentre il ruolo di  $\boldsymbol{\omega}$  è preso da  $\mathbf{R}$ ; il trinomio invariante è l'equivalente dell'invariante cinematico che abbiamo introdotto nello studio dell'atto di moto.

**2.2.2. Sistemi di forze a trinomio invariante nullo.** Consideriamo ora alcuni speciali sistemi di forze, aventi in comune la proprietà di avere un trinomio invariante nullo.

**DEFINIZIONE 2.1** (Sistema piano di forze). Un sistema di forze si dice piano se tanto le forze quanto i loro punti di applicazione appartengono ad uno stesso piano.

Un sistema piano ha quindi  $\mathbf{R}$  appartenente al medesimo piano  $\Pi$  a cui appartengono i punti di applicazione del sistema di forze, mentre  $\boldsymbol{\tau}_A$  rispetto ad un polo  $A \in \Pi$  sarà ortogonale a  $\Pi$ . Per un sistema piano, quindi *il trinomio invariante  $\mathcal{I}$  è sempre nullo*.

Vi sono però altri casi in cui il trinomio invariante può essere nullo.

**DEFINIZIONE 2.2** (Sistema di forze concorrenti). Un sistema di forze concorrenti in  $P$  è tale che le rette di applicazione di tutte le forze si incontrano in un unico punto  $P$ .

In questo caso, avendo tutte le forze momento nullo rispetto a  $P$ ,  $\mathcal{I} = 0$ .

**DEFINIZIONE 2.3** (Sistema di forze parallele). Un sistema di forze parallele è tale che le rette di applicazione di tutte le forze sono parallele.

Qui  $\mathbf{R}$  avrà la stessa direzione di tutte le forze, mentre il momento corrispondente sarà ortogonale ad essa, e di conseguenza anche in questo caso il trinomio invariante è nullo. Un sistema di forze parallele  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^N$  permette di introdurre il concetto di *centro di forze*. Dato che, in un siffatto sistema esiste un versore  $\hat{\mathbf{u}}$  tale per cui  $\mathbf{F}_k = f_k \hat{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{u}}$ , scegliendo un punto  $Z$  dell'asse centrale avremo che  $\tau_Z = \mathbf{0}$ , per via del fatto che l'invariante cinematico è nullo: ciò significa che

$$\tau_Z = \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_Z) \wedge \mathbf{F}_k = \left( \sum_{k=1}^N f_k \mathbf{x}_k - R \mathbf{x}_Z \right) \wedge \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

ovvero, per un qualche  $\lambda$

$$\mathbf{x}_Z = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N f_k \mathbf{x}_k + \lambda \hat{\mathbf{u}}.$$

Il punto individuato dal vettore

$$\mathbf{x}_{\mathcal{F}} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N f_k \mathbf{x}_k$$

si dice *centro delle forze parallele*: esso è l'unico punto che non dipende dalla direzione  $\hat{\mathbf{u}}$  ma solo dalle posizioni dei punti di applicazione delle forze. Si tratta di una sorta di “centro di massa delle forze”.

**Esempio 2.4** (Baricentro) — Sia dato un sistema di punti materiali  $\{P_k\}_{k=1}^N$ : supponiamo che il punto  $P_k$  abbia massa  $m_k$  e sia individuato da un vettore  $\mathbf{x}_k$  rispetto ad un riferimento riferimento  $O_* \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  solidale con la Terra, dove  $\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv \hat{\mathbf{r}}$  è diretto come il raggio che unisce il centro della Terra a  $O_*$ , punto sulla superficie terrestre, puntando nella direzione uscente. Abbiamo visto che in prossimità della superficie possiamo approssimare la forza peso agente su  $P_k$  come  $\mathbf{F}_k = -m_k g \hat{\mathbf{e}}_3$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Il sistema di forze  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_k\}$  è un sistema di forze parallele e possiamo individuarne il *centro* utilizzando la formula sopra

$$\mathbf{x}_{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sum_k m_k g} \sum_k m_k g \mathbf{x}_k = \frac{1}{m} \sum_k m_k \mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}_G,$$

dove  $m = \sum_{k=1}^N m_k$  è la massa totale del sistema. Il centro di questo campo è quindi il già noto centro di massa, detto in questo contesto *baricentro*. È interessante osservare che il baricentro è effettivamente il punto in cui si può immaginare applicata la forza peso dell'intero sistema. Per esempio, l'energia potenziale assegnata all'intero sistema equivale a quella di un punto di massa  $m$  collocato nel baricentro: infatti, se il potenziale assegnato ad ogni punto  $P_k$  è  $V(\mathbf{x}_k) = m_k g \langle \mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle$ , allora il potenziale totale del sistema si può scrivere come

$$V = \sum_{k=1}^N V(\mathbf{x}_k) = g \sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle = mg \langle \mathbf{x}_G, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle.$$

Infine, vale la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 2.4** (Sistema di forze equilibrato). Un sistema di forze si dice equilibrato se

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \tau = \mathbf{0}.$$

2.2.3. *Coppie di forze e sistemi equivalenti.* Una coppia di forze è un esempio minimo di sistema di forze non triviale a risultante nulla.

**DEFINIZIONE 2.5** (Coppia di forze). Una coppia di forze  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$  è un sistema di due forze avente  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ .

Il *momento di una coppia*  $\tau$  è una quantità che non dipende dal polo (essendo  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ) e, se non nullo, esso individua un piano, detto *piano della coppia*: la distanza  $b$  tra le rette di applicazione delle due forze si dice *braccio della coppia*, di modo che  $\|\tau\| = \|\mathbf{F}\|b$ . Naturalmente, ogni momento  $\tau$  può essere immaginato come il risultato di una coppia  $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$  tra le infinite possibili, aventi rette di applicazione nel piano perpendicolare a  $\tau$  e braccio  $b = \|\tau\| \|\mathbf{F}\|^{-1}$ . L'importanza delle coppie di forze sta nel seguente Teorema, che mostra come un sistema generico di forze sia sempre equivalente ad un sistema costituito al più da una forza risultante e una coppia.

**TEOREMA 2.3.** *Sia dato un sistema di forze  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^N$  con risultante  $\mathbf{R}$  e momento risultante  $\tau_O$  rispetto all'origine. È sempre possibile costruire un sistema equivalente di forze  $\hat{\mathcal{F}}$  costituito al più da una forza pari alla risultante e una coppia.*

**DIMOSTRAZIONE.** Possono esserci quattro possibili casi, che possiamo considerare uno per uno.

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$  e  $\tau = \mathbf{0}$ : il sistema è equivalente ad un sistema nullo  $\hat{\mathcal{F}} = \emptyset$ .

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$  e  $\tau \neq \mathbf{0}$ : il sistema è equivalente ad una coppia  $\hat{\mathcal{F}} = \{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ , in cui per esempio  $-\mathbf{F}$  è applicato nell'origine e  $\mathbf{F}$  in un punto  $\mathbf{x}$  di modo che valga  $\tau = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}$ .

$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathcal{I} = 0$ : il sistema è equivalente ad  $\hat{\mathcal{F}} = \{\mathbf{R}\}$ , costituito da una sola forza  $\mathbf{R}$  applicata su un punto  $P$  della retta di applicazione  $\mathcal{R}$  della risultante di  $\mathcal{F}$ . In un sistema siffatto, scegliendo un polo  $A \in \mathcal{R}$ ,  $\tau_A = \mathbf{0}$ , che è lo stesso valore del momento risultante in  $\mathcal{F}$ , essendo  $\mathcal{I} = 0$ .

$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathcal{I} \neq 0$ : il sistema è equivalente a  $\hat{\mathcal{F}} = \{\mathbf{F}, \mathbf{R} - \mathbf{F}\}$ , in cui  $\mathbf{R}$  e  $-\mathbf{F}$  possono essere immaginate applicate in un punto qualsiasi, per esempio l'origine, e  $\mathbf{F}$  è applicato in un punto  $P$  individuato da  $\mathbf{x}$ . Il sistema  $\hat{\mathcal{F}}$  ha risultante pari a  $\mathbf{R}$  e momento rispetto all'origine dato da  $\hat{\tau}_O = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}$ : basta perciò scegliere  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{F}$  di modo che  $\langle \mathbf{R}, \hat{\tau}_O \rangle = \mathcal{I}$ .  $\square$

**Q Nota finale** — Tutto quanto discusso qui per i sistemi di forze si può ripetere, in generale, per i sistemi di *vettori applicati*, ovvero ogni qualvolta si ha a che fare con un insieme di  $N$  vettori ciascuno dei quali è appaiato ad un punto di applicazione nello spazio: si possono, in tal caso, definire i momenti assiali e polari del sistema di vettori applicati, individuare il loro asse centrale, e così via.

**2.3. Lavoro e potenza di sistemi di forze.** In analogia con quanto fatto per una singola forza, è possibile definire il lavoro infinitesimo e la potenza di un sistema di forze  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^N$  come

$$w = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, d\mathbf{x}_k \rangle, \quad \Pi = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \dot{\mathbf{x}}_k \rangle,$$

dove  $\mathbf{x}_k$  è il punto di applicazione della forza  $\mathbf{F}_k$  di velocità  $\dot{\mathbf{x}}_k \equiv \mathbf{v}_k$ . Queste due formule generali possono essere ulteriormente manipolate nel caso in cui si abbia a che fare con un corpo rigido. Nel caso di un corpo rigido sappiamo infatti che tra le velocità di due suoi punti  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  deve valere la relazione  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ , dove appare la velocità angolare del corpo

rigido  $\omega$ . Questa relazione si può scrivere in forma differenziale come

$$d\mathbf{x}_i = d\mathbf{x}_j + (\boldsymbol{\omega} d t) \wedge (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j).$$

Questo significa che, scelto un punto  $P$ , individuato dal vettore  $\mathbf{x}$  e in moto solidale col corpo rigido, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, d\mathbf{x}_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, d\mathbf{x} \rangle + \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) \rangle dt = \langle \mathbf{R}, d\mathbf{x} \rangle + \left\langle \sum_{k=1}^N (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{F}_k, \boldsymbol{\omega} \right\rangle dt \\ &= \langle \mathbf{R}, d\mathbf{x} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_P, \boldsymbol{\omega} \rangle dt, \end{aligned}$$

ovvero

$$\Pi = \langle \mathbf{R}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_P, \boldsymbol{\omega} \rangle,$$

che mostra come nel caso del corpo rigido si possa esprimere il lavoro infinitesimo e la potenza di un sistema di forze in termini dei vettori caratteristici. Se  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , allora  $\boldsymbol{\tau}_P \equiv \boldsymbol{\tau}$  non dipende dal polo, per cui  $w = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega} \rangle dt$  e  $\Pi = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega} \rangle$ .

### 3. Principi della meccanica

Le leggi della meccanica sono il risultato di una serie di accurate sperimentazioni che hanno permesso di identificare la relazione tra l'evoluzione temporale delle posizioni dei corpi e le forze che agiscono su di essi. Le quantità introdotte finora, che sono di natura descrittiva, vengono messe in relazione non triviale grazie a tre postulati, o *principi*, introdotti da Galileo Galilei e, soprattutto, Isaac Newton, che ne ha dato la formulazione moderna. In questa sezione presenteremo questi postulati, o *principi*, e ne discuteremo le più immediate implicazioni.

**POSTULATO 3.1** (Primo principio della meccanica). *Esistono dei sistemi di riferimento, detti sistemi di riferimento inerziali, rispetto ai quali un punto materiale isolato, ovvero non soggetto a forze, rimane in quiete o si muove con accelerazione nulla.*

**Q** Il primo principio è stato formalizzato da Newton ma introdotto da Galilei, che lo ha descritto in una celebre pagina per mezzo di un semplice ma efficace esperimento mentale riguardante il piano inclinato.

SALVIATI: [...] nel piano inclinato il mobile grave spontaneamente descende e va continuamente accelerandosi [...]; ma sul piano ascendente ci vuol forza a spingervelo ed anco a fermarlo, e che 'l moto impressogli va continuamente scemando, sí che finalmente si annichila. [...] Ora ditemi quel che accaderebbe del medesimo mobile sopra una superficie che non fusse né acclive né declive.

SIMPLICIO: [...] Non vi essendo declività, non vi può essere inclinazione naturale al moto, e non vi essendo acclività, non vi può esser resistenza all'esser mosso, talché verrebbe ad essere indifferente tra la propensione e la resistenza al moto: parmi dunque che e' dovrebbe restarvi naturalmente fermo. [...]

SALVIATI: Cosí credo, quando altri ve lo posasse fermo; ma se gli fusse dato impeto verso qualche parte, che seguirebbe?

SIMPLICIO: Seguirebbe il muoversi verso quella parte.

SALVIATI: Ma di che sorte di movimento? di continuamente accelerato, come ne' piani declivi, o di successivamente ritardato, come negli acclivi?

SIMPLICIO: Io non ci so scorgere causa di accelerazione né di ritardamento, non vi essendo né declività né acclività.

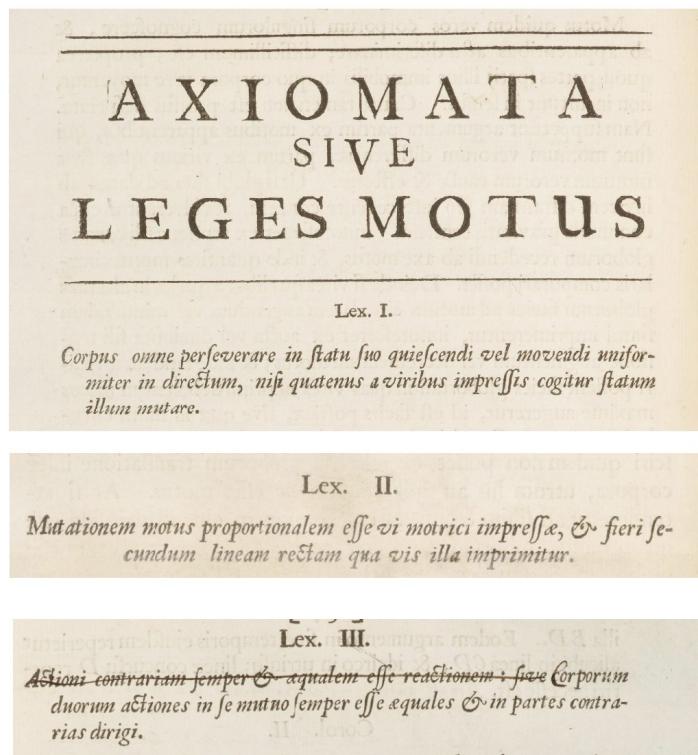


FIGURA 1. Leggi o postulati della meccanica come appaiono nella prima edizione dei *Philosophiae naturalis principia mathematica* di Isaac Newton (1687), con sue proprie annotazioni, inclusa una cancellazione della prima frase nel Terza legge, corrispondente all’italiano *ad una azione corrisponde una reazione sempre uguale e contraria*.

SALVIATI: Sì. Ma se non vi fusse causa di ritardamento, molto meno vi dovrebbe esser di quiete: quanto dunque vorreste voi che il mobile durasse a muoversi?

SIMPLICIO: Tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie né erta né china.

SALVIATI: Adunque se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimente senza termine, cioè perpetuo?

SIMPLICIO: Parmi di sì, quando il mobile fusse di materia da durare.

Galileo Galilei  
*Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo* (1632)

Dato un sistema inerziale, le trasformazioni galileiane già discusse permettono di costruirne infiniti altri: basta infatti che il nuovo riferimento abbia accelerazione dell’origine e velocità angolare nulle rispetto al primo. In altre parole, dato un riferimento inerziale, ogni altro riferimento inerziale è in moto traslatorio uniforme rispetto ad esso.

**POSTULATO 3.2** (Secondo principio della meccanica). *In un riferimento inerziale, un punto*

materiale di massa  $m$  in posizione  $\mathbf{x}_P$  su cui agisce una forza  $\mathbf{F}$  è soggetto ad una accelerazione  $\ddot{\mathbf{x}}_P$  parallela alla forza e proporzionale ad essa secondo la relazione

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}_P.$$

**POSTULATO 3.3** (Terzo principio della meccanica). *Data una coppia di punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , in posizioni  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  rispettivamente, indicando con  $\mathbf{F}_{12}$  la forza esercitata da  $P_1$  su  $P_2$  con  $\mathbf{F}_{21}$  la forza esercitata da  $P_2$  su  $P_1$ , allora*

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}.$$

Il terzo postulato, detto *principio di azione e reazione*, stabilisce che l'interazione reciproca di due punti materiali avviene sulla retta che li congiunge (dato che  $\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \wedge \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}$ ) e si manifesta come una coppia di forze.

L'uso dei tre principi necessita di un postulato aggiuntivo altrettanto importante e che permette di andare oltre lo studio di sistemi di due punti materiali.

**POSTULATO 3.4** (Principio di sovrapposizione). *Supponiamo che su un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in posizione  $\mathbf{x}_P$  agiscano due forze,  $\mathbf{F}^a$  e  $\mathbf{F}^b$ , e siano  $\ddot{\mathbf{x}}_P^a$  e  $\ddot{\mathbf{x}}_P^b$  le accelerazioni che esse indurrebbero separatamente. Allora, la contemporanea applicazione di  $\mathbf{F}^a$  e  $\mathbf{F}^b$  produce una accelerazione  $\ddot{\mathbf{x}}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P^a + \ddot{\mathbf{x}}_P^b$ .*

**3.1. Determinismo meccanico.** Se le forze agenti su un sistema dipendono solo dalla sua posizione, dal suo atto di moto e dal tempo, i postulati enunciati sopra sono *tipicamente* sufficienti a predire il moto dei sistemi materiali in un certo intervallo di tempo, purché se ne conoscano le condizioni iniziali, ovvero la configurazione e l'atto di moto del sistema al tempo iniziale.

Per essere più precisi, consideriamo per esempio un punto materiale di massa  $m$ . Supponiamo di conoscere la funzione  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P, t)$  che fornisce la forza totale agente su di esso ad un dato tempo  $t$  e a date posizione  $\mathbf{x}_P$  e velocità  $\dot{\mathbf{x}}_P$  del punto stesso, il problema di predire la traiettoria  $\mathbf{x}_P(t)$  del punto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  si formula come il seguente *problema di Cauchy*

$$(2.1) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_P(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_P(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P, t) = m\ddot{\mathbf{x}}_P, \end{cases}$$

in cui  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{v}_0$  sono posizione e velocità del punto al tempo iniziale  $t = t_0$  e costituiscono le *condizioni iniziali* dell'evoluzione considerata. Questo problema, la cui incognita è la *funzione vettoriale*  $\mathbf{x}_P(t)$  che soddisfa tutte le equazioni per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , ammette un'unica soluzione sotto l'ipotesi che la funzione  $\mathbf{F}$  sia lipschitziana nei suoi argomenti, come richiesto del Teorema di Cauchy. A questo proposito, è utile aprire una breve ma importante parentesi.

**Q Equazioni differenziali ordinarie** — I principi della Meccanica stabiliscono che lo studio dell'evoluzione temporale della posizione dei corpi equivale allo studio di un insieme di *equazioni differenziali*. Elenchiamo qui alcuni fatti riguardo le *equazioni differenziali ordinarie*.

**DEFINIZIONE 3.1.** Sia  $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una funzione definita su un certo intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  è una equazione che coinvolge  $\mathbf{x}(t)$  ed un certo numero di sue derivate, fino ad un ordine massimo  $n$ , valida per ogni  $t \in I$ . Una soluzione dell'equazione differenziale

è una funzione che soddisfa l'equazione in ogni punto dell'intervallo  $I$ .

Una equazione differenziale ordinaria ha, in generale, una famiglia di possibili soluzioni, parametrizzata da un certo numero di parametri che l'equazione di per sé non permette di fissare. Questo insieme di soluzioni si dice *soluzione generale*. Una *soluzione particolare* di una equazione differenziale, invece, è un preciso elemento di questa famiglia. Per selezionare una specifica soluzione, sono in generale necessarie alcune condizioni aggiuntive che complementano l'equazione stessa. Tipicamente, queste condizioni riguardano il valore che la soluzione e le sue derivate fino all'ordine  $n - 1$  devono avere in un punto specifico di  $I$ : ciò che ne risulta è il cosiddetto *problema di Cauchy*.

**DEFINIZIONE 3.2.** Sia data una equazione differenziale, ed un insieme di condizioni iniziali. Il problema di determinare, nella famiglia della soluzione generale, la (o le) soluzioni che soddisfino le condizioni iniziali assegnate si dice problema di Cauchy.

Il fatto che un problema di Cauchy abbia o meno soluzione, e che eventualmente questa soluzione sia unica, non è banale. Il teorema di Cauchy è, in questo senso, centrale nello studio delle equazioni differenziali e fornisce le condizioni affinché la soluzione di un problema di Cauchy esista e sia unica. L'importanza di questo risultato va oltre il contesto della meccanica.

**TEOREMA 3.5 (Cauchy).** *Sia  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , dove  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ . Siano inoltre  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^d$ . Il problema differenziale di Cauchy*

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \ddot{\mathbf{x}}(t). \end{cases}$$

*ammette almeno una soluzione  $\mathbf{x}(t): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  se tutte le componenti di  $\mathbf{f}$  sono continue nei loro argomenti. Inoltre, la soluzione è unica se dette componenti sono anche lipschitziane su un aperto che contiene la terna iniziale  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ .*

Nel teorema compare il concetto di lipschitzianità, così definito.

**DEFINIZIONE 3.3 (Funzione lipschitziana).** Sia  $f: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione in molte variabili. Essa si dice lipschitziana su  $\mathcal{A}$  se esiste  $K > 0$  tale che

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}.$$

La condizione di lipschitzianità può essere verificata utilizzando il risultato seguente, che non dimostriamo: *se la funzione  $f$  è differenziabile su un compatto e ha su esso derivate continue, essa è lipschitziana*.

Si noti che la forma del problema di Cauchy data qui richiede di scrivere la derivata seconda di  $\mathbf{x}$  in termini di una funzione  $\mathbf{f}$  della derivata prima e della funzione stessa (oltre a  $t$ ). Una equazione differenziale in cui la derivata di ordine più alto dell'incognita può sciversi come funzione delle derivate di ordine più basso si dice *in forma normale*: non è sempre facile o ovvio scrivere un'equazione differenziale in una forma siffatta.

Il teorema di Cauchy si applica ugualmente al caso in cui si studi un *insieme* di punti e dimostra che, sotto opportune condizioni di regolarità, la conoscenza delle condizioni iniziali è in effetti sufficiente per caratterizzare l'evoluzione del sistema.

**Esempio 2.5 (Moto dei gravi) —** Come abbiamo già visto, se siamo interessati al moto in un intorno di un punto della superficie terrestre e su scale molto più piccole del raggio della Terra, possiamo trascurare la curvatura della superficie terrestre e introdurre un sistema di riferimento ortonormale  $O_* \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  tale per cui il punto  $O_*$  appartiene alla superficie della Terra, e  $\hat{\mathbf{e}}_3 \equiv \hat{\mathbf{r}}$  versore normale in  $O_*$  uscente dalla

superficie della Terra, mentre  $\hat{\mathbf{e}}_1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2$  sono tangenti alla superficie terrestre, come in Fig. 2 (sinistra). Questo sistema non è inerziale, ma, su scale spaziali e temporali molto piccole, può essere considerato *approssimativamente inerziale* assumendo il pianeta *immobile*. Come sappiamo, in prossimità di  $O_*$  possiamo approssimare la forza peso a cui è soggetto un generico corpo di massa  $m$  come  $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{e}}_3$ . Se la forza peso è l'unica forza attiva sul corpo, l'evoluzione temporale in un certo intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  della posizione  $\mathbf{x}$  di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è piuttosto semplice da derivare. Occorre risolvere il problema di Cauchy

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ m\ddot{\mathbf{x}} = -mg\hat{\mathbf{e}}_3. \end{cases}$$

Nel problema di Cauchy,  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{v}_0$  sono rispettivamente la posizione e la velocità del punto al tempo iniziale del nostro studio,  $t_0$ , assunte note. Dall'ultima equazione si vede che *la dipendenza dalla massa può essere rimossa*, e possiamo trovare la legge per  $\mathbf{x}$  tramite successive integrazioni. In particolare

$$\int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau = - \int_{t_0}^t g\hat{\mathbf{e}}_3 d\tau \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t_0) = -g(t - t_0)\hat{\mathbf{e}}_3 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_0 - g(t - t_0)\hat{\mathbf{e}}_3,$$

e integrando ancora una volta si ottiene infine

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Questa equazione in forma vettoriale si può scomporre nelle tre componenti che essa rappresenta, ovvero

$$x_1(t) = x_{0,1} + v_{0,1}(t - t_0), \quad x_2(t) = x_{0,2} + v_{0,2}(t - t_0) \quad x_3(t) = x_{0,3} + v_{0,3}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2.$$

Ciò mostra che le componenti orizzontali del moto  $x_1$  e  $x_2$  evolvono di moto uniforme con velocità pari a quella iniziale. Viceversa, la terza componente ha un moto accelerato verso il basso per effetto della gravità. Questa espressione generale può essere utilizzata per derivare alcuni fatti interessanti riguardo il moto di gravi e proiettili. Supponiamo per semplicità che  $t_0 = 0$  e consideriamo due casi particolari.

**Caduta di un grave:** Supponiamo che il punto materiale parta da una certa altezza  $h > 0$  dal suolo, in modo che  $\mathbf{x}_0 = h\hat{\mathbf{e}}_3$ , e abbia velocità iniziale nulla,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$  (ovvero, viene lasciato cadere). Secondo la legge sopra, il suo moto sarà descritto dall'equazione

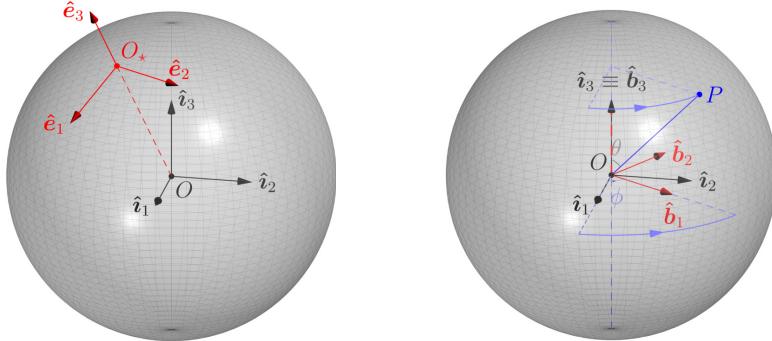
$$\mathbf{x}(t) = \left( h - \frac{1}{2}gt^2 \right) \hat{\mathbf{e}}_3,$$

per cui raggiungerà il suolo (ovvero  $x_3 = 0$ ) quando

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Come si vede, *assumendo che sul corpo agisca la sola forza gravitazionale* (ovvero ignorando, per esempio, la resistenza del mezzo in cui il corpo cade) il tempo di caduta non dipende dalla massa ma solo dall'accelerazione di gravità e dall'altezza.

**Lancio di un proiettile:** Supponiamo ora che il punto materiale inizi il suo moto dall'origine  $O_*$ , ovvero  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , ma che venga lanciato con velocità  $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + v_0 \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_3$ , ovvero, con una velocità di modulo  $v_0 > 0$  e un angolo rispetto al piano tangente alla superficie terrestre pari ad  $\alpha$ . L'equazione generale è ancora valida e, applicata a queste speciali condizioni iniziali,



**FIGURA 2.** Riferimenti utilizzati nello studio del campo gravitazionale terrestre nelle presenti note. In tutti i casi abbiamo considerato  $O$ , centro di massa della Terra, origine di un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . (*Sinistra*) Caso in cui la Terra viene considerata approssimativamente in quiete rispetto al sistema inerziale. Sistema di riferimento  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , centrato su un punto  $O_*$  della superficie terrestre. Supponendo la Terra in quiete nel riferimento inerziale, anche questo sistema è inerziale: il vettore  $\hat{e}_3$  è orientato come il vettore  $\overrightarrow{OO_*}$ . Su scale molto più piccole del raggio terrestre, la forza peso agente su punti materiali in prossimità di  $O_*$  si può considerare una forza costante sempre orientata come  $-\hat{e}_3$ . (*Destra*) Caso in cui si tiene in conto il moto di rotazione della Terra con velocità angolare  $\omega = \dot{\phi}\hat{i}_3$  costante. Il sistema di riferimento  $O\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$ , centrato anch'esso nel centro di massa terrestre e avente  $\hat{b}_3 \equiv \hat{i}_3$ , è solidale col pianeta. Il punto  $P$  si trova sulla superficie terrestre e si muove di moto solidale con il pianeta, ovvero è fermo secondo il riferimento rotante  $O\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$ .

assume la forma  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{e}_3$ . Possiamo chiederci quando tale oggetto avrà nuovamente  $x_3 = 0$ , ovvero toccherà il suolo. Le equazioni si scrivono, in termini delle coordinate, come

$$x_1(t) = v_0 \cos \alpha t, \quad x_2(t) = 0, \quad x_3(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

da cui si trova che

$$x_3(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{e} \quad t = t_* = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

dove la prima soluzione è quanto a noi noto (il proiettile è al suolo all'inizio del moto), mentre il secondo è il *tempo di volo*. A tale tempo, il proiettile si troverà in posizione

$$\mathbf{x}(t_*) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \hat{e}_1 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \hat{e}_1,$$

ovvero avrà percorso una distanza  $v_0^2 g^{-1} |\sin(2\alpha)|$ , che è pari alla *gittata del "cannone"* utilizzato per il lancio. La formula mostra che, a parità di velocità di lancio  $v_0$ , un angolo  $\alpha < \pi/4$  e un angolo  $\alpha' = \pi/2 - \alpha$  corrispondono alla stessa gittata, mentre che la gittata massima si raggiunge per  $\alpha = \pi/4$ . Possiamo anche derivare la *traiettoria* del proiettile, scrivendo la quota  $x_3(t)$  in funzione della distanza  $x_1(t)$  percorsa lungo la direzione orizzontale  $\hat{e}_1$ , usando il fatto che, dalla prima equazione, si trova  $t = \frac{x_1}{v_0 \cos \alpha}$  che sostituita nella seconda fornisce la quota in funzione dello spostamento orizzontale  $x_1$ ,

$$x_3 = \tan \alpha x_1 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_1^2.$$

Questa equazione descrive un arco di parabola che ha la sua quota massima a metà percorso, ovvero nel punto  $x_1$  tale che

$$\frac{dx_3}{dx_1} = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{gx_1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0 \Leftrightarrow x_1^{\max} = \frac{v_0^2 \tan \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}.$$

In tale punto, la quota è

$$x_3^{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

**3.2. Forze interne.** Consideriamo un sistema *isolato*  $\mathcal{U}$  costituito da  $N$  punti materiali. Con *isolato* intenderemo un sistema tale che tutte le forze agenti su di esso sono dovute all'esclusiva presenza di elementi del sistema stesso. Assumeremo che tutte le forze in  $\mathcal{U}$  nascano dall'interazione "a due corpi" tra due punti materiali di  $\mathcal{U}$ . Il sistema  $\mathcal{U}$  può sempre considerarsi come partizionato in due diversi sottosistemi disgiunti, siano essi  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{E}$ , di modo che  $\mathcal{S} \cap \mathcal{E} = \emptyset$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{S} \cup \mathcal{E}$ . Indichiamo ora  $\mathbf{F}_{jk}$  la forza esercitata sul punto materiale  $P_k$  per effetto della presenza del punto materiale  $P_j$ . Le forze  $\mathbf{F}_{kj}$  con  $k, j \in \mathcal{S}$  si dicono *forze interne* ad  $\mathcal{S}$ .

**TEOREMA 3.6.** *La risultante e il momento delle forze interne di un sistema  $\mathcal{S}$  sono sempre nulli. Le forze interne dunque sono sempre un sistema di forze equilibrato.*

**DIMOSTRAZIONE.** Anzitutto, per via del Terzo principio della meccanica, le forze interne sono a due a due opposte, ovvero  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Ne segue che la risultante delle forze interne è nulla

$$\mathbf{R}^{(\text{in})} = \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Sempre usando il Terzo principio,

$$\tau_O^{(\text{in})} \equiv \tau^{(\text{in})} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_i \wedge \sum_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}. \quad \square$$

**COROLLARIO 3.7.** *In assenza di forze esterne, il centro di massa  $G$  di un sistema di  $N$  punti materiali di massa totale  $m$  ha accelerazione  $\mathbf{a}_G$  nulla.*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo  $\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}$ , si ha

$$m\mathbf{a}_G = m \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{R}^{(\text{in})} = \mathbf{0}. \quad \square$$

**COROLLARIO 3.8.** *Il lavoro infinitesimo e la potenza associati alle forze interne di un corpo rigido sono nulli.*

**DIMOSTRAZIONE.** Considerato un corpo rigido di velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , detto  $P$  un punto ad esso solidale individuato dal vettore  $\mathbf{x}$ , il lavoro infinitesimo  $w^{(\text{in})} = \langle \mathbf{R}^{(\text{in})}, d\mathbf{x} \rangle + \langle \tau^{(\text{in})}, \boldsymbol{\omega} \rangle dt$  e la potenza  $\Pi^{(\text{in})} = \langle \mathbf{R}^{(\text{in})}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \langle \tau^{(\text{in})}, \boldsymbol{\omega} \rangle$  sono nulli per il teorema precedente.  $\square$

**3.3. Principio di Galilei e forze apparenti.** Abbiamo visto che in un sistema di riferimento inerziale un punto materiale  $P$  di massa costante  $m$  e soggetto ad una forza totale  $\mathbf{F}$  deve soddisfare il Secondo principio della meccanica,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P.$$

Questa legge, così come tutti i principi della meccanica, rimane inalterata se si effettua un cambio di riferimento passando da un sistema inerziale ad un altro sistema inerziale. Supponiamo infatti di avere un sistema inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , e consideriamo un secondo sistema  $O_*\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  che si muove di moto *traslatorio* rispetto al primo, ovvero avente velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  e accelerazione  $\mathbf{a}_*$  dell'origine  $O_*$  nulle rispetto al riferimento di partenza: il nuovo sistema è quindi inerziale. In questo caso la velocità del punto si trasforma in maniera molto semplice, ovvero secondo le trasformazioni di Galilei

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}_*,$$

dove  $\mathbf{v}_*$  è la velocità di  $O_*$  rispetto al riferimento inerziale di partenza. Soprattutto, questo comporta che l'accelerazione  $\mathbf{a}_P^*$  del punto  $P$  nel nuovo riferimento inerziale è invariata rispetto al sistema inerziale,  $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_P^*$ , essendo l'accelerazione di trascinamento  $\mathbf{a}_P^\tau$  e l'accelerazione di Coriolis  $\mathbf{a}_P^c$  entrambe nulle, sicché la formula sopra rimane anch'essa identica nel nuovo riferimento

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P^*.$$

Se il punto non è soggetto a forze e ha quindi accelerazione nulla nel primo riferimento, avrà accelerazione nulla anche nel secondo, rispettando così il Primo principio della meccanica. Ciò che abbiamo verificato è il cosiddetto *principio di relatività Galileiano*: le leggi della meccanica sono invarianti sotto trasformazioni di Galilei, assumendo la stessa forma in tutti i riferimenti inerziali.

Tuttavia, la formulazione del Secondo principio risulta alterata se il nuovo riferimento è non inerziale, ovvero se la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del nuovo riferimento e l'accelerazione  $\mathbf{a}_*$  della sua origine sono non nulli. Utilizzando la legge di composizione delle accelerazioni in Eq. (1.15), infatti, contributi aggiuntivi dovuti all'accelerazione di trascinamento e all'accelerazione di Coriolis appaiono nella legge del moto,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P = m\mathbf{a}_P^* + m\mathbf{a}_P^\tau + m\mathbf{a}_P^c.$$

Ciò equivale a dire che, volendo riscrivere un equivalente “Secondo principio” nel nuovo riferimento, sarà in generale necessario introdurre due nuove “forze”

$$\mathbf{F}^\tau := -m\mathbf{a}_P^\tau, \quad \mathbf{F}_c := -m\mathbf{a}_P^c,$$

dette *forza di trascinamento* e *forza di Coriolis* rispettivamente, in modo che

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^\tau + \mathbf{F}_c = m\mathbf{a}_P^*.$$

Queste “forze” sono dette *apparenti* in quanto compaiono nell’equazione del moto esclusivamente perché il nuovo sistema di riferimento è non inerziale e presenta una accelerazione e una velocità angolare non nulle rispetto al sistema inerziale di partenza. In particolare, la forza apparente di trascinamento

$$\mathbf{F}^\tau = -m(\mathbf{a}_* + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}_P^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_P^*))$$

è *posizionale*, mentre la forza di Coriolis

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P^*$$

dipende dalla velocità. A dispetto del nome, le forze apparenti hanno conseguenze reali molto concrete e importanti.

3.3.1. *Forza centrifuga.* Supponiamo che l'osservatore non inerziale sia tale che  $\mathbf{a}_* = \mathbf{0}$  e  $\dot{\omega} = \mathbf{0}$ , ma  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{i}}_3 \neq \mathbf{0}$  ha direzione fissa nel riferimento inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . In questo caso, la forza di trascinamento assume una forma molto più semplice, ovvero

$$\mathbf{F}^t = m\omega^2 (\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle \hat{\mathbf{i}}_3).$$

Questa forza è detta *forza centrifuga*. La ragione è che la quantità  $\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle \hat{\mathbf{i}}_3$  è esattamente la componente di  $\mathbf{x}_P^*$  ortogonale all'asse di moto  $\mathcal{R}$  passante per  $O_*$ : se chiamiamo  $Q$  il punto dell'asse più vicino a  $P$ , possiamo in effetti scrivere

$$\mathbf{F}^t = m\omega^2 (\mathbf{x}_P^* - \mathbf{x}_Q^*).$$

La forza centrifuga ha una ulteriore proprietà: essa è *conservativa*, dato che è possibile scriverla come il *gradiente* di un potenziale:

$$\mathbf{F}^t = -\nabla_{\mathbf{x}_P^*} V^{\text{cen}}(\mathbf{x}_P^*), \quad \text{dove} \quad V^{\text{cen}}(\mathbf{x}_P^*) := -\frac{1}{2}m\omega^2 \|\mathbf{x}_P^* - \mathbf{x}_Q^*\|^2 \equiv \frac{1}{2}\omega^2 m d^2(P, \mathcal{R}).$$

Vedremo in seguito che  $m d^2(P, \mathcal{R})$  ha un significato particolare ed è detto *momento d'inerzia* del punto materiale in  $P$  rispetto all'asse  $\mathcal{R}$ .

**Esempio 2.6** (Una correzione non-inerziale a  $g$ ) — Anche assumendo che su un punto materiale in prossimità della superficie terrestre non agiscano altre forze, un osservatore solidale con la Terra observerà una accelerazione debolmente dipendente dalla latitudine a cui si trova. Ciò è dovuto al fatto che un riferimento solidale con la Terra *non* è un sistema di riferimento inerziale per via di vari moti di rotazione e rivoluzione che la Terra compie e che abbiamo finora trascurato. Essendo non inerziale, infatti, in un riferimento solidale appaiono le su menzionate forze apparenti. Considereremo qui una prima correzione, dovuta all'effetto della *rotazione* terrestre: la Terra ruota attorno ad un suo asse con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  costante, compiendo una rotazione completa nell'arco di 24 ore, e pertanto un riferimento solidale con la Terra risente di questo moto rotatorio. Ignoriamo ogni altro moto terrestre (per esempio il moto di rivoluzione attorno al Sole) e indichiamo ancora una volta con  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  un riferimento che assumiamo inerziale, con origine nel centro della Terra e tale che  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{i}}_3$ . Introduciamo altresì un riferimento mobile solidale col moto della Terra,  $O\hat{\mathbf{b}}_1\hat{\mathbf{b}}_2\hat{\mathbf{b}}_3$ , con  $\hat{\mathbf{b}}_3 \equiv \hat{\mathbf{i}}_3$ , vedasi Fig. 2 (destra), e che condivide quindi l'origine con il riferimento fisso, tale per cui

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{b}}_2 = -\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Essendo il nuovo riferimento solidale, esso ruota insieme alla Terra in modo che  $\dot{\phi} = \omega$ , quantità costante. Immaginiamo ora di avere un punto materiale  $P$  di massa  $m$  sulla superficie, fermo nel sistema solidale con la Terra e con coordinate rispetto ad esso date da

$$\mathbf{x}_P^* = R_T \sin \theta \hat{\mathbf{b}}_1 + R_T \cos \theta \hat{\mathbf{b}}_3.$$

Su tale corpo è attiva la forza peso, che nel riferimento solidale con la Terra si scrive

$$\mathbf{F} = -mg \sin \theta \hat{\mathbf{b}}_1 - mg \cos \theta \hat{\mathbf{b}}_3,$$

ma sono altresì attive in generale delle forze *apparenti*. Abbiamo anzitutto una *forza di trascinamento*, che in questo caso, essendo  $\boldsymbol{\omega}$  con direzione costante, ha la forma di una forza centrifuga,

$$\mathbf{F}^t = m\omega^2 (\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle \hat{\mathbf{i}}_3) = m\omega^2 (\mathbf{x}_P^* - \langle \mathbf{x}_P^*, \hat{\mathbf{b}}_3 \rangle \hat{\mathbf{b}}_3) = m\omega^2 R_T \sin \theta \hat{\mathbf{b}}_1.$$

Sappiamo anche che, in generale, è presente una *forza di Coriolis*: tuttavia abbiamo assunto il corpo essere fermo nel sistema solidale con la Terra, per cui tale contributo, che è proporzionale alla velocità che

il corpo ha nel sistema di riferimento mobile, è nullo. Nel sistema non inerziale che stiamo studiando, quindi, il punto materiale  $P$  ha una accelerazione  $\mathbf{a}_P^*$  tale da soddisfare

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^\tau = m(\omega^2 R_T \sin \theta - g \sin \theta) \hat{\mathbf{b}}_1 - mg \cos \theta \hat{\mathbf{b}}_3 = m\mathbf{a}_P^*.$$

In altre parole, nel riferimento della Terra il corpo è soggetto ad una accelerazione diversa in modulo da  $g$  e pari a

$$\|\mathbf{a}_P^*\| = \sqrt{g^2 \cos^2 \theta + (g - R_T \omega^2)^2 \sin^2 \theta}.$$

Ne risulta che l'accelerazione percepita in un riferimento solidale con il moto terrestre ha in effetti un andamento che dipende dalla *latitudine* a cui il corpo si trova: in particolare, essendo  $R_T \omega^2 < g$ , ai poli ( $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ ), essa è massima e pari a  $\|\mathbf{a}_P\| = g$ , mentre all'equatore, dove  $\theta = \pi/2$ , l'accelerazione è minima e pari a  $\|\mathbf{a}_P\| = g - R_T \omega^2$ .

**3.3.2. Il problema dei due corpi.** Il cosiddetto *problema dei due corpi* consiste nello studio di un sistema isolato di due soli punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, soggetti a interazione reciproca. Sappiamo, dal Terzo principio, che in un siffatto sistema, il punto  $P_1$  esercita sul punto  $P_2$  una forza  $\mathbf{F}_{12}$ , e il punto  $P_2$  esercita sul punto  $P_1$  una forza  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ , con  $\mathbf{F}_{12}$  orientata parallelamente alla congiungente i due punti.

È possibile effettuare diverse scelte riguardo il riferimento da adottare per analizzare questo sistema, ma, come abbiamo visto, il centro di massa di un sistema isolato deve rimanere immobile o muoversi di moto rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento inerziale, per cui può essere sempre scelto come origine di un nuovo riferimento inerziale, in cui le posizioni dei due punti materiali sono individuate da due nuovi vettori  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  tali che  $m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ .

È possibile altresì scegliere uno dei due punti materiali come centro di un nuovo riferimento: questo riferimento sarà però, in generale, non inerziale. In particolare, partendo da un riferimento inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , possiamo cambiare riferimento scegliendo  $P_2\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , nuovo riferimento avente come origine il secondo punto materiale  $P_2$  ma stessa base del riferimento inerziale. Da quanto abbiamo detto sopra, essendo la velocità angolare del nuovo riferimento rispetto al primo nulla ( $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , dato che stiamo usando la stessa base), nel riferimento centrato in  $P_2$  la massa in  $P_1$  è soggetta all'azione della sola forza di trascinamento

$$\mathbf{F}^\tau = -m_1 \mathbf{a}_2,$$

quindi la sua equazione del moto si ottiene risolvendo

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}^\tau = \mathbf{F}_{21} - m_1 \mathbf{a}_2 = m_1 \mathbf{a}_1^*,$$

dove come al solito  $\mathbf{a}_1^*$  è l'accelerazione di  $P_1$  nel nuovo riferimento centrato in  $P_2$ . Usando ora il fatto che  $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{m_2} \mathbf{F}_{21}$ , abbiamo che

$$m_1 \mathbf{a}_1^* = \mathbf{F}_{21} + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{F}_{21} \Leftrightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{a}_1^* = \mathbf{F}_{21} \Leftrightarrow \mu \mathbf{a}_1^* = \mathbf{F}_{21},$$

dove la quantità

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$$

è detta *massa ridotta*. L'equazione sopra è interessante perché mostra che, nel riferimento in cui  $P_2$  è fisso, il moto di  $P_1$  segue la stessa legge che si aveva nel sistema inerziale con l'importante differenza che  $m_1$  viene sostituita da  $\mu$ , oltre al fatto che la forza  $\mathbf{F}_{21}$  agisce nella direzione dell'origine, che è fissa (cosa che tipicamente semplifica il problema). Si noti che se

$m_2 \gg m_1$ , allora  $\mu \simeq m_1$ : in effetti, nel limite  $m_2 \rightarrow +\infty$  il centro di massa del sistema tende a coincidere con  $P_2$ , che assume una accelerazione nulla. Questa approssimazione giustifica le assunzioni fatte sopra nello studio del moto dei gravi: essendo la massa della Terra enormemente più grande di quella del grave considerato, si può assumere che il suo centro sia fisso in un riferimento inerziale.

#### 4. Vincoli e reazioni vincolari

Abbiamo già incontrato casi in cui un punto materiale o un corpo rigido è soggetto ad alcune limitazioni del moto. In effetti, lo studio di un corpo libero è più l'eccezione che la regola in meccanica e, d'altra parte, esistono moltissimi modi in cui un sistema può essere vincolato. In generale un corpo viene vincolato per via della presenza di dispositivi atti a limitarne la libertà, che vengono detti appunto *vincoli*. Un *vincolo* su un corpo costituito da  $N$  punti  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , individuati dai vettori  $\mathbf{x}_k$  rispetto ad una origine data, avrà la forma di un insieme  $\mathcal{M}$  di  $m$  equazioni e/o disequazioni che riguardano la posizione e la velocità dei punti

$$(2.4) \quad \mathcal{M} = \begin{cases} \phi_1 (\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N, \{\dot{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N, t) \geq \text{ or } = 0 \\ \phi_2 (\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N, \{\dot{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N, t) \geq \text{ or } = 0 \\ \vdots \\ \phi_m (\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N, \{\dot{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N, t) \geq \text{ or } = 0. \end{cases}$$

Abbiamo già visto per esempio il caso del *moto piano* di un singolo oggetto puntiforme in cui, dato un riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , il vincolo di muoversi in un piano ortogonale a  $\hat{\mathbf{i}}_3$  per un punto  $P$  è espresso come  $\langle \dot{\mathbf{x}}_P, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = 0$ . Prima di studiare l'aspetto più genuinamente meccanico, è utile dare una classificazione dei vincoli in termini delle loro caratteristiche cinematiche.

**4.1. Classificazione cinematica dei vincoli.** I vincoli possono essere classificati sulla base della forma che il sistema di equazioni e disequazioni in Eq. (2.4) assume. Anzitutto, un vincolo può essere *interno* o *esterno*: nel primo caso, il vincolo coinvolge solo ed esclusivamente le *posizioni reciproche* e le velocità dei punti del sistema che si sta studiando, senza nessun riferimento all'interazione con l'ambiente esterno; nel secondo caso, invece, le relazioni in Eq. (2.4) coinvolgono delle quantità dipendenti dalla posizione o velocità di riferimenti esterni al corpo (per esempio, la distanza di un punto dall'origine del riferimento cartesiano fisso che si sta usando). Abbiamo per esempio già visto il caso di un vincolo interno quando abbiamo considerato i sistemi rigidi, vincolati ad avere punti a distanze *reciproche* fisse. La distinzione tra vincolo interno ed esterno dipende ovviamente da ciò che consideriamo essere il “sistema” e ciò che consideriamo essere il suo “esterno”. Più precise dal punto di vista matematico sono le seguenti definizioni:

**DEFINIZIONE 4.1** (Vincoli bilaterali e unilaterali). Un vincolo  $\mathcal{M}$  come in Eq. (2.4) si dice bilaterale quando nel suddetto sistema compaiono solo equazioni. Diversamente, si dice che è unilaterale.

**Esempio 2.7** — Un insieme di  $N$  punti in posizioni  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$  che debbono essere contenuti *entro* una sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine del riferimento fisso deve soddisfare  $N$  disequazioni vincolari, ciascuna nella forma

$$\|\mathbf{x}_k\|^2 \leq R^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è unilaterale. Se i punti debbono invece muoversi *sulla superficie* della sfera, dovrà valere

$$\|\mathbf{x}_k\|^2 = R^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è bilaterale.

**DEFINIZIONE 4.2** (Vincoli scleronomi e reonomi). Un vincolo  $\mathcal{M}$  come in Eq. (2.4) si dice scleronomo se le relazioni che lo definiscono non dipendono esplicitamente dal tempo; diversamente si dice reonomo.

**Esempio 2.8** — Gli esempi di vincolo considerati finora sono scleronomi. Se per esempio consideriamo un insieme di  $N$  punti in posizioni  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$  che debbono essere contenuti *entro* una sfera di raggio  $R(t) = R_0 + vt$ ,  $R_0, v$  quantità non negative, esso deve soddisfare  $N$  equazioni vincolari, ciascuna nella forma

$$\|\mathbf{x}_k\|^2 \leq (R_0 + vt)^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è reonomo per  $v \neq 0$ , diversamente è scleronomo.

4.1.1. *Sistemi olonomi.* Una classe particolarmente importante di vincoli è quella dei *vincoli olonomi*.

**DEFINIZIONE 4.3** (Vincoli olonomi e anolonomi). Un vincolo  $\mathcal{M}$  come in Eq. (2.4) si dice olonomo se le relazioni che lo definiscono sono in *forma finita*, ovvero possono essere messe in una forma tale da non contenere derivate delle posizioni; diversamente si dice anolonomo, o di mobilità.

Un vincolo anolonomo è un vincolo che coinvolge le velocità in gioco e che *non* può essere riscritto come un equivalente vincolo sulle posizioni. Considereremo esclusivamente vincoli olonomi, ovvero nella forma

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \phi_1 (\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N, t) \geq \text{ or } = 0 \\ \phi_2 (\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N, t) \geq \text{ or } = 0 \\ \vdots \\ \phi_m (\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N, t) \geq \text{ or } = 0 \end{cases}.$$

Un sistema vincolato in maniera olonoma permette di individuare un numero  $n \leq N$  di parametri *essenziali* e tra loro *indipendenti*, ovvero tali da essere tutti necessari e al tempo stesso sufficienti per la descrizione del moto. Questi parametri  $\{q_a\}_{a=1}^n$  si dicono *coordinate lagrangiane* o *generalizzate* o *libere*, e costituiscono i *gradi di libertà* del sistema che si può perciò descrivere per mezzo di un elemento  $\mathbf{q} = (q_a)_{a=1}^n$  di  $\mathbb{R}^n$ . Questo è il caso, per esempio, quando il vincolo  $\mathcal{M}$  è espresso in termini di  $m \leq 3N$  equazioni che permettono di scrivere *localmente*  $m$  coordinate in funzione delle restanti  $n = 3N - m$  (grazie al teorema di Dini): queste ultime possono avere il ruolo di coordinate lagrangiane. La conoscenza di  $\mathbf{q}(t)$  permette di caratterizzare completamente il moto e la funzione  $\mathbf{q}(t)$  fornisce essa stessa le *equazioni orarie* in coordinate lagrangiane. Lo spazio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  dei valori che  $\mathbf{q}$  può assumere è detto *spazio delle configurazioni* del sistema: al variare di  $t$ ,  $\mathbf{q}(t)$  descrive una curva in  $\Omega$  che esprime l'evoluzione del sistema stesso. Abbiamo già visto molti esempi di questa situazione, per esempio modellizzando moti rigidi in cui i vincoli interni, essendo olonomi, riducono il numero di parametri necessari a descrivere il sistema a non più di sei (per esempio, nello studio del sistema biella-manovella).

Dato che le coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  parametrizzano localmente il sistema, il vettore  $\mathbf{x}_k$  che individua la posizione di un generico punto  $P_k$  del sistema può essere inteso come una funzione di  $\mathbf{q}$  e, eventualmente, del tempo  $t$ , ovvero  $\mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}_k(\mathbf{q}(t), t)$ . Di conseguenza possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \partial_t \mathbf{x}_k + \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}.$$

Si noti che nel caso di vincoli scleronomi non c'è dipendenza esplicita di  $\mathbf{x}_k$  da  $t$  e  $\partial_t \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ . L'espressione sopra si può scrivere in forma differenziale come

$$d\mathbf{x}_k = \partial_t \mathbf{x}_k dt + \sum_{a=1}^n dq_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}$$

in cui la *spostamento infinitesimo*  $d\mathbf{x}_k$  viene espresso in termini di una variazione delle coordinate lagrangiane. Da quanto detto, il lavoro infinitesimo fatto dalle forze agenti su in sistema olonomo può scriversi

$$w = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, d\mathbf{x}_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \partial_t \mathbf{x}_k \rangle dt + \sum_{a=1}^n \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \rangle dq_a \equiv Q_t dt + \sum_{a=1}^n Q_a dq_a,$$

dove abbiamo introdotto l'insieme di scalari

$$Q_t := \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \partial_t \mathbf{x}_k \rangle, \quad Q_a := \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \rangle, \quad a = 1, \dots, n,$$

da *non* confondere con la quantità di moto. La potenza si calcola direttamente come

$$\Pi = Q_t + \sum_{a=1}^n Q_a \dot{q}_a.$$

Le quantità  $Q_a$  sono dette *forze generalizzate*, dato che svolgono un ruolo simile a quello delle forze nell'espressione di  $\Pi$  ma nello spazio delle configurazioni; inoltre,  $Q_t = 0$  se i vincoli in gioco sono fissi.

Se le forze sono conservative, ovvero  $\mathbf{F}_k = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_k}$  (inteso come il gradiente rispetto alla variabile  $\mathbf{x}_k$ ) per una certa funzione  $V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ , allora, ricordando che  $\mathbf{x}_k$  per ogni  $k$  è una funzione di  $\mathbf{q}$  e  $t$ , si ha che

$$Q_t := - \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_k}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t} \right\rangle = -\partial_t V \quad Q_a := - \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_k}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \right\rangle \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_a}, \quad a = 1, \dots, n.$$

Pertanto, in questo caso,

$$w = -\partial_t V dt - \sum_{a=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_a} dq_a \equiv -dV, \quad \Pi = -\partial_t V - \sum_{a=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_a} \dot{q}_a \equiv -\frac{dV}{dt},$$

che evidenzia come anche in presenza di vincoli olonomi il lavoro infinitesimo di forze conservative si può scrivere come un differenziale esatto. In definitiva, in presenza di vincoli olonomi le variabili cartesiane possono essere sostituite da quelle lagrangiane e le forze da forze generalizzate, ottenendo lo stesso tipo di formalismo.

**Esempio 2.9** (Punto su sfera) — Consideriamo un punto materiale  $P$ , la cui posizione è parametrizzata da  $\mathbf{x}_P = \sum_j x_j \hat{\mathbf{i}}_j$ , vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio  $R > 0$ . Il suo moto deve soddisfare l'equazione

$$\|\mathbf{x}_P\|^2 = R^2.$$

Questo vincolo è bilaterale omonimo. Questa equazione permette di esprimere *localmente* una delle coordinate di  $\mathbf{x}_P$  in funzione delle altre due, e pertanto il sistema ha  $n = 3 - 1 = 2$  gradi di libertà. Esistono quindi due parametri lagrangiani,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  in grado di parametrizzare il moto. È tuttavia più comodo non scegliere le coordinate cartesiane in questo caso, data la simmetria sferica del problema, ma piuttosto le due variabili angolari  $\theta$  e  $\phi$  che compaiono nella parametrizzazione sferica della posizione del punto, scrivendo

$$x_1 = R \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = R \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = R \cos \theta,$$

di modo che  $\mathbf{q} = (\theta, \phi)^T$ . Si noti che questa parametrizzazione non è problematica fuorché nei punti  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , dove  $\phi$  non è univocamente specificato.

**Esempio 2.10** (Rotolamento puro) — Abbiamo visto che il rotolamento puro di curva su curva equivale ad un vincolo sulle lunghezze percorse. Il vincolo di rotolamento puro è quindi in questo caso, sulla base di quanto detto sopra, omonimo. Non vale altrettanto quando si considera un rotolamento che coinvolga una superficie nello spazio. Consideriamo per esempio una sfera rigida di raggio  $R$  che rotola di rotolamento puro su un piano. Sia  $X$  il centro della sfera, identificato dal vettore  $\mathbf{x}$  di coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, R)^T$  rispetto ad un riferimento cartesiano ortonormale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Se  $C$  è il punto di contatto, per via della condizione di rotolamento puro avremo che

$$\mathbf{v}_X + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Questa condizione, analoga a quella fatta per il disco che rotola su una guida orizzontale, *non* può essere messa in forma omonoma e rimane una condizione sulle velocità, ovvero una condizione anolonomia. In altre parole, non equivale ad una relazione finita tra le coordinate cartesiane.

**4.2. Classificazione dinamica dei vincoli.** Dato che la presenza di vincoli non permette al sistema di assumere accelerazioni qualsivoglia, questo significa che un vincolo esercita una o più forze sul sistema per impedire che si realizzino certe configurazioni. Per esempio, se consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , in presenza di vincoli il Secondo principio potrà essere scritto in forma più precisa come

$$\mathbf{F}^{(a)} + \boldsymbol{\Phi} = m \mathbf{a}_P$$

dove  $\mathbf{F}^{(a)}$  è la risultante di tutte le forze attive agenti sul punto materiale, mentre  $\boldsymbol{\Phi}$  è una forza “di reazione”, esercitata dai dispositivi vincolari, tale da rendere  $\mathbf{a}_P$  compatibile con i vincoli imposti. Questo contributo, detto *reazione vincolare*, è una forza non nota a priori, ma che, come vedremo, deve soddisfare certe relazioni imposte dalla natura del vincolo. Caratterizzare un vincolo omonomo la cui configurazione evolve nel tempo è complesso, e richiede l'introduzione del concetto di *spostamento virtuale*, che racchiude l'informazione sulla geometria del vincolo ad un istante fissato. Uno *spostamento infinitesimo virtuale* è uno spostamento di un punto vincolato  $P$  compatibile coi vincoli che non tiene conto della loro dipendenza dal tempo e viene matematicamente espresso come

$$\delta \mathbf{x}_P = \sum_{a=1}^n \delta q_a \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial q_a}$$

dove la presenza di  $\delta$  ricorda che non si tratta di un “vero” differenziale di  $\mathbf{x}_P$ : il tempo infatti viene immaginato fisso e si variano infinitesimalmente solo le coordinate lagrangiane, che per costruzione tengono conto dei vincoli a cui il sistema è soggetto. In altre parole, uno spostamento virtuale contiene informazioni sulla *geometria del vincolo* attorno ad un punto *in un dato istante*. Ad uno spostamento virtuale si può associare una *velocità virtuale*

$$\tilde{\mathbf{v}}_P := \frac{\delta \mathbf{x}_P}{\delta t} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial q_k},$$

che è diversa da quella reale se  $\partial_t \mathbf{x}_P \neq \mathbf{0}$ . Questo oggetto è una quantità *sempre tangente al vincolo nell’istante considerato*.

**Esempio 2.11** — Consideriamo il caso del moto di un punto materiale  $P$ , vincolato a muoversi su una sfera di raggio  $R(t)$  dipendente dal tempo. Se  $\mathbf{x}_P = \sum_j x_j \hat{\mathbf{i}}_j$ , L’equazione vincolare è

$$\|\mathbf{x}_P(t)\|^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) = R^2(t).$$

Differenziando questa espressione

$$\frac{1}{2} d \|\mathbf{x}_P\|^2 = x_1 d x_1 + x_2 d x_2 + x_3 d x_3 = \langle \mathbf{x}_P, d \mathbf{x}_P \rangle = \dot{R} R d t.$$

Il differenziale tiene conto propriamente della dipendenza del vincolo dal tempo. Viceversa, se consideriamo uno spostamento virtuale, la dipendenza esplicita dal tempo in  $R$  viene trascurata e si ottiene

$$\frac{1}{2} \delta \|\mathbf{x}_P\|^2 = x_1 \delta x_1 + x_2 \delta x_2 + x_3 \delta x_3 = \langle \mathbf{x}_P, \delta \mathbf{x}_P \rangle = 0.$$

Come si vede, lo spostamento virtuale è tangente alla sfera, essendo ortogonale a  $\mathbf{x}_P$ , mentre quello reale in generale non lo è dato che è tenuto a “seguire” la possibile dilatazione o contrazione della sfera che si verifica nell’intervallo temporale infinitesimo  $d t$ . Se quindi calcoliamo la velocità del punto, abbiamo che la velocità reale,  $\mathbf{v}_P$ , ha una componente nella direzione radiale, proprio perché  $\langle \mathbf{x}_P, d \mathbf{x}_P \rangle = R \dot{R} d t \Rightarrow \langle \mathbf{x}_P, \mathbf{v}_P \rangle = R \dot{R}$ . Se invece si calcola una *velocità virtuale* utilizzando lo spostamento  $\delta \mathbf{x}_P$ , si ha  $\langle \mathbf{x}_P, \tilde{\mathbf{v}}_P \rangle = 0$ : la velocità virtuale è tangente cioè al vincolo.

Gli spostamenti virtuali possono essere associati ai concetti di *lavoro infinitesimo virtuale* e *potenza virtuale*. Supponiamo per esempio di avere un sistema olonomo di  $N$  particelle. Possiamo introdurre il lavoro infinitesimo virtuale  $\tilde{w}$  e la potenza virtuale  $\tilde{\Pi}$  come

$$\tilde{w} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{x}_k \rangle, \quad \tilde{\Pi} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \tilde{\mathbf{v}}_k \rangle.$$

Introducendo le variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$ , queste due quantità si riscrivono come

$$\tilde{w} = \sum_{a=1}^n Q_a \delta q_a, \quad \tilde{\Pi} = \sum_{a=1}^n Q_a \dot{q}_a,$$

dove, in virtù del fatto che gli spostamenti sono virtuali, i termini dipendenti da  $Q_t$  sono assenti. Se le forze sono ottenute da un potenziale, ovvero

$$\mathbf{F}_k = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_k}$$

per un qualche potenziale  $V \equiv V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ , otteniamo

$$\tilde{w} = -\delta V = -\sum_{a=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_a} \delta q_a$$

ovvero il lavoro *virtuale* infinitesimo delle forze è il differenziale ottenuto ignorando la dipendenza esplicita dal tempo di  $V$ , come atteso.

**4.2.1. Configurazioni di frontiera.** Uno spostamento virtuale si dice *reversibile* se il suo opposto è anch'esso uno spostamento virtuale ammesso; viceversa si dice *irreversibile*. Questa definizione è utile per caratterizzare i vincoli unilaterali e le cosiddette configurazioni di confine, o frontiera.

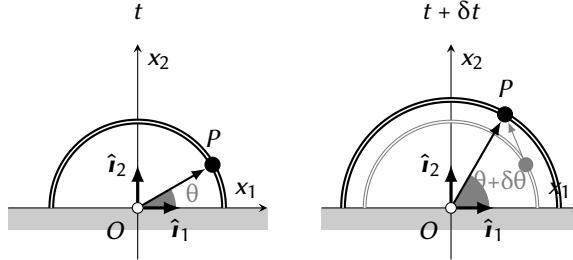
**DEFINIZIONE 4.4.** Una configurazione è detta *di frontiera* se ammette spostamenti virtuali irreversibili. Si dice che in tale configurazione agisce un vincolo unilaterale.

Facciamo un esempio.

**Esempio 2.12 —** Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  tenuto a soddisfare i seguenti tre vincoli:

$$\|\mathbf{x}_P\| = pt, \quad \langle \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{i}}_2 \rangle \geq 0, \quad p > 0.$$

I vincoli esprimono il fatto che il moto deve avvenire nel semipiano superiore di un riferimento cartesiano su un arco di circonferenza di raggio variabile nel tempo  $pt$ . Si tratta quindi di un vincolo reonomo.



Per via del vincolo di planarità del moto e della condizione di appartenenza alla guida, possiamo individuare un unico parametro lagrangiano  $\theta$  per il sistema, e utilizzare una parametrizzazione polare scrivendo

$$\mathbf{x}_P = pt \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + pt \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Ora, per ogni posizione sulla guida con  $0 < \theta < \pi$ , abbiamo che

$$\delta \mathbf{x}_P = pt (-\sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2) \delta \theta.$$

Questa espressione è associata ad uno spostamento virtuale legittimo sia che si prenda  $\delta\theta > 0$  sia che si prenda  $\delta\theta < 0$ , cioè ovunque sulla guida *eccezion fatta* per i punti  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . In  $\theta = 0$ , per esempio, possiamo considerare solo uno spostamento virtuale con  $\delta\theta > 0$ : il suo opposto è inammissibile. Viceversa, in  $\theta = 2\pi$ , solo  $\delta\theta < 0$  è ammesso. Queste due configurazioni sono dette *di frontiera*. Si noti che la velocità del nostro punto è

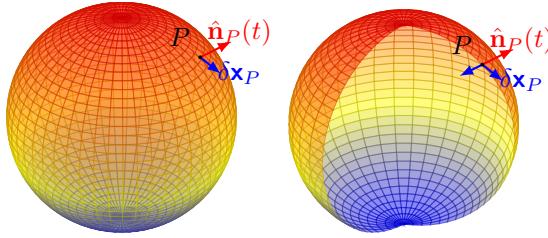
$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = p(\cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2) + \tilde{\mathbf{v}}_P.$$

Mentre il secondo contributo può avere qualsivoglia segno sui punti non di frontiera (considerando spostamenti virtuali infinitesimi in senso orario o antiorario), il primo contributo *non* può essere mai invertito di segno ed è sempre diretto nella direzione radiale uscente, dato che segue la dilatazione del vincolo: questo esemplifica la ragione per cui è conveniente considerare gli spostamenti virtuali, e non quelli reali, per definire le configurazioni di confine.

**4.2.2. Vincoli ideali e dissipativi.** Cerchiamo ora di caratterizzare l'azione di un vincolo in termini della forza di reazione  $\Phi$  da esso generata: cominciamo considerando il caso *ideale* in cui questa forza di reazione sia la *minima necessaria ad imporre la validità del vincolo*. Per fissare le idee, immaginiamo di avere un singolo punto materiale  $P$  a muoversi *lungo* una certa superficie  $\sigma$  che, in  $P$ , assumiamo avere versore normale  $\hat{\mathbf{n}}_P(t)$ . Il vincolo è tale da non permettere al punto di uscire dalla superficie: si tratta cioè di un vincolo bilaterale. Inoltre, supponiamo anche che il vincolo sia *olonomo*, e quindi esista una collezione di coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  tale per cui  $\mathbf{x}_P \equiv \mathbf{x}_P(\mathbf{q}, t)$ . Il fatto che la reazione vincolare si limiti a tenere il punto materiale sulla superficie significa che, *istante per istante*, essa non ostacola in nessun modo il suo movimento *lungo* la superficie stessa, ovvero

$$\langle \Phi, \delta \mathbf{x}_P \rangle = 0.$$

Il fatto che  $\Phi$  *non* abbia proiezione nella direzione *tangente* al vincolo equivale a dire che *il lavoro virtuale infinitesimo della forza  $\Phi$  è nullo*.



Consideriamo invece il caso in cui il punto materiale sia libero di muoversi purché rimanga *da un lato* della superficie, ovvero il vincolo sia unilaterale. Cioè significa che quando il punto materiale si trova in una punto, individuato da  $\mathbf{x}_P$ , appartenente alla superficie, esso può muoversi, per esempio, nella direzione  $-\hat{\mathbf{n}}_P$ , ma non nella direzione  $\hat{\mathbf{n}}_P$  (solo a titolo esemplificativo, con riferimento alla figura, immaginiamo che  $P$  possa muoversi all'*interno* della sfera, ma non possa uscirne). In questo caso in un vincolo ideale  $\Phi$  agisce sempre ortogonalmente alla superficie, cioè come  $\hat{\mathbf{n}}_P$ , ma  $\delta \mathbf{x}_P$  può anche puntare non tangenzialmente alla superficie (ma da un suo lato, per esempio nella figura sopra verso l'interno). Vale quindi

$$\langle \Phi, \delta \mathbf{x}_P \rangle \geq 0.$$

La relazione sopra equivale a dire che il lavoro virtuale  $\tilde{w}$  della forza  $\Phi$  è non negativo.

Considerazioni analoghe a quanto detto sopra possono ripetersi nel caso in cui il vincolo sia una curva. Su ispirazione delle osservazioni precedenti, si dà la seguente, generale definizione.

**DEFINIZIONE 4.5** (Vincolo ideale e vincolo dissipativo). Un vincolo ideale genera tutti e soli i sistemi di reazioni vincolari compatibili col vincolo aventi lavoro virtuale infinitesimo non negativo. Se i vincoli sono bilateri, il lavoro infinitesimo virtuale delle reazioni vincolari è in particolare nullo. Un vincolo non ideale si dice dissipativo.

In un vincolo dissipativo, pertanto, la reazione vincolare non si limita a imporre la validità del vincolo, ma ha altri effetti (per esempio, ostacolando il moto *lungo* il vincolo, come vedremo in seguito). In un vincolo di contatto liscio, la reazione vincolare  $\Phi$  è ortogonale al vincolo stesso: nel caso di vincolo bilatero, non ci sono condizioni sul verso di  $\Phi$ , mentre, se il vincolo è unilatero,  $\Phi$  può puntare solo nella direzione di moto ammesso.

**Esempio 2.13** (Rotolamento puro) — Un caso particolare di vincolo ideale, che non appartiene alla famiglia dei contatti lisci, è il *rotolamento puro*. Il vincolo di puro rotolamento infatti può essere detto un caso di vincolo ideale “scabro”. Sappiamo che in un rotolamento puro, se  $C$  è il punto di contatto tra due corpi rigidi in rotolamento reciproco, tale punto ha istantaneamente una velocità nulla. Sia ora  $\Phi$  la reazione vincolare applicata da uno dei due corpi sull’altro in  $C$ . Il suo lavoro infinitesimo virtuale va calcolato valutando lo spostamento virtuale ammesso del punto di contatto, dove la forza è applicata, a *vincolo fisso*. Tuttavia, il punto di contatto in un rotolamento puro è, per definizione, la posizione di un punto materiale avente istantaneamente *velocità nulla*. Dato che l’unico spostamento virtuale ammesso è quello nullo, il lavoro virtuale di  $\Phi$  in un rotolamento puro è sempre nullo. Il rotolamento puro è quindi un vincolo ideale *nonostante*  $\Phi$  non sia necessariamente ortogonale alle due superfici nel punto di contatto — e anzi in questo caso è *necessario* che ci sia una componente di  $\Phi$  che agisca nella direzione tangente fornendo l’*attrito statico* utile a permettere al corpo di rotolare e non strisciare.

**Esempio 2.14** (Vincoli ideali nei sistemi piani) — Tre esempi ricorrenti di vincoli ideali usati nei sistemi piani (e molti dei quali abbiamo già incontrato) sono i seguenti.

**Cerniera:** Una *cerniera piana* vincola uno o più corpi rigidi nel piano a ruotare attorno al punto in cui è applicata, che può essere fisso (cerniera fissa) o libero di muoversi nel piano (cerniera mobile — in questo caso, la cerniera vincola due corpi rigidi). Una cerniera fissa è un vincolo ideale (il punto in cui è applicata non può muoversi); una cerniera mobile, è anch’essa ideale in quanto non ammette spostamenti relativi tra i punti dei due corpi a cui è applicata.

**Carrelli e pattini:** Un *carrello* vincola un estremo di un corpo rigido a scorrere lungo un binario consentendo una rotazione attorno al punto in cui è applicata. In un carrello ideale, non viene prodotta alcuna reazione lungo la direzione *parallela* al moto del carrello, mentre l’unica possibile reazione del vincolo è nella direzione ortogonale: il carrello è infatti un vincolo ideale liscio bilatero. Un *pattino* agisce come un carrello ma, in aggiunta, non permette una rotazione del corpo attorno al punto in cui è applicato: anche in questo caso l’eventuale reazione vincolare è ortogonale alla direzione di scorrimento.

**Incastro:** Un *incastro* può essere interpretato come il più estremo tipo di vincolo tra due corpi rigidi, ovvero come una cerniera mobile che non ne permette la rotazione relativa. Si tratta quindi di una completa saldatura dei due corpi. Non permettendo alcuno spostamento relativo, è un vincolo ideale.

Il vincolo di contatto liscio descritto sopra è naturalmente una astrazione, e in realtà si ha più spesso a che fare con vincoli *dissipativi di contatto scabro*. Un vincolo di contatto scabro si manifesta come un vincolo di contatto che oppone una reazione vincolare con componente tangente al vincolo stesso  $\Phi_t$ , oltre che normale  $\Phi_n$ , di modo che  $\Phi = \Phi_n + \Phi_t$ .

Supponiamo per esempio di avere due corpi rigidi in contatto tra loro in un certo punto geometrico, e che la velocità di tale punto sia nulla secondo entrambi i corpi rigidi. Si osserva sperimentalmente che, nei sistemi reali, le due componenti normale e tangenziale della reazione vincolare prodotta da un corpo sull’altro soddisfano la *disuguaglianza di Coulomb–Morin*,

$$\|\Phi_t\| \leq \mu_s \|\Phi_n\|$$

dove  $\mu_s$  è detto *coefficiente di attrito statico* e dipende dai materiali in contatto reciproco. In altre parole, il contatto può esibire una reazione vincolare tangenziale pari in modulo, *al più*, a  $\mu_s \|\Phi_n\|$ . La componente  $\Phi_t$  è detta *di attrito statico* ed è diretta in modo tale da annullare l’accelerazione del punto di contatto: essa appare in realtà anche in vincoli ideali come il puro rotolamento (che infatti rientra, come caso, nello scenario sopra descritto): il fatto che vi sia una

forza d'attrito statico non implica dunque che si abbia a che fare con un vincolo dissipativo, e occorre verificare che la condizione di lavoro virtuale infinitesimo non negativo sia soddisfatta per decidere se il vincolo è in effetti ideale o meno.

Se invece i punti di contatto hanno velocità relativa non nulla (ovvero, la velocità di strisciamento è diversa dal vettore nullo), la situazione è differente e si parla di vincolo di contatto *con strisciamento*. In questo caso, si vede sperimentalmente che esiste una quantità  $\mu_d$ , detta *coefficiente di attrito dinamico* e dipendente dalle superfici in contatto (ma non, in prima approssimazione, dalla velocità di strisciamento), tale per cui vale la *legge di Coulomb–Morin dinamica*

$$\|\Phi_t\| = \mu_d \|\Phi_n\|.$$

In questo contesto,  $\Phi_t$  si dice *attrito dinamico*. Sperimentalmente,  $\mu_d \leq \mu_s$ , mentre la forza  $\Phi_t$  ha direzione opposta alla velocità di strisciamento. È chiaro che una forza di attrito dinamico ammette un lavoro virtuale negativo, ed è pertanto associata ad un vincolo dissipativo.

## CAPITOLO 3

# Elementi di statica

## 1. Criteri di equilibrio

**1.1. Equilibrio.** Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  libero (cioè non soggetto a vincoli) di massa  $m$ . Se la risultante delle forze agenti sul punto dipende solo da posizione e dalla velocità del punto stesso, in un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  il Secondo principio della meccanica assume la forma

$$m\mathbf{a}_P = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P, \mathbf{v}_P).$$

Si dice che  $\mathbf{x}_P(t) \equiv \mathbf{x}_0$ , vettore costante, è una configurazione di *equilibrio* del punto materiale, se  $\mathbf{x}_0$  è soluzione dell'equazione sopra, ovvero

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

In altre parole, sotto questa condizione, se il punto materiale si trova in  $\mathbf{x}_0$  a velocità nulla, allora rimane nel medesimo punto per un tempo indeterminato. Analogamente, se il punto materiale è vincolato,  $\mathbf{x}_0$  è un punto di equilibrio se la forza totale  $\mathbf{F}^{(a)} + \Phi$ , somma della risultante delle forze attive  $\mathbf{F}^{(a)}$  e della risultante delle reazioni vincolari  $\Phi$ , è nulla se calcolata sulla traiettoria  $\mathbf{x}_P(t) \equiv \mathbf{x}_0$ . Si osservi che se siamo interessati esclusivamente a posizioni di equilibrio, la dipendenza dalla velocità di  $\mathbf{F}^{(a)}$ , ed eventualmente  $\Phi$ , può essere ignorata: nelle configurazioni di equilibrio, infatti, la velocità è sempre assunta nulla per definizione.

Le configurazioni di equilibrio, pertanto, vanno in generale cercate tra le soluzioni dell'equazione  $\mathbf{F}^{(a)} + \Phi = \mathbf{0}$ . Nel caso in cui a priori la reazione vincolare  $\Phi \neq \mathbf{0}$ , e vada quindi anch'essa stimata, l'equazione  $\mathbf{F} + \Phi = \mathbf{0}$  può essere insufficiente a individuare tutte le "incognite" del problema, ovvero le tre coordinate  $\mathbf{x}_0$  e le tre componenti di  $\Phi$ , i cui valori dipendono dall'azione delle forze attive e dalla posizione del punto. In alcuni casi, però, la natura del vincolo è tale da non generare difficoltà. A titolo esemplificativo, supponiamo di avere a che fare con un punto  $P$  vincolato a muoversi su una superficie liscia, e indichiamone con  $\hat{\mathbf{n}}_P$  il versore normale in  $P$ . La reazione vincolare è tale che  $\Phi = \Phi\hat{\mathbf{n}}_P$ , per cui, se  $\mathbf{F}_n^{(a)} = \langle \mathbf{F}^{(a)}, \hat{\mathbf{n}}_P \rangle \hat{\mathbf{n}}_P$  è la componente delle forze attive *normale* alla superficie e  $\mathbf{F}_t^{(a)} = \mathbf{F}^{(a)} - \mathbf{F}_n^{(a)}$  quella *tangente* alla superficie, le equazioni di equilibrio si possono scrivere

$$\mathbf{F}_t^{(a)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_n^{(a)} + \Phi = \mathbf{0},$$

la seconda delle quali fornisce  $\Phi = -\mathbf{F}_n^{(a)}$ . La condizione  $\mathbf{F}_t^{(a)} = \mathbf{0}$  è una *equazione pura dell'equilibrio* del punto, dato che non dipende dalle forze di reazione, e fornisce un criterio per individuare l'insieme dei punti di equilibrio. Se il vincolo è invece *unilaterale* ma ideale, sappiamo solo che  $\Phi$  può avere solo un verso, ovvero deve essere orientata verso il lato della superficie dove il punto può trovarsi, per esempio  $\Phi = \Phi\hat{\mathbf{n}}_P$  con  $\Phi \geq 0$ . Le condizioni di equilibrio sono

quindi

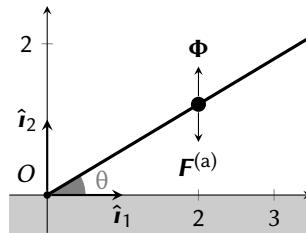
$$\mathbf{F}_t^{(a)} = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{F}^{(a)}, \hat{\mathbf{n}}_P \rangle \leq 0$$

dato che  $\langle \mathbf{F}^{(a)}, \hat{\mathbf{n}}_P \rangle > 0$  non potrebbe essere bilanciato e il punto non sarebbe in quiete. Se invece il punto materiale è soggetto ad un vincolo scabro, le condizioni possono riscriversi, ancora una volta, in modo differente. Supponiamo per esempio che la superficie non sia liscia, e che il punto sia soggetto ad attrito statico, con associato coefficiente  $\mu_s$ . Questo vuol dire che il punto può essere in quiete nonostante siano applicate forze attive nella direzione tangente, purché la norma di  $\mathbf{F}_t^{(a)}$  non superi quello della reazione di attrito statico, che la legge di Coulomb–Morin statica dice essere pari a  $\mu_s \|\mathbf{F}_n^{(a)}\|$  per un certo coefficiente di attrito statico  $\mu_s$ , ovvero

$$\|\mathbf{F}_t^{(a)}\| \leq \mu_s \|\mathbf{F}_n^{(a)}\|,$$

che è la condizione pura di equilibrio nel caso di attrito statico. Considerazioni analoghe si ripetono nel caso di moto vincolato su curva. Vediamo un esempio.

**Esempio 3.1** (Guida inclinata) — Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una guida scabra di coefficiente d'attrito statico  $\mu_s$ . La guida si sviluppa lungo una retta passante per l'origine  $O$  di un riferimento cartesiano e che forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $\mathcal{X}$  del riferimento cartesiano parallelo a  $\hat{\mathbf{i}}_1$ . Essa giace nel piano passante per  $O$  e generato dai vettori  $\hat{\mathbf{i}}_1$  e  $\hat{\mathbf{i}}_2$ .



Sul punto materiale agisce la forza peso, che in questo riferimento ha la forma  $\mathbf{F}^{(a)} = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$ , con  $g$  accelerazione di gravità. Questo significa che si ha equilibrio se

$$\mathbf{F}^{(a)} + \Phi = \mathbf{0}$$

dove  $\Phi$  è la reazione della guida. Decomponiamo nella direzione *tangente* alla guida e in quella *normale* le forze in gioco: si ha equilibrio se

$$-mg \cos \theta + \Phi_n = 0, \quad -mg \sin \theta + \Phi_t = 0$$

da cui

$$\Phi_n = mg \cos \theta, \quad \Phi_t = mg \sin \theta.$$

D'altra parte sappiamo che  $|\Phi_t| \leq \mu_s |\Phi_n| = mg \mu_s \cos \theta$ , per cui la seconda equazione può essere soddisfatta solo se

$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s.$$

Se questa diseguaglianza non è soddisfatta, il punto non può essere in equilibrio. Viceversa, se lo è, *ogni punto della guida* è di equilibrio.

**Esempio 3.2** (Catenaria) — Supponiamo di avere un sistema di riferimento cartesiano inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  tale che  $\hat{\mathbf{i}}_2$  sia diretto in modo contrario al campo gravitazionale (ovvero, in modo tale che un corpo di massa  $m$  sia soggetto ad una forza  $\mathbf{F}^{(a)} = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$ ) e di appendere un *filo* di lunghezza  $2\ell$  tra due punti  $P_+$  e  $P_-$ : i due punti hanno coordinate  $\mathbf{x}_{\pm} = \pm p\hat{\mathbf{i}}_1 + h\hat{\mathbf{i}}_2$ , con  $p$  e  $h$  positivi. Il filo si dispone secondo una certa curva sotto l'azione del suo stesso peso: per ragioni di simmetria, ci aspettiamo che la curva

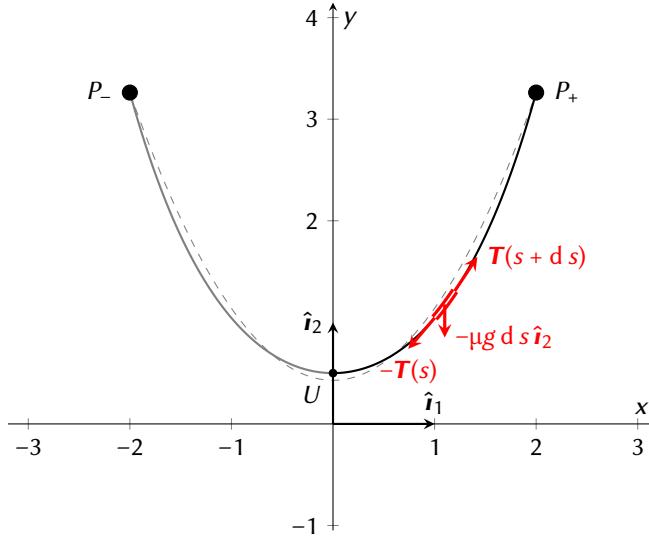


FIGURA 1. Costruzione della catenaria. In rosso, un elemento di lunghezza  $ds$  con le tre forze ad esso applicate. La linea tratteggiata corrisponde ad una parabola di uguale lunghezza che insiste su  $A$  e  $B$ .

giaccia nel piano generato da  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$ , e che sia simmetrica rispetto all'asse  $y$ . Sia  $U$ , punto individuato dal vettore  $\mathbf{x}_U = u\hat{i}_2$ , l'intersezione tra la curva e il detto asse  $y$  di direzione  $\hat{i}_2$ : sempre per ragioni di simmetria, ci aspettiamo che tale punto sarà di *minimo*. Parametrizziamo la metà della curva tra  $U$  e  $B$  come

$$\gamma(s) \equiv x(s)\hat{i}_1 + y(s)\hat{i}_2, \quad s \in [0, \ell],$$

in modo che  $\gamma(0) = \mathbf{x}_U$  e  $\gamma(\ell) = \mathbf{x}_B$ . Cerchiamo l'equazione di questa curva assumendo essa sia sotto la sola azione del suo stesso peso e che il filo abbia una densità lineare costante  $\mu$ . Ciò significa che una porzione  $ds$  del filo è soggetto a tre forze:

- una forza peso  $-\mu g ds \hat{i}_2$ ;
- una tensione  $\mathbf{T}(s+ds)$  applicata dalla porzione immediatamente seguente nel filo secondo  $\hat{i}_1$ ;
- una tensione  $-\mathbf{T}(s)$  applicata dalla porzione immediatamente precedente del filo secondo  $\hat{i}_1$ .

La tensione  $\mathbf{T}(s)$  è orientata secondo il versore  $\hat{v}_\gamma(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$ , in modo che l'insieme delle forze su una porzione di lunghezza  $ds$  del filo sia configurata come rappresentato in Fig. 1. In altre parole,  $\mathbf{T}(s) = T(s)\hat{v}_\gamma(s)$ . La condizione di equilibrio di questo elemento è

$$\mathbf{T}(s+ds) - \mathbf{T}(s) - \mu g ds \hat{i}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} (T(s)\hat{v}_\gamma(s)) = \mu g \hat{i}_2,$$

che in componenti diventa

$$\frac{d}{ds} \left( T(s) \frac{dx(s)}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( T(s) \frac{dy(s)}{ds} \right) = \mu g.$$

In  $s = 0$ , cioè in  $U$ , la tangente alla curva è orizzontale, per cui  $\mathbf{T}(0) = \tau \hat{i}_1$  per un qualche valore  $\tau$  che non conosciamo, mentre  $\hat{v}_\gamma(0) = \hat{i}_1$ . Integrando in  $s$  queste equazioni otteniamo quindi

$$T(s) \frac{dx(s)}{ds} = \tau, \quad T(s) \frac{dy(s)}{ds} = \mu g s.$$



**FIGURA 2.** (*Sinistra*) Archi catenari nel Col·legi Teresiane de Barcelona, progettato da A. Gaudí e completato nel 1889. (*Destra*) Modello di A. Gaudí con funi sospese per la progettazione di archi di tipo catenario per la Sagrada Família di Barcellona.

Facendo il rapporto tra queste due espressioni possiamo rimuovere  $T(s)$  e chiamando per brevità  $\alpha = \frac{\mu g}{\tau}$ , troviamo

$$\frac{dy}{dx} = \alpha s.$$

Ora, l'osservazione cruciale è che esiste una relazione semplice, indotta dal teorema di Pitagora, tra  $dx$ ,  $dy$  e  $ds$ , ovvero

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \Rightarrow ds^2 = dx^2 \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = dx^2 (1 + \alpha^2 s^2).$$

L'equazione diventa quindi

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \alpha^2 s^2}} \Rightarrow x(s) = \frac{\operatorname{arcsinh}(\alpha s)}{\alpha}.$$

Se ora esprimiamo  $s$  in funzione di  $x$ ,

$$s = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha x)$$

questo fornisce un legame tra l'ascissa  $p$  del punto  $P_+$ , la lunghezza  $\ell$  di metà arco e la quantità incognita  $\alpha$  (che dipende dalla quantità  $c$ ), dato da

$$\alpha \ell = \sinh(\alpha p).$$

Soprattutto, possiamo usare la relazione  $s = \alpha^{-1} \sinh(\alpha x)$  per risolvere

$$\frac{dy}{dx} = \alpha s = \sinh(\alpha x) \Rightarrow y(x) = \frac{\cosh(\alpha x) - 1}{\alpha} + u,$$

che è proprio l'equazione della curva cercata. Quella ottenuta è la cosiddetta *equazione della catenaria*. Essa rappresenta la forma di un filo (o una catena) omogeneo vincolato nei suoi due estremi ed in equilibrio sotto l'azione del suo stesso peso.

**Q** La catenaria è una curva estremamente simile ad una parabola, come già notato da Galilei:

**SALVIATI:** Ma più voglio dirvi, recandovi insieme maraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizonte, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete, allentando più o meno la detta catenuzza, incurvarsi e adattarsi

alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto a i gr[adi] 45, la catenella camina quasi *ad unguem* sopra la parabola.

Galileo Galilei

*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1634).

Fatto molto importante, questa curva ha una grande rilevanza architettonica: essa si può anche interpretare (capovolgendola) come la forma di un *perfetto arco autoportante omogeneo*. Il cosiddetto *arco catenario*, detto anche *arco equilibrato*, è un arco in grado di sostenere il peso del materiale con cui è costruito senza necessitare né di contrafforti né di altri elementi di supporto. In un arco siffatto, la forza di gravità verticale viene bilanciata dalle forze di compressione che premono lungo la curva dell'arco stesso. Non sorprende quindi che gli archi catenari appaiano spesso in architettura: una volta particolarmente sottile, per esempio, richiede un perfetto scarico del peso che quindi deve avvenire lungo una curva molto vicina ad una catenaria. Il caso che abbiamo analizzato riguarda l'ipotesi di una struttura *omogenea*, ma il tipo di calcolo può essere generalizzato al caso non omogeneo. Anche nella sua forma più generale, esiste una analogia tra curva non omogenea in sospensione e un arco autoportante con uguale distribuzione di massa, come osservato per la prima volta da Robert Hooke:

Ut pendet continuum flexible, sic stabit contiguum rigidum inversum.

Robert Hooke

*A Description of Helioscopes, and Various Other Instruments* (1676).

**Esempio 3.3** (Ponte sospeso) — Consideriamo un problema simile a quello della catenaria, ovvero quello dei *ponti sospesi*. In un riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  come nel problema precedente, una fune viene sospesa tra  $P_+$  e  $P_-$ , posti in  $\mathbf{x}_\pm = \pm p\hat{\mathbf{i}}_1 + h\hat{\mathbf{i}}_2$ , con  $p > 0$  e  $h > 0$ . La fune però è questa volta legata, tramite dei tiranti verticali, a distanza orizzontale reciproca infinitesima, ad un ponte omogeneo, simmetrico allo stesso asse  $y$ : i tiranti, la fune e il ponte giacciono nel piano generato da  $\hat{\mathbf{i}}_1$  e  $\hat{\mathbf{i}}_2$  e passante per  $O$ . Supponiamo che il peso della fune e quello dei tiranti siano trascurabili rispetto a quello del ponte. Il ponte qui viene modellizzato come un'asta orizzontale rigida di densità lineare  $\lambda$ , mentre il tirante ha il solo scopo di trasmettere la forza peso dal ponte alla fune. Se la fune che sostiene il ponte ha, come sopra, lunghezza  $2\ell$  ci si aspetta che essa sia simmetrica attorno al suo minimo  $U$  individuato da  $\mathbf{x}_U = u\hat{\mathbf{i}}_2$  e tale da potersi parametrizzare

$$\gamma(s) = x(s)\hat{\mathbf{i}}_1 + y(s)\hat{\mathbf{i}}_2, \quad s \in [0, \ell]$$

di modo che  $\gamma(0) = u\hat{\mathbf{i}}_2$  e  $\gamma(\ell) = \mathbf{x}_+$ . Un elemento di lunghezza infinitesima  $ds$  di tale fune sarà in equilibrio se varrà l'equazione

$$\mathbf{T}(s + ds) - \mathbf{T}(s) - \lambda g d\mathbf{x}\hat{\mathbf{i}}_2 = \mathbf{0},$$

dove l'ultimo termine è la forza peso dell'elemento di ponte corrispondente all'infinitesimo  $ds$  della curva. Esattamente come nel caso della catenaria, possiamo scrivere le equazioni

$$\frac{d}{ds} \left( T(s) \frac{dx(s)}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( T(s) \frac{dy(s)}{ds} \right) = \lambda g \frac{dx(s)}{ds}.$$

Integrando tra 0 e un generico punto  $s$ , si ottiene

$$T(s) \frac{dx(s)}{ds} = \tau, \quad T(s) \frac{dy(s)}{ds} = \lambda g x(s) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda g}{\tau} x.$$

Ciò significa che la curva descritta dalla curva è una *parabola*

$$y = ax^2 + u, \quad a := \frac{\lambda g}{2\tau}$$

dove  $\tau$  e  $u$  saranno fissati imponendo che la curva passi per  $\mathbf{x}_\pm = \pm p\hat{\mathbf{i}}_1 + h\hat{\mathbf{i}}_2$  e che abbia lunghezza  $\ell$ , ovvero per mezzo delle condizioni

$$h = ap^2 + u, \quad \ell = \int_0^p \sqrt{1 + 4a^2x^2} dx.$$

**1.1.1. Equilibrio di un sistema: equazioni cardinali.** Se abbiamo a che fare con un sistema di  $N$  punti materiali  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , ciascuno avente massa  $m_k$  e posizione  $\mathbf{x}_k$  rispetto ad un riferimento inerziale, la condizione di equilibrio è data in maniera semplice: il sistema è in equilibrio se lo sono tutti i suoi punti. Questa semplice affermazione ha una rilevante conseguenza.

**TEOREMA 1.1** (Equazioni cardinali della statica). *Condizione necessaria perché un sistema di punti materiali sia in equilibrio è che la risultante delle forze esterne  $\mathbf{R}^{(\text{ext})}$  e il momento risultante delle forze esterne  $\boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})}$  siano nulli,*

$$\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}.$$

Le equazioni che appaiono nel precedente teorema sono dette prima e seconda equazione cardinale della statica rispettivamente. Si tratta di *condizioni necessarie ma non sufficienti*: può accadere che un sistema di punti *non sia* in equilibrio nonostante le equazioni cardinali della statica siano soddisfatte.

## 2. Teorema dei lavori virtuali e ricerca dei punti di equilibrio

Per studiare sistematicamente il caso di un *sistema*  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  di  $N$  punti materiali, introduciamo una notazione compatta che può alleggerire la notazione. Indichiamo anzitutto con

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3N}$$

la concatenazione delle posizioni  $\mathbf{x}_k$ , ciascuna corrispondente al punto  $P_k$ . Diremo quindi che il sistema si trova in una certa *configurazione*  $\mathbf{X}$  intendendo che il punto materiale  $P_k$  si trova nella posizione  $\mathbf{x}_k$ ,  $k$ -esima tripletta di  $\mathbf{X}$ . Se  $\mathbf{F}_i(\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N, \{\dot{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N)$  è la forza agente su  $P_i$ , funzione delle posizioni e velocità di tutti i punti materiali, allora scriveremo più brevemente  $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ .

Torniamo ora al problema dell'equilibrio. Il sistema fisico  $\mathcal{S}$  in esame è in equilibrio nella configurazione  $\mathbf{X}_0$  se e solo se

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall k.$$

Se il sistema è soggetto a soli vincoli *ideali*, un importante criterio *necessario e sufficiente* perché il sistema sia in equilibrio è fornito dal seguente Teorema, detto *principio* per ragioni storiche. Vale il seguente importante teorema.

■ **TEOREMA 2.1** (Principio dei lavori virtuali). *Sia dato un sistema meccanico di  $N$  punti materiali,  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , soggetto a vincoli ideali. Condizione necessaria e sufficiente perché una certa*

*configurazione  $\mathbf{X}_0$  sia di equilibrio è che il lavoro virtuale infinitesimo  $\tilde{w}^{(a)}$  delle forze attive per un qualsivoglia spostamento virtuale  $\delta\mathbf{X} = (\delta\mathbf{x}_k)_{k=1}^N$  da  $\mathbf{X}_0$  sia non positivo, ovvero*

$$\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}, \delta\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}), \delta\mathbf{x}_k \rangle \leq 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{F}_k^{(a)}$  la forza attiva risultante agente su  $P_k$  nella configurazione  $\mathbf{X}_0$ , assumendo il sistema in quiete, e sia  $\Phi_k$  l'eventuale forza di reazione vincolare sullo stesso punto materiale  $P_k$ . Partizioniamo  $\mathcal{S}$  in due sottoinsiemi,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_l \cup \mathcal{S}_v$ ,  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_v = \emptyset$ : sia in particolare  $\mathcal{S}_l$  il sottoinsieme di punti liberi, mentre  $\mathcal{S}_v$  è il sottoinsieme dei punti vincolati. Immaginiamo che  $\mathcal{S}$  sia nella configurazione  $\mathbf{X}_0$  in quiete. Il lavoro virtuale infinitesimo associato alle forze attive in questa configurazione è dato da

$$\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}_0, \delta\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle = \sum_{P_k \in \mathcal{S}_l} \langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle + \sum_{P_k \in \mathcal{S}_v} \langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle.$$

*Equilibrio implica  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$  — Se  $\mathbf{X}_0$  è di equilibrio, in tale configurazione deve essere  $\mathbf{F}_k^{(a)} = \mathbf{0}$  se  $P_k \in \mathcal{S}_l$ , mentre  $\mathbf{F}_k^{(a)} = -\Phi_k$  per  $P_k \in \mathcal{S}_v$ . Allora*

$$\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}_0, \delta\mathbf{X}) = \sum_{P_k \in \mathcal{S}_v} \langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle = - \sum_{P_k \in \mathcal{S}_v} \langle \Phi_k, \delta\mathbf{x}_k \rangle \leq 0,$$

dove la diseguaglianza segue dalla definizione di vincolo ideale.

*La proprietà  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$  implica equilibrio — Viceversa, supponiamo che  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$  per ogni spostamento virtuale attorno a  $\mathbf{X}_0$ . Se per esempio consideriamo uno spostamento virtuale  $\delta\mathbf{X}$  in cui tutti i punti  $P_k$  hanno  $\delta\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ , eccezion fatta per un singolo punto libero  $P_k \in \mathcal{S}_l$ , per ipotesi avremo  $\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}_0, \delta\mathbf{X}) = \langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle \leq 0$ ; ma, essendo il punto libero e quindi lo spostamento reversibile, potremo considerare lo spostamento virtuale opposto  $-\delta\mathbf{x}_k$ , ottenendo  $\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}_0, -\delta\mathbf{X}) = -\langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle \leq 0$ : queste due condizioni sono compatibili se e solo se  $\langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle = 0$  che, per via dell'arbitrarietà dello spostamento, implica  $\mathbf{F}_k^{(a)} = \mathbf{0}$ . Considerando invece uno spostamento virtuale  $\delta\mathbf{X}$  tale che  $\delta\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$  per ogni punto eccezion fatta per un punto vincolato  $P_k \in \mathcal{S}_v$ , otterremo  $\langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle \leq 0$ . Osserviamo ora che, detta  $\Phi_k$  la reazione vincolare su  $P_k$ , una reazione  $\Phi_k = -\mathbf{F}_k^{(a)}$  è ammisible, dato che  $\langle \Phi_k, \delta\mathbf{x}_k \rangle = -\langle \mathbf{F}_k^{(a)}, \delta\mathbf{x}_k \rangle \geq 0$ , come deve essere per un vincolo ideale: ciò significa che in effetti questa reazione vincolare si realizza, e il punto vincolato è in equilibrio.*  $\square$

Si noti che l'ultimo passaggio è piuttosto delicato. La definizione di vincolo ideale richiede che  $\langle \Phi_k, \delta\mathbf{x}_k \rangle \geq 0$  per ogni spostamento virtuale ammisible  $\delta\mathbf{x}_k$ : questo non specifica univocamente  $\Phi_k$  ed in effetti ci sono infinite reazioni vincolari che, a priori, soddisfano questa diseguaglianza. A noi è sufficiente che esista una possibile forza che è compatibile col vincolo ideale, dato che questo significa che il sistema può essere in equilibrio nella configurazione studiata.

**COROLLARIO 2.2.** *Se ogni spostamento virtuale  $\delta\mathbf{X}$  attorno ad una configurazione di equilibrio  $\mathbf{X}_0$  è reversibile, allora  $\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}_0, \delta\mathbf{X}) = 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se ogni spostamento virtuale dalla configurazione  $\mathbf{X}_0$  è reversibile, dovrà valere

$$\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}_0, \delta\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}), \delta\mathbf{x}_k \rangle \leq 0 \text{ ma anche } -\tilde{w}^{(a)} = -\sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}), \delta\mathbf{x}_k \rangle \leq 0$$

(considerando lo spostamento virtuale opposto), da cui  $\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = 0$ .  $\square$

Il principio dei lavori virtuali è particolarmente utile, dato che fornisce una *relazione pura di equilibrio*, ovvero una relazione che coinvolge le sole forze attive, e non le reazioni vincolari.

**2.1. Equilibrio dei corpi rigidi.** Una conseguenza importante del Teorema dei lavori virtuali riguarda la sua applicazione al corpo rigido, per il quale implica che le equazioni cardinali della statica sono *sufficienti* per l'equilibrio.

**TEOREMA 2.3.** *Un corpo rigido è in equilibrio se e solo se le equazioni cardinali sono soddisfatte, ovvero se il sistema di forze esterne è equilibrato.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo già che la condizione è necessaria. Vediamo se è sufficiente. Decomponiamo le forze esterne agenti sul corpo rigido tra attive e di reazione vincolare. Ad esse corrispondono rispettivamente una risultante delle forze esterne attive  $\mathbf{R}^{(a,ext)}$  e una risultante delle forze esterne vincolari,  $\mathbf{R}^{(v,ext)}$ , così come un momento totale delle forze esterne attive,  $\tau_p^{(a,ext)}$ , e un momento totale delle forze esterne di reazione,  $\tau_p^{(v,ext)}$ , entrambi rispetto ad un punto solidale  $P$ . Indicando con  $\omega\delta t$  uno spostamento *angolare* infinitesimo del corpo rigido, un generico lavoro virtuale compiuto su di esso può scriversi come

$$\tilde{w} = \langle \mathbf{R}^{(ext)}, \delta\mathbf{x}_P \rangle + \langle \tau_p^{(ext)}, \omega \rangle \delta t = \langle \mathbf{R}^{(a,ext)}, \delta\mathbf{x}_P \rangle + \langle \tau_p^{(a,ext)}, \omega \rangle \delta t + \langle \mathbf{R}^{(v,ext)}, \delta\mathbf{x}_P \rangle + \langle \tau_p^{(v,ext)}, \omega \rangle \delta t = 0$$

dove l'ultima uguaglianza discende dalla condizione che le equazioni cardinali della statica siano soddisfatte. Questa espressione può essere scritta come

$$\tilde{w} = \tilde{w}^{(a,ext)} + \tilde{w}^{(v,ext)} = 0.$$

Possiamo sommare il contributo (nullo!) delle forze *interne*, attive e di reazione,  $\tilde{w}^{(a,in)} + \tilde{w}^{(v,in)} = 0$ , senza alterare l'uguaglianza: questo però ci permette di scrivere

$$\tilde{w} = \tilde{w}^{(a,ext)} + \tilde{w}^{(a,in)} + \tilde{w}^{(v,ext)} + \tilde{w}^{(v,in)} = \tilde{w}^{(a)} + \tilde{w}^{(v)} = 0.$$

Ma, essendo  $\tilde{w}^{(v)} \geq 0$ , questo implica che  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$ , e quindi, per il principio dei lavori virtuali, che ci sia equilibrio.  $\square$

**Esempio 3.4** (Corpo rigido con punto fisso) — Consideriamo un corpo rigido avente un punto fisso, che possiamo pensare nell'origine  $O$  del nostro riferimento. Nella solita notazione, equazioni cardinali si scrivono

$$\mathbf{R}^{(a,ext)} + \Phi = \mathbf{0}, \quad \tau_O^{(a,ext)} = \mathbf{0},$$

dove abbiamo calcolato il momento totale delle forze esterne rispetto all'origine, punto dove è applicata l'unica reazione vincolare esterna,  $\Phi$ . La seconda equazione *non* dipende dalla reazione vincolare (e quindi è una equazione di equilibrio pura) e può essere utilizzata per individuare la posizione del corpo all'equilibrio, dato che a questo scopo sono necessari solo tre angoli: condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio in questa configurazione dunque è che il momento totale delle forze attive esterne agenti

sul corpo sia nullo. Questa stessa condizione si ottiene dal principio dei lavori virtuali: in questo caso ogni spostamento virtuale è reversibile, per cui

$$\tilde{w}^{(a)} = 0 \Leftrightarrow \langle \tau_O^{(a,\text{ext})}, \omega \rangle \delta t = 0 \quad \forall \omega \Leftrightarrow \tau_O^{(a,\text{ext})} = \mathbf{0}.$$

Si noti che dalla prima equazione cardinale della statica si può ottenere la reazione vincolare applicata nell'origine, che invece è inaccessibile utilizzando il principio dei lavori virtuali.

**Esempio 3.5** (Corpo rigido con asse fisso) — Consideriamo un corpo rigido con un asse fisso, ovvero tale per cui due suoi punti,  $O$  e  $P$ , sono fissi. Possiamo assumere per esempio che la retta passante per tali punti corrisponda con l'asse di riferimento cartesiano orientato come  $\hat{i}_3$ , e che  $O$  corrisponda all'origine del riferimento inerziale in cui operiamo. Essendo  $O$  fisso, deve valere la condizione trovata sopra per il corpo rigido con un punto fisso,

$$\langle \tau_O^{(a,\text{ext})}, \omega \rangle \delta t = 0;$$

tuttavia in questo caso non possiamo effettuare un moto rotatorio qualsiasi, ma si può avere solo  $\omega \delta t = \omega \delta t \hat{i}_3$ , ovvero una rotazione infinitesima compatibile con il vincolo di asse fisso. Questo significa che dobbiamo avere

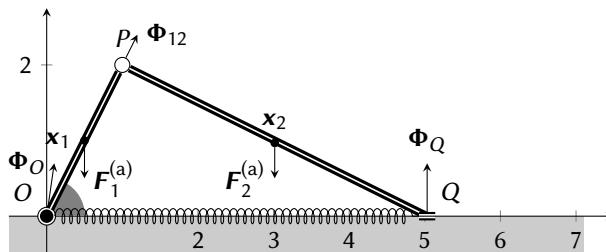
$$\langle \tau_O^{(a,\text{ext})}, \hat{i}_3 \rangle = 0$$

che fornisce le condizioni di equilibrio del corpo: questa condizione è sufficiente, dato che è necessario un solo parametro (un angolo) per caratterizzare la posizione del corpo rigido. Pertanto condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido con un asse fisso sia in equilibrio è che il momento assiale delle forze esterne attive rispetto all'asse fisso sia nullo. Si noti che questa condizione non fornisce informazioni sulle reazioni vincolari, per le quali occorre ricorrere alle equazioni cardinali

$$\mathbf{R}^{(a,\text{ext})} + \Phi_O + \Phi_P = \mathbf{0}, \quad \tau_O^{(a,\text{ext})} + \mathbf{x}_P \wedge \Phi_P = \mathbf{0}.$$

Incidentalmente, osserviamo che dalla seconda equazione si ottiene la condizione imposta dal principio dei lavori virtuali (per vedere questo fatto basta moltiplicarla scalarmente per  $\hat{i}_3$  e usare il fatto che  $\hat{i}_3$  e  $\mathbf{x}_P$  sono paralleli).

**Esempio 3.6** (Tecnica dello svincolamento) — La cosiddetta *tecnica dello svincolamento* è particolarmente utile quando si ha a che fare con sistemi di più corpi rigidi. Consideriamo il sistema piano in figura, costituito da due asti rigide, omogenee di uguale massa  $m$ . La prima,  $\overline{OP}$ , ha lunghezza  $\ell$  ed è fissata nell'origine con una cerniera fissa, mentre la seconda,  $\overline{PQ}$ , ha lunghezza  $2\ell$  e ha in  $Q$ , punto individuato dal vettore  $\mathbf{x}_Q$ , un carrello ideale che vincola il moto di  $Q$  all'asse orizzontale. In  $P$ , punto individuato dal vettore  $\mathbf{x}_P$ , infine, esiste una cerniera mobile, che vincola i due estremi omonimi delle due asti a coincidere. Una *molla ideale* di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla collega  $P$  a  $O$ . Il parametro lagrangiano del sistema è l'angolo  $\theta$  tra l'asta  $\overline{OP}$  e l'asse delle ascisse, che è vincolato ad assumere valori  $\theta \in [0, \pi]$ .



Ciascuna asta è soggetta ad una identica forza peso  $\mathbf{F}_i^{(a)} = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$ , dove  $i = 1$  individua l'asta  $\overline{OP}$  e  $i = 2$  individua l'asta  $\overline{PQ}$ . Vi sono poi le reazioni vincolari  $\Phi_O$  nell'origine e  $\Phi_Q$  in  $Q$  (quest'ultima sempre verticale, essendo il vincolo liscio). È presente anche una reazione  $\Phi_{12}$  della prima asta sulla seconda in  $P$ , con corrispondente e opposta reazione  $\Phi_{21}$  della seconda asta sulla prima: queste due forze sono interne al sistema. Infine, la molla agisce nella maniera siffatta: essa applica una forza  $\mathbf{F}_{Q,\text{el}}^{(a)} = -k\mathbf{x}_Q$  in  $Q$ , mentre applica una forza  $\mathbf{F}_{O,\text{el}}^{(a)} = k\mathbf{x}_Q$  in  $O$ . Anche queste forze sono da considerarsi interne, dato che agiscono tra componenti del sistema. Tutte le forze in gioco giacciono nel piano, per cui ciascuna è identificata da al più due componenti.

Le equazioni cardinali non bastano a fissare la posizione di equilibrio di questo sistema, che *non* è rigido: per risolvere il problema dell'equilibrio, dobbiamo trovare il valore di  $\theta$  e delle due reazioni vincolari  $\Phi_O$  e  $\Phi_Q$ , per un totale di quattro scalari ( $\Phi_Q \equiv \Phi_Q\hat{\mathbf{i}}_2$  ha solo una componente) mentre le equazioni cardinali forniscono al più tre condizioni, due sulla risultante  $\mathbf{R}^{(\text{ext})}$  delle forze esterne,  $\mathbf{R}^{(\text{ext})} = R_1^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{i}}_1 + R_2^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{i}}_2$  e una sul momento risultante delle forze, che sarà sempre diretto ortogonalmente al piano,  $\tau_O^{(\text{ext})} = \tau_3^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{i}}_3$ ,

$$R_1^{(\text{ext})} = 0, \quad R_2^{(\text{ext})} = 0, \quad \tau_3^{(\text{ext})} = 0.$$

In questo tipo di situazioni, in cui il sistema è composto da più componenti rigide e le equazioni cardinali non sono sufficienti, si applica la cosiddetta *tecnica dello svincolamento*, applicando le equazioni cardinali a ciascuna delle due componenti rigide separatamente. In questo modo, si ottengono due insiemi di equazioni di equilibrio, in cui alcune forze precedentemente considerate interne appaiono esplicitamente, essendo ora “esterne” per la singola porzione di sistema. Indicando con  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  i centri di massa delle aste  $\overline{OP}$  e  $\overline{PQ}$  rispettivamente, avremo in questo caso

$$\begin{cases} -mg\hat{\mathbf{i}}_2 + \Phi_O - \Phi_{12} + k\mathbf{x}_Q = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}_1 \wedge (-mg\hat{\mathbf{i}}_2) + \mathbf{x}_P \wedge (-\Phi_{12}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \begin{cases} -mg\hat{\mathbf{i}}_2 + \Phi_Q + \Phi_{12} - k\mathbf{x}_Q = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_Q) \wedge (-mg\hat{\mathbf{i}}_2) + (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q) \wedge \Phi_{12} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

A questo punto abbiamo quindi sei equazioni in sei incognite (tra le nuove forze in gioco, abbiamo introdotto  $\Phi_{12}$ , che dovremo determinare).

**2.2. Statica dei sistemi olonomi.** Il caso dei sistemi olonomi è particolarmente interessante. Come sappiamo, in un sistema olimo è possibile individuare  $n$  variabili lagrangiane  $\mathbf{q} = (q_i)_{i=1}^n \in \Omega$  che parametrizzano localmente le configurazioni del sistema tenendo conto dei vincoli in un opportuno spazio delle configurazioni  $\Omega$ . Come prima, supponiamo che il sistema sia costituito da  $N$  punti materiali  $P_k$ , ciascuno in posizione  $\mathbf{x}_k$  secondo un opportuno riferimento inerziale, massa  $m_k$  e sottoposto ad una forza attiva totale  $\mathbf{F}_k^{(a)}$ . Una configurazione  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_k)_{k=1}^N$  del sistema si può parametrizzare in termini di  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , vettore in uno spazio  $n$ -dimensionale. In particolare, per ogni  $k$  possiamo scrivere  $\mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}_k(\mathbf{q})$ , di modo che

$$\delta\mathbf{x}_k = \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \delta q_a.$$

Analogamente,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q})$ , e indicheremo quindi  $\mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{X}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q})) \equiv \mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . In questo caso, il lavoro virtuale delle forze attive in un punto  $\mathbf{X}_0$ , corrispondente alle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}_0$ , si può scrivere come

$$\tilde{w}^{(a)}(\mathbf{q}_0, \delta\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}), \delta\mathbf{x}_k(\mathbf{q}) \rangle = \sum_{a=1}^n Q_a(\mathbf{q}_0) \delta q_a, \quad Q_a(\mathbf{q}_0) := \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k^{(a)}(\mathbf{q}_0), \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}(\mathbf{q}) \rangle,$$

dove si intende che sia la forza attiva che le posizioni  $\mathbf{x}_k$  sono state espresse in termini delle variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$ , e  $\mathcal{Q}_a$  sono le forze generalizzate che abbiamo già introdotto. Consideriamo queste relazioni calcolate ora nelle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}_0$ , associate ad una candidata posizione di equilibrio. Se indichiamo con  $\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0) = (\mathcal{Q}_a(\mathbf{q}_0))_{a=1}^n$  il vettore delle forze lagrangiane, possiamo scrivere in forma più compatta

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(a)} = \mathcal{Q}^T(\mathbf{q}_0)\delta\mathbf{q}.$$

A questo punto, possiamo applicare il Teorema dei lavori virtuali, osservando che si può avere a che fare con due diverse situazioni.

**Vincoli bilateri e configurazioni ordinarie:** Se il sistema è soggetto a vincoli bilaterali e  $\mathbf{q}_0$  è associato ad una configurazione  $\bar{\mathbf{X}}$  non di frontiera, allora tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili e di conseguenza  $\tilde{\mathbf{w}}^{(a)}(\mathbf{q}_0, \delta\mathbf{q}) = \mathcal{Q}^T(\mathbf{q}_0)\delta\mathbf{q} \leq 0$  per ogni  $\delta\mathbf{q}$  implica che

$$\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}.$$

Come si vede, un sistema olonomo si comporta come un *punto materiale libero* in cui la condizione di equilibrio è semplicemente che la forza generalizzata su di esso (intesa come vettore) sia nulla.

**Vincoli unilateri e configurazioni di frontiera:** In questo caso, dobbiamo distinguere tra due tipi di configurazioni possibili, ovvero configurazioni ordinarie e di confine. Si dicono configurazioni ordinarie di un sistema olonomo quelle descritte da un punto  $\mathbf{q}_0$  interno allo spazio delle configurazioni  $\Omega$ ,  $\mathbf{q}_0 \in \mathring{\Omega}$ . Sono di confine le configurazioni di un sistema con vincoli unilateri in cui  $\mathbf{q}_0$  appartiene alla frontiera di  $\Omega$ ,  $\mathbf{q}_0 \in \partial\Omega$ . Gli spostamenti virtuali a partire da una configurazione ordinaria sono sempre reversibili, mentre ciò non vale quando la configurazione è di confine. Dunque  $\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$  rimane un criterio valido per determinare le configurazioni *ordinarie* di equilibrio in un sistema olonomo anche in presenza di vincoli unilateri. Bisogna però, in più, cercare eventuali possibili configurazioni di confine tali che  $\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0)^T\delta\mathbf{q}_0 \leq 0$  in un intorno di  $\mathbf{q}_0 \in \partial\Omega$ . In questo caso, chiaramente, entra in gioco la geometria di  $\Omega$ .

In generale, quindi, la seguente Proposizione riformula il Teorema dei lavori virtuali nel caso di sistemi olonomi, fornendo i criteri da applicare per calcolare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine di un sistema olonomo.

**PROPOSIZIONE 2.4.** *Una configurazione ordinaria  $\mathbf{q}_0$  è di equilibrio se  $\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ . Una configurazione  $\mathbf{q}_0$  di confine è di equilibrio se*

- $\mathcal{Q}_a(\mathbf{q}_0) = 0$  se  $\delta q_a$  può avere qualsivoglia segno (ovvero, ci si può spostare reversibilmente in  $q_a$ );
- $\mathcal{Q}_a(\mathbf{q}_0) \geq 0$  se si può solo avere  $\delta q_a \leq 0$  (spostamento irreversibile in  $q_a$ );
- $\mathcal{Q}_a(\mathbf{q}_0) \leq 0$  se si può solo avere  $\delta q_a \geq 0$  (spostamento irreversibile in  $q_a$ ).

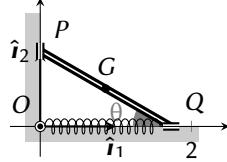
Se le forze attive sono conservative, abbiamo visto che, aggiuntivamente, vale la seguente relazione:

$$\mathcal{Q}_a = -\frac{\partial V(\mathbf{q}_0)}{\partial q_a}, \quad a \in [n].$$

La Proposizione precedente fornisce, in questo caso, condizioni quindi sul gradiente del potenziale. Vale il seguente Teorema.

**TEOREMA 2.5** (Stazionarietà del potenziale). *Le configurazioni ordinarie di equilibrio di un sistema olonomo soggetto a forze conservative sono tutte e sole quelle che annullano il gradiente del potenziale,  $\nabla V(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ , ovvero coincidono con i punti stazionari di  $V$ .*

**Esempio 3.7** – Consideriamo un sistema piano, costituito da un'asta omogenea  $\overline{PQ}$  di massa  $m$  vincolata agli assi cartesiani, in modo che la posizione del punto  $P$  sia individuata da un vettore  $\mathbf{x}_P = y\hat{\mathbf{i}}_2$  e che la posizione del punto  $Q$  sia individuata da  $\mathbf{x}_Q = x\hat{\mathbf{i}}_1$ . Tali coordinate sono vincolate ad essere tali che  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . L'asta è rigida, ha massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Infine, una molla ideale, di costante elastica  $k$ , collega il punto  $Q$  all'origine. Il sistema è quindi soggetto a vincoli olonomi ed è possibile parametrizzare le configurazioni ammesse utilizzando un angolo  $\theta$  indicato in figura.



Nel sistema,  $\theta \in \Omega := [0, \frac{\pi}{2}]$  e le configurazioni  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  sono di confine. Il potenziale del sistema si può scrivere

$$V(\theta) = mg\frac{y}{2} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{mg\ell \sin \theta}{2} + \frac{k(\ell \cos \theta)^2}{2}.$$

Il primo contributo è quello dovuto al potenziale gravitazionale, che si può stimare immaginando l'intera massa  $m$  concentrata nel centro di massa del sistema; il secondo contributo invece è dovuto alla presenza della molla. Chiamando  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ , le configurazioni di equilibrio si possono trovare studiando

$$\partial_\theta V = \frac{k\ell^2}{2} \cos \theta (\eta - 2 \sin \theta).$$

Le configurazioni di equilibrio *ordinarie* vanno cercate in  $\dot{\Omega} = (0, \pi/2)$ , imponendo

$$\cos \theta (\eta - 2 \sin \theta) = 0.$$

Nell'intervallo aperto che stiamo studiando  $\cos \theta > 0$  e  $\sin \theta > 0$ , per cui occorre trovare  $\theta$  tale che

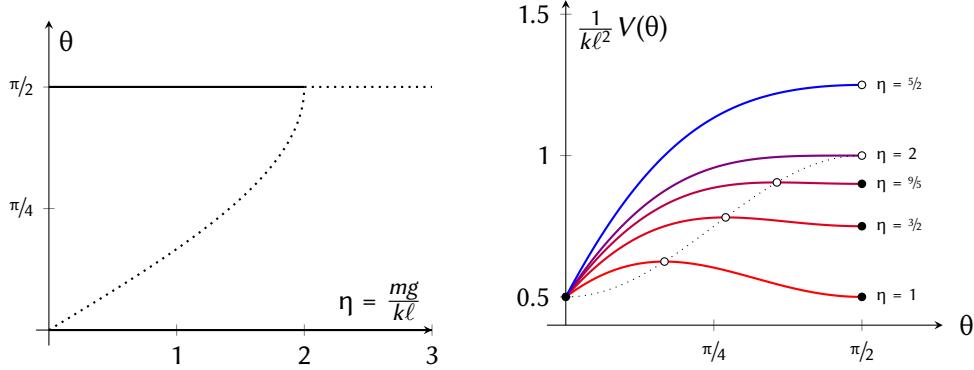
$$\eta - 2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{\eta}{2}.$$

Se  $\eta < 2$ , allora questa equazione ammette una soluzione, ovvero

$$\theta = \arcsin \frac{\eta}{2};$$

diversamente, non esistono soluzioni.

Consideriamo ora le due configurazioni di confine. Per  $\theta = 0$ , i possibili spostamenti virtuali sono sempre  $\delta\theta \geq 0$ , per cui, perché questa configurazione sia di equilibrio, deve valere  $\partial_\theta V|_{\theta=0} \geq 0$ . In effetti, troviamo che  $\partial_\theta V|_{\theta=0} = -\frac{1}{2}k\ell^2\eta \leq 0$ , che è sempre soddisfatto, per cui  $\theta = 0$  è *sempre* di equilibrio. La configurazione di confine  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , invece, ammette solo  $\delta\theta \leq 0$ , per cui deve valere  $\partial_\theta V|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \leq 0$ : sostituendo si vede che  $\partial_\theta V|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , per cui anche questa configurazione è *sempre* di equilibrio. Se tracciamo un grafico dei punti di equilibrio al variare di  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ , troviamo le curve raffigurate in Fig. 3 (sinistra).



**FIGURA 3.** (*Sinistra*) Configurazioni stabili (linea continua) e instabili (linea tratteggiata) al variare del parametro  $\eta$  del sistema studiato a pagina 72. (*Destra*) Energia potenziale  $V(\theta)$  per diversi valori di  $\eta$ : per ogni curva sono indicati i punti di equilibrio stabile (nero) o instabile (bianco). La linea punita corrisponde al luogo dei punti associati alla posizione del punto di equilibrio ordinario al variare di  $\eta$ .

### 3. Stabilità

Le considerazioni espresse finora sono utili per identificare le configurazioni di equilibrio, ma non sono sufficienti per studiarne la *stabilità*. Supponiamo che il nostro sistema meccanico sia posto *vicino* ad una certa posizione di equilibrio. Se il sistema rimane nelle vicinanze della configurazione di equilibrio, si dice che essa è di *equilibrio stabile*; viceversa, se si allontana dalla configurazione di equilibrio, si dice che essa è di *equilibrio instabile*. Focalizziamoci sul caso di sistemi soggetti a vincoli olonomi: una definizione più precisa è la seguente, basata sul concetto di *intorno* di una configurazione  $\mathcal{C}$ , inteso come intorno nello spazio delle configurazioni. L'idea qui è caratterizzare il punto di equilibrio sulla base del lavoro fatto dalle forze attive per portare il sistema da un suo intorno al punto stesso: se tale lavoro è negativo, ciò significa che le forze attive “resistono” all'allontanamento da  $\mathbf{q}_0$  agendo contro di esso. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 3.1** (Stabilità in senso statico). Sia dato un sistema olonomo parametrizzato localmente da un insieme di variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$ . Si dice che una configurazione di equilibrio di coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}_0$  è stabile in senso statico se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\mathbf{q}$  con  $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\| \leq \varepsilon$  nello spazio delle configurazioni, il lavoro compiuto dalle forze attive per spostare il sistema da  $\mathbf{q}_0$  a  $\mathbf{q}$  è negativo lungo qualsivoglia traiettoria da  $\mathbf{q}_0$  a  $\mathbf{q}$ .

Questa definizione è di difficile applicazione in generale, ma si traduce in un criterio molto semplice se si ha a che fare con un sistema olonomo le cui forze in gioco sono *conservative*. Infatti in questo caso il lavoro delle forze attive nel passare da  $\mathbf{q}_0$  a  $\mathbf{q}$  è  $W(\mathbf{q}_0 \rightarrow \mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_0) - V(\mathbf{q}) < 0$ ,  $V(\mathbf{q}) > V(\mathbf{q}_0)$ . Il criterio di stabilità, in altre parole, richiede che  $\mathbf{q}_0$  sia un *minimo locale solato*. Segue perciò la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 3.1.** *In un sistema olonomo conservativo, un minimo relativo isolato dell'energia potenziale corrisponde ad una configurazione di equilibrio stabile in senso statico.*

Perché una configurazione di equilibrio ordinaria  $\mathbf{q}_0$  sia di equilibrio ordinaria è quindi sufficiente (ma non necessario) che la matrice hessiana

$$\text{Hess}(V)(\mathbf{q}_0) := \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0) \right)_{ab}$$

sia definita positiva, ovvero abbia tutti gli autovalori strettamente positivi. Se  $n = 1$ , allora la condizione sopra associata a  $q_0$  si riduce ad una condizione di derivata seconda positiva del potenziale in  $q_0$ . Si noti che se la matrice hessiana ha autovalori nulli, uno studio della matrice hessiana non è concludente in generale.

**Esempio 3.8** — Riprendiamo il sistema discusso a pagina 72. Abbiamo già visto che le configurazioni di equilibrio sono

$$\theta = \arcsin \frac{\eta}{2} \quad \text{per } \eta < 2, \quad \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

dove  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ . Non abbiamo però studiato la stabilità delle configurazioni. Se calcoliamo la derivata seconda di  $V$  nella configurazione di equilibrio ordinaria  $\theta = \arcsin \frac{\eta}{2}$ , otteniamo

$$\partial_\theta^2 V(\theta)|_{\theta=\arcsin \eta} = k\ell^2 \frac{\eta^2 - 4}{4}.$$

Nel regime di valori ammesso per questa configurazione di valori,  $\eta < 2$ , questa derivata è negativa, per cui si tratta di una configurazione instabile.

Lo studio delle configurazioni di confine è più delicato. Per capire se esse sono di massimo o minimo locale, occorre studiare la funzione potenziale nel loro intorno. In un intorno di  $\theta = 0$ , la funzione potenziale è

$$V(\theta) = \frac{k\ell^2}{2} + \frac{k\ell^2}{2}\eta\theta + o(\theta),$$

per cui la funzione è crescente in un intorno positivo di  $\theta = 0$ , che è quindi un minimo locale. Intorno a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , abbiamo invece

$$V(\theta) = \frac{1}{2}\eta k\ell^2 + \frac{1}{2}k\ell^2 \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o(|\theta - \pi/2|),$$

che mostra come  $V(\theta)$  decresca per  $\theta \rightarrow \pi/2$  se  $\eta < 2$  e quindi  $\theta = \frac{\pi}{2}$  è una configurazione di equilibrio stabile per  $\eta < 2$ ; per  $\eta > 2$ , invece,  $V$  cresce per  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e il punto  $\theta = \frac{\pi}{2}$  è un massimo locale del potenziale: di conseguenza si tratta di una configurazione instabile. Possiamo quindi produrre un grafico delle posizioni di equilibrio in cui indichiamo quali sono stabili (in linea continua) e instabili (in linea tratteggiata) al variare di  $\eta$  come in Fig. 3 (sinistra).

## CAPITOLO 4

# Elementi di dinamica

## 1. Energia cinetica

**1.1. Energia cinetica di un sistema.** Consideriamo un sistema di punti materiali  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , di modo che il  $k$ -esimo tra loro abbia massa  $m_k$  e sia individuato dal vettore posizione  $\mathbf{x}_k$  rispetto ad un riferimento inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Si definisce *energia cinetica* del sistema la quantità

$$T := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k\|^2.$$

Se invece di un sistema di punti materiali è dato un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$  con campo di velocità  $\mathbf{v}_X$  su di esso (di modo che  $\mathbf{v}_X$  sia la velocità del punto  $X$  in posizione  $\mathbf{x}$ ), allora l'energia cinetica del corpo è data da

$$T := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho_X \|\mathbf{v}_X\|^2 d\mathbf{x}.$$

L'energia cinetica può essere decomposta in due contributi, uno dei quali equivale all'energia cinetica di un punto materiale di massa uguale alla massa totale del sistema e concentrato nel centro di massa.

■ **TEOREMA 1.1** (Secondo teorema di König). *L'energia cinetica di un sistema materiale di massa  $m$  può essere espressa come*

$$T = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + T_G^*$$

dove  $T_G^*$  è l'energia cinetica del sistema in un riferimento traslante con velocità  $\mathbf{v}_G$  pari a quella del centro di massa.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il caso di un corpo composto da  $N$  punti materiali  $\{P_k\}_{k=1}^N$ , di modo che come al solito  $P_k$  abbia massa  $m_k$  e velocità  $\mathbf{v}_k$  rispetto ad un riferimento inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Sia inoltre  $G$  il centro di massa del sistema. Per ottenere la decomposizione proposta dal teorema, possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galilei e scrivere

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^* + \mathbf{v}_G,$$

dove  $\mathbf{v}_k^*$  è la velocità di  $P_k$  rispetto ad un riferimento *traslante* centrato nel centro di massa: siffatto sistema ha velocità angolare nulla rispetto al riferimento di partenza e  $G$  come origine. Abbiamo quindi che

$$\|\mathbf{v}_k\|^2 = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \|\mathbf{v}_k^*\|^2 + \|\mathbf{v}_G\|^2 + 2\langle \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \rangle.$$

Dunque possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_G\|^2 \sum_{k=1}^N m_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k^* \|^2 + \sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \rangle = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + T_G^*.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la linearità del prodotto scalare: infatti,

$$\sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^*, \mathbf{v}_G \right\rangle = 0,$$

dato che  $\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^*$  è la quantità di moto nel riferimento del centro di massa, che è zero.  $\square$

**1.2. Teorema dell'energia cinetica.** Una delle ragioni per cui abbiamo introdotto l'energia cinetica è dovuta al suo legame con i concetti di potenza e lavoro.

■ **TEOREMA 1.2 (dell'energia cinetica).** *Sia  $T$  l'energia cinetica di un sistema e  $\Pi$  la potenza di tutte le forze agenti su di esso. Allora*

$$\frac{d T}{d t} = \Pi.$$

*Inoltre, la variazione  $\Delta T$  dell'energia cinetica di un sistema materiale in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$  egualia il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul sistema.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il caso di un sistema di  $N$  punti materiali  $\{P_k\}_{k=1}^N$ : nella solita notazione, per ciascuno di essi vale naturalmente il Secondo principio,

$$\mathbf{F}_k = m_k \mathbf{a}_k,$$

dove  $\mathbf{F}_k$  è la risultante di *tutte* le forze applicate su  $P_k$ . Allora, moltiplicando scalarmente ambo i membri per  $\mathbf{v}_k$  e sommando su  $k$ ,

$$\Pi \equiv \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{F}_k \rangle = \sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle = \frac{d}{d t} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 \right) = \frac{d T}{d t}.$$

La seconda parte del teorema segue da una integrazione diretta dell'espressione ottenuta. Supponiamo di considerare l'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ : allora

$$\Delta T := T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d T}{d t} d t = \int_{t_0}^{t_1} \Pi d t = W. \quad \square$$

Questo teorema generale ha speciali e importanti casi particolari elencati nelle seguenti Proposizioni.

**PROPOSIZIONE 1.3 (Vincoli ideali bilaterali fissi).** *Se il sistema è soggetto a vincoli ideali bilaterali fissi, allora*

$$\frac{d T}{d t} = \Pi^{(a)},$$

*dove  $\Pi^{(a)}$  è la potenza delle forze attive.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il lavoro virtuale delle forze di reazione in un vincolo ideale è nullo se il vincolo è *bilaterale*: inoltre, se il vincolo è *fisso*, il lavoro infinitesimo reale è un particolare lavoro infinitesimo virtuale, e pertanto il lavoro infinitesimo delle forze di reazione è nullo. Ne consegue, che anche la potenza delle forze di reazione è nulla.  $\square$

Dal fatto che la potenza delle forze interne di un corpo rigido è sempre nulla, discende immediatamente la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 1.4** (Corpo rigido). *Nel caso di un corpo rigido, vale*

$$\frac{d T}{d t} = \Pi^{(\text{ext})} \Rightarrow \Delta T = W^{(\text{ext})}$$

*dove la potenza è quella dovuta alle sole forze esterne, mentre  $\Delta T$  è la variazione di energia cinetica in un certo intervallo temporale in cui le forze esterne eseguono un lavoro  $W^{(\text{ext})}$ .*

Infine, possiamo enunciare il seguente, importante risultato.

**PROPOSIZIONE 1.5** (Conservazione dell'energia meccanica). *Sia dato un sistema sottoposto a vincoli ideali bilateri fissi e su cui agiscono solo forze attive conservative, di energia potenziale  $V$ . Allora l'energia meccanica*

$$E := T + V$$

*è costante nel tempo.*

**DIMOSTRAZIONE.** La proposizione discende direttamente da quanto abbiamo detto sopra, essendo

$$\frac{d T}{d t} = \Pi^{(\text{a})} = -\frac{d V}{d t} \Rightarrow \frac{d}{d t}(T + V) = \frac{d E}{d t} = 0. \quad \square$$

Quando le ipotesi della precedente Proposizione sono verificate, si dice che l'energia meccanica è un *integrale primo del moto*. L'energia meccanica può conservarsi anche nel caso in cui esistano forze attive non conservative *purché* queste siano associate a potenza nulla, di modo che il secondo passaggio della precedente dimostrazione sia legittimo.

**Esempio 4.1** (Velocità di fuga) — Un esempio di applicazione della conservazione dell'energia meccanica è il calcolo della cosiddetta *velocità di fuga*, ovvero la velocità che deve avere un oggetto per abbandonare la superficie di un pianeta senza ricaderci. Consideriamo il problema sulla Terra, ignoriamo ogni forza d'attrito e consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  lanciato orizzontalmente (cioè in direzione perpendicolare alla retta passante da punto e centro della Terra) a quota  $h$  dalla superficie terrestre. Il corpo è così soggetto alla sola forza gravitazionale, che è conservativa, e ha energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R_T + h} + \text{costante},$$

dove  $v$  è il modulo della velocità del corpo al lancio, mentre  $R_T$  e  $M_T$  sono rispettivamente raggio e massa della Terra, mentre  $G$  è la costante di gravitazione universale. Se  $v$  è sufficiente per allontanarsi indefinitivamente dalla superficie (ovvero, per raggiungere un punto con  $h \rightarrow +\infty$ ), la conservazione dell'energia meccanica comporta che

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R_T + h} = \frac{1}{2}mv_\infty^2,$$

dove  $v_\infty$  è la velocità del corpo a  $h \rightarrow +\infty$ . Se ci basta che  $v_\infty = 0$ , allora

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} \underset{h \ll R_T}{\approx} \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}.$$

**1.3. Energia cinetica dei corpi rigidi e momento d'inerzia.** Nel caso di un sistema rigido, l'energia cinetica si può decomporre in un contributo traslatorio e uno rotatorio grazie alla relazione che lega le velocità di punti diversi del corpo che abbiamo già studiato. Scrivere la formula per l'energia cinetica di un corpo rigido, tuttavia, fa naturalmente emergere una particolare quantità che racchiude le necessarie informazioni su come la massa del corpo è distribuita nello spazio.

**DEFINIZIONE 1.1** (Tensore d'inerzia). Sia dato un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho_X$  in un suo generico punto  $X$ . Il suo tensore d'inerzia rispetto ad un punto  $P$  è dato da

$$\mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)) \rho_X d\mathbf{x}$$

**Q** Prodotto tensoriale — Nell'espressione precedente compare il *prodotto tensoriale* tra due vettori. Dati due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ , spazio vettoriale euclideo, il loro prodotto tensoriale  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  è un operatore lineare che, applicato ad un terzo vettore  $\mathbf{w}$  dello stesso spazio, opera come  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ . Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono gli elementi di  $\mathbb{R}^2$  corrispondenti alle coordinate di  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  rispettivamente, possiamo dare una rappresentazione *matriciale* all'operatore  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  come

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{u}\mathbf{v}^T)_{ij} = u_i v_j.$$

Per esempio, se  $d = 3$

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

In questo modo, dato un vettore  $\mathbf{w}$  di coordinate  $\mathbf{w}$ ,  $(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{w})$ , che sono le coordinate del vettore  $\mathbf{u}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ . Il prodotto tensore è distributivo, per cui per esempio  $\mathbf{v} \otimes (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ , ma non commutativo:  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ . Usando questa notazione si possono scrivere varie quantità. Per esempio, se indichiamo con  $\mathbf{I}$  l'operatore identità, tale che  $\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$  per un generico vettore  $\mathbf{v}$ , allora in  $d = 3$  vale l'identità

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{I} - (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a})) \mathbf{b}.$$



**PROPOSIZIONE 1.6.** *L'energia cinetica di un corpo rigido di massa  $m$  e centro di massa  $G$  si può esprimere come*

$$(4.1a) \quad T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_P\|^2 + m\langle \mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega} \rangle$$

dove  $\mathbf{x}_P$  è il vettore che identifica la posizione di un punto a scelta  $P$  del corpo,  $\boldsymbol{\omega}$  la sua velocità angolare e  $\mathbf{I}_P$  è il tensore d'inerzia rispetto al punto  $P$ . In particolare scegliendo come punto  $P$  il centro di massa  $G$  si ha

$$(4.1b) \quad T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \rangle.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo dimostrare la Proposizione sopra direttamente usando la legge fondamentale del moto rigido. Sia  $\rho$  la densità del corpo. Allora

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}_X\|^2 \rho_X d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho_X d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}_P\|^2 \rho_X d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho_X d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}} \langle \mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \rangle \rho_X d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_P\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho_X d\mathbf{x} + m \langle \mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \rangle. \end{aligned}$$

Ora, sappiamo che dati tre vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ ,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ , per cui, dato un vettore  $\mathbf{u}$ ,

$$\|\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) \rangle.$$

D'altra parte, essendo  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{a})\mathbf{b}$ , possiamo ulteriormente semplificare

$$\mathbf{u} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = \left( \|\mathbf{u}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \right) \boldsymbol{\omega},$$

per cui

$$\|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 = \langle \boldsymbol{\omega}, (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)) \boldsymbol{\omega} \rangle$$

e in definitiva

$$(4.2) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)\|^2 \rho_X d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \left\langle \boldsymbol{\omega}, \left[ \int_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)) \rho_X d\mathbf{x} \right] \boldsymbol{\omega} \right\rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega} \rangle,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo identificato l'espressione del tensore di inerzia rispetto a  $P$

$$\mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)) \rho_X d\mathbf{x}.$$

È immediato vedere che se  $P \equiv G$  si ottiene come caso particolare il caso proposto dal teorema.  $\square$

**1.4. Il tensore d'inerzia e le sue proprietà.** Il tensore d'inerzia è un oggetto molto importante e per questo merita una trattazione piuttosto dettagliata. Esso ha una espressione apparentemente piuttosto complicata: come abbiamo visto, nel caso di un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho_X$  esso si scrive come

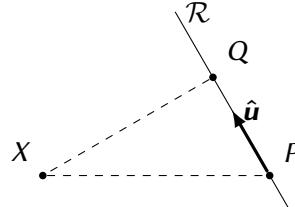
$$(4.3) \quad \mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)) \rho_X d\mathbf{x}.$$

Analogamente, se il sistema in esame è costituito da  $N$  punti materiali  $\{P_k\}_{k=1}^N$ , con  $P_k$  in posizione  $\mathbf{x}_k$  rispetto ad un riferimento cartesiano e massa  $m_k$ , la corrispondente formula è data da

$$(4.4) \quad \mathbf{I}_P := \sum_{k=1}^N m_k (\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P)).$$

Per comprendere meglio il significato fisico di questo oggetto, consideriamo per esempio una direzione individuata dal versore  $\hat{\mathbf{u}}$  nello spazio e calcoliamo  $\langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle$ . Abbiamo

$$\langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{u}} \rangle^2) \rho_X d\mathbf{x}.$$



La costruzione geometrica sopra permette di vedere che  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{u}} \rangle^2 = d^2(X, \mathcal{R})$ , distanza quadra tra il punto  $X$  individuato dal vettore  $\mathbf{x}$  e la retta  $\mathcal{R}$  passante per  $P$  e di direzione  $\hat{\mathbf{u}}$ : infatti,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|$  è proprio la distanza tra  $X$  e  $P$ , mentre  $|\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_P, \hat{\mathbf{u}} \rangle|$  è la lunghezza del segmento  $\overline{PQ}$  in figura. Chiamiamo  $\langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle$  momento d'inerzia del corpo rispetto alla retta  $\mathcal{R}$ , scrivendo

$$I_{\mathcal{R}} := \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\mathcal{B}} d^2(X, \mathcal{R}) \rho_X d\mathbf{x}.$$

La quantità

$$\delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{\frac{I_{\mathcal{R}}}{m}}$$

è detta *raggio di girazione* e costituisce una sorta di *distanza quadratica media* dalla retta del corpo pesata sulla sua densità di massa: il momento di inerzia, infatti, si può scrivere come  $I_{\mathcal{R}} = m\delta_{\mathcal{R}}^2$ , che è il momento d'inerzia rispetto ad  $\mathcal{R}$  di un punto materiale di massa  $m$  a distanza  $\delta_{\mathcal{R}}$  dalla retta  $\mathcal{R}$ . Scrivendo perciò  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}$ , l'energia cinetica di un corpo rigido è

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{I}_G \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle \omega^2 = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}I_G \omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\|\mathbf{v}_G\|^2 + \delta_{\mathcal{G}}^2 \omega^2\right),$$

dove  $I_G$  è il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per il centro di massa  $G$  e di direzione  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  e  $\delta_G$  il corrispondente asse di girazione.

1.4.1. *Proprietà generali.* Per semplicità, focalizziamoci inizialmente su  $\mathbf{I}_O$ , ovvero sul tensore calcolato rispetto all'origine. Dato questo oggetto e un riferimento cartesiano ortonormale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , il tensore si rappresenta come una matrice di nove elementi,

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I_{O,11} & I_{O,12} & I_{O,13} \\ I_{O,12} & I_{O,12} & I_{O,13} \\ I_{O,13} & I_{O,13} & I_{O,33} \end{pmatrix}$$

tale che

$$I_{O,ij} := \langle \hat{\mathbf{i}}_i, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \int_{\mathcal{B}} \left( \|\mathbf{x}\|^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) \rho_X d\mathbf{x}.$$

Questa matrice è detta *matrice d'inerzia*. I suoi valori sulla diagonale sono detti *momenti d'inerzia rispetto agli assi cartesiani*: infatti,  $I_{O,jj} = \langle \hat{\mathbf{i}}_j, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{i}}_j \rangle$  è, come abbiamo visto sopra, il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per  $O$  di direzione  $\hat{\mathbf{i}}_j$ , ovvero rispetto all'asse cartesiano  $j$ . Gli elementi fuori diagonale  $I_{ij}$ , con  $i \neq j$ , sono detti *prodotti d'inerzia*. Essa è simmetrica definita

positiva: infatti,  $I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{u}} \rangle \geq 0$  per qualsivoglia direzione  $\hat{\mathbf{u}}$  associata ad una retta  $\mathcal{R}$  passante per l'origine, ed è nullo se e solo se  $\rho_X$  è concentrata sulla retta  $\mathcal{R}$ . Gli autovettori  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$  dell'operatore  $\mathbf{I}_O$  sono detti *assi principali d'inerzia* e, nel caso in cui  $O \equiv G$  centro di massa, essi si dicono *assi centrali*, mentre i suoi autovalori si dicono *momenti principali d'inerzia*. Nella base dei suoi assi principali d'inerzia,  $\mathbf{I}_O$  assume quindi la rappresentazione

$$\hat{\mathbf{I}}_O = \begin{pmatrix} I_{O,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O,3} \end{pmatrix}.$$

Il calcolo dei momenti d'inerzia rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  di versore  $\hat{\mathbf{u}} = \sum_i \hat{u}_i \hat{\mathbf{e}}_i$  passante per l'origine diventa molto semplice usando la base diagonalizzante, ovvero  $I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{u}} \rangle = \hat{\mathbf{u}}^\top \hat{\mathbf{I}}_O \hat{\mathbf{u}} = \hat{u}_1^2 I_{O,1} + \hat{u}_2^2 I_{O,2} + \hat{u}_3^2 I_{O,3}$ .

Gli assi principali d'inerzia sono univocamente determinati se gli autovalori della matrice d'inerzia sono tutti diversi: viceversa, se c'è degenerazione, per esempio  $I_{O,1} = I_{O,2} \neq I_{O,3}$ , sono assi d'inerzia quelli corrispondenti alla direzione di  $\hat{\mathbf{e}}_3$  e a qualsivoglia coppia ortonormale che generi lo spazio ortogonale a  $\hat{\mathbf{e}}_3$ . Infine, se  $I_{O,1} = I_{O,2} = I_{O,3}$ , allora *tutte le terne* ortonormali sono assi principali d'inerzia. Valgono le seguenti proprietà

- Se  $\Pi$  è un piano di simmetria materiale del corpo, allora il vettore ortogonale ad esso, sia esso  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , corrisponderà ad un asse principale d'inerzia: se infatti  $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$  è un riferimento ortonormale, con  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$  paralleli quindi al piano, si ha che  $I_{O,13} = I_{O,23} = 0$ , essendo l'integrale che definisce questi momenti dispari in  $x_3$ .
- Se vi sono *due* piani di simmetria materiale,  $\Pi_1$  con versore normale  $\hat{\mathbf{v}}_1$ , e  $\Pi_2$  con versore normale  $\hat{\mathbf{v}}_2$ , tali da intersecarsi in una retta  $\mathcal{R} = \Pi_1 \cap \Pi_2$  di direzione individuata dal versore  $\hat{\mathbf{v}}_3$ , allora possono verificarsi due casi:
  - se  $\hat{\mathbf{v}}_1 \perp \hat{\mathbf{v}}_2$  si ha che  $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{v}}_3\}$  è una terna ortonormale di assi principali d'inerzia;
  - se  $\hat{\mathbf{v}}_1$  e  $\hat{\mathbf{v}}_2$  non sono ortogonali, allora il piano che essi generano contiene una infinità di coppie di assi principali d'inerzia, mentre  $\hat{\mathbf{v}}_3$  è asse principale d'inerzia.

**Esempio 4.2** (Anello omogeneo) — Consideriamo un anello di centro  $O$ , raggio  $R$  e densità lineare uniforme  $\lambda$ . Dato un riferimento cartesiano  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , questo può essere parametrizzato come una curva che giace nel piano generato da  $\hat{\mathbf{i}}_1$  e  $\hat{\mathbf{i}}_2$

$$\gamma(t) = R \cos t \hat{\mathbf{i}}_1 + R \sin t \hat{\mathbf{i}}_2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Se  $\mathbf{I}_O$  è il tensore d'inerzia rispetto ad  $O$ , calcoliamo

$$I_Z := \langle \hat{\mathbf{i}}_3, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = \lambda \int_{\gamma} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) d\gamma = \lambda \int_0^{2\pi} R^3 dt = 2\pi\lambda R^3.$$

Il momento rispetto ad un asse complanare all'anello e passante per il suo centro, per esempio all'asse  $\mathcal{X}$  di direzione  $\hat{\mathbf{i}}_1$  e passante per l'origine, è

$$I_X := \langle \hat{\mathbf{i}}_1, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{i}}_1 \rangle = \lambda \int_{\gamma} (\gamma_1^2 + \gamma_3^2) d\gamma = \lambda \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2 t dt = \pi\lambda R^3.$$

**Esempio 4.3** (Asta omogenea) — Consideriamo un'asta di densità lineare uniforme  $\lambda$  parametrizzata come

$$\gamma(t) = t\hat{i}_1, \quad t \in [-\frac{1}{2}\ell, \frac{1}{2}\ell],$$

in un riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $\mathcal{Z}$  diretto come  $\hat{i}_3$  e passante per il suo centro è

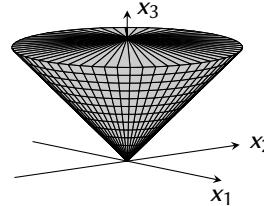
$$I_{\mathcal{Z}} = \lambda \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} t^2 dt = \frac{\lambda\ell^3}{12}.$$

Il momento rispetto ad un asse complanare all'anello e passante per il suo centro, per esempio all'asse  $\mathcal{X}$  di direzione  $\hat{i}_1$  e passante per l'origine, è

$$I_{\mathcal{X}} = \lambda \int_{\gamma} (\gamma_1^2 + \gamma_3^2) d\gamma = \lambda \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2 t dt = \pi\lambda R^3.$$

**Esempio 4.4** (Cono omogeneo) — Consideriamo un cono con parametrizzato come segue:

$$\mathcal{V} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{R^2}{h^2} x_3^2, \quad 0 \leq x_3 \leq h \right\}, \quad R > 0, \quad h > 0.$$



Sia la sua densità volumetrica  $\rho_X = \frac{3m}{\pi h R^2}$  uniforme, in modo che la massa del corpo sia pari a  $m > 0$ . Calcoliamo ora la matrice d'inerzia rispetto all'origine.

$$I_{O,11} = \frac{3m}{\pi h R^2} \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2) d\mathbf{x} = I_{O,22} = \left( \frac{3}{5} h^2 + \frac{3}{20} R^2 \right) m, \quad I_{O,33} = \frac{3m}{\pi h R^2} \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2) d\mathbf{x} = \frac{3}{10} m R^2.$$

D'altra parte, per ragioni di simmetria, per  $i \neq j$

$$I_{O,ij} = -\frac{3}{\pi} \int_{\mathcal{V}} x_i x_j d\mathbf{x} = 0.$$

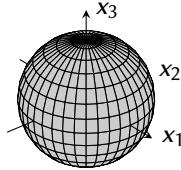
La matrice d'inerzia è quindi già in forma diagonale, nella forma

$$\mathbf{I}_O = \frac{3mR^2}{20} \begin{pmatrix} 4h^2 + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4h^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}.$$

Gli assi cartesiani sono dunque assi principali d'inerzia, e in particolare i due assi associati ai due versori  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$  corrispondono a due autovalori uguali. In effetti, per via della simmetria rotazionale, *ogni coppia di assi ortogonali nel piano generato da  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$  passante per O è una coppia di assi principali*.

**Esempio 4.5** (Palla omogenea) — Consideriamo una palla omogenea di raggio unitario parametrizzata come segue:

$$\mathcal{V} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \right\}.$$



Sia la sua densità volumetrica \$\rho\_X = \frac{3m}{4\pi R^3}\$ uniforme, in modo che la massa del corpo sia pari a \$m > 0\$. È facile vedere che

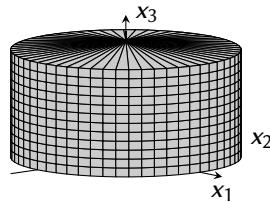
$$I_{O,11} = I_{O,22} = I_{O,33} = \frac{2}{5}mR^2.$$

Viceversa, \$I\_{ij} = 0\$ quando \$i \neq j\$, sicché \$\mathbf{I}\_O = \frac{2}{5}mR^2\mathbf{I}\_3\$. In effetti, come intuibile, ogni terna di assi cartesiani con origine nel centro della palla è una terna di assi principali d'inerzia.

**Esempio 4.6 (Cilindro omogeneo)** — Consideriamo un cilindro di massa \$m\$ e densità omogenea, e calcoliamone il momento d'inerzia rispetto all'asse \$\mathcal{Z}\$. Assumiamo che il cilindro abbia raggio di base \$R\$ e altezza \$h\$, e sia parametrizzato come

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}$$

con densità uniforme \$\rho\_X = \frac{m}{\pi R^2 h}\$.



Il momento d'inerzia rispetto all'asse \$\mathcal{Z}\$ di direzione \$\hat{\mathbf{e}}\_3\$ si calcola quindi come

$$I_{\mathcal{Z}} = \rho_X \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2) d\mathbf{x} = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}mR^2.$$

Come si vede, il momento d'inerzia *non* dipende da \$h\$ ma solo dalla massa e dal raggio del cilindro.

**1.4.2. Formula di Huygens–Steiner.** Esiste una relazione semplice tra i tensori di inerzia calcolati rispetto a punti diversi dello spazio, fornita dal seguente Teorema.

■ **TEOREMA 1.7 (Huygens–Steiner).** *Il tensore d'inerzia di un corpo di massa \$m\$ rispetto ad un punto \$P\$ è pari alla somma*

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_G + m \left( \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \otimes (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \right).$$

dove \$\mathbf{I}\_G\$ è il tensore d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa \$G\$.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo di avere un corpo rigido con centro di massa  $G$  nell'origine del nostro riferimento, e voler calcolare  $\mathbf{I}_P$  rispetto ad un certo punto  $P$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_P &= \int_{\mathcal{B}} \rho_X \left[ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \right] d\mathbf{x} \\
 (4.5) \quad &= \int_{\mathcal{B}} \rho_X \left[ \left( \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_P \rangle + \|\mathbf{x}_P\|^2 \right) \mathbf{I} - (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x}_P) \right] d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathcal{B}} \rho_X \left[ \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \right] d\mathbf{x} + m \left( \|\mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x}_P \right) = \mathbf{I}_G + m \left( \|\mathbf{x}_P\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_P \otimes \mathbf{x}_P \right),
 \end{aligned}$$

dato che ogni integrale lineare in  $\mathbf{x}$  è nullo essendo il centro di massa nell'origine. Naturalmente, nel caso in cui  $G$  non sia nell'origine ma sia identificato da un vettore  $\mathbf{x}_G$ , occorre modificare leggermente la formula sopra eseguendo uno cambio di origine, e scrivendo

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_G + m \left( \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \otimes (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G) \right). \quad \square$$

Usando la base associata agli assi centrali d'inerzia, se rispetto a tali assi  $\mathbf{x}_P = \sum_i x_i \hat{\mathbf{e}}_i$ , la formula trovata implica che

$$[\mathbf{I}_P]_{ij} = [\mathbf{I}_G]_{ii} \delta_{ij} + m(\|\mathbf{x}_P\|^2 \delta_{ij} - x_i x_j),$$

che mostra che se vogliamo che un certo asse, per esempio quello nella direzione  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , rimanga principale a seguito di un cambio di punto di riferimento da  $G$  a  $P$ , sono ammesse due possibilità:

- avere  $x_1 = x_2 = 0$ , e quindi che  $P$  sia lungo l'asse stesso (se un asse è principale centrale, rimane asse principale rispetto ad ogni altro punto dell'asse stesso);
- avere  $x_3 = 0$ , ovvero che ci si stia muovendo nel piano ortogonale a  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , e in tal caso tutti i punti del piano ortogonale a  $\hat{\mathbf{e}}_3$  passante per il centro di massa hanno la retta di direzione  $\hat{\mathbf{e}}_3$  come asse principale d'inerzia corrispondente.

Il risultato di Huygens–Steiner dato sopra in forma tensoriale ha una versione più semplice, molto utile, applicata ai momenti d'inerzia rispetto a specifiche rette.

**COROLLARIO 1.8 (Huygens–Steiner).** *Il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  è pari alla somma*

$$I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R})$$

dove  $I_{\mathcal{R}_G}$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta parallela a  $\mathcal{R}$  e passante per il centro di massa  $G$  del corpo stesso.

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente considerare  $\mathbf{I}_P$  per un punto  $P \in \mathcal{R}$  moltiplicare scalaramente per la direzione  $\hat{\mathbf{u}}$  della retta  $\mathcal{R}$ . Si ha

$$I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_P \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_G \hat{\mathbf{u}} \rangle + m \left( \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G\|^2 - \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_G \rangle^2 \right) = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R}). \quad \square$$

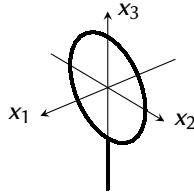
Il teorema ha come ulteriore importante corollario il fatto seguente.

**COROLLARIO 1.9.** *Dato il momento di inerzia  $I_{\mathcal{R}'}$  di un corpo di massa  $m$  rispetto ad una retta  $\mathcal{R}'$ , il momento d'inerzia rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  parallela a  $\mathcal{R}'$  è pari a*

$$I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}'} + m \left( d^2(G, \mathcal{R}') - d^2(G, \mathcal{R}) \right)$$

dove  $G$  è il centro di massa del corpo.

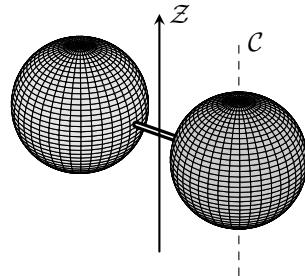
**Esempio 4.7** (Racchetta) — Sia dato un riferimento cartesiano  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Consideriamo un modello che rappresenta una racchetta da tennis, costituita da una circonferenza di raggio  $R$  centrata in  $O$  che giace nel piano generato da  $\hat{\mathbf{i}}_2$  e  $\hat{\mathbf{i}}_3$  passante per l'origine, e un manico di lunghezza  $R$  che va dal punto  $A$ , in posizione  $\mathbf{x}_A = -R\hat{\mathbf{i}}_3$ , al punto  $B$ , in posizione  $\mathbf{x}_B = -2R\hat{\mathbf{i}}_3$ , come nella seguente figura:



La racchetta ha densità lineare  $\lambda$ . Vogliamo calcolare il momento d'inerzia della racchetta rispetto alla retta  $\mathcal{R}$  ortogonale ad essa e passante per  $B$ . Abbiamo già calcolato il momento d'inerzia di un anello di densità lineare  $\lambda$  e raggio  $R$ , ovvero massa  $2\pi\lambda R$ , rispetto ad un asse ortogonale passante per il suo centro, pari a  $2\pi\lambda R^3$ . Abbiamo anche visto che il momento d'inerzia di un'asta di lunghezza  $\ell$  e densità lineare  $\lambda$ , ovvero massa  $\lambda\ell$ , rispetto ad un asse ortogonale passante per il suo punto medio è  $\frac{1}{12}\lambda\ell^3$ . Dobbiamo così solo “traslare” questi due momenti in un asse passante per  $B$ , osservando che i risultati noti fanno in entrambi i casi riferimento ad assi passanti per il centro di massa. Il momento cercato è quindi

$$I_{\mathcal{R}} = (2\pi\lambda R^3 + 2\pi\lambda R(2R)^2) + \left( \frac{\lambda R^3}{12} + \lambda R \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right) = \left( \frac{1}{3} + 10\pi \right) \lambda R^3.$$

**Esempio 4.8** (Sistema di sfere) — Consideriamo un sistema costituito da due sfere di massa  $m$  ed  $m'$ , ciascuna di raggio  $R$  e centri rispettivamente  $C$  e  $C'$  a distanza  $2\ell > 2R$  tra loro. Calcoliamo il momento d'inerzia  $I_{\mathcal{Z}}$  del sistema rispetto ad un asse  $\mathcal{Z}$  ortogonale al segmento che congiunge i centri delle sfere e passante per un punto  $O$  a distanza  $a \in [R, 2\ell - R]$  da  $C$  e distanza  $2\ell - a$  da  $C'$ . Per quale valore di  $a$  il momento d'inerzia del sistema è minimo?



Fissiamo un riferimento ortogonale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  in modo che  $Z$  sia diretto come  $\hat{\mathbf{i}}_3$  e passi per  $O$ . Sappiamo come calcolare, per ciascuna sfera, il momento d'inerzia rispetto alla retta  $\mathcal{C}$  parallela a  $Z$  e passante per il centro della sfera stessa. Per esempio, considerando la sfera centrata in  $C$ , si ha  $I_{\mathcal{C}} = \langle \hat{\mathbf{i}}_3, \mathbf{I}_C \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = \frac{2}{5}mR^2$ .

Per traslare questo contributo rispetto all'asse  $\mathcal{Z}$  possiamo utilizzare il teorema di Huygens–Steiner, scrivendo

$$I_{\mathcal{Z}}^C = I_C + m\ell^2 = m\left(\frac{2}{5}R^2 + a^2\right).$$

Possiamo ripetere lo stesso argomento per la sfera in  $C'$ , ottenendo

$$I_{\mathcal{Z}}^{C'} = I_{C'} + m(2\ell - a)^2 = m'\left(\frac{2}{5}R^2 + (2\ell - a)^2\right).$$

Il contributo totale sarà

$$I_{\mathcal{Z}} = I_{\mathcal{Z}}^C + I_{\mathcal{Z}}^{C'} = \frac{2}{5}(m + m')R^2 + ma^2 + m'(2\ell - a)^2.$$

Il valore minimo rispetto ad  $a$  può essere ottenuto cercando prima di tutto i punti stazionari,

$$\frac{dI_{\mathcal{Z}}}{da} = 2ma - 2m'(2\ell - a) = 0 \Rightarrow a = \frac{2m'}{m+m'}\ell.$$

Essendo  $\frac{d^2I_{\mathcal{Z}}}{da^2} = 2(m + m') > 0$ , il valore trovato è effettivamente il valore per cui il  $I_{\mathcal{Z}}$  è minimo.

Alla luce di queste osservazioni, concludiamo con alcuni casi particolari in cui speciali condizioni e le proprietà del tensore d'inerzia permettono di semplificare particolarmente le espressioni dell'energia cinetica di un corpo rigido.

**Esempio 4.9** (Rigido con asse fisso) — Supponiamo che il corpo rigido in esame abbia un asse fisso, per esempio l'asse passante per i punti del corpo  $O$  e  $P$ . Possiamo scegliere per esempio  $O$  come origine di un riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  e tale che il vettore  $\mathbf{x}_P = x_3\hat{\mathbf{i}}_3$ . Indichiamo con  $\mathcal{Z}$  l'asse passante per  $O$  di direzione  $\hat{\mathbf{i}}_3$ . Di conseguenza,  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{i}}_3$  per un opportuno angolo di rotazione  $\theta$ . Il centro di massa  $G$  avrà quindi  $\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G$ , da cui  $\|\mathbf{v}_G\|^2 = \dot{\theta}^2 d^2(G, \mathcal{Z})$ . L'Eq. (4.1) si scrive

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \langle \hat{\mathbf{i}}_3, \mathbf{I}_G \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 (md^2(G, \mathcal{Z}) + I_{\mathcal{Z}}) = \frac{1}{2}I_{\mathcal{Z}}\dot{\theta}^2,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner. Si noti che il caso di un rigido con asse fisso si applica anche al caso in cui si abbia a che fare con un sistema rigido planare che ruota *nel piano* attorno ad un punto del piano, ovvero attorno ad un asse perpendicolare al piano passante per detto punto.

**Esempio 4.10** (Rigido con punto fisso) — Se il corpo rigido ha un punto  $O$  fisso, scegliendo come origine tale punto avremo come prima che il centro di massa  $G$  del rigido ha velocità  $\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G$ . In questo caso, l'asse di rotazione istantaneo varierà nel tempo e sarà orientato come  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ , di modo che potremo scrivere

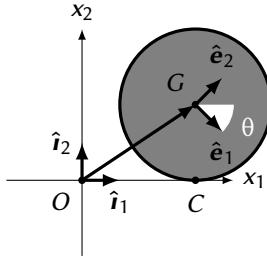
$$\|\mathbf{v}_G\|^2 = \langle \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_G \rangle = \omega^2 \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, (\|\mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_G \otimes \mathbf{x}_G) \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle$$

sicché inserendo questa relazione nella formula generale

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, [m(\|\mathbf{x}_G\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{x}_G \otimes \mathbf{x}_G) + \mathbf{I}_G] \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle \equiv \frac{1}{2}\omega^2 \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{I}_O \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle.$$

dove abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner per il tensore di inerzia.

**Esempio 4.11** (Disco rigido che rotola) — Calcoliamo l'energia cinetica di un disco rigido omogeneo di raggio  $R$  che rotola senza strisciare su una guida orizzontale:



Sappiamo che il sistema ha un solo parametro lagrangiano: possiamo usare per esempio l'ascissa  $x$  del centro di massa, che qui coincide col centro geometrico  $G$  in figura, oppure l'angolo di rotazione  $\theta$ . Inoltre, il punto di contatto  $C$  tra disco e guida è un centro istantaneo di rotazione. Per il Secondo teorema di König, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2.$$

In questa espressione  $I_G$  è il momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse  $\mathcal{G}$  perpendicolare al piano e passante per  $G$ , che nel caso del disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  vale  $I_G = \frac{1}{2}mR^2$ . Abbiamo poi già visto che  $\mathbf{v}_G = \dot{x}\hat{\mathbf{i}}_1 = -R\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}}_1$  e che  $\omega = \dot{\theta}$ , sicché

$$T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2.$$

In effetti  $I_C = \frac{3}{2}mR^2$  è proprio il momento d'inerzia del disco rispetto alla retta ortogonale al piano passante per il punto di contatto  $C$ . Questo non deve sorprendere: istante per istante,  $C$  è un centro istantaneo di rotazione con velocità  $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ , per cui l'unico contributo che appare nell'energia cinetica usando l'Eq. (4.1a) scegliendo  $P \equiv C$  è quello rotatorio, purché il tensore d'inerzia usato sia quello rispetto al punto  $C$ .

## 2. Dinamica del punto materiale

In questa sezione inizieremo lo studio della dinamica dei corpi risolvendo, in alcuni semplici casi, le equazioni di Newton. I casi considerati beneficeranno di ipotesi semplificatrici che agevoleranno l'integrabilità.

**2.1. Dinamica lungo una guida.** Supponiamo per cominciare di avere un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , individuato da un vettore  $\mathbf{x}_P$  rispetto ad un riferimento inerziale e *vincolato a muoversi lungo una guida prefissata* in un certo intervallo  $[t_0, t_1]$ . Come abbiamo visto, possiamo descrivere la configurazione del sistema in termini di un *unico* parametro lagrangiano, ovvero l'ascissa curvilinea  $s$ , che fornisce la lunghezza percorsa a partire dal punto  $\mathbf{x}(t_0)$  muovendosi lungo la curva. Sul punto materiale agiranno, in generale, delle forze attive con risultante  $\mathbf{F}$  e delle forze di reazione  $\Phi$  esercitate dalla guida. Il Secondo principio può essere riscritto in termini di componenti lungo la terna intrinseca  $(\hat{\mathbf{v}}_P, \hat{\mathbf{n}}_P, \hat{\mathbf{b}}_P)$  in  $P$ , ovvero

$$m\ddot{s} = \langle \mathbf{F} + \Phi, \hat{\mathbf{v}}_P \rangle, \quad \frac{m\dot{s}^2}{\rho} = \langle \mathbf{F} + \Phi, \hat{\mathbf{n}}_P \rangle, \quad 0 = \langle \mathbf{F} + \Phi, \hat{\mathbf{b}}_P \rangle.$$

Supponiamo ora che il vincolo sia *ideale*, ovvero la guida sia liscia: ciò significa che  $\langle \Phi, \hat{\mathbf{v}}_P \rangle = 0$  e la prima di queste equazioni, può essere espressa in termini della *forza generalizzata*  $F_t := \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{v}}_P \rangle$  come

$$F_t := \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{v}}_P \rangle = m\ddot{s}.$$

Se  $\mathbf{F}$  è ovunque ortogonale alla curva, ovvero  $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{v}}_P \rangle \equiv 0$ , allora  $\ddot{s} = 0$ , ovvero  $\dot{s}(t) = \dot{s}(t_0) = \text{costante} \equiv v_0$  e quindi  $s(t) = v_0 t$ . Se  $\mathbf{F}$  è in generale non ortogonale a  $\hat{\mathbf{v}}_P$  ma posizionale, ovvero dipendente solo dal punto lungo la curva, possiamo scrivere  $F_t = F_t(s)$ . L'equazione da risolvere è  $m\ddot{s} = F_t(s)$ , che implica

$$\dot{s}(m\ddot{s} - F_t(s)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s) \right) = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$V(s) := - \int_0^s F_t(x) dx.$$

In altre parole, la quantità

$$E := \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s)$$

è un integrale del moto, esattamente *come se* la forza in gioco fosse conservativa e *come se*  $E$  fosse l'energia meccanica corrispondente ad un problema unidimensionale parametrizzato dalla sola variabile  $s$  in presenza di un potenziale  $V(s)$ . I punti di equilibrio, in particolare, si potranno ottenere studiando l'equazione  $F_t = -\partial_s V(s) = 0$ . La funzione

$$\Phi(s) := 2 \frac{E - V(s)}{m}$$

contiene tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse: il moto è ammesso solo nelle regioni in cui  $\Phi(s) > 0$ , dovendo essere  $\Phi(s) = \dot{s}^2$ , mentre gli zeri della funzione, se esistono, separano rami in cui  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$  da rami in cui  $\dot{s} = -\sqrt{\Phi(s)}$ . Supponiamo per esempio di iniziare il moto a  $t = 0$  in  $s_0$ , e che  $\Phi(s_0) > 0$  in tale punto: se  $\Phi(s) > 0$  per ogni  $s > s_0$ , allora

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(s)}} \Rightarrow t(s) = \int_{s_0}^s \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}$$

esprime il tempo in funzione della distanza percorsa. Si tratta di una funzione monotona e quindi invertibile. Se esiste  $\hat{s} > s_0$  tale che  $\Phi(\hat{s}) = 0$ , il tempo necessario per raggiungere tale punto a partire da  $s_0$  è dato da

$$\hat{t} = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Questa quantità può essere finita o infinita dipendentemente dal fatto che  $\hat{s}$  sia uno zero semplice o multiplo di  $\Phi(s)$ , rispettivamente. Nel primo caso,  $\hat{s}$  verrà toccato in un tempo finito, mentre nel secondo caso il sistema raggiungerà  $\hat{s}$  solo asintoticamente: il moto sarà perciò limitato alla regione  $s < \hat{s}$  durante l'evoluzione. In generale, gli zeri multipli di  $\Phi(s)$  sono punti inaccessibili (e invalicabili) per il punto materiale, a meno che esso non si trovi esattamente in uno di essi nel suo stato iniziale  $s_0$ . Gli zeri semplici di  $\Phi(s)$  sono detti *punti di inversione*: vengono raggiunti in un tempo finito e lì il moto si inverte tornando indietro. Vale il seguente

**TEOREMA 2.1.** *Il moto tra due punti di inversione consecutivi  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+ > \hat{s}_-$  è periodico di periodo*

$$(4.6) \quad \tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2 dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $s_0 \in (s_-, s_+)$  e  $v_0 > 0$ . Per ipotesi  $\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(s - \hat{s}_+)\phi(s)$  con  $\phi(s) > 0$  per  $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$ . Abbiamo che  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$ , per cui  $\dot{s} = 0$  per  $s = s_{\pm}$ . D'altra parte, la forza in questi punti ha segno opposto:

$$F_t(s_+) = \Phi'(s_+) = -(s_+ - s_-)\phi(s_+) < 0, \quad F_t(s_-) = \Phi'(s_-) = (s_+ - s_-)\phi(s),$$

di modo che il moto si inverta in questi punti estremali. Partendo da  $s_0$  con  $v_0 > 0$ , il moto prosegue perciò fino a  $s_+$  dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, subisce una accelerazione verso  $s_-$  che lo fa ripassare da  $s_0$  con velocità  $-v_0$ , fino ad arrivare in  $s_-$ , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in  $s_0$  con stessa velocità  $v_0$  dopo un tempo  $\tau$ : da qui in poi il moto si riproduce *identico* essendosi verificate nuovamente, al tempo  $\tau$ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo  $t_0$ . Il tempo del periodo quindi è

$$\tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} + \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}. \quad \square$$

**Esempio 4.12** (Dinamica su guida scabra) — Consideriamo il caso di una guida è scabra: in questo caso, esiste una forza d'attrito tangenziale che si oppone al moto, ovvero  $\Phi_t := \langle \Phi, \hat{v}_P \rangle \neq 0$ . Scriviamo ora  $\Phi_n := \langle \Phi, \hat{n}_P \rangle$  e  $\Phi_b := \langle \Phi, \hat{b}_P \rangle$ . Indichiamo ugualmente  $F_n := \langle F, \hat{n}_P \rangle$  e  $F_b := \langle F, \hat{b}_P \rangle$ . Le equazioni della dinamica sono quindi

$$m\ddot{s} = F_t + \Phi_t, \quad \Phi_n = \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_n, \quad \Phi_b = -F_b.$$

Supponendo  $\dot{s} \neq 0$ , l'attrito in azione sarà dinamico, e in particolare

$$\Phi_t = -\mu_d \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2} \operatorname{sign}(\dot{s}) = -\mu_d \sqrt{F_b^2 + \left( \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_n \right)^2} \operatorname{sign}(\dot{s})$$

per cui occorre risolvere l'equazione

$$m\ddot{s} = F_t - \mu_d \sqrt{F_b^2 + \left( \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_n \right)^2} \operatorname{sign}(\dot{s})$$

che è una equazione nella sola funzione  $s$  e non dipende più dalle forze di reazione, ma è in generale complessa da risolvere analiticamente.

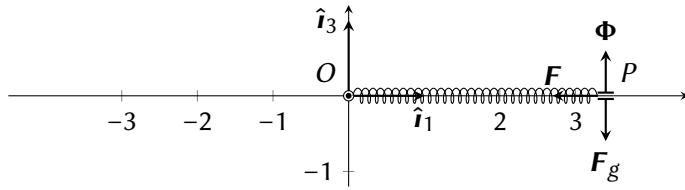


FIGURA 1. Punto materiale vincolato ad una guida orizzontale su cui agisce una molla ideale fissata nell'origine.

**2.2. Moto armonico.** Il *moto armonico* è senza dubbio uno dei più importanti tipi di moto, per via delle sue innumerevoli applicazioni. Consideriamo la sua versione più semplice. Immaginiamo di avere un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi su una guida rettilinea liscia, che possiamo immaginare coincidere con l'asse di riferimento  $\mathcal{X}$  corrispondente alla direzione  $\hat{i}_1$ . La posizione del punto materiale si può quindi scrivere  $\mathbf{x}_P = \hat{s}\hat{i}_1$ , vedasi Fig. 1. Su tale punto agisce una *molla ideale* di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo trascurabile, avente l'altro estremo nell'origine  $O$ . Questo equivale a dire che su tale punto agisce la *forza elastica*

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}_P.$$

Sul punto materiale opera anche la forza peso, che assumiamo orientata come  $\mathbf{F}_g = -mg\hat{i}_3$ , bilanciata dalla reazione della guida  $\Phi = -\mathbf{F}_g$ . La posizione del punto materiale è nota quindi quando è nota l'unica variabile lagrangiana del sistema, ovvero  $s$ . L'equazione che descrive l'evoluzione di  $s$  è

$$m\ddot{s} = -ks.$$

Si tratta di una *equazione differenziale ordinaria del secondo ordine* che possiamo riscrivere come

$$(4.7) \quad \ddot{s} = -\omega^2 s, \quad \text{dove abbiamo definito } \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La quantità  $\omega$  è detta talvolta *pulsazione* del moto. Il punto avente  $s = 0$ , ovvero l'origine, è un punto di equilibrio, dato che in questo caso la somma delle forze agenti sul punto materiale è nulla.

Assumendo ora che per  $t = 0$  si abbia  $s(0) = s_0$  e  $\dot{s}(0) = v_0$  generici, l'evoluzione della posizione del punto per  $t > 0$  è fornita proprio dal Secondo principio e occorre risolvere l'equazione differenziale (4.7). A questo scopo, è utile ricorrere ancora una volta alla teoria delle equazioni differenziali, e in particolare ai seguenti risultati.

**Q Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti** — Una equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti del secondo ordine, ha la forma

$$c_2\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_0x = f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

dove  $f: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione supposta nota, mentre la nostra incognita è la funzione  $x(t)$  sullo stesso intervallo. L'equazione si intende accompagnata, come in ogni problema di Cauchy, da opportune condizioni iniziali nella forma

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0,$$

dove  $x_0$  e  $v_0$  sono delle quantità date. Bisogna ora distinguere due casi

**CASO OMogeneo.** Consideriamo anzitutto il caso *omogeneo*, ovvero il caso in cui  $f(t) \equiv 0$ . Questo tipo di equazione è *lineare*, ovvero appartiene alla più vasta famiglia di equazioni tali per cui, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  soddisfano l'equazione, allora una loro combinazione lineare  $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ , per due costanti generiche  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , soddisfa anch'essa l'equazione. La soluzione generale di una equazione siffatta si ottiene come combinazione lineare di due *soluzioni fondamentali indipendenti* di tipo esponenziale  $x(t) = e^{\lambda t}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sostituendo questo tipo di soluzione nell'equazione, si ottiene un polinomio di secondo grado

$$c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} := \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2c_0}}{2c_2},$$

che fornisce una condizione per al più due valori di  $\lambda$ , siano essi  $\lambda_{\pm}$  come già indicato, in generale complessi. Se i due valori ottenuti sono distinti, la soluzione generale ha la forma

$$x(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} + \alpha_- e^{\lambda_- t}.$$

I due coefficienti  $\alpha_{\pm}$  sono da fissare imponendo le due condizioni iniziali. Se viceversa si trova  $\lambda_+ = \lambda_- \equiv \lambda$ , occorre cercare un'altra soluzione fondamentale diversa da  $e^{\lambda t}$ . In particolare, si può verificare che  $x(t) = t e^{\lambda t}$  è in questo caso una soluzione, per cui la soluzione più generale si ottiene scrivendo

$$x(t) = e^{\lambda t}(\alpha_1 + \alpha_2 t).$$

Come prima, le due costanti vengono fissate richiedendo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali.

**CASO INOMogeneo.** Nel caso in cui  $f$  sia non identicamente nulla, la soluzione al problema si ottiene sommando una generica combinazione lineare delle due soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea associata (ovvero dell'equazione ottenuta imponendo  $f \equiv 0$ ) ad una soluzione particolare del sistema, ovvero una soluzione dell'equazione "completa" non necessariamente tale da soddisfare le condizioni iniziali. La ricerca di una soluzione particolare è in genere la parte più complessa della risoluzione dell'equazione differenziale. Le due costanti che compaiono nella combinazione lineare delle soluzioni fondamentali verranno poi scelte opportunamente per soddisfare le condizioni iniziali date.

Cerchiamo quindi di risolvere il problema di Cauchy per il moto armonico,

$$\begin{cases} s(0) = s_0 \\ \dot{s}(0) = v_0 \\ \ddot{s} + \omega^2 s = 0. \end{cases}$$

Grazie alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, sappiamo che la soluzione generale al problema è nella forma

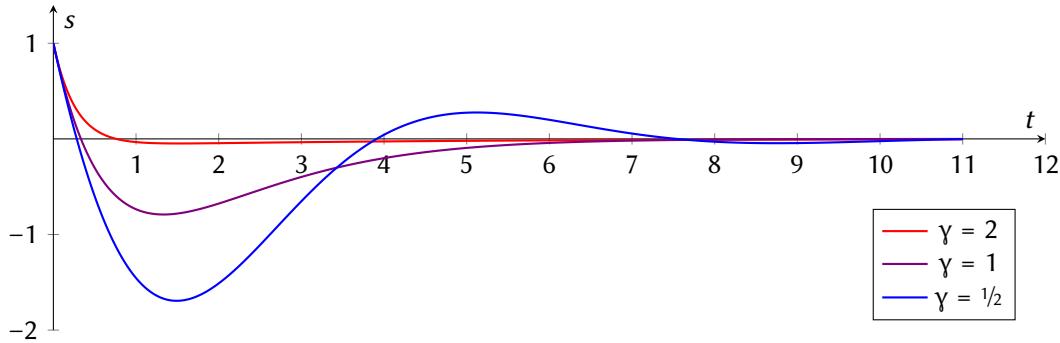
$$s(t) = \alpha_+ e^{i\omega t} + \alpha_- e^{-i\omega t}.$$

Per  $t = 0$  deve valere

$$\alpha_+ + \alpha_- = s_0$$

dove  $s_0$  è reale. Quindi  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  sono o entrambi reali, oppure devono avere parte immaginaria opposta, ovvero  $\alpha_+ = a_1 + ib$  e  $\alpha_- = a_2 - ib$  per un certo  $b$  reale, di modo che  $a_1 + a_2 = s_0$ . Deve anche valere

$$i\alpha_+ \omega - i\alpha_- \omega = \omega(i a_1 - i a_2 - 2b) = v_0,$$



**FIGURA 2.** Evoluzione di  $s$  in un generico moto armonico smorzato avviato in posizione  $s_0 = 1$  con velocità  $v_0 = -4$  e pulsazione  $\omega = 1$  al variare del coefficiente di smorzamento  $\gamma$ .

dove  $v_0$  è reale, per cui  $a_1 = a_2$ ; di conseguenza,  $2a = s_0$  e  $-2b\omega = v_0$ . In altre parole,  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  sono complessi coniugati, e possiamo scrivere  $\alpha_+ = \bar{\alpha}_- = \frac{A}{2} e^{i\phi}$ , di modo che

$$s(t) = A \frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2} = A \cos(\omega t + \phi), \quad \text{con} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b}{a} = -\frac{v_0}{\omega s_0}.$$

La quantità  $\phi$  si dice *fase* mentre la quantità  $A$  si dice *ampiezza* del moto armonico.

**Esempio 4.13** (Moto armonico smorzato) — In molte applicazioni occorre considerare una forza aggiuntiva che agisce sul punto materiale e tenta di frenarne il moto: tale forza esprime la *resistenza del mezzo* ed è tipicamente nella forma  $F_v = -\sigma v_P$ , con  $\sigma > 0$ , ovvero dipende dalla velocità del corpo. L'equazione per  $s$  viene quindi ad essere modificata e assume la forma

$$m\ddot{s} = -\sigma \dot{s} - ks,$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $v_P = \dot{s}\hat{i}_1$ . La procedura da applicare è analoga a quella seguita per  $\sigma = 0$ : si cerca una soluzione generica nella forma  $s(t) = e^{\lambda t}$ , sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale e ottenendo

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0, \quad \text{dove} \quad \gamma := \frac{\sigma}{2m}.$$

Le radici di questo polinomio corrispondono a

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \tilde{\omega}, \quad \text{dove} \quad \tilde{\omega} := \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Se  $\gamma \neq \omega$ , si ottiene così che la soluzione generale ha la forma

$$s(t) = e^{-\gamma t} \left( \alpha_+ e^{\tilde{\omega}t} + \alpha_- e^{-\tilde{\omega}t} \right).$$

Come sopra, dobbiamo impostare le condizioni iniziali  $s(0) = s_0$  e  $\dot{s}(0) = v_0$ . Possono verificarsi quindi varie circostanze:

**Caso  $\gamma > \omega$ :**  $\tilde{\omega}$  è reale ed inoltre  $\tilde{\omega} < \gamma$ . Il moto è tale che  $s(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  monotonicamente. Infatti, imponendo le condizioni iniziali, si trova che

$$\alpha_+ + \alpha_- = s_0, \quad \alpha_+(\tilde{\omega} - \gamma) - \alpha_-(-\tilde{\omega} + \gamma) = v_0$$

da cui, con un po' di algebra, si ottiene

$$s(t) = e^{-\gamma t} \left( s_0 \cosh \tilde{\omega}t + \frac{v_0 + \gamma s_0}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega}t \right).$$

Supponiamo  $s_0 \neq 0$  e cerchiamo il tempo  $t_o > 0$  tale per cui il sistema passa per l'origine, ovvero  $s(t_o) = 0$ . Questo deve soddisfare l'equazione

$$\tanh(\tilde{\omega}t) = -\frac{\tilde{\omega}s_0}{v_0 + \gamma s_0},$$

che ha una *unica* soluzione se e solo se  $\left| \frac{\tilde{\omega}s_0}{v_0 + \gamma s_0} \right| < 1$ : se ciò non avviene, il sistema non passa mai per l'origine.

**Caso  $\gamma < \omega$ :**  $\tilde{\omega}$  è immaginario puro. Anche in questo caso il moto è tale che  $s(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , ma sono presenti delle oscillazioni. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$s(t) = e^{-\gamma t} \left( s_0 \cos(|\tilde{\omega}|t) + \frac{v_0 + \gamma s_0}{|\tilde{\omega}|} \sin(|\tilde{\omega}|t) \right).$$

Come sopra, un sistema con  $s_0$  passa dall'origine al tempo  $t_o$  se

$$\tan(|\tilde{\omega}|t) = -\frac{|\tilde{\omega}|s_0}{v_0 + \gamma s_0}.$$

Si noti che questa equazione ammette *infinite* soluzioni

**Caso  $\gamma = \omega$ :** ovvero  $\tilde{\omega} = 0$ . In questo caso il moto è detto *criticamente smorzato* e la soluzione generale del problema ha la forma

$$s(t) = e^{-\gamma t} (\alpha_+ + \alpha_- t),$$

che, imponendo le condizioni iniziali, si scrive

$$s(t) = e^{-\gamma t} (s_0 + (v_0 + \gamma s_0)t),$$

che ancora una volta descrive un moto che converge alla configurazione di equilibrio. Supponiamo ora, come sopra,  $s_0 \neq 0$  e cerchiamo il tempo  $t_o > 0$  tale per cui il sistema passa per l'origine,  $s(t_o) = 0$ . Ciò avviene una sola volta al tempo

$$t_o = -\frac{s_0}{v_0 + \gamma s_0} \quad \text{se e solo se } -\frac{s_0}{v_0 + \gamma s_0} > 0.$$

Se la quantità sopra è negativa, il sistema non passa mai per l'origine.

La presenza di una forza di attrito dipendente dalla velocità rende il sistema *dissipativo* come si può vedere calcolando la derivata dell'energia meccanica. Troviamo infatti che

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_P\|^2 + \frac{1}{2} k \|\mathbf{x}_P\|^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} k s^2 \right) = -\sigma \dot{s}^2,$$

che mostra che la quantità è monotonicamente decrescente per  $\sigma > 0$  con una rapidità dipendente dal valore di  $\gamma$ : per questa ragione,  $\gamma$  prende il nome di *coefficiente di smorzamento*.

**2.2.1. Pendolo semplice.** Un pendolo ideale è costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in posizione  $\mathbf{x}_P$  vincolato a muoversi lungo una circonferenza verticale di raggio  $\ell$ , che assumiamo centrata nell'origine di un riferimento cartesiano ortonormale inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Su di esso agiscono la forza peso  $\mathbf{F}_g = -mg\hat{i}_3$  e la reazione del vincolo, supposto ideale. La sua posizione può essere parametrizzata da un parametro lagrangiano  $\theta$ , angolo tra  $\mathbf{x}_P$  e la direzione  $-\hat{i}_3$ , come rappresentato in Fig. 3. Possiamo introdurre l'ascissa curvilinea  $s = \ell\theta$ , che indica l'arco della circonferenza di raggio  $\ell$  sotteso dall'angolo  $\theta$ . Per quanto detto sopra riguardo il moto lungo una curva, l'equazione del moto nella direzione tangente può essere scritta in termini della componente tangenziale  $F_t$  della forza peso,

$$m\ddot{s} = F_t,$$

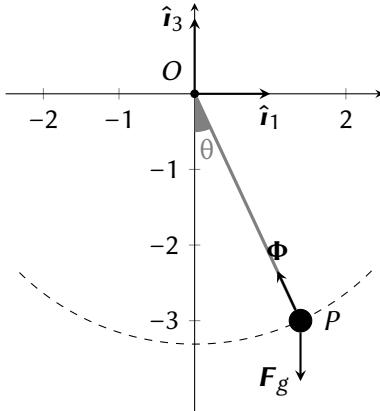


FIGURA 3. Pendolo ideale in un piano verticale.

che si riscrive in termini di  $\theta$  come

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad \omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Questa equazione differenziale è non lineare e la sua integrazione può eseguirsi numericamente. Sappiamo che la quantità

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

si conserva durante il moto. Questa relazione permette di calcolare facilmente alcune utili quantità senza la necessità di integrare le equazioni del moto. Per esempio, indicando con  $\theta_{\max}$  l'angolo massimo raggiunto dal pendolo, e punto di inversione del moto, l'energia cinetica a  $\theta = 0$  si potrà ottenere da  $T - mg\ell = -mg\ell \cos \theta_{\max} \Rightarrow T = g\ell(1 - \cos \theta_{\max})$ . A valore di  $E$  fissato, i valori di  $\theta$  ammessi saranno quelli per cui

$$\Phi(\theta) = \frac{2}{\ell^2 m}(E + mg\ell \cos \theta) \geq 0$$

con associati punti di inversione

$$\theta_{\pm} = \pm \arccos \left( -\frac{E}{mg\ell} \right) \quad \text{se} \quad -mg\ell \leq E \leq mg\ell.$$

Valori  $E < -mg\ell$  non sono ammessi, mentre per  $E > mg\ell$  il pendolo ha sufficiente energia da compiere rivoluzioni complete attorno al punto in cui è vincolato, e pertanto non vi sono punti di inversione. Nel regime oscillatorio, il periodo si calcola utilizzando l'Eq. (4.6) come

$$(4.8) \quad \tau = \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \int_0^{\theta_{+}} \frac{2}{\sqrt{\frac{E}{mg\ell} + \cos \vartheta}} d\vartheta.$$

L'espressione come si vede è piuttosto complessa e può essere espressa in termini di funzioni speciali. Espressioni più trasparenti possono però essere ottenute nel limite delle piccole oscillazioni, ovvero assumendo che  $\theta$  si mantenga piccolo durante il moto, e che quindi si possa approssimare  $\sin \theta \simeq \theta$ . In questa approssimazione, l'equazione è esattamente quella di un

moto armonico, per cui

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = A \cos(\omega t + \phi)$$

per opportuni coefficienti  $A$  e  $\phi$  determinati in funzione delle condizioni iniziali. Si tratta cioè di un moto armonico. Il *periodo*  $\tau$  delle oscillazioni è pari a

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Si osservi che questa quantità *non* dipende dalla massa né, nel detto limite di piccole oscillazioni, dall'ampiezza  $A$  delle oscillazioni del pendolo. Questa stessa formula si può ottenere dalla formula più generale in Eq. (4.8) osservando che, se assumiamo  $\theta_{\pm} = \pm \varepsilon$ , allora  $E = -mg\ell (1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2))$  e quindi

$$\tau \simeq 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \vartheta^2}} d\vartheta = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Possiamo calcolare altresì la reazione vincolare  $\Phi$ , osservando che  $\Phi = \Phi_n \hat{n}_y$ . Indicando con  $F_n := \langle \mathbf{F}, \hat{n}_P \rangle$ , essendo il raggio di curvatura è proprio  $\ell$ , abbiamo che nella direzione di  $\hat{n}_P$  vale

$$m \frac{\dot{s}^2}{\ell} = F_n + \Phi_n = -mg \cos \theta + \Phi_n \Rightarrow \Phi_n = mg \cos \theta + m\ell \dot{\theta}^2,$$

che mostra come la reazione vincolare dipenda dall'evoluzione del moto.

### 3. Dinamica dei sistemi

**3.1. Momento della quantità di moto.** Lo studio della dinamica dei sistemi costituiti da molti punti materiali richiede l'introduzione di una nuova quantità, il *momento della quantità di moto*, o *momento angolare*, che quantifica il moto rotatorio di cui un sistema esteso può essere dotato. Si tratta di una quantità vettoriale dipendente da un certo punto  $A$ , detto polo, analoga al momento di una forza. Nel caso di un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho_X$  essa è definita come

$$\mathbf{L}_A := \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_X \rho_X d\mathbf{x}.$$

Equivalentemente, nel caso discreto di un sistema di punti materiali  $\{P_k\}_{k=1}^N$ , dove  $P_k$  è individuato da  $\mathbf{x}_k$  secondo un certo riferimento e ha massa  $m_k$ , di posizioni  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$  e masse rispettivamente  $\{m_k\}_{k=1}^N$ ,  $\mathbf{L}_A := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q}_k$ , dove  $\mathbf{Q}_k = m_k \dot{\mathbf{x}}_k$ . Esiste una relazione semplice tra  $\mathbf{L}_A$ , calcolato rispetto al polo  $A$ , e  $\mathbf{L}_B$ , calcolato rispetto al polo  $B$  individuato dal vettore  $\mathbf{b}$ , ovvero

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{Q}.$$

Questa relazione è detta *legge del cambiamento di polo* ed è, come si vede, identica a quella già vista per il momento di un sistema di forze. Si dimostra esattamente in maniera analoga: nel caso per esempio di un corpo  $\mathcal{B}$  con densità  $\rho_X$ , si ha

$$\mathbf{L}_B = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{v}_X \rho_X d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_X \rho_X d\mathbf{x} = \mathbf{L}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_X \rho_X d\mathbf{x} = \mathbf{L}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{Q}.$$

Segue subito che se  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_B$ , indipendentemente dal polo. Inoltre, se  $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$  e  $\mathbf{Q}$  sono paralleli, il momento angolare non cambia.

Vale il seguente, importante, Teorema, che esprime una legge di decomposizione del momento angolare analoga a quella dell'energia cinetica già vista.

**TEOREMA 3.1** (Primo teorema di König). *Dato un corpo  $\mathcal{B}$  di massa  $m$ , quantità di moto  $\mathbf{Q}$  e centro di massa  $\mathbf{x}_G$ , vale la seguente relazione per un generico punto  $P$*

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{L}_G^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q},$$

dove  $\mathbf{L}_G^*$  è il momento angolare calcolato in un riferimento traslante con origine il centro di massa.

**DIMOSTRAZIONE.** Si procede in maniera esplicita. Eseguiamo la dimostrazione nel caso di un insieme discreto di masse puntiformi. Sia  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  il riferimento fisso, e consideriamo  $G\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  riferimento traslante con origine nel centro di massa  $G$ . Essendo traslante, tale sistema ha velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  rispetto al riferimento fisso, e per ogni elemento del sistema la velocità nel riferimento fisso  $\mathbf{v}_k$  e quella nel riferimento traslante  $\mathbf{v}_k^*$  sono legate dalla semplice relazione  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_k^*$ . Se  $\mathbf{x}_G$  è il vettore che identifica  $G$  nel riferimento fisso, abbiamo

(4.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_P &= \sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge (\mathbf{v}_k^* + \mathbf{v}_G) = \sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_k^* + \sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_G \\ &= \sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{v}_k^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q} \equiv \sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{p}^*) \wedge \mathbf{v}_k^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q} \equiv \mathbf{L}_P^* + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q} \end{aligned}$$

dove il termine  $\mathbf{L}_P^*$  è il momento angolare rispetto a  $P$  nel riferimento traslante. Il fatto notevole, ora, è che questo momento *non* dipende dal punto  $P$  e può quindi essere indicato con  $\mathbf{L}_G^*$ . In tale riferimento infatti il centro di massa ha velocità nulla, e quindi la quantità di moto  $\mathbf{Q}^*$  è nulla.  $\square$

Il primo teorema di König ha come conseguenza immediata che  $\mathbf{L}_G^* = \mathbf{L}_G$ , ovvero il momento angolare calcolato rispetto a  $G$  coincide con il momento angolare calcolato nel riferimento traslante centrato nel centro di massa  $G$ .

**3.1.1. Momento angolare di un corpo rigido.** Nel caso dei corpi rigidi, esiste una relazione di importanza cruciale tra momento di inerzia, momento angolare e velocità angolare. Vale infatti la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 3.2.** *Il momento angolare rispetto ad un polo  $C$  che appartiene ad un asse istantaneo di rotazione di un corpo rigido con atto di moto rotatorio avente velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  può scriversi*

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}.$$

*Inoltre, il momento angolare rispetto al centro di massa si scrive*

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Rispetto al polo  $C$ , individuato dal vettore  $\mathbf{x}_C$  in un opportuno riferimento cartesiano, si ha che ogni elemento del corpo in posizione  $\mathbf{x}$  ha  $\mathbf{v}_X = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)$ . Pertanto

usando la definizione

$$(4.10) \quad \mathbf{L}_C = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{v}_X \rho_X d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)) \rho_X d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{B}} \left[ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_C\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)^T \right] \boldsymbol{\omega} \rho_X d\mathbf{x} = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}.$$

Osserviamo ora che vale anche  $\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_G + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{Q}$  per via della legge di cambiamento di polo. Ricordando che  $\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C)$ , possiamo scrivere

$$(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{Q} = m(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge \mathbf{v}_G = m(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C)) = m \left[ \|\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \otimes (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C)^T \right] \boldsymbol{\omega}$$

per cui

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} - m \left[ \|\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \otimes (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_C) \right] \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}.$$

L'ultima uguaglianza segue dal teorema di Huygens–Steiner.  $\square$

Una conseguenza della relazione precedente è il seguente corollario.

**COROLLARIO 3.3.** *Dato un generico punto P,*

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \wedge \mathbf{Q}$$

**Q** Supponiamo che  $H$  sia un punto su un asse istantaneo di rotazione o il centro di massa: allora  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{L}_H$  sono paralleli se e solo se  $\boldsymbol{\omega}$  è orientato come un asse principale di inerzia  $\hat{\mathbf{e}}_k$  di  $\mathbf{I}_H$ . In quel caso,  $\mathbf{I}_H \boldsymbol{\omega} = \hat{l}_k \boldsymbol{\omega}$  con  $\hat{l}_k$  corrispondente autovalore.

**3.2. Equazioni cardinali della dinamica.** Le equazioni cardinali della dinamica riguardano, in analogia con le equazioni cardinali della statica, delle condizioni *necessarie* a soddisfarsi durante l'evoluzione dinamica di un sistema.

■ **TEOREMA 3.4** (Equazioni cardinali della dinamica). *Sia  $\mathbf{R}^{(\text{ext})}$  la risultante delle forze esterne agenti su un sistema con quantità di moto  $\mathbf{Q}$ , e sia  $\tau_A^{(\text{ext})}$  il momento risultante delle forze esterne individuato rispetto al polo A. Allora*

$$\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \dot{\mathbf{Q}}, \quad \tau_A^{(\text{ext})} = \dot{\mathbf{L}}_A + \mathbf{v}_A \wedge \mathbf{Q},$$

dove  $\mathbf{L}_A$  è il momento totale delle quantità di moto rispetto al polo A.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia dato un insieme di punti materiali  $\{P_k\}_{k=1}^N$ . Per ogni punto materiale  $P_k$  di posizione  $\mathbf{x}_k$  e massa  $m_k$ , possiamo scrivere che  $\mathbf{F}_k^{(\text{ext})} + \mathbf{F}_k^{(\text{in})} = \dot{\mathbf{Q}}_k$ , dove  $\mathbf{Q}_k$  è la corrispondente quantità di moto, e abbiamo distinto tra la risultante delle forze esterne  $\mathbf{F}_k^{(\text{ext})}$  e la risultante delle forze interne  $\mathbf{F}_k^{(\text{in})}$ . Basta sommare questa espressione su  $k$  ricordando che  $\mathbf{Q} = \sum_k \mathbf{Q}_k$  e che  $\sum_k \mathbf{F}_k^{(\text{in})} = \mathbf{0}$  per ottenere

$$\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \sum_k \mathbf{F}_k^{(\text{ext})} = \sum_k \dot{\mathbf{Q}}_k = \dot{\mathbf{Q}}.$$

Per dimostrare la seconda equazione, osserviamo che per il singolo punto vale

$$(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge (\mathbf{F}_k^{(\text{ext})} + \mathbf{F}_k^{(\text{in})}) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \dot{\mathbf{Q}}_k$$

per cui, sommando su  $k$  ancora una volta e usando il fatto che  $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge (\mathbf{F}_k^{(\text{ext})} + \mathbf{F}_k^{(\text{in})}) = \tau_{A,k}^{(\text{ext})} + \tau_{A,k}^{(\text{in})}$ , somma dei momenti delle forze rispetto ad  $A$  su  $k$ ,

$$\sum_k \tau_{A,k}^{(\text{ext})} + \sum_k \tau_{A,k}^{(\text{in})} \equiv \tau_A^{(\text{ext})} = \sum_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \dot{\mathbf{Q}}_k,$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\sum_k \tau_{A,k}^{(\text{in})} = \mathbf{0}$ . Il termine a destra nell'equazione si può scrivere come

$$\sum_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{a}) \wedge \dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{d}{dt} \left( \sum_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q}_k \right) - \sum_k (\dot{\mathbf{x}}_k - \dot{\mathbf{x}}_A) \wedge \mathbf{Q}_k = \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} + \mathbf{v}_A \wedge \sum_k \mathbf{Q}_k = \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} + \mathbf{v}_A \wedge \mathbf{Q},$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\dot{\mathbf{x}}_k$  e  $\mathbf{Q}_k$  sono paralleli.  $\square$

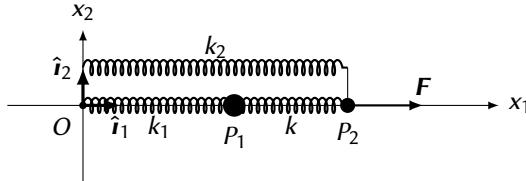
Se il polo  $A$  è fisso, oppure  $\mathbf{v}_A \parallel \mathbf{Q}$  (condizione soddisfatta per esempio se  $A$  è il centro di massa del sistema), l'equazione sui momenti è semplicemente  $\tau_A^{(\text{ext})} = \dot{\mathbf{L}}_A$ .

La prima equazione cardinale permette di dare il seguente Teorema, che discende immediatamente dal fatto che  $\mathbf{Q} = m\dot{\mathbf{x}}_G$ .

**TEOREMA 3.5** (Moto del centro di massa). *Il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale di massa pari alla massa totale  $m$  del sistema su cui è applicata la risultante delle forze esterne, ovvero*

$$m\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}.$$

**Esempio 4.14** — Il fatto che l'equazione per il centro di massa non dipenda dalle forze interne non significa necessariamente che sia possibile ignorare tali forze: in effetti, l'equazione per  $\mathbf{x}_G$  può essere insufficiente per studiare l'evoluzione di questo punto. Consideriamo per esempio un riferimento inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  e due punti  $P_1$  e  $P_2$ , di massa  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, vincolati da una guida ideale liscia a muoversi sull'asse  $\mathcal{X}$  di direzione  $\hat{\mathbf{i}}_1$ , mentre  $\hat{\mathbf{i}}_2$  si suppone puntare nella direzione opposta a quella della gravità. I punti sono disposti come in figura.



Il punto  $P_1$  è collegato all'origine da una molla ideale di costante elastica  $k_1$ , così come il punto  $P_2$ , che è collegato all'origine da una molla di massa  $k_2$ . Inoltre i due punti sono collegati tra loro da una molla di costante elastica  $k$  e su  $P_2$  agisce una forza esterna aggiuntiva  $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{i}}_1$ . Se indichiamo con  $\mathbf{x}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}}_1$  il vettore posizione di  $P_1$  e con  $\mathbf{x}_2 = x_2\hat{\mathbf{i}}_1$  il vettore posizione di  $P_2$ , allora il centro di massa è individuato da  $\mathbf{x}_G = x_G\hat{\mathbf{i}}_1$ , con

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Il teorema del moto del centro di massa stabilisce che, indicando con  $m = m_1 + m_2$ ,

$$m\ddot{\mathbf{x}}_G = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + \mathbf{F} = -\frac{mk_1}{m} x_G + \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1} x_2 + \mathbf{F},$$

essendo la forza esercitata dalla molla tra  $P_1$  e  $P_2$  interna al sistema, mentre le due forze peso sono annullate dalla reazione vincolare della guida. Nel secondo passaggio, abbiamo usato il fatto che, dalla

formula per la posizione del centro di massa,  $x_1 = \frac{mx_G - m_2 x_2}{m_1}$ . Questa equazione evidentemente non permette di risolvere il problema della dinamica del centro di massa, dato che coinvolge anche la variabile  $x_2$ . Possiamo però studiare i due punti separatamente, scrivendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) + F \end{cases}$$

che permette in linea di principio di risolvere il problema. Cerchiamo, per esempio, la posizione di equilibrio, imponendo  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$ . Questo fornisce un sistema di equazioni lineari che ci dà

$$x_1 = \frac{Fk}{kk_1 + kk_2 + k_1 k_2}, \quad x_2 = \frac{F(k + k_1)}{kk_1 + kk_2 + k_1 k_2}$$

che implica che all'equilibrio

$$x_G = \frac{F}{m} \frac{km + m_2 k_1}{kk_1 + kk_2 + k_1 k_2}.$$

Questo risultato mostra come la posizione di equilibrio del centro di massa dipenda in effetti dalla forza elastica interna (tramite  $k$ ).

**3.2.1. Corpi rigidi ed equazioni di Eulero.** Nelle equazioni cardinali compare la derivata del momento angolare, il cui calcolo naturalmente dipende dalle specifiche proprietà del sistema in esame. Un caso particolare, ancora una volta, è quello del corpo rigido. Abbiamo già visto che nel caso di un corpo rigido possiamo scrivere il momento angolare rispetto ad un polo in termini del momento d'inerzia rispetto al centro di massa  $G$  sostituendo  $\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$ . Possiamo calcolare la derivata temporale di questo momento angolare, ottenendo la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 3.6.** *La derivata temporale del momento angolare baricentrale in un corpo rigido è*

$$\dot{\mathbf{L}}_G = \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_G.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo un riferimento solidale al corpo rigido. Sappiamo che esiste una relazione tra la derivata temporale  $\dot{\mathbf{u}}$  di un vettore  $\mathbf{u}$  nel riferimento fisso e la derivata temporale  $\mathbf{u}'$  dello stesso vettore in quello solidale data da  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$ . Applichiamo questa formula al momento angolare baricentrale,

$$\dot{\mathbf{L}}_G = \mathbf{L}'_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_G.$$

Nel riferimento solidale il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_G$  non cambia, per cui  $\mathbf{L}' = (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega})' = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}' = \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}}$ , dove abbiamo usato il fatto che la derivata temporale di  $\boldsymbol{\omega}$  è invariante nei due sistemi: ciò fornisce il risultato cercato. Il ragionamento si ripete identico nel caso in cui si consideri un punto  $C$  di un asse istantaneo di rotazione, dato che in questo caso  $\mathbf{L}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}$ .  $\square$

La seguente Proposizione, che combina le equazioni cardinali della dinamica con il risultato appena dimostrato, si ottiene immediatamente.

**PROPOSIZIONE 3.7.** *Sia  $G$  il centro di massa di un corpo rigido di massa  $m$ , individuato dal vettore  $\mathbf{x}_G$  rispetto ad un sistema inerziale. Allora*

$$m \ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \quad \tau_G^{(\text{ext})} = \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}.$$

Da questa Proposizione si possono ottenere delle equazioni relativamente semplici, dette *equazioni di Eulero*, se scriviamo le equazioni cardinali rispetto alla base degli assi principali di inerzia  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{i=1}^3$ , dato che in questo caso la matrice  $\mathbf{I}_G$  che rappresenta  $\mathbf{I}_G$  è diagonale, con elementi che indichiamo  $I_1, I_2, I_3$ . Usando questa base, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\tau}_G^{(\text{ext})} = \tau_1^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{e}}_1 + \tau_2^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{e}}_2 + \tau_3^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{e}}_3$$

e inoltre

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}' = \dot{\omega}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\omega}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \dot{\omega}_3\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Le equazioni così diventano

$$(4.11) \quad \begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= \tau_1^{(\text{ext})}, \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= \tau_2^{(\text{ext})}, \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= \tau_3^{(\text{ext})}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, come detto più volte, la configurazione in cui si trova un corpo rigido è individuata dalla posizione di un punto che si muove di moto solidale col corpo e di una terna di vettori solidali. Possiamo scegliere per esempio come punto solidale il centro di massa  $G$ , e come base di un riferimento solidale i tre assi principali d'inerzia del corpo. Stando così le cose, sarà necessario tracciare l'evoluzione del vettore  $\mathbf{x}_G$ , ovvero delle *tre coordinate* che identificano il centro di massa, e dei *tre angoli di Eulero* che permettono di passare dalla base del riferimento fisso alla base solidale. Ciò significa che è in generale sufficiente determinare l'evoluzione di *sei* parametri: le equazioni cardinali sono quindi sufficienti per descrivere la dinamica del corpo rigido, dato che consistono di tre equazioni per il centro di massa e tre equazioni di Eulero. La presenza di vincoli aggiuntivi, tuttavia, può ridurre il numero di parametri necessari. Facciamo qualche esempio più specifico.

**Esempio 4.15** (Corpo rigido libero) — Se il corpo è libero, ovvero non ci sono vincoli, le forze esterne sono tutte attive ed è possibile individuare tutti e sei i parametri necessari a descriverne il moto tramite le sei condizioni fornite dalla prima equazione cardinale della dinamica,  $m\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}$ , e dalle tre equazioni di Eulero. Infatti, è possibile scrivere le componenti della velocità angolare in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime usando l'Eq. (1.16), di modo che le equazioni di Eulero coinvolgono al più derivate seconde di questi angoli. Di conseguenza, per via del Teorema di Cauchy, a condizioni iniziali date, le equazioni cardinali sono *necessarie e sufficienti* nel caso di un corpo rigido.

**Esempio 4.16** (Corpo rigido con punto fisso) — Se il corpo ha un suo punto  $P$  forzatamente fisso, è possibile per esempio scegliere tale punto come origine del riferimento solidale, mentre la configurazione del corpo è identificata dalla terna di angoli di Eulero che permettono di ottenere la terna solidale da quella fissa. In questo caso, però, comparirà tra le forze esterne anche la reazione vincolare  $\Phi$  applicata sul corpo in  $P$ . Le equazioni cardinali saranno

$$m\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{a,ext})} + \Phi, \quad \boldsymbol{\tau}_P^{(\text{a,ext})} = \dot{\mathbf{L}}_P$$

dove, avendo calcolato il momento delle forze rispetto a  $P$ , il contributo del momento di  $\Phi$  non appare (e inoltre,  $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$  essendo il punto fisso). Le due equazioni vettoriali forniscono sei equazioni scalari per sei quantità: i tre angoli di Eulero e le tre componenti della reazione vincolare  $\Phi$ . Avviene però che  $P$

è anche un punto di un asse istantaneo di rotazione, per cui vale la stessa relazione che abbiamo visto per il momento angolare baricentrale (ma con l'opportuno tensore d'inerzia)

$$\dot{\mathbf{L}}_P = \mathbf{I}_P \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega},$$

di modo che, esattamente come nel caso del corpo libero, la seconda equazione cardinale *non coinvolge*  $\Phi$ : una volta integrata, il vettore di reazione si potrà ottenere dalla prima equazione cardinale, dato che la posizione del centro di massa e la risultante delle forze attive saranno funzione dei soli angoli di Eulero.

**Esempio 4.17** (Corpo rigido con asse fisso) — Infine, consideriamo il caso di un corpo rigido in moto ma con il vincolo di mantenere fisso l'asse passante per due sue punti, che chiamiamo  $O$  e  $P$ . Come sappiamo, in questo caso una configurazione del corpo è individuata da un solo parametro angolare, che esprime la rotazione del corpo attorno ad un asse. Scegliendo  $O$  come origine del nostro riferimento, le equazioni cardinali sono

$$m\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(a,ext)} + \Phi_O + \Phi_P, \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \tau_O^{(a,ext)} + \mathbf{x}_P \wedge \Phi_P.$$

Esattamente come sopra,  $O$  è un punto di un asse istantaneo di rotazione, per cui  $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{I}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}$ . Dato che è necessaria una sola equazione, possiamo moltiplicare la seconda equazione cardinale della dinamica per il versore  $\hat{\mathbf{i}}_3$  che assumiamo parallelo alla retta passante per  $O$  e  $P$ , di modo che otteniamo (usando il fatto che  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\hat{\mathbf{i}}_3$  e  $\mathbf{x}_P$  sono paralleli)

$$\langle \hat{\mathbf{i}}_3, \mathbf{I}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{i}}_3, \tau_O^{(a,ext)} \rangle,$$

che è una equazione pura sufficiente per ottenere informazione sull'unico parametro necessario a descrivere le configurazioni del corpo. Osservando ora che in questo caso  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{i}}_3$ , l'equazione diventa

$$\langle \hat{\mathbf{i}}_3, \tau_O^{(a,ext)} \rangle = \langle \hat{\mathbf{i}}_3, \mathbf{I}_O \hat{\mathbf{i}}_3 \rangle \ddot{\theta} \equiv I_Z \ddot{\theta}$$

dove  $I_Z$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso  $Z$ , passante per  $O$  e di direzione  $\hat{\mathbf{i}}_3$ .

**Esempio 4.18** (Pendolo fisico) — Un esempio classico di corpo rigido in moto con asse fisso è il pendolo fisico. Si immagina di avere un corpo fissato in modo tale che esso sia libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale, non passante per il suo centro di massa  $G$ : il corpo è soggetto alla forza peso. Sceglio quindi un riferimento in modo tale che l'origine sia nell'intersezione  $O$  tra l'asse fisso  $Z$  e il piano ad esso perpendicolare passante per  $G$ . Sceglio inoltre una base  $\{\hat{\mathbf{i}}_i\}_{i=1}^3$  tale che la forza peso del corpo sia  $\mathbf{F}_g = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$  e  $\hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}}_2$  sia la direzione dell'asse  $Z$ . Secondo quanto detto sopra, il momento della forza peso rispetto all'origine è il momento della risultante delle forze: la forza peso può essere pensata applicata nel centro di massa, che assumiamo individuato dal vettore  $\mathbf{x}_G$  nel riferimento scelto, di modo che  $\tau_O^{(a,ext)} = -mg\mathbf{x}_G \wedge \hat{\mathbf{i}}_2$ . Sia  $r$  la distanza del centro di massa dall'origine (costante, essendo il corpo rigido), e introduciamo un angolo  $\theta$  di modo che

$$\mathbf{x}_G = r \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1 - r \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2.$$

Conoscendo  $\theta$  conosceremo la configurazione del corpo:  $\theta$  è il parametro lagrangiano la cui evoluzione dovremo studiare. Il momento della forza peso è quindi  $\tau_O^{(a,ext)} = -mgr \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_3$ . Da quanto detto sopra, l'equazione che descrive il moto del sistema è quindi

$$I_Z \ddot{\theta} = -mgr \sin \theta$$

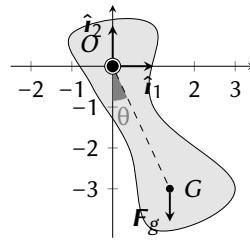


FIGURA 4. Pendolo fisico in moto in un piano verticale.

ovvero è equivalente al moto di un pendolo ideale di massa  $m$  e di lunghezza  $\ell := \frac{l_z}{mr}$ . Questo vuol dire che, nel limite di piccole oscillazioni, il periodo del pendolo fisico è

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l_z}{mgr}}.$$

**3.3. Integrali primi del moto.** Lo studio della dinamica può essere di molto semplificato dall'osservazione che alcune quantità *rimangono costanti* durante il moto. Abbiamo già visto, per esempio, che la conservazione dell'energia meccanica può essere un'utile strumento per calcolare facilmente delle quantità di interesse che diversamente sarebbero complesse da stimare, come per esempio la velocità di fuga.

**DEFINIZIONE 3.1** (Integrale primo). Consideriamo un sistema generico con vincoli fissi o mobili e descritto da  $n$  coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$ ; una funzione  $\Psi(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  si dice integrale primo del moto se

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \sum_{a=1}^n \frac{\partial\Psi}{\partial q_a} \dot{q}_a + \sum_{a=1}^n \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a = 0,$$

dove le derivate di  $\mathbf{q}$  sono da intendersi sulla soluzione  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(t)$  delle equazioni del moto.

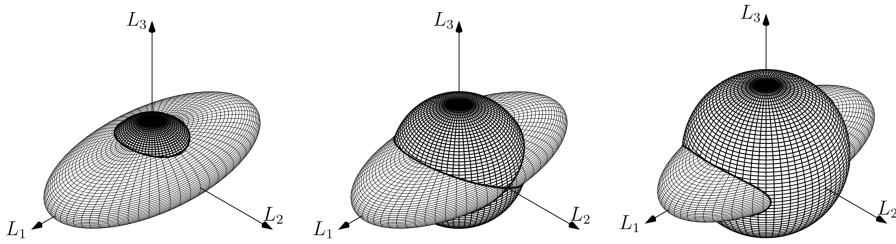
Un integrale primo del moto ha un valore che tipicamente dipende dalle condizioni iniziali, ma una volta fissato nell'istante iniziale, esso rimane costante durante il moto: si dice che  $\Psi$  *si conserva*. Il problema dell'individuazione degli integrali primi di un moto è non triviale, tuttavia possiamo già identificare due possibili integrali primi che appaiono in particolari condizioni e la cui esistenza è suggerita dalle equazioni cardinali della dinamica.

**3.3.1. Conservazione della quantità di moto.** Cominciamo dalla seguente

**PROPOSIZIONE 3.8** (Conservazione della quantità di moto). *Sia  $\hat{\mathbf{u}}$  un versore fisso. Se  $\langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$ , allora la quantità  $\langle \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{u}} \rangle$  si conserva.*

Questo risultato discende immediatamente dalla prima equazione cardinale della dinamica, dato che  $\langle \dot{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle$ . In particolare, se  $\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{Q}$  è un integrale primo del moto.

**Esempio 4.19** (Urti) — Vediamo una semplice, ma importante, applicazione del Proposizione 3.8. Supponiamo di avere un riferimento inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , di modo che  $\hat{\mathbf{i}}_3$  sia orientato come la forza peso, e due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  ed  $m_2$  rispettivamente, vincolati a muoversi lungo l'asse  $\mathcal{X}$ , corrispondente alla direzione  $\hat{\mathbf{i}}_1$ . Il vincolo è realizzato da una guida ideale, di modo che la forza peso di



**FIGURA 5.** Rappresentazione delle due condizioni di conservazione in Eq. (4.12) per un corpo rigido non soggetto a forze esterne per diversi valori di  $L^2$  e  $T$ . In rosso è rappresentata la condizione derivata dalla conservazione del momento angolare, in blu quella derivata dalla conservazione dell'energia cinetica. Il vettore  $\mathbf{x}$  (e quindi  $\boldsymbol{\omega}$ ) è vincolato a evolvere lungo l'intersezione tra le due superfici. In questa figura,  $I_1 < I_2 < I_3$ .

entrambi i punti sia bilanciata dalla reazione vincolare della guida stessa. I punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  sono individuati dai vettori  $\mathbf{x}_1 = x_1 \hat{\mathbf{i}}_1$  e  $\mathbf{x}_2 = x_2 \hat{\mathbf{i}}_1$  rispettivamente. Inoltre, la risultante delle forze esterne applicate al sistema è nulla: questo significa che la quantità di moto totale del sistema si conserva.

Supponiamo ora che al tempo iniziale  $t = 0$   $P_1$  si muova con velocità costante  $\mathbf{v}_1 = v_0 \hat{\mathbf{i}}_1$  sulla guida, con  $v_0 > 0$  mentre  $P_2$  è in quiete. Assumendo  $x_1(0) < x_2(0) = 0$ , vi sarà un istante di tempo  $t_u$  in cui i due oggetti urteranno: tale istante corrisponde al momento in cui  $P_1$  arriverà nell'origine, ovvero  $t_u = \frac{1}{v_0} |x_1(0)|$ . Se indichiamo con  $\mathbf{v}_1 = v_1 \hat{\mathbf{i}}_1$  e  $\mathbf{v}_2 = v_2 \hat{\mathbf{i}}_1$  le velocità di  $P_1$  e  $P_2$  rispettivamente dopo l'impatto, la conservazione della quantità di moto lungo  $\hat{\mathbf{i}}_1$  impone

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Questa relazione non è sufficiente per determinare, in generale,  $v_1$  e  $v_2$ . Tuttavia, in due casi specifici, la presenza di una condizione aggiuntiva permette di risolvere il problema.

**Urto elastico:** Se l'energia cinetica del sistema si conserva, si dice che l'urto è *elastico* e vale la condizione aggiuntiva

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

che, insieme alla condizione di conservazione della quantità di moto, implica

$$v_1 = v_0 \quad \text{e} \quad v_2 = 0 \quad \text{oppure} \quad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

La prima soluzione corrisponde al caso in cui la particella  $P_1$  attraversi la particella  $P_2$  senza urtarla, ovvero senza interazione. Immaginiamo che nel nostro sistema fisico ciò sia inaccettabile, e pertanto la soluzione da considerare è la seconda. Si noti che il segno di  $v_1$  dipende dalla massa relativa dei due punti materiali: se  $m_2 > m_1$ , la prima particella inverte il senso di moto dopo l'urto.

**Urto totalmente anelastico:** Un diverso caso è quello in cui i due corpi si *fondono* a seguito dell'urto, producendo un nuovo punto materiale di massa  $m_1 + m_2$ . In questo caso, detto *totalmente anelastico*,  $v_1 = v_2 \equiv v$  e la condizione imposta dalla conservazione della quantità di moto è

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

3.3.2. *Conservazione del momento angolare ed ellissoide d'inerzia.* Analogamente, vale la seguente Proposizione riguardo il momento angolare.

**PROPOSIZIONE 3.9** (Conservazione del momento angolare). *Sia  $\hat{\mathbf{u}}$  un versore fisso e sia  $\tau_G^{(\text{ext})}$  il momento risultante delle forze calcolato rispetto al centro di massa  $G$ . Se  $\langle \tau_G^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$ , allora la quantità  $\langle \mathbf{L}_G, \hat{\mathbf{u}} \rangle$  si conserva. In particolare, se  $\tau_G^{(\text{ext})} = \mathbf{0}$  allora  $\mathbf{L}_G$  si conserva.*

Alla luce di questo risultato, sia dato un corpo rigido in rotazione *in assenza di forze esterne*: ciò vuol dire che sia la risultante delle forze esterne che il loro momento risultante saranno nulli. Scegliamo ora un riferimento solidale col centro di massa (che, per quanto detto, sarà fermo o avrà velocità costante rispetto ad un riferimento inerziale). In questo sistema  $\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$  si manterrà costante durante tutta la durata del moto. Inoltre, si conserverà anche l'energia cinetica,

$$T = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \rangle.$$

Esprimiamo ora il modulo quadro del momento angolare e l'energia cinetica rispetto nella base degli assi principali d'inerzia, siano essi  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ . Scriviamo in questa base  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ , ma soprattutto ricordiamo che  $\mathbf{I}_G$  ha una rappresentazione diagonale, di modo che  $\mathbf{I}_G \hat{\mathbf{e}}_i = I_i \hat{\mathbf{e}}_i$ , con  $I_i$  momento principale d'inerzia rispetto all'asse  $\hat{\mathbf{e}}_i$ . Si ottiene

$$(4.12) \quad L^2 := \sum_{i=1}^3 L_i^2, \quad 2T = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{I_i} L_i^2$$

che esprimono il fatto che il vettore  $\mathbf{L}_G$  deve appartenere, per tutta la durata del moto, all'intersezione tra un ellissoide, detto *ellissoide d'inerzia*, e una sfera, di raggio pari al suo modulo, come in Fig. 5. Le proprietà geometriche di questa intersezione possono essere molto diverse al variare delle dimensioni relative tra queste due superfici. Si vede geometricamente che, se per esempio  $I_1 < I_2 < I_3$ , se  $\mathbf{L}_G$  inizia la sua evoluzione con direzione prossima a  $\hat{\mathbf{e}}_1$  o  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , essa vi rimane vicina durante il moto, mentre se inizia il suo moto con direzione prossima a  $\hat{\mathbf{e}}_2$  essa può allontanarsi notevolmente dalla configurazione iniziale. Questo risultato è a volte indicato come *effetto Džanibekov*.