

ESAME DI FISICA MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 180 minuti e il punteggio massimo della prova è pari a **33 punti**. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. L'uso di calcolatrici grafiche, tablet, smartphones o apparecchiature in grado di comunicare con l'esterno non è consentito. È possibile utilizzare una calcolatrice scientifica standard.

ESERCIZIO A *Moto unidimensionale*

Si consideri un punto materiale di massa unitaria, individuato dalla coordinata $x \in \mathbb{R}$, è soggetto al seguente potenziale:

$$V(x) = \sin^2 x + \lambda \sin x,$$

dove $\lambda \geq 0$ è un parametro reale.

- A1 [6 pt]** Si identifichino le configurazioni di equilibrio stabile ed instabile al variare del parametro λ , assumendo $\lambda \neq 2$.
- A2 [6 pt]** Si rappresenti (qualitativamente) il diagramma delle fasi associato al problema per $\lambda \in \{0, 1/2\}$, specificando le equazioni delle separatrici.
- A3 [3 pt]** Si determini per quale valore di $\lambda \in (0, 2)$ esistono punti di equilibrio stabile con periodo $\tau = \frac{3}{2}\pi$ in approssimazione di piccole oscillazioni.

ESERCIZIO B *Formalismo lagrangiano*

Si consideri un sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{2} \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix},$$

data in termini delle coordinate generalizzate $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ e dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

- B1 [3 pt]** Per quali valori di a la matrice \mathbf{A} è una matrice di massa accettabile?
- B2 [6 pt]** Si verifichi che il sistema lagrangiano ammette come simmetria il gruppo ad un parametro $s \in \mathbb{R}$,

$$(\mathbf{q}, t) \mapsto \mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q} + s\mathbf{1}, t), \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

e si scriva l'integrale primo associato.

- B3 [6 pt]** Si considerino ora le lagrangiane

$$\mathcal{L}_{\pm}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathcal{L}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\dot{q}_1 q_2 \pm q_1 \dot{q}_2}{2}.$$

Si scrivano le equazioni del moto associate per entrambe le scelte di segno. Come mai una delle due lagrangiane produce le stesse equazioni del moto associate a \mathcal{L}_0 ?

QUESITO [3 pt] — Un punto materiale si muove sotto la sola azione di un potenziale $V(\mathbf{x})$ omogeneo di grado k , ovvero tale che $V(\alpha \mathbf{x}) = \alpha^k V(\mathbf{x})$ per $\alpha > 0$. Il moto è periodico e avviene lungo una traiettoria chiusa $\mathbf{x}(t)$ di periodo τ . Si consideri ora un secondo moto $\bar{\mathbf{x}}$ dello stesso punto nello stesso potenziale, ottenuto dal primo per mezzo di una omotetia, in particolare dilatando uniformemente la traiettoria di un fattore 2: qual è il periodo $\bar{\tau}$ del nuovo moto periodico in termini di τ e k ?

SCHEMA DI RISOLUZIONE

Esercizio A.

A1 Essendo il potenziale infinitamente differenziabile con continuità possiamo cercare i punti di equilibrio per mezzo della condizione

$$V'(x) = 2 \sin x \cos x + \lambda \cos x = \cos x(2 \sin x + \lambda) = 0.$$

Questa equazione ammette sempre come soluzione

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, se e solo se $\lambda < 2$, esistono le soluzioni

$$\bar{x}_k = -\arcsin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2k\pi, \quad \hat{x}_k = \pi + \arcsin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La stabilità può essere studiata calcolando

$$V''(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \lambda \sin x = 2 - 4 \sin^2 x - \lambda \sin x.$$

Abbiamo che

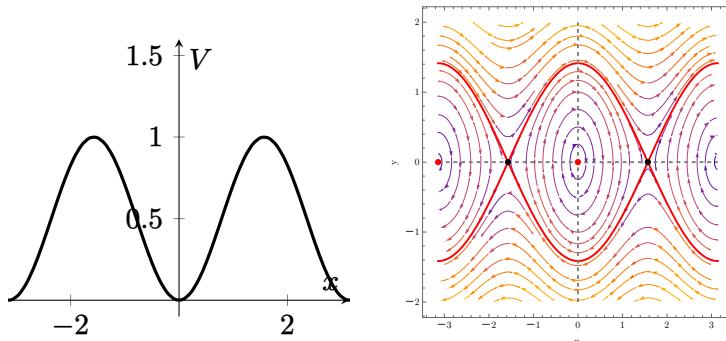
$$V''(x_k) = \begin{cases} -2 - \lambda & \text{se } k \text{ è pari} \\ -2 + \lambda & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

per cui x_k è sempre punto di equilibrio instabile per k pari, mentre è punto di equilibrio stabile se e solo se $\lambda > 2$ per k dispari. Inoltre $V''(\bar{x}_k) = V''(\hat{x}_k) = 2 - \frac{\lambda^2}{2}$ per cui i punti di equilibrio \bar{x}_k e \hat{x}_k , quando esistono, sono di equilibrio stabile per $\lambda < 2$.

A2 Sulla base dell'analisi precedente, per $\lambda = 0$ i punti di equilibrio instabile sono $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, valori per cui $V(x_k) = 1$, per cui la separatrice è data dall'equazione

$$y = \pm \sqrt{2 - 2 \sin^2(x)} = \pm \sqrt{2} |\cos(x)|.$$

Viceversa, i punti $\bar{x}_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono di equilibrio stabile. Per questi valori $V(\bar{x}_k) = 0$. Detta E l'energia meccanica, per $E < 0$ il moto non è ammesso; per $E = 0$ il moto è stazionario nei minimi del potenziale; per $E \in (0, 1)$ il moto è limitato tra due punti di inversione; per $E = 1$ otteniamo la separatrice sopra; per $E > 1$ il moto è illimitato. Il diagramma di fase è rappresentato nella figura seguente.



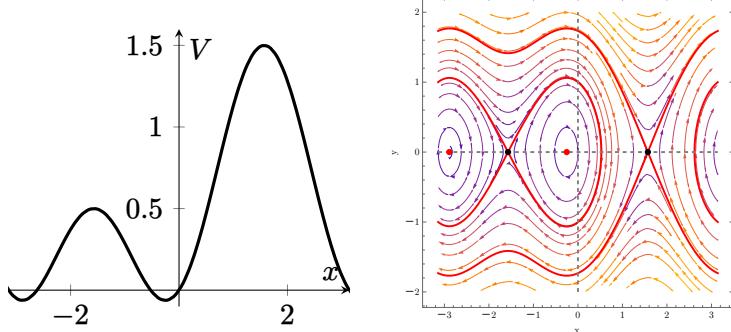
Per $\lambda = 1/2$ i punti di equilibrio instabile sono nuovamente x_k come sopra, ma corrispondenti a due diversi valori di energia. Per k pari, $V(x_k) = 3/2$, per k dispari $V(x_k) = 1/2$. I punti $\bar{x}_k = -\arcsin(1/4) + 2k\pi$ e $\hat{x}_k = \pi + \arcsin(1/4) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono di equilibrio stabile e corrispondono a valori minimi del potenziale $V(\bar{x}_k) = V(\hat{x}_k) = -1/16$. Abbiamo così che per $E < -1/16$ il moto non è ammesso; per $E = -1/16$ il moto è stazionario nei minimi del potenziale; per $E \in (-1/16, 1/2)$ il moto è limitato tra punti di inversione; per $E = 1/2$ abbiamo una prima famiglia di separatrici, di equazione

$$y = \pm \sqrt{1 - 2 \sin^2(x) - \sin(x)}$$

sugli intervalli in cui l'argomento della radice è non negativo; per $E \in (1/2, 3/2)$ abbiamo nuovamente moti limitati tra punti di inversione; per $E = 3/2$ abbiamo una nuova separatrice data da

$$y = \pm \sqrt{3 - 2 \sin^2(x) - \sin(x)};$$

per $E > 3/2$ il moto è illimitato. Il diagramma di fase è rappresentato nella figura seguente.



A3 Per $\lambda \in (0, 2)$ i punti di equilibrio stabile corrispondono alle posizioni $\bar{x}_k = -\arcsin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e hanno $V''(\bar{x}_k) = 2 - \frac{\lambda^2}{2}$. Il periodo delle piccole oscillazioni è

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2 - \frac{\lambda^2}{2}}} = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow 2 - \frac{\lambda^2}{2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$$

Esercizio B.

B1 La matrice deve essere definita positiva. Calcolando gli autovalori, si trova $\lambda_{\pm} = 2 \pm a$, per cui entrambi gli autovalori sono strettamente positivi se e solo se $-2 < a < 2$.

B2 Basta osservare che, sotto l'azione del gruppo, $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \frac{d}{dt}(\mathbf{q} + s\mathbf{1}) = \dot{\mathbf{q}}$ e similmente $(q_1 - q_2)^2 \mapsto (q_1 + s - q_2 - s)^2 = (q_1 - q_2)^2$, di conseguenza la Lagrangiana rimane inalterata. Osservando ora che

$$\xi(t, \mathbf{q}) = \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \Big|_{s=0} = \mathbf{1}, \quad \tau(t, \mathbf{q}) = \frac{d t_s}{ds} \Big|_{s=0} = 0,$$

allora l'invariante è

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{1} \right\rangle = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = (q_1 - q_2)^2 \frac{2\ddot{q}_1 + a\dot{q}_1 + a\dot{q}_2 + 2\dot{q}_2}{2}.$$

B3 Le equazioni del moto associate ad \mathcal{L}_0 sono

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q_1} &= (q_1 - q_2)^2 \ddot{q}_1 + (q_1 - q_2)(2\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q_2} &= (q_1 - q_2)^2 \ddot{q}_2 + (q_2 - q_1)(2\dot{q}_2^2 - \dot{q}_1^2) = 0 \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\pm}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\pm}}{\partial q_1} &= (q_1 - q_2)^2 \ddot{q}_1 + (q_1 - q_2)(2\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) + \frac{\dot{q}_2}{2} \mp \frac{\dot{q}_2}{2} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\pm}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\pm}}{\partial q_2} &= (q_1 - q_2)^2 \ddot{q}_2 + (q_2 - q_1)(2\dot{q}_2^2 - \dot{q}_1^2) \pm \frac{\dot{q}_1}{2} - \frac{\dot{q}_1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Come si vede, \mathcal{L}_+ ha le stesse equazioni del moto di \mathcal{L}_0 . La ragione è che il termine aggiuntivo si può scrivere, in questo caso, come una derivata totale rispetto al tempo

$$\frac{\dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(q_1 q_2)$$

e l'aggiunta di una derivata totale rispetto al tempo di una funzione delle variabili lagrangiane non altera le equazioni del moto.