

Meccanica lagrangiana

1. Formalismo lagrangiano

1.1. Sottovarietà regolari. La necessità di sviluppare una adeguata teoria per sistemi vincolati di molti punti materiali, in particolare quando questi sono soggetti a vincoli olonomi fissi, ha motivato la nascita della *meccanica lagrangiana*. Questo formalismo ha permesso di inquadrare in un potente quadro geometrico la meccanica, e di individuare proprietà non banali del moto meno evidenti nel formalismo newtoniano.

Abbiamo già studiato il caso di un singolo punto materiale soggetto ad un vincolo olonomo unidimensionale, ovvero vincolato a muoversi su una *guida*. Abbiamo anche ridotto problemi più complessi, come quello di un punto materiale in campo centrale, allo stesso tipo di analisi. Il caso di N punti materiali è più complesso, perché ci costringe a studiare il sistema in uno spazio, in generale, di dimensione più alta. A questo scopo saranno utili i concetti introdotti riguardanti superfici in \mathbb{R}^3 e la generalizzazione di tali concetti al caso di ipersuperfici in \mathbb{R}^{3N} . Supponiamo quindi di considerare un sistema di N punti P_1, \dots, P_N , in \mathbb{E}^3 , le cui posizioni sono soggette in generale ad evoluzione rispetto alla variabile temporale t . Ogni punto P_i quindi è associato, secondo un certo riferimento, ad una certa terna \mathbf{x}_i : abbiamo già introdotto la concatenazione $\mathbf{X} = \bigoplus_i \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{3N}$ che rappresenta la configurazione del sistema. Se qualsivoglia configurazione è ammessa, il sistema si dice *libero*, e lo spazio esplorabile da \mathbf{X} è effettivamente \mathbb{R}^{3N} . Viceversa, un sistema *vincolato* presenta una condizione su \mathbf{X} da rispettare durante tutta l'evoluzione. Considereremo vincoli *olonomi* nella forma

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0},$$

dove $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N-n}$, con $n \leq 3N$. Si noti che il vincolo è in generale *mobile*, ovvero l'applicazione $\boldsymbol{\varphi}$ dipende, in generale, esplicitamente dal tempo. Il vincolo determinerà un sottoinsieme di \mathbb{R}^{3N} , eventualmente dipendente dal tempo, che è lo *spazio delle configurazioni* del sistema,

$$(2.1) \quad \mathcal{M}(t) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}\}.$$

Nel caso in cui \mathcal{M} sia *indipendente* dal tempo, si dice che il vincolo è *scleronomo*, viceversa si dice *reonomo*. Sotto certe ipotesi, *che assumeremo soddisfatte*, il vincolo così introdotto identifica, in ogni istante di tempo t , una *sottovarietà regolare* su cui il sistema evolve che supporremo di dimensione n . Per precisare cosa intendiamo con questa affermazione, facciamo una breve digressione.

1.1.1. *Sottovarietà regolari.* Diamo anzitutto questa definizione preliminare.

DEFINIZIONE 1.1 (Sottovarietà regolare). Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^K$ aperto connesso, con $K > 1$, e sia $\boldsymbol{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^s$, $1 \leq s < K$, una applicazione di classe $\mathcal{C}^p(\mathcal{A})$, con $p \geq 2$. Sia anche definito l'insieme $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ supposto non vuoto. Se la matrice jacobiana dell'applicazione $\boldsymbol{\varphi}$ ha rango s in ogni punto di \mathcal{M} , allora \mathcal{M} si dice sottovarietà regolare di dimensione $n = K - s$ di \mathbb{R}^K e ordine p .

Vale il seguente teorema.

TEOREMA 1.1. *Sia data una sottovarietà regolare n -dimensionale di ordine $p \geq 2$ $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^K$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^K$. Allora, per ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ esiste un intorno aperto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ ove è definita unica una funzione iniettiva $\boldsymbol{\chi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^K$ differenziabile con continuità tale che $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ per un certo $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{V}$ e tale che $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{M}$ per $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme finito \mathcal{I} di tutte le funzioni iniettive $h : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, K\}$. Per ciascuna di esse, introduciamo l'insieme

$$\mathcal{U}_h := \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{A} : \det \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_{h(b)}}(\mathbf{x}) \right)_{\substack{1 \leq a \leq s \\ 1 \leq b \leq s}} \neq 0 \right\}.$$

Dato che il rango dello jacobiano di $\boldsymbol{\varphi}$ è massimo in ogni punto di \mathcal{M} , allora $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{h \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_h$. Supponiamo quindi che $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_h \cap \mathcal{M}$, e in particolare che $h(b) = n + b$ per $b = 1, \dots, s$ (possiamo sempre riordinare le variabili in modo che questo sia verificato). Scriviamo $(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathbf{q}$ e $(x_{n+1}, \dots, x_K) = \mathbf{y}$, di modo che $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{y})$ e in particolare indichiamo $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0)$. Per il teorema della funzione implicita, la condizione $\det \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$ implica che esiste un aperto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ contenente \mathbf{q}_0 , un aperto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{K-n}$ contenente \mathbf{y}_0 ed un'unica funzione $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ di classe \mathcal{C}^p tale che $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{y}_0$ e $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$. La funzione $\boldsymbol{\chi}$ desiderata è quindi $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}))$. Essa è iniettiva, dato che, dati $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}') \Leftrightarrow (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})) = (\mathbf{q}', \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}')) \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}'$. \square

1.1.2. Spazio tangente e spazio normale. Consideriamo una parametrizzazione locale $\boldsymbol{\chi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ nella forma $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}))$, come individuata dal teorema precedente in un intorno di un punto $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$. Allora

$$\text{rank}(\partial_a \chi_i(\mathbf{q}_0))_{ai} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \partial_1 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_1 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \partial_2 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_2 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \partial_n \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_n \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \end{pmatrix} = n, \quad \partial_a \chi_i(\mathbf{q}) := \frac{\partial \chi_i(\mathbf{q})}{\partial q_a}.$$

Gli n vettori $\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ sono quindi *linearmente indipendenti* e sono una *base* per uno spazio che chiamiamo *spazio tangente* in \mathbf{x}_0 ,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} = \text{span}\{\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)\}_{a=1}^n.$$

Per spiegare questa terminologia, consideriamo una curva regolare su \mathcal{M} , $\boldsymbol{\gamma} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{M}$ con $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$. Questa può essere parametrizzata in un intorno di P in termini delle coordinate \mathbf{q} , di modo che $\boldsymbol{\gamma}(u) \equiv (\boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q})(u)$, dove $\mathbf{q}(u)$ è la controimmagine di $\boldsymbol{\gamma}$ in \mathcal{V} , univocamente determinata essendo $\boldsymbol{\chi}$ iniettiva e tale che $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$. Abbiamo quindi

$$\boldsymbol{\gamma}'(0) = \sum_{a=1}^n q'_a(0) \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0).$$

Si ha perciò che $\boldsymbol{\gamma}'(0) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$ e in particolare si può intendere $\mathbf{q}'(0)$ come il vettore delle componenti della tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ in \mathbf{x}_0 secondo la base $\{\partial_a \boldsymbol{\chi}\}_a$. Lo spazio tangente è quindi lo spazio in cui vivono i vettori tangenti alle curve in \mathbf{x}_0 su \mathcal{M} , cioè lo spazio dei vettori tangenti ad \mathcal{M} in \mathbf{x}_0 . L'unione *disgiunta* degli spazi tangenti di \mathcal{M} ,

$$\mathbf{T}\mathcal{M} := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \{\mathbf{x}\} \times \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}.$$

Se n è la dimensione dello spazio tangente, la quantità $K - n$ è la dimensione dello *spazio normale*: in un intorno di un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, infatti, esistono $K - n$ vettori normali a \mathcal{M} , ovvero $\{\nabla \varphi_j\}_{j=1}^{K-n}$, e la condizione di rango massimo significa che tali vettori sono linearmente

indipendenti. Per vedere questo fatto, data come sopra una curva $\gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{M}$ passante per $\mathbf{x}_0 = \gamma(0) = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$, abbiamo che

$$\frac{d}{du} \varphi_j(\gamma(u))|_{u=0} = \sum_{a=1}^n \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}_0), \partial_a \mathbf{x}(\mathbf{q}_0) \rangle q'_a(0) = 0,$$

per qualsivoglia curva regolare, ovvero $\langle \nabla \varphi_j, \partial_a \mathbf{x} \rangle = 0$: i vettori $\nabla \varphi_j$ calcolati in un certo punto P sono perciò effettivamente normali allo spazio tangente. Scriveremo

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M})^\perp = \text{span}\{\nabla \varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^{K-n}.$$

1.1.3. Cambio di parametrizzazione. La parametrizzazione di una sottovarietà regolare n -dimensionale \mathcal{M} in un intorno di un suo punto \mathbf{x}_0 non è unica, tuttavia lo spazio tangente e lo spazio normale in \mathbf{x}_0 non dipendono dalla parametrizzazione. Supponiamo di disporre di una parametrizzazione $\mathbf{x}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$, di modo che $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$, e sia $\phi: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$, con $\hat{\mathcal{V}} \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso, un C^p -diffeomorfismo, ovvero una applicazione biettiva con derivate continue fino all'ordine p , la cui inversa esiste e ha derivate continue fino all'ordine p . La mappa $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ \phi: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{M}$ è anch'essa una parametrizzazione di \mathcal{M} . Se dunque il punto P ha coordinate $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$ e $\mathbf{q}_0 = \phi(\hat{\mathbf{q}}_0)$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b}(\phi(\hat{\mathbf{q}}_0)) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0),$$

il che implica che $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$ e d'altronde, essendo la matrice jacobiana della funzione ϕ di rango n , $\text{rank} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \right)_{ai} = n$ ovvero $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} = \text{span} \left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \right\}_a$. Di conseguenza, anche lo spazio normale rimane inalterato.

1.1.4. Tensore metrico. Una sottovarietà regolare \mathcal{M} di dimensione n può essere naturalmente dotata di una *struttura riemanniana* indotta dalla metrica naturale su \mathbb{R}^K . Supponiamo infatti di avere una curva regolare $\gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbf{x}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{M}$, di modo che $\gamma(0) = \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$, dove $\mathbf{x}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ una parametrizzazione di \mathcal{M} in un intorno del punto P di coordinate \mathbf{x} . Sia $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1} \circ \gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{V}$. L'infinitesimo di lunghezza quadra della curva in un intorno di \mathbf{x} si può scrivere

$$ds^2 = \langle d\gamma, d\gamma \rangle = \sum_{ab} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b} \right\rangle dq_a dq_b = \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) dq_a dq_b =: (d\mathbf{q}, d\mathbf{q})$$

dove abbiamo introdotto il *tensore metrico* $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ in ogni punto $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ localmente data da

$$g_{ab}(\mathbf{q}) := \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_b} \right\rangle$$

e la *forma quadratica* tra due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) := \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) v_a u_b, \quad (\bullet, \bullet): \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} \times \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

La forma introdotta è simmetrica definita positiva e permette di riscrivere per esempio la lunghezza ℓ della curva come

$$\ell = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \sqrt{(\mathbf{q}'(u), \mathbf{q}'(u))} du.$$

La matrice g_{ab} si trasforma come un *tensore* quando si esegue un cambio di variabili. Quel che questa espressione significa è che, supponendo che $\mathbf{q} = \phi(\hat{\mathbf{q}})$ con ϕ diffeomorfismo come sopra,



FIGURA 1. Proiezione stereografica.

allora ad essa sarà associata una diversa matrice $\hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{q}})$ che però è legata alla precedente da una trasformazione nella forma

$$\hat{g}_{ab}(\hat{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_a}, \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_b} \right\rangle = \sum_{uv} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_u}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_v} \right\rangle \frac{\partial \phi_u(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_a} \frac{\partial \phi_v(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_b} = \sum_{uv} g_{uv}(\mathbf{q}) \frac{\partial q_u}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}) \frac{\partial q_v}{\partial \hat{q}_b}(\hat{\mathbf{q}}).$$

Esempio 2.1 — La sfera \mathbb{S}^2 in \mathbb{R}^3

$$\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$$

è una sottovarietà regolare di dimensione 2, essendo

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = (2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3)$$

di rango 1 in ogni punto di \mathbb{S}^2 . La mappa data da

$$\mathbf{x}_+(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ \|\mathbf{q}\|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di \mathbb{S}^2 eccezion fatta per il polo nord $\mathbf{z}_+ = (0, 0, 1)^\top$, mentre la mappa

$$\mathbf{x}_-(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ 1 - \|\mathbf{q}\|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di \mathbb{S}^2 eccezion fatta per il polo sud $\mathbf{z}_- = (0, 0, -1)^\top$. Ciascuna delle due mappe introdotte corrisponde ad una *proiezione stereografica* della sfera, vedasi Fig. 1. Con un po' di algebra, si trova che in entrambi i casi

$$g_{ab}(\mathbf{q}) = \frac{4}{(1 + \|\mathbf{q}\|^2)^2} \delta_{ab}.$$

1.2. Coordinate lagrangiane e principio di d'Alembert–Lagrange. Nel contesto della meccanica, abbiamo a che fare come abbiamo visto con condizioni olonome nella forma dell'Eq. (2.1). Nel seguito, assumeremo sempre che $\mathcal{M}(t)$ sia una sottovarietà regolare di dimensione n in uno spazio di dimensione $3N$ per ogni valore di t , ovvero che in ogni istante di tempo t valga

$$3N - n = \text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(\mathbf{X}, t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3N \\ 1 \leq j \leq 3N - n}} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}(t).$$



FIGURA 2. Asta rotante con punto materiale vincolato su di essa.

Per quanto detto sopra, in un intorno di un punto P , individuato da $\mathbf{X} \in \mathcal{M}(t)$, sarà possibile introdurre (non univocamente) n parametri, detti nel contesto della meccanica *coordinate lagrangiane*, $\mathbf{q} \in \mathcal{V}(t) \subseteq \mathbb{R}^n$, in cui potremo ri-esprimere localmente le vecchie variabili cartesiane, ovvero $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ per una opportuna¹ $\boldsymbol{\chi}(\bullet, t): \mathcal{V}(t) \rightarrow \mathcal{M}(t)$ in ciascun istante. Si noti che se il vincolo è reonomo $\boldsymbol{\chi}$ dipende dal tempo t ; viceversa, se il vincolo è scleronomo, allora semplicemente $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$. In seguito assumeremo che la dipendenza di $\boldsymbol{\chi}$ dal tempo sia tale che $\boldsymbol{\chi}$ abbia derivate continue almeno fino alla seconda in t .

La *traiettoria* del sistema su $\mathcal{M}(t)$ si scrive *localmente* come

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(t), t)$$

per un opportuno set di coordinate lagrangiane, dove $\mathbf{q}(t)$ incorpora la dipendenza dal tempo delle coordinate lagrangiane del sistema durante l'evoluzione. Lo spazio in cui varia la coppia $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è detto *spazio delle fasi* ed esiste una corrispondenza tra l'evoluzione della coppia $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e l'evoluzione di $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$. Se infatti da un lato $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$, potremo inoltre scrivere

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \partial_a \mathbf{X} + \partial_t \mathbf{X} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) + \partial_t \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t),$$

che esibisce due termini diversi: il primo,

$$\hat{\mathbf{V}} := \sum_a \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in T_P \mathcal{M}(t)$$

è detto *velocità virtuale* e vive nello spazio tangente ad $\mathcal{M}(t)$ in P , punto individuato da $\mathbf{X}(t)$. Si tratta del contributo alla velocità *a vincolo fisso*: $\hat{\mathbf{V}}$ è effettivamente tangente a $\mathcal{M}(t)$ nel senso usuale nell'istante di tempo t . Il secondo termine, $\partial_t \mathbf{X} \equiv \partial_t \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ è dovuto invece alla sola dipendenza del vincolo dal tempo: questa velocità è detta *velocità di trascinamento* ed è nulla se i vincoli sono scleronomi.

Esempio 2.2 — Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi lungo un'asta infinita passante per l'origine in un riferimento cartesiano come in Fig. 2. L'asta mantiene un angolo fisso $\alpha \in (0, \pi/2)$ rispetto alla direzione x_3 , mentre precece attorno a tale asse, in modo che l'angolo tra l'asse x_1 e il piano contenente l'asse x_3 e l'asta sia $\theta = \omega t$ per un qualche $\omega \in \mathbb{R}$. L'asta mobile è in effetti una sottovarietà

¹In seguito tratteremo in generale $\boldsymbol{\chi}$ come una funzione definita su un dominio in \mathbb{R}^n di cui ignoreremo la dipendenza temporale e dipendente dal tempo. La trattazione di varietà dipendenti dal tempo è un argomento interessante che va però oltre lo scopo del corso, essendo la sua trattazione rigorosa non particolarmente utile ai fini degli argomenti trattati qui.

regolare di \mathbb{R}^3 , spazio delle configurazioni del punto, su cui quest'ultimo è vincolato. Essa è identificata dalla condizione $\mathcal{M}(t): \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$, dove

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin \omega t x_1 - \cos \omega t x_2 \\ x_1 - \tan \alpha \sin \omega t x_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matrice jacobiana associata è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ 1 & 0 & -\tan \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 in ogni punto di $\mathcal{M}(t)$ e per ogni t , per cui $\mathcal{M}(t)$ ha dimensione 1. Una applicazione $\boldsymbol{\chi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ che permette di parametrizzare globalmente $\mathcal{M}(t)$ è la seguente

$$\boldsymbol{\chi}(q, t) = \begin{pmatrix} q \sin \alpha \cos \omega t \\ q \sin \alpha \sin \omega t \\ q \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

In altre parole, q è la distanza (con segno) lungo l'asta di P dall'origine. In particolare, la traiettoria $\mathbf{x}(t)$ del punto P può essere parametrizzata come $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(q, t)$, con q dipendente dal tempo, di modo che

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} = \dot{q} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \omega t \\ \sin \alpha \sin \omega t \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + q \omega \sin \alpha \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo termine, come si vede, è diretto come \mathbf{x} , ovvero nella direzione dell'asta, e corrisponde infatti alla componente della velocità *tangente* a $\mathcal{M}(t)$ nell'istante t . Il secondo termine, invece, è ortogonale all'asse x_3 (tangente alla circonferenza tratteggiata in figura) ed è esclusivamente dovuto al fatto che l'asta è in movimento (è infatti identicamente nullo per $\omega = 0$).

In un sistema di N punti materiali vincolati sul $\mathcal{M}(t)$, ciascun punto (P_i, m_i) sarà sottoposto ad una forza totale $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(v)}$, dove $\mathbf{F}_i^{(a)}$ è il contributo *attivo* ed $\mathbf{F}_i^{(v)}$ è il contributo vincolare, dovuto proprio alla presenza del vincolo. Possiamo concatenare tali contributi vincolari in un unico vettore di dimensione $3N$ scrivendo $\mathbf{F}^{(v)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(v)}$, similmente possiamo concatenare le forze attive $\mathbf{F}^{(a)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(a)}$ e introdurre $\mathbf{Q} := \bigoplus_i (m_i \mathbf{v}_i)$, di modo che

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)}.$$

La *potenza* espressa da queste reazioni vincolari è

$$\Pi^{(v)} = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{F}_i^{(v)}, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle = \langle \mathbf{F}^{(v)}, \dot{\mathbf{X}} \rangle = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle = \langle \hat{\mathbf{V}}, \mathbf{F}^{(v)} \rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle.$$

Il primo contributo nell'espressione precedente si dice *potenza virtuale della reazione vincolare*. Il suo valore è discriminante, come già abbiamo anticipato per il caso del singolo punto materiale, per distinguere tra vincoli lisci e scabbi nel caso di sistemi di punti soggetti a vincoli olonomi.

DEFINIZIONE 1.2 (Principio di d'Alembert–Lagrange). Un sistema olonomo si dice *a vincoli lisci* se la potenza virtuale del sistema di reazioni vincolari è nulla in qualsiasi istante e in corrispondenza di qualunque stato cinematico del sistema. Ne consegue che se il sistema è soggetto a sole forze conservative e vincoli lisci e fissi, la legge di conservazione dell'energia resta valida.

In altre parole, in un vincolo liscio per ogni $\delta \mathbf{X} = \bigoplus_i \delta \mathbf{x}_i \in T_P \mathcal{M}(t)$, $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0$. Il principio può essere trovato espresso in forme diverse. Una di queste si ottiene osservando che $\mathbf{F}_i^{(v)} =$

$\dot{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}$, per cui

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{Q}}_i, \delta \mathbf{x}_i \right\rangle = \langle \mathbf{F}^{(a)} - \dot{\mathbf{Q}}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0,$$

dove $\delta \mathbf{X} \in T_P \mathcal{M}(t)$ viene detto *spostamento virtuale*, di modo che $\delta \mathbf{x}_i$ sia la terna in $\delta \mathbf{X}$ corrispondente al punto P_i . Come nel caso del singolo punto materiale, perciò, questa condizione equivale a richiedere che $\mathbf{F}^{(v)}$ viva nello spazio normale *in ogni istante di tempo* e generalizza il concetto di vincolo liscio al caso di moto di un sistema su sottovarietà. Come si vede, il principio ha il grande pregio di *non* dipendere dalle forze vincolari, ma solo dalla geometria del vincolo e dalle forze attive.

1.3. Equazioni di Lagrange. Cerchiamo ora di riscrivere le equazioni del moto e le quantità derivate nel caso del punto materiale in questo contesto più generale in cui il sistema, che immaginiamo composto da n punti materiali $\{(P_k, m_k)\}_{k=1}^N$, si muove su una sottovarietà di dimensione $n \leq 3N$, nell'assunzione di aver a che fare con vincoli olonomi. Anzitutto riscriviamo opportunamente l'energia cinetica: ricordando che localmente $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$, essa può essere riscritta come

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \dot{\mathbf{x}}_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b A_{ab}(\mathbf{q}, t) + \sum_a \dot{q}_a B_a(\mathbf{q}, t) + C(\mathbf{q}, t).$$

dove abbiamo denotato con

$$A_{ab}(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle, \quad B_a(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \right\rangle, \quad C(\mathbf{q}, t) := \frac{1}{2} \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t} \right\rangle.$$

Qui occorre osservare che $\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\chi}_k(\mathbf{q}, t)$, dove $\boldsymbol{\chi}_k$ è il vettore tridimensionale che individua le coordinate del punto P_k . L'espressione si riscrive più semplicemente come

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \mathbf{B}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{q}} \rangle + C(\mathbf{q}, t).$$

Nel caso di *vincoli fissi*, localmente $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$ per opportune variabili lagrangiane, e quindi i termini in \mathbf{B} e C sono nulli. La matrice \mathbf{A} , a volte detta *matrice di massa*, ha l'importante proprietà stabilita dal seguente teorema.

TEOREMA 1.2. *La forma in \mathbf{v}*

$$\hat{T}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \mathbf{v} \rangle$$

(intesa a \mathbf{q} e t fissati) è quadratica simmetrica definita positiva, ovvero \mathbf{A} è simmetrica definita positiva.

DIMOSTRAZIONE. Basta semplicemente esplicitare la forma in termini di velocità virtuali: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \right\rangle > 0$, dove abbiamo indicato con $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} := \sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}$. Si noti che la disuguaglianza è stretta: la quantità può essere zero solo se tutti i vettori $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}$ sono nulli, ma in questo caso lo sarebbe anche $\sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \mathbf{x}_k = \sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \boldsymbol{\chi}_k$, cosa impossibile (per via della lineare indipendenza) a meno che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. La simmetria infine si nota osservando direttamente che $A_{ab} := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle = A_{ba}$. \square

Dall'energia cinetica è possibile definire anche un vettore \mathbf{p} di variabili coniugate a \mathbf{q} , che raccoglie i cosiddetti *momenti cinetici* o *coniugati*

$$p_a := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a.$$

Essi hanno la caratteristica di essere le *componenti lagrangiane* del vettore \mathbf{Q} , ovvero la proiezione di \mathbf{Q} sullo spazio tangente,

$$\langle \mathbf{Q}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_k m_k \sum_b \dot{q}_b \langle \partial_b \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle + \sum_k m_k \langle \partial_t \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a \equiv p_a.$$

Derivando ulteriormente p_a rispetto al tempo si ha

$$\dot{p}_a = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) = \left\langle \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle.$$

L'ultimo termine a destra si può scrivere come

$$\left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \sum_k m_k \left\langle \dot{\mathbf{x}}_k, \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_k}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}.$$

In definitiva abbiamo ottenuto l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = f_a, \quad f_a := \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle.$$

Di nuovo, f_a sono le componenti lagrangiane della forza totale (anche dette *forze generalizzate* e a volte indicate con \mathcal{Q}_a — eviteremo però questa notazione dato che potrebbe indurre in confusione con la quantità di moto). Quelle ottenute per $a = 1, \dots, n$ sono le *equazioni di Lagrange*.

1.3.1. *Forze conservative e vincoli lisci.* Più interessante è il caso in cui le forze attive siano *conservative*, ovvero che esista un potenziale V tale che

$$\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V.$$

In questo caso, si ha che il contributo dovuto alla forza attiva $\mathbf{F}^{(a)}$ nel termine destro dell'equazione di Lagrange è

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \left\langle \nabla V, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_a}$$

dove, nell'ultimo passaggio, V è da intendersi ristretta alla varietà, ovvero $V = V(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t))$. Le equazioni di Lagrange diventano così

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \left\langle \mathbf{F}^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle,$$

dove abbiamo introdotto la funzione *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t).$$

Una lagrangiana nella forma sopra può più in generale ottenersi se esiste una funzione $\hat{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ tale che

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a},$$

quindi non esclusivamente con forze conservative: anche in questo caso si ottengono le stesse equazioni di Lagrange nella forma in Eq. (2.2). Una funzione \hat{V} che soddisfi le equazioni la condizione precedente è detta *potenziale generalizzato*.

Se i vincoli sono lisci, $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = 0$ per via del principio di d'Alembert, e l'equazione di Lagrange assume la forma molto compatta, e assolutamente fondamentale

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0.$$

La corrispondenza tra equazioni del moto e lagrangiana *non* è biunivoca, ovvero lo stesso moto può essere descritto da più lagrangiane. Supponiamo infatti di considerare

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d h(\mathbf{q}, t)}{d t}$$

per una generica funzione $h(\mathbf{q}, t)$ differenziabile di classe almeno \mathcal{C}^2 rispetto a tutti i suoi argomenti. Allora, osservando che

$$\frac{d h(\mathbf{q}, t)}{d t} = \sum_a \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t},$$

possiamo verificare che

$$\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_a} = \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial h}{\partial q_a} \right) - \sum_b \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial q_b} \dot{q}_b - \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial t} = \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}.$$

Esempio 2.3 (Potenziali generalizzati) — Un caso particolare ma importante di potenziale generalizzato è quello utile per lo studio del moto di punti materiali carichi in campo elettromagnetico. Si assume che esistano due campi $\mathbf{E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{B}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiti in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 , di modo che la forza applicata ad un punto materiale P di carica e sia espressa dalla *forza di Lorentz*

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \wedge \mathbf{B} \right)$$

dove c è la velocità della luce e $\dot{\mathbf{x}}$ la velocità del punto. I campi \mathbf{E} ed \mathbf{B} devono soddisfare le *equazioni di Maxwell*, che in presenza di una densità di carica ρ e di una densità di corrente \mathbf{j} nello spazio assumono la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Immaginiamo che la particella sia soggetta *esclusivamente* all'azione di \mathbf{E} ed \mathbf{B} : in questo caso, quindi, non sarà necessario introdurre coordinate lagrangiane: potremo utilizzare $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ essendo $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^3$.

La prima equazione di Maxwell permette di scrivere $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, per un certo campo $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ detto *potenziale vettore*. La seconda equazione può quindi essere scritta come

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

per una certa funzione scalare $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. La forza di Lorentz si può quindi riscrivere

$$\mathbf{F} = e \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right).$$

Ora utilizziamo l'identità formale $\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) = \nabla \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \nabla \rangle \mathbf{b}$ per riscrivere

$$\dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \langle \dot{\mathbf{x}}, \nabla \rangle \mathbf{A} = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{d \mathbf{A}}{d t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Sostituendo nell'espressione di \mathbf{F} abbiamo

$$\mathbf{F} = e \left(-\nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{c} \frac{d \mathbf{A}}{d t} \right) = -\nabla \hat{V} + \frac{d}{d t} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad \hat{V} := \varphi - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle.$$

Detta m la massa del punto materiale, la lagrangiana è quindi

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - e \left(\varphi(\mathbf{x}) - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle \right).$$

Esempio 2.4 (Forze dissipative) — Si osserva sperimentalmente che, nel caso di vincoli scabbi, una possibilità è che la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ abbia una componente diretta lungo il moto nella forma $\mathbf{F}_{k,t}^{(v)} = -\mu_k \dot{\mathbf{x}}_k$ per un qualche coefficiente di attrito dinamico $\mu_k > 0$. Abbiamo già studiato forze di

questo tipo discutendo il caso unidimensionale. Una forza siffatta non soddisfa il principio di d'Alembert e produce nel contributo nell'equazione di Lagrange

$$\left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \sum_k \sum_b \mu_k \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle$$

che può essere pensata come il risultato di un “potenziale” delle variabili cinetiche, detto *funzione di dissipazione di Rayleigh*,

$$\mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2} \sum_k \sum_{ab} \mu_k \dot{q}_a \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a}.$$

Se le reazioni vincolari dissipative sono solo in questa forma, allora le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a} = 0.$$

Un esempio di applicazione di questo formalismo è il caso di un punto materiale su una guida soggetto a una forza armonica e ad uno smorzamento, che abbiamo già studiato. Se q è l'ascissa curvilinea del punto materiale di massa m lungo una guida, e se il punto è soggetto ad una forza elastica di modo che vi sia applicato un potenziale $V(q) = \frac{1}{2} k q^2$, la lagrangiana sarà

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2.$$

Questa lagrangiana produce, come atteso, le equazioni del moto dell'oscillatore armonico. La presenza di un termine di smorzamento si può includere considerando la funzione di Rayleigh

$$\mathcal{R}(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sigma \dot{q}^2,$$

con $\sigma > 0$, di modo che le equazioni di Eulero–Lagrange siano quelle che abbiamo già visto per il moto armonico smorzato in Eq. (1.8) (in assenza di forzante), ovvero

$$(2.4) \quad m \ddot{q} + \sigma \dot{q} + k q = 0.$$

2. Equilibrio ed oscillazioni

2.1. Spazio delle fasi. Se introduciamo il vettore $\mathbf{f} = (f_a)_a$ avente come componenti $f_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \langle \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \partial_a \mathbf{X}(\mathbf{q}, t) \rangle$, le equazioni di Lagrange possono essere scritte in una forma piuttosto compatta come

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} - \left(\frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{f}.$$

Nell'espressione precedente, abbiamo usato le notazioni compatte

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)_a = \sum_b \dot{q}_b \frac{\partial A_{ab}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle = \sum_u \frac{\partial B_u}{\partial \mathbf{q}} \dot{q}_u.$$

Inoltre, indichiamo con $\frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ il *gradiente rispetto a \mathbf{q}* di una funzione scalare h dipendente da \mathbf{q} . Osservando ora che \mathbf{A} è una matrice definita positiva, possiamo invertirla e scrivere le equazioni di Lagrange in forma normale

$$(2.5) \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B} + \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right).$$

Si tratta quindi di un insieme di equazioni del secondo ordine *in forma normale*, la cui integrazione locale richiede, secondo il teorema di Cauchy, un insieme di condizioni iniziali $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{v}_0$, purché il termine a destra sia sufficientemente regolare, ovvero lipschitziano. *In tutti i casi che seguono assumeremo questa condizione valida a meno che non diversamente specificato.*

2.1.1. *Sistemi autonomi.* In questa sezione, ci focalizzeremo in particolare sui *sistemi autonomi*, ovvero tali da non esibire una dipendenza esplicita dal tempo né in \mathcal{M} né nelle forze applicate. In questo caso quindi $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e $C = 0$. Le equazioni di Lagrange possono essere così scritte nella forma

$$(2.6) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) := \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle \right).$$

Si chiama *spazio delle fasi* lo spazio $2n$ dimensionale delle coppie (\mathbf{q}, \mathbf{v}) . In questo spazio, indichiamo con

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0) := (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$$

la soluzione del sistema di equazioni ottenuta per il tempo t utilizzando le condizioni iniziali $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$ per $t = 0$: in altre parole, \mathbf{g}^t produce il *flusso di fase* associato al sistema in coordinate locali.

2.2. Funzioni di Ljapunov. Il concetto di spazio delle fasi permette di introdurre il concetto di *equilibrio* e di *stabilità secondo Ljapunov*. Fissiamo anzitutto la notazione: indichiamo con $\bar{B}_r(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} : \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq r\}$ la palla chiusa centrata in \mathbf{z}_0 .

DEFINIZIONE 2.1. Un punto $\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0) \in \mathcal{M}$, con $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$, è detto *di equilibrio* se la coppia $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ nello spazio delle fasi è soluzione del problema in Eq. (2.6), ovvero $\mathbf{g}^t \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0$. Un punto di equilibrio \mathbf{X}_0 è *stabile secondo Ljapunov* se per ogni $\bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, esiste $\bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, tale che

$$\mathbf{z} \in \bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \leq \delta \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0), \quad \forall t > 0.$$

In particolare, il punto si dice *asintoticamente stabile* se esiste $\bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V}$ tale che

$$\mathbf{z} \in \bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| = 0.$$

Diversamente si dice *instabile*.

È evidente che un punto $\mathbf{X}(\mathbf{q}_0)$ può essere di equilibrio se e solo se $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. La caratterizzazione dei punti stabili e asintoticamente stabili può essere fatta tramite il seguente risultato.

TEOREMA 2.1 (Ljapunov). Sia $\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ punto di equilibrio del sistema. Se esiste una funzione $\Lambda \in C^1(\Omega)$, detta *funzione di Ljapunov*, su un intorno Ω di $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ tale che

- (1) $\Lambda(\mathbf{z}) > \Lambda(\mathbf{z}_0) \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$;
- (2) per $t \geq 0$ e per ogni $\mathbf{z} \in \Omega$, vale

$$\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} \leq 0$$

allora \mathbf{z}_0 è di equilibrio stabile. In particolare, se $\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} < 0$ per ogni $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$, il punto \mathbf{z}_0 è *asintoticamente stabile*.

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo, senza perdere in generalità, che $\Lambda(\mathbf{z}_0) = 0$. Sia dunque $\bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \subset \Omega$: per il teorema di Weierstrass, essendo la sua frontiera $\partial \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ una superficie sferica chiusa e limitata, Λ ammette un minimo su $\partial \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$, sia esso $2\lambda = \min_{\mathbf{z} \in \partial \bar{B}_\epsilon} \Lambda(\mathbf{z}) > 0$. Definiamo l'insieme

$$\Omega_\lambda = \{\mathbf{z} \in \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) : \Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda\}.$$

Questo insieme è interno a $\bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$: se così non fosse, esisterebbe $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \cap \partial \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$, che è un assurdo essendo, per $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda$, $\Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda < \min_{\mathbf{x} \in \partial \bar{B}_\epsilon} \Lambda(\mathbf{x}) = 2\lambda$. Inoltre, $\mathbf{z}_0 \in \Omega_\lambda$, che è tale che

$$\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda,$$

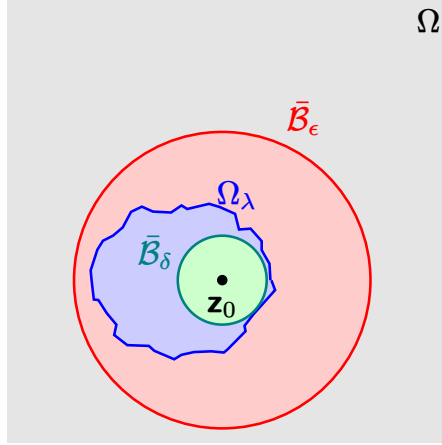


FIGURA 3. Illustrazione pittorica degli interni nella dimostrazione del teorema di Ljapunov.

per via del fatto che $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) \leq \lambda \forall t \geq 0$. Essendo ora Λ continua per ipotesi, esiste un intorno sferico chiuso $\bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$ tale che $\mathbf{z} \in \bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda$, e in particolare vi sarà un $\delta > 0$ tale per cui $\bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \Omega_\lambda$ (si noti che \mathbf{z}_0 è interno a Ω_λ : diversamente esisterebbe un suo intorno arbitrariamente piccolo con punti aventi $\Lambda(\mathbf{z}) > \lambda$). Pertanto, ogni punto di tale intorno, $\mathbf{z} \in \bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$, ha $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda \subset \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ che prova la stabilità secondo Ljapunov.

Se la disuguaglianza sulla derivata è stretta, essendo $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})$ monotona non crescente e inferiormente limitata in Ω , per ogni $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ esiste $\bar{\lambda}(\mathbf{z}) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z})$. Supponiamo che $\bar{\lambda}(\mathbf{z}) \neq 0$. Per via della continuità di Λ , esiste quindi un $r < \epsilon$ tale che

$$\bar{B}_r(\mathbf{z}_0) \subset \Omega_{\bar{\lambda}(\mathbf{z})} := \{\mathbf{z}' \in \Omega_\lambda : \Lambda(\mathbf{z}') \leq \bar{\lambda}(\mathbf{z})\} \subset \Omega_\lambda \subset \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \quad \text{tale che} \quad \mathbf{z}' \in \bar{B}_r(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \Lambda(\mathbf{z}') \leq \bar{\lambda}(\mathbf{z}).$$

Il fatto che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \bar{\lambda}(\mathbf{z}) > 0$ implica che la traiettoria $\mathbf{g}^t \mathbf{z}$ è esterna a \bar{B}_r per $t \geq 0$, ma sempre interna a Ω_λ e quindi $\bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$. Sia in particolare

$$-\eta := \max_{r \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon} \left. \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} \right|_{t=0} < 0.$$

Questo implica inoltre che $\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} = \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^\tau(\mathbf{g}^t \mathbf{z}))}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \leq -\eta$. Allora

$$\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \Lambda(\mathbf{z}) + \int_0^t \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z})}{d\tau} d\tau \leq \Lambda(\mathbf{z}) - \eta t,$$

che per t sufficientemente grande è una quantità negativa, contraddicendo il fatto che Λ sia inferiormente limitata. \square

Esempio 2.5 (Oscillatore smorzato) — Abbiamo già introdotto il caso del moto dell'oscillatore smorzato e mostrato che può essere studiato per mezzo del formalismo lagrangiano se viene introdotta una opportuna funzione di Rayleigh. L'equazione del moto risultante per un punto materiale di massa m in moto unidimensionale è nella forma

$$m\ddot{q} + \sigma\dot{q} + kq = 0$$

dove $\sigma > 0$ è un coefficiente di smorzamento e $k > 0$ è una costante elastica opportuna. Abbiamo già studiato questo moto e sappiamo che $q = 0$ è una posizione di equilibrio, e in particolare che essa è

asintoticamente stabile. Vediamo come è possibile vedere questo fatto tramite una opportuna funzione di Ljapunov. In questo problema (e in molti altri casi) una naturale scelta per Λ è l'energia meccanica,

$$\Lambda \equiv E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Questa funzione è nulla in $(q, \dot{q}) = (0, 0)$. D'altra parte, in ogni punto di un qualunque intorno di tale punto si ha

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \dot{q}(m\ddot{q} + kq) = -\sigma\dot{q}^2 < 0.$$

Dal teorema sopra, il punto di equilibrio è quindi asintoticamente stabile.

2.2.1. Vincoli lisci e forze conservative. Il caso dei vincoli lisci e forze conservative indotte da un potenziale V è particolarmente semplice da studiare: per un vincolo liscio infatti $\mathbf{f} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$. Vale il seguente

TEOREMA 2.2. *In un sistema olonomo soggetto a forze conservative indotte dal potenziale V e vincoli lisci, la configurazione $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è di equilibrio se e solo se \mathbf{q}_0 è un punto critico del potenziale, ovvero $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sul punto \mathbf{z}_0 così dato abbiamo che

$$\phi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0).$$

Essendo \mathbf{A} definita positiva, $\phi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ se e solo se $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$. □

TEOREMA 2.3 (Lagrange–Dirichlet). *Sia dato un sistema olonomo con vincoli lisci e fissi, e soggetto a forze conservative indotte da un potenziale V . Se \mathbf{q}_0 è un minimo locale isolato dell'energia potenziale, la corrispondente configurazione è stabile.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è una conseguenza immediata del teorema di Ljapunov. Basta infatti utilizzare come funzione di Ljapunov l'energia meccanica,

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q}) \equiv \Lambda(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

che in un sistema con vincoli olonomi lisci e fissi e soggetto a sole forze conservative si conserva, dunque $\frac{d\Lambda}{dt} = 0$. Inoltre, se \mathbf{q}_0 è un minimo locale isolato del potenziale, detto $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$, esiste un intorno Ω di \mathbf{z}_0 nello spazio delle fasi $\Lambda(\mathbf{z}_0) = V(\mathbf{q}_0) < V(\mathbf{q}) \leq \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q})$ per ogni $\mathbf{q} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$. □

Il teorema sopra è valido a maggior ragione nel caso in cui siano presenti forze dissipative, dato che l'energia durante il moto non potrà aumentare e anzi diminuirà strettamente: l'applicazione del teorema di Ljapunov in questo caso mostra che il minimo locale isolato è in particolare asintoticamente stabile. Una conseguenza di questo fatto, per esempio, è che, dato un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci le cui forze attive sono solo dovute alla gravità, le posizioni di equilibrio stabile sono minimi isolati della quota del baricentro.

2.3. Piccole oscillazioni. Supponiamo ora che \mathbf{q}_0 sia un minimo isolato del potenziale di un sistema soggetto a vincoli fissi e lisci e forze attive conservative, ovvero, che esso corrisponda ad una configurazione di equilibrio stabile. La lagrangiana, in generale nella forma $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$, può essere riscritta in termini di nuove variabili $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ utilizzando una *approssimazione quadratica*. Anzitutto, possiamo sempre assumere $V(\mathbf{q}_0) = 0$. In un intorno di \mathbf{q}_0 , quindi, potremo scrivere

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ab} (q_a - q_{a,0})(q_b - q_{b,0}) \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0) + o(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|^2) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} \rangle + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2)$$

dove abbiamo introdotto la matrice $\hat{\mathbf{V}}$ di elementi

$$\hat{V}_{ab} := \frac{\partial^2 V_{ab}}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0).$$

L'idea è perciò di introdurre una lagrangiana che approssima \mathcal{L} in vicinanza di \mathbf{q}_0 mantenendo solo termini quadratici in $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ e $\boldsymbol{\xi}$, ovvero nella forma

$$\hat{\mathcal{L}}(\dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{2} \langle \dot{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\boldsymbol{\xi}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_0) \boldsymbol{\xi} \rangle$$

dove abbiamo sostituito $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \rightarrow \hat{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(\mathbf{q}_0)$. Questo sistema è di più semplice analisi, dato che le corrispondenti equazioni di Lagrange sono lineari,

$$(2.7) \quad \hat{\mathbf{A}} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}.$$

Sia $\hat{\mathbf{A}}$ che $\hat{\mathbf{V}}$ sono matrici definite positive per ipotesi (la prima in quanto matrice di massa in \mathbf{q}_0 , la seconda essendo \mathbf{q}_0 un minimo locale isolato). Sotto queste ipotesi, vale il seguente teorema.

TEOREMA 2.4. *Esiste una trasformazione lineare che disaccoppia il sistema in Eq. (2.7) in n oscillazioni armoniche indipendenti nella forma*

$$\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n$$

dove ciascun z_a è detto modo normale del sistema di frequenza propria ω_a .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbf{S} \in \text{O}(n)$ la matrice che diagonalizza $\hat{\mathbf{A}}$, $\mathbf{S} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{S}^\top = \text{diag}(\alpha_i)$. Per ipotesi, $\alpha_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Definiamo la radice di $\hat{\mathbf{A}}$ come $\hat{\mathbf{A}}^{1/2} := \mathbf{S}^\top \text{diag}(\sqrt{\alpha_i}) \mathbf{S}$: essa è simmetrica definita positiva, e indicheremo con $\mathbf{A}^{-1/2}$ la sua inversa. Introduciamo la variabile

$$\mathbf{y} := \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \boldsymbol{\xi}$$

che ci permette di riscrivere l'equazione $\hat{\mathbf{A}} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ come

$$\ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\Omega} := \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{A}}^{-1/2}.$$

Ora possiamo osservare che $\boldsymbol{\Omega}$ è anch'essa simmetrica e definita positiva, con n autovalori (non necessariamente distinti) positivi. In particolare, esiste una matrice ortogonale $\mathbf{O} \in \text{O}(n)$ tale che $\text{diag}(\omega_a^2) = \mathbf{O}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{O}$. Si noti che l'insieme $\{\omega_a^2\}_{a=1}^n$ consiste delle n (non necessariamente distinte) soluzioni dell'equazioni $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{A}}^{-1/2}) = 0$. Introduciamo quindi un'ultima variabile $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{y}$: l'equazione diventa ora

$$\ddot{\mathbf{z}} - \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \ddot{z}_a - \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n.$$

In questa equazione le componenti di \mathbf{z} sono disaccoppiate e soddisfano ciascuna una equazione armonica con pulsazione ω_i , come anticipato nella tesi. Le coordinate originarie si ottengono invertendo la trasformazione, $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{y} = \mathbf{O}^\top \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \boldsymbol{\xi} \Rightarrow \boldsymbol{\xi} = \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \mathbf{O} \mathbf{z}$. \square

Come ultima osservazione, notiamo che l'energia meccanica del sistema approssimato ha una espressione piuttosto semplice. Seguendo le trasformazioni descritte nel teorema, infatti, essa vale

$$\hat{E} := \frac{1}{2} \langle \dot{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} \rangle = \sum_{a=1}^n \left(\frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \right)$$

ovvero si riscrive come la somma di energie meccaniche di singoli oscillatori di massa unitaria e pulsazione ω_a , disaccoppiati tra loro. In questa approssimazione, *ciascuno* di questi contributi si conserva separatamente, ovvero

$$\hat{E}_a := \frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \Rightarrow \frac{d\hat{E}_a}{dt} = (\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a) \dot{z}_a = 0,$$



FIGURA 4. Problema dei pendoli accoppiati (sinistra). Fenomeno dei battimenti per $0 < k \ll 1$ (destra).

il che vuol dire che se E_a è l'energia associata all'oscillatore a -esimo nell'istante iniziale, durante tutto il moto varrà

$$-1 \leq \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2E_a}} \leq 1.$$

Esempio 2.6 (Pendoli accoppiati) — Consideriamo due pendoli di uguale lunghezza e massa, tali per cui, in opportune unità, $m = g = \ell = 1$. Supponiamo che essi siano uniti da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Essi sono attaccati allo stesso punto, vincolati a oscillare in un piano verticale passante per il punto a cui sono agganciati. Siano q_1 e q_2 gli angoli che i due pendoli descrivono rispetto alla verticale, come in Fig. 4. L'energia cinetica del sistema è

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

mentre quella potenziale è

$$V(\mathbf{q}) = -\cos q_1 - \cos q_2 + \frac{k}{2}((\cos q_1 - \cos q_2)^2 + (\sin q_2 - \sin q_1)^2).$$

Si vede facilmente che $q_1 = q_2 = 0$ è di equilibrio *stabile*. Possiamo quindi studiare le piccole oscillazioni attorno a questa configurazione (per cui, nella notazione sopra, qui $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{q} - \mathbf{0} = \mathbf{q}$). In approssimazione di piccole oscillazioni e trascurando costanti additive irrilevanti,

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} \rangle, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica \mathbf{A} in questo problema è già diagonale, per cui nella notazione del teorema $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}$, e possiamo semplicemente fare un cambio di base che diagonalizzi $\hat{\mathbf{V}}$: troviamo in particolare che

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto detto sopra, possiamo quindi introdurre una nuova variabile

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

che soddisfa le equazioni

$$\ddot{z}_1 - z_1 = 0, \quad \ddot{z}_2 - \omega^2 z_2 = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$\omega = \sqrt{1+2k}.$$

La soluzione di queste equazioni dipenderà dalle condizioni iniziali date.

Come anticipato, il moto nel piano (z_1, z_2) è circoscritto al rettangolo individuato dalle relazioni $z_1^2 \leq 2\hat{E}_1$ e $\omega^2 z_2^2 \leq 2\hat{E}_2$. In questo rettangolo, la traiettoria del sistema è individuata da una curva bidimensionale $\boldsymbol{\gamma}(t) = (z_1(t), z_2(t))$ che produce una cosiddetta *figura di Lissajous*, tipicamente osservata negli oscillografi. Se $\omega = 1$ la figura è una ellisse. Tra le curve con $\omega = n$ vi sono dei polinomi, detto di *Chebyshev*, di interesse indipendente.

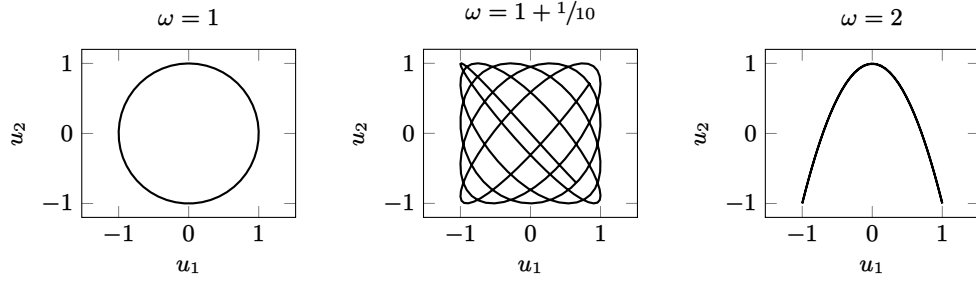


FIGURA 5. Esempi di figure Lissajous per diversi valori di ω . Sono plottate le variabili riscalate $u_a := \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2E_a}}$.

Vediamo ora alcuni speciali soluzioni.

Oscillazioni in fase: Siano q_0, v_0 due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = q_0, \\ q_2(0) = q_0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = \sqrt{2}q_0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \sqrt{2}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \sqrt{2}q_0 \cos t + \frac{\sqrt{2}v_0}{\omega} \sin t, \\ z_2(t) = 0. \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per z_2 implica che per ogni t si ha $q_1 = q_2$, ovvero i due pendoli oscillano *in fase* con frequenza $\omega_1 = 1$.

Oscillazioni in opposizione di fase: Siano q_0, v_0 due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = -q_0, \\ q_2(0) = q_0, \\ \dot{q}_1(0) = -v_0, \\ \dot{q}_2(0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = \sqrt{2}q_0, \\ \dot{z}_1(0) = 0, \\ \dot{z}_2(0) = \sqrt{2}v_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = 0, \\ z_2(t) = \sqrt{2}q_0 \cos(\omega t) + \sqrt{2}v_0 \sin(\omega t). \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per z_1 implica che per ogni t si ha $q_1 = -q_2$, ovvero i due pendoli oscillano *in opposizione di fase* con frequenza $\omega = \sqrt{1+2k} > 1$.

Trasferimento di energia: Sia v_0 dato e consideriamo infine le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = 0, \\ q_2(0) = 0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin t \\ z_2(t) = -\frac{v_0}{\omega\sqrt{2}} \sin \omega t. \end{cases}$$

Ciò significa che, tornando alle coordinate q_1 e q_2 ,

$$q_1(t) = \frac{v_0}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad q_2(t) = \frac{v_0}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Se $0 < k \ll 1$, $\omega^{-1} = 1 - o(k)$ e si verificano dei *battimenti*, come abbiamo già visto: questo significa che periodicamente il moto di un pendolo si smorza completamente e tutta l'energia è trasferita nell'altro.