

INTRODUZIONE ALLA  
**MECCANICA LAGRANGIANA**  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

— 8 GENNAIO 2026 —

GABRIELE SICURO



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

PREMESSA. Si raccomandano i seguenti volumi.

V. I. ARNOLD, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 1974.

A. FASANO, S. MARMI, *Meccanica analitica*, Bollati Boringhieri, 2002.

I seguenti possono essere utili per la consultazione complementare.

L. D. LANDAU, *Fisica teorica I. Meccanica*, Editori Riuniti, 1976.

Meriti delle note da darsi alle fonti, errori da assegnarsi all'estensore.

## Indice

Capitolo 1. Richiami di meccanica newtoniana	1
1. Spaziotempo galileiano	1
2. Postulati della meccanica	8
3. Cambi di riferimento	15
Capitolo 2. Meccanica lagrangiana	23
1. Le equazioni di Lagrange	23
2. Il moto unidimensionale	34
3. Equilibrio e spazio delle fasi in sistemi autonomi	38
4. Piccole oscillazioni	45
5. Il moto in un campo centrale	51
Capitolo 3. Formulazione variazionale	61
1. Problemi variazionali	61
2. Princípio di Hamilton	63
3. Teorema di Noether e leggi di conservazione	65
Capitolo 4. Meccanica del corpo rigido	71
1. Cinematica del moto rigido	71
2. Aspetti dinamici del moto rigido	75
Appendice A. Richiami matematici	89
1. Richiami sulle curve in $\mathbb{R}^n$	89



## CAPITOLO 1

### Richiami di meccanica newtoniana

Non l'ho mai visto concedersi svaghi o passatempi, né cavalcate per prendere aria, né passeggiate, né bowling, né alcun altro tipo di esercizio; riteneva tempo perso ogni ora che non fosse spesa per i suoi studi, ai quali si dedicava con tale costanza da lasciare raramente la sua stanza, se non durante i periodi di lezione, quando teneva lezioni nelle scuole in qualità di Professore Lucasiano. A queste lezioni partecipavano così poche persone, e ancor meno lo comprendevano, che spesso, per mancanza di uditori, sembrava quasi che leggesse alle pareti... Era così concentrato, così serio nei suoi studi, che mangiava pochissimo, anzi, spesso dimenticava del tutto di mangiare, tanto che entrando nella sua stanza trovavo il suo pasto intatto; quando glielo facevo notare, rispondeva: "Davvero?" e poi, avvicinandosi al tavolo, mangiava un paio di bocconi in piedi, e non ricordo di averlo mai visto sedersi a tavola da solo... Andava a letto molto raramente prima delle due o tre del mattino, a volte non prima delle cinque o sei...

---

Humphrey Newton, assistente di Isaac Newton

#### 1. Spaziotempo galileiano

**1.1. Spazi affini.** La struttura matematica sottesa a gran parte dell'esposizione che verrà data sarà quella di spazio affine euclideo finito-dimensionale, ovvero uno spazio affine su uno spazio vettoriale reale  $V$  dotato di prodotto scalare e di dimensione  $n$  finita. Prima di introdurre i concetti fondamentali, presentiamo perciò un brevissimo richiamo del concetto di spazio affine euclideo, che verrà più propriamente discusso e analizzato nei corsi di Geometria.

**DEFINIZIONE 1.1** (Spazio affine). Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ . Uno spazio affine  $A$  su  $V$  è un insieme non vuoto i cui elementi si dicono *punti*, e dotato di una applicazione

$$\vec{\bullet}: A \times A \rightarrow V$$

che associa ad ogni coppia ordinata  $(P, Q) \in A$  un vettore di  $V$ , che indichiamo con  $\overrightarrow{PQ}$ . Tale applicazione si dice definire una *struttura di spazio affine* su  $A$ . Il vettore  $\overrightarrow{PQ}$  si dice avere  $P$  come *punto iniziale*, o *di applicazione*, e  $Q$  come *punto finale*, in modo che valgano le seguenti due proprietà:

- P1:  $\forall P \in A$  e per ogni  $v \in V$ , esiste unico un punto  $Q \in A$  tale che  $\overrightarrow{PQ} = v$ ;
- P2:  $\forall P, Q, R \in A$  vale

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  lo spazio affine si dice *reale*. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  lo spazio affine si dice *complesso*.

La proprietà P2 implica, scegliendo  $P = Q = R$ , che  $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$ , vettore nullo di  $V$ , per ogni  $P \in A$  e, scegliendo  $P = R$ , che  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$  per ogni coppia  $P, Q \in A$ .

Se la dimensione di  $V$  è finita e in particolare  $\dim(V) = n$ , diremo che  $A$  ha dimensione  $n$ , scrivendo  $\dim(A) = n$ . In questo modulo considereremo solo spazi affini di dimensione finita.

**Esempio 1.1** (Spazi affini numerici) — Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ : l'operazione  $\overrightarrow{vu} := u - v$  permette di definire su  $V$  una struttura di spazio affine su se stesso, come si può verificare direttamente. Se in particolare  $V \equiv \mathbb{K}^n$ , lo spazio affine corrispondente si chiama *spazio affine numerico su  $\mathbb{K}$*  e si denota  $A^n(\mathbb{K})$ .

La proprietà P1 implica che, scegliendo uno speciale punto  $O \in A$ , si può costruire una corrispondenza biunivoca fra  $A$  e  $V$ : basta infatti associare  $P \in A \mapsto \overrightarrow{OP} \in V$ .

**DEFINIZIONE 1.2** (Sistema di coordinate affini). Sia  $A$  spazio affine su  $V$  di dimensione  $n$ . Un *sistema di coordinate affini* è dato da un punto  $O \in A$ , detto *origine*, e una base  $\{\hat{e}_k\}_{k=1}^n \subset V$  dello spazio vettoriale. Indicheremo questo sistema di coordinate con  $O\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n$ .

Dato un sistema di coordinate  $O\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n$ , possiamo associare biunivocamente ad ogni punto  $P \in A$  le sue *coordinate affini* in  $(v_k)_{k=1}^n \in \mathbb{K}^n$ , potendo univocamente scrivere

$$P \mapsto \overrightarrow{OP} = \sum_{k=1}^n v_k \hat{e}_k.$$

**DEFINIZIONE 1.3** (Sottospazio affine). Sia  $A$  spazio affine  $n$ -dimensionale sul  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $V$ . Sia  $Q \in A$  e  $W$  sottospazio vettoriale di  $V$ . Il sottoinsieme

$$\mathbb{S}(Q, W) := \{P \in A : \overrightarrow{QP} \in W\}$$

è detto sottospazio affine di  $A$  per  $Q$  parallelo a  $W$ . Si dice che  $W$  è la *giacitura* di  $\mathbb{S}$  e si definisce  $\dim(\mathbb{S}) := \dim(W)$ .

Dato un sottospazio affine  $\mathbb{S}(Q, W)$  di uno spazio affine  $A$  di dimensione  $n$ , si dice che  $\mathbb{S}(Q, W)$  è una retta se  $\dim(\mathbb{S}) = 1$ , è un piano se  $\dim(\mathbb{S}) = 2$ , un iperpiano se  $\dim(\mathbb{S}) > 2$ . Un sottospazio affine  $\mathbb{S}(Q, W)$  ha la struttura di spazio affine sulla propria giacitura indotta dalla stessa applicazione  $\overrightarrow{\bullet}$  definita su  $A$ .

Concludiamo questa prima parte con la seguente

**DEFINIZIONE 1.4** (Isomorfismo). Siano  $V$  e  $V'$  due  $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali di dimensione  $n$ , sia  $A$  spazio affine su  $V$  e  $A'$  spazio affine su  $V'$ . Un *isomorfismo affine*  $\Phi$  è una applicazione biunivoca

$$\Phi: A \rightarrow A'$$

tale che esiste un isomorfismo  $L: V \rightarrow V'$  che permette di scrivere, per ogni  $P, Q \in A$ ,

$$\overrightarrow{\Phi(P)\Phi(Q)} = L(\overrightarrow{PQ}).$$

Se un tale isomorfismo tra  $A$  e  $A'$  esiste, i due spazi affini si dicono *isomorfi*. Un isomorfismo  $\Phi: A \rightarrow A'$  è detto *affinità* di  $A$  e in questo caso  $L: V \rightarrow V'$  è l'automorfismo associato a  $\Phi$ .

La mappa  $\Phi_e: A \rightarrow A^n(\mathbb{K})$  che associa ad un punto  $P$  le sue coordinate affini secondo un certo sistema di coordinate affini  $O\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n$  è un importante esempio di isomorfismo: ogni spazio affine di dimensione  $n$  su un  $\mathbb{K}$ -campo vettoriale è perciò isomorfo a  $A^n(\mathbb{K})$ .

**Esercizio 1.1** — Mostrare che  $\Phi_e$  è effettivamente un isomorfismo.

**Esempio 1.2** (Affinità su  $A^n(\mathbb{K})$ ) — Sia  $A^n(\mathbb{K})$  uno spazio affine numerico, e sia  $\Phi: A^n(\mathbb{K}) \rightarrow A^n(\mathbb{K})$  una affinità associata all'isomorfismo  $L: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Sia  $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{c}$ . Allora  $\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{c} = \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{0}) =$

$\overrightarrow{\Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{0})} = \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{0})$ . Se  $\mathbf{L} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  è la matrice che rappresenta  $\mathbf{L}$  nella base canonica, questo significa che  $\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{c} = \mathbf{L}\mathbf{x}$ , ovvero l'affinità ha la forma

$$(1.1) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

1.1.1. *Spazi affini euclidei.* Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e supponiamo ora che lo spazio vettoriale  $V$  sia euclideo, ovvero dotato di una operazione di prodotto interno, che indicheremo con

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

simmetrica definita positiva. In questo caso si dice che uno spazio affine su  $V$  è anch'esso *euclideo*. La struttura euclidea in  $V$  permette di introdurre una *base ortonormale* come un set di  $n$  vettori  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^n$  tale che  $V = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_k$  e  $\langle \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \delta_{ij}$  per  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Un sistema di coordinate nella forma  $O\hat{\mathbf{i}}_1 \dots \hat{\mathbf{i}}_n$ , ovvero costruito con una base ortonormale, si dice *sistema di riferimento cartesiano*.

Il prodotto interno induce una norma sullo spazio  $V$ , di modo che detto  $\mathbf{v} \in V$  definiamo la sua norma  $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ . Grazie a questa struttura, possiamo introdurre il concetto di *distanza*  $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$  tra due punti di  $A$  come

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}.$$

PROPOSIZIONE 1.1. *La distanza  $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$  introdotta gode delle seguenti proprietà:*

- $\forall P, Q \in A$ ,  $d(P, Q) \geq 0$  e  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ ;
- $\forall P, Q \in A$ ,  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ;
- $\forall P, Q, R \in A$ ,  $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ .

Le proprietà elencate sono quelle caratterizzanti degli *spazi metrici*, ovvero spazi dotati di una operazione binaria detta appunto distanza che soddisfa precisamente le proprietà elencate nella precedente Proposizione.

**Esempio 1.3** (Prodotto scalare canonico) — In uno spazio affine numerico reale  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ , il prodotto interno, o *prodotto scalare canonico*, è tale che se  $\mathbf{v} = (v_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u} = (u_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{v}^\top \mathbf{u} = \sum_{k=1}^n v_k u_k \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}.$$

1.1.2. *Prodotto vettoriale.* Concludiamo ricordando che se uno spazio vettoriale  $V$  ha dimensione 3, possiamo definire l'operazione di *prodotto vettoriale*. Scegliamo anzitutto una base ortonormale *ordinata*  $\{\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3\}$ . Definiamo il *prodotto vettoriale* tra due elementi generici di questa base come

$$\hat{\mathbf{i}}_i \wedge \hat{\mathbf{i}}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{i}}_k.$$

Qui  $\epsilon_{ijk}$  è il *simbolo di Levi-Civita*, e vale

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (ijk) \text{ è permutazione pari di (123)} \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ è permutazione dispari di (123)} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esplicitando, questo significa che  $\hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}}_2$ ,  $\hat{\mathbf{i}}_1 = \hat{\mathbf{i}}_2 \wedge \hat{\mathbf{i}}_3$ ,  $\hat{\mathbf{i}}_2 = \hat{\mathbf{i}}_3 \wedge \hat{\mathbf{i}}_1$ . Con questa scelta, la base si dice *positivamente orientata*. In questo modo, dati due vettori  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{\mathbf{i}}_i$  e  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \hat{\mathbf{i}}_i$ , il loro *prodotto vettoriale* è

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \sum_{ij} v_i u_j \hat{\mathbf{i}}_i \wedge \hat{\mathbf{i}}_j = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} v_i u_j \hat{\mathbf{i}}_k = (v_2 u_3 - u_2 v_3) \hat{\mathbf{i}}_1 + (v_3 u_1 - u_3 v_1) \hat{\mathbf{i}}_2 + (v_1 u_2 - u_1 v_2) \hat{\mathbf{i}}_3.$$

Il simbolo di Levi-Civita appare, in maniera parzialmente nascosta, anche in alcune ben note quantità dell'algebra lineare. Per esempio, sia data una matrice quadrata  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Vale la seguente identità, che lasciamo da dimostrare come esercizio

$$\sum_{ab} \epsilon_{abc} A_{ia} A_{jb} A_{kc} = \epsilon_{ijk} \det \mathbf{A}.$$

Se ora disponiamo di una seconda base ortonormale ordinata, sia essa  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ , sia  $\mathbf{R} \in \mathrm{O}(3)$  la matrice che permette il cambio di base tra le due, ovvero

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{a=1}^3 \hat{\mathbf{i}}_a R_{ai} \iff \hat{\mathbf{i}}_a = \sum_{k=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_k R_{ak}.$$

Allora

$$\hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{ab} R_{ai} R_{bj} \hat{\mathbf{i}}_a \wedge \hat{\mathbf{i}}_b = \sum_{abc} \epsilon_{abc} R_{ai} R_{bj} \hat{\mathbf{i}}_c = \sum_{abck} \epsilon_{abc} R_{ai} R_{bj} R_{ck} \hat{\mathbf{e}}_k = \det \mathbf{R} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k.$$

ovvero la nuova base rispetta la stessa regola del prodotto vettoriale della vecchia base *purché*  $\det \mathbf{R} = 1$ . Si dice in questo caso che le due basi hanno la *stessa orientazione*, ovvero sono *concordi*. Se  $\det \mathbf{R} = -1$  si dice che le basi sono *discordi*. Le basi possono essere divise in due classi di equivalenza corrispondenti alla stessa orientazione.

**1.2. Spaziotempo galileiano.** Ci sono vari modi di introdurre lo spaziotempo galileiano in cui si sviluppa la meccanica classica: si tratta di una struttura matematica diversa da quella utilizzata dalla fisica contemporanea, ma tuttavia non banale. Una maniera di procedere è quella di ricorrere al concetto di spazio affine.

**DEFINIZIONE 1.5** (Spaziotempo galileiano). Uno spaziotempo galileiano  $\mathcal{G} = (\mathbb{A}, \mathbb{V}, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  è una collezione di oggetti matematici costituita da

- uno spazio affine reale quadridimensionale  $\mathbb{A}$  sullo spazio vettoriale reale  $\mathbb{V}$ ;
- un funzionale lineare non-nullo  $\tau: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  che chiamiamo *funzione tempo*;
- un prodotto scalare  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  su  $\mathrm{Ker}(\tau)$ .

I punti di  $\mathbb{A}$  sono detti *eventi*: se  $E_1, E_2 \in \mathbb{A}$ , indichiamo come solito  $\overrightarrow{E_1 E_2} \in \mathbb{V}$  il vettore associato ad essi dalla struttura affine. La quantità  $\tau(\overrightarrow{E_1 E_2}) \in \mathbb{R}$  fornisce un numero reale che identifichiamo come l'*intervallo di tempo*<sup>1</sup> tra gli eventi  $E_1$  ed  $E_2$ . Due eventi  $E_1$  ed  $E_2$  sono in particolare *simultanei* se  $\tau(\overrightarrow{E_1 E_2}) = 0$ . Essendo  $\tau$  una applicazione lineare non nulla, questo nucleo è un sottospazio vettoriale di dimensione 3, essendo  $\dim \mathrm{Ker}(\tau) = \dim \mathbb{V} - \dim \mathbb{R} = 3$  per il teorema del rango. Inoltre per definizione  $\mathrm{Ker}(\tau)$  è dotato di struttura euclidea con prodotto scalare  $\langle \bullet, \bullet \rangle$ . Se  $E_1$  ed  $E_2$  sono simultanei, possiamo definire la *distanza*

$$d(E_1, E_2) = \|\overrightarrow{E_1 E_2}\| := \sqrt{\langle \overrightarrow{E_1 E_2}, \overrightarrow{E_1 E_2} \rangle}.$$

Si noti un fatto molto importante: la costruzione è tale che *non ha senso* parlare di distanza tra due eventi non simultanei.

---

<sup>1</sup>Nella scelta di  $\tau$  c'è, implicita, una arbitraria scelta della *scala* di misura del tempo, che qui non investighiamo, ma che non cambia la natura di  $\mathrm{Ker}(\tau)$ .

**Esempio 1.4** (Spaziotempo galileiano di coordinate) — Un esempio di spaziotempo galileiano è

$$\mathcal{G} = (\mathbb{A}^4(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4, \tau_0, \langle \bullet, \bullet \rangle_0),$$

costruito come segue. Sia  $(t, \mathbf{x})^\top \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$  un punto-evento, dove  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3$ . Detto  $E = (t, \mathbf{x})^\top$  e  $E' = (t', \mathbf{x}')^\top$ , abbiamo visto che

$$(E, E') \mapsto \overrightarrow{EE'} = \begin{pmatrix} t' - t \\ \mathbf{x}' - \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

In questo spaziotempo, l'applicazione tempo  $\tau_0: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  agisce (per definizione) come una proiezione, isolando la prima componente del vettore in  $\mathbb{R}^4$  prodotto, per cui

$$\tau_0(\overrightarrow{EE'}) = t' - t,$$

mentre il prodotto scalare su  $\text{Ker}(\tau)$  è (di nuovo, per definizione) il prodotto scalare canonico in  $\mathbb{R}^3$ : dato  $E = (t, \mathbf{x})^\top \in \mathbb{R}^4$ ,  $E' = (t', \mathbf{x}')^\top \in [e]$  se e solo se  $t = t'$ , e la distanza tra questi eventi è

$$d(E, E') := \|\overrightarrow{EE'}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x'_i - x_i)^2}.$$

Questo spazio galileiano “canonico” è anche detto *spaziotempo galileiano di coordinate*.

**1.2.1. Linee universo.** In questo spaziotempo galileiano vivono gli oggetti fondamentali della meccanica, i *punti materiali*. Quello di punto materiale è un concetto primitivo e si può pensare ad esso come un corpo di cui si possono trascurare le dimensioni spaziali che vive nello spaziotempo galileiano. Matematicamente, un punto materiale  $P$  corrisponde ad una *linea universo* in  $\mathbb{A}$ , che indichiamo con lo stesso simbolo ed è definita come

$$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}.$$

Assumeremo che le linee universo siano sempre *continue* rispetto al loro parametro, ovvero che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \overrightarrow{P(t_0)P(t)} = \mathbf{0} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che nelle assunzioni della nostra costruzione non abbiamo dotato  $\mathbb{V}$  di una topologia: tuttavia, essendo  $\mathbb{V}$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, è noto dalla Geometria che *tutte le norme introdotte su di esso sono equivalenti*, per cui è possibile immaginare  $\mathbb{V}$  dotato di una qualsivoglia norma e definire rispetto ad essa una topologia e quindi il concetto di limite. Vogliamo infine che la linea temporale sia parametrizzata proprio da ciò che chiamiamo tempo, ovvero che se sono dati  $P(t+h)$  e  $P(t)$  lungo la linea universo, essi distano un tempo  $h$ : ciò significa che richiediamo che  $\tau(\overrightarrow{P(t)P(t+h)}) = h \quad \forall t, h$ , o in altre parole

$$\tau(\dot{P}(t)) = 1 \quad \forall t, \quad \text{dove } \dot{P}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} \in \mathbb{V}.$$

**1.2.2. Isomorfismi galileiani e riferimenti.** Un isomorfismo tra *spaziotempi galileiani* è qualcosa di più sofisticato di un semplice isomorfismo tra spazi affini, dato che richiede di preservare la struttura galileiana.

**DEFINIZIONE 1.6** (Isomorfismo galileiano). Siano  $\mathcal{G} = (\mathbb{A}, \mathbb{V}, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  e  $\mathcal{G}' = (\mathbb{A}', \mathbb{V}', \tau', \langle \bullet, \bullet \rangle)$  due spaziotempi galileiani. Un isomorfismo tra essi è un isomorfismo affine  $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  con associato isomorfismo lineare  $\mathbf{L}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$  tale che valgono le seguenti proprietà:

- $\mathbf{L}$  preserva gli intervalli temporali, ovvero

$$\tau' \circ \mathbf{L} = \tau$$

(e quindi  $\mathbf{L}(\text{Ker}(\tau)) = \text{Ker}(\tau')$ );

- $\mathbf{L}$  preserva il prodotto interno, ovvero

$$(\mathbf{L}(\mathbf{v}), \mathbf{L}(\mathbf{w})) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Ker}(\tau).$$

Siamo in particolare interessati a isomorfismi galileiani tra lo spaziotempo “fisico”, che supponiamo avere struttura galileiana,  $\mathcal{G} = (\mathbb{A}, \mathbb{V}, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ , e lo spaziotempo galileiano di coordinate che abbiamo introdotto sopra, sia  $\mathcal{G}' = (\mathbb{A}^4(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4, \tau_0, \langle \bullet, \bullet \rangle_0)$  (in cui  $\tau_0$  è la proiezione sulla prima componente di un vettore in  $\mathbb{R}^4$  e  $\langle \bullet, \bullet \rangle_0$  è il prodotto scalare canonico), che ci permette di operare con gli strumenti dell’analisi. Questo isomorfismo può essere costruito scegliendo un *sistema di riferimento*, ovvero un *evento origine*  $O$  e una base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3\}$  in  $\text{Ker}(\tau)$  integrata da un vettore  $\mathbf{j}$  tale che  $\tau(\mathbf{j}) = 1$  (quindi non in  $\text{Ker}(\tau)$ ) in modo che  $\{\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3, \mathbf{j}\}$  sia una base di  $\mathbb{V}$ , indicizzata in modo che  $\hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}}_2$ . La scelta di un evento origine  $O$  permette di definire le *fette temporali*

$$\Sigma_t := \{E \in \mathbb{A} : \tau(\overrightarrow{OE}) = t\}$$

che partizionano  $\mathbb{A}$ . Per via della Definizione 1.3,  $\Sigma_t$  è un sottospazio affine di dimensione 3 con giacitura  $\text{Ker}(\tau)$ : essendo inoltre questo spazio vettoriale dotato di prodotto interno definito positivo,  $\Sigma_t$  è più precisamente *uno spazio euclideo tridimensionale*. All’evento  $O$  possiamo associare una *linea universo canonica*  $O(t)$  come

$$O(t) = O + t\mathbf{j},$$

in modo che  $\tau(\overrightarrow{OO(t)}) = t$ , e che la proiezione di  $\overrightarrow{OO(t)}$  su  $\text{Ker}(\tau)$  sia sempre il vettore nullo, ovvero in simboli

$$\text{Proj}_{\text{Ker}(\tau)}(\overrightarrow{OO(t)}) = \mathbf{0}.$$

Indicheremo questo sistema di riferimento con  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Ogni evento  $E \in \mathbb{A}$  è tale che ad esso sono associati un tempo  $t$  e una posizione  $\mathbf{x}_E$ ,

$$t = \tau(\overrightarrow{OE}), \quad \mathbf{x}_E := \text{Proj}_{\text{Ker}(\tau)}(\overrightarrow{OE}) = \sum_{k=1}^3 x_k \hat{\mathbf{i}}_k,$$

dove  $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1}^3 \in \mathbb{R}^3$  sono le coordinate cartesiane dell’evento. In questo modo, all’evento  $E$  si associa

$$\Phi(E) = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R}).$$

Detto  $E' \in \mathbb{A}$  un secondo evento tale che  $\Phi(E') = \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ , questo isomorfismo è associato all’applicazione

$$\mathbf{L}(\overrightarrow{EE'}) = \begin{pmatrix} t' - t \\ \mathbf{x}' - \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

che opera come desiderato (si provi a dimostrarlo). L’isomorfismo  $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$  introduce perciò un *riferimento di coordinate*, mappando lo spaziotempo galileiano generico in uno spaziotempo di coordinate. Le linee universo possono naturalmente anch’esse essere espresse in questo sistema di riferimento: una linea universo  $P$ , parametrizzata in modo che  $\tau(\overrightarrow{OP(0)}) = 0$ , viene associata ad una *traiettoria*

$$\mathbf{x}_P(t) = \text{Proj}_{\text{Ker}(\tau)}(\overrightarrow{OP(t)}) = \overrightarrow{O(t)P(t)} = \sum_{k=1}^3 x_k(t) \hat{\mathbf{i}}_k.$$

Si definiscono, in corrispondenza, due quantità di interesse, ovvero la *velocità* del punto materiale  $P$ ,

$$\dot{\mathbf{x}}_P(t) := \sum_{k=1}^3 \frac{d x_k(t)}{dt} \hat{\mathbf{i}}_k,$$

e l'*accelerazione*

$$\ddot{\mathbf{x}}_P(t) := \sum_{k=1}^3 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} \hat{\mathbf{i}}_k.$$

Formalmente,  $\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P, \ddot{\mathbf{x}}_P \in \text{Ker}(\tau)$ : questi oggetti *non* dipendono dalla specifica base  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$  scelta in  $\text{Ker}(\tau)$ , ma le loro coordinate naturalmente sì.

Anche assumendo che esista un unico spaziotempo fisico (e che abbia la struttura che ipotizziamo sopra) la scelta di un riferimento di coordinate non è univoca: dati due isomorfismi  $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$  e  $\hat{\Phi}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ , la composizione

$$\Psi := \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}: \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$$

deve anche essa comportarsi da isomorfismo galileiano. Pittorialmente

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A} & \\ & \swarrow \Phi & \searrow \hat{\Phi} \\ \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\Psi := \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}} & \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \end{array}$$

Vediamo più in dettaglio cosa questo comporta. Siano dati due eventi  $E_1$  ed  $E_2$  di  $\mathbb{A}$ , che possiamo immaginare come lo “spaziotempo fisico”. Indichiamo  $\Phi(E_i) = (t_i, \mathbf{x}_i)^\top$  e  $\hat{\Phi}(E_i) = (\hat{t}_i, \hat{\mathbf{x}}_i)^\top$ ,  $i = 1, 2$ , le corrispondenti immagini in  $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$  secondo due riferimenti di coordinate. La mappa  $\Psi = \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}$  deve essere una trasformazione affine, quindi genericamente nella forma in Eq. (1.1), che scriviamo

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + t_0 \\ \mathbf{v}t + \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}$$

per due scalari  $a, t_0 \in \mathbb{R}$ , tre vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  e una matrice  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  di qualche tipo. Inoltre, essa stessa deve essere un isomorfismo galileiano, dato che permette di passare da uno spaziotempo galileiano ad un altro, e dunque, perché la struttura galileiana sia preservata, dovrà valere<sup>2</sup>

$$t_2 - t_1 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1 = a(t_2 - t_1) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle, \quad \text{se } \tau(\overrightarrow{E_1 E_2}) = 0 \quad \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1\| = \|\mathbf{R}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|.$$

Le uguaglianze sono realizzate per qualsivoglia coppia di eventi se  $a = 1$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{R} \in O(3)$ , e per qualsivoglia scelta di  $t_0$  e  $\mathbf{x}_0$ , ovvero se la trasformazione  $\Psi$  ha la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, t_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{R} \in O(3).$$

In altre parole,  $\Psi$  è esprimibile come una composizione delle seguenti trasformazioni:

*Rotazione della componente spaziale*:  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{Rx})$  per qualche  $\mathbf{R} \in O(3)$ .

*Boost galileiano*:  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{x} + \mathbf{vt})$  per qualche  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ .

*Traslazione dell'origine*:  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t + t_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$  per un dato  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

Si noti che la rotazione della componente spaziale avviene per mezzo di una matrice ortogonale, per cui  $\det \mathbf{R} = \pm 1$ . Si tratta di una matrice che trasforma vettori in vettori mantenendone le lunghezze, ma con la possibilità di *invertirne l'orientamento*: tale inversione avviene se  $\det \mathbf{R} = -1$ . Come si verifica facilmente l'insieme di trasformazioni del tipo sopra è un *gruppo*, detto *di Galilei*. Da un computo del numero di parametri necessari per specificare ciascuna delle trasformazioni elencate, risulta che sono in generale necessari 10 parametri, più eventualmente una operazione discreta di *parità*, ovvero di riflessione di un asse:

<sup>2</sup>Nel seguito faremo riferimento ad una rappresentazione nello spaziotempo di coordinate, e ometteremo il pedice nell'espressione  $\langle \bullet, \bullet \rangle_0$  scrivendo semplicemente  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{v}^\top \mathbf{u}$  per il prodotto canonico tra due vettori di  $\mathbb{R}^3$ . Similmente, utilizzeremo  $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^\top \mathbf{v}$ .

- 3 parametri per specificare una matrice in  $\text{SO}(3)$ , più una inversione se  $\mathbf{R} \in \text{O}(3) \setminus \text{SO}(3)$ ;
- 3 parametri per specificare  $\mathbf{v}$  in un *boost* galileiano;
- 1 + 3 parametri per specificare una traslazione dell'origine.

## 2. Postulati della meccanica

**2.1. Principî di Newton.** Un *fatto fisico* è che i punti materiali sono in grado di influenzare reciprocamente le loro linee universo: in altre parole, le linee universo di due punti saranno soggette a delle reciproche condizioni matematiche. Queste proprietà sono specificate dai principî, o postulati, della meccanica. Anzitutto, introduciamo il seguente postulato, anche detto di Galilei, che assume l'esistenza di una classe speciale di sistemi di riferimento.

**POSTULATO 2.1** (Primo postulato della meccanica). *Esiste uno speciale riferimento di coordinate, detto inerziale, nel quale l'accelerazione di un punto materiale isolato è nulla in ogni istante, qualunque sia il suo stato cinematico, i.e., la sua posizione e la sua velocità.*

Il postulato si basa sul concetto impreciso di “isolato”, che possiamo qualitativamente immaginare come equivalente a “infinitamente distante da ogni altro sistema con cui il punto materiale possa interagire”. Se esiste un riferimento inerziale, ne esistono infiniti altri: il gruppo di Galilei ha infatti la proprietà di lasciare invariate le accelerazioni delle linee di universo, e si può utilizzare per trasformare un dato riferimento inerziale in un nuovo riferimento inerziale in cui la proprietà continua a valere.

I successivi postulati fanno riferimento alle proprietà meccaniche di *coppie isolate* di punti materiali studiati in riferimenti di coordinate inerziali.

**POSTULATO 2.2** (Secondo postulato della meccanica). *È possibile associare a ogni punto materiale  $P$  una quantità scalare positiva  $m$ , detta massa, indipendente dallo stato cinematico del punto, in modo che, considerato un sistema isolato di due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  ed  $m_2$  rispettivamente, le loro corrispondenti accelerazioni  $\ddot{\mathbf{x}}_1$  e  $\ddot{\mathbf{x}}_2$  in un riferimento inerziale soddisfino*

$$m_1 \|\ddot{\mathbf{x}}_1\| = m_2 \|\ddot{\mathbf{x}}_2\|.$$

Si noti che le masse sono definite a meno di un fattore arbitrario; ovvero, immaginando di riscalare  $m \rightarrow \alpha m$ , con  $\alpha > 0$ , tutte le masse di tutti i punti materiali nello spaziotempo, il contenuto del postulato rimane invariato: questa invarianza esprime l'arbitrarietà nella scelta della *scala* nella misura della massa. Il postulato suggerisce la definizione della seguente quantità.

**DEFINIZIONE 2.1** (Forza). Dato un punto materiale  $P$  di massa  $m$  che evolve con traiettoria  $\mathbf{x}$ , si dice che su di esso è applicata la forza

$$\mathbf{F} := m \ddot{\mathbf{x}}.$$

In molti casi, come vedremo, informazioni sulla forma funzionale di  $\mathbf{F}$  (dovute per esempio all'esperienza sperimentale) renderanno a tutti gli effetti la definizione data una equazione differenziale per la dinamica del punto materiale.

Il terzo postulato ci informa sulle direzioni delle accelerazioni in un sistema isolato di due punti materiali.

**POSTULATO 2.3** (Terzo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  in posizioni  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  rispettivamente in un riferimento inerziale, le corrispondenti accelerazioni  $\ddot{\mathbf{x}}_1$  e  $\ddot{\mathbf{x}}_2$  hanno la direzione di  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  e versi tra loro opposti.*

I postulati dati finora sono ancora insufficienti per lo studio della meccanica, dato che riguardano sistemi isolati di al più due punti materiali. Il seguente postulato ausiliario permette di superare questa difficoltà e comporre gli effetti delle interazioni a due corpi finora considerate.

**POSTULATO 2.4** (Principio di sovrapposizione). *L'accelerazione prodotta su un punto materiale  $P$  di massa  $m$  dall'interazione con  $N$  punti materiali in un riferimento inerziale è la somma delle accelerazioni che verrebbero prodotte se  $P$  interagisse con ciascuno di essi separatamente in un sistema isolato a due corpi.*

**2.2. Determinismo di Newton.** Dato un sistema isolato  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  di  $N$  punti materiali, il tipo di dipendenza funzionale in  $\mathbf{F}_k$ , forza applicata sul punto  $P_k$ , dalle traiettorie  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  di tutti i punti, è dato implicitamente dal seguente

**POSTULATO 2.5** (Principio di determinismo di Newton). *Lo stato cinematico di un sistema isolato, ovvero la posizione e le velocità di tutti i punti materiali che lo compongono, identifica univocamente il suo moto.*

Questo postulato ha infatti una conseguenza importante: dovendo posizioni e velocità essere sufficienti all'integrazione delle equazioni del moto, la dipendenza funzionale della forza  $\mathbf{F}_k$  agente su un punto materiale  $P_k$  di traiettoria  $\mathbf{x}_k$  in un sistema isolato  $\mathcal{S}$  di  $N$  punti può essere solo del tipo  $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , dove con  $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_k)_{k=1}^N$  abbiamo indicato la concatenazione delle posizioni di tutti i punti materiali del sistema. Le quantità  $\mathbf{F}_k$  non possono manifestare una dipendenza funzionale da derivate di ordine superiore al primo, diversamente l'evoluzione del sistema non sarebbe univocamente determinata, mancando le garanzie offerte (sotto opportune condizioni di regolarità dell'espressione della forza) dal teorema di Cauchy. Incidentalmente, ha senso chiedersi perché escludiamo la dipendenza funzionale da derivate di ordine secondo, ovvero perché escludiamo il caso in cui  $\mathbf{F}_k$  dipenda in forma funzionale dalle accelerazioni  $\ddot{\mathbf{X}}$  dei punti del sistema (dipendenza pure compatibile in linea di principio con il teorema di Cauchy). La ragione è che una dipendenza siffatta può portare a delle inconsistenze fisiche. Infatti, supponiamo per semplicità di avere un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , per cui, in presenza di un certo punto materiale  $P_0$ , vale la legge  $m\ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}_0)$  (abbiamo per questo specificato il pedice 0 per esprimere il fatto che la forza è il risultato dell'azione di  $P_0$  su  $P$ ). Dipendentemente dalla forma funzionale di  $\mathbf{F}_0$ , questa legge potrebbe *non* permettere di identificare  $\mathbf{x}_0$  univocamente nonostante sia dato lo stato cinematico in un certo istante (il teorema di Cauchy è formulato per equazioni differenziali *in forma normale*). Anche ignorando questo fatto, inconsistenze ulteriori possono emergere per via del principio di sovrapposizione: se l'interazione con un secondo punto materiale  $P_1$  produce la forza  $\mathbf{F}_1(t) = m\ddot{\mathbf{x}}_1$ , allora in presenza di entrambi i punti  $P_0$  e  $P_1$ , deve valere per  $P$  l'equazione  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}_1(t)$ . Per il principio di sovrapposizione,  $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1$ , ovvero

$$\mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{x}}_1) + \mathbf{F}_1(t) = m\ddot{\mathbf{x}}_0 + m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{F}_1(t)$$

dove nel secondo passaggio è stato usato  $m\ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}_0)$  e  $m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1(t)$ . Ne segue che abbiamo ottenuto  $\mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}_0)$ , dove evidentemente risulta che  $\mathbf{F}_0$  dipende da  $\dot{\mathbf{x}}_1$  (ovvero che l'interazione con  $P_0$  dipende da quella, arbitraria, con  $P_1$ ) il che non è fisico<sup>3</sup>.

**2.2.1. Una nota sulle forze posizionali.** Nel caso in cui su un punto materiale agisca una *forza posizionale*, ovvero una forza  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , l'equazione del moto ha una caratteristica invarianza sotto *traslazioni temporali* e *inversioni temporali*. Ovvero, l'equazione  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  rimane invariata se si effettua il cambio di variabile  $t \mapsto \tau \pm t$ . Come conseguenza, se abbiamo una soluzione  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  al problema di Cauchy (assunto ben posto)

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>Per ulteriori dettagli, si veda L. A. Pars, *A treatise on analytical mechanics* (1965).

allora  $\hat{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}(\tau \pm t)$  è la soluzione al problema di Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \pm \mathbf{v}_0. \end{cases}$$

**2.3. Invarianza galileiana.** Abbiamo già detto che una trasformazione galileiana trasforma un sistema inerziale in un altro sistema inerziale. Un fatto notevole è che il contenuto di tutti e tre i postulati è *invariante* sotto queste trasformazioni: se si assume quindi che i tre postulati catturino la fisica del nostro universo, da questo segue che *tutte le leggi della fisica devono essere invarianti sotto trasformazioni galileiane*, dato che devono in ultima analisi essere compatibili con i postulati del moto. È questo un principio formulato nel 1632 da Galilei<sup>4</sup>, ed assunto valido per quasi trecento anni durante tutto lo sviluppo della meccanica *classica*. Abbiamo visto che ogni trasformazione galileiana si può pensare come decomposta in tre trasformazioni più elementari.

- L'invarianza per traslazione dell'origine del riferimento quadridimensionale manifesta l'assunzione che spazio e tempo siano *omogenei*, ovvero che una qualunque legge fisica non può dipendere da posizioni o istanti di tempo particolari.
- L'invarianza dello spazio sotto rotazioni ne esprime l'*isotropia*, ovvero il fatto che non vi sono direzioni privilegiate.
- L'invarianza sotto *boosts* galileiani implica che *non è possibile, per mezzo di un esperimento fisico realizzato entro un riferimento inerziale, rilevare se il riferimento stesso è in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro riferimento inerziale*: ogni riferimento inerziale ha pari dignità.

L'ultimo punto porta alla negazione del concetto aristotelico di *spazio assoluto*: non è possibile *identificare* punti dello spazio in istanti diversi, dato che non abbiamo modo di seguire la posizione di un punto rispetto ad un riferimento assoluto, né ha senso farlo. È questa la ragione per cui lo spaziotempo non ammette la possibilità di parlare di distanza spaziale tra eventi riferiti a istanti diversi<sup>5</sup>.

Come il principio di determinismo di Newton, anche quello di invarianza galileiana ha conseguenze sulla forma funzionale delle forze. Supponiamo di avere un sistema isolato di  $N$  punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , e sia  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_k)_{k=1}^N$  la concatenazione di tutte le posizioni di detti punti in un riferimento inerziale. La traiettoria di ciascun punto  $P_k$  soddisfa, in generale, l'equazione  $\mathbf{F}_k(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = m_k \ddot{\mathbf{x}}_k$ , dove  $m_k$  è la sua massa.

Dato che il gruppo di Galilei include le traslazioni temporali, se richiediamo che le leggi della natura non dipendano da un tempo specifico  $t$ , deve essere  $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ , ovvero le forze non possono dipendere dal tempo. Il gruppo, d'altra parte, include anche *invarianza per traslazioni* e *invarianza per boosts*. Le forze potranno quindi dipendere solo da *differenze di posizioni* e *differenze di velocità*, ovvero dovrà essere

$$\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i < j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i < j}), \quad \mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j.$$

Infine, l'*isotropia dello spazio* implica che la legge del moto non può cambiare se eseguiamo una rotazione del riferimento. Detta  $\mathbf{R} \in O(3)$ ,  $\mathbf{F}_k(\{\mathbf{R}\mathbf{x}_{ij}\}_{i < j}, \{\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i < j}) = \mathbf{R}\mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i < j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i < j})$ .

Una conseguenza di tutte le osservazioni fatte finora è che se si considera un *singolo punto materiale*, in assenza di altri punti materiali, esso deve essere sottoposto ad una forza nulla. Questo è apparentemente in contrasto con il gran numero di equazioni del moto per singoli punti

<sup>4</sup>G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632).

<sup>5</sup>Questo tipo di struttura può essere matematicamente formalizzata dal concetto di *fibrato*, in cui spazi euclidei tridimensionali costituiscono delle *fibre* associate ciascuna ad un punto della *base*, uno spazio euclideo unidimensionale che rappresenta il tempo. Una discussione di questo punto si può trovare in R. Penrose, *La strada che porta alla realtà* (1968).

materiali studiate in Meccanica nella forma  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ . Leggi di questo tipo, sebbene in violazione con l'invarianza galileiana, sono utili *approssimazioni* in cui l'effetto del moto di  $P$  sugli altri punti materiali con cui interagisce viene trascurato. Nel seguito ci focalizzeremo sulla meccanica del *singolo punto materiale* e su una dipendenza funzionale di  $\mathbf{F}$  del tipo indicato, ovvero  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , tenendo a mente del fatto che si tratta di una utile approssimazione.

**2.4. Equazioni cardinali per sistemi di punti.** Si consideri un sistema di  $N$  punti materiali  $\mathcal{S} := \{P_k\}_{k=1}^N$ . Come solito, indichiamo con  $m_k$  la massa del punto materiale  $P_k$ , di traiettoria  $\mathbf{x}_k$  in un riferimento inerziale dato, e sia  $\mathbf{F}_k$  la forza agente su di esso. Abbiamo così  $N$  equazioni del tipo

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k, \quad k = 1, \dots, N$$

per caratterizzare il moto di questo sistema. Questo sistema di equazioni può essere utilizzato per ottenere due equazioni rilevanti, dette *cardinali*, di una certa utilità quando il sistema  $\mathcal{S}$  è costituito da molti punti reciprocamente vincolati. Per discuterle, introduciamo le seguenti quantità.

**DEFINIZIONE 2.2** (Centro di massa). Il centro di massa  $G$  del sistema  $\mathcal{S}$  è il punto individuato dalle coordinate

$$\mathbf{x}_G := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k, \quad \text{dove } m := \sum_{k=1}^N m_k.$$

**DEFINIZIONE 2.3** (Quantità di moto e momento della quantità di moto). La *quantità di moto* del sistema di punti  $\mathcal{S}$  è definita come

$$\mathbf{Q} := \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}_k, \quad \mathbf{Q}_k := m_k \dot{\mathbf{x}}_k,$$

dove  $\mathbf{Q}_k$  è la quantità di moto del punto materiale  $P_k$ . Il *momento della quantità di moto*, o *momento angolare rispetto ad un polo A* di coordinate  $\mathbf{x}_A$ , è definito come

$$\mathbf{L}_A := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q}_k.$$

È immediato verificare che, se  $m := \sum_k m_k$  è la massa totale del sistema,  $\mathbf{Q} = m \dot{\mathbf{x}}_G$ , che può essere pensata come la quantità di moto di un singolo punto di massa  $m$  in  $G$ . Esiste una relazione semplice tra  $\mathbf{L}_A$ , calcolato rispetto al polo  $A$  individuato da  $\mathbf{x}_A$ , e  $\mathbf{L}_B$ , calcolato rispetto al polo  $B$  individuato da  $\mathbf{x}_B$ , e quantità di moto, ovvero

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{Q}.$$

Questa relazione è a volte detta *legge del cambiamento di polo*. Segue subito che se  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_B$ , ovvero il momento angolare totale non dipende dal polo. Inoltre, se  $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$  e  $\mathbf{Q}$  sono paralleli, il momento angolare non cambia nel passare dal polo  $A$  al polo  $B$ .

**DEFINIZIONE 2.4** (Momento torcente delle forze). Il *momento torcente totale* delle forze applicate al sistema di punti  $\mathcal{S}$  rispetto al polo  $A$  di coordinate  $\mathbf{x}_A$  è definito come

$$\boldsymbol{\tau} := \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\tau}_{A,k}, \quad \boldsymbol{\tau}_{A,k} := (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_k,$$

dove  $\boldsymbol{\tau}_{A,k}$  è il momento torcente della forza  $\mathbf{F}_k$  applicata in  $\mathbf{x}_k$  rispetto al polo  $A$ .

Come nel caso del momento della quantità di moto, esiste una relazione semplice tra  $\tau_A$ , calcolato rispetto al polo  $A$  individuato da  $\mathbf{x}_A$ , e  $\tau_B$ , calcolato rispetto al polo  $B$  individuato da  $\mathbf{x}_B$ , ovvero

$$\tau_B = \tau_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{R},$$

dove questa volta

$$\mathbf{R} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k$$

è detta *risultante* delle forze.

Avendo introdotto queste quantità cruciali, possiamo derivare due relazioni tra esse,

$$(1.2) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k =: \mathbf{R},$$

$$(1.3) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_k \wedge \mathbf{Q}_k) = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \wedge \mathbf{F}_k = \sum_k \tau_{O,k} =: \tau_O,$$

dove  $O$  è l'origine del riferimento. È possibile anche scegliere come polo rispetto a cui calcolare il momento angolare un punto  $P$  del sistema, sia esso per esempio il punto di coordinate  $\mathbf{x}_P$ : in tal caso, si vede facilmente che

$$\dot{\mathbf{L}}_P = \tau_P - \dot{\mathbf{x}}_P \wedge \mathbf{Q}.$$

Queste equazioni possono essere semplificate osservando che ciascuna forza  $\mathbf{F}_k$  applicata ad un punto materiale  $P_k$  contiene contributi di natura diversa. Vi sarà, anzitutto, un contributo *interno*  $\mathbf{F}_k^{(in)}$ , dovuto all'interazione di  $P_k$  con tutti gli altri elementi in  $\mathcal{S}$ , ed un contributo rimanente *esterno*  $\mathbf{F}_k^{(ext)}$ , dovuto all'interazione con punti materiali non in  $\mathcal{S}$ . Se indichiamo con  $\mathbf{F}_{kj}$  la contributo alla forza interna applicata a  $k$  dovuto alla presenza punto materiale  $j$ , di modo che  $\mathbf{F}_k^{(in)} = \sum_{P_j \in \mathcal{S} \setminus \{P_i\}} \mathbf{F}_{kj}$ , possiamo quindi decomporre  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(in)} + \mathbf{F}_k^{(ext)}$ . Similmente possiamo definire la risultante delle forze interne e la risultante delle forze esterne come, rispettivamente,

$$\mathbf{R}^{(in)} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(in)}, \quad \mathbf{R}^{(ext)} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(ext)}.$$

ed analogamente il momento delle forze interne ed esterne rispetto ad un generico polo  $A$  di coordinate  $\mathbf{x}_A$ ,

$$\tau^{(in)} := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_k^{(in)}, \quad \tau^{(ext)} := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_k^{(ext)}.$$

**TEOREMA 2.6.** *La risultante e il momento delle forze interne di un sistema  $\mathcal{S}$  sono sempre nulli.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per via del terzo postulato della meccanica, le forze interne sono a due a due opposte, ovvero  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Ne segue che la risultante delle forze interne è nulla

$$\mathbf{R}^{(in)} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Sempre usando il terzo postulato, il momento totale delle forze interne è

$$\tau_O^{(in)} = \sum_{P_i \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_i \wedge \sum_{P_j \in \mathcal{S} \setminus \{P_i\}} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Si noti che la scelta del polo è irrilevante essendo  $\mathbf{R}^{(\text{in})} = \mathbf{0}$ .  $\square$

Come conseguenza di quanto detto, vale il seguente

**COROLLARIO 2.7** (Prima e seconda equazione cardinale). *Valgono le seguenti equazioni cardinali per un sistema di punti*

$$(1.4) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(\text{ext})},$$

$$(1.5) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}.$$

Inoltre, dato un versore  $\hat{\mathbf{u}}$ , se  $\langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$  allora  $\langle \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{u}} \rangle$  si conserva. Similmente, se  $\langle \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$  allora  $\langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{u}} \rangle$  si conserva.

Si noti che la prima equazione cardinale si può riscrivere come  $m\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}$ , da cui segue il seguente

**COROLLARIO 2.8.** *In assenza di forze esterne, il centro di massa  $G$  di un sistema di  $n$  punti materiali ha accelerazione nulla.*

Come vedremo, il centro di massa può quindi sempre essere considerato come conveniente “osservatore inerziale” rispetto al quale svolgere una analisi quando sul sistema considerato non sono applicate forze esterne, ovvero se il sistema è *isolato*.

**2.5. Lavoro, energia cinetica e forze conservative.** Concludiamo questa seconda parte introducendo alcuni concetti legati a quantificatori dell’azione delle forze lungo le traiettorie dei punti a cui esse sono applicate. Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e traiettoria  $\mathbf{x}$ , soggetto ad una forza  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ . Si definisce *potenza* associata all’azione della forza  $\mathbf{F}$  sul punto materiale al tempo  $t$  la quantità

$$\Pi(t) := \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle.$$

L’integrale di questa quantità su un certo intervallo  $[t_0, t]$  si definisce *lavoro* della forza nel medesimo intervallo,

$$W(t_0, t) := \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \langle \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau.$$

L’espressione dipende in generale dallo stato cinematico del corpo in tutti gli istanti tra  $t_0$  e  $t$ , e ha suggerito l’introduzione della quantità *energia cinetica*.

**DEFINIZIONE 2.5.** L’energia cinetica di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  che si muove con traiettoria  $\mathbf{x}$  è

$$T(\dot{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2.$$

Il legame tra lavoro, potenza ed energia cinetica è espresso dal seguente semplice ma importante

**TEOREMA 2.9** (delle “forze vive”). *Dato un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in moto lungo una traiettoria  $\mathbf{x}(t)$ , il lavoro svolto dalla forza totale agente su di esso tra un tempo  $t_0$  e un tempo  $t > t_0$  è uguale alla variazione della sua energia cinetica, ovvero*

$$T(\dot{\mathbf{x}}(t)) - T(\dot{\mathbf{x}}(t_0)) = W(t_0, t).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che

$$\frac{dT(\dot{\mathbf{x}})}{dt} = m\langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \Pi,$$

e integrare questa relazione nel tempo per ottenere la definizione di  $W$ .  $\square$

**2.5.1. Forze posizionali.** Sia  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , ovvero la forza applicata a  $P$  dipende esclusivamente dalla sua posizione (*forza posizionale*). Supponiamo inoltre che la traiettoria  $\mathbf{x}$  sia regolare ( $\dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ ) in un certo intervallo  $[t_0, t_1]$ , di modo che sia possibile introdurre una parametrizzazione intrinseca  $\boldsymbol{\gamma}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  della traiettoria  $\mathbf{x}$ . Scelto infatti un punto sulla traiettoria  $\mathbf{x}$  come origine, sia esso per esempio  $\mathbf{x}(t_0)$ , basta introdurre l'ascissa curvilinea

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

così che  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} \circ s$ , ovvero  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{x} \circ s^{-1}$ . Il lavoro compiuto da  $\mathbf{F}$  nell'intervallo  $[t_0, t_1]$  diventa così

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt = \int_0^\ell \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(s)), \boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle ds = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}), d\boldsymbol{\gamma} \rangle.$$

Nell'espressione sopra  $\hat{\mathbf{v}}(s) := \boldsymbol{\gamma}'(s)$  è il versore tangente alla curva nel punto di ascissa curvilinea  $s$ , e abbiamo indicato con  $s(t_1) = \ell$ , lunghezza della traiettoria percorsa dal punto materiale tra  $t_0$  e  $t_1$ . L'espressione dipende quindi *puramente dalla traiettoria* percorsa e non da *come* essa è stata percorsa, ovvero è invariante per riparametrizzazioni temporali.

**2.5.2. Forze conservative.** Un'ulteriore semplificazione si verifica quando la forza è, oltre che posizionale, un *campo conservativo*, ovvero esiste un *potenziale*, detto *energia potenziale*,  $V: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^2(A)$ , tale per cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}).$$

Qui e in seguito indicheremo con  $\partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$  il *gradiente* di  $V$  rispetto ad  $\mathbf{x}$ . Un campo di forze conservativo ha la proprietà di essere *irrotazionale*, ovvero  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , come diretta conseguenza della sua definizione: viceversa l'irrotationalità garantisce l'esistenza di un potenziale purché il dominio di definizione di  $\mathbf{F}$  sia semplicemente connesso. Se ne calcoliamo il lavoro lungo una certa traiettoria  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} \circ s$ , otteniamo

$$(1.6) \quad W(t_0, t_1) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}), d\boldsymbol{\gamma} \rangle = - \int_0^\ell \langle \partial_{\mathbf{x}} V(\boldsymbol{\gamma}(s)), \boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle ds = - \int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t_1)} dV = V(\mathbf{x}(t_0)) - V(\mathbf{x}(t_1)),$$

ovvero il lavoro svolto dipende solo dalla posizione finale e iniziale della curva seguita. Legato al precedente risultato è il fatto seguente: se calcoliamo la potenza di una forza conservativa troveremo

$$(1.7) \quad \Pi = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \rangle = -\langle \partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \rangle = -\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \equiv -\dot{V}(\mathbf{x}).$$

Questo cruciale fatto permette di enunciare il seguente, importante teorema.

**TEOREMA 2.10** (Conservazione dell'energia meccanica). *Dato un punto materiale  $P$  di traiettoria  $\mathbf{x}$  soggetto a sole forze conservative associate ad un potenziale  $V$ , la sua energia meccanica*

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})$$

*rimane costante durante il moto.*

**DIMOSTRAZIONE.** Il risultato si ottiene combinando l'Eq. (1.7) con il teorema delle forze vive, ovvero osservando che

$$\frac{dT}{dt} = \Pi = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} (T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})) = 0. \quad \square$$

Il teorema rimane valido se sul punto materiale agiscono forze anche non conservative ma aventi potenza nulla.

### 3. Cambi di riferimento

**3.1. Osservatori mobili.** Nello studio della linea universo  $P(t)$  di un certo punto materiale omonimo, abbiamo scelto un evento origine  $O$  e una base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$  in  $\text{Ker}(\tau)$  per ottenere un sistema di coordinate  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Non è raro tuttavia scegliere, invece che un evento e una base fissa, una *linea universo non canonica* che funge da *osservatore di riferimento*  $O_\alpha(t)$ , e adottare una famiglia  $\{\hat{\mathbf{a}}_1(t), \hat{\mathbf{a}}_2(t), \hat{\mathbf{a}}_3(t)\}_t$  di basi ortonormali per  $\text{Ker}(\tau)$  che “evolve” con esso: assumeremo che, per ogni  $k$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_k(t)$  sia differenziabile in  $t$ . Richiediamo che la linea universo “osservatore” sia parametrizzata in modo che  $\tau(\overrightarrow{O_\alpha(t)P(t)}) = 0 \forall t$ . La *traiettoria* di  $P$  rispetto all’osservatore  $O_\alpha$  è quindi

$$\mathbf{x}^\alpha(t) := \overrightarrow{O_\alpha(t)P(t)} \in \text{Ker}(\tau),$$

dove abbiamo aggiunto un apice per ricordare che si tratta della traiettoria di  $P$  vista da  $O_\alpha$ . Questa traiettoria potrà essere decomposta come

$$\mathbf{x}^\alpha(t) = \sum_{k=1}^3 x_k^\alpha(t) \hat{\mathbf{a}}_k(t).$$

Le coordinate  $\mathbf{x}^\alpha(t) := (x_i^\alpha(t))_{i=1}^3$  sono ottenute in funzione di questo “riferimento mobile”. Quello costruito è, in generale, un riferimento *non inerziale* che indichiamo per brevità con  $\alpha := O_\alpha \hat{\mathbf{a}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2 \hat{\mathbf{a}}_3$  e vive “localmente” seguendo la linea universo  $O_\alpha$ . In questo riferimento, la velocità di  $P$  è

$$\mathbf{v}^\alpha := \left. \frac{d\mathbf{x}^\alpha}{dt} \right|_\alpha := \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k^\alpha \hat{\mathbf{a}}_k(t),$$

in quanto si assume che l’osservatore  $O_\alpha$  veda la base  $\{\hat{\mathbf{a}}_k\}_k$  come fissa nel tempo. Analogamente, l’accelerazione di  $P$  secondo il riferimento  $\alpha$  è

$$\mathbf{a}^\alpha := \left. \frac{d^2 \mathbf{x}^\alpha}{dt^2} \right|_\alpha := \sum_{k=1}^3 \ddot{x}_k^\alpha \hat{\mathbf{a}}_k(t),$$

Se per ogni  $k$  si ha che  $x_k^\alpha$  è indipendente dal tempo, si dice che  $P$  è *solidale* con  $O_\alpha \hat{\mathbf{a}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2 \hat{\mathbf{a}}_3$ . Un sistema di riferimento globale del tipo già studiato (che *non* dipende da un parametro temporale  $t$ ) può essere visto come un caso particolare. Basta in effetti scegliere, una base “costante”  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_k$  per  $\text{Ker}(\tau)$  e una traiettoria costruita canonicamente da un evento origine  $O$ .

Sia ora  $O_\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$  una diversa linea universo, associata ad un diverso osservatore  $O_\beta$ , che utilizza una diversa famiglia di basi ortonormali  $\{\hat{\beta}_k(t)\}_{k=1}^3$ : questo permette di introdurre un *secondo riferimento*  $\beta := O_\beta \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3$ . La traiettoria di  $P$  rispetto a questo osservatore sarà

$$\mathbf{x}^\beta(t) := \overrightarrow{O_\beta(t)P(t)} \in \text{Ker}(\tau),$$

e potrà essere scritta come  $\mathbf{x}^\beta(t) = \sum_{k=1}^3 x_k^\beta(t) \hat{\beta}(t)$ . Varrà<sup>6</sup>

$$\mathbf{x}^\alpha(t) = \overrightarrow{O_\alpha(t)P(t)} = \overrightarrow{O_\alpha(t)O_\beta(t)} + \overrightarrow{O_\beta(t)P(t)} = \mathbf{x}_\beta^\alpha + \mathbf{x}^\beta(t),$$

avendo definito  $\mathbf{x}_\beta^\alpha(t) := \overrightarrow{O_\alpha(t)O_\beta(t)}$ , posizione di  $O_\beta$  rispetto a  $O_\alpha$ .

Le due basi ortonormali vivono nello stesso spazio. Assumendo che esse abbiano la stessa orientazione, è possibile individuare una matrice di cambio di base  $\mathbf{R}_\beta^\alpha(t) \in \text{SO}(3)$  che permette di passare dalla base  $\{\hat{\mathbf{a}}_k\}_{k=1}^3$  alla base  $\{\hat{\beta}_k\}_{k=1}^3$  come

$$(1.8) \quad \hat{\beta}_i(t) = \sum_{k=1}^3 \hat{\mathbf{a}}_k(t) [\mathbf{R}_\beta^\alpha(t)]_{ki}, \quad i = 1, 2, 3.$$

---

<sup>6</sup>I pedici in alto possono essere letti come “visto da”.

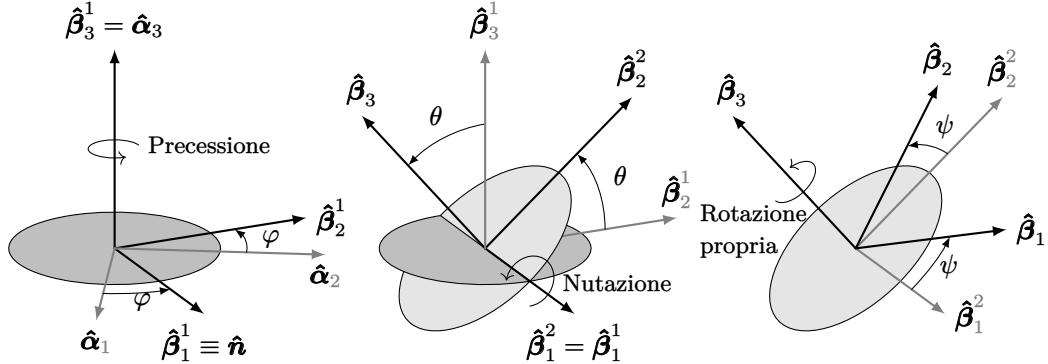


FIGURA 1. Angoli di Eulero.

Se quindi  $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 u_k^\alpha \hat{\alpha}_k = \sum_{i=1}^3 u_i^\beta \hat{\beta}_i$ , allora

$$\sum_{i=1}^3 u_i^\beta \sum_{k=1}^3 [\mathbf{R}_\beta^\alpha]_{ki} \hat{\alpha}_k = \sum_{k=1}^3 u_k^\alpha \hat{\alpha}_k \Rightarrow \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{R}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta.$$

Ciò significa che si ha la seguente relazione tra le coordinate di  $P$  nel riferimento  $\alpha$  e quelle nel riferimento  $\beta$ ,

$$(1.9) \quad \mathbf{x}^\alpha(t) = \mathbf{x}_\beta^\alpha(t) + \mathbf{R}_\beta^\alpha(t) \mathbf{x}^\beta(t).$$

La dipendenza tra le coordinate in  $\alpha$  e le coordinate  $\beta$  richiede perciò, per essere esplicitata, la conoscenza delle coordinate  $\mathbf{x}_\beta^\alpha$  dell'osservatore mobile in funzione di quello fisso e della matrice  $\mathbf{R}_\beta^\alpha$  in funzione del tempo.

**3.2. Angoli di Eulero e velocità angolare.** Ogni matrice  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$  è caratterizzata da soli tre parametri arbitrari: ciò significa che per specificare un cambio di riferimento ortonormale sono necessarie le tre coordinate  $\mathbf{x}_\beta^\alpha(t)$  di  $O_\beta$  rispetto al riferimento  $\alpha$ , e tre parametri per fissare la matrice  $\mathbf{R}_\beta^\alpha(t)$ , come si vede dall'Eq. (1.9). Per introdurre una opportuna parametrizzazione di  $\mathbf{R}_\beta^\alpha$  utilizzeremo il metodo di Eulero: questo metodo *non* è unico, e in effetti altre scelte di metodo sono possibili, ma è quello più diffusamente utilizzato per via di una serie di vantaggi legati a come la parametrizzazione di  $\mathbf{R}_\beta^\alpha$  viene introdotta.

Immaginiamo quindi di voler fare il cambio di terna ortonormale (omettiamo la dipendenza temporale per semplicità)

$$(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3) \rightarrow (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$$

che avverrà con una certa generica matrice  $\mathbf{R}_\beta^\alpha \in \text{SO}(3)$  in modo che valga l'Eq. (1.8). Utilizziamo l'isomorfismo di  $\text{Ker}(\tau)$  con  $\mathbb{R}^3$  per dare una rappresentazione grafica della costruzione in Fig. 1. Supponiamo che  $\hat{\alpha}_3 \wedge \hat{\beta}_3 \neq \mathbf{0}$  (ovvero che  $\hat{\alpha}_3$  e  $\hat{\beta}_3$  non siano paralleli) e definiamo il versore

$$\hat{n} = \frac{\hat{\alpha}_3 \wedge \hat{\beta}_3}{\|\hat{\alpha}_3 \wedge \hat{\beta}_3\|}.$$

Questo versore indica il cosiddetto *asse dei nodi*. In base a questo asse possiamo definire tre angoli, detti *angoli di Eulero*, che identificano altrettante rotazioni successive (in senso antiorario) attorno a direzioni della base, e che permettono di ottenere in tre passi la base di  $\{\hat{\beta}_k\}_{k=1}^3$  a partire da  $\{\hat{\alpha}_k\}_{k=1}^3$ :

**Precessione:** Ruotiamo  $\hat{\alpha}_1$  di un opportuno angolo  $\varphi \in [0, 2\pi]$  nel piano ortogonale a  $\hat{\alpha}_3$  per sovrapporlo a  $\hat{n}$ . Questo avverrà applicando una matrice di rotazione

$$\mathbf{R}^{(3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_i^1 = \sum_{j=1}^3 \hat{\alpha}_j R_{ji}^{(3)}(\varphi) \quad \forall i.$$

**Nutazione:** Ruotiamo  $\hat{\alpha}_3$  di un opportuno angolo  $\theta \in [0, \pi]$  nel piano ortogonale a  $\hat{n}$  fino a sovrapporlo a  $\hat{\beta}_3$ , ciò corrisponde all'applicazione della matrice

$$\mathbf{R}^{(1)}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_i^2 = \sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_j^1 R_{ji}^{(1)}(\theta) \quad \forall i.$$

**Rotazione propria:** Ruotiamo  $\hat{n}$  di un opportuno angolo  $\psi \in [0, 2\pi]$  per sovrapporlo a  $\hat{\beta}_1$  nel piano ortogonale a  $\hat{\beta}_3$ . Questa rotazione corrisponde all'azione di

$$\mathbf{R}^{(3)}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_j^2 R_{ji}^{(3)}(\psi) \quad \forall i.$$

In conclusione otteniamo

$$\hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_j^2 R_{ji}^{(3)}(\psi) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \hat{\beta}_j^1 R_{kj}^{(2)}(\theta) R_{ji}^{(3)}(\psi) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \hat{\alpha}_{\ell} R_{\ell k}^{(3)}(\varphi) R_{kj}^{(2)}(\theta) R_{ji}^{(3)}(\psi),$$

ovvero

$$[\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha}]_{\ell i} = \sum_{jk} R_{\ell k}^{(3)}(\varphi) R_{kj}^{(2)}(\theta) R_{ji}^{(3)}(\psi) \Leftrightarrow \mathbf{R}_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{R}^{(3)}(\varphi) \mathbf{R}^{(2)}(\theta) \mathbf{R}^{(3)}(\psi).$$

La parametrizzazione della rotazione  $\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha}$  qui introdotta richiede che  $\hat{\alpha}_3$  e  $\hat{\beta}_3$  non siano paralleli: questa difficoltà, ovvero l'impossibilità di associare biunivocamente tutte le rotazioni ad un singolo tipo di parametrizzazione, appare per *qualsiasi* costruzione. Se d'altra parte  $\hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_3$ , è chiaro che abbiamo bisogno solo di un movimento di precessione, in cui  $\hat{\alpha}_1 \rightarrow \hat{\beta}_1$ , per cui  $\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{R}^{(3)}(\alpha)$ . In questo caso,  $\alpha$  è semplicemente detto *angolo di rotazione*. Si noti che questa parametrizzazione *mantiene l'orientazione della base*, e infatti in tutti i casi  $\det \mathbf{R}_{\beta}^{\alpha} = 1$ .

**3.2.1. Formula di Poisson.** Per studiare in forma *differenziale* i cambi di riferimento introdotti, immaginiamo di avere un certo vettore  $\mathbf{u} \in \text{Ker}(\tau)$ , dipendente dal parametro  $t$ . Sia la sua decomposizione nelle due basi

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^2 u_k^{\alpha}(t) \hat{\alpha}_k(t) = \sum_{k=1}^3 u_k^{\beta}(t) \hat{\beta}_k(t) = \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}_j(t) [\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha}(t)]_{jk} u_k^{\beta}(t).$$

Questo significa che le sue coordinate  $\mathbf{u}^{\alpha}$  ed  $\mathbf{u}^{\beta}$  rispetto ai riferimenti  $\alpha$  e  $\beta$  soddisfano la relazione

$$\mathbf{u}^{\alpha}(t) = \mathbf{R}_{\beta}^{\alpha}(t) \mathbf{u}^{\beta}(t).$$

Come esprimere le derivate rispetto al tempo di questa espressione? Consideriamo il seguente Lemma preliminare.

**LEMMA 3.1.** *Sia data una applicazione matriciale  $\mathbf{R}(t)$ , tale che  $\mathbf{R}: \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(n)$  differenziabile in  $t$ . La matrice*

$$\boldsymbol{\Omega} := \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{\top},$$

*è antisimmetrica, ovvero  $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^{\top}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo  $\mathbf{R}(t)$  ortogonale, vale  $\forall t$

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^{\top} = \mathbf{I} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{\top} = -\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^{\top} = -(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{\top})^{\top}. \quad \square$$

Questo lemma è utile per provare il seguente teorema, dovuto a Poisson, che fornisce una informazione particolarmente utile su come evolvono questi versori ortonormali.

**TEOREMA 3.2** (Poisson). *Siano dati due sistemi di riferimento  $O_\alpha \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3$  e  $O_\beta \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3$  come sopra. Allora esiste un unico vettore  $\omega_\beta^\alpha$ , detto vettore velocità angolare tale per cui*

$$(1.10) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\beta + \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Deriviamo  $\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{R}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta$  espressione che lega  $\mathbf{u}^\alpha$  ad  $\mathbf{u}^\beta$ , vettori delle componenti di  $\mathbf{u}$  rispetto alle due basi, ottenendo

$$\dot{\mathbf{u}}^\alpha = \mathbf{R}_\beta^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\beta + \dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta = \mathbf{R}_\beta^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\beta + \dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha \mathbf{R}_\beta^{\alpha\top} \mathbf{R}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta \equiv \mathbf{R}_\beta^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\beta + \Omega \mathbf{u}^\alpha.$$

Per il Lemma 3.1, la matrice  $\Omega_\beta^\alpha := \dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha \mathbf{R}_\beta^{\alpha\top}$  può essere scritta come

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\Omega_\beta^\alpha \mathbf{u}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^\alpha \\ u_2^\alpha \\ u_3^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 u_3^\alpha - \omega_3 u_2^\alpha \\ \omega_3 u_1^\alpha - \omega_1 u_3^\alpha \\ \omega_1 u_2^\alpha - \omega_2 u_1^\alpha \end{pmatrix}$$

In forma vettoriale, l'espressione ottenuta è quindi

$$\sum_k \dot{u}_k^\alpha \hat{\alpha}_k = \sum_{ik} \hat{\alpha}_k [\mathbf{R}_\beta^\alpha]_{ki} \dot{u}_i^\beta + \sum_{ik} \hat{\alpha}_k [\dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha]_{ki} u_i^\beta = \sum_i \dot{u}_i^\beta \hat{\beta}_i + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \omega_i u_j^\alpha \hat{\alpha}_k.$$

Notiamo ora che

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\alpha := \sum_{k=1}^3 \dot{u}_k^\alpha \hat{\alpha}_k, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\beta := \sum_{k=1}^3 \dot{u}_k^\beta \hat{\beta}_k$$

sono rispettivamente le derivate temporali di  $\mathbf{u}$  rispetto al riferimento  $\alpha$  e  $\beta$ . Invece l'ultimo termine si può scrivere come

$$\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \omega_i u_j^\alpha \hat{\alpha}_k = \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}^\alpha, \quad \text{dove } \omega_\beta^\alpha := \sum_k \omega_k \mathbf{a}_k.$$

Si ottiene così l'Eq. (1.10). Naturalmente la relazione può essere invertita scrivendo

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\beta = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\alpha - \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\alpha + \omega_\alpha^\beta \wedge \mathbf{u}, \quad \omega_\beta^\alpha = -\omega_\alpha^\beta.$$

Il vettore  $\omega_\beta^\alpha$ , in generale dipendente dal tempo, è unico (se esistesse un diverso  $\bar{\omega}_\beta^\alpha$  tale per cui la relazione precedente è soddisfatta, si avrebbe  $(\omega_\beta^\alpha - \bar{\omega}_\beta^\alpha) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$  per ogni vettore  $\mathbf{u}$ ).  $\square$

**COROLLARIO 3.3.** *Vale*

$$\frac{d\hat{\alpha}_k}{dt} \Big|_\beta = \omega_\alpha^\beta \wedge \hat{\alpha}_k, \quad \frac{d\hat{\beta}_k}{dt} \Big|_\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{\beta}_k, \quad k = 1, \dots, 3,$$

dove  $\omega_\beta^\alpha = -\omega_\alpha^\beta$ . Inoltre, se un osservatore con riferimento  $c = O_\gamma \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$  è solidale con l'osservatore  $O_\beta \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3$ ,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\gamma + \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima parte del corollario discende direttamente dall'applicazione del teorema di Poisson ai vettori di base. Per la seconda parte, scriviamo

$$\frac{d\hat{\gamma}_i}{dt}\Big|_{\alpha} = \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} (\langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle \hat{\beta}_j) = \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle \frac{d\hat{\beta}_j}{dt}\Big|_{\alpha} = \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle \hat{\beta}_j = \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \hat{\gamma}_i$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle$  non dipende dal tempo.  $\square$

**COROLLARIO 3.4.** *Il vettore  $\omega_{\beta}^{\alpha}$  si può scrivere come*

$$(1.11) \quad \omega_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{\beta}_i \wedge \frac{d\hat{\beta}_i}{dt}\Big|_{\alpha}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Usando l'identità  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  per tre generici vettori in uno spazio vettoriale tridimensionale, basta infatti osservare che

$$(1.12) \quad \sum_{i=1}^3 \hat{\beta}_i \wedge \frac{d\hat{\beta}_i}{dt}\Big|_{\alpha} = \sum_{i=1}^3 \hat{\beta}_i \wedge (\omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \hat{\beta}_i) = \sum_{i=1}^3 (\omega_{\beta}^{\alpha} - \langle \omega_{\beta}^{\alpha}, \hat{\beta}_i \rangle \hat{\beta}_i) = 3\omega_{\beta}^{\alpha} - \omega_{\beta}^{\alpha} = 2\omega_{\beta}^{\alpha}. \quad \square$$

**COROLLARIO 3.5.** *Vale*

$$(1.13) \quad \frac{d\omega_{\beta}^{\alpha}}{dt}\Big|_{\alpha} = \frac{d\omega_{\beta}^{\alpha}}{dt}\Big|_{\beta}.$$

**Esempio 1.5 —** Consideriamo il caso in cui la base  $\{\hat{\beta}_k\}_{k=1}^3$  possa essere espressa in funzione di una certa base  $\{\hat{\alpha}_k\}_{k=1}^3$  come

$$\hat{\beta}_1 = \cos \theta \hat{\alpha}_1 + \sin \theta \hat{\alpha}_2, \quad \hat{\beta}_2 = -\sin \theta \hat{\alpha}_1 + \cos \theta \hat{\alpha}_2, \quad \hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_3,$$

con  $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione differenziabile. Si tratta di un moto di rotazione attorno all'asse fisso  $\hat{\alpha}_3$ . Dalla formula sopra

$$\omega_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \hat{\beta}_k \wedge \frac{d\hat{\beta}_k}{dt}\Big|_{\theta} = \dot{\theta} \hat{\alpha}_3 \equiv \dot{\theta} \hat{\beta}_3,$$

ovvero  $\omega_{\beta}^{\alpha}$  quantifica la velocità di variazione dell'angolo di rotazione  $\theta$  ed è diretto come l'asse di rotazione  $\hat{\alpha}_3 \equiv \hat{\beta}_3$ : questo ne giustifica il nome *velocità angolare*.

**3.3. Trasformazioni delle quantità cinematiche.** Avendo ottenuto la relazione tra derivate temporali in due sistemi di riferimento per un generico vettore, possiamo ora applicare questo risultato al vettore posizione  $\mathbf{x}$  associato al punto materiale  $P$  per ottenere l'espressione delle *velocità* nei due riferimenti  $\alpha = O_{\alpha} \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3$  e  $\beta = O_{\beta} \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3$ . Abbiamo già stabilito che vale la relazione

$$\mathbf{x}^{\alpha} = \mathbf{x}_{\alpha}^{\beta} + \mathbf{x}^{\beta}.$$

Derivando rispetto al tempo nel riferimento  $\alpha$  otterremo

$$\mathbf{v}^{\alpha} := \frac{d\mathbf{x}^{\alpha}}{dt}\Big|_{\alpha} = \frac{d\mathbf{x}_{\beta}^{\alpha}}{dt}\Big|_{\alpha} + \frac{d\mathbf{x}^{\beta}}{dt}\Big|_{\alpha}.$$

Per quanto detto sopra

$$\frac{d\mathbf{x}^{\beta}}{dt}\Big|_{\alpha} = \frac{d\mathbf{x}^{\beta}}{dt}\Big|_{\beta} + \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \mathbf{x}^{\beta} \equiv \mathbf{v}^{\beta} + \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \mathbf{x}^{\beta}.$$

Abbiamo ottenuto così la *legge di composizione delle velocità di Galilei*: indicando con  $\mathbf{v}_\beta^\alpha := \frac{d\mathbf{x}_\beta^\alpha}{dt} \Big|_\alpha$  la velocità di  $O_\beta$  visto da  $O_\alpha$ , possiamo scrivere

$$(1.14) \quad \mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}^\beta + \mathbf{v}^t, \quad \text{dove } \mathbf{v}^t := \mathbf{v}_\beta^\alpha + \boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta.$$

Il termine di differenza tra le velocità nei due riferimenti,  $\mathbf{v}^t$ , è detta *velocità di trascinamento*.

Ripetendo i ragionamenti sopra sulla formula per le velocità otteniamo la legge delle composizioni per le accelerazioni. Derivando rispetto al tempo l'Eq. (1.14) secondo il riferimento  $\alpha$ , otteniamo infatti

$$(1.15a) \quad \mathbf{a}^\alpha = \frac{d^2 \mathbf{x}^\alpha}{dt^2} \Big|_\alpha = \frac{d^2 \mathbf{x}^\beta}{dt^2} \Big|_\beta + \mathbf{a}^t + \mathbf{a}^C \equiv \mathbf{a}^\beta + \mathbf{a}^t + \mathbf{a}^C,$$

dove abbiamo scritto

$$(1.15b) \quad \mathbf{a}^t := \mathbf{a}_\beta^\alpha + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta + \boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta), \quad \mathbf{a}^C := 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^\beta.$$

Abbiamo indicato con  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_\beta^\alpha$  la derivata rispetto al tempo della velocità angolare, che sappiamo non dipendere dal riferimento in cui la si calcola. Queste ultime due quantità sono dette rispettivamente *accelerazione di trascinamento* e *accelerazione di Coriolis*. L'accelerazione di trascinamento corrisponde all'accelerazione di un punto solidale con il riferimento mobile. Il termine di Coriolis è dovuto ad una ulteriore accelerazione che appare quando  $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^\beta \neq \mathbf{0}$ .

Se  $\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha = \dot{\boldsymbol{\omega}}_\beta^\alpha = \mathbf{0}$ , ovvero la velocità angolare è costantemente nulla, la legge di composizione delle velocità è semplicemente  $\mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}_\beta^\alpha + \mathbf{v}^\beta$ . Si dice in questo caso che il riferimento  $\beta$  è un *osservatore mobile traslante* rispetto al riferimento  $\alpha$ . Se anche  $\mathbf{a}_\beta^\alpha = \mathbf{0}$ , le accelerazioni nei due riferimenti sono uguali: in questo caso, la trasformazione è *galileiana*, ovvero il riferimento  $\beta$  è semplicemente un riferimento ottenuto da  $\alpha$  per mezzo di un elemento del gruppo di Galilei, per cui se il riferimento  $\alpha$  è inerziale, lo sarà anche  $\beta$ .

La legge di trasformazione delle accelerazioni ha importanti conseguenze sulla forma che il secondo Postulato della Meccanica assume cambiando riferimento. Supponiamo, per esempio, che  $\alpha$  sia un riferimento inerziale: in questo riferimento, il punto materiale  $P$  di massa  $m$  soddisfa la relazione  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}^\alpha$ . Se ora applichiamo la trasformazione sopra otteniamo che

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}^\alpha = m\mathbf{a}^\beta - \mathbf{F}^t - \mathbf{F}^C \Rightarrow m\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{F} + \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^C,$$

ovvero nel riferimento  $\beta$  verranno in generale osservate due altre forze, dette *apparenti*, ovvero

$$\mathbf{F}^t := -m(\mathbf{a}_\beta^\alpha + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta) + \mathbf{F}^{cf} \quad \mathbf{F}^{cf} := -m\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta), \quad \mathbf{F}^C := -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^\beta,$$

dette rispettivamente *forza di trascinamento*, *forza centrifuga* e *forza di Coriolis*. Tutte queste forze sono assenti se anche  $\beta$  è inerziale, e inoltre la forza di Coriolis è sempre assente se il punto materiale è in quiete nel nuovo riferimento. La forza centrifuga, d'altra parte, è sempre *normale* a  $\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha$ .

Per concludere, vediamo come si compongono le *velocità angolari*. Consideriamo un vettore  $\mathbf{u}$  solidale ad un riferimento  $\gamma = O_\gamma \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$ , solidale ad un osservatore  $O_\gamma$ . Rispetto ai due riferimenti  $\alpha$  e  $\beta$  già introdotti, si avrà

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\gamma^\alpha \wedge \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\beta = \boldsymbol{\omega}_\gamma^\beta \wedge \mathbf{u}.$$

Ma d'altronde vale anche

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Big|_\beta + \boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}.$$

Questo significa che

$$\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}_\gamma^\alpha - \boldsymbol{\omega}_\gamma^\beta) \wedge \mathbf{u}.$$

Dovendo valere questa relazione per ogni vettore  $\mathbf{u}$  solidale a  $\gamma$ , otteniamo la legge

$$\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\beta = \omega_\gamma^\alpha.$$

**3.3.1. Teoremi di König.** I teoremi di König permettono di mettere in relazione il momento angolare e l'energia cinetica di un sistema di  $N$  punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  calcolati in un certo sistema di riferimento<sup>7</sup>  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  con un *sistema di riferimento traslante* centrato nel centro di massa  $G$  del sistema, ovvero un sistema di riferimento  $\gamma = G\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$  a velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}_\gamma = \mathbf{0}$  rispetto al riferimento fisso (qui e nel seguito omettiamo apici per quantità calcolate relativamente a  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ ).

**TEOREMA 3.6** (Primo teorema di König). *Dato un sistema di punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  di quantità di moto  $\mathbf{Q}$  in  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  e centro di massa  $G$ , vale la seguente relazione*

$$\mathbf{L}_A = (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{L}^\gamma,$$

dove  $\mathbf{x}_A$  individua la posizione di un generico punto  $A$  e  $\mathbf{L}_A$  è il momento angolare di  $\mathcal{S}$  rispetto ad  $A$  in un riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , mentre  $\mathbf{L}^\gamma$  è il momento angolare di  $\mathcal{S}$  calcolato in un riferimento traslante  $\gamma = G\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$  centrato nel centro di massa  $G$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $\mathbf{x}_k = \overrightarrow{OP_k}$  la posizione del punto materiale  $P_k$  nel riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Per ogni elemento del sistema, la velocità di  $P_k$  nel riferimento fisso  $\mathbf{v}_k$  e quella nel riferimento traslante  $\mathbf{v}_k^\gamma$  sono legate dalla semplice relazione  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_k^\gamma$ . Se  $\mathbf{x}_G$  è il vettore che identifica  $G$  nel riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , abbiamo

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}_A &:= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge (\mathbf{v}_k^\gamma + \mathbf{v}_G) = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_k^\gamma + \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_G \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_k^\gamma + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} \equiv \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k^\gamma - \mathbf{x}_A^\gamma) \wedge \mathbf{v}_k^\gamma + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} \equiv \mathbf{L}_A^\gamma + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} \end{aligned}$$

dove il termine  $\mathbf{L}_A^\gamma$  è il momento angolare rispetto ad  $A$  nel riferimento traslante. Il fatto notevole, ora, è che questo momento *non* dipende dal punto  $A$  e può quindi essere indicato semplicemente con  $\mathbf{L}^\gamma$ . In tale riferimento traslante infatti il centro di massa ha velocità nulla, e quindi la quantità di moto  $\mathbf{Q}^\gamma$  è nulla: di conseguenza, per via della legge di cambiamento di polo, il punto rispetto al quale il momento angolare viene calcolato è irrilevante.  $\square$

**COROLLARIO 3.7.** *Il momento angolare  $\mathbf{L}_G$  calcolato rispetto a  $G$  nel riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  coincide con il momento angolare  $\mathbf{L}^\gamma$  calcolato nel riferimento traslante centrato nel centro di massa  $G$ .*

Veniamo ora al secondo teorema di König, che riguarda invece l'energia cinetica.

**TEOREMA 3.8** (Secondo teorema di König). *L'energia cinetica di un sistema materiale di massa  $m$  può essere espressa come*

$$T = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + T^\gamma$$

dove  $T^\gamma$  è l'energia cinetica del sistema in un riferimento traslante con origine il centro di massa.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il caso di un corpo composto da  $n$  punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  e indichiamo con  $\mathbf{x}_k$  la posizione di un punto materiale  $P_k$  di massa  $m_k$  nel riferimento

---

<sup>7</sup>Il riferimento  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  può essere pensato come inerziale, ma non è necessario.

$O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . Sia inoltre il centro di massa  $G$  del sistema individuato dal vettore  $\mathbf{x}_G$  nello stesso riferimento. Possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galilei e scrivere

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^\gamma + \mathbf{v}_G,$$

dove  $\mathbf{v}_k^\gamma$  è la velocità di  $P_k$  rispetto ad un riferimento *traslante* centrato in  $G$ . Abbiamo quindi che

$$\|\mathbf{v}_k\|^2 = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \|\mathbf{v}_k^\gamma\|^2 + \|\mathbf{v}_G\|^2 + 2\langle \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle.$$

Dunque possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_G\|^2 \sum_{k=1}^N m_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k^\gamma\|^2 + \sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + T^\gamma.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la linearità del prodotto scalare: infatti,  $\sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle = \langle \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle = 0$ , dato che  $\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^\gamma$  è la quantità di moto nel riferimento del centro di massa, che è zero.  $\square$

## CAPITOLO 2

# Meccanica lagrangiana

La sua voce è molto debole, almeno nel senso che non si scalda mai; ha un accento italiano molto marcato e pronuncia la ‘s’ come una ‘z’. Gli studenti, che per la maggior parte sono incapaci di apprezzarlo, gli riservano una scarsa accoglienza, ma i professori compensano questa mancanza.

Joseph Fourier su Giuseppe Luigi Lagrangia, 1795

### 1. Le equazioni di Lagrange

La necessità di sviluppare una adeguata teoria per sistemi di punti materiali *vincolati* e gestire in maniera efficace le conseguenti *reazioni vincolari* ha motivato la nascita della *meccanica lagrangiana*, che può essere vista come una riformulazione geometrica della meccanica newtoniana e ha permesso di individuare proprietà non banali dei fondamenti della fisica meno evidenti nel formalismo iniziale.

Per introdurre il problema, supponiamo di considerare un sistema di  $N$  punti materiali,  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$  in uno spaziotempo galileiano in cui abbiamo fissato un riferimento inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ . In questo riferimento, ogni punto  $P_k$  è quindi associato ad una certa terna di coordinate  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ : usiamo la concatenazione  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_k)_{k=1}^N \in \mathbb{R}^{3N}$  per rappresentare la configurazione del sistema. Se qualsivoglia configurazione è ammessa, il sistema si dice *libero*, e lo spazio esplorabile da  $\mathbf{X}$  è effettivamente  $\mathbb{R}^{3N}$ . Viceversa, un sistema *vincolato* presenta una condizione su  $\mathbf{X}$  da rispettare durante tutta l’evoluzione. Considereremo qui la presenza di vincoli *olonomi bilateri*<sup>1</sup>, ovvero vincoli nella forma

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N-n},$$

con  $n \leq 3N$ . Si noti che il vincolo può essere *mobile*, ovvero l’applicazione  $\boldsymbol{\varphi}$  dipende, in generale, esplicitamente dal tempo  $t$ . Il vincolo determinerà un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{3N}$ , eventualmente dipendente dal tempo, che è lo *spazio delle configurazioni* del sistema,

$$(2.1) \quad \mathcal{M}(t) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{0}\}.$$

Nel caso in cui  $\mathcal{M}$  (ovvero  $\boldsymbol{\varphi}$ ) sia *indipendente* dal tempo, si dice che il vincolo è *scleronomo*, viceversa si dice *reonomo*. Per dare una più adeguata descrizione matematica del vincolo, è utile introdurre il concetto di *sottovarietà regolare*, cosa che faremo a breve parentesi.

**1.1. Sottovarietà regolari.** Il concetto di cui faremo uso per studiare i moti vincolati è introdotto dalla seguente

**DEFINIZIONE 1.1** (Sottovarietà regolare). Si consideri un aperto connesso  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^K$ , con  $K > 1$ . Sia definita su di esso l’applicazione  $\boldsymbol{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $1 \leq s < K$ ,  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{A})$ , con  $p \geq 2$ , e definiamo l’insieme

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

---

<sup>1</sup>L’aggettivo *bilatero* fa riferimento al fatto che il vincolo è imposto tramite una uguaglianza, e non una disuguaglianza.

supposto non vuoto. Se la matrice jacobiana dell'applicazione  $\varphi$  ha rango  $s$  in ogni punto di  $\mathcal{M}$ , allora  $\mathcal{M}$  si dice sottovarietà regolare di dimensione  $n = K - s$  di  $\mathbb{R}^K$  e ordine  $p$ .

**TEOREMA 1.1.** *Sia data una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A}: \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^K$ ,  $\varphi \in C^p(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^K$  aperto connesso. Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$  esiste un intorno aperto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  ove è definita unica una funzione iniettiva  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^K$  differenziabile con continuità tale che  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  per un certo  $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{V}$  e tale che  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{M}$  per  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ : per ipotesi, il rango dello jacobiano di  $\varphi$  è massimo in tale punto, e supponiamo in particolare che

$$\det \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_b}(\mathbf{x}_0) \right)_{\substack{1 \leq a \leq s \\ 1 \leq b \leq s}} \neq 0$$

(possiamo sempre riordinare le variabili in modo da realizzare la condizione sopra). Scriviamo  $(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathbf{q}$  e  $(x_{n+1}, \dots, x_K) = \mathbf{y}$ , di modo che  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{y})$ . In particolare, indichiamo  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0)$ . Per il teorema della funzione implicita, la condizione  $\det \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$  implica che esiste un aperto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  contenente  $\mathbf{q}_0$ , un aperto  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{K-n}$  contenente  $\mathbf{y}_0$  ed un'unica funzione  $\psi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  di classe  $C^p$  tale che  $\psi(\mathbf{q}_0) = \mathbf{y}_0$  e  $\varphi(\mathbf{q}, \psi(\mathbf{q})) = \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ . La funzione  $\boldsymbol{\chi}$  desiderata è quindi  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \psi(\mathbf{q}))$ . Essa è iniettiva, dato che, dati  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathcal{V}$ ,  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}') \Leftrightarrow (\mathbf{q}, \psi(\mathbf{q})) = (\mathbf{q}', \psi(\mathbf{q}')) \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}'$ .  $\square$

**Esempio 2.1** (Curve regolari) — Una sottovarietà regolare  $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K: \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ ,  $\varphi: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{K-1}$  con  $K > 1$ , non è altro che (in generale) un insieme di *curve regolari*. In un intorno di ciascun suo punto  $\mathbf{x}_0$ , esisterà una mappa  $\boldsymbol{\chi}: I \rightarrow \mathbb{R}^K$ , con  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , tale che per un certo  $q_0 \in I$ ,  $\boldsymbol{\chi}(q_0) = \mathbf{x}_0$ , e  $\boldsymbol{\chi}(q) \in \mathcal{M}$  per ogni  $q \in I$ . La mappa  $\boldsymbol{\chi}$  fa perciò *localmente* le veci di una curva regolare. Infatti, in questo caso la condizione di regolarità della sottovarietà comporta precisamente che  $\boldsymbol{\chi}'(q) \neq \mathbf{0}$ , consistentemente con la definizione di regolarità di una curva. La quantità  $\hat{\mathbf{v}} = \|\boldsymbol{\chi}'(q_0)\|^{-1} \boldsymbol{\chi}'(q_0)$  è proprio un *versore* tangente alla curva in  $\mathbf{x}_0$  e lo diremo tangente ad  $\mathcal{M}$  in  $\mathbf{x}_0$ .

Se l'insieme  $\mathcal{M}$  è connesso, allora esso è esattamente una singola curva regolare ed è possibile trovare un'unica  $\boldsymbol{\chi}$  che lo parametrizza globalmente, ovvero una funzione  $\boldsymbol{\chi}: I \rightarrow \mathbb{R}^K$  tale che  $\text{Im}(\boldsymbol{\chi}) = \mathcal{M}$ . Questo discende da un teorema che enunciamo ma non dimostriamo<sup>2</sup>.

**TEOREMA 1.2.** *Ogni sottovarietà regolare unidimensionale connessa è diffeomorfa con un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  o con  $\mathbb{S}^1$ .*

La dimostrazione si basa sull'idea che, una volta trovata una parametrizzazione  $\boldsymbol{\chi}$  locale, questa può essere estesa fino a coprire tutto  $\mathcal{M}$ , fornendo una parametrizzazione *globale* per una curva possibilmente chiusa se  $I = [a, b]$  e  $\boldsymbol{\chi}(a) = \boldsymbol{\chi}(b)$ .

È noto che è sempre possibile scegliere una *parametrizzazione naturale* per la nostra curva, introducendo l'ascissa curvilinea  $s$ : preso un punto della curva come riferimento, sia  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(q_0)$  per  $q_0 \in I$ , possiamo definire l'ascissa curvilinea di un generico punto della curva individuato da  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(q)$  come  $s(q) := \int_{q_0}^q \|\boldsymbol{\chi}'(\bar{q})\| d\bar{q}$ : l'ascissa curvilinea associa cioè a  $\mathbf{x}$  la lunghezza dell'arco orientato (e quindi con segno), tra  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ .

**Esempio 2.2** (Superfici regolari) — Il caso  $K = 3$  e  $n = 2$  è particolarmente interessante, poiché è associato al concetto di *superficie regolare*. In altre parole, una sottovarietà regolare bidimensionale  $\mathcal{M}$  in  $\mathbb{R}^3$  è detta anche *superficie regolare* (data in forma implicita). In questo caso, dato  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ , esiste localmente una funzione  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  tale che  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ , con  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ , che localmente parametrizza la

<sup>2</sup>La dimostrazione del risultato, dato in una forma leggermente più generale, può essere trovata in Appendice del volumetto di John W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press (1997).

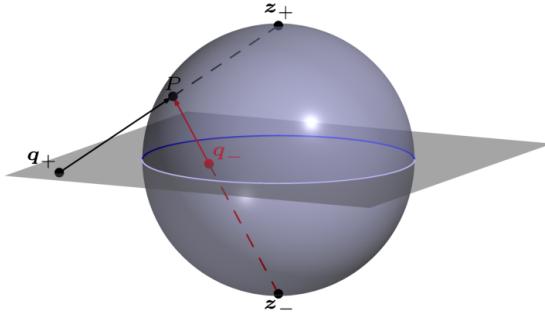


FIGURA 1. Proiezione stereografica.

superficie e tale che  $\partial_1 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$  e  $\partial_2 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$  siano linearmente indipendenti. Questa condizione di indipendenza è espressa talvolta come

$$\partial_1 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \wedge \partial_2 \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0},$$

in quanto la lineare indipendenza di due vettori in uno spazio tridimensionale equivale alla loro non-collinearità.

**Esempio 2.3** — La sfera  $S^2$  in  $\mathbb{R}^3$

$$S^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1 = 0\}$$

è una sottovarietà regolare di dimensione 2, essendo

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

di rango 1 in ogni punto di  $S^2$ . La mappa data da

$$\boldsymbol{\chi}_+(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ \|\mathbf{q}\|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di  $S^2$  *eccezion fatta* per il polo nord  $\mathbf{z}_+ = (0, 0, 1)^\top$ , mentre la mappa

$$\boldsymbol{\chi}_-(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ 1 - \|\mathbf{q}\|^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di  $S^2$  eccezion fatta per il polo sud  $\mathbf{z}_- = (0, 0, -1)^\top$ . Ciascuna delle due mappe introdotte corrisponde ad una *proiezione stereografica* della sfera, vedasi Fig. 1.

**1.1.1. Spazio tangente e spazio normale.** Sia data una parametrizzazione locale di una sottovarietà regolare  $\mathcal{M}$ ,  $\boldsymbol{\chi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  nella forma  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}))$ , come individuata dal teorema precedente in un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ . Allora

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \partial_1 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_1 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \partial_2 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_2 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \partial_n \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_n \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \end{pmatrix} = n,$$

dove qui e in seguito per brevità  $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial q_a}$ . Questo fatto significa che gli  $n$  vettori  $\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  sono *linearmente indipendenti* e sono una *base* per uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , che chiamiamo *spazio tangente* ad  $\mathcal{M}$  in  $\mathbf{x}_0$ , definito come

$$T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} := \text{span}\{\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)\}_{a=1}^n.$$

Per spiegare le ragioni di questa terminologia, consideriamo una curva regolare in  $\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{q}: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{V}$ , tale che  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ , e la sua immagine  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}$  su  $\mathcal{M}$ . Il vettore tangente a  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{x}_0$  è

$$\mathbf{x}'(0) = \sum_{a=1}^n q'_a(0) \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0).$$

Si ha perciò che  $\mathbf{x}'(0) \in T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$  e in particolare si può intendere  $\mathbf{q}'(0)$  come il vettore delle componenti della tangente a  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{x}_0$  secondo la base  $\{\partial_a \boldsymbol{\chi}\}_a$ . Lo spazio tangente è quindi lo spazio in cui vivono i vettori tangentì alle curve su  $\mathcal{M}$  passanti per  $\mathbf{x}_0$ , cioè lo spazio dei vettori tangentì ad  $\mathcal{M}$  in  $\mathbf{x}_0$ . L'unione disgiunta degli spazi tangenti di  $\mathcal{M}$  è detta *fibrato tangente* e si indica con

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \{\mathbf{x}\} \times T_{\mathbf{x}} \mathcal{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} T_{\mathbf{x}} \mathcal{M}.$$

Lo spazio  $(K - n)$ -dimensionale ortogonale a  $T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$  è detto *spazio normale* ad  $\mathcal{M}$  in  $\mathbf{x}_0$ : questo è generato dai vettori  $\{\partial_{\mathbf{x}} \varphi_j(\mathbf{x}_0)\}_{j=1}^{K-n}$ , la cui lineare indipendenza è garantita proprio dalla condizione di rango massimo di  $\boldsymbol{\varphi}$  su  $\mathcal{M}$ . Per vedere che questi vettori sono effettivamente ortogonali allo spazio tangente, consideriamo nuovamente la generica curva  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  definita sopra, passante per  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ . Abbiamo che deve valere

$$\frac{d}{du} \varphi_j(\mathbf{x}(u))|_{u=0} = \sum_{a=1}^n \langle \partial_{\mathbf{x}} \varphi_j(\mathbf{x}_0), \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0) \rangle q'_a(0) = 0,$$

che vale per qualsivoglia curva regolare poiché la curva stessa deve giacere in  $\mathcal{M}$ , ovvero

$$\langle \partial_{\mathbf{x}} \varphi_j(\mathbf{x}_0), \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0) \rangle = 0.$$

I vettori  $\partial_{\mathbf{x}} \varphi_j(\mathbf{x}_0)$  sono perciò effettivamente normali allo spazio tangente. Scriveremo

$$(T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M})^\perp = \text{span}\{\partial_{\mathbf{x}} \varphi_j(\mathbf{x}_0)\}_{j=1}^{K-n}.$$

**1.1.2. Cambio di parametrizzazione.** La parametrizzazione di una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M}$  in un intorno di un suo punto  $\mathbf{x}_0$  non è in generale unica. Supponiamo per esempio di disporre di una parametrizzazione  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto connesso, di modo che  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ , e sia  $\boldsymbol{\phi}: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$ , con  $\hat{\mathcal{V}} \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto connesso, un  $C^p$ -diffeomorfismo<sup>3</sup>. La mappa  $\hat{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\chi} \circ \boldsymbol{\phi}: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{U}$  è anch'essa una parametrizzazione di  $\mathcal{U}$ . Se indichiamo con  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{q}})$ , e quindi  $\mathbf{q}_0 = \boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{q}}_0)$ , abbiamo

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\chi}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b}(\boldsymbol{\phi}(\hat{\mathbf{q}}_0)) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \in T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M},$$

e d'altronde, essendo la matrice jacobiana della funzione  $\boldsymbol{\phi}$  di rango  $n$ ,  $\text{rank} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\chi}}}{\partial \hat{\mathbf{q}}}(\hat{\mathbf{q}}_0) = n$  ovvero

$$T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} = \text{span} \left\{ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\chi}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \right\}_a.$$

Di conseguenza, anche lo spazio normale rimane inalterato.

<sup>3</sup>Ricordiamo che un  $C^p$ -diffeomorfismo tra aperti è una applicazione biettiva con derivate continue fino all'ordine  $p$ , la cui inversa esiste e ha derivate continue fino all'ordine  $p$ .

**1.2. Coordinate lagrangiane.** Torniamo ora al nostro problema meccanico. Come abbiamo anticipato, ci occuperemo principalmente di sistemi meccanici soggetti a condizioni olo nome nella forma dell'Eq. (2.1). Assumeremo in seguito che il vincolo esprima una *famiglia* di sottovarietà regolari<sup>4</sup>  $n$ -dimensionali indicizzata dal tempo  $t$ ,

$$\mathcal{M}(t) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^{3N}, \quad \boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N-n}.$$

Sia  $\mathbf{X}_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  una configurazione ammessa per un sistema di  $N$  punti materiali al tempo  $t$ , ovvero  $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{M}(t)$ . Per ipotesi, esiste nell'intorno di  $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{M}(t)$  una mappa  $\boldsymbol{\chi}(t, \bullet): \mathcal{V} \rightarrow M(t)$  con  $\mathcal{V}$  intorno di un certo  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}_0).$$

L'applicazione  $\boldsymbol{\chi}(t, \bullet): \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}(t)$  è indicizzata dalla variabile tempo  $t \in \mathbb{R}$ . Lo spazio  $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^n$  è lo spazio in cui vivono  $n$  parametri, detti nel contesto della meccanica *coordinate lagrangiane*. Assumeremo che l'insieme  $\mathcal{V}$  non dipenda da  $t$  e che solo  $\boldsymbol{\chi}$  si faccia carico della dipendenza da questo indice, e che lo faccia in modo da essere differenziabile almeno due volte con continuità rispetto ad esso. Se i vincoli sono scleronomi, allora la mappa  $\boldsymbol{\chi}$  non dipende da  $t$ .

Se ora siamo interessati a studiare una *traiettoria* nello spazio delle configurazioni  $\mathbf{X}(t)$ , ovvero una posizione in  $\mathbb{R}^{3N}$  dipendente dal tempo, avremo in generale  $\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}(t))$ , dove  $\mathbf{q}$  manifesta anch'essa una dipendenza da  $t$  indotta dalla dipendenza temporale nella traiettoria.<sup>5</sup>. Assumeremo che, nei moti in esame,  $\mathbf{q}$  abbia derivate continue almeno fino alla seconda in  $t$ .

In base a quanto detto, ha senso riesprimere le quantità cinematiche legate a  $\mathbf{X}$  in termini delle coordinate lagrangiane in  $\mathcal{V}$ . Per esempio,

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}(t))}{dt} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}) + \partial_t \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}),$$

che esibisce due termini diversi: il primo,

$$\sum_a \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}) \in T_{\mathbf{X}} \mathcal{M}(t)$$

è detto *velocità virtuale* e vive in  $T_{\mathbf{X}} \mathcal{M}(t)$ . Si tratta del contributo alla velocità “a vincolo fisso” dato che non contiene il contributo di derivata rispetto alla dipendenza esplicita da  $t$  dell'applicazione  $\boldsymbol{\chi}$ . Questo primo contributo è tangente a  $\mathcal{M}(t)$  nell'istante  $t$ . Il secondo termine,  $\partial_t \mathbf{X} \equiv \partial_t \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q})$  è dovuto invece alla sola dipendenza del vincolo dal tempo: questa velocità è detta *velocità di trascinamento* ed è nulla se i vincoli sono scleronomi, ovvero  $\boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}) \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$ .

**Esempio 2.4 —** Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi lungo un'asta infinita passante per l'origine in un riferimento cartesiano come in Fig. 2. L'asta mantiene un angolo fisso  $\alpha \in (0, \pi/2)$  rispetto alla direzione  $x_3$ , mentre precede attorno a tale asse, in modo che l'angolo tra l'asse  $x_1$  e il piano contenente l'asse  $x_3$  e l'asta sia  $\theta = \omega t$  per un qualche  $\omega \in \mathbb{R}$ . L'asta mobile è in effetti una sottovarietà

<sup>4</sup>Più propriamente, quindi, lo spazio in cui ha luogo il moto è un fibrato che ha come base  $\mathbb{R}$ , dove vive la variabile temporale,

$$\mathcal{C} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times \mathcal{M}(t) \equiv \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{M}(t) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N}.$$

Si parla talvolta di *fibrato delle configurazioni esteso*. Un punto in questo spazio è quindi una coppia  $(t, \mathbf{X})$  che, per definizione, soddisfa l'equazione  $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{0}$ . Su questo spazio è definita in maniera naturale la proiezione  $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\pi(t, \mathbf{X}) = t$  quando  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}(t)$ : l'insieme  $\pi^{-1}(t) = \mathcal{M}(t)$  si dice essere la *fibra* associata a  $t$ .

<sup>5</sup>Si dice che la mappa  $t \mapsto (t, \mathbf{X}(t))$  è una *sezione* del fibrato  $\mathcal{C}$ .

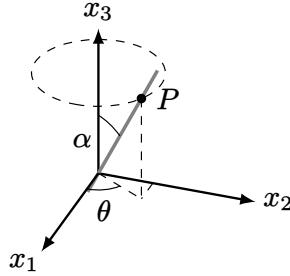


FIGURA 2. Asta rotante con punto materiale vincolato su di essa.

regolare di  $\mathbb{R}^3$ , spazio delle configurazioni del punto, su cui quest'ultimo è vincolato. Essa è identificata dalla condizione

$$\mathcal{M}(t): \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}\}, \quad \text{dove} \quad \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin \omega t x_1 - \cos \omega t x_2 \\ x_1 - \tan \alpha \sin \omega t x_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matrice jacobiana associata è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ 1 & 0 & -\tan \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 in ogni punto di  $\mathcal{M}(t)$  e per ogni  $t$ , per cui  $\mathcal{M}(t)$  ha dimensione 1 (come già sappiamo, essendo un'asta ideale!). Una applicazione  $\mathbf{x}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  che permette di parametrizzare globalmente  $\mathcal{M}(t)$  è la seguente

$$\mathbf{x}(t, q) = \begin{pmatrix} q \sin \alpha \cos \omega t \\ q \sin \alpha \sin \omega t \\ q \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

In altre parole,  $q$  è la distanza (con segno) lungo l'asta di  $P$  dall'origine. In particolare, la traiettoria  $\mathbf{x}(t)$  del punto  $P$  può essere parametrizzata come  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, q(t))$ , di modo che

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \dot{q} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \omega t \\ \sin \alpha \sin \omega t \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + q\omega \sin \alpha \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo termine, come si vede, è diretto come  $\mathbf{x}$ , ovvero nella direzione dell'asta, e corrisponde infatti alla componente della velocità *tangente* a  $\mathcal{M}(t)$  nell'istante  $t$ . Il secondo termine, invece, è ortogonale all'asse  $x_3$  (tangente alla circonferenza tratteggiata in figura) ed è esclusivamente dovuto al fatto che l'asta è in movimento (è infatti identicamente nullo per  $\omega = 0$ ).

**1.3. Principio di d'Alembert–Lagrange.** In un sistema di  $N$  punti materiali vincolati di modo che  $\mathbf{X}(t) \in \mathcal{M}(t)$ , sottovarietà regolare di dimensione  $n$ , ciascun punto  $P_k$  è sottoposto ad una forza totale  $\mathbf{F}_k$ . Questa forza può essere decomposta in due contributi. Un contributo, sia  $\mathbf{F}_k^{(v)}$ , è dovuto alla mera presenza del vincolo. La restante parte  $\mathbf{F}_k^{(a)}$  è detta *attiva* ed è usualmente il frutto dell'interazione tra  $P_k$  e altri punti materiali interni o esterni al sistema. In definitiva,

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(a)} + \mathbf{F}_k^{(v)}.$$

Possiamo concatenare tali contributi vincolari in un unico vettore di dimensione  $3N$  scrivendo  $\mathbf{F}^{(v)} := (\mathbf{F}_k^{(v)})_{k=1}^N$ , concatenare le forze attive  $\mathbf{F}^{(a)} := (\mathbf{F}_k^{(a)})_{k=1}^N$  e introdurre ugualmente la concatenazione  $\mathbf{Q} := (m_k \dot{\mathbf{x}}_k)_{k=1}^N$ , dove abbiamo indicato con  $\mathbf{x}_k$  il vettore di coordinate di  $P_k$  e con  $m_k$  la sua massa. Possiamo quindi scrivere in forma compatta le  $N$  equazioni del moto come

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)}.$$

Questa riscrittura permette di scrivere in forma compatta una serie di quantità. Per esempio, indicando con  $\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q}(t))$ , la *potenza* espressa dalle reazioni vincolari può essere scritta come

$$\Pi^{(v)} := \sum_{k=1}^N \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \mathbf{F}_k^{(v)} \rangle = \langle \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{F}^{(v)} \rangle = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \left\langle \partial_a \boldsymbol{\chi}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle + \left\langle \partial_t \boldsymbol{\chi}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle.$$

Il primo contributo nell'espressione precedente si dice *potenza virtuale della reazione vincolare* proprio perché legata a direzioni di variazione “a vincolo fisso”. Questo termine è centrale nel seguente principio, che introduce il concetto di *vincolo liscio*, o *ideale*.

**DEFINIZIONE 1.2** (Principio di d'Alembert–Lagrange). Un sistema olonomo si dice *a vincoli ideali o lisci* se la potenza virtuale delle reazioni vincolari è nulla in qualsiasi istante e in corrispondenza di qualunque stato cinematico del sistema.

In altre parole, in un vincolo liscio per qualsivoglia vettore  $\delta \mathbf{X} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{M}(t)$ ,  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0$ , ovvero le reazioni vincolari vivono nello spazio normale al vincolo.

Il principio può essere espresso in forme diverse. Una di queste si ottiene osservando che  $\mathbf{F}^{(v)} = \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F}^{(a)}$ , per cui

$$\langle \mathbf{F}^{(a)} - \dot{\mathbf{Q}}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0 \quad \forall \delta \mathbf{X} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{M}(t).$$

In questa formulazione,  $\delta \mathbf{X} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{M}(t)$  viene detto *spostamento virtuale*. Il principio ha il grande pregio di *non* dipendere dalle forze vincolari, ma solo dalla geometria del vincolo e dalle forze attive. Se le forze attive sono conservative e i vincoli fissi e lisci, vale la seguente

**PROPOSIZIONE 1.3.** *Se il sistema è soggetto a sole forze conservative e vincoli lisci e fissi, la sua energia meccanica si conserva.*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che le forze attive derivino da un potenziale  $V$ . Poiché per ipotesi  $\Pi^{(v)}$  è nullo (dato che anche  $\langle \partial_t \mathbf{X}, \mathbf{F}^{(v)} \rangle = 0$  essendo i vincoli fissi), l'unico contributo alla potenza è dovuto alle forze conservative, ovvero, detta  $T$  l'energia cinetica del sistema,  $\dot{T} = \Pi = \Pi^{(a)} = -\dot{V}$  da cui segue la conservazione dell'energia meccanica  $E = T + V$ .  $\square$

**1.4. Equazioni di Lagrange.** Immaginiamo ora di avere un sistema olonomo composto da  $N$  punti materiali  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , vincolato in modo che il suo moto sia descritto da  $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_k(t))_{k=1}^N \in \mathcal{M}(t)$ , sottovarietà regolare di dimensione  $n \leq 3N$ . Ricordando che localmente  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{q})$ , essa può essere riscritta in coordinate locali come

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \dot{\mathbf{x}}_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b A_{ab}(t, \mathbf{q}) + \sum_a \dot{q}_a B_a(t, \mathbf{q}) + C(t, \mathbf{q}).$$

dove abbiamo denotato con

$$A_{ab}(t, \mathbf{q}) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle, \quad B_a(t, \mathbf{q}) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \right\rangle, \quad C(t, \mathbf{q}) := \frac{1}{2} \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t} \right\rangle,$$

dove si intende  $\mathbf{x}_k(t) = \boldsymbol{\chi}_k(t, \mathbf{q}(t))$ ,  $\boldsymbol{\chi}_k \in \mathbb{R}^3$  terna in  $\boldsymbol{\chi}$  corrispondente alle coordinate del punto  $P_k$ . L'espressione si riscrive in forma più compatta come

$$T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(t, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \mathbf{B}(t, \mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}} \rangle + C(t, \mathbf{q}).$$

Nel caso di *vincoli fissi*, localmente  $\mathbf{x}_k(t) \equiv \boldsymbol{\chi}_k(\mathbf{q}(t))$ , e quindi i termini in  $\mathbf{B}$  e  $C$  sono nulli essendo  $\partial_t \boldsymbol{\chi}_k = \mathbf{0}$ . La matrice  $\mathbf{A}(t, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , a volte detta *matrice di massa* o *cinetica*, ha l'importante proprietà stabilita dal seguente teorema.

TEOREMA 1.4. *La forma*

$$\hat{T}: \mathrm{T}\mathcal{M}(t) \mapsto \mathbb{R}, \quad (\mathbf{q}, \mathbf{v}) \mapsto \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(t, \mathbf{q}) \mathbf{v} \rangle$$

*è quadratica simmetrica definita positiva in  $\mathbf{v}$ , ovvero  $\mathbf{A}(t, \mathbf{q})$  è simmetrica definita positiva per ogni  $\mathbf{q}$  e  $t$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\|\mathbf{v}\| \neq 0$ . Basta semplicemente esplicitare la forma:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(t, \mathbf{q}) \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^N m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \right\rangle = \sum_{k=1}^N m_k \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \right\|^2 > 0.$$

La disuguaglianza è stretta: infatti la somma può annullarsi se e solo se sono nulli tutti i contributi in essa, ovvero

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} = \sum_{a=1}^n v_a \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} = \mathbf{0},$$

ma ciò è impossibile per via della lineare indipendenza dei vettori  $\partial_a \mathbf{X} \equiv \partial_a \mathbf{x}$ , a meno che  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . La simmetria infine si nota osservando direttamente che  $A_{ab} := \sum_k m_k \langle \partial_a \mathbf{x}_k, \partial_b \mathbf{x}_k \rangle = A_{ba}$ .  $\square$

Osserviamo ora che

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}$$

ha un significato geometrico. Le componenti di questo vettore sono infatti le cosiddette *componenti lagrangiane* del vettore  $\mathbf{Q}$ , ovvero le proiezioni della quantità di moto  $\mathbf{Q}$  sullo spazio tangente  $\mathrm{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{M}(t)$  lungo i vettori  $\partial_a \mathbf{X}(t, \mathbf{q})$ ,

$$\langle \mathbf{Q}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_k m_k \sum_b \dot{q}_b \langle \partial_b \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle + \sum_k m_k \langle \partial_t \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a.$$

Derivando ulteriormente questa espressione rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) = \langle \dot{\mathbf{Q}}, \partial_a \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{Q}, \partial_a \dot{\mathbf{X}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \partial_a \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{Q}, \partial_a \dot{\mathbf{X}} \rangle.$$

L'ultimo termine a destra si può scrivere come

$$\langle \mathbf{Q}, \partial_a \dot{\mathbf{X}} \rangle = \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \partial_a \dot{\mathbf{x}}_k \rangle = \frac{\partial T}{\partial q_a}.$$

In definitiva abbiamo ottenuto l'equazione

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = f_a, \quad f_a := \langle \mathbf{F}, \partial_a \mathbf{X} \rangle.$$

Di nuovo, le quantità  $f_a$  sono le componenti lagrangiane della forza totale, dette *forze generalizzate*<sup>6</sup>. Quelle ottenute per  $a = 1, \dots, n$  sono le *equazioni di Lagrange*.

---

<sup>6</sup>In molti testi,  $f_a$  viene indicata con  $\mathcal{Q}_a$  — eviteremo però questa notazione dato che potrebbe indurre in confusione con la quantità di moto.

**1.4.1. Forze conservative e vincoli lisci.** Più interessante è il caso in cui le forze attive siano *conservative*, ovvero che esista un potenziale  $V$  tale che

$$\mathbf{F}^{(a)} = -\partial_{\mathbf{x}} V \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{F}_k^{(a)} = -\partial_{\mathbf{x}_k} V.$$

In questo caso, si ha che il contributo dovuto alla forza attiva  $\mathbf{F}^{(a)}$  alla forza generalizzata è

$$\langle \mathbf{F}^{(a)}, \partial_a \mathbf{x} \rangle = -\langle \partial_{\mathbf{x}} V, \partial_a \mathbf{x} \rangle = -\partial_a V,$$

dove, nell'ultimo passaggio,  $V$  è da intendersi ristretta alla sottovarietà, di modo che il suo argomento sia parametrizzato per mezzo di  $\mathbf{x}$ , ovvero  $V = V(\mathbf{x}(t, \mathbf{q}))$ , e che in seguito indicheremo  $V(t, \mathbf{q})$  per brevità. Le equazioni di Lagrange diventano così

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \langle \mathbf{F}^{(v)}, \partial_a \mathbf{x} \rangle,$$

dove abbiamo introdotto la funzione *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(t, \mathbf{q}).$$

Una lagrangiana nella forma sopra può più in generale ottenersi se esiste una funzione  $\hat{V}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  tale che

$$\langle \mathbf{F}^{(a)}, \partial_a \mathbf{x} \rangle = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial q_a} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a},$$

quindi non esclusivamente con forze conservative: anche in questo caso si ottengono le stesse equazioni di Lagrange nella forma in Eq. (2.3). Una funzione  $\hat{V}$  che soddisfi le equazioni la condizione precedente è detta *potenziale generalizzato*.

Se i vincoli sono lisci,  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \partial_a \mathbf{x} \rangle = 0$  per via del principio di d'Alembert, e l'equazione di Lagrange assume la forma molto compatta, e assolutamente fondamentale

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0.$$

La corrispondenza tra equazione di Lagrange e lagrangiana associata *non* è biunivoca: le stesse equazioni, e quindi lo stesso moto, possono essere prodotte da più lagrangiane. Supponiamo infatti di considerare

$$\hat{\mathcal{L}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{d h(t, \mathbf{q})}{dt}$$

per una generica funzione  $h(t, \mathbf{q})$  differenziabile di classe almeno  $C^2$  rispetto a tutti i suoi argomenti. Allora, osservando che

$$\frac{d h(t, \mathbf{q})}{dt} = \sum_a \frac{\partial h(t, \mathbf{q})}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial h(t, \mathbf{q})}{\partial t},$$

possiamo verificare che

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial h}{\partial q_a} \right) - \sum_b \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial q_b} \dot{q}_b - \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}.$$

**Esempio 2.5** (Potenziali generalizzati) — Un caso particolare ma importante di potenziale generalizzato è quello utile per lo studio del moto di punti materiali carichi in campo elettromagnetico. Si assume che esistano due campi  $\mathbf{E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{B}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiti in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^3$ , di modo che la forza applicata ad un punto materiale  $P$  di carica  $e$  sia espressa dalla *forza di Lorentz*

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \wedge \mathbf{B} \right)$$

dove  $c$  è la velocità della luce e  $\dot{\mathbf{x}}$  la velocità del punto. I campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$  devono soddisfare le *equazioni di Maxwell*, che in presenza di una densità di carica  $\varrho$  e di una densità di corrente  $\mathbf{j}$  nello spazio assumono la forma<sup>7</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\varrho, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Immaginiamo che la particella sia soggetta *esclusivamente* all'azione di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$ : in questo caso, quindi, non sarà necessario introdurre coordinate lagrangiane: potremo utilizzare  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  essendo  $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^3$ .

La prima equazione di Maxwell permette di scrivere  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ , per un certo campo  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  detto *potenziale vettore*. La seconda equazione può quindi essere scritta come

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

per una certa funzione scalare  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . La forza di Lorentz si può quindi riscrivere

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right).$$

Ora utilizziamo l'identità formale  $\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) = \nabla \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \nabla \rangle \mathbf{b}$  per riscrivere

$$\dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \langle \dot{\mathbf{x}}, \nabla \rangle \mathbf{A} = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{d \mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Sostituendo nell'espressione di  $\mathbf{F}$  abbiamo

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{c} \frac{d \mathbf{A}}{dt} \right) = -\nabla \hat{V} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad \hat{V} := \varphi - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle.$$

Detta  $m$  la massa del punto materiale, la lagrangiana è quindi

$$(2.4) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - e \left( \varphi(\mathbf{x}) - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle \right).$$

**Esempio 2.6** (Forze dissipative) — Non tutti i vincoli sono lisci e, se il principio di d'Alembert–Lagrange non è soddisfatto, si parla di *vincoli scabri*. Si osserva sperimentalmente che spesso, nel caso di vincoli scabri, su ciascun punto materiale agisce una reazione vincolare  $\mathbf{F}_k^{(v)}$  con un contributo  $\mathbf{F}_{k,\text{att}}^{(v)}$  lungo lo spazio tangente alla sottovarietà, ed in particolare tale che lungo il moto nella forma  $\mathbf{F}_{k,\text{att}}^{(v)} = -\mu_k \dot{\mathbf{x}}_k$  per un qualche coefficiente di attrito dinamico  $\mu_k > 0$ , oltre a eventuali componenti normali ai vincoli  $\mathbf{F}_{k,n}$ .

Supponiamo per semplicità che i vincoli siano fissi. Se  $\mathbf{F}_k^{(v)} = \mathbf{F}_{k,n} + \mathbf{F}_{k,\text{att}}$ , una forza siffatta non soddisfa il principio di d'Alembert e produce nel contributo nell'equazione di Lagrange

$$\langle \mathbf{F}^{(v)}, \partial_a \mathbf{x} \rangle = - \sum_{k=1}^N \sum_{b=1}^n \mu_k \dot{q}_b \langle \partial_b \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle.$$

Questa espressione può essere però pensata come il risultato di un “potenziale” delle variabili cinematiche, detto *funzione di dissipazione di Rayleigh*,

$$\mathcal{R}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2} \sum_k \sum_{ab} \mu_k \dot{q}_a \dot{q}_b \langle \partial_a \mathbf{x}_k, \partial_b \mathbf{x}_k \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{F}^{(v)}, \partial_a \mathbf{x} \rangle = - \frac{\partial \mathcal{R}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a}.$$

Se le reazioni vincolari dissipative sono solo in questa forma, allora le equazioni di Lagrange sono

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_a} = 0.$$

---

<sup>7</sup>In questo esempio adottiamo la notazione usuale in termini di vettore simbolico  $\nabla$  per gradiente, divergenza e rotore.

**1.5. Cambi di riferimento nel formalismo lagrangiano.** Abbiamo finora assunto di operare in un sistema di riferimento inerziale, in cui un sistema di punti materiali  $\mathcal{S}$  viene globalmente descritto da un insieme di  $3N$  coordinate  $\mathbf{X}$ , possibilmente soggetto a vincoli olonomi bilaterali lisci che permettono una parametrizzazione locale in termini di un set di  $n \leq 3N$  variabili lagrangiane  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . È però naturale chiedersi come questa descrizione cambia passando da un siffatto riferimento, sia esso  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , ad un generico riferimento  $O_\alpha\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2\hat{\mathbf{a}}_3$  possibilmente non inerziale, in moto con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}_\alpha$  rispetto al riferimento inerziale (ometteremo apici quando le quantità sono riferite al riferimento inerziale). Sia  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{q}(t))$  la concatenazione della traiettoria del sistema di  $3N$  punti materiali nel riferimento inerziale, parametrizzata da  $n$  variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$  secondo una opportuna mappa che tenga conto del vincolo, e  $\mathbf{X}^\alpha(t) = \mathbf{x}^\alpha(t, \mathbf{q}^\alpha(t))$  la stessa traiettoria nel riferimento (in generale) non inerziale, parametrizzato da  $n$  (diverse) variabili  $\mathbf{q}^\alpha(t)$  e una diversa mappa  $\mathbf{x}^\alpha$  nel riferimento  $O_\alpha\hat{\mathbf{a}}_1\hat{\mathbf{a}}_2\hat{\mathbf{a}}_3$ . Sappiamo che deve valere, per ciascuna tripletta  $\mathbf{x}_k$  corrispondente al  $k$ -esimo punto del sistema rappresentato in in  $\mathbf{X}$ , la relazione

$$(2.6) \quad \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_\alpha(t) + \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{x}_k^\alpha(t) \Leftrightarrow \mathbf{x}_k(t, \mathbf{q}) = \mathbf{x}_\alpha(t) + \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{x}_k^\alpha(t, \mathbf{q}^\alpha)$$

per una opportuna matrice di rotazione  $\mathbf{R}_\alpha(t)$  e un vettore di coordinate  $\mathbf{x}_\alpha$  che esprime la posizione di  $O_\alpha$  rispetto al riferimento inerziale. La mappa  $\mathbf{x}$  d'altra parte è un omeomorfismo sulla sua immagine (a  $t$  fissato), quindi la collezione di Eq. (2.6) può essere invertita per esprimere i parametri  $\mathbf{q}$  in termini dei parametri  $\mathbf{q}^\alpha$ ,

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t, \mathbf{q}^\alpha(t)).$$

Nelle nostre ipotesi, la mappa che permette di passare dalla parametrizzazione  $\mathbf{q}^\alpha$  alla parametrizzazione  $\mathbf{q}$  deve essere un diffeomorfismo di classe almeno  $C^2$  (poiché abbiamo assunto che la sottovarietà regolare sia di ordine maggiore o uguale a 2): deve cioè valere

$$\det \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_j^\alpha} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \neq 0$$

di modo che il cambio di parametrizzazione locale della stessa sottovarietà regolare da  $\mathbf{q}$  a  $\mathbf{q}^\alpha$  sia legittimo.

Supponiamo che, nel riferimento inerziale, la dinamica del sistema sia descritta da una lagrangiana  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , e sia

$$\mathcal{L}^\alpha(t, \mathbf{q}^\alpha, \dot{\mathbf{q}}^\alpha) \equiv \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t, \mathbf{q}^\alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}^\alpha, \dot{\mathbf{q}}^\alpha))$$

la lagrangiana riespressa nel nuovo sistema di coordinate lagrangiane. Nell'espressione precedente  $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}^\alpha, \dot{\mathbf{q}}^\alpha) := \partial_t \mathbf{q}(t, \mathbf{q}^\alpha) + \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{q}^\alpha)}{\partial q_a^\alpha} \dot{q}_a^\alpha$ . Calcoliamo, per  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}^\alpha}{\partial \dot{q}_i^\alpha} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial \dot{q}_i^\alpha} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial q_a}{\partial q_i^\alpha}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}^\alpha}{\partial q_i^\alpha} = \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial q_i^\alpha} + \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial q_i^\alpha}.$$

Nelle precedenti abbiamo osservato che, per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\dot{q}_i = \sum_{a=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_a^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j^\alpha} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j^\alpha}.$$

Applichiamo quindi l'equazione di Eulero-Lagrange alla lagrangiana  $\mathcal{L}^\alpha$  valutandola su una traiettoria del sistema:

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^\alpha}{\partial \dot{q}_i^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}^\alpha}{\partial q_i^\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial q_a}{\partial q_i^\alpha} - \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial q_i^\alpha} - \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial q_i^\alpha} = \sum_{a=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) \frac{\partial q_a}{\partial q_i^\alpha} = 0,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto la validità delle equazioni di Eulero–Lagrange sulla traiettoria nel riferimento inerziale. La conseguenza di questa derivazione è che nel nuovo riferimento le equazioni di Eulero–Lagrange mantengono la loro validità, purché si esegua un opportuno cambio di variabile  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{q}^\alpha)$  nella lagrangiana. Questa invarianza formale delle equazioni del moto è una delle più interessanti caratteristiche del formalismo lagrangiano.

Un'ultima importante osservazione è la seguente. Gli argomenti precedenti si applicano anche nel caso in cui si esegua un cambio di *parametrizzazione* della sottovarietà regolare su cui avviene il moto, senza eseguire cambi di riferimento, ovvero nel caso in cui si voglia passare da un insieme di coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  ad un altro  $\bar{\mathbf{q}}$ , con  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \bar{\mathbf{q}})$  diffeomorfismo locale. Le equazioni di Eulero–Lagrange sono quindi invarianti sotto riparametrizzazione della sottovarietà.

## 2. Il moto unidimensionale

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali,  $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ , vincolato con vincoli *olonomi e fissi* ad evolvere su una sottovarietà regolare unidimensionale connessa immersa in uno spazio  $\mathbb{R}^{3N}$ . Come abbiamo visto, ciò vuol dire che  $\mathcal{M}$  è una curva regolare, che immaginiamo parametrizzata globalmente da una certa applicazione  $\boldsymbol{x}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ . Quantità come l'energia cinetica e la matrice di massa sono calcolate di conseguenza. Per esempio, la matrice di massa è in questo caso una semplice funzione scalare  $A$  ed ha la forma

$$A(q) := \sum_{k=1}^N m_k \langle \boldsymbol{x}'_k(q), \boldsymbol{x}'_k(q) \rangle \Rightarrow T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2.$$

Alternativamente alla parametrizzazione offerta da  $\boldsymbol{x}$ , è estremamente comune ricorrere alla *parametrizzazione naturale della curva*, ovvero scegliere un punto  $\boldsymbol{x}(q_0)$  della curva, che utilizzeremo come origine lungo la curva, e introdurre l'*ascissa curvilinea*

$$s(q) := \int_{q_0}^q \|\boldsymbol{x}'(\bar{q})\| d\bar{q}, \quad q \in I.$$

Questa funzione fornisce la lunghezza dell'arco di curva (con segno) tra  $\boldsymbol{x}(q_0)$  e  $\boldsymbol{x}(q)$  e può essere utilizzata come variabile lagrangiana al posto di  $q$  stesso per parametrizzare la curva. Si tratta di una scelta standard: la traiettoria, parametrizzata in termini di  $s$ , verrà denotata  $\boldsymbol{\gamma}$ , di modo che  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma} \circ s$ . Come noto dall'Analisi, la nuova parametrizzazione è tale che  $\boldsymbol{\gamma}'(s)$  è un *versore* tangente alla curva nel punto di ascissa curvilinea  $s$ . L'energia cinetica assume la forma generale che abbiamo già visto ma espressa rispetto al nuovo parametro lagrangiano  $s$ ,

$$T = \frac{1}{2} A_\gamma(s) \dot{s}^2, \quad A_\gamma(s) := \sum_{k=1}^N m_k \langle \boldsymbol{\gamma}'_k(s), \boldsymbol{\gamma}'_k(s) \rangle.$$

Il vantaggio nell'utilizzare la parametrizzazione naturale diventa evidente quando  $N = 1$ , ovvero quando lo studio è focalizzato su un singolo punto materiale di massa  $m$  soggetto ad una forza  $\mathbf{F}$ . In questo caso,  $A_\gamma(s) = m \langle \boldsymbol{\gamma}'(s), \boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle \equiv m$ , ovvero  $A_\gamma(s)$  coincide esattamente con la massa del punto materiale ed è costante. L'Eq. (2.2) diventa perciò

$$m\ddot{s} = f.$$

Come nel caso generale, la forza generalizzata  $f := \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle$  è la proiezione della forza totale sulla direzione tangente alla sottovarietà, ovvero in questo caso alla curva. La legge  $s(t)$  soluzione dell'equazione precedente è detta *legge oraria* del moto. Ci focalizzeremo in particolare sul caso in cui  $\mathbf{F}$  è *posizionale*, ovvero  $f \equiv f(s)$ .

**2.1. Forze posizionali nel moto unidimensionale.** Come sappiamo, in generale,  $f \equiv f(t, s, \dot{s})$  dato che la forza  $\mathbf{F}$  può dipendere dal tempo, dalla posizione e dalla velocità del punto materiale. Se la forza è però *posizionale*, allora  $f \equiv f(s)$  e il problema dello studio del moto del punto si riconduce a quello dello studio del problema di Cauchy nella forma

$$\begin{cases} m\ddot{s} = f(s), \\ s(0) = s_0, \\ \dot{s}(0) = v_0, \end{cases}$$

dove  $s_0$  e  $v_0$  sono opportune condizioni iniziali per  $s$  e  $\dot{s}$ . La posizionalità della forza semplifica molto il problema perché permette di trattare la dinamica *come se* il sistema fosse soggetto ad una *forza attiva conservativa* a prescindere dalla natura dell'originale forza posizionale. È infatti possibile introdurre il potenziale

$$V(s) := - \int_0^s f(x) dx,$$

nell'ipotesi che  $f$  sia integrabile sull'intervallo considerato. Le equazioni del moto possono quindi essere pensate come le equazioni di Lagrange sulla lagrangiana

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - V(s).$$

**Esempio 2.7** (Moto armonico) — Sia data la lagrangiana

$$(2.8) \quad \mathcal{L}(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}ks^2$$

dove  $k > 0$ . Si tratta di una lagrangiana che descrive la presenza di una forza di richiamo che dipende linearmente dalla sola distanza (lungo la curva) da  $s = 0$ , indotta dal potenziale quadratico, detto *armonico*,  $V(s) = \frac{1}{2}ks^2$ . L'equazione del moto è quindi

$$m\ddot{s} + ks = 0 \Leftrightarrow \ddot{s} + \omega^2 s = 0, \quad \omega^2 := \frac{k}{m}.$$

Il problema di Cauchy su questa equazione viene completato da due opportune condizioni iniziali, siano  $s(0) = s_0$  e  $\dot{s}(0) = v_0$ . Si tratta di una equazione lineare omogenea a coefficienti costanti del *secondo* ordine, per risolvere la quale abbiamo bisogno di *due* soluzioni linearmente indipendenti, che indichiamo con  $s_1$  ed  $s_2$ , ovvero tali che, dati due numeri reali  $c_1$  e  $c_2$ ,  $c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) = 0$  identicamente se e solo se  $c_1 = c_2 = 0$ . A questo punto, la soluzione generale dell'equazione omogenea avrà la forma  $s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$ , dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  andranno fissati per mezzo delle condizioni iniziali. Nel nostro caso, si verifica che  $s_1(t) = \cos \omega t$  e  $s_2(t) = \sin(\omega t)$  soddisfano le condizioni richieste, per cui la soluzione da cercare è nella forma  $s(t) = \alpha_1 \cos \omega t + \alpha_2 \sin \omega t$ . Imponendo le condizioni iniziali, troviamo

$$s(t) = s_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Si tratta di una soluzione periodica, di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

L'utilità dell'aver introdotto  $V$  sta anche nel fatto che la quantità

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s)$$

risulta conservata durante il moto, come si vede derivando rispetto al tempo, e dunque essa rimane uguale al valore assunto nell'istante iniziale, che assumiamo essere  $t = 0$ ,  $E = E(s_0, v_0)$ . La presenza di questa quantità conservata è estremamente utile per l'integrazione delle equazioni.

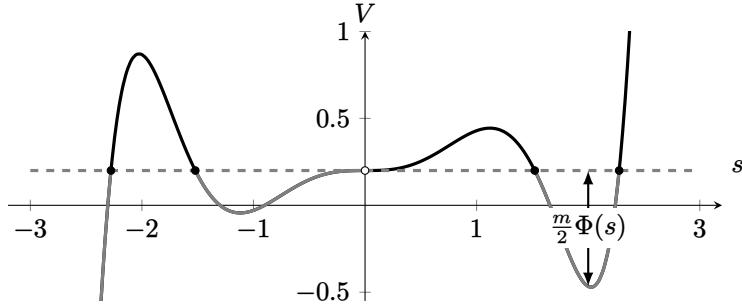


FIGURA 3. Esempio di potenziale unidimensionale  $V(s)$ . È tracciato il livello di energia  $E$  (linea tratteggiata) compatibile con il moto, e in grigio sono evidenziati gli intervalli in cui il moto è ammesso. In nero sono evidenziati punti di inversione, mentre in bianco sono evidenziati i punti corrispondenti a zeri multipli di  $\Phi(s)$ .

Assumiamo infatti che  $v_0 \neq 0$ : in un intorno di  $s_0$  dove  $E - V(s) > 0$ , l'espressione dell'energia meccanica implica

$$\dot{s}^2 = 2 \frac{E - V(s)}{m} =: \Phi(s),$$

che può essere riscritta come

$$1 = \frac{\text{sign}(v_0) \, ds}{\sqrt{\Phi(s)} \, dt} \Rightarrow t(s) = \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} \, dx,$$

che esprime il tempo a cui il punto raggiunge la posizione di ascissa curvilinea  $s$ : l'espressione è formalmente la soluzione per quadrature del problema. La funzione  $\Phi(s)$  contiene in particolare tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse, come anticipato. Il moto può infatti verificarsi solo nelle regioni in cui  $\Phi(s) > 0$ , delimitate dagli (eventuali) zeri della funzione: in questi punti, la velocità del punto materiale è nulla. Se  $\hat{s}$  è uno zero di  $\Phi(s)$ , l'equazione differenziale  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$  è sempre risolta da  $s(t) = \hat{s}$ .

Per fissare meglio le idee, supponiamo che  $v_0 > 0$  e che

$$\hat{s} = \inf\{s > s_0 : \Phi(s) = 0\}$$

(possibilmente pari a  $+\infty$  se l'insieme è vuoto). Allora, per ogni  $s \in (s_0, \hat{s})$  la funzione

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} \, dx$$

ha derivata strettamente positiva ed è quindi invertibile: essa quantifica il tempo (finito) necessario al punto materiale per raggiungere  $s$  a partire da  $s_0$ . D'altronde il tempo necessario per raggiungere  $\hat{s} > s_0$  partendo da  $s_0$ , dato da

$$(2.9) \quad t(\hat{s}) = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} \, dx$$

può essere una quantità finita o infinita. Assumendo in particolare che  $\hat{s} \in \mathbb{R}$  e che  $\Phi$  sia analitica in tale punto, possono verificarsi due casi distinti.

Se  $\hat{s}$  è uno zero semplice di  $\Phi(s)$ , cioè  $\Phi(s) = (\hat{s} - s)\phi(s)$  con  $\phi(s) > 0$  in un intorno di  $\hat{s}$ , l'Eq. (2.9) fornisce una quantità finita: questo vuol dire che esiste una soluzione del moto che, partendo da  $s_0$ , raggiunge  $\hat{s}$  in tempo finito. In  $\hat{s}$  la forza generalizzata agente sul punto materiale è  $f(\hat{s}) = -V'(\hat{s}) = \frac{m}{2}\Phi'(\hat{s}) = -\phi(\hat{s}) < 0$ , per cui una volta giunto in  $\hat{s}$ , il punto materiale accelera nella direzione negativa e torna verso  $s_0$ . Il tempo necessario per raggiungere  $s_0$  da  $\hat{s}$  partendo a velocità nulla è dato dalla stessa espressione in Eq. (2.9). D'altra parte, sappiamo che esiste un'altra possibile soluzione con  $s(0) = \hat{s}$  che soddisfa la stessa equazione  $\dot{s}^2 = \Phi(s)$ , ovvero la soluzione costante  $s(t) = \hat{s}$ . La coesistenza di due distinte soluzioni con stessa condizione iniziale per la stessa equazione differenziale del primo ordine è segno del fatto che il teorema di Cauchy non è applicabile a questa situazione. In effetti  $\sqrt{\Phi(s)}$  non è lipschitziana in un intorno di  $\hat{s}$  se  $\hat{s}$  è uno zero semplice. La soluzione fisica è quella compatibile con le accelerazioni in  $\hat{s}$ , ovvero che prevede che il punto materiale torni indietro verso  $s_0$  e per questo  $\hat{s}$  si dice *punto di inversione*. Vale il seguente teorema.

**TEOREMA 2.1.** *Il moto tra due zeri semplici consecutivi  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+$  è periodico di periodo*

$$\tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+$  due zeri semplici consecutivi di  $\Phi(s)$ . Per ipotesi, nell'intervallo  $[\hat{s}_-, \hat{s}_+]$  possiamo scrivere  $\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(\hat{s}_+ - s)\phi(s)$  con  $\phi(s) > 0$  per  $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$ . La velocità del punto materiale si annulla in  $\hat{s}_{\pm}$  mentre la forza ha in questi punti segno opposto:

$$\frac{2}{m}f(\hat{s}_+) = \Phi'(\hat{s}_+) = -(\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_+) < 0, \quad \frac{2}{m}f(\hat{s}_-) = \Phi'(\hat{s}_-) = (\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_-) > 0,$$

il che fa sì che il moto si inverta in questi punti estremali. Partendo da  $s_0 \in (\hat{s}_-, \hat{s}_+)$  con  $v_0 > 0$  al tempo  $t = 0$ , il moto prosegue quindi fino a  $\hat{s}_+$  dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, il punto materiale subisce una accelerazione verso  $\hat{s}_-$  che lo fa ripassare da  $s_0$  con velocità opposta in segno, fino ad arrivare in  $\hat{s}_-$ , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in  $s_0$  con stessa velocità  $v_0$  dopo un tempo  $\tau$ : da qui in poi il moto si riproduce identico essendosi verificate nuovamente, al tempo  $\tau$ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo  $t = 0$ . Il periodo quindi è

$$\tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx - \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx. \quad \square$$

Se  $\hat{s}$  è uno zero multiplo di  $\Phi(s)$ , ovvero in un intorno di  $\hat{s}$  si ha che  $\Phi(s) = (\hat{s} - s)^{\kappa}\phi(s)$  con  $\kappa > 1$  e  $\phi(s) > 0$ , l'integrale in Eq. (2.9) diverge: questo fatto è coerente con il teorema di Cauchy sull'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali. Osservando infatti che le equazioni del moto si scrivono come  $\dot{s} = \pm\sqrt{\Phi(s)}$ , nel caso in cui  $\hat{s}$  sia uno zero multiplo, la quantità  $\sqrt{\Phi(s)}$  è lipschitziana in un intorno di  $\hat{s}$ , fatto che garantisce l'unicità della soluzione: dato che  $s(t) = \hat{s}$  esiste come soluzione avente condizione iniziale  $s(0) = \hat{s}$ , questa può essere l'unica soluzione per questa condizione iniziale. Ogni altra traiettoria può solo avvicinarsi al punto  $\hat{s}$  senza mai toccarlo (diversamente, vi sarebbero due possibili soluzioni passanti per  $\hat{s}$ ). Si noti inoltre che, coerentemente con questo fatto, la forza applicata al punto materiale in uno zero multiplo  $\hat{s}$  è nulla,  $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) = 0$ , per cui in effetti un punto materiale in  $\hat{s}$  non accelera.

### 3. Equilibrio e spazio delle fasi in sistemi autonomi

**3.1. Spazio delle fasi.** Abbiamo visto che le equazioni di Lagrange nella loro forma più generale si scrivono

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = f_a, \quad a = 1, \dots, n,$$

dove appaiono le forze generalizzate  $f_a = \langle \mathbf{F}, \partial_a \mathbf{X} \rangle$ . Se introduciamo il vettore  $\mathbf{f} = (f_a)_a$  avente come componenti le forze generalizzate, le equazioni di Lagrange possono essere scritte in forma compatta come

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} - \partial_{\mathbf{q}}T = \mathbf{f}.$$

Osservando ora che  $\mathbf{A}$  è una matrice simmetrica definita positiva, possiamo invertirla e scrivere

$$(2.11) \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B} + \partial_{\mathbf{q}}T) =: \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Si tratta quindi di un sistema di equazioni del secondo ordine *in forma normale*. Il termine a destra *non* dipende da derivate di  $\mathbf{q}$  di ordine superiore al primo, dato che  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , mentre l'energia cinetica dipende in generale da  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ , per cui anche il gradiente  $\partial_{\mathbf{q}}T$  dipende al più da derivate temporali del primo ordine di  $\mathbf{q}$ . L'integrazione univoca delle equazioni del moto in un intorno di un certo tempo iniziale, sia  $t = 0$  richiede, secondo il teorema di Cauchy, un insieme di condizioni iniziali  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  e  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{v}_0$ , purché il termine a destra sia sufficientemente regolare, ovvero lipschitziano. Nell'analisi che segue assumeremo che tali ipotesi di regolarità siano verificate e che quindi la soluzione al problema di Cauchy esista unica, *a meno che non sia esplicitamente dichiarato diversamente*.

In questa sezione, ci focalizzeremo su una sottoclasse di sistemi meccanici di particolare importanza, detti *sistemi autonomi*, ovvero tali da non esibire una dipendenza esplicita dal tempo né in  $\mathcal{M}$  (vincoli scleronomi) né nelle forze applicate. In questo caso quindi  $T = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle$ , mentre  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , per cui  $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Le equazioni di Lagrange possono essere così scritte come un sistema di equazioni del primo ordine

$$(2.12) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \mathbf{v}). \end{cases}$$

Insieme ad una coppia di condizioni iniziali  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ , le due equazioni determinano univocamente l'evoluzione del sistema (a condizione che le ipotesi del teorema di Cauchy siano soddisfatte), così che i valori di  $\mathbf{z} := (\mathbf{q}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2n}$  evolvono in uno spazio di dimensione  $2n$  detto *spazio delle fasi*. Un vettore  $\mathbf{z}$  nello spazio delle fasi identifica lo *stato cinematico* del sistema, dato che contiene informazioni sulla sua posizione e sulla sua velocità. Il sistema in Eq. (2.12) può essere scritto come

$$(2.13) \quad \dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{z}), \quad \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} := (\mathbf{q}, \mathbf{v}).$$

In questo spazio, indichiamo con

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0) := (\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t))$$

il valore della soluzione del sistema di equazioni al tempo  $t$  ottenuta utilizzando le condizioni iniziali  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$  per  $t = 0$ . La mappa  $\mathbf{g}^t$  che associa a  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$  la sua evoluzione dopo un tempo  $t$  è il cosiddetto *flusso di fase* associato al sistema in coordinate locali, mentre la curva  $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$  viene anche detta *curva di fase* passante per  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$ . Il flusso di fase ha una cruciale proprietà di semigruppo, ovvero, detti  $t, t' > 0$ ,

$$\mathbf{g}^{t+t'} \mathbf{z} = \mathbf{g}^t(\mathbf{g}^{t'} \mathbf{z}).$$

*Questo discende dal fatto che il sistema è autonomo e, nella variabile  $\mathbf{z}$ , del primo ordine,  $\dot{\mathbf{z}} = \Psi(\mathbf{z})$ : la forma della legge di evoluzione non cambia nel tempo e la traiettoria  $\mathbf{g}^t \mathbf{z}$  per  $t > t_0$  dipende esclusivamente dal valore  $\mathbf{g}^{t_0} \mathbf{z}$ , sotto opportune condizioni di regolarità per  $\Psi$  che supporremo sempre soddisfatte. Le caratteristiche di questo flusso, e del suo comportamento attorno a speciali punti, saranno oggetto di questa sezione.*

**3.2. Funzioni di Ljapunov.** Il concetto di spazio delle fasi permette di introdurre in maniera più precisa quelli di *equilibrio* e di *stabilità secondo Ljapunov*. Fissiamo anzitutto la notazione: indichiamo con  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$  un generico punto dello spazio delle fasi, e con  $\mathcal{B}_r(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} : \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < r\}$  la palla aperta centrata in  $\mathbf{z}_0$  di raggio  $r > 0$ . Nel seguito indicheremo, come sempre,  $\chi: \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  la parametrizzazione locale della sottovarietà  $n$ -dimensionale che esprime il vincolo, e che assumiamo *fissa*.

**DEFINIZIONE 3.1** (Equilibrio). Una configurazione  $\mathbf{X}_0 = \chi(\mathbf{q}_0) \in \mathcal{M}$  è detta *di equilibrio* se la coppia  $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  nello spazio delle fasi è soluzione del problema in Eq. (2.12), ovvero

$$\phi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = [\mathbf{A}(\mathbf{q}_0)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Se questo è il caso, allora  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ , soluzione costante, risolve le equazioni del moto. La definizione sopra può essere riletta per mezzo del principio di d'Alembert–Lagrange. Infatti  $\mathbf{f} = (f_a)_a$  è la concatenazione delle proiezioni  $f_a = \langle \mathbf{F}, \partial_a \chi \rangle$ . Poiché stiamo considerando vincoli ideali, questo significa in particolare che  $f_a = \langle \mathbf{F}, \partial_a \chi \rangle = \langle \mathbf{F}^{(a)}, \partial_a \chi \rangle$ , dove  $\mathbf{F}^{(a)}$  è la concatenazione delle forze attive, dato che le reazioni vincolari sono, per il principio di d'Alembert–Lagrange, a proiezione nulla sullo spazio tangente. La condizione di equilibrio  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  equivale a dire che per ogni spostamento virtuale  $\delta \mathbf{X} = \sum_{a=1}^n \delta X_a \partial_a \chi(\mathbf{q}_0)$  varrà  $\langle \mathbf{F}^{(a)}, \delta \mathbf{X} \rangle = \sum_a \delta X_a f_a = 0$ , ovvero al seguente teorema.

**TEOREMA 3.1** (Principio dei lavori virtuali). *Perché  $\mathbf{X}_0 = \chi(\mathbf{q}_0)$  sia punto di equilibrio di un sistema vincolato su una sottovarietà regolare  $\mathcal{M}$ , è necessario e sufficiente che la concatenazione  $\mathbf{F}^{(a)}$  delle forze attive sia nello spazio normale  $(T_{\mathbf{X}_0} \mathcal{M})^\perp$ .*

Le configurazioni di equilibrio possono essere ulteriormente classificate in base alla loro *stabilità*, introdotta dalla seguente

**DEFINIZIONE 3.2** (Equilibrio stabile). Una configurazione di equilibrio  $\mathbf{X}_0$  è *stabile secondo Ljapunov* se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$ , tali che

$$\mathbf{z} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \mathcal{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0), \quad \forall t > 0.$$

In particolare, una configurazione di equilibrio stabile si dice *asintoticamente stabile* se esiste  $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$  tale che

$$\mathbf{z} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| = 0.$$

Una configurazione di equilibrio che non è stabile si dice *instabile*.

Per dare un criterio di stabilità per un sistema meccanico, è utile introdurre il seguente concetto da applicarsi ad una generica funzione scalare sullo spazio delle fasi.

**DEFINIZIONE 3.3** (Derivata di Lie). Sia data una funzione  $\Lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Lambda \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , definita su un aperto  $\Omega$  spazio delle fasi del sistema che soddisfa  $\dot{\mathbf{z}} = \Psi(\mathbf{z})$ . La funzione

$$\dot{\Lambda}(\mathbf{z}) := \langle \partial_{\mathbf{z}} \Lambda(\mathbf{z}), \Psi(\mathbf{z}) \rangle$$

è detta *derivata di Lie* di  $\Lambda$  lungo il flusso  $\mathbf{g}^t$ .

La derivata di Lie di  $\Lambda$  non è altro che la forma che una derivata temporale totale di  $\Lambda$  assume quando calcolata lungo una traiettoria determinata dalle equazioni del moto. Infatti se  $\mathbf{z}(t)$  è una traiettoria nello spazio delle fasi

$$\frac{d\Lambda(\mathbf{z}(t))}{dt} = \langle \partial_{\mathbf{z}}\Lambda(\mathbf{z}), \dot{\mathbf{z}} \rangle = \langle \partial_{\mathbf{z}}\Lambda(\mathbf{z}), \Psi(\mathbf{z}) \rangle.$$

Il seguente teorema, dovuto ad Aleksandr M. Ljapunov, permette di caratterizzare i punti di equilibrio stabili in virtù di una speciale funzione scalare la cui derivata di Lie soddisfa opportune condizioni.

**TEOREMA 3.2 (Ljapunov).** *Sia  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  una configurazione di equilibrio di un sistema autonomo che evolve come  $\dot{\mathbf{z}} = \Psi(\mathbf{z})$ , con  $\Psi$  lipschitziana nei suoi argomenti. Supponiamo che esista una funzione  $\Lambda \in C^1(\Omega)$ , detta funzione di Ljapunov, su un intorno aperto  $\Omega$  di  $\mathbf{z}_0$  tale che*

- (1)  $\Lambda(\mathbf{z}) > \Lambda(\mathbf{z}_0) \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ ;
- (2)  $\dot{\Lambda}(\mathbf{z}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega$ .

Allora  $\mathbf{z}_0$  è di equilibrio stabile. In particolare, se in aggiunta  $\dot{\Lambda}(\mathbf{z}) < 0$  per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ , il punto  $\mathbf{z}_0$  è asintoticamente stabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Assumiamo, senza perdere in generalità, che  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = 0$ . Sia dunque  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \subset \Omega$  una palla chiusa di raggio  $\epsilon$  centrata in  $\mathbf{z}_0$ . Per il teorema di Weierstrass, essendo la sua frontiera  $\partial\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$  una superficie sferica chiusa e limitata, la funzione  $\Lambda$  ammetterà su di essa un minimo, sia esso

$$2\lambda := \min_{\mathbf{z} \in \partial\bar{\mathcal{B}}} \Lambda(\mathbf{z}) > 0.$$

Definiamo ora l'insieme

$$\Omega_\lambda := \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \cap \Lambda^{-1}([0, \lambda]) \subset \Omega.$$

Questo insieme è *limitato* per costruzione, ed è anche *chiuso* essendo l'intersezione di due chiusi: è quindi *compatto* per il teorema di Heine–Borel. Si noti che  $\Omega_\lambda$  è *interno* a  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ : se così non fosse, esisterebbe  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \cap \partial\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ , che è un assurdo essendo, per  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda$ ,  $\Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda < \min_{\mathbf{x} \in \partial\bar{\mathcal{B}}} \Lambda(\mathbf{x}) = 2\lambda$ . Inoltre,  $\mathbf{z}_0 \in \Omega_\lambda$ , naturalmente, essendo  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = 0$ . Ora avviene che

$$\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda, \quad \forall t \geq 0,$$

per via del fatto che la funzione  $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})$  è non crescente in  $t$ , e quindi  $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) \leq \lambda$  per tutti i tempi successivi a  $t = 0$ : si dice che  $\Omega_\lambda$  è un insieme *positivamente invariante*. Essendo  $\Lambda$  continua per ipotesi, esiste  $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$  tale che  $\mathbf{z} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \Lambda(\mathbf{z}) < \lambda$ , e in particolare vi sarà un  $\delta > 0$  tale per cui  $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \subset \Omega_\lambda$ . Pertanto, ogni punto di tale intorno,  $\mathbf{z} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$ , ha  $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda \subset \mathcal{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$  che prova la stabilità secondo Ljapunov.

Supponiamo ora che la disegualanza su  $\dot{\Lambda}$  sia stretta. Consideriamo un certo  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda$ : la funzione  $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})$  è strettamente decrescente in  $t$  ed è limitata inferiormente, per cui esiste  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \bar{\lambda} \in [0, \lambda]$ . Supponiamo per assurdo che  $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \not\rightarrow \mathbf{z}_0$  e quindi  $\bar{\lambda} > 0$ , e definiamo l'insieme

$$\mathcal{K}_{\bar{\lambda}} := \Omega_\lambda \cap \Lambda^{-1}([\bar{\lambda}, \lambda]).$$

Questo insieme è compatto, essendo limitato e chiuso (è intersezione di due chiusi). Poiché  $\dot{\Lambda}(\mathbf{z}) < 0$ , preso  $\mathbf{z} \in \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}$ , l'intera traiettoria  $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}$ . Inoltre, essendo la funzione  $\dot{\Lambda}$  continua rispetto a  $\mathbf{z}$ , questa quantità ha perciò un massimo su  $\mathcal{K}_{\bar{\lambda}}$

$$-\eta := \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{K}_{\bar{\lambda}}} \dot{\Lambda}(\mathbf{z})$$

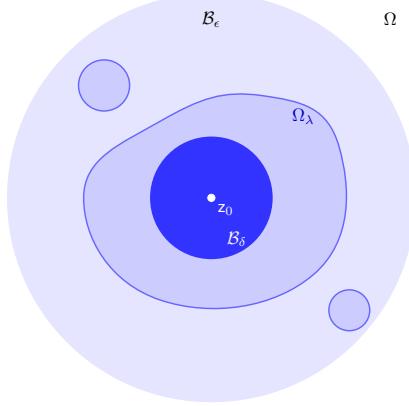


FIGURA 4. Illustrazione pittorica degli intorni nella dimostrazione del teorema di Ljapunov.

dove per ipotesi  $\eta > 0$ . Allora possiamo scrivere

$$\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) - \Lambda(\mathbf{z}) = \int_0^t \dot{\Lambda}(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z}) d\tau \leq -\eta t \Rightarrow 0 < \Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) \leq \Lambda(\mathbf{z}) - \eta t.$$

Per  $t$  sufficientemente grande, questa diseguaglianza induce una contraddizione.  $\square$

Nel teorema precedente la stabilità asintotica di  $\mathbf{z}_0$  nasce dalla richiesta che  $\dot{\Lambda} < 0$  in un intorno di  $\mathbf{z}_0$ . Questa ipotesi può essere lievemente rilassata, come mostrato nel seguente

**TEOREMA 3.3** (Principio di Barbashin–Krasovskii–LaSalle). *Si consideri un sistema autonomo descritto da  $\dot{\mathbf{z}} = \Psi(\mathbf{z})$ , dove  $\Psi$  è una funzione lipschitziana nei suoi argomenti. Sia  $\mathbf{z}_0$  un punto di equilibrio stabile e sia data una funzione di Ljapunov  $\Lambda$  su un intorno aperto  $\Omega$  di  $\mathbf{z}_0$  tale che*

- (1)  $\Lambda(\mathbf{z}) > \Lambda(\mathbf{z}_0) \forall \mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ ;
- (2)  $\dot{\Lambda}(\mathbf{z}) \leq 0, \forall \mathbf{z} \in \Omega$ ;
- (3) l'insieme  $\{\mathbf{z} \in \Omega : \dot{\Lambda}(\mathbf{z}) = 0\} \setminus \{\mathbf{z}_0\}$  non contiene traiettorie del sistema.

**DIMOSTRAZIONE.** Assumiamo  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = 0$  e come sopra definiamo  $\Omega_\lambda = \Omega \cap \Lambda^{-1}([0, \lambda])$ , insieme positivamente invariante e compatto. Per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda$ , possiamo identificare la traiettoria  $\mathbf{g}^t \mathbf{z}$  ed in particolare definire il suo insieme limite

$$\omega(\mathbf{z}) := \{\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{2n} : \exists \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ tale che } \mathbf{g}^{t_k} \mathbf{z} \rightarrow \bar{\mathbf{z}}\},$$

dove abbiamo indicato con  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione temporale strettamente crescente. Il fatto che  $\omega(\mathbf{z})$  sia non vuoto discende dalla compattezza di  $\Omega_\lambda$ . Si tratta inoltre di un insieme compatto (è limitato, ed inoltre chiuso in quanto insieme di punti di accumulazione della traiettoria  $\mathbf{g}^t \mathbf{z}$ ) e positivamente invariante: se  $\{t_k\}_k$  è una successione che produce  $\lim_k \mathbf{g}^{t_k} \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} \in \omega(\mathbf{z})$ , allora  $\lim_k \mathbf{g}^{t_k + \tau} \mathbf{z} = \mathbf{g}^\tau \lim_k \mathbf{g}^{t_k} \mathbf{z} = \mathbf{g}^\tau \bar{\mathbf{z}} \in \omega(\mathbf{z})$ . Il valore di  $\Lambda$  su  $\omega(\mathbf{z})$  è costante: poiché il limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \bar{\lambda}$  esiste per via del fatto che  $\Lambda$  è non-crescente e inferiormente limitata, tale limite sarà uguale al valore  $\Lambda(\bar{\mathbf{z}})$  per ogni  $\bar{\mathbf{z}} \in \omega(\mathbf{z})$ . Ma questo vuol dire che  $\dot{\Lambda}(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z}) = 0$  lungo le traiettorie in  $\omega(\mathbf{z})$ , che è una contraddizione a meno di ammettere che  $\omega(\mathbf{z}) = \{\mathbf{z}_0\}$ , ovvero l'insieme limite di tutte le traiettorie è il punto di equilibrio  $\mathbf{z}_0$ .  $\square$

Il teorema quindi rilassa l'assunzione  $\dot{\Lambda} < 0$  purché l'uguaglianza a zero non avvenga costantemente lungo intere curve di fase.

**3.3. Equilibrio in sistemi con vincoli lisci e fissi e forze conservative.** Il caso dei vincoli lisci e forze conservative indotte da un potenziale  $V$  è particolarmente semplice da studiare: in questo caso infatti

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Vale il seguente

**TEOREMA 3.4.** *In un sistema olonomo soggetto a forze conservative indotte dal potenziale  $V$  differenziabile e vincoli lisci e fissi, la configurazione  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è di equilibrio se e solo se  $\mathbf{q}_0$  è un punto critico del potenziale, ovvero  $\partial_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sul punto  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  così dato abbiamo che

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = -[\mathbf{A}(\mathbf{q}_0)]^{-1}\partial_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}_0).$$

Essendo  $\mathbf{A}$  definita positiva,  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  se e solo se  $\partial_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ .  $\square$

Una conseguenza di questo risultato, per esempio, è che, dato un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci le cui forze attive sono solo dovute alla gravità, le posizioni di equilibrio stabile sono minimi isolati della quota del centro di massa.

**Esempio 2.8** — Si noti che la differenziabilità è necessaria per richiedere che un minimo isolato sia di equilibrio. Consideriamo per esempio la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - |q|, \quad q \in \mathbb{R},$$

ottenuta utilizzando il potenziale  $V(q) = |q|$ : questo potenziale ha un minimo locale isolato in  $q = 0$ , ma le equazioni di Eulero–Lagrange non sono definite in tale punto e non è possibile applicare la definizione di equilibrio data sopra. Il punto è di equilibrio in un senso generalizzato, che qui non investigheremo e che ricorre al concetto di *subdifferenziale*.

**TEOREMA 3.5** (Lagrange–Dirichlet). *Sia dato un sistema olonomo con vincoli lisci e fissi, e soggetto a forze conservative indotte da un potenziale  $V$  differenziabile. Se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale isolato dell'energia potenziale, la corrispondente configurazione è di equilibrio stabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo  $\mathbf{q}_0$  punto di minimo,  $\partial_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ . Per dimostrare che si tratta di un punto di equilibrio stabile, basta utilizzare come funzione di Ljapunov l'energia meccanica,

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q}) \equiv \Lambda(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

che, nelle ipotesi del teorema, si conserva,  $\dot{\Lambda} = 0$ . Inoltre, se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale isolato del potenziale, detto  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ , esiste un intorno  $\Omega$  di  $\mathbf{z}_0$  nello spazio delle fasi in cui, per  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{v}) \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$  si ha che  $\Lambda(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle + V(\mathbf{q}) \geq V(\mathbf{q}) \geq V(\mathbf{q}_0) = \Lambda(\mathbf{z}_0)$ : in particolare la prima diseguaglianza è stretta se  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , mentre la seconda è stretta se  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0$ , ed almeno una di queste due condizioni deve essere sempre verificata.  $\square$

Il teorema di Lagrange–Dirichlet è valido a maggior ragione nel caso in cui siano presenti forze *dissipative*, ovvero tali da far diminuire (strettamente) l'energia meccanica durante il moto: l'applicazione del teorema di Ljapunov in questo caso mostra che il minimo locale isolato è in particolare asintoticamente stabile.

**Esempio 2.9** — Se è vero che un punto di minimo isolato locale di  $V$  è di equilibrio stabile secondo Ljapunov, non è in generale vero il viceversa. Supponiamo, per esempio, di considerare un punto materiale

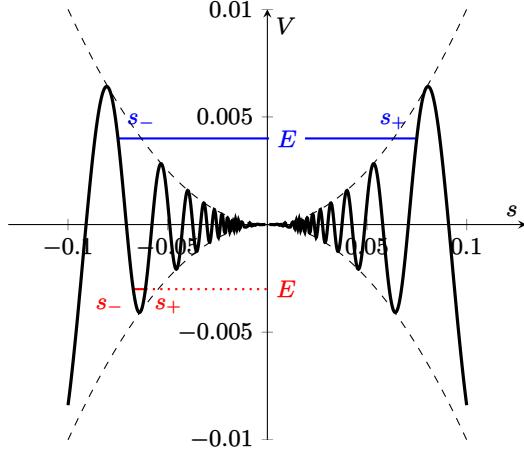


FIGURA 5. Potenziale nell’Esempio 2.9 e due intervalli ammessi per il moto per diversi valori di  $E$ .

di massa unitaria, in moto su una sottovarietà unidimensionale parametrizzata dall’ascissa curvilinea  $s \in \mathbb{R}$ , soggetto al potenziale

$$V(s) = \begin{cases} s^2 \cos \frac{1}{s} & s \neq 0 \\ 0 & s = 0. \end{cases}$$

L’energia potenziale considerata non ammette una espansione in serie in un intorno di  $s = 0$ , e tale punto non è di minimo relativo per  $V(s)$ , dato che per ogni  $\delta > 0$  esiste un  $s$  tale che  $0 < |s| < \delta$  per cui  $V(s) < V(0) = 0$ . Tuttavia,  $s = 0$  è di equilibrio, essendo  $V(s)$  differenziabile in  $s = 0$  con  $V'(0) = 0$ . Inoltre,  $s = 0$  è di equilibrio stabile secondo Ljapunov. Supponiamo infatti che il sistema abbia energia positiva,  $E > 0$ . Possiamo individuare in questo regime due punti di inversione  $s_{\pm}(E)$ , di modo che il moto avvenga sempre nell’intervallo  $[s_{-}(E), s_{+}(E)]$  (vedasi Fig. 5) con  $|s_{\pm}(E)| \rightarrow 0$  per  $E \rightarrow 0^{+}$ . Inoltre, in tale intervallo,  $V(s) > -E$  e quindi  $E = \frac{1}{2}\dot{s}^2 + V(s) > \frac{1}{2}s^2 - E \Rightarrow |\dot{s}| < \sqrt{2E}$ . La misura dell’intorno nel piano delle fasi in cui avviene il moto,  $[s_{-}(E), s_{+}(E)] \times [-\sqrt{2E}, \sqrt{2E}]$ , può quindi essere resa piccola a piacere. Un ragionamento analogo può essere fatto per  $E < 0$ , dove un intervallo arbitrariamente vicino all’origine può essere scelto di modo che il suo corrispondente intervallo nel piano delle fasi sia arbitrariamente piccolo per  $E \rightarrow 0^{-}$ . Di conseguenza,  $s = 0$  è una posizione di equilibrio stabile secondo Ljapunov.

**3.4. Diagramma delle fasi per i moti unidimensionali.** Lo studio delle traiettorie nello spazio delle fasi è in generale complesso e difficile da visualizzare avendo lo spazio dimensione  $2n$ , eccezion fatta per il caso in cui  $n = 1$ , ovvero nel caso di moti unidimensionali. Consideriamo un sistema autonomo unidimensionale, la cui evoluzione è descritta da equazioni nella forma

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}), \quad s \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Come nel caso generale, scriviamo questa equazione differenziale del secondo ordine come un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, cambiando leggermente la notazione utilizzata sopra:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \phi(x, y), \end{cases} \quad \phi(x, y) := \frac{1}{m}f(x, y).$$

Possiamo rappresentare il campo vettoriale  $\Psi(x, y) = (y, \phi(x, y))^{\top}$  associato al flusso in un *diagramma bidimensionale* in cui ad ogni coppia di coordinate  $(x, y)$  viene associato un vettore

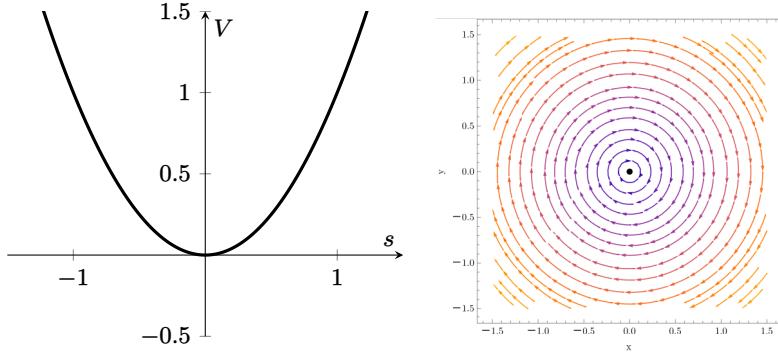


FIGURA 6. Potenziale e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase relativo all'esempio 2.10.

$\Psi(x, y)$ : questo vettore è per costruzione tangente ad una curva di fase passante per  $(x, y)$ , se  $\Psi(x, y) \neq \mathbf{0}$ .

Se le forze sono posizionali, ovvero  $f \equiv f(s)$ , le equazioni del moto implicano, come abbiamo visto, la conservazione dell'energia  $E(s, \dot{s}) := \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s)$ , dove come sopra  $-V'(s) = f(s)$ , pertanto le curve di fase sono *isoenergetiche*, ovvero  $E(x, y)$  non cambia lungo una curva di fase: fissato  $e \in \mathbb{R}$ , l'insieme di livello

$$\Gamma(e) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) := \frac{1}{2}my^2 + V(x) = e \right\}$$

contiene le curve di fase di energia  $e$ . L'insieme  $\Gamma(e)$  è in generale costituito da diverse componenti connesse, la cui regolarità è garantita se  $\nabla E(x, y) = (V'(x), my) \neq \mathbf{0}$  in ogni loro punto. Questa condizione equivale a richiedere  $\Psi(x, y) \neq \mathbf{0}$  e in definitiva che il punto *non* sia di equilibrio: infatti,  $(x_0, 0)$  corrisponde ad una posizione di equilibrio precisamente se  $V'(x_0) = 0$ , come sappiamo. I punti di equilibrio sono perciò i punti *critici* nel diagramma di fase, ovvero i punti in cui la regolarità di  $\Gamma(e)$  viene meno. Un punto critico  $(x_0, 0)$  è in corrispondenza con uno zero *multiplo* della funzione  $\Phi(x) = \frac{2}{m}(E - V(x))$ , essendo  $\Phi(x_0) = y_0 = 0$ , e dovendo essere  $\Phi'(x_0) = -\frac{2}{m}V'(x_0) = 0$ . Ciò significa che tali punti sono raggiunti solo *asintoticamente* dal moto, oppure sono punti di equilibrio stabile compatibili con la sola soluzione costante.

**DEFINIZIONE 3.4.** In un moto unidimensionale soggetto a forza posizionale, un insieme  $\Gamma(e)$  contenente un punto critico instabile si dice *curva separatrice*.

Una separatrice è per costruzione data dall'unione dei punti di equilibrio instabili e da curve connesse che esprimono traiettorie di moto che tendono asintoticamente ai detti punti di equilibrio instabile, senza mai raggiungerli.

**Esempio 2.10 —** Un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla legge armonica  $\ddot{s} = -s$  ha energia meccanica

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2,$$

che si conserva essendo la forza posizionale e associabile al potenziale  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$ . Gli insiemi di livello del problema sono semplici circonferenze nel piano delle fasi, vedasi Fig. 6. Esiste un unico punto critico, di equilibrio stabile, corrispondente a  $(x, y) = (0, 0)$ , senza alcuna separatrice.

**Esempio 2.11 —** Consideriamo un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto al potenziale  $V(s) = s^2(s^2 - 1)$  in moto su una curva con  $s \in \mathbb{R}$ . In Fig. 7 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune

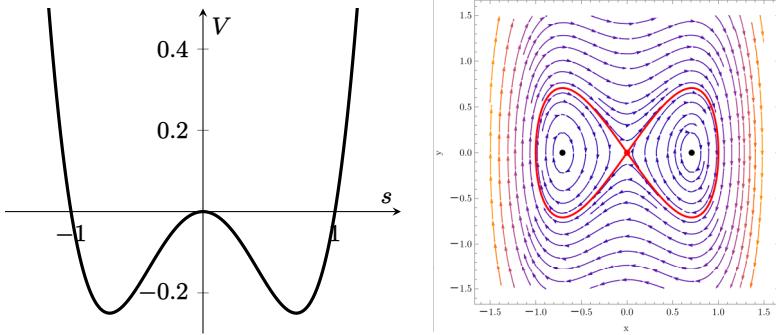


FIGURA 7. Potenziale nell’Esempio 2.11 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa  $m = 1$ .

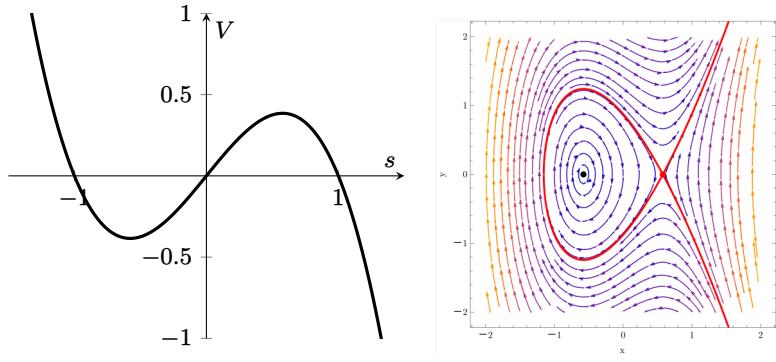


FIGURA 8. Potenziale nell’Esempio 2.12 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa  $m = 1$ .

curve di fase per diversi valori dell’energia meccanica totale  $E$ . Si ottiene facilmente che  $s = \pm 1/\sqrt{2}$  sono posizioni di equilibrio stabile, mentre  $s = 0$  è di equilibrio instabile: per esso passano le separatrici, corrispondenti a energia  $E = 0$ .

**Esempio 2.12** — Consideriamo un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto al potenziale  $V(s) = s(1 - s^2)$ . In Fig. 8 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve per diversi valori dell’energia meccanica totale  $E$ . Un punto di equilibrio stabile si trova in  $s = -1/\sqrt{3}$ , mentre  $s = 1/\sqrt{3}$  è di equilibrio instabile: per tale punto critico passa la separatrice, ottenuta per  $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

#### 4. Piccole oscillazioni

Supponiamo ora che  $\mathbf{q}_0$  sia un minimo isolato del potenziale di un sistema soggetto a vincoli fissi e lisci e forze attive conservative, ovvero, che esso corrisponda ad una configurazione di equilibrio stabile. Il moto attorno a  $\mathbf{q}_0$  può essere trattato riscrivendo la lagrangiana, in generale nella forma  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$  in una *approssimazione quadratica*. Anzitutto, possiamo sempre assumere  $V(\mathbf{q}_0) = 0$  senza perdere in generalità. Poiché stiamo assumendo che

$\partial_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ , in un intorno di  $\mathbf{q}_0$  potremo scrivere

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ab} (q_a - q_{a,0})(q_b - q_{b,0}) \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0) + o(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|^2) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} \rangle + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2)$$

dove abbiamo introdotto le variabili

$$\boldsymbol{\xi} := \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$$

che quantificano lo spostamento dalla posizione di equilibrio  $\mathbf{q}_0$ , e la matrice  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  di elementi

$$\hat{V}_{ab} := \frac{\partial^2 V_{ab}}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0).$$

L'idea è perciò di introdurre una lagrangiana che approssima  $\mathcal{L}$  in vicinanza di  $\mathbf{q}_0$  mantenendo solo termini quadratici in  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ , ovvero nella forma

$$\hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) := \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\boldsymbol{\xi}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_0) \boldsymbol{\xi} \rangle$$

dove abbiamo sostituito  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \rightarrow \hat{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(\mathbf{q}_0)$ . Questo sistema è di più semplice analisi, dato che le corrispondenti equazioni di Lagrange sono lineari,

$$(2.14) \quad \hat{\mathbf{A}} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}.$$

Qui  $\hat{\mathbf{A}}$  è definita positiva per ipotesi in quanto matrice di massa, mentre  $\hat{\mathbf{V}}$  è semidefinita positiva essendo  $\mathbf{q}_0$  un minimo locale isolato: *assumeremo in particolare che  $\hat{\mathbf{V}}$  sia definita positiva*, una ipotesi più stringente che chiedere semplicemente che  $\mathbf{q}_0$  sia un minimo isolato. Sotto queste ipotesi, vale il seguente teorema.

**TEOREMA 4.1.** *Esiste una trasformazione lineare che disaccoppia il sistema in Eq. (2.14) in  $n$  oscillazioni armoniche indipendenti nella forma*

$$\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n$$

dove ciascun  $z_a$  è detto modo normale del sistema di frequenza propria  $\omega_a$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{S} \in O(n)$  la matrice che diagonalizza  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{S}}^\top = \text{diag}(\alpha_i)$ . Per ipotesi,  $\alpha_i > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Definiamo la radice di  $\hat{\mathbf{A}}$  come  $\hat{\mathbf{A}}^{1/2} := \mathbf{S}^\top \text{diag}(\sqrt{\alpha_i}) \mathbf{S}$ : essa è simmetrica definita positiva, e indicheremo con  $\mathbf{A}^{-1/2}$  la sua inversa. Introduciamo la variabile

$$\mathbf{y} := \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \boldsymbol{\xi}$$

che ci permette di riscrivere l'equazione  $\hat{\mathbf{A}} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  come

$$\ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\Omega} := \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{A}}^{-1/2}.$$

Ora possiamo osservare che  $\boldsymbol{\Omega}$  è anch'essa simmetrica e definita positiva, con  $n$  autovalori (non necessariamente distinti) positivi. In particolare, esiste una matrice ortogonale  $\mathbf{O} \in O(n)$  tale che  $\text{diag}(\omega_a^2) = \mathbf{O}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{O}$ . Introduciamo quindi un'ultima variabile  $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{y}$ : l'equazione diventa ora

$$\ddot{\mathbf{z}} + \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n.$$

In questa equazione le componenti di  $\mathbf{z}$  sono disaccoppiate e soddisfano ciascuna una equazione armonica con pulsazione  $\omega_a$ , come anticipato nella tesi. Le coordinate originarie si ottengono invertendo la trasformazione,  $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{y} = \mathbf{O}^\top \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \boldsymbol{\xi} \Rightarrow \boldsymbol{\xi} = \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \mathbf{O} \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \mathbf{O} \mathbf{z}$ .  $\square$

La mappa  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{z}$  e la conseguente mappa  $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \dot{\mathbf{z}}$  permettono di fissare le condizioni iniziali (assumendo  $t = 0$  come istante iniziale)  $z_a(0) = z_{a0}$  e  $\dot{z}_a(0) = v_{a0}$  per ogni componente  $a$ -esima del nuovo vettore  $\mathbf{z}$ , e quindi procedere all'integrazione che produce

$$z_a(t) = z_{a0} \cos \omega_a t + \frac{v_{a0}}{\omega_a} \sin \omega_a t, \quad a = 1, \dots, n.$$

Come ultima osservazione, notiamo che l'energia meccanica del sistema approssimato ha una espressione piuttosto semplice. Seguendo le trasformazioni descritte nel teorema, infatti, essa vale

$$\hat{E} := \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}, \hat{A} \dot{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, \hat{V} \xi \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \Omega \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} \rangle = \sum_{a=1}^n \left( \frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \right)$$

ovvero si riscrive come la somma di energie meccaniche di singoli oscillatori di massa unitaria e pulsazione  $\omega_a$ , disaccoppiati tra loro. In questa approssimazione, *ciascuno* di questi contributi si conserva separatamente:

$$E_a := \frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \Rightarrow \frac{d E_a}{d t} = (\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a) \dot{z}_a = 0,$$

il che vuol dire che se  $E_a$  è l'energia associata all'oscillatore  $a$ -esimo nell'istante iniziale, durante tutto il moto varrà

$$-1 \leq u_a \leq 1, \quad u_a := \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2 E_a}}.$$

Il vettore  $\mathbf{u} = (u_a)_{a=1}^n$  contenente i modi riscalati evolve quindi nell'ipercubo  $[-1, 1]^n$ .

**Esempio 2.13** (Caso unidimensionale) — Supponiamo di considerare un sistema di  $N$  punti materiali  $\{(P_k, m_k)\}_{k=1}^N$  vincolato su una sottovarietà unidimensionale e soggetto a forze posizionali, di modo che, nella solita notazione, la sua lagrangiana sia

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 - V(q)$$

secondo una certa parametrizzazione  $\mathbf{x}(q)$  della guida stessa, dove  $A(q) := \sum_k m_k \langle \mathbf{x}'(q), \mathbf{x}'(q) \rangle$ . Se  $q_0$  è un minimo locale del potenziale, e dunque di equilibrio stabile, l'approssimazione di piccole oscillazioni produce

$$\hat{\mathcal{L}}(q, \dot{q}) = \frac{\hat{A}}{2} \dot{q}^2 - \frac{\hat{V}}{2} (q - q_0)^2, \quad \hat{A} := A(q_0), \quad \hat{V} := V''(q_0).$$

Nelle ipotesi che  $\hat{V} > 0$ , possiamo introdurre la variabile  $\xi = q - q_0$  e riscrivere le equazioni del moto in approssimazione di piccole oscillazioni come

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad \omega^2 := \frac{\hat{V}}{\hat{A}}.$$

Se chiamiamo  $\xi(0) = \xi_0$  e  $\dot{\xi}(0) = v_0$  le condizioni iniziali del problema, la soluzione è come sappiamo

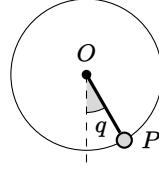
$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Il periodo dell'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio è quindi

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\hat{A}}{\hat{V}}}.$$

Come ultima osservazione, se la parametrizzazione è esattamente quella naturale,  $q \equiv s$ , e il sistema è costituito di un solo punto di massa  $m$ , allora  $\hat{A} = m$ .

**Esempio 2.14** (Pendolo) — Il *pendolo semplice* è un dispositivo meccanico che consiste di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato, tramite vincolo olonomo liscio e fisso, a muoversi su una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\ell$  in un piano verticale. Il moto è soggetto alla forza di gravità e può essere parametrizzato utilizzando  $q \in (-\pi, \pi]$ , deviazione dalla verticale del dispositivo, *a meno di periodicità*:



Usando  $q$  come variabile lagrangiana, e immaginando l'origine del nostro riferimento nel centro della circonferenza, la posizione del punto materiale è

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \ell \sin q \\ \ell \cos q \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo inteso il piano del moto coincidere con il piano  $xy$  di un riferimento centrato in  $O$ . Segue che  $\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \ell^2 \dot{q}^2$  e che il potenziale a cui è soggetto il punto materiale è  $V(q) = -mgl \cos q$ , con  $g$  accelerazione di gravità. La lagrangiana del pendolo è quindi

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q,$$

da cui l'equazione del moto

$$m \ell \ddot{q} + mgl \sin q = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{g}{\ell} \sin q = 0.$$

Si noti che, invece di utilizzare  $s = \ell q$ , ascissa curvilinea lungo la circonferenza, stiamo qui utilizzando direttamente come variabile fondamentale l'angolo  $q$ : in questa parametrizzazione,  $A(q) = m \ell^2$ . Sia  $E$  l'energia meccanica del pendolo; indicando con

$$e := \frac{E}{mgl}$$

possiamo anzitutto scrivere, dall'equazione per che impone la conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{q}^2 - mg \cos q \Rightarrow \dot{q}^2 = \frac{2\ell}{g} (\cos q + e) \equiv \Phi(q),$$

che richiede  $e \geq -1$ . Al variare di  $e$  possono distinguersi diversi tipi di moto, corrispondenti a opportune curve di fase nel diagramma delle fasi. Si noti che il diagramma delle fasi, i cui punti sono individuati da  $(x, y) = (q, \dot{q})$ , è da intendersi con condizioni periodiche in  $q$ : lo spazio delle fasi è quindi non  $\mathbb{R}^2$  ma più opportunamente un *cilindro* infinito  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Come nel caso generale, possono verificarsi diversi casi:

$e > 1$ :  $\Phi(q)$  non ammette zeri e il moto consiste di *rivoluzioni* lungo l'intera circonferenza: in questo regime, le traiettorie nel piano delle fasi si avvolgono infatti attorno al cilindro.

$e = 1$ : l'equazione

$$\dot{q}^2 = \frac{2\ell}{g} (\cos q + 1)$$

identifica la *separatrice* nel piano delle fasi che delimitano i due diversi regimi: essa passa infatti per l'unica soluzione di equilibrio *instabile*,  $(q, \dot{q}) = (\pi, 0)$ , associato ad uno zero multiplo di  $\Phi$ .

$|e| < 1$ :  $\Phi(e)$  ammette degli zeri *semplici* in questo caso il moto consiste di *oscillazioni periodiche*. Le traiettorie non si avvolgono attorno al cilindro e (a differenza del caso  $e > 1$ ) possono essere deformate con continuità in un punto, corrispondente all'unica soluzione di equilibrio *stabile*  $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ , corrispondente ad un punto di minimo relativo isolato del potenziale.

$e = -1$ : l'unica possibile soluzione è quella associata alla configurazione di equilibrio stabile  $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ .

Essendo la configurazione di equilibrio stabile  $q = 0$ , avendo come osservato prima  $\hat{A} = A(0) = m \ell^2$  e  $\hat{V} = V''(0) = mgl$ , in approssimazione di piccole oscillazioni il periodo del moto attorno al punto di equilibrio è

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\hat{A}}{\hat{V}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Si ritrova così la cosiddetta *legge dell'isocronia del pendolo*, che stabilisce che il periodo del pendolo (in questa approssimazione) è indipendente dalla massa del punto materiale.

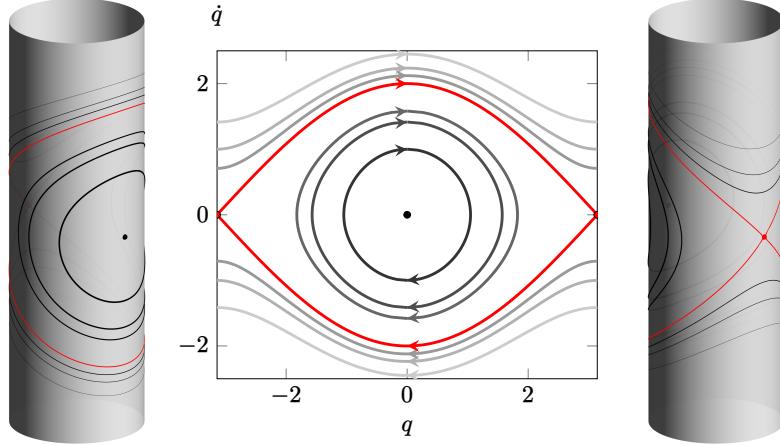


FIGURA 9. Piano delle fasi del pendolo con  $g/\ell = 1$ . Sono visualizzate le traiettorie per diversi valori di  $e$ , inclusa la separatrice ( $e = 1$ , linea rossa) e i due punti critici stabile (nero) e instabile (rosso).

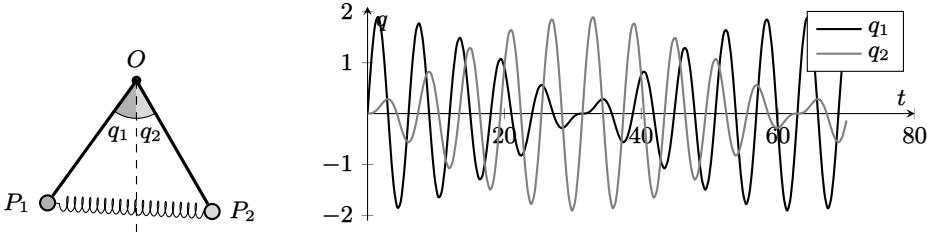


FIGURA 10. Problema dei pendoli accoppiati (sinistra). Fenomeno dei battimenti per  $0 < k \ll 1$  (destra).

**Esempio 2.15** (Pendoli accoppiati) — Consideriamo due pendoli di uguale lunghezza e massa, tali per cui, in opportune unità,  $m = g = \ell = 1$ . Supponiamo che essi siano uniti da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Essi sono attaccati allo stesso punto, vincolati a oscillare in un piano verticale passante per il punto a cui sono agganciati. Siano  $q_1 \in (-\pi, \pi]$  e  $q_2 \in (-\pi, \pi]$  gli angoli che i due pendoli descrivono rispetto alla verticale, come in Fig. 10. L'energia cinetica del sistema è

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

mentre quella potenziale è

$$V(\mathbf{q}) = -\cos q_1 - \cos q_2 + \frac{k}{2}((\cos q_1 - \cos q_2)^2 + (\sin q_2 - \sin q_1)^2) = -\cos q_1 - \cos q_2 + k - k \cos(q_1 - q_2).$$

I possibili punti di equilibrio si trovano ponendo

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}(\mathbf{q}) = \sin q_1 + k \sin(q_1 - q_2) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2}(\mathbf{q}) = \sin q_2 - k \sin(q_1 - q_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin q_1 = -\sin q_2, \\ \sin q_1 + k \sin(q_1 - q_2) = 0. \end{cases}$$

La prima equazione implica  $q_1 = -q_2$  o  $|q_1 - q_2| = \pi$ , da cui si ottiene per la seconda equazione  $\sin q_1 = 0$ . Ciò significa che  $q_1 = 0$  o  $q_1 = \pi$ , e dunque abbiamo tre configurazioni di equilibrio possibili:

$$\mathbf{q}_0 = \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \quad \mathbf{q}_1 = \left( \begin{smallmatrix} \pi \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \quad \mathbf{q}_2 = \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ \pi \end{smallmatrix} \right)$$

Vediamo ora quale di queste è una configurazione stabile calcolando la matrice hessiana,

$$\text{Hess}(V)(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos q_1 + k \cos(q_1 - q_2) & -k \cos(q_1 - q_2) \\ -k \cos(q_1 - q_2) & \cos q_2 + k \cos(q_1 - q_2) \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che

$$\text{Hess}(V)(\mathbf{q}_0) = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}(V)(\mathbf{q}_1) = \begin{pmatrix} -1-k & k \\ k & 1-k \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}(V)(\mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix} 1-k & k \\ k & -1-k \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che  $\mathbf{q}_1$  ed  $\mathbf{q}_2$  sono punti di equilibrio instabile, avendo le corrispondenti matrice hessiane autovalori  $\lambda_{\pm} = -k \pm \sqrt{1+k^2}$ , ovvero almeno un autovalore sempre strettamente negativo. Viceversa,  $\mathbf{q}_0$  è di equilibrio *stabile*, e possiamo procedere in approssimazione di piccole oscillazioni calcolando

$$\hat{\mathbf{V}} := \text{Hess}(V)(\mathbf{q}_0) = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Trascurando costanti additive irrilevanti, la lagrangiana in approssimazione quadratica diventa

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{V}} \mathbf{q} \rangle.$$

La matrice di massa  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$  ha  $\hat{\mathbf{A}}^{1/2} = \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} = \mathbf{I}$ , per cui, sempre nella notazione della teoria generale,  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}$  e  $\boldsymbol{\Omega} = \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} = \hat{\mathbf{V}}$ . Possiamo perciò direttamente e semplicemente fare un cambio di base utilizzando la diagonalizzazione già indicata per  $\hat{\mathbf{V}}$  e, per quanto detto sopra, possiamo quindi introdurre una nuova variabile

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

che soddisfa le equazioni

$$\ddot{z}_1 + z_1 = 0, \quad \ddot{z}_2 + \omega^2 z_2 = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$\omega = \sqrt{1+2k}.$$

Le frequenze dei modi normali sono perciò  $\omega_1 = 1$  e  $\omega_2 = \omega$ . La soluzione di queste equazioni dipenderà dalle condizioni iniziali date. Indicando  $z_a(0) = z_{a0}$  e  $\dot{z}_a(0) = v_{a0}$ , la soluzione generale sarà  $z_a(t) = z_{a0} \cos \omega_a t + \frac{1}{\omega_a} v_{a0} \sin(\omega_a t)$ , con  $a = 1, 2$ . Vediamo ora alcuni speciali soluzioni.

**Oscillazioni in fase:** Siano  $q_0, v_0$  due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = q_0, \\ q_2(0) = q_0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = \sqrt{2}q_0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \sqrt{2}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \sqrt{2}q_0 \cos t + \frac{\sqrt{2}v_0}{\omega} \sin t, \\ z_2(t) = 0. \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per  $z_2$  implica che per ogni  $t$  si ha  $q_1 = q_2$ , ovvero i due pendoli oscillano *in fase* con frequenza  $\omega_1 = 1$ .

**Oscillazioni in opposizione di fase:** Siano  $q_0, v_0$  due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = -q_0, \\ q_2(0) = q_0, \\ \dot{q}_1(0) = -v_0, \\ \dot{q}_2(0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = \sqrt{2}q_0, \\ \dot{z}_1(0) = 0, \\ \dot{z}_2(0) = \sqrt{2}v_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = 0, \\ z_2(t) = \sqrt{2}q_0 \cos(\omega t) + \sqrt{2}v_0 \sin(\omega t). \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per  $z_1$  implica che per ogni  $t$  si ha  $q_1 = -q_2$ , ovvero i due pendoli oscillano *in opposizione di fase* con frequenza  $\omega = \sqrt{1+2k} > 1$ .

**Trasferimento di energia:** Sia  $v_0$  dato e consideriamo infine le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = 0, \\ q_2(0) = 0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin t \\ z_2(t) = -\frac{v_0}{\omega \sqrt{2}} \sin \omega t. \end{cases}$$

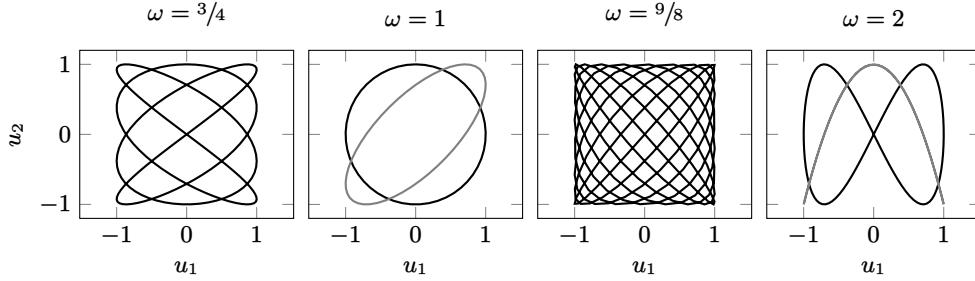


FIGURA 11. Esempi di figure Lissajous per diversi valori di  $\omega$ . Sono plottate le variabili riscalate  $u_a$ , in modo che le curve siano date sul quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

Ciò significa che, tornando alle coordinate  $q_1$  e  $q_2$ ,

$$q_1(t) = \frac{v_0}{2} \left( \sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad q_2(t) = \frac{v_0}{2} \left( \sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Se  $0 < k \ll 1$ ,  $\omega^{-1} = 1 + O(k)$  e si verificano dei *battimenti*: questo significa che periodicamente il moto di un pendolo si smorza completamente e tutta l'energia è trasferita nell'altro.

Concludiamo osservando che il moto nel piano  $(z_1, z_2)$  è circoscritto al rettangolo individuato dalle relazioni  $z_1^2 \leq 2E_1$  e  $\omega^2 z_2^2 \leq 2E_2$ , o, introducendo le variabili

$$u_a = \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2E_a}},$$

il moto può essere raffigurato nel quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . In questo quadrato, la traiettoria del sistema è individuata da una curva bidimensionale  $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$  che produce una cosiddetta *figura di Lissajous*, tipicamente osservata negli oscillosografi. Se  $\omega = 1$  la figura è una ellisse. Tra le curve con  $\omega = k$  vi sono dei polinomi: se infatti  $u_1(t) = \cos t$  e  $u_2(t) = \cos(kt)$ , allora nel piano  $(u_1, u_2)$  viene rappresentata la relazione

$$u_2(t) = \cos(kt) =: T_k(\cos t) = T_k(u_1(t)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

La funzione  $T_k(x)$  che permette di esprimere  $\cos(kt)$  in termini di  $\cos t$  è il *polinomio di Chebyshev del primo tipo di grado k*. I polinomi di Chebyshev soddisfano

$$T_0(x) = 1, \quad T_k(x) = x, \quad T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k > 1 \text{ intero.}$$

## 5. Il moto in un campo centrale

**5.1. Il problema dei due corpi.** Sia dato un sistema isolato di due punti materiali  $P_1$ , di massa  $m_1$  e in posizione  $\mathbf{x}_1$  rispetto ad un certo riferimento inerziale, e  $P_2$ , di massa  $m_2$  in posizione  $\mathbf{x}_2$  rispetto allo stesso riferimento, interagenti per mezzo di un potenziale  $V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ . La lagrangiana del sistema, dipendente da  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_k)_{k=1}^2$ , è

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\mathbf{x}}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{\mathbf{x}}_2\|^2 - V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Sia ora  $m = m_1 + m_2$  massa totale del sistema, e introduciamo le variabili

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \\ \mathbf{x}_G = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \frac{m_2}{m} \mathbf{r} + \mathbf{x}_G \\ \mathbf{x}_2 = -\frac{m_1}{m} \mathbf{r} + \mathbf{x}_G \end{cases},$$

rispettivamente posizione relativa e posizione del centro di massa  $G$  del sistema. La lagrangiana rispetto a queste due variabili si scrive

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{x}_G, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{x}}_G) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}_G\|^2 - V(\mathbf{r}).$$

Questa lagrangiana può essere interpretata come la lagrangiana di due punti materiali, uno di massa  $m$  e posizione  $\mathbf{x}_G$ , non soggetto ad alcuna forza, e uno individuato dal vettore posizione  $\mathbf{r}$ , soggetto al potenziale  $V(\mathbf{r})$  e di massa pari alla cosiddetta *massa ridotta*  $\hat{m}$ ,

$$\hat{m} := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

L'equazione di Lagrange per  $\mathbf{x}_G$  è semplicemente  $\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{0}$  a mezzo di una opportuna trasformazione galileiana: ciò significa che il centro di massa si muove con accelerazione nulla, mentre il moto di interazione tra i due corpi viene descritto dall'evoluzione nel tempo di  $\mathbf{r}$ , che soddisfa l'equazione di Lagrange

$$\hat{m} \ddot{\mathbf{r}} = -\partial_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}).$$

Si noti che è sempre possibile scegliere un riferimento inerziale con  $\mathbf{x}_G = \mathbf{0}$  e rimuovere completamente il moto del centro di massa dal gioco. Questa speciale riduzione permette perciò di riscrivere un moto di due corpi isolati come il moto di un singolo corpo in un potenziale “centrale”, ovvero dipendente dalla posizione  $\mathbf{r}$  del corpo da un'origine di riferimento. In questa sezione considereremo in particolare il caso in cui  $V \equiv V(\|\mathbf{r}\|)$ , ovvero la dipendenza è specificatamente dalla *distanza* dall'origine del riferimento.

**5.2. Proprietà generali del moto in campo centrale.** Occupiamoci dello studio del moto descritto da una lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - V(\|\mathbf{x}\|),$$

dove  $V: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  si assumerà almeno due volte differenziabile con continuità e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . La lagrangiana descrive un punto materiale di massa  $m$  soggetto ad una *forza centrale*, ovvero di equazione del moto

$$m \ddot{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}} V(\|\mathbf{x}\|) = -V'(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

La forza totale è perciò sempre diretta lungo la congiungente con un *centro*  $O$  di un campo di forze che qui corrisponde all'origine del riferimento. Una conseguente caratteristica cruciale dei moti in un campo centrale (che ne permette l'integrazione) è che, essendo il momento della forza rispetto all'origine  $O$  nullo, il momento angolare del punto materiale si conserva,  $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$ .

Il caso  $\mathbf{L}_O = \mathbf{x}_0 \wedge (m\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}$  è particolarmente semplice da studiare: il fatto che il momento angolare sia nullo significa che posizione iniziale  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  e velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  sono vettori paralleli (o che  $\mathbf{v}_0$  è nulla), e  $\mathbf{x}$  e  $\dot{\mathbf{x}}$  si manterranno paralleli durante tutta l'evoluzione che segue: il moto, pertanto, avrà una evoluzione nella forma  $\mathbf{x}(t) = s(t) \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|}$ , ovvero sarà un moto unidimensionale con equazione  $m\ddot{s} = -V'(|s|)$ .

Supponiamo quindi di essere nel caso meno elementare  $\mathbf{L}_O = \mathbf{x}_0 \wedge (m\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ . Essendo il momento angolare un vettore costante non nullo, esso identifica un piano ad esso normale passante per la posizione iniziale della traiettoria, detto *piano dell'orbita*: il moto si manterrà sempre in questo piano in virtù della conservazione di  $\mathbf{L}_O$ . Assumeremo che il nostro riferimento di coordinate sia tale che  $\mathbf{L}_O = (0, 0, L_z)^\top$  con  $L_z > 0$ . Parametrizzeremo il moto in *coordinate polari* nel piano ortogonale a  $\mathbf{L}_O$  per mezzo di due funzioni  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$(2.15) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi(t) \\ r(t) \sin \varphi(t) \end{pmatrix},$$

dove abbiamo ignorato, come sempre faremo da questo punto in poi, la terza componente, che rimane fissa e possiamo pensare nulla. Riscriviamo in particolare la lagrangiana in termini di queste variabili,

$$\mathcal{L}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - V(r).$$

Le equazioni del moto associate sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + V'(r) = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = mr^2\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi}^2 = 0.$$

La seconda equazione riesprime un fatto già noto. Infatti, scrivendo esplicitamente in questa parametrizzazione  $L_z$  si ottiene

$$L_z = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = mr^2\dot{\varphi}.$$

La seconda equazione non è quindi altro che la condizione  $\dot{L}_z = 0$ . La conservazione di  $L_z$  e l'aver scelto il riferimento in modo che  $L_z > 0$  implica anche che  $\dot{\varphi} > 0$ , ovvero sarà possibile eseguire un cambio di variabile parametrizzando il *tempo* in funzione dell'*angolo* che può svolgere a tutti gli effetti il ruolo di variabile temporale. In particolare possiamo esprimere il raggio  $r$  in funzione dell'angolo  $r(t) \equiv r(t(\varphi))$ : con un leggero abuso di notazione, indicheremo anche questa dipendenza come  $r(\varphi)$ . La prima equazione, invece, può essere riscritta come

$$m\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} + V'(r) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{r} + V_{\text{eff}}(r) = 0, \quad V_{\text{eff}}(r) := \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r).$$

In altre parole, l'equazione per  $r$  è quella di un punto materiale in un moto unidimensionale sul semiasse positivo dei reali soggetto al potenziale efficace  $V_{\text{eff}}(r)$ .

Essendo l'unica forza agente sul punto materiale conservativa, l'energia meccanica si conserva durante il moto. Inoltre, la corrispondenza tra moto in campo centrale e moto unidimensionale appare evidente ancora più evidente riscrivendo l'espressione dell'energia meccanica in funzione delle variabili polari. Si ha

$$E = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + V(\|\mathbf{x}\|) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r).$$

La forma funzionale dell'energia meccanica evidenzia ancora una volta la natura intrinsecamente unidimensionale del problema, essendo indipendente dalla variabile angolare.

**5.2.1. Seconda legge di Keplero.** Una osservazione di natura prettamente geometrica sulla dinamica in un moto in campo centrale è stata fatta da Keplero. Con riferimento alla Fig. 12, consideriamo un punto materiale che si muove tra pericentro ed apocentro: l'area spazzata da  $\mathbf{x}$  che si muove, nell'intervallo temporale  $[t, t + \delta t]$ , di modo che la sua anomalia aumenti dal valore  $\varphi$  al valore  $\varphi + \delta\varphi$ ,  $\delta\varphi > 0$ , nello stesso intervallo (stiamo assumendo  $L_z > 0$ ). Indichiamo con  $A(\varphi)$  l'area spazzata da  $\mathbf{x}$  nell'intervallo  $[\varphi_0, \varphi]$ , con  $\varphi_0 \equiv \varphi(0)$  angolo al tempo iniziale  $t = 0$  del moto. Nell'intervallo  $\delta t$ , il vettore  $\mathbf{x}$  aumenta la sua anomalia da  $\varphi$  a  $\varphi + \delta\varphi$ , spazzando un area  $A(\varphi + \delta\varphi) - A(\varphi)$ . La porzione di piano dell'orbita corrispondente è inclusa nel settore circolare di angolo  $\delta\varphi$  e raggio  $r(\varphi + \delta\varphi)$  ed include il settore circolare di angolo  $\delta\varphi$  e raggio  $r(\varphi)$ , per cui vale la disuguaglianza

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi}\pi r^2(\varphi) \leq A(\varphi + \delta\varphi) - A(\varphi) \leq \frac{\delta\varphi}{2\pi}\pi r^2(\varphi + \delta\varphi) \Leftrightarrow \frac{1}{2}r^2(\varphi) \leq \frac{A(\delta\varphi) - A(\varphi)}{\delta\varphi} \leq \frac{1}{2}r^2(\varphi + \delta\varphi).$$

Nel limite  $\delta\varphi \rightarrow 0$ , questa relazione implica

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2}r^2(\varphi).$$

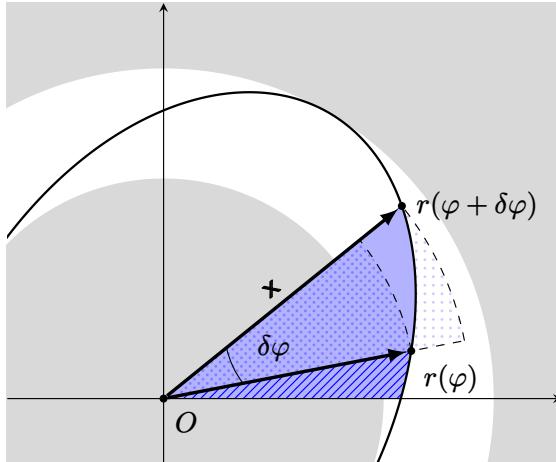


FIGURA 12. Analisi della seconda legge di Keplero:  $A(\varphi)$  è l'area spazzata dal vettore posizione  $\mathbf{x}$  a partire dall'angolo iniziale  $\varphi_0$ , qui pari a zero. Nell'intervallo temporale  $\delta t$ , il punto materiale incrementa la sua anomalia di  $\delta\varphi$  spazzando una superficie di area  $A(\varphi + \delta\varphi) - A(\varphi)$ : in figura, la superficie di area  $A(\varphi + \delta\varphi)$  appare in blu, mentre quella di area  $A(\varphi)$  è tratteggiata. In questo esempio, la porzione in grigio corrisponde a regioni di spazio al di fuori di  $\mathcal{O}(E)$ , qui delimitato da due circonferenze.

D'altra parte

$$\frac{dA(\varphi)}{dt} = \dot{\varphi} \frac{dA(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L_z}{2m}.$$

La derivata di  $A$  nel tempo è quindi *costante*, essendo tali sia  $L_z$  che  $m$ . La quantità  $\dot{A}$  è detta *velocità areolare*. La sua costanza implica che  $\mathbf{x}$  spazza *aree uguali in tempi uguali* e corrisponde alla *seconda legge di Keplero*. Si tratta di una prima proprietà geometrica di ogni orbita generata da un moto in campo centrale.

**5.3. Prima forma dell'equazione delle orbite.** Abbiamo già visto che, essendo  $L_z$  fissato dalle condizioni iniziali, l'evoluzione della variabile radiale è descritta dall'equazione

$$(2.16) \quad m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r),$$

che equivale al moto unidimensionale di un punto materiale soggetto al potenziale efficace  $V_{\text{eff}}$ . Possiamo perciò ripetere le considerazioni fatte per il caso unidimensionale. Supponiamo di integrare il moto da  $t = 0$  e siano  $r(0) = r_0$  e  $\varphi(0) = \varphi_0$ , e consideriamo un valore  $r$  in un intorno  $I$  di  $r_0$  tale che la funzione

$$\Phi(r) = 2\frac{E - V_{\text{eff}}(r)}{m}$$

non si annulli mai per  $r \in I$ . Immaginiamo che il moto cominci con una certa velocità radiale  $\dot{r}(0) = v_0$ , di modo che  $\text{sign}(v_0) = \text{sign}(r - r_0)$  (ovvero, la velocità punta verso  $r$ ). Il tempo necessario al punto materiale per raggiungere la distanza  $r$  a partire da  $r_0$  è

$$t = \int_{r_0}^r \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

Nell'intervallo  $[0, t]$  la precedente fornisce una biezione tra l'intervallo chiuso di estremi  $r_0$  ed  $r$  e l'intervallo  $[0, t]$  e di conseguenza è possibile esprimere  $t = t(r)$  e  $\varphi(t) = \varphi(t(r))$ . Una volta

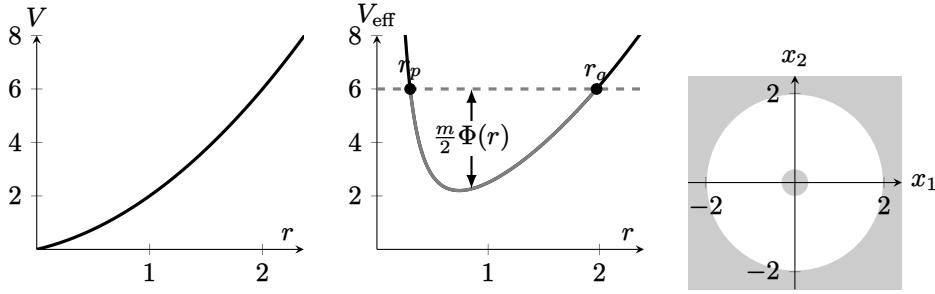


FIGURA 13. Esempio di potenziale radiale  $V(r) = r + r^2$  (sinistra) e potenziale effettivo associato  $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$  per  $L^2 = m$  (centro). È tracciato in particolare un possibile valore di energia  $E$  (linea tratteggiata) compatibile con il moto, ed evidenziato il corrispondente intervallo radiale di moto ammesso  $[r_p, r_a]$ . I punti estremali dell'intervallo sono punti di inversione e corrispondono a pericentro ed apocentro. La corona circolare  $\mathcal{O}(E)$  in cui è ammesso il moto è raffigurata a destra: all'energia scelta, in nessun caso il moto può a venire ad una distanza minore di  $r_p$  dal centro del riferimento.

integrandi l'equazione per  $r$ , la legge per  $\varphi$  si può trovare dal fatto che

$$\frac{d\varphi}{dr} = \dot{\varphi} \frac{dt}{dr} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(r)}}.$$

Quella ottenuta è detta *prima forma dell'equazione delle orbite* e specifica la relazione tra  $\varphi$  ed  $r$ . Essa dipende da un segno fissato dalle condizioni iniziali del problema. La sua integrazione ci permette di ottenere

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \frac{L_z}{m} \int_{r_0}^r \frac{\text{sign}(v_0)}{x^2 \sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

Come nel caso del moto unidimensionale, queste formule valgono fintantoché  $r$  non è uno zero di  $\Phi$ . In quel caso occorrerà studiare la natura di questo zero e valutare se semplice (e allora ci sarà una inversione nel moto lungo la dimensione radiale) o multiplo (ovvero, sarà un valore raggiunto solo asintoticamente).

**5.4. Regioni ammesse e orbite chiuse.** Se il moto *radiale* avviene tra due zeri semplici di  $\Phi$ , sappiamo che esso è periodico: ciò non significa però che la traiettoria seguita dal punto materiale nello spazio tridimensionale è effettivamente chiusa, ovvero che dopo un certo tempo il punto materiale si ritrovi nella stessa posizione assunta al tempo iniziale. Data una certa energia meccanica  $E$ , la traiettoria del punto materiale avrà luogo nel sottoinsieme del piano

$$\mathcal{O}(E) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V_{\text{eff}}(\|\mathbf{x}\|) \leq E\}$$

che ha come frontiera una o più circonferenze, che individuano varie regioni ammesse, i cui raggi corrispondono agli zeri di  $\Phi(r)$ . Ciascuna regione ammessa è una corona circolare, che ha un raggio minimo, detto *pericentro*  $r_p$ , e un raggio massimo, detto *apocentro*  $r_a$  (eventualmente infinito), che corrispondono a due zeri consecutivi di  $\Phi(r)$  tali che  $\Phi(r) > 0$  per  $r \in (r_p, r_a)$ . L'angolo  $\vartheta$  descritto dal vettore posizione nel muoversi tra pericentro e apocentro è

$$\vartheta = \frac{L_z}{m} \int_{r_p}^{r_a} \frac{1}{x^2 \sqrt{\Phi(x)}} dx$$

ed è eventualmente una quantità infinita. Condizione necessaria e sufficiente perché l'orbita sia chiusa è che

$$\frac{\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Una naturale domanda è quindi per quali forme di  $V$  una condizione siffatta si realizza *sempre* quando si ha a che fare con orbite limitate: dato che vogliamo che il tempo necessario per raggiungere apocentro da pericentro (e viceversa) sia finito, sarà almeno necessario che sia  $r_a$  che  $r_p$  siano zeri *semplici* di  $\Phi(r)$  (diversamente, l'integrale divergerebbe). Vale il seguente teorema, che non dimostreremo.

**TEOREMA 5.1** (Bertrand). *In un campo centrale di potenziale analitico  $V(r)$ , tutte le orbite limitate sono chiuse se e solo se*

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad o \quad V(r) = kr^2$$

per una qualche costante positiva  $k$ .

**5.4.1. Orbite circolari.** Focalizziamoci per semplicità sulla possibile esistenza di soluzioni nella forma

$$r = r_c, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \text{dove } \omega := \frac{L_z}{mr_c^2},$$

ovvero di *orbite circolari*, chiuse per costruzione e corrispondenti a circonferenze di raggio  $r_c$ . Si noti che la conservazione del momento angolare impone una legge lineare per  $\varphi$  e permette di scrivere immediatamente il *periodo*  $\tau$  di un'orbita siffatta:

$$\omega\tau = 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mr_c^2}{L_z}.$$

Il valore  $r_c$  deve necessariamente essere critico rispetto al potenziale efficace, per quanto detto nel caso del moto unidimensionale, ovvero questa soluzione può esistere se e solo se  $V'_{\text{eff}}(r_c) = 0$ . A tale soluzione corrisponderà l'energia meccanica  $E = V_{\text{eff}}(r_c)$ . Ammesso quindi che tale soluzione esista, essa può essere o meno stabile. La definizione di stabilità di un'orbita circolare è dovuta a Lagrange.

**DEFINIZIONE 5.1** (Stabilità secondo Lagrange). Si supponga  $L_z$  fissato. Un'orbita circolare di raggio  $r_c$  è stabile se la traiettoria  $r(t) = r_c$  è stabile secondo Ljapunov in un moto unidimensionale su  $\mathbb{R}^+$  soggetto a potenziale  $V_{\text{eff}}(r)$ .

La definizione quindi corrisponde a quella di Ljapunov se pensata limitata al moto nella direzione radiale ma, come si vede, ignora volutamente la variabile angolare (ed è per questo più debole). Quanto detto sul moto unidimensionale si traduce quindi nell'analisi della stabilità secondo Lagrange. In particolare

**PROPOSIZIONE 5.2.** *Se il potenziale efficace  $V_{\text{eff}}$  ha un minimo relativo isolato in  $r_c$ , un'orbita circolare di raggio  $r_c$  è stabile secondo Lagrange.*

**5.5. Seconda forma dell'equazione delle orbite.** Proviamo ora ad andare oltre il caso di orbita circolare partendo da una riformulazione delle equazioni del moto. Abbiamo già scritto la prima forma dell'equazione delle orbite, valida nel caso in cui si studi l'evoluzione in un intorno di  $r > 0$  tale che  $\Phi(r) \neq 0$ ,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(r)}}.$$

Questa equazione mostra qual è il legame tra variabile angolare e variabile radiale. Una forma diversa, ma utile, in cui mettere l'equazione delle orbite è ottenuta facendo il cambio di variabile

$$r = \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{L_z^2}{mr^2} = L_z \dot{\varphi}.$$

Di conseguenza

$$\dot{r} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{u^2}{L_z} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{du}{d\varphi}, \quad \ddot{r} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{r}}{d\varphi} = -\frac{u^2}{L_z \sqrt{m}} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}.$$

L'equazione del moto si può quindi riscrivere in termini della variabile  $u$  come

$$m\ddot{r} = -V_{\text{eff}}(r) \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\frac{L_z}{\sqrt{m}u^2} V'_{\text{eff}} \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right).$$

Abbiamo così ottenuto la *seconda forma dell'equazione delle orbite*,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -W'(u), \quad \text{dove } W(u) := V_{\text{eff}} \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right) = \frac{u^2}{2} + V \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right)$$

che nuovamente descrive un moto *unidimensionale* di una particella di massa unitaria e parametrizzato da  $u$  rispetto alla variabile "temporale"  $\varphi$ . Esplicitando la dipendenza dal potenziale  $V$ , l'equazione si scrive a volte nella forma detta *di Binet*

$$u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -\frac{L_z}{\sqrt{m}} V' \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right).$$

Anche l'espressione dell'energia meccanica del problema originale si traduce immediatamente in una forma corrispondente per il problema in  $u$ , che di nuovo evidenzia l'interpretazione di moto effettivo parametrizzato da  $u$  rispetto al tempo  $\varphi$  sotto potenziale  $W$ ,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \left( -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + V_{\text{eff}} \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + W(u).$$

L'utilità di questa forma sta nel fatto che il "semiperiodo" del moto descritto da  $u$  non è altro che l'angolo tra un pericentro e apocentro, ovvero

$$\vartheta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{\Psi(x)}} dx, \quad \Psi(u) := 2(E - W(u)),$$

dove  $u_a$  e  $u_p > u_a$  sono due zeri consecutivi di  $\Psi(u)$  corrispondenti ad apocentro e pericentro della regione di moto ammessa  $\mathcal{O}(E)$ . L'utilità della seconda forma dell'equazione delle orbite è chiara se specifichiamo un rilevante caso, ovvero quello del potenziale kepleriano.

**Esercizio 2.1** — Dimostrare che se  $r_p$  ed  $r_a$  sono due zeri semplici consecutivi di  $\Phi(r)$ , allora  $u_a$  e  $u_p$  sono due zeri semplici consecutivi di  $\Psi(u)$ .

**5.5.1. Problema di Keplero.** Il caso  $V(r) = -\frac{k}{r}$  con  $k > 0$  corrisponde al cosiddetto problema di Keplero: questa forma di potenziale è infatti, come noto, quella che appare nell'interazione gravitazionale tra due punti materiali, con  $k$  proporzionale al prodotto delle loro masse. La seconda forma dell'equazione delle orbite diventa in questo caso

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -u + \frac{k\sqrt{m}}{L_z}$$

la cui soluzione si può ottenere componendo una soluzione particolare dell'equazione con la soluzione del caso omogeneo. Una soluzione generica del problema omogeneo si può scrivere come  $u(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ , o equivalentemente come  $u(\varphi) = \alpha \cos(\varphi - \varphi_0)$ , dove  $\alpha$  e  $\varphi_0$

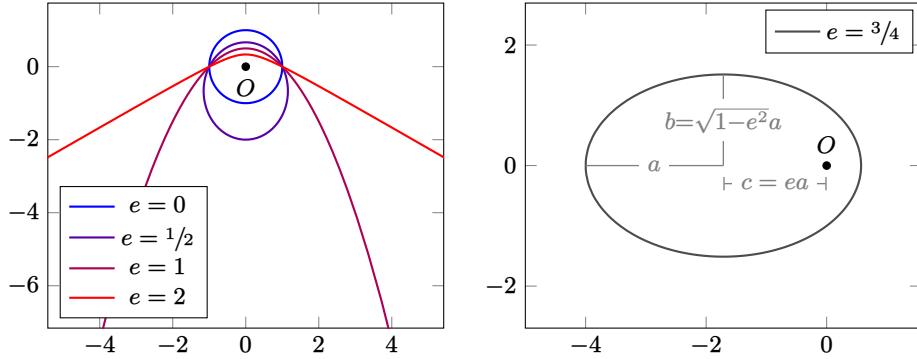


FIGURA 14. Orbite del problema di Keplero con orbita circolare  $r_c = 1$  e diversi valori dell'eccentricità  $e$ .

saranno parametri da fissare per mezzo delle condizioni iniziali. Una soluzione particolare è invece l'orbita circolare

$$u(\varphi) \equiv u_c = \frac{k\sqrt{m}}{L_z} \Rightarrow r(\varphi) \equiv r_c = \frac{L_z}{\sqrt{m}u_c} = \frac{L_z^2}{mk},$$

dove  $r_c$  è il raggio dell'unica orbita circolare ammessa, ovvero avente energia meccanica

$$E_c = V_{\text{eff}}(r_c) = -\frac{k^2 m}{2L_z^2} = -\frac{k}{2r_c}.$$

Questa quantità è l'energia *minima* ammessa dato che il potenziale efficace ha un minimo assoluto in  $r_c$ . Se ridefiniamo  $\alpha = \frac{L_z}{\sqrt{m}r_c}e$  per un qualche  $e$  reale, la soluzione generale si può scrivere come

$$u(\varphi) = \frac{L_z}{\sqrt{m}} \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_c}.$$

La corrispondente relazione per  $r$  si ottiene facendo un cambio di variabile

$$r(\varphi) = \frac{r_c}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

ed è detta *prima legge di Keplero*. In questa espressione,  $r_c > 0$  è il raggio dell'orbita circolare. Il valore di  $e$  può essere sempre assunto positivo<sup>8</sup>. Esso è legato all'energia  $E \geq E_c$  dell'orbita. Infatti,

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + W(u) = \frac{(e^2 - 1)k^2 m}{2L_z^2} = (1 - e^2)E_c \Leftrightarrow e = \sqrt{1 - \frac{E}{E_c}}.$$

L'equazione per  $r(\varphi)$  parametrizza una conica di *eccentricità*  $e$  e parametro  $r_c$  con un fuoco nell'origine. Se  $e = 0$ , l'equazione descrive l'orbita circolare di raggio  $r_c$ ; se  $e \in (0, 1)$  essa descrive una ellisse; se  $e = 1$  essa corrisponde ad una parabola; se  $e > 1$  corrisponde ad una iperbole. Nel caso ellittico, è noto dalla geometria elementare che le dimensioni dei semiassi maggiore  $a$  e minore  $b$  sono

$$a = \frac{r_c}{1 - e^2}, \quad b = \frac{r_c}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 - e^2}a.$$

<sup>8</sup>Se  $e < 0$ , allora è possibile, naturalmente, riscrivere  $e \cos(\varphi - \varphi_0) = e' \cos(\varphi - \varphi'_0)$  con  $\varphi'_0 = \varphi_0 + \pi$  e  $e' = -e > 0$ .

La seconda legge di Keplero, infine, implica che, detto  $\tau$  il periodo dell'orbita,

$$\pi ab = \frac{L_z}{2m} \tau.$$

Essendo ora  $L_z^2 = mkr_c = mka(1 - e^2)$ , questa stessa legge diventa

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{k}{4\pi^2 m},$$

che non è altro che la *terza legge di Keplero* che mostra che quadrati dei periodi e cubi dei semiassi maggiori sono in rapporto costante.



## CAPITOLO 3

# Formulazione variazionale

## 1. Problemi variazionali

**1.1. Introduzione al problema.** Una classe di problemi di grande rilevanza per lo studio della meccanica è quella dei cosiddetti *problem variazionali*. Si tratta di una classe di problemi studiati nel molto più ampio contesto del *calcolo delle variazioni*, una branca dell'analisi funzionale dalle numerose applicazioni, in particolare in Fisica. Qui proveremo a dare una introduzione minima all'argomento, a partire dalla seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.1.** Sia data una curva regolare  $\mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{V}$  di classe  $\mathcal{C}^2$ , con  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Definiamo<sup>1</sup>

$$(3.1) \quad \mathcal{I}(\mathbf{q}) := \left\{ \mathbf{y}: (-1, 1) \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{V} \mid \begin{array}{l} \mathbf{y}(0, t) = \mathbf{q}(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ \mathbf{y}(u, t_0) - \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{y}(u, t_1) - \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{0} \quad \forall u \in (-1, 1) \end{array} \right\} \cap \mathcal{C}^2((-1, 1) \times [t_0, t_1], \mathcal{V}).$$

Si noti che la derivata  $\partial_u \mathbf{y}(u, t_i)$  deve essere nulla per  $i = 1, 2$  e ogni  $u \in (-1, 1)$  dato che, nelle ipotesi della definizione,  $\mathbf{y}(u, t_i)$  rimane costante al variare di  $u$ . L'insieme  $\mathcal{I}(\mathbf{q})$  è quindi una sorta di “intorno” della curva  $\mathbf{q}$ , un insieme di curve ottenute deformando con continuità  $\mathbf{q}$  e *a venti gli stessi estremi*.

Consideriamo ora un funzionale  $\mathcal{A}: \mathcal{I}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbb{R}$  nella forma

$$\mathcal{A}[\mathbf{y}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) dt$$

dove  $\mathcal{F}$  si assume differenziabile con continuità almeno fino al secondo ordine nei suoi argomenti.

**DEFINIZIONE 1.2.** Il funzionale  $\mathcal{A}[\mathbf{y}]$  si dice essere stazionario su  $\mathbf{q}$  se

$$\frac{d \mathcal{A}[\mathbf{y}]}{du} \Big|_{u=0} = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{I}(\mathbf{q}).$$

**TEOREMA 1.1.** *Il funzionale  $\mathcal{A}: \mathcal{I}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbb{R}$  nella forma*

$$\mathcal{A}[\mathbf{y}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) dt,$$

*con  $\mathcal{F}$  assunta di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  nei suoi argomenti, è stazionario su  $\mathbf{q}$  se e solo se  $\mathbf{q}$  soddisfa le equazioni di Eulero*

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_a} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_a} \right) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}} = 0, \quad a = 1, \dots, n.$$

---

<sup>1</sup>Con  $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^2((-1, 1) \times [t_0, t_1], \mathcal{V})$  intendiamo qui che  $\mathbf{y}$  e le sue derivate fino al secondo ordine esistono continue in  $((-1, 1) \times (t_0, t_1))$  ed ammettono una estensione continua in  $(-1, 1) \times [t_0, t_1]$ .

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il risultato per ispezione diretta:

$$(3.2) \quad \frac{d\mathcal{A}[\mathbf{y}]}{du} = \sum_{a=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial \mathcal{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})}{\partial y_a} \frac{dy_a}{du} + \frac{\partial \mathcal{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})}{\partial \dot{y}_a} \frac{d\dot{y}_a}{du} \right) dt.$$

Integrando per parti il secondo termine,

$$\frac{d\mathcal{A}[\mathbf{y}]}{du} = \sum_{a=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \frac{dy_a}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_a} \frac{dy_a}{du} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_a} \right) dt + \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_a} \frac{dy_a}{du} \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Calcoliamo ora l'espressione in  $u = 0$ , e usiamo il fatto che  $\partial_u \mathbf{y}(u, t_0) = \partial_u \mathbf{y}(u, t_1) = \mathbf{0}$  per eliminare l'ultimo termine:

$$(3.3) \quad \frac{d\mathcal{A}[\mathbf{y}]}{du} \Big|_{u=0} = \sum_{a=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \frac{dy_a}{du} \Big|_{u=0} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_a} \right) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}} dt.$$

Questa formula mostra come le equazioni di Eulero siano sufficienti per la stazionarietà. Dato però che vogliamo che la quantità sopra sia nulla per *ogni*  $\mathbf{y} \in \mathcal{I}(\mathbf{q})$ , esse sono anche necessarie.  $\square$

**1.2. Geodetiche.** Una applicazione piuttosto interessante del risultato precedente riguarda la ricerca di una curva *di lunghezza estremale* tra due punti dati su una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^K$ ,  $n \leq K$ . Supponiamo di avere una parametrizzazione locale  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ , e una curva regolare  $\mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{V}$ . Questa curva induce una curva regolare su  $\mathcal{M}$  tramite  $\boldsymbol{\chi}$ , sia  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}$ . La lunghezza di tale curva si scrive

$$\mathcal{A}[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) \rangle} dt \quad \text{dove} \quad (\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) := \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) \dot{q}_a \dot{q}_b = \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle.$$

Abbiamo qui introdotto la *matrice (o tensore) metrica*  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  di elementi

$$g_{ab}(\mathbf{q}) := \langle \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}), \partial_b \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \rangle.$$

Oltre ad essere simmetrica, questa matrice ha anche la caratteristica di *definita positiva*: per ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{g}(\mathbf{q}) \mathbf{v} \rangle = \sum_{ab} v_a v_b g_{ab}(\mathbf{q}) = \sum_{ab} v_a \langle \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}), \partial_b \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \rangle v_b = \left\| \sum_a v_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \right\|^2 > 0,$$

risultato che segue tenendo a mente la lineare indipendenza dei vettori  $\{\partial_a \boldsymbol{\chi}\}_{a=1}^n$ . Il funzionale “lunghezza”  $\mathcal{A}[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$  ha quindi

$$(3.4) \quad \mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle} = \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle} \equiv \dot{s},$$

ovvero,  $\mathcal{F}$  non è altro che la derivata  $\dot{s}$  dell'ascissa curvilinea. Applichiamo le equazioni di Eulero per cercare la condizione che deve soddisfare la parametrizzazione  $\mathbf{q}$  perché il funzionale  $\mathcal{A}$  sia *stazionario*. Osserviamo che

$$(3.5) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_a} = \frac{1}{2\mathcal{F}} \sum_{bc} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \dot{q}_b \dot{q}_c,$$

e inoltre

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_a} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b \right) = \frac{1}{\mathcal{F}} \left( -\frac{d \ln \mathcal{F}}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b + \sum_{bc} \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} \dot{q}_b \dot{q}_c + \sum_b g_{ab} \ddot{q}_b \right)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{F}} \left( -\frac{d \ln \mathcal{F}}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b + \frac{1}{2} \sum_{bc} \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} \dot{q}_b \dot{q}_c + \frac{1}{2} \sum_{bc} \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} \dot{q}_b \dot{q}_c + \sum_b g_{ab} \ddot{q}_b \right)$$

per cui, raccogliendo tutti i termini nell'equazione di Eulero

$$\sum_b g_{ab} \ddot{q}_b + \frac{1}{2} \sum_{bc} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \dot{q}_b \dot{q}_c = \frac{d \ln \mathcal{F}}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b.$$

Moltiplichiamo ora per la *matrice inversa*  $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{q})$  della matrice metrica  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , i cui elementi indichiamo con  $g^{ab}$ . Otteniamo

$$\ddot{q}_u + \frac{1}{2} \sum_{abc} g^{ua} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \dot{q}_b \dot{q}_c = \frac{d \ln \mathcal{F}}{dt} \dot{q}_u.$$

Il termine a destra è stato lasciato implicito. Se introduciamo l'ascissa curvilinea  $s$  lungo la curva,  $\dot{s} \equiv \mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , osserviamo che

$$\dot{q}_a = \dot{s} \frac{dq_a}{ds}, \quad \ddot{q}_a = \ddot{s} \frac{dq_a}{ds} + s^2 \frac{d^2 q_a}{d^2 s}, \quad \frac{d \ln \mathcal{F}}{dt} = \frac{\dot{s}}{\dot{s}},$$

per cui il termine a destra scompare

$$\frac{d^2 q_u}{ds^2} + \frac{1}{2} \sum_{abc} g^{ua} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} = 0.$$

Quella ottenuta è l'*equazione di una geodetica* su  $\mathcal{M}$ , ovvero l'equazione che deve soddisfare localmente la parametrizzazione di una curva su  $\mathcal{M}$  di lunghezza minima tra due punti fissati. Ricordiamo che  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(s)$ , ovvero utilizziamo per la nostra curva una parametrizzazione naturale, abbiamo

$$1 = \left\| \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} \right\|^2 = \left( \frac{d\mathbf{q}}{ds}, \frac{d\mathbf{q}}{ds} \right).$$

Si dà quindi la seguente

**DEFINIZIONE 1.3 (Geodetica).** Sia data una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M}$  e una curva regolare  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}: I \rightarrow \mathcal{M}$  su di essa definita su un intervallo in  $\mathbb{R}$ , di modo che  $\mathbf{q}: I \rightarrow \mathcal{V}$  sia una curva regolare sull'aperto  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrizzazione di  $\mathcal{M}$ . Allora  $\boldsymbol{\gamma}$  è una geodetica se la sua parametrizzazione locale  $\mathbf{q}(s)$  in termini dell'ascissa curvilinea  $s$  soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2 q_c}{ds^2} + \sum_{ab} \Gamma_{ab}^c \frac{dq_a}{ds} \frac{dq_b}{ds} = 0, \quad \Gamma_{ab}^c := \frac{1}{2} \sum_{u=1}^n g^{cu} \left( \frac{\partial g_{bu}}{\partial q_a} + \frac{\partial g_{au}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_u} \right),$$

dove  $g^{ab}$  è l'elemento  $(a, b)$  della matrice inversa della matrice metrica, e la quantità  $\Gamma_{ab}^c$  è detta *simbolo di Christoffel*.

## 2. Principio di Hamilton

Si è già probabilmente notato che le equazioni di Lagrange che abbiamo ottenuto nello studio della meccanica riproducono esattamente le equazioni di Eulero per la risoluzione di problemi variazionali su varietà. Questo fatto ha suggerito a William R. Hamilton di formalizzare questa corrispondenza nel seguente teorema.

**TEOREMA 2.1** (Principio di Hamilton). *Il moto naturale di un sistema soggetto a vincoli olonomi lisci e forze conservative parametrizzato dalle variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$  rende stazionario l'azione hamiltoniana, definita come*

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}] := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt,$$

*sulla classe  $\mathcal{I}(\mathbf{q})$  di tutti i moti sincroni (ovvero, con stessa parametrizzazione temporale) che tengano fisse le configurazioni estremali  $\mathbf{q}(t_0)$  e  $\mathbf{q}(t_1)$ . La funzione  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  è la lagrangiana del sistema, differenza tra energia cinetica e potenziale.*

Questo principio introduce un punto di vista largamente utilizzato in meccanica analitica, e in fisica in generale, ovvero il punto di vista *variazionale*, in cui il moto fisico di un sistema viene caratterizzato come stazionario in un certo funzionale rispetto a tutti gli altri moti possibili. È importante notare che il principio di Hamilton produce le stesse equazioni se a  $\mathcal{L}$  si aggiunge una *derivata totale* nel tempo di una funzione differenziabile con continuità  $h(t, \mathbf{q})$ , dato che

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{d h(t, \mathbf{q})}{dt} \implies \mathcal{S}[\mathbf{q}] \mapsto \mathcal{S}[\mathbf{q}] + h(\mathbf{q}(t_1), t_1) - h(\mathbf{q}(t_0), t_0).$$

Il termine aggiuntivo è costante rispetto alle variazioni in  $\mathbf{q}$  che devono avvenire ad estremi fissati, e quindi ininfluente. Come per  $\mathcal{L}$ , la corrispondenza tra azione ed equazioni del moto non è perciò univoca, e due lagrangiane che differiscono per una derivata totale descrivono la stessa dinamica. È questo un fatto che avevamo già osservato e che viene coerentemente riprodotto anche intendendo come oggetto fondamentale l'azione.

**Esempio 3.1** (Moto geodetico) — Consideriamo un sistema olonomo a vincoli fissi di  $N$  punti, non soggetto a forze eccettuata la reazione vincolare, che vive su una sottovarietà regolare  $\mathcal{M}$  liscia. La sua lagrangiana coincide perciò con la sola energia cinetica, che in coordinate locali avrà la forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle.$$

Possiamo interpretare questa espressione un prodotto scalare definendo

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) := \sum_{ab} A_{ab}(\mathbf{q}) v_a u_b.$$

Così facendo, l'azione associata al moto libero è

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) dt.$$

Questa azione è molto simile al funzionale in Eq. (3.4): applicando il criterio variazionale di Hamilton e ripetendo esattamente gli stessi calcoli si ottiene che le variabili  $\mathbf{q}$  devono evolvere secondo l'equazione per le geodetiche *in accordo con la metrica  $\mathbf{A}$* , ovvero indicando con  $A^{ab} \equiv A^{ab}(\mathbf{q})$  l'elemento  $(a, b)$  della matrice inversa  $[\mathbf{A}(\mathbf{q})]^{-1}$ , si ottiene che il moto naturale soddisfa precisamente le equazioni per le geodetiche sul vincolo,

$$\ddot{q}_u + \frac{1}{2} \sum_{abc} A^{ua} \left( \frac{\partial A_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial A_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial A_{bc}}{\partial q_a} \right) \dot{q}_b \dot{q}_c = 0.$$

Se  $\mathbf{x}: \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$  è la mappa che parametrizza la sottovarietà, di modo che  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(\mathbf{q})$  sia la posizione su  $\mathcal{M}$  del  $k$ -esimo punto materiale di massa  $m_k$ , abbiamo così trovato che il moto avviene non secondo la metrica della sottovarietà  $g_{ab} = \langle \partial_a \mathbf{x}, \partial_b \mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^N \langle \partial_a \mathbf{x}_k, \partial_b \mathbf{x}_k \rangle$ , ma secondo una metrica modificata  $A_{ab} = \sum_{k=1}^N m_k \langle \partial_a \mathbf{x}_k, \partial_b \mathbf{x}_k \rangle$ : le metriche sono però di fatto coincidenti (a meno di un prefattore di scala) se le masse sono tutte uguali ( $m_k \equiv m$ ), o se abbiamo a che fare con un solo punto materiale ( $N = 1$ ).

Si noti inoltre che mentre nell'equazione per le geodetiche compariva la parametrizzazione naturale, che corrisponde ad una velocità di percorrenza unitaria lungo la curva ed è espressa da  $(\frac{d\mathbf{q}}{ds}, \frac{d\mathbf{q}}{ds}) = 1$ , qui compare il tempo  $t$ . D'altra parte, la conservazione dell'energia meccanica implica che durante il moto  $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{costante}$ : in altre parole, la relazione tra  $t$  ed  $s$  è una semplice trasformazione affine, e per questo l'equazione del moto è già nella forma di equazione per le geodetiche.

**2.1. Equivalenza con il principio di d'Alembert.** Nell'Eq. (3.3), la condizione di stazionarietà in  $\mathbf{q}$  rispetto ad una deformazione  $\mathbf{y}(u, t)$  ha la forma

$$\sum_a \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_a} \right) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{q}} \frac{dy_a}{du} \Big|_{u=0} dt = 0, \quad \forall a,$$

dove come solito  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{y}(0, t)$  è la soluzione delle equazioni di Eulero. Questa condizione deve valere per ogni deformazione  $\mathbf{y}(u, t)$  e proprio in questo modo abbiamo derivato la necessità e sufficienza delle equazioni di Eulero. Consideriamo ora un sistema autonomo, in modo che la matrice cinetica sia  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{q})$  e le forze siano tutte conservative e dovute ad un potenziale  $V(\mathbf{q})$ ; sia  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$  la lagrangiana associata. Detta  $\mathbf{Q}$  la quantità di moto totale del sistema, abbiamo visto che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \langle \mathbf{Q}, \partial_a \mathbf{X} \rangle \equiv p_a, \quad \frac{\partial T}{\partial q_a} = \langle \mathbf{Q}, \partial_a \dot{\mathbf{X}} \rangle.$$

Dunque le equazioni di Eulero–Lagrange si possono scrivere come

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \langle \mathbf{Q}, \partial_a \dot{\mathbf{X}} \rangle - \partial_q V(\mathbf{q}) - \frac{d}{dt} \langle \mathbf{Q}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = - \langle \partial_{\mathbf{X}} V + \dot{\mathbf{Q}}, \partial_a \mathbf{X} \rangle \equiv - \langle \partial_{\mathbf{X}} V + \dot{\mathbf{Q}}, \partial_a \mathbf{X}(\mathbf{q}) \rangle,$$

dove abbiamo usato  $\partial_a V = \langle \partial_{\mathbf{X}} V, \partial_a \mathbf{X} \rangle$ . La condizione di stazionarietà si riscrive

$$\sum_a \int_{t_0}^{t_1} \langle \partial_{\mathbf{X}} V + \dot{\mathbf{Q}}, \partial_a \mathbf{X}(\mathbf{q}) \rangle \frac{dy_a}{du} \Big|_{u=0} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \partial_{\mathbf{X}} V + \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{y})}{du} \Big|_{u=0} \right\rangle dt = 0.$$

Osserviamo ora che il vettore  $\frac{d\mathbf{X}}{du} \Big|_{u=0}$  è un vettore diretto tangenzialmente al vincolo nella direzione della deformazione indotta da  $\mathbf{y}$ , mentre  $\dot{\mathbf{Q}} + \partial_{\mathbf{X}} V = \mathbf{F}^{(v)}$  è semplicemente la reazione vincolare: in definitiva la condizione di stazionarietà richiede che per ogni campo vettoriale tangente la reazione vincolare sia ortogonale al vincolo. Data l'arbitrarietà delle deformazioni (possiamo scegliere qualsivoglia  $\mathbf{y}$ ), questo equivale al principio di d'Alembert–Lagrange:

$$\langle \dot{\mathbf{Q}} + \partial_{\mathbf{X}} V, \delta \mathbf{X} \rangle = 0 \quad \forall \delta \mathbf{X} \in T_{\mathbf{X}} \mathcal{M}.$$

### 3. Teorema di Noether e leggi di conservazione

Abbiamo già incontrato un certo numero di leggi di conservazione, riguardanti per esempio il momento angolare o l'energia meccanica. Un'altra tipica legge di conservazione che può emergere dalle equazioni di Eulero–Lagrange riguarda il momento coniugato

$$p_a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}.$$

Le equazioni di Eulero–Lagrange si possono infatti scrivere come  $\dot{p}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}$ , scrittura che implica immediatamente il risultato seguente.

**TEOREMA 3.1.** *Il momento  $p_a$  coniugato alla variabile lagrangiana  $q_a$  si conserva se e solo se  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0$ .*

Se  $p_a$  si conserva, la variabile  $q_a$  si chiama *ciclica*: essa non compare esplicitamente nella lagrangiana. Ciò significa che eseguendo il cambio di variabili  $q_a \mapsto q_a + s$  per un qualsivoglia  $s$ , la lagrangiana non cambia forma.

Questa osservazione può essere inquadrata in un contesto più ampio, e di massima importanza, che chiarisce come la presenza di quantità conservative non sia “accidentale”.

### 3.1. Simmetrie dell’azione.

Partiamo dalla seguente

**DEFINIZIONE 3.1.** Si dice che la famiglia ad un parametro  $\phi: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  è un *gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili* su  $\mathbb{R}^k$  se valgono le seguenti proprietà:

- $\phi(\mathbf{z}, 0) = \mathbf{z}$ ;
- $\phi(\phi(\mathbf{z}, s_1), s_2) = \phi(\mathbf{z}, s_1 + s_2)$ ;
- la mappa  $(\mathbf{z}, s) \mapsto \phi(\mathbf{z}, s)$  è analitica in un intorno di  $s = 0$ , e in particolare

$$\phi(\mathbf{z}, s) = \mathbf{z} + s\zeta(\mathbf{z}) + o(s)$$

dove  $\zeta(\mathbf{z}) := \left. \frac{d}{ds} \phi(\mathbf{z}, s) \right|_{s=0}$  è una funzione continua con derivate continue nei propri argomenti ed è detto essere il *campo vettoriale* che esprime localmente l’azione del gruppo.

Consideriamo ora una generica lagrangiana nella forma  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , con  $\mathbf{q}$  vettore  $n$ -dimensionale. Ad essa è associata sull’intervallo temporale  $[t_0, t_1]$  l’azione

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$$

**DEFINIZIONE 3.2.** Un gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili  $\phi: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  è *ammissibile* per un sistema lagrangiano se lascia inalterata l’azione, ovvero

$$\frac{d}{ds} \int_{t_{0,s}}^{t_{1,s}} \mathcal{L}\left(t_s, \mathbf{q}_s, \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s}\right) dt_s = 0$$

dove  $\mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una *generica* traiettoria fisica tra  $\mathbf{q}_0 := \mathbf{q}(t_0)$  e  $\mathbf{q}_1 := \mathbf{q}(t_1)$ , e dove abbiamo indicato con  $(t_s, \mathbf{q}_s) = \phi((t, \mathbf{q}), s)$  le variabili lagrangiane e tempo trasformate, di modo che i punti estremali siano trasformati come  $(t_i, \mathbf{q}_i) \mapsto (t_{i,s}, \mathbf{q}_{i,s})$ ,  $i = 1, 2$ .

Nella precedente definizione con “traiettoria fisica” intendiamo precisamente una traiettoria che soddisfa le equazioni del moto, ovvero una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange: l’invarianza è richiesta quindi sulle soluzioni delle equazioni, condizione a volte indicata come “on shell” per contraddistinguerla da condizioni imposte su *qualsivoglia* traiettoria, anche non fisica.

### 3.2. Teorema di Noether.

Possiamo ora enunciare il seguente teorema.

**TEOREMA 3.2** (Noether). *Se un sistema lagrangiano ammette un gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili  $\phi: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , di modo che  $\phi(\bullet, s): (t, \mathbf{q}) \mapsto (t_s, \mathbf{q}_s)$ , allora le equazioni di Lagrange corrispondenti hanno un integrale primo che in coordinate locali assume la forma*

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L}, \quad \text{dove } \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) := \left. \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right|_{s=0}, \quad \tau(t, \mathbf{q}) := \left. \frac{dt_s}{ds} \right|_{s=0}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** In un intorno sufficientemente piccolo di  $s = 0$ , possiamo riscrivere l'azione variata in termini del parametro temporale non trasformato, dato che  $\lim_{s \rightarrow 0} t_s = t$  e, per via della nostra ipotesi di analiticità,  $\lim_{s \rightarrow 0} \dot{t}_s = 1$ . Pertanto per  $s$  sufficientemente piccolo possiamo riscrivere

$$\int_{t_0,s}^{t_1,s} \mathcal{L} \left( t_s, \mathbf{q}_s, \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s} \right) dt_s = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \left( t_s, \mathbf{q}_s, \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s} \right) \dot{t}_s dt.$$

Imponiamo ora l'invarianza, in particolare calcolando la derivata in  $s = 0$ . Indichiamo d'ora in poi con  $\mathbf{q}'_s := \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s}$  per brevità. Nell'ipotesi che l'argomento dell'integrale sia sufficientemente regolare e si possa integrare sotto il segno di integrale, la regola di Leibniz fornisce

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds} [\mathcal{L}(t_s, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}'_s) \dot{t}_s] \Big|_{s=0} dt = 0.$$

Abbiamo

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} [\mathcal{L}(t_s, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}'_s) \dot{t}_s] \Big|_{s=0} &= \left[ \dot{t}_s \left( \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_s}, \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}'_s}, \frac{d\mathbf{q}'_s}{ds} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_s} \frac{dt_s}{ds} \right) + \mathcal{L} \frac{d\dot{t}_s}{ds} \right] \Big|_{s=0} \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \frac{d\mathbf{q}'_s}{ds} \Big|_{s=0} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau}. \end{aligned}$$

Come da ipotesi, abbiamo qui indicato

$$\tau(t, \mathbf{q}) := \frac{d t_s(t, \mathbf{q})}{ds} \Big|_{s=0}, \quad \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) := \frac{d \mathbf{q}_s(t, \mathbf{q})}{ds} \Big|_{s=0}.$$

Occorre calcolare con una certa cura la derivata di  $\mathbf{q}'_s = \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{\dot{t}_s}$  rispetto ad  $s$ . Scriviamo

$$\frac{d \mathbf{q}'_s}{ds} \Big|_{s=0} = \left( \frac{1}{\dot{t}_s} \frac{d \dot{\mathbf{q}}_s}{ds} - \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{\dot{t}_s^2} \frac{d t_s}{ds} \right) \Big|_{s=0} = \boldsymbol{\xi} - \dot{\tau} \dot{\mathbf{q}}$$

che ci permette di riscrivere

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \mathcal{L} \left( t_s, \mathbf{q}_s, \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s} \right) \dot{t}_s \right] \Big|_{s=0} &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \dot{\tau} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau} = \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \dot{\tau} \dot{\mathbf{q}} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L} \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'equazione di Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ . Segue perciò che

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds} \left[ \mathcal{L} \left( t_s, \mathbf{q}_s, \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s} \right) \dot{t}_s \right] \Big|_{s=0} dt = 0 \iff I(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1), t_1) = I(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0), t_0).$$

Poiché la derivazione può essere fatta su ogni intervallo temporale (per esempio, su ogni intervallo  $[t_0, t]$  con  $t > t_0$ ), ciò che abbiamo ottenuto, in definitiva, è che la quantità

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L}$$

si conserva nel tempo, dimostrando il teorema.  $\square$

Consideriamo ora due classi di trasformazioni di particolare rilevanza. Iniziamo dal seguente

**LEMMA 3.3.** *Sia  $\phi: (t, \mathbf{q}) \mapsto (t, \mathbf{q}_s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  un gruppo ad un parametro di trasformazioni ammissibile per un sistema lagrangiano; l'ammissibilità di un tale gruppo equivale all'invarianza della lagrangiana sotto l'azione di  $\phi$ , ovvero  $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}'_s) = \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Si noti che in questo caso  $\mathbf{q}'_s = \dot{\mathbf{q}}_s$ . Poiché l'uguaglianza  $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) dt$  deve valere per ogni intervallo  $[t_0, t_1]$ , questo implica l'uguaglianza degli argomenti di integrazione.  $\square$

**COROLLARIO 3.4.** *Se il  $\phi: (t, \mathbf{q}) \mapsto (t, \mathbf{q}_s)$  è un gruppo ad un parametro di trasformazioni che lascia invariata la lagrangiana, allora la quantità*

$$(3.9) \quad I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle, \quad \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) := \left. \frac{d \mathbf{q}_s}{d s} \right|_{s=0}$$

è conservata.

Si può dimostrare che l'integrale primo non dipende dalla scelta delle coordinate locali.

**Esempio 3.2** (Invarianza traslazionale) — Un primo esempio di applicazione riguarda il caso in cui la lagrangiana è invariante per traslazioni in una certa direzione  $\mathbf{r}$ , ovvero sotto l'azione di  $\phi: (t, \mathbf{q}) \mapsto (t, \mathbf{q} + s\mathbf{r})$ . In questo caso  $\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{r}$  mentre  $\tau(t, \mathbf{q}) = \mathbf{0}$ , e la quantità conservata è

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle,$$

ovvero la proiezione del momento coniugato  $\mathbf{p}$  lungo  $\mathbf{r}$ . Se in particolare la lagrangiana è invariante rispetto a *qualsivoglia* traslazione, allora  $\mathbf{p}$  si conserva. Come abbiamo già visto,  $\mathbf{p}$  contiene le componenti lagrangiane della quantità di moto,  $p_a = \langle \mathbf{Q}, \partial_a \mathbf{x} \rangle$ : se il moto avviene senza vincoli, allora  $\mathbf{p} = \mathbf{Q}$ . La conservazione della quantità di moto, quando valida, esprime precisamente l'omogeneità dello spazio in cui il moto avviene.

**Esempio 3.3** (Invarianza rotazionale) — Supponiamo ora di disporre di un singolo punto materiale di massa  $m$  e soggetto ad un potenziale  $V$ , di modo che la sua lagrangiana sia data da

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - V(\mathbf{x}).$$

(in questo caso, poiché non assumiamo la presenza di vincoli,  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ). Supponiamo inoltre che la lagrangiana sia invariante sotto rotazioni attorno al terzo asse, ovvero sotto l'azione di

$$\phi: (t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{R}(s)\mathbf{x}), \quad \mathbf{R}(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + s \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + o(s).$$

La matrice  $\mathbf{R}(s)$  ruota il vettore  $\mathbf{x}$  di un angolo  $s$  attorno , per cui  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{R}(s_1)\mathbf{R}(s_2) = \mathbf{R}(s_1 + s_2)$ . Utilizziamo ora il Lemma 3.1 per studiare la trasformazione sopra. Nel calcolo dell'invariante, abbiamo bisogno di

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d(\mathbf{R}(s)\mathbf{x})}{ds} \right|_{s=0} = \mathbf{R}'(0)\mathbf{x}.$$

L'invariante è quindi

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \mathbf{R}'(0)\mathbf{x} \right\rangle = m \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{R}'(0)\mathbf{x} \rangle \equiv \langle \mathbf{Q}, \mathbf{R}'(0)\mathbf{x} \rangle,$$

dove  $\mathbf{Q}$  è la quantità di moto del punto materiale. La matrice derivata si calcola facilmente come

$$\mathbf{R}'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}'(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{R}'(0)\mathbf{x} \rangle = x_1 Q_2 - Q_1 x_2 \equiv L_3$$

dove  $L_3$  è la terza componente del momento angolare  $\mathbf{L}_O = \mathbf{x} \wedge \mathbf{Q}$ . Quello che abbiamo ottenuto quindi è che la quantità conservata è la proiezione del momento angolare nella direzione dell'asse della rotazione

che lascia invariata la lagrangiana. Se il sistema è invariante per qualsivoglia rotazione nello spazio, ovvero lo spazio è *isotropo*, il momento angolare si conserva.

Concludiamo con un importante gruppo di simmetrie dell'azione, quello relativo alle traslazioni temporali.

**LEMMA 3.5.** *Sia  $\phi: (t, \mathbf{q}) \mapsto (t + s, \mathbf{q})$ ,  $s \in \mathbb{R}$  un gruppo ad un parametro di trasformazioni ammisible per un sistema lagrangiano; l'ammissibilità di un tale gruppo equivale all'indipendenza (esplicita) dal tempo della lagrangiana,  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .*

DIMOSTRAZIONE. Il lemma discende dal fatto che l'invarianza richiede

$$(3.10) \quad \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt = \int_{t_0+s}^{t_1+s} \mathcal{L}(t_s, \mathbf{q}(t_s - s), \dot{\mathbf{q}}(t_s - s)) dt_s = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t + s, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt \\ \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}(t + s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) dt = 0,$$

condizione che deve valere per ogni  $s$  e ogni intervallo  $[t_0, t_1]$ , da cui  $\partial_t \mathcal{L} = 0$ .  $\square$

Il teorema di Noether ammette, per il suddetto gruppo di simmetria, il seguente importante corollario.

**COROLLARIO 3.6.** *Sia  $\phi: (t, \mathbf{q}) \mapsto (t + s, \mathbf{q})$ ,  $s \in \mathbb{R}$  un gruppo ad un parametro di trasformazioni ammmissible per un sistema lagrangiano; la quantità*

$$(3.11) \quad I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle - \mathcal{L} = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H}.$$

è conservata.

Il funzionale  $\mathcal{H}$  ha una enorme importanza ed è detto *hamiltoniana*. Se su un sistema autonomo agiscono solo forze conservative, e quindi  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$ , dove  $\mathbf{A}$  è la matrice cinetica e  $V$  è l'energia potenziale, si trova subito che

$$I = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q}) \equiv E,$$

ovvero l'invariante associato all'invarianza per traslazioni temporali è l'*energia meccanica*, la cui conservazione può quindi essere vista come una sorta di conseguenza dell'omogeneità temporale.

**Esempio 3.4** (Trasformazioni di gauge) — Le trasformazioni contemplate dal teorema di Noether non sono il solo tipo di trasformazione in grado, in generale, di lasciare invariate le equazioni di Eulero-Lagrange. Consideriamo per esempio la lagrangiana di un punto materiale carico in un campo elettromagnetico statico già vista in Eq. (2.4),

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - e \left( \varphi - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle \right).$$

Se eseguiamo la trasformazione

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla g, \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t},$$

dove  $g \equiv g(t, \mathbf{x})$ , la lagrangiana viene mappata in

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} - \frac{e}{c} \frac{d g}{d t}.$$

La lagrangiana ha acquisito così un termine di derivata totale e quindi produce le stesse equazioni del moto a mezzo del principio di Hamilton. In effetti questo significa che il potenziale  $\varphi$  e il potenziale  $\mathbf{A}$  sono definiti a meno di una funzione arbitraria, ovvero una *gauge*,  $g$  che si può fissare arbitrariamente. Tuttavia questo tipo di trasformazione non è del tipo contemplato dal teorema: si tratta infatti di una simmetria “funzionale” che trasforma i campi in gioco, e i principi di conservazione ad esso legati necessitano di una trattazione più generale di quella qui presentata.

