

FOGLIO 1

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
ALMA MATER — UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Richiami di meccanica newtoniana

1. ESERCIZI

Sia dato un riferimento inerziale $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, tale per cui indichiamo una generica posizione $\mathbf{x} = \sum_k x_k \hat{\mathbf{i}}_k$. Si risolvano i seguenti esercizi.

Esercizio 1.1 — Si dica se i campi di forze

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = x_2 \hat{\mathbf{i}}_1 - x_1 \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{x})}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

sono o meno conservativi.

Esercizio 1.2 — Sia dato un sistema isolato di due punti P_1 e P_2 . Per mezzo della condizione di invarianza galileiana, si mostri che, se inizialmente in quiete, essi rimarranno in quiete o si muoveranno lungo la retta che li congiunge. Se il sistema è costituito da tre punti P_1 , P_2 e P_3 in posizioni non allineate, si dimostri che essi si muovono nel piano passante per essi.

Esercizio 1.3 — Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 , dotati di *carica elettrica* rispettivamente q_1 e q_2 e massa rispettivamente m_1 ed m_2 , si muovono lungo traiettorie \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . La legge del moto del punto materiale P_1 e quella del punto materiale P_2 sono rispettivamente

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3} + \kappa \frac{q_1 q_2 \dot{\mathbf{x}}_1 \wedge (\dot{\mathbf{x}}_2 \wedge (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} + \kappa \frac{q_1 q_2 \dot{\mathbf{x}}_2 \wedge (\dot{\mathbf{x}}_1 \wedge (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}$$

per due costanti $k > 0$ e $\kappa > 0$. Il primo contributo nel secondo membro di ciascuna equazione è la cosiddetta *legge di Coulomb*, mentre il secondo, dovuto alla *legge di Biot-Savart*, nasce dal fatto che, nel suo moto, P_2 genera un campo magnetico, con cui una carica elettrica interagisce se in moto a sua volta. Spiegare come mai questa legge del moto è solo parzialmente compatibile col terzo principio della meccanica.

Esercizio 1.4 — È dato un riferimento inerziale $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ ed un riferimento rotante rispetto ad esso $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ di modo che

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \alpha \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \alpha \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = -\sin \alpha \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \alpha \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_3,$$

dove $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una quantità dipendente dal tempo, differenziabile con continuità rispetto ad esso. Si trovi la velocità angolare del riferimento rotante rispetto al riferimento fisso.

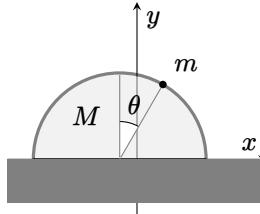
Esercizio 1.5 — Una piattaforma giace nel piano generato da $\hat{\mathbf{i}}_1$ e $\hat{\mathbf{i}}_2$ e passante per l'origine O in un riferimento inerziale. Un riferimento ad essa solidale si muove rispetto al riferimento inerziale con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{i}}_3$, dove $\omega > 0$ è una quantità indipendente dal tempo. Un punto materiale di massa m si muove su una circonferenza di raggio r sulla piattaforma con velocità \mathbf{v} rispetto al riferimento fisso. Qual è la velocità del punto materiale nel riferimento solidale con la piattaforma?

Esercizio 1.6 — Nella *Storia vera*, Luciano di Samosata racconta di una nave lanciata da un turbine nello spazio con un volo di sette giorni e sette notti. Si supponga che il vortice faccia ruotare la nave attorno al suo albero principale (assunto verticale) con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_t = \omega \hat{\mathbf{i}}_3$, $\omega > 0$ costante, alzandone il ponte (inizialmente fermo) verso l'alto con accelerazione esponenzialmente decrescente $\mathbf{a}_t = a e^{-\frac{t}{T}} \hat{\mathbf{i}}_3$, dove $a > 0$ e

$\tau > 0$. Si calcoli il modulo della forza dovuta al moto della nave e dalla gravità subita da un marinaio di massa m fermamente aggrappato alla battagliola a distanza r dall'albero della nave.

2. PROBLEMI

Esercizio 2.1 (Distacco da emisfero) — Un punto materiale P di massa m giace in cima ad un emisfero di massa M e raggio r , a sua volta poggiato su un piano liscio. In un certo istante, il punto materiale subisce un impulso infinitesimo, in modo da acquisire una velocità iniziale \mathbf{v}_0 tangente all'emisfero. Supponendo il contatto tra punto materiale ed emisfero anch'esso liscio, si scriva una equazione per l'angolo θ , misurato dalla sommità dell'emisfero, a cui il punto materiale si distacca. Si assuma che \mathbf{v}_0 sia arbitrariamente piccola in norma.



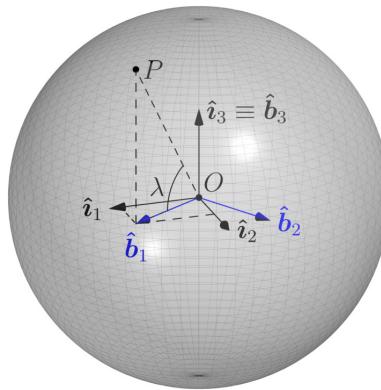
Esercizio 2.2 (Una correzione non-inerziale a g) — Un riferimento solidale con la Terra *non* è un sistema di riferimento inerziale per via di vari moti di rotazione e rivoluzione che la Terra compie e che tipicamente vengono trascurati in prima approssimazione. Una prima correzione non-inerziale da tenere in conto è l'effetto della *rotazione terrestre*: come ben noto, la Terra ruota attorno ad un suo asse, compiendo una rotazione completa nell'arco di 24 ore. Indichiamo con $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ un riferimento che *assumiamo* inerziale, con origine nel centro della Terra¹. Introduciamo altresì un riferimento mobile *solidale col moto della Terra*, $\beta = O\hat{\mathbf{b}}_1\hat{\mathbf{b}}_2\hat{\mathbf{b}}_3$, con origine sempre il centro della Terra ma solidale ad essa, tale per cui

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \phi \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{b}}_2 = -\sin \phi \hat{\mathbf{i}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \hat{\mathbf{b}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_3,$$

nell'assunzione che $\omega := \dot{\phi}$ sia una quantità costante. Un punto materiale P di massa m fermo sulla superficie (ma in moto con la Terra) è individuato rispetto ad O dal vettore²

$$\mathbf{x}^\beta = R_T \cos \lambda \hat{\mathbf{b}}_1 + R_T \sin \lambda \hat{\mathbf{b}}_3.$$

Qui λ è l'angolo di \mathbf{x}^β con il piano dell'equatore, come in figura:



Si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si calcoli la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_\beta$ del riferimento β rispetto al riferimento inerziale.
- (2) Si esprima la forza peso agente su P nella base del riferimento β .
- (3) Si calcoli il modulo dell'accelerazione del punto materiale nel riferimento β solidale con la Terra.
- (4) Si supponga ora che $\lambda \neq 0$, ovvero il punto di muove lungo il meridiano. Si calcoli l'accelerazione di Coriolis su P .

¹Stiamo trascurando ogni altro moto terrestre fuorché quello di rotazione

²Nel seguito, ometteremo apici di quantità viste dal riferimento inerziale. Inoltre, qui $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\beta$, dato che le due origini coincidono, ma espliciteremo comunque l'apice β per ricordarci che stiamo lavorando rispetto al riferimento mobile.

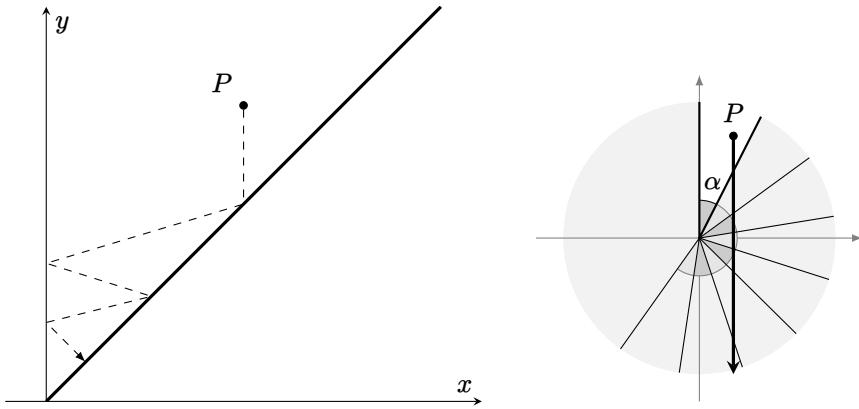
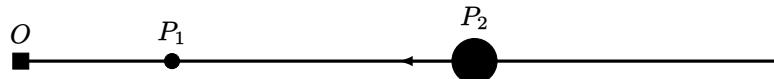


FIGURA 1. Problema di Galperin (a sinistra) e descrizione equivalente in termini di biliardo su settore del primo quadrante.

Esercizio 2.3 (Biliardo di Galperin³) — Due punti materiali P_1 e P_2 , di massa rispettivamente $m_1 = 1$ e $m_2 = \eta$, con $\eta > 1$, sono vincolati a scorrere lungo una guida liscia. La guida consiste in una semiretta di origine O , dove è collocato un perno inamovibile. Le posizioni di P_1 e P_2 sono univocamente determinata dalla loro ascissa rispetto all'origine, che indichiamo con x ed y rispettivamente. Assumiamo come condizioni iniziali per $t = 0$ siano $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, con $0 \leq x_0 \leq y_0$. I punti non possono attraversarsi reciprocamente, il che implica $0 \leq x \leq y$ ad ogni $t > 0$. Inoltre, a $t = 0$, assumiamo che P_1 sia fermo, $\dot{x}(0) = 0$, mentre P_2 ha velocità $\dot{y}(0) = -v_0$ con $v_0 > 0$, ovvero è diretto verso l'origine della semiretta, e quindi andrà a collidere con P_1 .



Quanti urti (tra i punti materiali P_1 e P_2 , o tra P_1 e il fermo in O) avranno luogo durante l'evoluzione del sistema assumendo che le collisioni siano elastiche, ovvero che si conservi sia la quantità di moto che l'energia cinetica ad ogni urto?

Soluzione. — Lo spazio delle configurazioni è un settore del primo quadrante nel piano (x, y) con angolo al centro $\frac{\pi}{4}$, come in Fig. 1: il sistema è individuato da un punto $P = (x, y)$ nella porzione di spazio compresa tra l'asse y e la retta $y = x$ per $x > 0$: se P tocca l'asse y , significa che P_1 urta O ; se P tocca la retta $y = x$, significa che P_1 urta P_2 . Questo punto *si muove di moto rettilineo uniforme* tra un urto e l'altro dato che non vi sono altre forze agenti lungo la traiettoria dei punti materiali: la velocità di P è (\dot{x}, \dot{y}) , ovvero ha come componenti le velocità di P_1 e P_2 . Un fatto molto interessante della dinamica di questo sistema è che gli urti sulla frontiera del suo dominio possono essere studiati come in un *biliardo* nel piano. Per essere più precisi, immediatamente dopo $t = 0$, P si muoverà verticalmente nello spazio delle configurazioni con velocità $\mathbf{v}_0 = (0, -v_0)$, fino ad urtare la retta $y = x$. A quel punto la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica impongono che subito dopo l'urto la velocità di P sia $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$ tale che

$$u_1 + \eta v_1 = -\eta v_0, \quad \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} \eta v_1^2 = \frac{1}{2} \eta v_0^2.$$

Dopo la collisione, P_1 continuerà a muoversi verso O (essendo $\eta > 1$) con velocità u_1 , in modulo minore di v_1 per ragioni di conservazione dell'energia. Ciò significa che P_1 raggiungerà O prima di essere raggiunta da P_2 e quindi il secondo urto sarà tra P_1 e l'origine: la velocità di P passerà da $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$ a $\mathbf{v}_2 = (u_2, v_2) = (-u_1, v_1)$. A questo punto P_1 tornerà indietro, urtando nuovamente P_2 in un terzo urto. Le equazioni che forniscono la velocità di P dopo il terzo urto, sia $\mathbf{v}_3 = (u_3, v_3)$, sono

$$u_3 + \eta v_3 = u_2 + \eta v_2 = -u_1 + \eta v_1, \quad \frac{1}{2} u_3^2 + \frac{1}{2} \eta v_3^2 = \frac{1}{2} \eta v_0^2$$

che occorrerà analizzare in termini di η , etc. Per fare progressi sul problema, è utile, come anticipato, mapparlo in un vero “biliardo”. L’“urto” di P sulla retta $y = x$ non produce, in generale, una riflessione “ottica”, ovvero tale per cui l’angolo di incidenza e di riflessione sono uguali. Si può però eseguire una speciale trasformazione lineare che rende questa riflessione del tipo desiderato. Introduciamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}$$

³G. Galperin, *Playing pool with π* , Regular and chaotic dynamics, 8(4), 375 (2003).

di modo che $\mathbf{x} = (x, y)^\top \mapsto \mathbf{X} = (X, Y)^\top = \mathbf{A}\mathbf{x} = (x, \sqrt{\eta}y)^\top$. Si tratta di un cambio di scala, che modifica l'angolo al centro del settore ammesso da $\frac{\pi}{4}$ ad un nuovo angolo α tale per cui

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\eta}}.$$

Se l'asse y viene mappato in se stesso da questa trasformazione, la retta $y = x$ viene mappata nella retta $Y = \sqrt{\eta}X$, che ha direzione

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\eta} \end{pmatrix}.$$

Vediamo come cambiano ora le condizioni di conservazione di quantità di moto ed energia cinetica utilizzando le nuove variabili. L'urto con l'asse Y non cambia natura, dato che $\mathbf{V} = \mathbf{Av} = (v_x, \sqrt{\eta}v_y)^\top \mapsto (-v_x, \sqrt{\eta}v_y)^\top$ (già in forma adeguata prima della trasformazione). La legge che regola gli urti tra P_1 e P_2 invece si riscrive in modo piuttosto elegante: se il k -esimo urto avviene tra P_1 e P_2 , la velocità dopo l'urto \mathbf{V}_k è legata alla velocità prima dell'urto \mathbf{V}_{k-1} come

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_k \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_{k-1} \rangle, \quad \|\mathbf{V}_k\|^2 = \|\mathbf{V}_{k-1}\|^2,$$

che equivale a dire che l'urto ruota il vettore velocità mantenendone costante il modulo e la proiezione nella direzione della frontiera \mathbf{t} : questo è esattamente quel che accade in un urto “ottico”, dove la velocità conserva il suo modulo e mantiene uguale la proiezione lungo la direzione tangente alla superficie di impatto. Nelle nuove coordinate, quindi, P si muove nella regione ammessa esattamente come un punto materiale in un biliardo ideale. L'utilità di questo fatto è che possiamo studiare il moto di P con una semplice costruzione geometrica. Basta osservare che esiste una corrispondenza biunivoca tra la traiettoria in questo speciale biliardo e la costruzione in Fig. 1. Il diagramma rappresentato è stato ottenuto replicando un angolo α nel piano, ottenendo una infinità di settori ciascuno con angolo al centro α , e considerando la traiettoria che P seguirebbe nel piano stesso se non ci fosse riflessione sulla retta $Y = \eta X$. La traiettoria che esso segue nel secondo settore è *speculare* rispetto a $Y = \eta X$ a quella che P segue nel primo in presenza di riflessione, ovvero coincide con una traiettoria reale a meno di una riflessione attorno alla bisettrice del settore e una traslazione di α . La traiettoria di P nel terzo settore è *uguale* a quella seguita nel primo settore a meno di una rotazione di 2α , e così via. Il numero di collisioni corrisponde quindi al numero di settori attraversati da P . Questa traiettoria interseca necessariamente un numero *finito* di settori n , pari a $n = \lceil \frac{\pi}{\alpha} \rceil - 1$, dove ricordiamo che α è tale che $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{\eta}}$. Se $\eta = 100^N$, per esempio, $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\arctan 10^{-N}} = 10^N + \frac{1}{3 \cdot 10^N} + o(10^{-N})$ e quindi, per $N \gg 1$, $n = \lceil \pi 10^N \rceil$, ovvero il numero di urti corrisponde all'intero ottenuto considerando le prime N cifre di π .