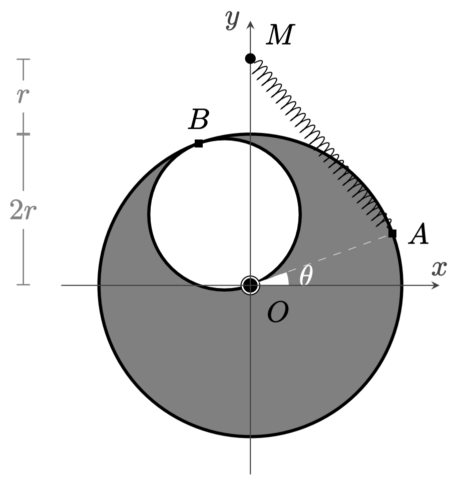
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

17 Gennaio 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Il voto minimo per l'accesso all'orale è `15/30`.

In figura è rappresentato un sistema mobile su un piano dove è dato un riferimento cartesiano Oxy come in figura. Il sistema è costituito da una lamina circolare $\mathcal{L}$ di raggio $2r$, il cui centro O è imperniato nell'origine, permettendone la rotazione senza attrito. La lastra è omogenea e presenta un foro circolare di raggio r e tangente al bordo esterno della lamina in un punto B. La massa della lamina è pari a $3m$. Infine, una molla ideale di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k è fissata ad un punto A sul bordo della lamina. Il punto A è tale che $\widehat{AOB} = \pi/2$, mentre il secondo estremo della molla è vincolato in M, punto fisso di coordinate $(0, 3r)$ secondo il sistema di riferimento dato.



A Individuare i gradi di libertà del sistema, i suoi parametri lagrangiani con i rispettivi domini, le forze *attive* agenti sul sistema e il tipo di vincoli a cui esso è soggetto. [**`4 pt`**]

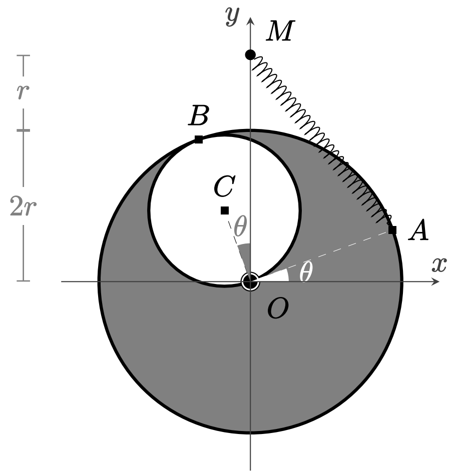
B Stimare la densità areale ϱ della lamina e calcolare la posizione G del suo centro di massa. [**`8 pt`**]

C Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto al suo centro di rotazione O. [**`8 pt`**]

D Calcolare le configurazioni di equilibrio del sistema e dire se esse sono stabili, instabili o indifferenti. Per quale valore di k si ha una posizione di equilibrio stabile in cui l'angolo θ in figura vale $\pi/2$? [**`10 pt`**]

Suggerimento. Ricordate che, dato un triangolo di lati a, b e c, se α è l'angolo compreso tra i lati a e b, allora vale la legge del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.
Suggerimento. L'equazione $\tan\theta = c$, con $c \in \mathbb{R}$, ha *due* soluzioni $\theta_\pm$ sul dominio $[-\pi, \pi)$, una con $\cos\theta_+ > 0$ e una con $\cos\theta_- < 0$.

Soluzione



A Il sistema ha un solo grado di libertà, descritto dal parametro lagrangiano $\theta \in [-\pi, \pi)$. Indicando con $\hat{\imath}_2$ il versore diretto verso l'alto, le forze attive agenti sul sistema sono la forza peso $\vec{F}_g = -3mg\hat{\imath}_2$ supposta applicata al centro di massa G, e la forza elastica applicata in A, $\vec{F}_{\text{el}} = k\overrightarrow{AM}$. L'unico vincolo è il perno in O che è olonomo e ideale e permette la rotazione del sistema.

B Essendo la massa della lamina pari a $3m$ ed essendo essa omogenea, per calcolare ϱ occorre calcolarne l'area A, che è data dalla differenza tra l'area $A_{\mathcal{D}} = 4r^2\pi$ del disco di raggio $2r$ e l'area della cavità $A_{\mathcal{C}} = \pi r^2$, $A = A_{\mathcal{D}} - A_{\mathcal{C}} = 4r^2\pi - r^2\pi = 3r^2\pi$, per cui

$$\varrho = \frac{m}{r^2\pi}.$$

Sia C il centro della cavità. Indichiamo con $\mathcal{C}$ un ipotetico dischetto omogeneo di densità ϱ con centro C e raggio r, e con $\mathcal{D}$ un ipotetico disco omogeneo con centro O e raggio $2r$ (ovvero senza cavità). Quest'ultimo avrebbe massa

$$m_{\mathcal{D}} = 4\pi r^2\varrho = 4m$$

e centro di massa $\overrightarrow{OG_{\mathcal{D}}} = \vec{0}$. Il dischetto $\mathcal{C}$, invece, avrebbe massa

$$m_{\mathcal{C}} = \pi r^2\varrho = m$$

e centro di massa nel centro geometrico della cavità, ovvero

$$\overrightarrow{OG_{\mathcal{C}}} = r\left(\begin{smallmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right).$$

Il centro di massa del disco pieno si può ottenere interpretando $\mathcal{D} = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$, per cui

$$\vec{0} = \overrightarrow{OG_{\mathcal{D}}} = \frac{m_{\mathcal{C}}\overrightarrow{OG_{\mathcal{C}}} + m_{\mathcal{L}}\overrightarrow{OG_{\mathcal{L}}}}{m_{\mathcal{D}}} = \frac{\overrightarrow{OG_{\mathcal{C}}} + 3\overrightarrow{OG_{\mathcal{L}}}}{4} \Rightarrow \overrightarrow{OG_{\mathcal{L}}} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OG_{\mathcal{C}}} = \frac{r}{3}(\sin\theta\hat{\imath}_1 - \cos\theta\hat{\imath}_2).$$

C Il momento di inerzia rispetto ad O può calcolarsi nella maniera seguente:

$$I_O^{\mathcal{L}} = I_O^{\mathcal{D}} - I_O^{\mathcal{C}}$$

ovvero il momento di inerzia che cerchiamo è dato dalla differenza tra quello di un disco pieno di raggio $2r$ rispetto ad un asse perpendicolare passante per il suo centro, e quello di un disco di raggio r centrato in C, da calcolare rispetto allo stesso asse. In generale, il momento di inerzia di un disco di massa M e raggio R rispetto ad un asse perpendicolare passante per il suo centro è

$$I = \frac{1}{2}MR^2,$$

per cui abbiamo che

$$I_O^{\mathcal{D}} = 2m_{\mathcal{D}}r^2 = 8mr^2 \qquad I_O^{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}m_{\mathcal{C}}r^2 + m_{\mathcal{C}}r^2 = \frac{3}{2}m_{\mathcal{C}}r^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

dove nel secondo caso abbiamo appicato il teorema di Huygens–Steiner. Concludendo

$$I_O^{\mathcal{L}} = \frac{13}{2} m r^2.$$

D Calcoliamo anzitutto l'energia potenziale del sistema. Essa si ottiene combinando due contributi, ovvero l'energia potenziale gravitazionale della lamina $\mathcal{L}$ e l'energia elastica associata alla molla. Sulla base di quanto calcolato sopra, questi contributi sono rispettivamente

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{L}} &= -mgr\cos\theta \\ V_k &= \frac{1}{2} k\, d^2(A, M) = \frac{kr^2}{2}(13 - 12\sin\theta). \end{aligned}$$

L'energia potenziale totale è quindi

$$V = V_{\mathcal{L}} + V_k = -mgr\cos\theta + \frac{kr^2}{2}(13 - 12\sin\theta) + \text{costante}$$

che è estremizzato per l'angolo θ che risolve

$$\partial_\theta V = mgr\sin\theta - 6kr^2\cos\theta = 0.$$

Dato che $\cos\theta = 0$ non risolve l'equazione, abbiamo $\tan\theta = \frac{6kr}{mg}$ e quindi due possibili soluzioni

$$\theta_+ = \arctan\frac{6kr}{mg}, \qquad \theta_- = \pi + \arctan\frac{6kr}{mg}.$$

Per valutare quale di esse è stabile, calcoliamo la derivata seconda di V,

$$\partial_\theta^2 V = mgr\cos\theta + 6kr^2\sin\theta.$$

Dato che θ_+ ha $\sin\theta_+ > 0$ e $\cos\theta_+ > 0$, in questo caso $\partial_\theta^2 V(\theta_+) > 0$. Viceversa, θ_- ha $\sin\theta_- < 0$ e $\cos\theta_- < 0$, quindi $\partial_\theta^2 V(\theta_-) < 0$. Ne segue che θ_+ è stabile, θ_- instabile. Infine, perché la posizione di equilibrio corrisponda ad un angolo $\theta_+ = {}^{\pi}/_{2}$, si deve avere $k \to +\infty$.