

Questa equazione può essere integrata più o meno facilmente a seconda della forma funzionale di f . Una classe particolarmente importante è quella dei sistemi *autonomi*, in cui f non dipende esplicitamente dal tempo. Tali sistemi sono particolarmente importanti dato che, nei problemi fisici, f solitamente non manifesta una dipendenza esplicita dal tempo per via dell'invarianza galileiana.

Se $f \equiv f(\dot{s})$, per esempio, si può scrivere l'equazione del primo ordine $\dot{v} = f(v)$ per la variabile $v = \dot{s}$. Questa equazione ammette un'unica soluzione se f è lipschitziana. Assumendo che in un intorno di v_0 si abbia $f(v) \neq 0$, in tale soluzione la soluzione soddisfa una equazione nella forma implicita

$$m\dot{s} = f(\dot{s}) \Rightarrow G(v) := m \int_{v_0}^v \frac{1}{f(u)} du = t.$$

Questo riduce il problema dell'integrazione delle equazioni del moto ad una equazione differenziale del primo ordine nella forma $G(\dot{s}) - t = 0$, la cui successiva integrazione permette, in linea di principio, di ottenere s tramite un'ulteriore quadratura.

Il caso $f \equiv f(s)$ invece merita una analisi più approfondita. Nel seguito, senza perdere in generalità, assumiamo, come sopra, come istante iniziale $t = 0$ e indichiamo con $s_0 := s(0)$ e $v_0 := \dot{s}(0)$ le condizioni iniziali del moto del nostro punto materiale su una guida liscia.

2.1. Forza posizionale $f \equiv f(s)$. Se la forza attiva è posizionale, ovvero $\mathbf{F}^{(a)} \equiv \mathbf{F}^{(a)}(\mathbf{x})$, allora $f \equiv f(s)$, di modo che il moto equivale a quello di un punto materiale soggetto ad una forza conservativa in una dimensione. Detta s la generica ascissa curvilinea toccata dal punto materiale durante il moto, è infatti possibile introdurre il potenziale

$$V(s) := - \int_{s_0}^s f(x) dx,$$

nell'ipotesi che f sia integrabile sull'intervallo considerato. L'utilità dell'aver introdotto V sta nel fatto che la quantità

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s)$$

risulta conservata durante il moto, come si vede derivando rispetto al tempo, e dunque essa rimane uguale al valore $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(s_0)$ dell'istante iniziale $t = 0$. Inoltre, il fatto che il contributo cinetico debba essere sempre positivo fa sì che il moto possa avvenire solo in regioni in cui

$$E - V(s) \geq 0.$$

Assumiamo ora che $v_0 \neq 0$. Se $E - V(s) > 0$ in un intorno di s_0 . Per s in tale intorno, l'espressione dell'energia meccanica implica

$$1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(s)}} \frac{ds}{dt} \Rightarrow t(s) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(x)}} dx \equiv \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx,$$

che è la soluzione implicita del problema. La funzione

$$\Phi(s) := 2 \frac{E - V(s)}{m}$$

contiene in particolare tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse. Il moto può infatti verificarsi solo nelle regioni in cui $\Phi(s) > 0$, mentre gli (eventuali) zeri della funzione separano la curva γ in porzioni mutualmente inaccessibili.

Per meglio fissare le idee, supponiamo di avere, nella notazione precedente, $v_0 > 0$: se $\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in [s_0, s]$, allora

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

è una funzione con derivata strettamente positiva e quindi invertibile: essa quantifica il tempo (finito) necessario al punto materiale per raggiungere s a partire da s_0 .

Se esiste $\hat{s} > s_0$ tale che $\Phi(\hat{s}) = 0$ e $\Phi(x) > 0$ per $x \in [s_0, \hat{s}]$, il tempo necessario per raggiungere tale punto a partire da s_0

$$t(\hat{s}) = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

può essere finito o infinito. Assumendo in particolare che Φ sia analitica in \hat{s} , questo dipenderà dal fatto che \hat{s} sia uno zero semplice o multiplo di $\Phi(s)$, rispettivamente.

Se \hat{s} è uno zero multiplo di $\Phi(s)$, l'integrale diverge: questo fatto è coerente con il teorema di Cauchy sull'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali. Osservando infatti che le equazioni del moto si scrivono come $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$, nel caso in cui \hat{s} sia uno zero multiplo, la quantità $\sqrt{\Phi(s)}$ è lipschitziana in un intorno di \hat{s} , fatto che garantisce l'unicità della soluzione. D'altra parte, $s(t) = \hat{s}$ risolve l'equazione e pertanto è l'unica soluzione ammessa passante per \hat{s} : ogni traiettoria ottenuta con diversa condizione iniziale può solo avvicinarsi al punto \hat{s} senza mai toccarlo (diversamente, vi sarebbero *due* possibili soluzioni passanti per \hat{s}). Si noti inoltre che, coerentemente con questo fatto, la forza applicata al punto materiale in uno zero multiplo \hat{s} è nulla, $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) = 0$, per cui in effetti un punto materiale in \hat{s} non accelera.

Discorso diverso vale per gli zeri semplici. Se \hat{s} è uno zero semplice, la formula precedente predice che esso verrà toccato in un tempo finito $t(\hat{s})$. Questo peraltro mostra che esistono almeno due soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$ passanti per \hat{s} (ovvero, la soluzione dell'equazione con condizione iniziale $s(0) = s_0$ e quella con condizione iniziale $s(0) = \hat{s}$). La ragione, nuovamente, è che in questo caso $\sqrt{\Phi(s)}$ non è lipschitziana in un intorno di \hat{s} : pur fissando la condizione iniziale $s(0) = \hat{s}$ (automaticamente associata a $\dot{s}(0) = 0$) l'unicità non è garantita e sono ammesse più soluzioni. D'altra parte, se il punto materiale si trova in uno zero semplice di Φ con velocità nulla, l'evoluzione fisica del suo moto (ovvero *quale* delle possibili soluzioni si realizzerà) sarà determinata dal segno della forza $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) \neq 0$ che non permette alla velocità di rimanere nulla.

Anche se accessibili di per sé, gli zeri semplici di $\Phi(s)$ costituiscono comunque la frontiera di regioni di accessibilità sulla curva, come si vede dai seguenti risultati.

DEFINIZIONE 2.1. Gli zeri semplici di $\Phi(s)$ sono detti punti di inversione.

TEOREMA 2.1. Il moto tra due punti di inversione consecutivi \hat{s}_- ed $\hat{s}_+ > \hat{s}_-$ è periodico di periodo

$$\tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano \hat{s}_- ed \hat{s}_+ due zeri semplici consecutivi di $\Phi(s)$. Per ipotesi, nell'intervallo $[\hat{s}_-, \hat{s}_+]$ possiamo scrivere $\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(\hat{s}_+ - s)\phi(s)$ con $\phi(s) > 0$ per $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$. La velocità del punto materiale si annulla in \hat{s}_\pm mentre la forza ha in questi punti segno opposto:

$$f(\hat{s}_+) = \Phi'(\hat{s}_+) = -(\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_+) < 0, \quad f(\hat{s}_-) = \Phi'(\hat{s}_-) = (\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_-) > 0,$$

il che fa sì che il moto si inverta in questi punti estremali. Partendo da $s_0 \in (\hat{s}_-, \hat{s}_+)$ con $v_0 > 0$ al tempo $t = 0$, il moto prosegue quindi fino a \hat{s}_+ dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, il punto materiale subisce una accelerazione verso \hat{s}_- che lo fa ripassare da s_0 con velocità opposta in segno, fino ad arrivare in \hat{s}_- , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in s_0 con stessa velocità v_0 dopo un tempo τ : da qui in poi il moto si riproduce *identico* essendosi verificate nuovamente, al tempo τ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo $t = 0$. Il periodo quindi è

$$\tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx - \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx. \quad \square$$

Esercizio 1.1 — Un punto materiale di massa m si muove lungo una guida liscia fissa γ ed è soggetto ad un potenziale lungo la guida nella forma $V(s) = s^{2n}$. Supponendo che il punto inizi a muoversi per $t = 0$ da $s(0) = 0$ con energia meccanica $E > 0$, si dimostri che il periodo non dipende da E se e solo se $n = 1$: si calcoli l'espressione del periodo in questo caso speciale. [$\tau = \sqrt{2m\pi}$]

2.2. Piano delle fasi. Nella forma $m\ddot{s} = f(t, s, \dot{s})$, l'equazione del moto equivale ad una coppia di equazioni del primo ordine in uno spazio bidimensionale; ovvero, rinominando x la variabile s ed indicando con $y = \dot{s}$, possiamo scrivere

$$\dot{y} = \frac{1}{m} f(t, x, y), \quad \dot{x} = y.$$

DEFINIZIONE 2.2. Il piano \mathbb{R}^2 in cui varia la coppia $\mathbf{z} := (x, y)$ prende il nome di *piano delle fasi*. Su di esso, è definito il campo vettoriale $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $(t, \mathbf{z}) \mapsto (y, \frac{1}{m} f(t, x, y))$, le cui curve integrali, ovvero le curve $\mathbf{z}(t)$ soluzioni dell'equazione $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z})$, sono dette *curve di fase del sistema*. L'operatore \mathbf{g}^t che associa ad un certo punto del piano delle fasi $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ il punto $\mathbf{z}(t)$ ottenuto per mezzo dell'evoluzione indotta da \mathbf{f} è detto *flusso di fase* del sistema ed agisce come

$$\mathbf{g}^t: \mathbf{z}_0 \mapsto \mathbf{z}(t) = \mathbf{g}^t \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0.$$

Un *punto* nel piano delle fasi $\mathbf{z} = (x, y)$ corrisponde quindi ad uno stato cinematico del punto materiale, ovvero alla sua posizione e alla sua velocità.

DEFINIZIONE 2.3. Un punto $(x_0, 0)$ si dice *di equilibrio* se il flusso di fase associato si riduce al punto stesso, ovvero $\mathbf{g}^t(x_0, 0) = (x_0, 0) \forall t > 0$.

Se $f \equiv f(s)$ le equazioni del moto implicano, come abbiamo visto, la conservazione dell'energia $E(s, \dot{s}) := \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s)$, dove come sopra $-V'(s) = f(s)$, pertanto le curve di fase sono *isoenergetiche*, ovvero $E(x, y)$ non cambia lungo una curva di fase: fissato $e \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello

$$\mathcal{M}(e) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: E(x, y) := \frac{1}{2} m y^2 + V(x) = e \right\}$$

contiene le curve di fase di energia e . L'insieme $\mathcal{M}(e)$ è in generale costituito da diverse componenti connesse, la cui regolarità è garantita se $\nabla E(x, y) = (V'(x), my) \neq \mathbf{0}$ in ogni loro punto.

Esercizio 1.2 — Dimostrare che la condizione $E(x, y) := \frac{1}{2} m y^2 + V(x) = e$ individua una curva regolare in un intorno di $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{M}(e)$ se $\nabla E(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$.

Soluzione. — Assumiamo per esempio che $\partial_x E(x_0, y_0) = V'(x_0) \neq 0$. Il teorema della funzione implicita garantisce che esiste un intorno I di x_0 in cui si può trovare una funzione f di modo che $E(x, f(x)) = e$ in tale intorno. Similmente se $\partial_y E(x_0, y_0) = y_0 \neq 0$ esiste una funzione g in un intorno J di y_0 tale

che $E(g(y), y) = e$ in tale intorno. Ciò significa che, a seconda delle circostanze, possiamo localmente parametrizzare $\mathcal{M}(e)$ come una curva $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $t \in I$ o $\gamma(t) = (g(t), t)$, con $t \in J$. In entrambi i casi il vettore tangente non è mai nullo, avendo sempre una componente uguale ad 1.

La condizione di punto di equilibrio nel caso di forze posizionali *equivale* a richiedere che $V'(x_0) = 0$, ovvero che x_0 sia un punto stazionario del potenziale: in virtù del teorema di Cauchy, infatti, la condizione iniziale $(x_0, 0)$ non può che evolvere in se stessa se $V'(x_0) = 0$. I punti di equilibrio quindi sono proprio i punti *critici*, ovvero i punti in cui $\nabla E(x, y) = \mathbf{0}$ e la regolarità di $\mathcal{M}(e)$ viene meno.

2.2.1. *Stabilità.* Per classificare i punti critici, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4. Un punto del piano delle fasi $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$ si dice *di equilibrio stabile secondo Lyapunov* se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ per cui, denotato $\mathbf{z} = (x, y)$ si ha che

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Il punto si dice *asintoticamente stabile* se esiste $\delta > 0$ tale per cui

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0.$$

L'insieme $\mathcal{B}(\mathbf{z}_0) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0\}$ è detto *bacino di attrazione* di \mathbf{z}_0 . Un punto non stabile si dice infine *instabile*.

In altre parole, un punto è stabile secondo Lyapunov se, avviando il moto in prossimità di tale punto nel piano delle fasi, non ce ne si allontana mai.

Se la forza in gioco è *posizionale* allora vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.2. Si assuma V funzione di classe almeno \mathcal{C}^2 in un intorno di x_0 , punto di minimo relativo isolato di V ; allora x_0 è un punto di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un qualunque intorno I di $\mathbf{z}_0 := (x_0, 0)$, e osservando che $E(x_0, 0) = V(x_0)$ valore del potenziale nel punto di minimo relativo isolato, sia

$$J_\delta(\mathbf{z}_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) < V(x_0) + \delta\}.$$

Ovviamente $\mathbf{z}_0 \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$. L'insieme $J_\delta(\mathbf{z}_0)$ ha come caratteristica il fatto che, per via della conservazione dell'energia meccanica, se $\mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$ allora $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0) \forall t > 0$. In questo insieme potremo isolare la componente connessa contenente \mathbf{z}_0 , sia essa $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$. Esso è limitata: nella direzione y , dovrà essere $y^2 < \frac{2}{m}(V(x_0) - V(x) + \delta) \leq \frac{2}{m}\delta$; analogamente $V(x) < V(x_0) + \delta$ implica che per un $\mathbf{z} = (x, y) \in \hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$ e δ sufficientemente piccolo, si ha $\frac{1}{2}V''(\xi)(x - x_0)^2 < \delta$ per un qualche $\xi \in (x_0, x)$ e con $V''(\xi) > 0$, ovvero $(x - x_0)^2 < \frac{2\delta}{V''(\xi)}$. È possibile quindi trovare δ tale che $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$ è in I : essendo \hat{J}_δ invariante sotto \mathbf{g}^t per via della conservazione dell'energia — ovvero tutte le traiettorie che iniziano in essa non ne usciranno mai — la definizione di punto stabile secondo Lyapunov è soddisfatta. \square

Esempio 1.3 — Si noti che se un punto è di equilibrio stabile secondo Lyapunov non è necessariamente un punto di minimo relativo dell'energia potenziale: questo si vede facilmente ammettendo che $V(x)$ sia non analitica in un qualche suo punto. Supponiamo, per esempio, di avere un punto materiale di massa unitaria in moto nel potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

L'energia potenziale considerata non ammette una espansione in serie in un intorno di $x_0 = 0$, e tale punto non è di minimo relativo per $V(x)$, dato che per ogni $\delta > 0$ esiste un $x \neq 0$ con $|x| < \delta$ e tale che $V(x) < 0$. Tuttavia, x_0 è di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Supponiamo infatti che il sistema

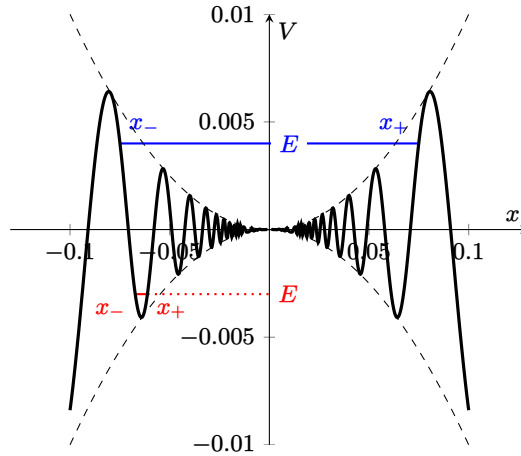


FIGURA 1. Potenziale nell'Esempio 1.3 e due intervalli ammessi per il moto per diversi valori di E .

abbia energia positiva, $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E > 0$. Possiamo individuare due punti di inversione $x_{\pm}(E)$, di modo che il moto avvenga sempre nell'intervallo $[x_-(E), x_+(E)]$ (vedasi Fig. 1) con $|x_{\pm}(E)| \rightarrow 0$ per $E \rightarrow 0^+$. Inoltre, in tale intervallo, $V(x) > -E$ e quindi $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) > \frac{1}{2}y^2 - E \Rightarrow |y| < \sqrt{2E}$. La misura dell'intorno nel piano delle fasi in cui avviene il moto, $[x_-(E), x_+(E)] \times [-\sqrt{2E}, \sqrt{2E}]$, può quindi essere resa piccola a piacere. Un ragionamento analogo può essere fatto per $E < 0$, dove un intervallo arbitrariamente vicino all'origine può essere scelto di modo che il suo corrispondente intervallo nel piano delle fasi sia arbitrariamente piccolo per $E \rightarrow 0^-$. Di conseguenza, $x = 0$ è una posizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

DEFINIZIONE 2.5. Nel caso di moto unidimensionale soggetto a forza posizionale, un insieme $\mathcal{M}(e)$ contenente un punto critico instabile si dice *curva separatrice*.

Una separatrice è per costruzione data dall'unione dei punti di equilibrio instabili e da curve connesse che esprimono traiettorie di moto che tendono asintoticamente ai detti punti di equilibrio instabile, senza mai raggiungerli. Un punto critico $(x_0, 0)$ è infatti in corrispondenza con uno zero multiplo di $\Phi(x)$, essendo $\Phi(x_0) = 0$ per via della condizione $y = 0$, e dovendo essere $V'(x_0) = -\frac{m}{2}\Phi'(x_0) = 0$.

Esempio 1.4 — Consideriamo il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ nella forma $\ddot{s} = -s$, corrispondente all'equazione fondamentale delle oscillazioni. Si tratta di una legge associata all'energia meccanica

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2,$$

che si conserva essendo la forza posizionale e associabile al potenziale $V(s) = \frac{1}{2}s^2$. Gli insiemi di livello del problema sono semplici circonferenze nel piano delle fasi, dove è definito il vettore $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$ nella notazione già introdotta, vedasi Fig. 2. Esiste un unico punto di equilibrio stabile, corrispondente a $(x, y) = (0, 0)$, senza alcuna separatrice.

Esempio 1.5 — A titolo esemplificativo, consideriamo un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto al potenziale $V(s) = s^2(s^2 - 1)$ in moto su una curva con $s \in \mathbb{R}$. In Fig. 3 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale E .

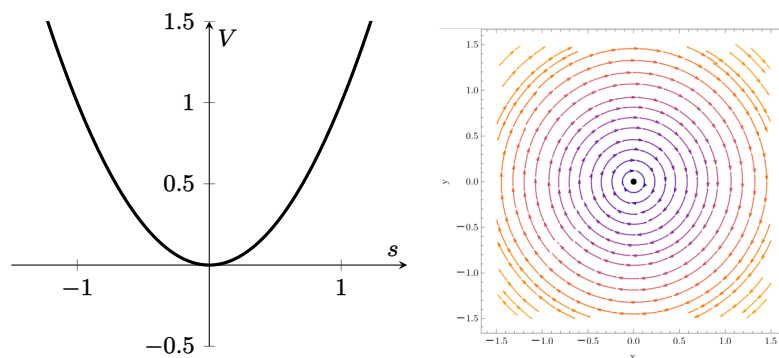


FIGURA 2. Potenziale e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase relativo all'esempio 1.4.

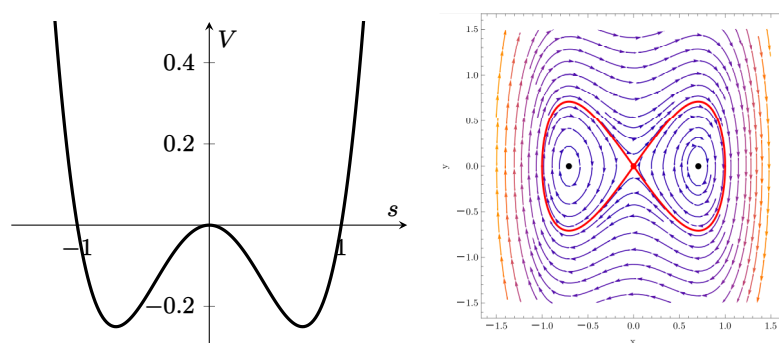


FIGURA 3. Potenziale nell'Esempio 1.5 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa $m = 1$.

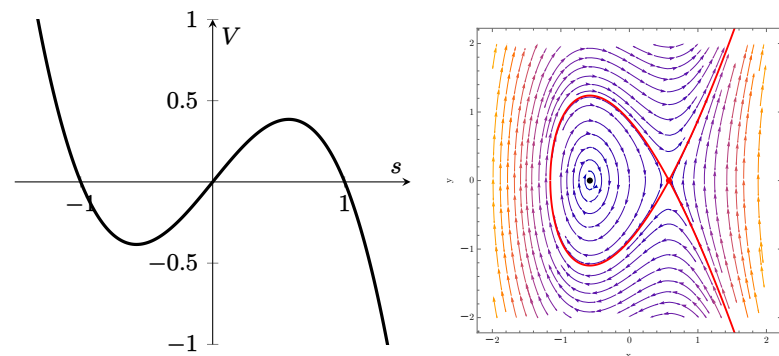


FIGURA 4. Potenziale nell'Esempio 1.6 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa $m = 1$.

Esempio 1.6 — Consideriamo un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto al potenziale $V(s) = s(1 - s^2)$. In Fig. 4 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale E .

Esercizio 1.3 — Sia $A(E)$ l'area di una curva di fase chiusa in un sistema conservativo corrispondente ad un valore E dell'energia meccanica. Si dimostri che il periodo τ del moto corrispondente è $\tau = A'(E)$.

2.3. Pendolo. Il *pendolo semplice* è un dispositivo meccanico che consiste di un punto materiale di massa m vincolato, tramite vincolo olonomo liscio e fisso, a muoversi su una circonferenza di raggio ℓ in un piano verticale. Il moto è soggetto alla forza di gravità di modo che, indicando con $\theta \in (-\pi, \pi]$ *a meno di periodicità* la deviazione dalla verticale del dispositivo, il potenziale a cui è soggetto il punto materiale è $V(\theta) = -mg\ell \cos \theta$, con g accelerazione di gravità, e l'energia meccanica, conservata, abbia l'espressione

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

a meno di una costante additiva arbitraria. L'equazione del moto è così

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Si noti che, invece di utilizzare $s = \ell\theta$, ascissa curvilinea lungo la circonferenza, stiamo qui utilizzando direttamente come variabile fondamentale l'angolo θ : in questa parametrizzazione il moto corrisponde a quello di un punto materiale di massa unitaria che si muove sotto l'azione di un potenziale $\hat{V}(\theta) = \frac{1}{m\ell^2}V(\theta) = -\frac{g}{\ell} \cos \theta$. Si tratta di un sistema autonomo che sviluppa il suo moto su una curva, e può quindi essere analizzato con le tecniche discusse sopra. Indicando con

$$e := \frac{E}{mg\ell}, \quad \tau^2 := \frac{\ell}{g}$$

possiamo anzitutto scrivere, dall'equazione per l'energia,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + e) \equiv \Phi(\theta),$$

che richiede $e \geq -1$ per aver senso. Al variare di e possono distinguersi diversi tipi di moto. È utile visualizzare queste traiettorie nel piano delle fasi $(x, y) = (\theta, \dot{\theta})$ da intendersi con condizioni periodiche in θ , che quindi in questo caso è $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, ovvero un *cilindro* infinito.

Se $e > 1$, allora $\Phi(\theta)$ non ammette zeri e il moto consiste di *rotazioni* lungo l'intera circonferenza ammessa: in questo regime, le traiettorie nel piano delle fasi si avvolgono infatti attorno al cilindro.

Se invece $|e| < 1$, $\Phi(e)$ ammette degli zeri: in questo caso il moto è periodico e il moto consiste di *oscillazioni*. Le traiettorie non si avvolgono attorno al cilindro e (a differenza del caso $e > 1$) possono essere deformate con continuità in un punto, corrispondente all'unica soluzione di equilibrio *stabile* $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$, corrispondente ad un punto di minimo relativo isolato del potenziale.

Il caso $e = 1$ è marginale: l'equazione

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + 1)$$

identifica la *separatrice* nel piano delle fasi che delimitano i due diversi regimi: essa passa infatti per l'unica soluzione di equilibrio *instabile*, $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$. Il caso $e = -1$ invece ammette come uniche possibili soluzioni le soluzioni di equilibrio stabile e instabile.

Esercizio 1.4 — Si integri l'equazione del moto lungo la separatrice, ovvero per $e = 1$.

Soluzione. — Dal fatto che $2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$, l'equazione del moto si può riscrivere

$$\dot{\theta}^2 = 4 \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\tau^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\dot{\theta}}{1 - u^2} \right)^2 = \frac{1}{\tau^2},$$

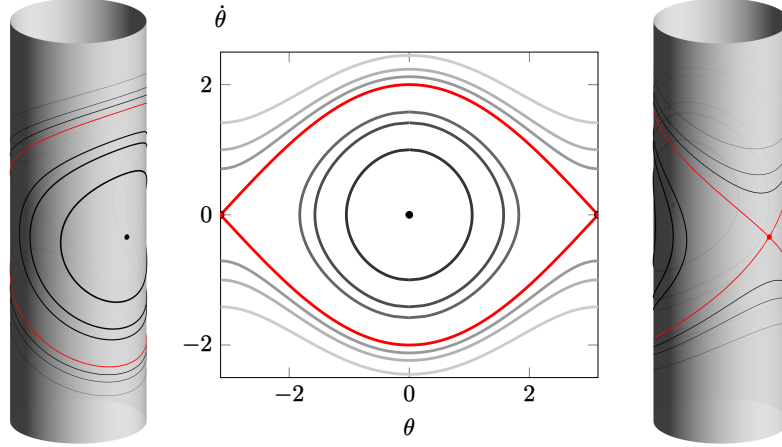


FIGURA 5. Piano delle fasi del pendolo con $\tau = 1$. Sono visualizzate le traiettorie per diversi valori di e , inclusa la separatrice ($e = 1$, linea rossa) e i due punti critici stabile (nero) e instabile (rosso).

dove abbiamo introdotto $u = \sin \frac{\theta}{2}$ assumendo $u \neq 1$. L'equazione si integra direttamente su $u \in (-1, 1)$: assumendo come istante di tempo iniziale $t = 0$ e che in tale istante $u(0) = 0$ (ovvero $\theta = 0$) e $\dot{u}(0) > 0$, avremo

$$\frac{t}{\tau} = \int_0^u \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{atanh} u \Rightarrow u(t) = \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Si noti che non abbiamo imposto il modulo della *velocità* iniziale: questo è dovuto al fatto che abbiamo risolto le equazioni ad energia fissa, per cui la velocità iniziale è automaticamente fissata *in modulo*, una volta dato $u(0)$, dalla condizione $e = 1$. Si noti inoltre che il valore $u = 1$, corrispondente alla configurazione di equilibrio instabile, viene raggiunto solo asintoticamente per $t \rightarrow +\infty$.

2.4. Piccole oscillazioni. Il caso del pendolo semplice mostra che anche i sistemi più elementari possono presentare complesse equazioni differenziali da risolvere. Lo studio di un sistema unidimensionale autonomo in prossimità di un punto $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$ di equilibrio nel piano delle fasi può essere però effettuato in una certa generalità in approssimazione di *piccole oscillazioni*. Assumiamo che il potenziale a cui il sistema è soggetto sia analitico in un suo punto di equilibrio isolato x_0 e che $V''(x_0) \neq 0$. Introduciamo la variabile $\xi := x - x_0$, di modo che il sistema di equazioni da studiare possa scriversi come

$$\dot{\xi} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m} V'(x_0 + \xi).$$

Essendo x_0 di equilibrio, espandendo in serie di potenze la seconda equazione si ha

$$\dot{y} = -\frac{1}{m} V''(x_0) \xi + o(\xi).$$

Trascurando gli ordini superiori al primo e introducendo

$$\omega^2 := \frac{1}{m} |V''(x_0)|, \quad \sigma := \operatorname{sign}(V''(x_0)) \in \{-1, 1\}$$

l'equazione assume la formula molto semplice

$$\ddot{\xi} + \sigma \omega^2 \xi = 0,$$

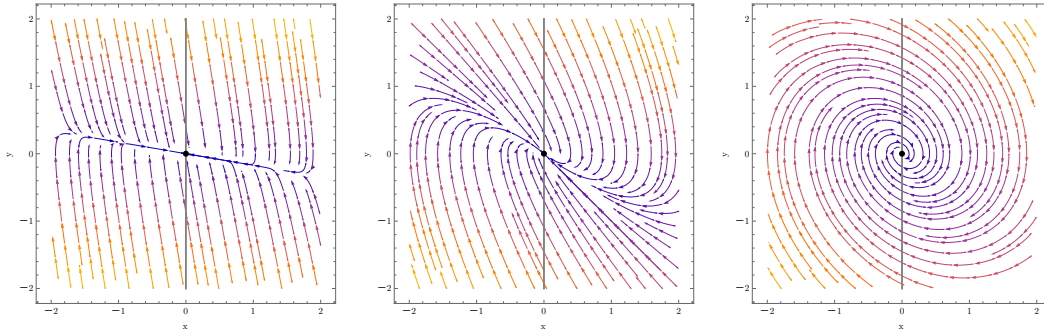


FIGURA 6. Diagramma di fase dell'oscillatore smorzato nei casi $\beta > \omega$ (sinistra), $\beta = \omega$ (centro), $\beta < \omega$ (destra) in assenza di forzante.

che descrive un cosiddetto *oscillatore armonico* se il punto è di equilibrio *stabile*, ovvero $\sigma > 0$. Essa ha soluzioni

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi(0) \cos(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sin(\omega t) & \text{se } V''(x_0) > 0 \\ \xi(0) \cosh(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sinh(\omega t) & \text{se } V''(x_0) < 0. \end{cases}$$

In altre parole, le traiettorie corrispondenti nel piano delle fasi sono ellissi o iperboli a seconda che il punto sia di equilibrio stabile o instabile rispettivamente. Nel caso di oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile, ovvero tale per cui $V''(x_0) > 0$, la soluzione è *periodica* di periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

In un pendolo, ad esempio, essendo il punto di equilibrio stabile $\theta = 0$ e $\hat{V}''(0) = \frac{g}{\ell}$, si ritrova la cosiddetta *legge dell'isocronia del pendolo*

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

indipendente dalla massa del punto materiale.

È importante osservare che l'analisi delle piccole oscillazioni è stata fatta nell'ipotesi di *piccole deviazioni* dalla posizione di equilibrio, ed è quindi una soluzione approssimata potenzialmente molto lontana dalla soluzione corretta quando ξ assume valori troppo grandi.

Esempio 1.7 (Moto armonico smorzato e forzato) — In molte applicazioni occorre considerare, nello studio di un moto armonico attorno ad un punto di equilibrio stabile, la presenza di una forza aggiuntiva che agisce sul punto materiale P di traiettoria \mathbf{x} tentando di frenarne il moto: tale forza esprime la *resistenza del mezzo* ed è tipicamente nella forma $\mathbf{F}_v = -\eta \dot{\mathbf{x}}$, con $\eta > 0$, di modo che la forza frenante è tanto più intensa quanto più grande è la velocità del corpo. In aggiunta alla forza di richiamo e alla forza dissipativa, è possibile anche includere la presenza di una certa *forzante* esterna $\mathbf{F}(t)$ nella direzione del moto. Assumeremo in particolare che, detto $\hat{\mathbf{t}}$ il versore tangente alla traiettoria di P , $\mathbf{F}(t) = F \cos(\omega_* t + \phi_0) \hat{\mathbf{t}}$, per una certa terna di valori reali $F, \omega_*, \phi_0 \in \mathbb{R}$.

Dati i nuovi contributi, l'equazione per ξ assume la forma

$$(1.6) \quad \ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{F}{m} \cos(\omega_* t + \phi_0),$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\dot{\mathbf{x}} = \dot{s} \hat{\mathbf{t}} = \dot{\xi} \hat{\mathbf{t}}$, e si è ridefinito $\beta := \frac{\eta}{2m}$. Data la natura periodica della forzante, possiamo convertire il problema in una equazione differenziale per la funzione complessa z , che

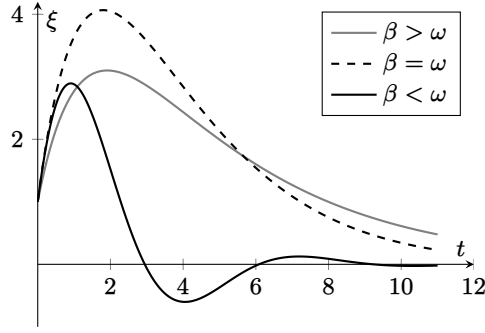


FIGURA 7. Evoluzione di ξ in un generico moto armonico smorzato (senza forzante) con stesse condizioni iniziali ma diversi parametri β e $\hat{\omega}$.

soddisfa l'equazione

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega^2 z = \frac{F}{m} e^{i(\omega_* t + \phi)}$$

di cui prenderemo la parte reale come soluzione. La procedura da applicare è standard: si cerca anzitutto una soluzione generica dell'equazione omogenea, nella forma $z_0(t) = e^{\lambda t}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale, otteniamo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \hat{\omega}, \quad \text{dove} \quad \hat{\omega} := \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Si ha così che la soluzione dell'equazione omogenea ha la forma

$$z_0(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \hat{\omega} = 0. \end{cases}$$

Nella formula precedente compaiono le due costanti α_{\pm} , che andranno fissate imponendo le condizioni iniziali. Dobbiamo ora cercare una soluzione particolare z_p al problema. Un *ansatz* possibile è $z_p(t) = b e^{i\omega_* t}$ per un qualche $b \in \mathbb{C}$. Inserendo questo *ansatz* nell'equazione si trova che in effetti essa è soddisfatta scegliendo

$$b = \frac{F}{m} \frac{e^{i\phi_0}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2}.$$

La nostra soluzione generale è quindi

$$z(t) = \frac{F}{m} \frac{e^{i(\omega_* t + \phi_0)}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2} + \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \text{se } \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \text{se } \hat{\omega} = 0, \end{cases}$$

Per semplificare i nostri calcoli e la nostra analisi, consideriamo anzitutto il caso $F = 0$, ovvero rimuoviamo la forzante e assumiamo ci sia solo dissipazione. Analizziamo i diversi casi separatamente, con generiche condizioni iniziali $\xi(0) =: \xi_0$ e $\dot{\xi}(0) =: v_0$ *non entrambi nulli* (diversamente, il punto rimane in quiete nel suo punto di equilibrio stabile), avendo assunto come istante iniziale $t = 0$.

$\beta > \omega$: Supponiamo inizialmente $\hat{\omega} > 0$ reale. In questo caso, essendo $\hat{\omega} < \beta$, il moto è tale che $\xi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ monotonicamente, ovvero la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile. Imponendo le condizioni iniziali, si trova che

$$\alpha_+ + \alpha_- = \xi_0, \quad \alpha_+ (\hat{\omega} - \beta) - \alpha_- (\hat{\omega} + \beta) = v_0 \Rightarrow \xi(t) = e^{-\beta t} \left(\xi_0 \cosh \hat{\omega} t + \frac{v_0 + \beta \xi_0}{\hat{\omega}} \sinh \hat{\omega} t \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio $\xi = 0$ per tempi $t > 0$ che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega} \xi_0 \cosh \hat{\omega} t + (v_0 + \beta \xi_0) \sinh \hat{\omega} t = 0$$

Se $v_0 \neq -\beta \xi_0$, questa equazione ammette un'unica soluzione

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}} \operatorname{arctanh} \frac{\hat{\omega} \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \quad \text{se e solo se} \quad -1 < \frac{\xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \leq 0.$$

In tutti gli altri casi, non esiste soluzione all'equazione e il sistema non passa mai dal punto di equilibrio.

$\boxed{\beta = \omega}$: Se $\beta = \omega$, il moto è detto *criticamente smorzato* e la soluzione generale del problema, una volta imposte le condizioni iniziali, ha la forma

$$\xi(t) = e^{-\beta t}(\xi_0 + (v_0 + \beta\xi_0)t).$$

Se $\xi_0 > 0$ (rispettivamente, $\xi_0 < 0$) il sistema passa per il punto di equilibrio una sola volta se $v_0 < -\beta\xi_0$ (rispettivamente, $v_0 > -\beta\xi_0$), diversamente ciò non avviene mai.

$\boxed{\beta < \omega}$: Se $\hat{\omega} = i\hat{\omega}_0 \equiv i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ è immaginario puro non nullo, $\xi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, ma eseguendo un certo numero di oscillazioni. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\xi(t) = e^{-\beta t} \left(\xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + \frac{v_0 + \beta\xi_0}{\hat{\omega}_0} \sin(\hat{\omega}_0 t) \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio $\xi = 0$ per tempi t che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega}_0 \xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + (v_0 + \beta\xi_0) \sin(\hat{\omega}_0 t) = 0.$$

Se $v_0 = -\beta\xi_0 \neq 0$, il sistema passerà dal punto di equilibrio per

$$t = \frac{\pi}{2\hat{\omega}_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}_0}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diversamente, il sistema passa dalla posizione di equilibrio negli infiniti istanti di tempo tali che

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}} \arctan \frac{\hat{\omega}_0 \xi_0}{v_0 + \beta\xi_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}_0} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}_0 & \text{se } \frac{\xi_0}{v_0 + \beta\xi_0} \leq 0, \\ n \in \mathbb{N} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il caso dell'oscillatore armonico puro si recupera per $\beta = 0$: in tal caso $\hat{\omega}_0 = \omega$.

Nel caso in cui sia presente una forzante, il contributo della soluzione omogenea al variare del campo in cui vive $\hat{\omega}$ rimane *smorzato* finantoché $\beta \neq 0$ e diventa trascurabile rispetto al contributo forzante per $t \gg 0$, che invece non decade e rimane oscillante. Per $t \gg 0$ si trova perciò che la soluzione ha la forma

$$\xi(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_*^2)^2 + 4\beta^2 \omega_*^2}} \cos\left(\omega_* t + \phi_0 + \arctan \frac{2\beta\omega_*}{\omega_*^2 - \omega^2}\right) + \text{termini esponenzialmente soppressi}.$$

Il termine forzante, dominante per $t \gg 0$, è indipendente dalle precise condizioni iniziali ma mantiene una dipendenza dalla frequenza propria ω del sistema. L'ampiezza del termine forzante è massima quando

$$\omega_* = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \quad \text{purché} \quad \omega^2 > 2\beta^2.$$

Questo valore è detto *frequenza di risonanza*.

Esempio 1.8 (Battimenti) — Il fenomeno dei *battimenti* si verifica quando il moto emerge da una sovrapposizione di due moti oscillatori con frequenze molto vicine, nella forma

$$\xi(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Se $a = a_1 = a_2$, possiamo applicare l'identità $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

$$\xi(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

e osservare che, se $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$, il primo termine produce una oscillazione di frequenza simile a quella delle due componenti originarie, mentre il secondo fattore manifesta una frequenza molto più bassa, e apparirà come un termine che “modula” il primo contributo su scale temporali più lunghe. Questa circostanza può avvenire quando, per esempio, non si ha contributo smorzante nell'esempio precedente: il contributo della soluzione omogenea è quindi oscillante come quello della soluzione particolare, ma con diverse frequenze che possono però essere molto vicine tra loro.



FIGURA 8. Esempio di battimenti.

3. Moto in un campo centrale

3.1. Proprietà generali. Il secondo tipo di equazione del moto prototipica che considereremo è quella in cui un punto materiale (P, m) di traiettoria \mathbf{x} è soggetto ad una *forza centrale*, ovvero di equazione del moto

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\|\mathbf{x}\|) = -V'(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Qui $V: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che assumeremo essere di classe almeno \mathcal{C}^2 su $(0, +\infty)$. La forza totale è perciò sempre diretta lungo la congiungente con un *centro* di un campo di forze che qui si assume essere l'origine del riferimento. Essendo tale forza conservativa, l'energia meccanica si conserva durante il moto. Un'altra caratteristica cruciale dei moti in un campo centrale (che ne permette l'integrazione) è che, essendo il momento della forza rispetto all'origine O nullo, il momento angolare del punto materiale si conserva, $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$.

Il caso $\mathbf{L}_O = \mathbf{0}$ è particolarmente semplice da studiare: il fatto che il momento angolare sia nullo significa che posizione iniziale \mathbf{x}_0 e velocità iniziale \mathbf{v}_0 sono vettori paralleli, e tali si manterranno durante tutto il moto, che pertanto, avrà una evoluzione nella forma $\mathbf{x}(t) = s(t) \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|}$, ovvero sarà un moto unidimensionale con equazione $m\ddot{s} = -V'(s)$.

Supponiamo quindi di essere nel caso meno elementare $\mathbf{L}_O \neq \mathbf{0}$. Essendo il momento angolare un vettore costante non nullo, esso identifica un piano ad esso normale passante per la posizione iniziale della traiettoria, detto *piano dell'orbita*: il moto si manterrà sempre in questo piano in virtù della conservazione di \mathbf{L}_O . Assumeremo che il nostro riferimento di coordinate sia tale che $\mathbf{L}_O = (0, 0, L_z)^\top$, per cui potremo parametrizzare il moto in coordinate polari nel piano ortogonale a \mathbf{L}_O per mezzo di due funzioni $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$(1.7) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \theta(t) \\ r(t) \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ignoreremo da questo punto in poi la terza componente, che rimane fissa. Scrivendo esplicitamente in questa parametrizzazione L_z si ottiene

$$L_z = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = mr^2\dot{\theta}.$$

La quantità

$$\frac{L_z t}{2m} = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \dot{\theta} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} r^2 d\vartheta$$

è l'area spazzata dal raggio vettore \mathbf{x} nell'intervallo temporale $[0, t]$, sicché la conservazione di \mathbf{L}_O corrisponde alla *seconda legge di Keplero*, secondo cui *il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali*. La quantità

$$v := \frac{L_z}{2m}$$