

3. Moto in un campo centrale

3.1. Proprietà generali. Il secondo tipo di equazione del moto prototipica che considereremo è quella in cui un punto materiale (P, m) di traiettoria \mathbf{x} è soggetto ad una *forza centrale*, ovvero di equazione del moto

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\|\mathbf{x}\|) = -V'(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Qui $V: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che assumeremo essere di classe almeno \mathcal{C}^2 su $(0, +\infty)$. La forza totale è perciò sempre diretta lungo la congiungente con un *centro* di un campo di forze che qui si assume essere l'origine del riferimento. Essendo tale forza conservativa, l'energia meccanica si conserva durante il moto. Un'altra caratteristica cruciale dei moti in un campo centrale (che ne permette l'integrazione) è che, essendo il momento della forza rispetto all'origine O nullo, il momento angolare del punto materiale si conserva, $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$.

Il caso $\mathbf{L}_O = \mathbf{0}$ è particolarmente semplice da studiare: il fatto che il momento angolare sia nullo significa che posizione iniziale \mathbf{x}_0 e velocità iniziale \mathbf{v}_0 sono vettori paralleli, e tali si manterranno durante tutto il moto, che pertanto, avrà una evoluzione nella forma $\mathbf{x}(t) = s(t) \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|}$, ovvero sarà un moto unidimensionale con equazione $m\ddot{s} = -V'(|s|)$.

Supponiamo quindi di essere nel caso meno elementare $\mathbf{L}_O \neq \mathbf{0}$. Essendo il momento angolare un vettore costante non nullo, esso identifica un piano ad esso normale passante per la posizione iniziale della traiettoria, detto *piano dell'orbita*: il moto si manterrà sempre in questo piano in virtù della conservazione di \mathbf{L}_O . Assumeremo che il nostro riferimento di coordinate sia tale che $\mathbf{L}_O = (0, 0, L_z)^\top$, per cui potremo parametrizzare il moto in coordinate polari nel piano ortogonale a \mathbf{L}_O per mezzo di due funzioni $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$(1.7) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \theta(t) \\ r(t) \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ignoreremo da questo punto in poi la terza componente, che rimane fissa. Scrivendo esplicitamente in questa parametrizzazione L_z si ottiene

$$L_z = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = mr^2\dot{\theta}.$$

La quantità

$$\frac{L_z t}{2m} = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \dot{\theta} \, d\tau = \frac{1}{2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} r^2 \, d\vartheta$$

è l'area spazzata dal raggio vettore \mathbf{x} nell'intervallo temporale $[0, t]$, sicché la conservazione di \mathbf{L}_O corrisponde alla *seconda legge di Keplero*, secondo cui *il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali*. La quantità

$$v := \frac{L_z}{2m}$$

è detta anche *velocità areolare*. Scriviamo infine il valore dell'energia meccanica. Utilizzando le coordinate polari si trova

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$

dove abbiamo introdotto il *potenziale efficace*

$$V_{\text{eff}}(r) := \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r).$$

La forma funzionale dell'energia meccanica anticipa la natura intrinsecamente unidimensionale del problema, essendo indipendente dalla variabile angolare.

3.1.1. *Prima forma dell'equazione delle orbite.* Una volta passati alle coordinate polari, la legge del moto $m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\|\mathbf{x}\|)$ produce una coppia di equazioni, ovvero

$$2mr\dot{\theta} + mr\ddot{\theta} \equiv \frac{1}{r}\dot{L}_z = 0, \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \equiv m\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} = -V'(r),$$

dove la prima equazione non è altro che la conservazione di L_z che abbiamo discusso finora. La seconda, invece, sempre in virtù di tale conservazione, è una equazione nella sola variabile radiale, essendo L_z fissato dalle condizioni iniziali, e si può riscrivere come

$$(1.8) \quad m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r),$$

che descrive il moto unidimensionale di un punto materiale soggetto al potenziale efficace V_{eff} . L'integrazione può quindi essere eseguita esattamente come fatto nel caso unidimensionale. Sia $v_0 := \dot{r}(0) \neq 0$ la velocità *radiale* iniziale. Assumendo che in $t = 0$ si abbia $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$, se $E - V_{\text{eff}}(x)$ non si annulla in un intorno I di r_0 , il tempo necessario al punto materiale per raggiungere la distanza $r \in I$ dall'origine è

$$t = \int_{r_0}^r \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx, \quad \text{dove} \quad \Phi(x) := 2 \frac{E - V_{\text{eff}}(x)}{m}.$$

Una volta integrata l'equazione per r , la legge per θ si può trovare dal fatto che

$$\frac{d\theta}{dr} = \dot{\theta} \frac{dt}{dr} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(r)}}.$$

Quella ottenuta è detta *prima forma dell'equazione delle orbite* e specifica la relazione tra θ ed r . Essa dipende da un segno fissato dalle condizioni iniziali del problema. La sua integrazione ci permette di ottenere

$$\theta(r) = \theta_0 + \frac{L_z}{m} \int_{r_0}^r \frac{\text{sign}(v_0)}{x^2 \sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

3.2. Orbite chiuse. Ha senso chiedersi se il moto in un campo centrale ammette orbite chiuse, ovvero se data una certa condizione iniziale il punto materiale ritorna esattamente nella stessa configurazione. Un primo *ansatz* per rispondere a questa domanda è richiedere che le orbite siano circolari, ovvero cercare soluzioni nella forma

$$r = r_c, \quad \theta = \theta_0 + \omega t, \quad \omega := \frac{L_z}{mr_c^2}.$$

Si noti che la conservazione del momento angolare impone una legge lineare per θ . Il valore r_c deve necessariamente essere critico rispetto al potenziale efficace, per quanto detto nel caso del moto unidimensionale, ovvero questa soluzione può esistere se e solo se $V'(r_c) = 0$. A tale soluzione corrisponderà l'energia meccanica

$$E = V_{\text{eff}}(r_c) = V(r_c) + \frac{L_z^2}{2mr_c^2}.$$

Ammessi quindi che tale soluzione esista, essa può essere o meno stabile. La definizione di stabilità di un'orbita circolare è dovuta a Lagrange.

DEFINIZIONE 3.1 (Stabilità secondo Lagrange). Si supponga L_z fissato. Un'orbita circolare di raggio r_c è stabile se la traiettoria $r(t) = r_c$ è stabile secondo Lyapunov in un moto unidimensionale su \mathbb{R}^+ soggetto a potenziale $V_{\text{eff}}(r)$.

La definizione quindi corrisponde a quella di Lyapunov se pensata limitata al moto nella direzione radiale ma, come si vede, ignora volutamente la variabile angolare (ed è per questo più debole). Quanto detto sul moto unidimensionale si traduce quindi nell'analisi della stabilità secondo Lagrange. In particolare

PROPOSIZIONE 3.1. *Un'orbita circolare di raggio r_c è stabile secondo Lagrange se il potenziale efficace V_{eff} ha un minimo relativo isolato in r_c .*

Se studiare la presenza e stabilità di orbite circolari è piuttosto semplice, valutare se il potenziale ammette orbite non circolari chiuse è più complicato. Si può partire dall'osservazione che un'orbita ad energia e sarà in una regione dello spazio delle configurazioni

$$\mathcal{O}(E) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V_{\text{eff}}(\|\mathbf{x}\|) \leq E\}.$$

Questo insieme ha come frontiera una o più circonferenze, che individuano varie regioni ammesse. Ciascuna regione ammessa ha un raggio minimo, detto *pericentro* r_p , e un raggio massimo, detto *apocentro* r_a , ammissibile. Ad energia fissata, queste due circonferenze corrispondono a zeri consecutivi della funzione $\Phi(r)$. L'angolo ϑ descritto dal vettore posizione nel muoversi tra pericentro e apocentro è

$$\vartheta = \frac{L_z}{m} \int_{r_p}^{r_a} \frac{1}{x^2 \sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

Condizione necessaria e sufficiente perché l'orbita sia chiusa è che

$$\frac{\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

La domanda è quindi per quali forme di V una condizione siffatta si realizza *sempre* quando si ha a che fare con orbite limitate. In primis, dato che vogliamo che l'integrale sia finito, sarà necessario che sia r_a che r_p siano zeri *semplici* di $\Phi(x)$ (diversamente, l'integrale divergerebbe). Faremo questa assunzione da qui in poi. Ciò detto, possiamo cominciare ad analizzare orbite limitate vicine ad un'orbita circolare stabile e studiarne le proprietà.

3.2.1. Seconda forma dell'equazione delle orbite. Iniziamo osservando che lo studio delle orbite chiuse è reso più facile da una forma diversa di equazione delle orbite. Abbiamo già scritto la prima forma,

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(r)}}$$

che mostra qual è il legame tra variabile angolare e variabile radiale. Una forma diversa, ma utile, in cui mettere l'equazione delle orbite è ottenuta facendo il cambio di variabile

$$r = \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{L_z^2}{mr^2} = L_z \dot{\theta}.$$

Di conseguenza

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{u^2}{L_z} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{du}{d\theta}, \quad \ddot{r} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{u^2}{L_z \sqrt{m}} \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

L'equazione del moto si può quindi riscrivere in termini della variabile u come

$$m\ddot{r} = -V_{\text{eff}}(r) \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{L_z}{\sqrt{mu}^2} V'_{\text{eff}} \left(\frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right).$$

Abbiamo così ottenuto la *seconda forma dell'equazione delle orbite*,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -W'(u), \quad \text{dove } W(u) := V_{\text{eff}} \left(\frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right) = \frac{u^2}{2} + V \left(\frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right)$$

che nuovamente descrive un moto *unidimensionale* di una particella di massa unitaria e parametrizzato da u rispetto alla variabile “temporale” θ . Anche l’energia meccanica del problema originale si traduce immediatamente in una forma corrispondente per il problema in u ,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m \left(-\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{du}{d\theta} \right)^2 + V_{\text{eff}} \left(\frac{L_z}{\sqrt{u}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + W(u).$$

L’utilità di questa forma sta nel fatto che il “semiperiodo” del moto descritto da u non è altro che l’angolo tra un punto estemale e l’altro del moto (pericentro ed apocentro),

$$\vartheta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{\Psi(x)}} dx, \quad \Psi(u) := 2(E - W(u)),$$

dove u_a e $u_p > u_a$ sono due zeri consecutivi di $\Psi(u)$ corrispondenti ad apocentro e pericentro della regione di moto ammessa $\mathcal{O}(E)$.

Esercizio 1.8 — Dimostrare che se r_p ed r_a sono due zeri semplici consecutivi di $\Phi(r)$, allora u_a e u_p sono due zeri semplici consecutivi di $\Psi(u)$.

Supponiamo ora di occuparci di orbite vicine ad un’orbita circolare *stabile* di raggio r_c , ovvero tale che $V'_{\text{eff}}(r_c) = 0$ e $V''_{\text{eff}}(r_c) > 0$ per un certo $r_c = \frac{L_z}{\sqrt{mu_c}}$: questo implica che u_c è un punto di minimo locale anche per W . La seconda forma dell’equazione delle orbite può essere studiata nel limite di piccole oscillazioni attorno a u_c , sostituendo $\xi := u - u_c$ e quindi

$$\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} = -\omega_c^2 \xi + o(u), \quad \omega_c^2 := W''(u_c) > 0.$$

Si tratta dell’equazione di un oscillatore armonico, il cui semiperiodo è

$$\vartheta = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{\sqrt{W''(u_c)}} = \pi \sqrt{\frac{V'(r_c)}{r_c V''(r_c) + 3V'(r_c)}}.$$

Questa quantità dipende, in generale, da r_c in maniera continua: il valore di r_c è infatti funzione del momento L_z dato dalle condizioni iniziali, e non è univocamente determinato dalla forma di V . Vi sono però due casi in cui essa *non* dipende dal valore di r_c ma solo dalla forma del potenziale V . Questi casi possono essere trovati per ispezione diretta, imponendo che esista una costante $\alpha > 0$ tale che

$$\frac{V'(r_c)}{r_c V''(r_c) + 3V'(r_c)} \equiv \frac{1}{\alpha} \Rightarrow V''(r_c) = \frac{\alpha - 3}{r_c} V'(r_c).$$

Questa equazione ammette come soluzione⁸ $V'(r) = \hat{a}r^{\alpha-3}$ per un qualche $\hat{a} \in \mathbb{R}$ se $\alpha \neq 3$, ed è compatibile con due forme per V , ovvero, per un qualche $a \in \mathbb{R}$,

$$V(r) = ar^b \quad b > -2 \text{ e } b \neq 0, \quad V(r) = a \ln r.$$

Sostituendo nell’espressione trovata per ϑ si trova quindi che

$$(1.9) \quad \vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2+b}} \quad b > -2.$$

dove $b = 0$ corrisponde al caso logaritmico. Grazie a questo risultato possiamo dare il seguente

⁸Il caso $\alpha = 3$ è escluso perché implicherebbe $V''(r_c) = 0$.

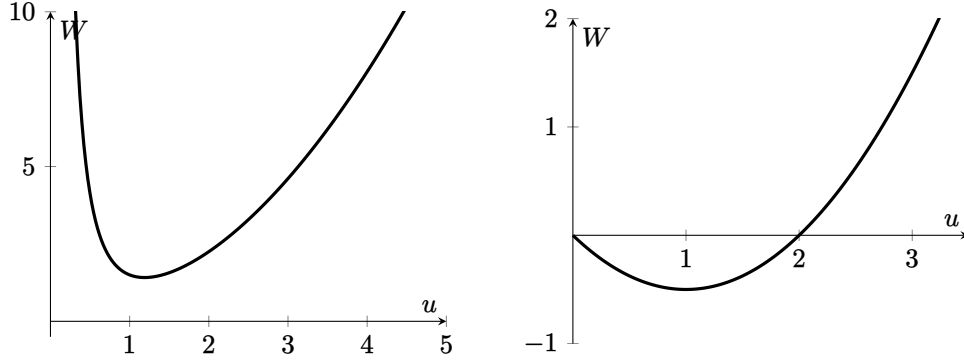


FIGURA 8. Potenziale W nel teorema di Bertrand per $b = 2$ (sinistra) e $b = -1$ (destra) con $\bar{a} = 1$.

TEOREMA 3.2 (Bertrand). *In un campo centrale di potenziale analitico $V(r)$, tutte le orbite limitate sono chiuse se e solo se*

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad o \quad V(r) = kr^2$$

per una qualche costante positiva k .

DIMOSTRAZIONE. Per quanto abbiamo mostrato sopra, le orbite limitate che si tengono vicine a quella circolare di raggio r_c hanno in generale un semiperiodo angolare ϑ dipendente da r_c : poiché però r_c può essere alterato con continuità in ogni potenziale sufficientemente regolare, perché queste orbite siano chiuse questa dipendenza deve essere assente. Ciò significa che, per quanto detto sopra, le uniche due forme funzionali ammesse sono $V(r) = ar^b$, con $b > -2$ e $b \neq 0$, e $V(r) = a \ln r$. D'altra parte, nel secondo caso $\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ e dunque le orbite non possono essere chiuse. L'unica possibilità è quindi che sia $V(r) = ar^b$, con $b > -2$ e $b \neq 0$. Nella notazione sopra, il potenziale che appare nella seconda forma dell'equazione delle orbite si scrive quindi

$$W(u) = \frac{u^2}{2} + \frac{am^{\frac{b}{2}}}{L_z^b u^b} \equiv \frac{u^2}{2} + \frac{\bar{a}}{u^b}, \quad b > -2, b \neq 0$$

dove abbiamo introdotto la costante \bar{a} che incorpora la dipendenza dalla massa e dal momento angolare. Per ogni valore ammesso di b esiste un'unica orbita circolare a \bar{a} fissato. Distinguiamo ora due casi.

$b > 0$ Perché il potenziale sia confinante, deve essere $a > 0$. Vogliamo calcolare

$$\vartheta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{\Psi(x)}} dx \stackrel{x=u_p y}{=} \int_{\frac{u_a}{u_p}}^1 \frac{u_p}{\sqrt{\Psi(u_p y)}} dy.$$

Osservando che $E = W(u_p)$, abbiamo quindi

$$\frac{\Psi(u_p y)}{u_p^2} = 2 \frac{W(u_p) - W(u_p y)}{u_p} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{a}}{u_p^{2+b}} - \frac{1}{2} y^2 - \frac{\bar{a}}{u_p^{2+b} y^b} \right) \xrightarrow[L_z \text{ fisso}]{E \rightarrow +\infty} 1 - y^2.$$

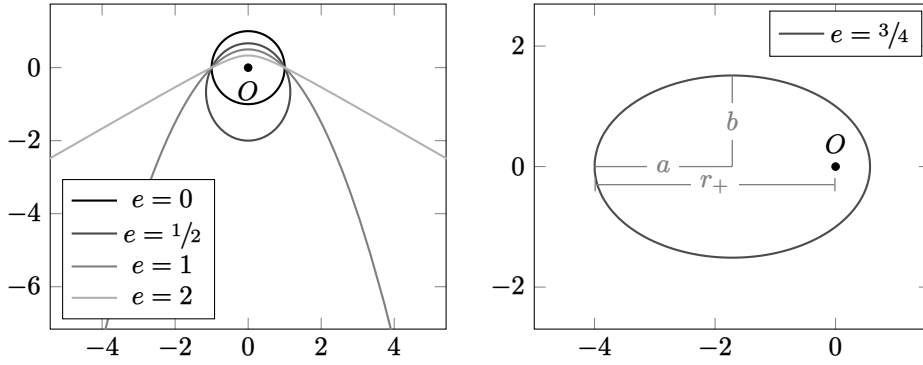


FIGURA 9. Orbite del problema di Keplero con orbita circolare $r_c = 1$ e diversi valori dell'eccentricità e .

Nel limite abbiamo usato il fatto che a L_z fisso, prendendo $E \rightarrow +\infty$ si ha che $u_p \rightarrow +\infty$ mentre \bar{a} rimane fissato. In questo limite quindi

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \vartheta = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Questo valore è compatibile con un'orbita chiusa, ma, se vogliamo che tutte le orbite limitate siano chiuse, deve essere anche compatibile con la formula $\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2+b}}$ ottenuta per le orbite vicino a quella circolare: l'unico valore ammesso è perciò $b = 2$.

$b < 0$

Perché il potenziale sia confinante, deve essere $a < 0$ e le uniche orbite limitate hanno energia negativa. Indicando con $\beta := -b \in (0, 2)$, $W(u) = \frac{u^2}{2} + \bar{a}u^\beta$. A L_z fisso, procediamo come nel caso precedente calcolando il limite di ϑ nell'energia massima compatibile con orbite chiuse, ovvero $\lim_{E \rightarrow +0^-} \vartheta$. In questo limite $u_a \rightarrow 0$, mentre u_p è tale che $u_p^{2-\beta} = -2\bar{a}$. Procedendo ora come nel caso $b > 0$, eseguiamo un cambio di variabili $u = u_p y$ di modo che

$$\frac{\Psi(u_p y)}{u_p^2} = 2 \frac{W(u_p) - W(u_p y)}{u_p} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{a}}{u_p^{2-\beta}} - \frac{1}{2} y^2 - \frac{\bar{a}}{u_p^{2-\beta}} y^\beta \right) \xrightarrow[L_z \text{ fisso}]{E \rightarrow 0^-} y^\beta - y^2.$$

A velocità angolare fissata, perciò,

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \vartheta = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{\sqrt{2-\beta}},$$

che nuovamente è compatibile con la formula valida in un intorno dell'orbita circolare se e solo se $b = -\beta = -1$. Il corrispondente valore di ϑ , $\vartheta = \pi$, produce orbite periodiche chiuse. \square

Esempio 1.9 (Problema di Keplero) — Il caso $V(r) = -\frac{k}{r}$ con $k > 0$ corrisponde al cosiddetto problema di Keplero. Alla luce di quanto discusso, la seconda forma dell'equazione delle orbite diventa in questo caso

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{k\sqrt{m}}{L_z}$$

la cui soluzione si può ottenere componendo una soluzione particolare dell'equazione con la soluzione del caso omogeneo. Una soluzione generica del problema omogeneo si può scrivere come $u = a \cos(\theta - \theta_0)$,

dove a e θ_0 saranno parametri da fissare per mezzo delle condizioni iniziali. Una soluzione particolare è invece l'orbita circolare $u = \frac{L_z}{\sqrt{m}r_c}$, dove r_c è il raggio dell'unica orbita circolare ammessa, ovvero

$$r_c = \frac{L_z^2}{mk},$$

avente energia meccanica

$$E_c = -\frac{k^2 m}{2L_z^2} = -\frac{k}{2r_c}.$$

Se ridefiniamo $a = e/r_c$, la soluzione generale si può scrivere come

$$u(\theta) = \frac{L_z}{\sqrt{m}} \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{r_c}.$$

La corrispondente relazione per r si ottiene facendo un cambio di variabile

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

ed è detta *prima legge di Keplero*. Essa parametrizza una conica di eccentricità e e parametro r_c con un fuoco nell'origine: se $e = 0$, essa descrive l'orbita circolare di raggio r_c ; se $e \in (0, 1)$ essa descrive una ellisse; se $e = 1$ essa corrisponde ad una parabola; se $e > 1$ corrisponde ad una iperbole. Nel caso ellittico, è noto dalla geometria elementare che la dimensione dei semiassi maggiore a e minore b sono

$$a = \frac{r_c}{1 - e^2}, \quad b = \frac{r_c}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

La seconda legge di Keplero, infine, implica che, detto τ il periodo dell'orbita,

$$\pi ab = \frac{|L_z|}{2m} \tau.$$

Essendo ora $L_z^2 = mkr_c$ e $b = a\sqrt{1 - e^2}$, questa stessa legge diventa

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{k}{4\pi^2 m},$$

che non è altro che la *terza legge di Keplero* che mostra che quadrati dei periodi e cubi dei semiassi maggiori sono in rapporto costante.

Esercizio 1.9 — Nel problema di Keplero, si esprima l'eccentricità in funzione dell'energia dell'orbita e dell'energia E_c dell'orbita circolare. $[e = \sqrt{1 - \frac{E}{E_c}}]$