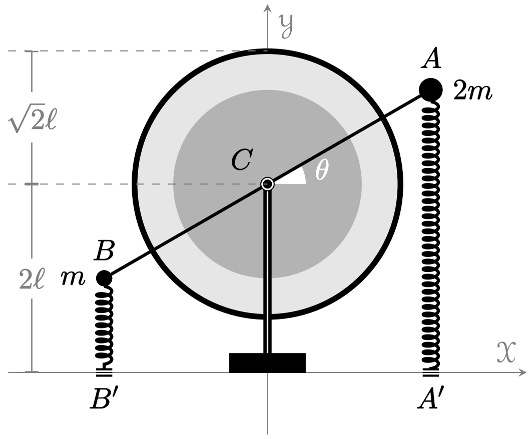
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

9 Settembre 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Il voto minimo per l'accesso all'orale è `15/30`.

È dato un riferimento cartesiano in un piano verticale come in figura. Il centro C di un disco rigido di raggio $R = \sqrt{2}\ell$ è incernierato ad altezza 2ℓ dall'origine lungo l'asse y, in modo che il disco possa ruotarvi attorno liberamente. Il disco *non* è omogeneo: esso ha densità costante 2ρ entro una distanza $r = \ell$ dal centro, e densità ρ nella corona circolare restante. Lungo la direzione di un diametro del disco sono inoltre fissate, tramite un'asta saldata al disco e di massa trascurabile, due masse, la prima — pari a $2m$ — in A e la seconda — pari a m — in B, in modo che $d(B,C) = d(A,C) = 2\ell$. Le masse sono infine collegate da due molle di costante elastica k all'asse delle ascisse. Dette molle sono vincolate all'asse da due carrelli ideali permettono loro di mantenersi sempre verticali.



Usando come parametro lagrangiano l'angolo θ in figura, e un valore

$$\rho = \frac{2m}{\pi\ell^2}$$

si risponda alle seguenti domande.

A Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per C.

B Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità in funzione del parametro $\eta = \frac{mg}{k\ell}$.

C Si calcoli il modulo della velocità del centro di massa.

SOLUZIONE

Scriviamo anzitutto alcune posizioni notevoli in termini del parametro θ

$$\boldsymbol{x}_A = 2\ell\cos\theta\,\hat{\imath}_1 + 2\ell(1+\sin\theta)\hat{\imath}_2, \quad \boldsymbol{x}_B = -2\ell\cos\theta\,\hat{\imath}_1 + 2\ell(1-\sin\theta)\hat{\imath}_2, \quad \boldsymbol{x}_C = 2\ell\hat{\imath}_2.$$

A Il contributo al momento d'inerzia cercato delle masse in A e B è rispettivamente $I_A = 8m\ell^2$ e $I_B = 4m\ell^2$. Per calcolare il contributo del disco D, possiamo immaginarlo come decomposto in un disco di raggio $r = \ell$ di massa $m_1 = 2\rho\pi r^2 = 2\rho\pi\ell^2$ e una corona circolare di densità ρ di raggio interno $r = \ell$ e raggio esterno $R = \sqrt{2}\ell$, ovvero di massa $m_2 = \rho\pi(R^2 - r^2) = \rho\pi\ell^2$, in modo che il momento risultante sia dato dalla somma di quello dovuto a disco interno e corona

$$I_D = \frac{1}{2}m_1 r^2 + \frac{1}{2}m_2(R^2 + r^2) = \pi\rho\ell^4 + \frac{3}{2}\rho\pi\ell^4 = \frac{5}{2}\rho\pi\ell^4 = 5m\ell^2,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione data per ρ. Combinando il tutto, il momento totale è $I = I_A + I_B + I_D = 12m\ell^2 + 5m\ell^2 = 17m\ell^2$.

B Tutte le forze attive in gioco sono conservative e tutti i vincoli presenti sono ideali, per cui possiamo utilizzare il metodo del potenziale. Il contributo gravitazionale rilevante viene dalle sole masse A e B, dato che il disco ha centro di massa fisso, mentre compaiono due contributi dovuti alle due molle:

$$\begin{aligned}U(\theta) &= -m_A g y_A - m_B g y_B - \frac{1}{2}k y_A^2 - \frac{1}{2}k y_B^2 + c \\ &= -4mg\ell(1+\sin\theta) - 2mg\ell(1-\sin\theta) - 2k\ell^2(1+\sin\theta)^2 - 2k\ell^2(1-\sin\theta)^2 + c \\ &= -2mg\ell\sin\theta - 4k\ell^2\sin^2\theta + c' = -2k\ell^2(\eta\sin\theta + 2\sin^2\theta) + c'\end{aligned}$$

dove c, c' sono due costanti. Sull'angolo θ non ci sono vincoli. Scegliendo di lavorare (ad esempio) nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ (tutti i risultati varranno a meno di multipli 2π), i punti di equilibrio si trovano come solito da

$$\partial_\theta U(\theta) = -2k\ell^2\cos\theta(\eta + 4\sin\theta) = 0$$
$$\Rightarrow \theta^0_\pm = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \theta_1 = -\arcsin\frac{\eta}{4}, \quad \theta_2 = -\pi + \arcsin\frac{\eta}{4},$$

dove le soluzioni θ_1 e θ_2 esistono se e solo se $\eta := \frac{mg}{k\ell} \leq 4$. Per calcolarne la stabilità, valutiamo

$$\partial^2_\theta U(\theta) = -2k\ell^2(2 - \eta\sin\theta - 4\sin^2\theta).$$

Per $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\partial^2_\theta U(\theta)\big|_{\theta=\theta^0_\pm} = 2k\ell^2(4 \pm \eta)$, ovvero la soluzione $\theta^0_+ = \frac{\pi}{2}$ è sempre instabile, mentre la soluzione $\theta^0_- = -\frac{\pi}{2}$ è stabile se $\eta > 2$. Per $\theta = \theta_1$ o $\theta = \theta_2$, ovvero quando $\sin\theta = -\frac{\eta}{4}$, allora $\partial^2_\theta U(\theta)\big|_{\theta=\theta_{1/2}} = -\frac{1}{4}k\ell^2(16-\eta^2)$. Questa quantità è negativa, e quindi queste due soluzioni, quando esistono, sono stabili.

C Per calcolare la velocità del centro di massa, calcoliamone prima la posizione. Osserviamo che la massa del disco è

$$m_D = m_1 + m_2 = 3\rho\pi\ell^2 = 6m$$

da quanto calcolato sopra. Essendo il centro di massa del disco in C, usiamo la formula per il centro di massa

$$\boldsymbol{x}_G = \frac{m_A\boldsymbol{x}_A + m_B\boldsymbol{x}_B + m_D\boldsymbol{x}_C}{m_A + m_B + m_D} = \frac{2\cos\theta\hat{\imath}_1 + 2(9+\sin\theta)\hat{\imath}_2}{9}\ell$$

sicché la sua velocità è

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{\boldsymbol{x}}_G = \frac{-2\sin\theta\hat{\imath}_1 + 2\cos\theta\hat{\imath}_2}{9}\ell\dot\theta \Rightarrow \|\boldsymbol{v}_G\| = \sqrt{\left(-\frac{2\ell\dot\theta}{9}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{2\ell\dot\theta}{9}\cos\theta\right)^2} = \frac{2}{9}\ell|\dot\theta|.$$