

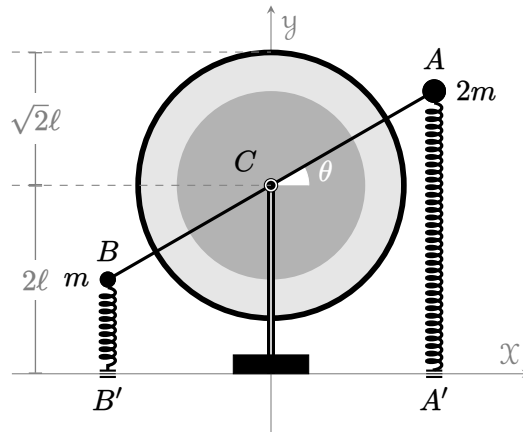
## ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

9 Settembre 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Il voto minimo per l'accesso all'orale è 15/30.

È dato un riferimento cartesiano in un piano verticale come in figura. Il centro  $C$  di un disco rigido di raggio  $R = \sqrt{2}\ell$  è incernierato ad altezza  $2\ell$  dall'origine lungo l'asse  $y$ , in modo che il disco possa ruotarvi attorno liberamente. Il disco *non* è omogeneo: esso ha densità costante  $2\rho$  entro una distanza  $r = \ell$  dal centro, e densità  $\rho$  nella corona circolare restante. Lungo la direzione di un diametro del disco sono inoltre fissate, tramite un'asta saldata al disco e di massa trascurabile, due masse, la prima — pari a  $2m$  — in  $A$  e la seconda — pari a  $m$  — in  $B$ , in modo che  $d(B, C) = d(A, C) = 2\ell$ . Le masse sono infine collegate da due molle di costante elastica  $k$  all'asse delle ascisse. Dette molle sono vincolate all'asse da due carrelli ideali permettono loro di mantenersi sempre verticali.



Usando come parametro lagrangiano l'angolo  $\theta$  in figura, e un valore

$$\rho = \frac{2m}{\pi\ell^2}$$

si risponda alle seguenti domande.

- A Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per  $C$ .
- B Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità in funzione del parametro  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ .
- C Si calcoli il modulo della velocità del centro di massa.

# SOLUZIONE

Scriviamo anzitutto alcune posizioni notevoli in termini del parametro  $\theta$

$$x_A = 2\ell \cos \theta \hat{i}_1 + 2\ell(1 + \sin \theta) \hat{i}_2, \quad x_B = -2\ell \cos \theta \hat{i}_1 + 2\ell(1 - \sin \theta) \hat{i}_2, \quad x_C = 2\ell \hat{i}_2.$$

**A** Il contributo al momento d'inerzia cercato delle masse in  $A$  e  $B$  è rispettivamente  $I_A = 8m\ell^2$  e  $I_B = 4m\ell^2$ . Per calcolare il contributo del disco  $D$ , possiamo immaginarlo come decomposto in un disco di raggio  $r = \ell$  di massa  $m_1 = 2\rho\pi r^2 = 2\rho\pi\ell^2$  e una corona circolare di densità  $\rho$  di raggio interno  $r = \ell$  e raggio esterno  $R = \sqrt{2}\ell$ , ovvero di massa  $m_2 = \rho\pi(R^2 - r^2) = \rho\pi\ell^2$ , in modo che il momento risultante sia dato dalla somma di quello dovuto a disco interno e corona

$$I_D = \frac{1}{2}m_1r^2 + \frac{1}{2}m_2(R^2 + r^2) = \pi\rho\ell^4 + \frac{3}{2}\rho\pi\ell^4 = \frac{5}{2}\rho\pi\ell^4 = 5m\ell^2,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione data per  $\rho$ . Combinando il tutto, il momento totale è  $I = I_A + I_B + I_D = 12m\ell^2 + 5m\ell^2 = 17m\ell^2$ .

**B** Tutte le forze attive in gioco sono conservative e tutti i vincoli presenti sono ideali, per cui possiamo utilizzare il metodo del potenziale. Il contributo gravitazionale rilevante viene dalle sole masse  $A$  e  $B$ , dato che il disco ha centro di massa fisso, mentre compaiono due contributi dovuti alle due molle:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= -m_A g y_A - m_B g y_B - \frac{1}{2}k y_A^2 - \frac{1}{2}k y_B^2 + c \\ &= -4mg\ell(1 + \sin\theta) - 2mg\ell(1 - \sin\theta) - 2k\ell^2(1 + \sin\theta)^2 - 2k\ell^2(1 - \sin\theta)^2 + c \\ &= -2mg\ell\sin\theta - 4k\ell^2\sin^2\theta + c' = -2k\ell^2(\eta\sin\theta + 2\sin^2\theta) + c' \end{aligned}$$

dove  $c, c'$  sono due costanti. Sull'angolo  $\theta$  non ci sono vincoli. Scegliendo di lavorare (ad esempio) nell'intervallo  $(-\pi, \pi]$  (tutti i risultati varranno a meno di multipli  $2\pi$ ), i punti di equilibrio si trovano come solito da

$$\begin{aligned} \partial_\theta U(\theta) &= -2k\ell^2 \cos\theta(\eta + 4\sin\theta) = 0 \\ \Rightarrow \theta_\pm^0 &= \pm \frac{\pi}{2}, \quad \theta_1 = -\arcsin \frac{\eta}{4}, \quad \theta_2 = -\pi + \arcsin \frac{\eta}{4}, \end{aligned}$$

dove le soluzioni  $\theta_1$  e  $\theta_2$  esistono se e solo se  $\eta := \frac{mg}{k\ell} \leq 4$ . Per calcolarne la stabilità, valutiamo

$$\partial_\theta^2 U(\theta) = -2k\ell^2(2 - \eta\sin\theta - 4\sin^2\theta).$$

Per  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\theta_\pm^0} = 2k\ell^2(4 \pm \eta)$ , ovvero la soluzione  $\theta_+^0 = \frac{\pi}{2}$  è sempre instabile, mentre la soluzione  $\theta_-^0 = -\frac{\pi}{2}$  è stabile se  $\eta > 4$ . Per  $\theta = \theta_1$  o  $\theta = \theta_2$ , ovvero quando  $\sin\theta = -\frac{\eta}{4}$ , allora  $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\theta_{1/2}} = -\frac{1}{4}k\ell^2(16 - \eta^2)$ . Questa quantità è negativa, e quindi queste due soluzioni, quando esistono, sono stabili.

**C** Per calcolare la velocità del centro di massa, calcoliamone prima la posizione. Osserviamo che la massa del disco è

$$m_D = m_1 + m_2 = 3\rho\pi\ell^2 = 6m$$

da quanto calcolato sopra. Essendo il centro di massa del disco in  $C$ , usiamo la formula per il centro di massa

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_D x_C}{m_A + m_B + m_D} = \frac{2\cos\theta\hat{i}_1 + 2(9 + \sin\theta)\hat{i}_2}{9}\ell$$

sicché la sua velocità è

$$v_G = \dot{x}_G = \frac{-2\sin\theta\hat{i}_1 + 2\cos\theta\hat{i}_2}{9}\ell\dot{\theta} \Rightarrow \|v_G\| = \sqrt{\left(-\frac{2\ell\dot{\theta}}{9}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{2\ell\dot{\theta}}{9}\cos\theta\right)^2} = \frac{2}{9}\ell|\dot{\theta}|.$$