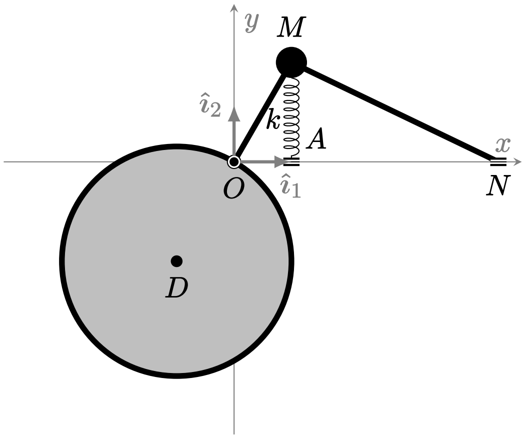
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Simulazione di prova d'esame

ISTRUZIONI. Questa simulazione comprende, a titolo esemplificativo, una collezione di domande per un punteggio massimo maggiore di quello solitamente richiesto in una prova d'esame.

Un disco omogeneo di massa m e raggio ℓ è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un suo punto O, centro di un riferimento inerziale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ come in figura, mantendosi nel piano generato da $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$. Sul punto O è altresì incastrata un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza ℓ, alla cui estremità opposta M si trova una massa $2m$, come mostrato in figura. Detta massa è collegata all'asse del riferimento $\mathcal{X}$, corrispondente alla direzione $\hat{\imath}_1$, da una molla ideale di costante elastica k: l'estremo opposto della molla A scorre sull'asse senza attrito per mezzo di un carrello. Infine, la massa M è collegata, tramite un'asta rigida $\overline{MN}$ di lunghezza 2ℓ, all'asse delle ascisse: l'asta è vincolata a scorrere lungo l'asse per mezzo di un carrello ideale nel suo estremo N.



Dopo aver individuato un insieme adeguato di variabili lagrangiane, si risolvano i seguenti quesiti.

- **A** Si determini la posizione del centro di massa del sistema in funzione di opportune variabili lagrangiane. [`5 pt`]
- **B** Si calcoli la risultante $\boldsymbol{R}^{(\mathrm{a})}$ e il trinomio invariante del sistema di forze attive. [`5 pt`]
- **C** Si calcoli il momento d'inerzia $I_{\mathcal{Z}}$ del sistema rispetto all'asse $\mathcal{Z}$ passante per O e ortogonale al piano. [`5 pt`]
- **D** Si esprima l'energia cinetica in funzione dell'evoluzione temporale delle variabili lagrangiane del sistema. [`7 pt`]
- **E** Si determino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità. [`8 pt`]
- **F** Usando il fatto che $\hat{\imath}_3$ è un asse principale di $\mathbf{I}_D$, tensore d'inerzia del disco rispetto al suo centro, calcoli il momento angolare del sistema rispetto all'origine in funzione delle variabili lagrangiane scelte. [`7 pt`]
- **G** Si calcoli la traiettoria della *base* dell'asta $\overline{MN}$. [`7 pt`]

Soluzione

Chiamiamo θ l'angolo $\widehat{MON}$ formato dal vettore $\boldsymbol{p}_M$ che individua il punto M con l'asse $\mathcal{X}$, di modo che

$$\boldsymbol{p}_M = \ell\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \ell\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2.$$

A Essendo il disco $\mathcal{D}$ omogeneo, il suo centro di massa G coincide con il suo centro geometrico D, che si trova in

$$\boldsymbol{x}_D = -\ell\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 - \ell\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 \equiv -\boldsymbol{p}_M.$$

L'unico altro contributo in massa è dovuto alla presenza del punto M. Il centro di massa del sistema è quindi in

$$\boldsymbol{x}_G = \frac{m\boldsymbol{p}_{\mathcal{D}} + 2m\boldsymbol{p}_M}{3m} = \frac{1}{3}\boldsymbol{p}_M.$$

B Sul sistema agiscono la forza peso e la forza elastica. La prima può considerarsi applicata nel centro di massa G e vale $\boldsymbol{F}_g = -3mg\hat{\boldsymbol{\imath}}_2$. La seconda è applicata in M e vale $\boldsymbol{F}_e = -k\ell\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$. La risultante è quindi

$$\boldsymbol{R}^{(\mathrm{a})} = -(3mg + k\ell\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}}_3.$$

Essendo il sistema piano, il trinomio invariante è nullo, dato che il momento $\boldsymbol{\tau}_O$ delle forze è perpendicolare al piano.

C Il momento d'inerzia del disco *rispetto alla retta $\mathcal{R}$ parallela a $\mathcal{Z}$ ma passante per il suo centro* è $I^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\ell^2$. Il centro D è anche il centro di massa del disco, per cui il contributo del disco al momento $I_{\mathcal{Z}}$ si può ottenere grazie al teorema di Huygens–Steiner, ovvero

$$I^{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}} = I^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}} + m\ell^2 = \frac{1}{2}m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{3}{2}m\ell^2.$$

Il momento d'inerzia totale si ottiene aggiungendo il contributo della massa puntiforme:

$$I_{\mathcal{Z}} = \frac{3}{2}m\ell^2 + 2m\ell^2 = \frac{7}{2}m\ell^2.$$

D Il contributo all'energia cinetica del punto M si può scrivere semplicemente come

$$T_M = \frac{1}{2}(2m)\|\dot{\boldsymbol{p}}_M\|^2 = m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Il contributo del disco si può scrivere usando il Secondo teorema di König, ovvero, indicando con $I^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\ell^2$ il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa,

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\dot{\boldsymbol{x}}_D\|^2 + \frac{1}{2}I^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}}\omega^2$$

dove abbiamo usato il fatto che deve essere $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$ (il moto è piano e il disco può solo ruotare con velocità angolare perpendicolare al piano stesso). Basta osservare che $\omega = \dot{\theta}$: infatti un riferimento solidale con il disco si può ottenere ruotando di θ il riferimento fisso. Per cui

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\dot{\boldsymbol{x}}_D\|^2 + \frac{1}{2}I^{\mathcal{D}}_{\mathcal{R}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

per cui l'energia cinetica totale è

$$T = T_{\mathcal{D}} + T_M = \frac{7}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

E È utile prima di tutto scrivere il potenziale del sistema, dovuto alla forza gravitazionale e alla presenza della molla

$$U = -3mg\langle\boldsymbol{x}_G,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2\rangle - \frac{1}{2}k\langle\boldsymbol{p}_M,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2\rangle^2 + \text{costante} = -mg\ell\sin\theta - \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta + \text{costante}.$$

Indicando con $\eta = \frac{mg}{k\ell}$, le configurazioni di equilibrio si possono trovare da

$$\partial_\theta U = -mg\ell\cos\theta - k\ell^2\sin\theta\cos\theta = -k\ell^2\cos\theta(\eta + \sin\theta) = 0.$$

Restringendoci per semplicità all'intervallo $[-\pi, \pi]$ (tutti i risultati varranno a meno di multipli interi di 2π), tale equazione ha come soluzioni $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, e le due soluzioni corrispondenti a $\sin\theta = -\eta$, ovvero

$$\theta = -\arcsin\eta, \quad \theta = -\pi + \arcsin\eta \qquad \text{solo se} \quad \eta \leq 1.$$

Per studiare la stabilità, calcoliamo la derivata seconda:

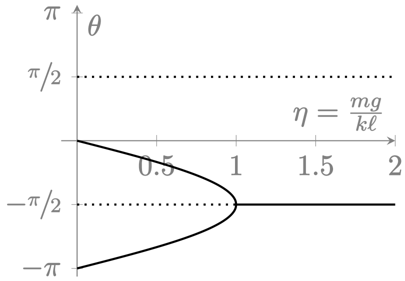
$$\partial^2_\theta U = -k\ell^2 \left(-\eta\sin\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\right).$$

Abbiamo che

$\theta = \frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial^2_\theta U = k\ell^2(1+\eta) > 0$, ovvero questa configurazione di equilibrio è sempre instabile.

$\theta = -\frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial^2_\theta U = k\ell^2(1-\eta)$, ovvero questa configurazione di equilibrio è stabile solo se $\eta > 1$.

$\sin\theta = \eta$: In questo caso $\partial^2_\theta U = -k\ell^2\left(1-\eta^2\right) > 0$, ovvero queste configurazioni di equilibrio sono sempre stabili, quando esistono.



F Il momento angolare $\boldsymbol{L}_O$ si può calcolare come somma del contributo della massa in M e del disco. Essendo $\boldsymbol{v}_M = \dot{\boldsymbol{p}}_M = \ell\dot\theta(-\sin\theta\hat{\imath}_1 + \cos\theta\hat{\imath}_2)$, la sua velocità angolare rispetto all'origine è $\boldsymbol{L}^M_O = \boldsymbol{p}_M \wedge (2m\boldsymbol{v}_M) = 2m\ell^2\dot\theta\hat{\imath}_3$. Il contributo del disco invece può essere scritto utilizzando il Primo teorema di König come

$$\boldsymbol{L}^{\mathfrak{D}}_O = \boldsymbol{L}^{\mathfrak{D}} + \boldsymbol{x}_D \wedge \boldsymbol{Q}_{\mathfrak{D}} = \mathbf{I}^{\mathfrak{D}}_D\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{x}_D \wedge \boldsymbol{Q}_{\mathfrak{D}}.$$

Qui $\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{D}} = m\dot{\boldsymbol{x}}_D$, in modo che $\boldsymbol{x}_D \wedge (m\dot{\boldsymbol{x}}_D) = m\ell^2\dot\theta\hat{\imath}_3$. Essendo $\boldsymbol{\omega} = \dot\theta\hat{\imath}_3$, $\mathbf{I}_D\boldsymbol{\omega} = \dot\theta I_{\mathfrak{R}}\hat{\imath}_3 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta\hat{\imath}_3$. Concludendo

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}^{\mathfrak{D}}_O + \boldsymbol{L}^M_O = \left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta + 3m\ell^2\dot\theta\right)\hat{\imath}_3 = \frac{7}{2}m\ell^2\dot\theta\hat{\imath}_3.$$

G Il centro istantaneo di rotazione si troverà, per il teorema di Chasles, nell'intersezioni tra le perpendicolari delle velocità del punto M e del punto N, ovvero all'intersezione della retta passante per M e orientata come $\boldsymbol{p}_M$ con la retta passante per N e orientata come $\hat{\imath}_2$. In altre parole, il centro istantaneo di rotazione $\boldsymbol{c}$ è tale che $\boldsymbol{c} = t\boldsymbol{p}_M = \boldsymbol{p}_N + t'\hat{\imath}_2$, dove $\boldsymbol{p}_N$ è il vettore che identifica la posizione di N. Essendo l'asta $\overline{MN}$ di lunghezza 2ℓ, l'angolo $\phi = \widehat{MNO}$ è tale che

$$\ell\sin\theta = 2\ell\sin\phi \Rightarrow \phi = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{2}\right),$$

che permette di scrivere $\boldsymbol{p}_N = (\ell\cos\theta + 2\ell\cos\phi)\hat{\imath}_1$ da intendersi come funzione di θ. Possiamo scrivere ora due equazioni per t e t',

$$t\ell\cos\theta = \ell\cos\theta + 2\ell\cos\phi, \qquad t\ell\sin\theta = t'.$$

Dalla prima ricaviamo

$$t = 1 + \frac{2\cos\phi}{\cos\theta}$$

che permette di scrivere già l'equazione

$$\boldsymbol{c} = t\boldsymbol{p}_M = \left(1 + \frac{2\cos\phi}{\cos\theta}\right)(\ell\cos\theta\hat{\imath}_1 + \ell\sin\theta\hat{\imath}_2).$$