CAPITOLO 1

Il campo dei numeri complessi

Referenze bibliografiche. Lars A. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill [Capitolo 1].

---

1. Operazioni aritmetiche

Lo studio delle equazioni algebriche di secondo grado, ovvero nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

con x incognita da determinare, ha rapidamente portato alla constatazione di un fatto semplice ma al tempo stesso profondo: l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è *algebricamente chiuso*. Un insieme (più precisamente, come vedremo in seguito, un *campo*) è algebricamente chiuso se qualsivoglia polinomio non costante su di esso ha una radice nell'insieme stesso. Questo non è il caso di $\mathbb{R}$: se per esempio consideriamo il polinomio $x^2 + 1$, l'equazione associata

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni reali. Nasce ora la domanda se sia possibile introdurre un insieme più vasto, che include $\mathbb{R}$, tale che ogni equazione algebrica non triviale abbia effettivamente soluzione in esso.

È questa la motivazione che ha portato all'introduzione dell'insieme dei numeri complessi, che denotiamo $\mathbb{C}$. Il punto di partenza è proprio quello di definire un particolare numero, detto *unità immaginaria* i, con la proprietà speciale che

$$i^2 = -1. \tag{1.1}$$

Questo numero è proprio la soluzione all'equazione $x^2 + 1 = 0$. L'unità immaginaria è tale che i^n, dipendentemente da $n = 0, 1, \ldots,$ assume solo quattro valori, ovvero $\{1, i, -1, -i\}$: infatti $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ etc. Tuttavia, una volta introdotto tale numero, occorre anche introdurre una struttura aritmetica "sensata", che permetta in qualche modo di combinare questo numero speciale con i numeri reali. La prima porzione di questo capitolo sarà focalizzata su questo aspetto in particolare.

Un generico *numero complesso* z si ottiene combinando questa unità immaginaria con due numeri reali, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, in modo tale che

$$z = \alpha + i\beta. \tag{1.2}$$

Scriviamo che $\alpha = \mathrm{Re}(z)$ è la *parte reale* di z e $\beta = \mathrm{Im}(z)$ è la *parte immaginaria* di z: in definitiva, un numero complesso è una coppia di valori (α, β) corrispondente a due componenti (reale e immaginaria). Se $\alpha = 0$ il numero si dice *immaginario puro*, mentre se $\beta = 0$ il numero è naturalmente un reale standard.

Le operazioni di somma e prodotto si definiscono in analogia con quelle su $\mathbb{R}$, ma tenendo conto del fatto che $i \cdot i = -1$ per definizione. Così per esempio $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, allora

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2),$$

mentre

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2).$$

Come si vede, operazioni di somma e prodotto sono commutative. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è quindi, come si dice, *chiuso* rispetto alle operazioni di somma e prodotto: sommando e moltiplicando numeri complessi si ottengono numeri complessi.

Non è ovvio che sia sempre possibile *dividere* due numeri complessi e rimanere in $\mathbb{C}$. Supponiamo che *esista* un numero complesso $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ che sia consistente con l'equazione $z_1 = z_2 z_3$ assumendo che $z_2 \neq 0$, in modo tale che si possa dare un senso alla scrittura $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Per far ciò imponiamo quindi

$$z_1 z_3 = (\alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3) + i(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) = \alpha_2 + i\beta_2 = z_2$$

Ciò significa che

$$\alpha_2 = \alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3, \qquad \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 = \beta_2$$

che è un sistema di equazioni che possiamo risolvere per α_3 e β_3 ottenendo

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}, \qquad \beta_3 = \frac{\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}. \tag{1.3}$$

Infine possiamo scrivere quindi

$$\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\alpha_2 + i\beta_2} = \frac{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + i\frac{\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}. \tag{1.4}$$

che è ancora un numero complesso.

In generale, dividere per un numero complesso $z = \alpha + i\beta$ equivale a moltiplicare per il suo *reciproco*, ovvero per il numero che indichiamo $\frac{1}{z}$, tale per cui $z\frac{1}{z} = \frac{1}{z}z = 1$. Esso è dato da

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{1}{\alpha + i\beta}\frac{\alpha - i\beta}{\alpha - i\beta} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{1.5}$$

1.1. La struttura di campo. In algebra, dato un insieme $\mathbb{K}$, è possibile definirlo *campo* se è soddisfatta la definizione seguente.

Definizione 1.1 (Campo). *Un campo $\mathbb{K}$ è un insieme dotato di due operazioni binarie, chiamate addizione $+\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e moltiplicazione $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, tali per cui valgono le seguenti proprietà:*

Addizione: *è commutativa e associativa. Esiste inoltre un elemento neutro, indicato con 0, tale per cui se $x \in \mathbb{K}$, $x + 0 = 0 + x = x$. Infine, per ogni $x \in \mathbb{K}$ esiste un elemento, detto opposto, $-x$ tale per cui $x + (-x) = 0$.*

Moltiplicazione: *è associativa, commutativa ed esiste un elemento neutro, indicato con 1, tale per cui, se $x \in \mathbb{K}$, allora $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. Infine, per ogni $x \neq 0$ esiste un inverso, x^{-1}, tale per cui $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.*

Infine, la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione: se $a, b, c \in \mathbb{K}$ allora $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è quindi un campo rispetto alle operazioni di *addizione* e *moltiplicazione* che tutti conosciamo. Un campo è sempre un *dominio integrale*, ovvero se $x, y \in \mathbb{K}$ e $xy = 0$, allora $x = 0$ o $y = 0$. Ma, a ben vedere, anche $\mathbb{C}$ ha la stessa struttura, rispetto alle medesime operazioni di somma e prodotto che abbiamo introdotto sopra: anche $\mathbb{C}$ è un campo. In particolare, $\mathbb{R}$ è un *sottocampo* di $\mathbb{C}$, dato che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ed è esso stesso un campo. La struttura di campo è molto importante in algebra e, come vedremo in seguito, permette di definire spazi di grande utilità.

Se, da un lato, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono senz'altro i campi più comunemente adoperati e godono entrambi della struttura introdotta sopra, ci sono però delle differenze importanti tra di essi. Una di queste è stata la nostra motivazione per introdurre $\mathbb{C}$, ovvero $\mathbb{R}$ *non* è algebricamente chiuso, mentre $\mathbb{C}$ lo è. Si può infatti provare che l'introduzione dei numeri complessi è sufficiente per permettere di trovare almeno una radice di qualsivoglia polinomio a coefficienti in generale complessi.

TEOREMA 1.1 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio non-costante di grado $n \geq 1$ in una variabile z a coefficienti complessi $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ ammette almeno una radice complessa.*

Una ulteriore differenza è legata al fatto che $\mathbb{R}$ è dotata di una relazione d'ordine, mentre $\mathbb{C}$ non lo è: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ possiamo infatti dire se $\alpha < \beta$ o $\beta < \alpha$ o $\beta = \alpha$ considerando $\beta - \alpha$ e valutandone il segno. Questa proprietà non può essere traslata in $\mathbb{C}$ dato che la differenza di due numeri complessi non ha, in generale, un segno definito.

1.2. Estrazione di radice quadra. Finora abbiamo parlato di addizioni e moltiplicazioni, ma l'interesse per i numeri complessi in matematica nacque da un problema che riguarda una diversa operazione, ovvero *l'estrazione di radice*. La radice di un numero complesso può essere *sempre* trovata in forma esplicita, e questa è una delle ragioni per cui i numeri complessi sono stati introdotti. Estrarre la radice di $\alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, equivale a trovare una coppia di reali x e y tali che

$$\alpha + i\beta = (x + iy)^2. \tag{1.6}$$

Sviluppando il quadrato otteniamo facilmente che

$$x^2 - y^2 = \alpha, \qquad 2xy = \beta. \tag{1.7}$$

che sono due equazioni da cui possiamo ottenere informazioni sulle nostre incognite x e y. In particolare

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

ovvero

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Possiamo ora procedere e scrivere

$$\alpha = x^2 - y^2 = x^2 + y^2 - 2y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 2y^2$$

e similmente

$$\alpha = x^2 - y^2 = -x^2 - y^2 + x^2 = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 2x^2$$

che forniscono le equazioni finali

$$x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}, \qquad y^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \tag{1.8}$$

Queste due equazioni sembrano suggerire la possibilità di due possibili valori per ciascuno due due numeri reali x e y. Tuttavia non tutte e quattro le possibili coppie sono accettabili: il motivo è che il segno relativo di x e y è fissato dall'equazione $2xy = \beta$, per cui $\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y) = \operatorname{sign}(\beta)$. Possiamo quindi concludere che, se $\beta \neq 0$,

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \operatorname{sign}(\beta) \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right). \tag{1.9}$$

Se $\beta = 0$ invece otteniamo una diversa coppia di soluzioni. Se $\alpha > 0$, le radici sono (come atteso) $\pm\sqrt{\alpha}$; se $\alpha < 0$, le radici sono $\pm i\sqrt{-\alpha}$. In generale quindi la radice quadrata di un numero complesso esiste ed è data da due opposti numeri complessi.

La formula che abbiamo ottenuto appare piuttosto convoluta, e la sua derivazione vale come un esercizio che tuttavia ci mostra come possiamo costruire una radice quadrata di un numero complesso: deriveremo un altro formalismo, detto *trigonometrico*, che semplifica enormemente le estrazioni di radice di un numero complesso.

1.3. Coniugazione e modulo. Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ ha, come detto, la struttura generica $z = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Esiste una operazione molto semplice estremamente utile per rendere compatte molte delle formule introdotte e molte formule che introdurremo, detta *coniugazione complessa*. Consiste, semplicemente, nel rimpiazzare $i \mapsto -i$ nell'espressione di z, e si indica come $\bar{z}$:

$$z = \alpha + i\beta \mapsto \bar{z} = \alpha - i\beta. \tag{1.10}$$

In questo modo possiamo scrivere

$$\alpha = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \beta = \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{1.11}$$

L'operazione di coniugazione ha delle semplici proprietà: dati due numeri complessi z_1 e z_3, allora

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}. \tag{1.12}$$

Il prodotto $z\bar{z}$ inoltre è dato da

$$z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0, \tag{1.13}$$

e scriviamo $|z|^2 := z\bar{z}$: il numero positivo $|z|$ è detto *modulo* di z e coincide con il solito valore assoluto se $z \in \mathbb{R}$. Esso ha ulteriori proprietà facili da verificare, ovvero

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|. \tag{1.14}$$

In altre parole, il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli. Infine vale la seguente uguaglianza:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \tag{1.15}$$

Per ottenerla, basta osservare che

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

1.4. La disuguaglianza triangolare. L'operazione di modulo ha forti analogie con quella di valore assoluto nota nel campo dei numeri reali, ma anche alcune rilevanti differenze, dato che si applica ad una quantità dotata di due componenti. Anzitutto, per definizione sappiamo che

$$-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|, \qquad -|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.16}$$

Abbiamo però anche visto che, dati due numeri complessi z_1 e z_2, $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$. Ma quindi, dato che $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1|\,|\overline{z_2}| = |z_1|\,|z_2|$, possiamo scrivere

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

ovvero il modulo soddisfa la *disuguaglianza triangolare*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.17}$$

Applicando il principio di induzione, si può estendere questa disuguaglianza ad un set di n numeri complessi $\{z_k\}_{k=1}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|. \tag{1.18}$$

La disuguaglianza triangolare permette di ottenere altre disuguaglianze interessanti. Se $z_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ e $z_2 = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, allora

$$|\alpha + i\beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \tag{1.19}$$

Un ulteriore esempio: da

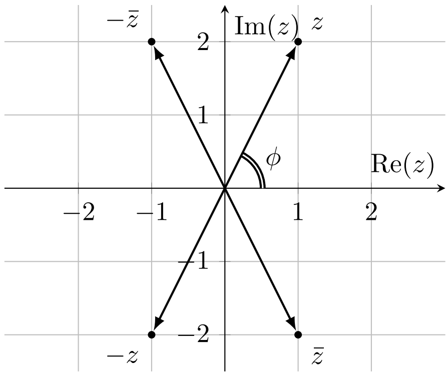
$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

e, invertendo z_1 e z_2, $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$, per cui

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \tag{1.20}$$

2. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Un numero complesso è associato, sulla base di quanto detto sopra, a due numeri reali: la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Questo vuol dire che possiamo rappresentarlo in un *piano*, detto *piano di Gauss* o *diagramma di Argand*, in cui l'asse delle ascisse è associato alla parte reale e l'asse delle coordinate alla parte immaginaria, in modo che il punto di coordinate (α, β) rappresenti univocamente il numero complesso $\alpha + i\beta$. In particolare, possiamo immaginare che ogni numero complesso sia associato ad un *vettore*, ovvero una freccia che, partendo dall'origine, termina nel punto rappresentante il numero stesso.



Il modulo $|z|$ ha anche esso un significato geometrico chiaro: essendo $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ il modulo è semplicemente la lunghezza del vettore associato a z. Il coniugato di z, invece, è rappresentato da un vettore *simmetrico* al vettore rappresentante z rispetto all'asse delle ascisse.

Come noto, i punti del piano possono essere individuati da un paio di coordinate cartesiane, oppure in coordinate polari: per fornire le coordinate polari di un punto occorre dare una distanza dall'origine e un angolo rispetto all'asse delle ascisse. Un numero complesso z è associato ad un punto che dista dall'origine, come abbiamo visto, $|z|$. Sia ora ϕ l'angolo del vettore corrispondente rispetto all'asse delle ascisse: allora possiamo scrivere

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \cos\phi, \qquad \mathrm{Im}(z) = |z| \sin\phi. \tag{1.21}$$

L'angolo ϕ è detto *argomento* di z, si denota con $\arg(z)$: esso *non è univocamente determinato*, dato che, sostituendo $\phi \mapsto 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ nelle Eqs. (1.21), le espressioni rimangono invariate. Per rimuovere tale ambiguità ci si riferisce talvolta all'argomento compreso nell'intervallo $[0, 2\pi)$ *argomento principale di* z, indicato con $\mathrm{Arg}(z)$. Questa ambiguità nel determinare l'argomento (a volte detto *fase*) del numero complesso ha un'importanza che emergerà in seguito. Introducendo l'argomento di z possiamo riscrivere il nostro numero complesso nella sua forma trigonometrica,

$$z = |z| (\cos\phi + i \sin\phi), \tag{1.22}$$

Seguendo Eulero, riscriviamo questa formula in una forma molto più compatta, ed estremamente utile. Osserviamo il fatto seguente, che discende dalla forma dello sviluppo in serie di Taylor delle funzioni trigonometriche seno e coseno:

$$
\begin{aligned}
\cos\phi + i\sin\phi &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k}\frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1}\frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\phi)^k}{k!} = \mathrm{e}^{i\phi}\,.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Possiamo quindi scrivere in maniera compatta ogni numero complesso come

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{i\phi}\,. \tag{1.24}$$

Inoltre

$$\bar{z} = |z|\,\mathrm{e}^{-i\phi}, \tag{1.25}$$

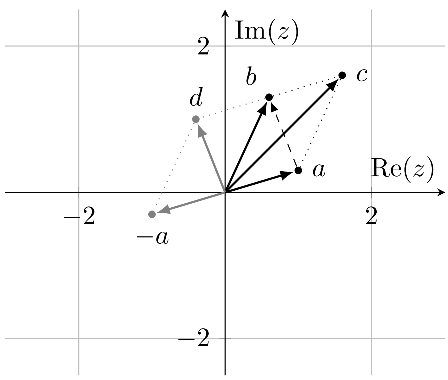
come peraltro si vede direttamente dalla rappresentazione del coniugato nel piano complesso: se z ha argomento ϕ, $\bar{z}$ ha argomento $-\phi$ in quanto riflesso rispetto all'asse delle ascisse.

L'identità dimostrata sopra implica anche che $\mathrm{e}^{i\phi}$ è in effetti una funzione periodica in ϕ: $\mathrm{e}^{i(\phi+2k\pi)} = \mathrm{e}^{i\phi}$. Infine, dalla rappresentazione cartesiana è evidente che il numero reale $z = -1$ ha argomento principale $\phi = \pi$, per cui $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$, ovvero

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0.$$

L'utilità di questa rappresentazione sarà evidente a breve: essa permetterà di interpretare alcune proprietà introdotte sopra in termini *geometrici* ed eseguire con grande facilità operazioni di elevamento a potenza ed estrazione di radice.

2.1. Addizione e moltiplicazione. Le operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri complessi possono essere interpretate in termini di manipolazioni dei vettori che li rappresentano. Supponiamo che a e b siano due numeri complessi nel piano (identificheremo il numero complesso z generico con il vettore che lo rappresenta). La loro *somma* $c = a + b$ è il vettore ottenuto per mezzo della cosiddetta *regola del parallelogramma*, ovvero il vettore somma corrisponde precisamente alla diagonale con vertice nell'origine del parallelogramma costruito sui lati a e b.



La seconda diagonale del parallelogramma ottenuto ha anche essa un significato. Se infatti consideriamo $d = b - a$, questa corrisponde alla somma tra il vettore associato a b e il vettore associato a $-a$: il vettore associato a d ha esattamente la lunghezza della seconda diagonale ottenuta costruendo il parallelogramma della somma tra a e b.

A questo punto le disuguaglianze che abbiamo discusso in precedenza acquistano tutte una geometrica: la disuguaglianza triangolare $|a+b| \leq |a| + |b|$ per esempio esprime esattamente la disuguaglianza nota per i triangoli dalla geometria euclidea, secondo cui ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due. Ugualmente $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ è la legge del parallelogramma.

Come la somma, anche il prodotto tra numeri complessi ha un significato geometrico, che appare più chiaro se utilizziamo la forma trigonometrica per rappresentarli. Dati $a = |a| \, \mathrm{e}^{i\phi_a}$ e $b = |b| \, \mathrm{e}^{i\phi_b}$, è immediato vedere che $ab = |a| \, |b| \, \mathrm{e}^{i(\phi_a + \phi_b)}$, ovvero il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli (come sapevamo) e l'argomento del prodotto è uguale alla somma degli argomenti dei fattori. Geometricamente questo vuol dire che se abbiamo due vettori a e b, il vettore ab può essere inteso, per esempio, come il risultato di una dilatazione (o contrazione) del vettore a di un fattore $|b|$ seguita da una rotazione di un angolo ϕ_b.

2.2. Formula di de Moivre. Dato che, come abbiamo dimostrato, possiamo scrivere $z = |z| \, \mathrm{e}^{i\phi}$, allora ne segue che, per $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = |z|^n \, \mathrm{e}^{in\phi} = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi). \tag{1.26}$$

Ma d'altra parte $z^n = |z|^n (\cos\phi + i \sin\phi)^n$. Otteniamo quindi immediatamente la *formula di de Moivre*,

$$(\cos\phi + i \sin\phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi \tag{1.27}$$

Il risultato ottenuto sembra suggerire una semplice soluzione per equazioni del tipo

$$z^n = a$$

per $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Apparentemente, basta infatti scrivere $a = |a| \, \mathrm{e}^{i\phi}$, dove $\phi = \operatorname{Arg}(a)$, e quindi

$$z = |z|^{\frac{1}{n}} \, \mathrm{e}^{i\frac{\phi}{n}} = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\frac{\phi}{n} + i \sin\frac{\phi}{n} \right).$$

Questa tuttavia *non è* in generale l'unica soluzione. Infatti come abbiamo specificato in precedenza, se $\phi = \operatorname{Arg}(a)$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $a = |a| \, \mathrm{e}^{i(\phi + 2\pi k)}$ corrisponde allo stesso numero complesso. Nell'estrazione di radice, quindi, occorre tenere conto che del fatto tutti questi argomenti hanno pari dignità, e in generale le soluzioni distinte sono n e date da

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\phi + 2\pi k}{n} \right), \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Si noti che non occorre considerare *tutti* i valori di k ma solo $k = 0, \ldots, n-1$. Se infatti consideriamo $k = n$ otteniamo la stessa espressione ottenuta per $k = 0$, $k = n+1$ fornisce la stessa espressione ottenuta per $k = 1$ e così via. Ne consegue che una equazione del tipo $z^n = a$ ha n radici distinte nel piano complesso, tutte con lo stesso modulo ed collocate sui vertici di un poligono regolare di n lati. In particolare, se $a = 1$, le n soluzioni sono le n *radici dell'unità*,

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k}{n}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

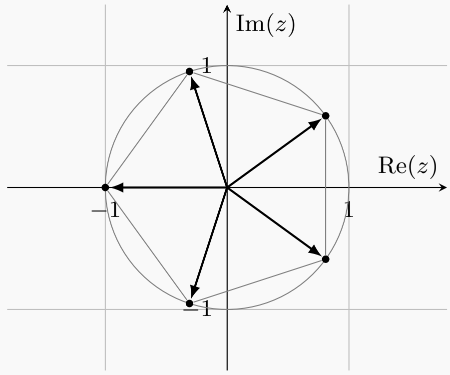
Supponiamo di voler risolvere l'equazione

$$z^5 = -1.$$

Abbiamo già visto che $-1 = \mathrm{e}^{\pi i}$. L'equazione ha quindi cinque radici, date da

$$z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{5}, \qquad k = 0, \ldots, 4.$$

Solo una di esse è reale pura, ovvero quella ottenuta per $k = 2$, per la quale $z_3 = -1$.



Abbiamo mostrato che, se $z = \alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + i\,\mathrm{sign}(\beta)\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right).$$

D'altra parte, il risultato presentato in questa sezione fornisce la seguente formula per le radici di $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\phi}$:

$$\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right), \quad -\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right),$$

ovvero

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right).$$

Queste due espressioni sono naturalmente equivalenti. Sappiamo anzitutto che $|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha = |z|\cos\phi$ e $\beta = |z|\sin\phi$. Di conseguenza la prima espressione può scriversi

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\left(\sqrt{\frac{\cos\phi + 1}{2}} + i\,\mathrm{sign}(\sin\phi)\sqrt{\frac{-\cos\phi + 1}{2}}\right).$$

A questo punto il risultato si ottiene utilizzando le formule di bisezione,

$$\cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1+\cos\phi}{2}, \qquad \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1-\cos\phi}{2}.$$

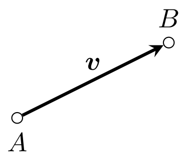
CAPITOLO 2

Elementi di algebra lineare

Referenze bibliografiche. Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri [Capitolo 1]. Gilbert Strang, *Introduction to linear algebra*, Wellesley–Cambridge press.

1. Introduzione agli spazi vettoriali

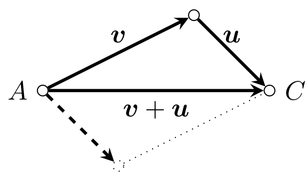
1.1. Vettori applicati e vettori geometrici. Per introdurre il concetto di *spazio vettoriale* iniziamo da un contesto più concreto e forse più semplice. Consideriamo due punti A e B nello spazio *ordinario*. Un *vettore applicato* $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$ *in* A *con punto finale* B può essere immaginato come una freccia che collega A e B,



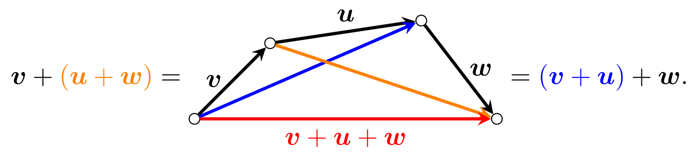
Un vettore applicato è caratterizzato dal suo punto di applicazione, A, da una direzione, un verso e una lunghezza. Se $A = B$, allora il corrispondente vettore è detto *nullo* e viene indicato con $\mathbf{0}$: la sua lunghezza è zero e la sua direzione e il suo verso non sono definiti. Due vettori $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{CD}$ sono *equipollenti* se hanno stessa direzione, stessa lunghezza e stesso verso. L'equipollenza è una relazione di equivalenza e un *vettore geometrico* corrisponde ad una classe di equivalenza secondo equipollenza. Uno specifico vettore applicato è perciò un *rappresentante* di questa classe di equivalenza, mentre tutti i vettori con stessa direzione, stessa lunghezza e stesso verso corrispondono allo stesso oggetto di tipo "vettore geometrico".

1.1.1. *Operazioni tra vettori geometrici.* I vettori geometrici sono oggetti molto diversi dai numeri usuali, ma è ugualmente possibile introdurre una serie di operazioni tra di essi.

Dati due vettori geometrici $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$, la loro *somma* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ può essere definita concatenando due loro rappresentanti. Per esempio, scelto un punto A, si applica prima $\boldsymbol{v}$ ad A si ottiene il vettore $\overrightarrow{AB}$ con coda in un punto B, e, consecutivamente, applicando $\boldsymbol{u}$ a B si ottiene il vettore $\overrightarrow{BC}$ con coda in C. Possiamo quindi *definire* $\overrightarrow{AC}$ come rappresentante del vettore geometrico somma $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$. La costruzione ora descritta corrisponde ala cosiddetta *regola del parallelogramma*, ed è equivalente a considerare $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ applicati allo stesso punto A e costrure su di essi un parallelogramma, considerando quindi come somma la diagonale del quadrilatero ottenuto:

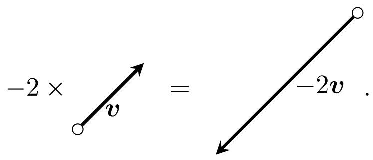


È evidente dalla costruzione stessa che l'operazione è commutativa, ovvero $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, e tale per cui $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}$. L'operazione di somma che abbiamo definito è anche *associativa.* Se abbiamo tre vettori $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$, allora



Infine, dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, il vettore applicato $\overrightarrow{BA}$ è tale per cui $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$: se il vettore geometrico associato a $\overrightarrow{AB}$ è $\boldsymbol{v}$, denotiamo quindi $-\boldsymbol{v}$ il vettore geometrico associato a $\overrightarrow{BA}$ e scriviamo $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$: $-\boldsymbol{v}$ è l'*opposto* di $\boldsymbol{v}$.

È possibile anche introdurre l'operazione *moltiplicazione per uno scalare* $c\in\mathbb{R}$: il vettore $c\boldsymbol{v}$ ha stessa direzione di $\boldsymbol{v}$, stesso verso se $c>0$ e verso opposto se $c<0$, e lunghezza uguale a $|c|$ volte quella di $\boldsymbol{v}$. Per esempio,



Se $c=0$, allora $c\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. È facile verificare che, se $a,b\in\mathbb{R}$, allora $(a+b)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}$, $(ab)\boldsymbol{v}=a(b\boldsymbol{v})$ e, dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$, $a(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=a\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u}$.

1.2. Spazi vettoriali. Lo spazio dei vettori geometrici può avere una interpretazione intuitiva abbastanza semplice. Può rappresentare, per esempio, lo spazio degli *spostamenti* nel piano. Tuttavia la sua struttura può essere generalizzata in forma astratta: essa è caratterizzata dalla presenza di due operazioni binarie (somma tra vettori e prodotto per scalare) e lo *spazio vettoriale* dei vettori geometrici è stato introdotto proprio per mezzo di queste operazioni.

L'idea ora è tentare di caratterizzare cosa sia uno spazio vettoriale senza necessariamente avere in mente una rappresentazione pittorica. In generale, la costruzione di uno spazio vettoriale richiede l'esistenza di un insieme $\mathbb{V}$ di "vettori" e di un altro insieme di "scalari", $\mathbb{K}$. Ci limiteremo ad assumere che $\mathbb{K}$ sia, a seconda dei casi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, ma utilizzeremo $\mathbb{K}$ per lavorare in maggiore generalità.

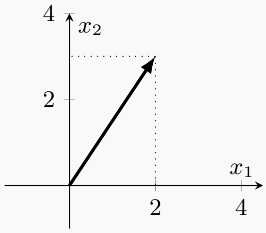
Il concetto di spazio vettoriale può quindi essere formalizzato come segue.

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio vettoriale). *Uno spazio vettoriale su un campo* $\mathbb{K}$ *è un insieme non vuoto* $\mathbb{V}$ *tale per cui esistono due operazioni binarie, ovvero* $+\colon\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$*, detta somma, e* $\cdot\colon\mathbb{K}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$*, detta prodotto per uno scalare, con le seguenti proprietà:*

- *la somma* $+$ *è commutativa e associativa; esiste un elemento neutro* $\mathbf{0}$*, ovvero se* $\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}$*, allora* $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$*; esiste l'elemento opposto, ovvero se* $\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}$ *esiste* $-\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}$ *tale per cui* $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$*;*
- *il prodotto* $\cdot$ *è distributivo sulla somma di vettori (ovvero* $a(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=a\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u}$ *per* $a\in\mathbb{K}$ *e* $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\in\mathbb{V}$*) e sulla somma di scalari (ovvero* $(a+b)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}$ *per* $a,b\in\mathbb{K}$ *e* $\boldsymbol{v}\mathbb{V}$*); infine l'elemento neutro* 1 *di* $\mathbb{K}$ *è tale per cui* $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$*.*

La definizione precedente si applica in effetti ai vettori geometrici, ed è anzi ispirata da essi. Come potete notare, è richiesto che $\mathbb{K}$ sia un *campo*: come anticipato, per semplicità assumeremo che $\mathbb{K}$ sia un campo numerico come $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$.

Un esempio di spazio vettoriale è dato dai vettori nel piano $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$. Un vettore nel piano $\boldsymbol{x}$ è rappresentato da una freccia applicata nell'origine che punta in una posizione del piano



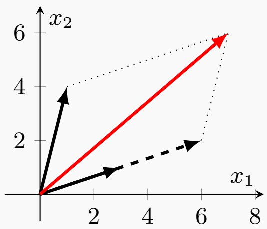
e può rappresentarsi come una coppia di numeri come

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

corrispondenti alle sue coordinate. Dati due vettori $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$, una loro combinazione lineare con coefficienti reali c_1 e c_2 si ottiene come

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{21} \\ c_1x_{12} + c_2x_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

Per esempio, nella figura sotto $\boldsymbol{x}_1 = \binom{3}{1}$ e $\boldsymbol{x}_2 = \binom{1}{4}$, ed in rosso è rappresentata la loro somma $2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \binom{7}{6}$.



Se $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{V}$ e $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$, il vettore $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{V}$ si dice essere una combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ a coefficienti $c_1, \ldots, c_k$. Il concetto di combinazione lineare è cruciale e caratterizza le proprietà di uno spazio vettoriale. Con un leggero abuso, utilizzeremo la notazione

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k =: \sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{v}_i. \tag{2.3}$$

Chiamiamo l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $\mathcal{V} := \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^k$ lo *span* di $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^k$ e scriviamo $\operatorname{span}(\mathcal{V})$.

Definizione 1.2 (Lineare dipendenza). *I vettori $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^k$ sono linearmente dipendenti se esistono degli scalari $\{c_i\}_{i=1}^k$ non tutti nulli tali per cui*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}; \tag{2.4}$$

diversamente si dicono linearmente indipendenti.

Per definizione, il singolo vettore $\boldsymbol{v}$ è linearmente dipendente se e solo se uguale al vettor nullo. Viceversa, se $\boldsymbol{v}_2 = c\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente dipendenti. La definizione implica che in un insieme di vettori linearmente dipendenti, almeno uno di essi può sempre esprimersi come combinazione lineare degli altri. Infine, vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.1. *Se* $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^k$ *sono linearmente indipendenti, allora, dati due set di scalari in* $\mathbb{K}$ $\{a_i\}_{i=1}^k$ *e* $\{b_i\}_{i=1}^k$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} b_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow a_i = b_i \ \forall i = 1, \dots, k. \tag{2.5}$$

Infine, possiamo introdurre il concetto di *base*

DEFINIZIONE 1.3 (Base di uno spazio vettoriale). *Il set* $\mathcal{B} \coloneqq \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ *di vettori di* $\mathbb{V}$ *è una base se essi sono linearmente indipendenti e se* $\mathbb{V} = \mathrm{span}[\mathcal{B}]$.

Questo significa che ogni vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ può scriversi *in maniera unica* come $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{v}_i$, con coefficienti c_i che sono detti *coordinate* di $\boldsymbol{v}$ secondo la base $\mathcal{B}$. Ciò comporta anche che non è possibile avere un set di vettori indipendenti con più di n elementi. Vale infatti il seguente

TEOREMA 1.2 (Dimensione). *Sia* $\mathcal{B} \coloneqq \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ *una base di* $\mathbb{V}$. *Allora ogni set* $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^m$ *di* $m > n$ *vettori di* $\mathbb{V}$ *è costituito da elementi linearmente dipendenti. Di conseguenza, ogni base di* $\mathbb{V}$ *ha* n *elementi: il numero* n *prende il nome di dimensione di* $\mathbb{V}$.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$ è costituito da vettori n-dimensionali, rappresentabili come vettori colonna,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

In questo caso è facilmente identificata una *base canonica* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ di n vettori

$$\boldsymbol{e}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \boldsymbol{e}_n \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

che permette di scrivere in maniera univoca qualunque vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ come

$$\boldsymbol{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.1. *Sottospazi vettoriali.* Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$, è possibile identificare in alcuni casi un *sottospazio* vettoriale $\mathbb{W}$, ovvero un sottoinsieme di $\mathbb{V}$ che è chiuso sotto le operazioni di somma e prodotto per uno scalare, ovvero

DEFINIZIONE 1.4 (Sottospazio vettoriale). *Dato uno* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale* $\mathbb{V}$, *un sottoinsieme non vuoto* $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{V}$ *se, per ogni* $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in \mathbb{W}$, $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in \mathbb{W}$, *e per ogni* $c \in \mathbb{K}$, *se* $\boldsymbol{w} \in \mathbb{W}$ *allora* $c\boldsymbol{w} \in \mathbb{W}$.

Per esempio, se $\mathcal{V} \coloneqq \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{V}$, $\mathrm{span}[\mathcal{V}]$ è un sottospazio di $\mathbb{V}$ (in particolare, lo è anche per $k = 1$).

DEFINIZIONE 1.5 (Rango). *Dato un insieme finito di vettori* $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^k$ *di uno spazio vettoriale* $\mathbb{V}$, *il rango dell'insieme è la dimensione di* $\mathrm{span}[\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^k]$.

Inoltre la dimensione di un sottospazio è sempre limitata superiormente dalla dimensione dello spazio in cui vive. È interessante notare che se $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{V}$, allora $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ è anche sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}$ (mentre la loro unione, in generale, non lo è).