Esame di
Fisica Matematica 2

Corso di Laurea in Matematica — Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 120 minuti. Il punteggio di `30/30` si ottiene con la risoluzione di tutti gli esercizi presentati. La domanda teorica ha un valore di `3pt` aggiuntivi.

Prova esempio

Esercizio A
Moto unidimensionale

Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ vincolato a muoversi su una guida liscia. Il moto è parametrizzato dalla variabile lagrangiana $x \in \mathbb{R}$. Il punto è soggetto ad una forza conservativa di potenziale dipendente dal parametro non negativo a

$$V(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(ax + 1), \quad a \geq 0$$

in funzione del parametro lagrangiano x.

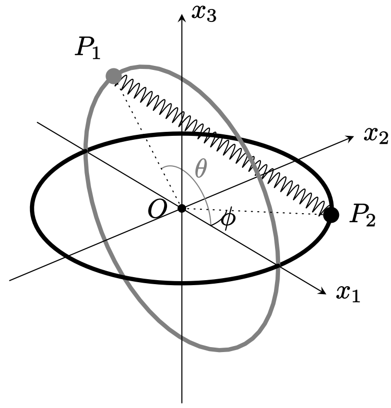
A1 Si individuino i punti di equilibrio del sistema se ne discuta la stabilità.

A2 Si discuta qualitativamente il moto nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ per $a = 0$ e $a = 2$. In entrambi i casi si specifichino i valori ammessi dell'energia meccanica del punti materiale, le equazioni delle separatrici e sotto quali condizioni le traiettorie sono limitate o illimitate.

A3 Si consideri il regime in cui il moto è limitato e sia $\tau(a)$ il periodo in approssimazione di piccole oscillazioni. Si calcoli $\lim_{a\to+\infty} a\tau^2(a)$.

Esercizio B
Formalismo lagrangiano

Due punti materiali, entrambi di massa unitaria, sono vincolati a scorrere ciascuno su una guida circolare liscia di raggio $r = 1$. Le circonferenze sono incastrate tra loro in modo da condividere il centro ma giacere su piani ortogonali, come in figura, di modo che uno degli anelli sia orizzontale. Si assume che ciascun punto materiale possa scorrere sulla propria guida percorrendola nella sua interezza senza essere ostacolato dall'altra guida o dall'altro punto materiale. Tra di essi agisce una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k \geq 0$. Si trascuri la forza peso.



B1 Si parametrizzi il sistema con una opportuna mappa $\chi\colon \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ utilizzando gli angoli θ e ϕ in figura.

B2 Si scrivano le equazioni di Eulero–Lagrange del sistema e si discuta la presenza di variabili cicliche al variare di k.

B3 Si assuma $k > 0$. Si mostri che introducendo le variabili $q_1 = \phi+\theta$ e $q_2 = \phi-\theta$ le equazioni di Lagrange assumono la forma delle equazioni di due pendoli disaccoppiati.

Segue

QUESITO — Durante uno dei loro viaggi in un altro universo, la navicella di Trurl e Klapaucius si trova in orbita attorno ad una nana bianca di massa estremamente grande ma volume infinitesimo, in modo da potersi considerare *puntiforme*: nell'universo in questione, l'attrazione gravitazionale tra due oggetti di massa data a distanza reciproca r è associata all'energia potenziale

$$V(r) = -\frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} \qquad \text{dove} \quad a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0.$$

La navicella ha un certo momento angolare di modulo $L_z \neq 0$. Trurl afferma che in nessun caso, purché $L_z \neq 0$, la navicella colliderà con la nana bianca. Viceversa, Klapaucius afferma che $L_z \neq 0$ non è sufficiente a garantire che la collisione non avverrà. Dire chi ha ragione giustificando la risposta.