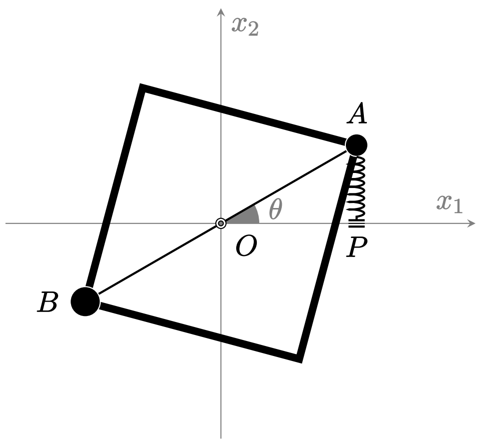
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

2 Settembre 2025

Istruzioni. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

In un piano verticale è dato un riferimento cartesiano come in figura. Un sistema è costituito da un quadrato, composto da quattro aste omogenee, ciascuna di massa m e lunghezza $\sqrt{2}\ell$. Una quinta asta, di massa trascurabile, collega due vertici opposti del quadrato, A e B, passando per l'origine O del riferimento, dove un giunto permette la rotazione ideale del quadrato attorno al suo centro, vincolando il quadrato a rimanere nel piano. In A è inoltre saldata una massa m, mentre in B è data una massa $3m$. La massa in A è collegata, per mezzo di una molla ideale di costante elastica $k > 0$, ad un carrello P, che è libero di scorrere sull'intero asse delle ascisse senza attrito ed è tale da mantenere la molla sempre verticale.



Utilizzando l'angolo θ che il segmento $\overline{OA}$ forma con l'asse orizzontale (indicato in figura) come parametro lagrangiano, si risponda alle seguenti domande.

A Si calcoli la posizione del centro di massa del sistema.

B Si calcolino le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro

$$\eta = \frac{mg}{k\ell}$$

e si dica se esse sono stabili o instabili.

C Si calcoli il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse perpendicolare al piano e passante per O.

D Si calcoli il momento torcente totale delle forze attive rispetto ad O in funzione del parametro lagrangiano θ.

Soluzione

A Osserviamo anzitutto che la diagonale del quadrato ha lunghezza 2ℓ, per cui $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \ell$. La massa totale del sistema è pari a $8m$. I punti materiali in A and B, sono individuati dai vettori

$$\overrightarrow{OA} = \ell\cos\theta\hat{\imath}_1 + \ell\sin\theta\hat{\imath}_2, \qquad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}.$$

Per motivi di simmetria, il centro di massa del quadrato G_q è nel centro del riferimento, ovvero $G_q \equiv O$. abbiamo così che il centro di massa G del sistema è individuato da

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OA} - 3m\overrightarrow{OA} + 4m\overrightarrow{OG_q}}{8m} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} = -\frac{\ell\cos\theta}{4}\hat{\imath}_1 - \frac{\ell\sin\theta}{4}\hat{\imath}_2.$$

B L'energia potenziale può scriversi come

$$V(\theta) = -2mg\ell\sin\theta + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta.$$

Le configurazioni di equilibrio sono date da

$$V'(\theta) = 0 \Rightarrow -2mg\ell\cos\theta + k\ell^2\sin\theta\cos\theta = k\ell^2\cos\theta(\sin\theta - 2\eta) = 0.$$

L'equazione ammette come soluzioni $\theta_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$ e, se $\eta \in [0, 1/2)$, $\theta_1 = \arcsin(2\eta)$, $\theta_2 = \pi - \arcsin(2\eta)$. Per valutare la stabilità di queste soluzioni, consideriamo

$$\begin{aligned} V''(\theta) &= 2mg\ell\sin\theta + k\ell^2\cos^2\theta - k\ell^2\sin^2\theta \\ &= 2mg\ell\sin\theta + k\ell^2 - 2k\ell^2\sin^2\theta = k\ell^2\left(2\eta\sin\theta + 1 - 2\sin^2\theta\right). \end{aligned}$$

Si ha che $V''(\theta_+) = k\ell^2(2\eta - 1)$ per cui θ_+ è punto di equilibrio stabile per $\eta > 1/2$, instabile diversamente; $V''(\theta_-) = -k\ell^2(2\eta + 1)$, per cui θ_- è punto di equilibrio instabile sempre. Se $\eta \in [0, 1/2)$ ha che $V''(\theta_{1/2}) = k\ell^2(1 - 4\eta^2) > 0$, ovvero $\theta_{1/2}$ sono punti di equilibrio stabile quando esistono.

C Il momento di inerzia di un'asta omogenea di lunghezza ℓ e massa m rispetto ad un asse ad essa ortogonale e passante per il suo centro è $I_a = \frac{1}{12}m\ell^2$. Il momento di ciascun lato del quadrato rispetto ad O può essere ottenuto utilizzando il teorema di Huygens–Steiner: detto G_a il centro dell'asta, esso è pari a $I'_a = I_a + md^2(G_a, O) = I_a + \frac{1}{2}m\ell^2$ (essendo $d(G_a, O) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ell$). Aggiungendo quindi il contributo delle masse in A e in B, e considerando il fatto che vi sono 4 aste che forniscono uguale contributo, il momento di inerzia cercato è

$$I_O = 4\left(\frac{1}{12}m(\sqrt{2}\ell)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\right) + 3m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{20}{3}m\ell^2.$$

D Le forze attive sono la forza peso e quella elastica. La prima può considerarsi globalmente applicata in G e pari a $\vec{F}_g = -8mg\hat{\imath}_2$, mentre la seconda è pari a $\vec{F}_{\text{el}} = -k\ell\sin\theta\hat{\imath}_2$ ed è applicata in A. Abbiamo così che

$$\vec{\tau}_O^{(\text{att})} = \overrightarrow{OG}\wedge\vec{F}_g + \overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}_{\text{el}} = (2mg - k\ell\sin\theta)\overrightarrow{OA}\wedge\hat{\imath}_2 = k\ell^2(2\eta - \sin\theta)\cos\theta\hat{\imath}_3.$$