

ESAME DI FISICA MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 120 minuti. Il punteggio di 30/30 si ottiene con la risoluzione completa dell'Esercizio A e dell'Esercizio B. La domanda teorica ha un valore di 3pt aggiuntivi. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

ESERCIZIO A

Moto unidimensionale

Un punto materiale di massa unitaria si muove sull'asse reale \mathbb{R} soggetto all'azione del potenziale

$$V(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- A1** Si determinino i punti critici del moto e se ne studi la stabilità.
- A2** Si presenti uno studio qualitativo del moto nel piano delle fasi.
- A3** Si scriva l'equazione della separatrice e si calcoli l'area della porzione limitata del piano delle fasi da essa racchiusa.

ESERCIZIO B

Formalismo lagrangiano

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato su una guida elicoidale liscia e fissa, parametrizzata in un riferimento cartesiano come

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ cu \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}$$

con $c > 0$ costante fissata. Una molla di costante elastica $k \geq 0$ e lunghezza a riposo nulla connette il punto materiale con l'origine del riferimento. Si assuma che la forza elastica della molla sia l'unica forza attiva agente sul punto materiale.

- B1** Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero–Lagrange del sistema.
- B2** Si assuma $k = 0$. Si discuta la presenza di variabili cicliche e si scrivano le eventuali quantità conservate associate.
- B3** Sia $k > 0$. Si risolvano le equazioni di Eulero–Lagrange assumendo che per $t = 0$ il punto sia nella posizione corrispondente a $u = 0$ e abbia velocità $\mathbf{v} = (0, v_0, cv_0)^\top$.

QUESITO — Si consideri un punto materiale di massa m in moto in un potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{1}{4r^3} - \frac{1}{r},$$

dove r è la distanza dall'origine. Si supponga che il punto materiale inizi il suo moto a $t = 0$ infinitamente distante dal centro, con momento angolare rispetto all'origine di modulo pari a $L = \sqrt{2m}$. Si trovi il valore dell'energia per cui $\dot{r} < 0$ per ogni $t > 0$, ma $0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) < \infty$.

SCHEMA DI RISOLUZIONE

Esercizio A.

A1 Essendo il potenziale C^∞ su \mathbb{R} , possiamo calcolare i punti critici ponendo

$$V'(x) = x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Il teorema di Dirichlet–Lagrange permette di studiarne la stabilità valutando la derivata seconda, ovvero, dal fatto che $V''(x) = 2x - 1$,

$$V''(x_0) = -1 < 0, \quad V''(x_1) = 1 > 0$$

per cui x_0 è un punto di equilibrio instabile e corrisponde ad un massimo di V , mentre x_1 è un punto di equilibrio stabile e corrisponde ad un minimo di V .

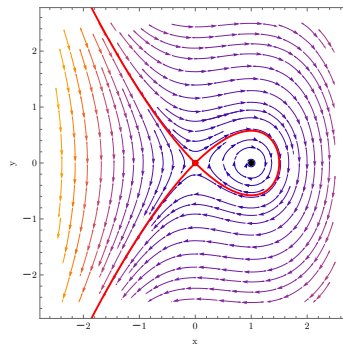
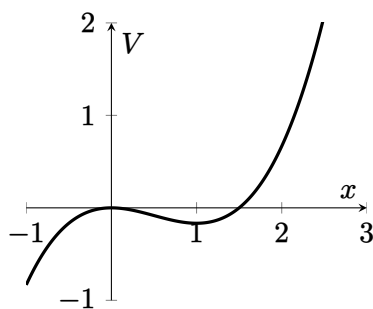
A2 Per uno studio qualitativo del moto, ricordiamo anzitutto che il moto è ammesso quando il punto materiale ha energia

$$E > \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.$$

Osserviamo ora che $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = -\infty$. La funzione $V(x)$ ha derivata prima $V'(x) = x(x-1) > 0$ per $x \in (-\infty, 0)$, mentre $V'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$ e $V'(x) > 0$ per $x > 1$. In x_0 e x_1 compaiono quindi rispettivamente un massimo e un minimo, tali che $V(x_1) = -\frac{1}{6} < V(x_0) = 0$.

Abbiamo quindi i seguenti regimi:

- per $E < V(x_1)$, il moto è non limitato e si svolge sull'intervallo $(-\infty, \hat{x}(E)]$ dove $\hat{x}(E) < 0$ è un punto di inversione;
- per $V(x_1) \leq E < V(x_0)$ sono ammesse orbite non limitate sull'intervallo $(-\infty, \hat{x}(E))$ dove $\hat{x}(E) < x_0$ è un punto di inversione, e orbite limitate $[x_-(E), x_+(E)]$ con $x_\pm(E)$ punti di inversione tali che $x_0 < x_-(E) \leq x_1 \leq x_+(E)$: in particolare, per $E = V(x_1)$ queste orbite si riducono al solo punto di equilibrio stabile x_1 ;
- per $E = V(x_0) = 0$ le traiettorie passano dal punto di equilibrio instabile e corrispondono alla separatrice nel piano delle fasi, costituita da traiettorie non limitate su $(-\infty, x_0)$ e $(x_0, x_+]$ per $x_+ > x_1$, soluzione di $V(x) = E = 0$ maggiore di x_1 , ovvero $x_+ = 3/2$ punto di inversione: il punto x_1 è raggiunto solo asintoticamente da moti su queste orbite;
- per $E > V(x_1)$ le traiettorie sono non limitate sull'intervallo $(-\infty, x_+(E)]$, con $x_+(E) > x_1$ punto di inversione.



A3 La separatrice corrisponde alle orbite nel piano delle fasi passanti per il punto di equilibrio instabile, ovvero ottenute per $E = V(x_0) = 0$. Nello spazio delle fasi (x, y) questa è data dall'equazione

$$y = \pm \sqrt{2(E - V(x))} = \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}, \quad x \leq x_+ = \frac{3}{2}.$$

Le orbite limitate sono su $(x_0, x_+]$. Esse sono associate ad una porzione del piano delle fasi di area

$$A = 2\sqrt{2} \int_0^{x_+} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}} x \, dx = 2 \int_0^{3/2} \sqrt{1 - \frac{2x}{3}} x \, dx$$

Introduciamo il cambio di variabili $u = 1 - \frac{2x}{3}$

$$A = \frac{9}{2} \int_0^1 \sqrt{u}(1-u) \, du = \frac{9}{2} \int_0^1 u^{1/2} \, du - \frac{9}{2} \int_0^1 u^{3/2} \, du = \frac{6}{5}.$$

Esercizio B.

B1 Una scelta naturale per la parametrizzazione lagrangiana del sistema è $q \equiv u$, di modo che la posizione del punto sia $\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\gamma}(u)$ e la sua velocità $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\gamma}'(u)\dot{u}$. Essendo

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ c \end{pmatrix},$$

l'energia cinetica è quindi

$$T(\dot{u}) = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{2} \dot{u}^2 (1 + c^2).$$

L'energia potenziale è dovuta alla sola molla,

$$V(u) = \frac{1}{2} k \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2} k (1 + cu^2).$$

La lagrangiana è quindi

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 (1 + c^2) - \frac{1}{2} k (1 + cu^2)$$

a cui corrispondono le equazioni di Eulero–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = (1 + c^2) \ddot{u} + ck u = 0.$$

B2 Per $k = 0$ la variabile u è ciclica. La quantità conservata associata è il momento coniugato $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \dot{u}(1 + c^2)$, ovvero \dot{u} si conserva durante il moto.

B3 Le equazioni del moto sono quelle di un oscillatore armonico,

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \quad \omega^2 := \frac{ck}{1 + c^2}.$$

Le condizioni iniziali corrispondono a $u(0) = 0$. Essendo $\dot{\mathbf{x}}(0) = \boldsymbol{\gamma}'(0)\dot{u}(0) = (0, 1, c)\dot{u}(0)$, dovendo essere questa quantità uguale a $(0, v_0, cv_0)$, allora $\dot{u}(0) = v_0$. Con queste condizioni iniziali

$$u(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

e dunque $\mathbf{x}(t) = (\boldsymbol{\gamma} \circ u)(t)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{1+c^2}{ck}}$.