

## Meccanica lagrangiana

### 1. Formalismo lagrangiano

**1.1. Sottovarietà regolari.** La necessità di sviluppare una adeguata teoria per sistemi vincolati di molti punti materiali, in particolare quando questi sono soggetti a vincoli olonomi fissi, ha motivato la nascita della *meccanica lagrangiana*. Questo formalismo ha permesso di inquadrare in un potente quadro geometrico la meccanica, e di individuare proprietà non banali del moto meno evidenti nel formalismo newtoniano.

Abbiamo già studiato il caso di un singolo punto materiale soggetto ad un vincolo olonomo unidimensionale, ovvero vincolato a muoversi su una *guida*. Abbiamo anche ridotto problemi più complessi, come quello di un punto materiale in campo centrale, allo stesso tipo di analisi. Il caso di  $N$  punti materiali è più complesso, perché ci costringe a studiare il sistema in uno spazio, in generale, di dimensione più alta. A questo scopo saranno utili i concetti introdotti riguardanti superfici in  $\mathbb{R}^3$  e la generalizzazione di tali concetti al caso di ipersuperfici in  $\mathbb{R}^{3N}$ . Supponiamo quindi di considerare un sistema di  $N$  punti  $P_1, \dots, P_N$ , in  $\mathbb{E}^3$ , le cui posizioni sono soggette in generale ad evoluzione rispetto alla variabile temporale  $t$ . Ogni punto  $P_i$  quindi è associato, secondo un certo riferimento, ad una certa terna  $\mathbf{x}_i$ : abbiamo già introdotto la concatenazione  $\mathbf{X} = \bigoplus_i \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{3N}$  che rappresenta la configurazione del sistema. Se qualsivoglia configurazione è ammessa, il sistema si dice *libero*, e lo spazio esplorabile da  $\mathbf{X}$  è effettivamente  $\mathbb{R}^{3N}$ . Viceversa, un sistema *vincolato* presenta una condizione su  $\mathbf{X}$  da rispettare durante tutta l'evoluzione. Considereremo vincoli *olonomi* nella forma

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0},$$

dove  $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N-n}$ , con  $n \leq 3N$ . Si noti che il vincolo è in generale *mobile*, ovvero l'applicazione  $\boldsymbol{\varphi}$  dipende, in generale, esplicitamente dal tempo. Il vincolo determinerà un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{3N}$ , eventualmente dipendente dal tempo, che è lo *spazio delle configurazioni* del sistema,

$$(2.1) \quad \mathcal{M}(t) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}\}.$$

Nel caso in cui  $\mathcal{M}$  sia *indipendente* dal tempo, si dice che il vincolo è *scleronomo*, viceversa si dice *reonomo*. Sotto certe ipotesi, *che assumeremo soddisfatte*, il vincolo così introdotto identifica, in ogni istante di tempo  $t$ , una *sottovarietà regolare* su cui il sistema evolve che supporremo di dimensione  $n$ . Per precisare cosa intendiamo con questa affermazione, facciamo una breve digressione.

1.1.1. *Sottovarietà regolari.* Diamo anzitutto questa definizione preliminare.

**DEFINIZIONE 1.1** (Sottovarietà regolare). Sia  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^K$  aperto connesso, con  $K > 1$ , e sia  $\boldsymbol{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $1 \leq s < K$ , una applicazione di classe  $\mathcal{C}^p(\mathcal{A})$ , con  $p \geq 2$ . Sia anche definito l'insieme  $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  supposto non vuoto. Se la matrice jacobiana dell'applicazione  $\boldsymbol{\varphi}$  ha rango  $s$  in ogni punto di  $\mathcal{M}$ , allora  $\mathcal{M}$  si dice sottovarietà regolare di dimensione  $n = K - s$  di  $\mathbb{R}^K$  e ordine  $p$ .

Vale il seguente teorema.

**TEOREMA 1.1.** *Sia data una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale di ordine  $p \geq 2$   $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^K$ ,  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^K$ . Allora, per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$  esiste un intorno aperto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  ove è definita unica una funzione iniettiva  $\boldsymbol{\chi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^K$  differenziabile con continuità tale che  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  per un certo  $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{V}$  e tale che  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{M}$  per  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo l'insieme finito  $\mathcal{I}$  di tutte le funzioni iniettive  $h : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, K\}$ . Per ciascuna di esse, introduciamo l'insieme

$$\mathcal{U}_h := \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{A} : \det \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_{h(b)}}(\mathbf{x}) \right)_{\substack{1 \leq a \leq s \\ 1 \leq b \leq s}} \neq 0 \right\}.$$

Dato che il rango dello jacobiano di  $\boldsymbol{\varphi}$  è massimo in ogni punto di  $\mathcal{M}$ , allora  $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{h \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_h$ . Supponiamo quindi che  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_h \cap \mathcal{M}$ , e in particolare che  $h(b) = n + b$  per  $b = 1, \dots, s$  (possiamo sempre riordinare le variabili in modo che questo sia verificato). Scriviamo  $(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathbf{q}$  e  $(x_{n+1}, \dots, x_K) = \mathbf{y}$ , di modo che  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{y})$  e in particolare indichiamo  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0)$ . Per il teorema della funzione implicita, la condizione  $\det \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$  implica che esiste un aperto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  contenente  $\mathbf{q}_0$ , un aperto  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{K-n}$  contenente  $\mathbf{y}_0$  ed un'unica funzione  $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  di classe  $\mathcal{C}^p$  tale che  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{y}_0$  e  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ . La funzione  $\boldsymbol{\chi}$  desiderata è quindi  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}))$ . Essa è iniettiva, dato che, dati  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathcal{V}$ ,  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}') \Leftrightarrow (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})) = (\mathbf{q}', \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}')) \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}'$ .  $\square$

**1.1.2. Spazio tangente e spazio normale.** Consideriamo una parametrizzazione locale  $\boldsymbol{\chi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  nella forma  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}))$ , come individuata dal teorema precedente in un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ . Allora

$$\text{rank}(\partial_a \chi_i(\mathbf{q}_0))_{ai} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \partial_1 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_1 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \partial_2 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_2 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \partial_n \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_n \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \end{pmatrix} = n, \quad \partial_a \chi_i(\mathbf{q}) := \frac{\partial \chi_i(\mathbf{q})}{\partial q_a}.$$

Gli  $n$  vettori  $\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  sono quindi *linearmente indipendenti* e sono una *base* per uno spazio che chiamiamo *spazio tangente* in  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} = \text{span}\{\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)\}_{a=1}^n.$$

Per spiegare questa terminologia, consideriamo una curva regolare su  $\mathcal{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{M}$  con  $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ . Questa può essere parametrizzata in un intorno di  $P$  in termini delle coordinate  $\mathbf{q}$ , di modo che  $\boldsymbol{\gamma}(u) \equiv (\boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q})(u)$ , dove  $\mathbf{q}(u)$  è la controimmagine di  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $\mathcal{V}$ , univocamente determinata essendo  $\boldsymbol{\chi}$  iniettiva e tale che  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ . Abbiamo quindi

$$\boldsymbol{\gamma}'(0) = \sum_{a=1}^n q'_a(0) \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0).$$

Si ha perciò che  $\boldsymbol{\gamma}'(0) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$  e in particolare si può intendere  $\mathbf{q}'(0)$  come il vettore delle componenti della tangente a  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $\mathbf{x}_0$  secondo la base  $\{\partial_a \boldsymbol{\chi}\}_a$ . Lo spazio tangente è quindi lo spazio in cui vivono i vettori tangenti alle curve in  $\mathbf{x}_0$  su  $\mathcal{M}$ , cioè lo spazio dei vettori tangenti ad  $\mathcal{M}$  in  $\mathbf{x}_0$ . L'unione *disgiunta* degli spazi tangenti di  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathbf{T}\mathcal{M} := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \{\mathbf{x}\} \times \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}.$$

Se  $n$  è la dimensione dello spazio tangente, la quantità  $K - n$  è la dimensione dello *spazio normale*: in un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ , infatti, esistono  $K - n$  vettori normali a  $\mathcal{M}$ , ovvero  $\{\nabla \varphi_j\}_{j=1}^{K-n}$ , e la condizione di rango massimo significa che tali vettori sono linearmente

indipendenti. Per vedere questo fatto, data come sopra una curva  $\gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{M}$  passante per  $\mathbf{x}_0 = \gamma(0) = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$ , abbiamo che

$$\frac{d}{du} \varphi_j(\gamma(u))|_{u=0} = \sum_{a=1}^n \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}_0), \partial_a \mathbf{x}(\mathbf{q}_0) \rangle q'_a(0) = 0,$$

per qualsivoglia curva regolare, ovvero  $\langle \nabla \varphi_j, \partial_a \mathbf{x} \rangle = 0$ : i vettori  $\nabla \varphi_j$  calcolati in un certo punto  $P$  sono perciò effettivamente normali allo spazio tangente. Scriveremo

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M})^\perp = \text{span}\{\nabla \varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^{K-n}.$$

**1.1.3. Cambio di parametrizzazione.** La parametrizzazione di una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M}$  in un intorno di un suo punto  $\mathbf{x}_0$  non è unica, tuttavia lo spazio tangente e lo spazio normale in  $\mathbf{x}_0$  non dipendono dalla parametrizzazione. Supponiamo di disporre di una parametrizzazione  $\mathbf{x}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ , di modo che  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$ , e sia  $\phi: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$ , con  $\hat{\mathcal{V}} \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto connesso, un  $C^p$ -diffeomorfismo, ovvero una applicazione biettiva con derivate continue fino all'ordine  $p$ , la cui inversa esiste e ha derivate continue fino all'ordine  $p$ . La mappa  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ \phi: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{M}$  è anch'essa una parametrizzazione di  $\mathcal{M}$ . Se dunque il punto  $P$  ha coordinate  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{q}_0)$  e  $\mathbf{q}_0 = \phi(\hat{\mathbf{q}}_0)$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b}(\phi(\hat{\mathbf{q}}_0)) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0),$$

il che implica che  $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$  e d'altronde, essendo la matrice jacobiana della funzione  $\phi$  di rango  $n$ ,  $\text{rank} \left( \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \right)_{ai} = n$  ovvero  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} = \text{span} \left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \right\}_a$ . Di conseguenza, anche lo spazio normale rimane inalterato.

**1.1.4. Tensore metrico.** Una sottovarietà regolare  $\mathcal{M}$  di dimensione  $n$  può essere naturalmente dotata di una *struttura riemanniana* indotta dalla metrica naturale su  $\mathbb{R}^K$ . Supponiamo infatti di avere una curva regolare  $\gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbf{x}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{M}$ , di modo che  $\gamma(0) = \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ , dove  $\mathbf{x}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrizzazione di  $\mathcal{M}$  in un intorno del punto  $P$  di coordinate  $\mathbf{x}$ . Sia  $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1} \circ \gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{V}$ . L'infinitesimo di lunghezza quadra della curva in un intorno di  $\mathbf{x}$  si può scrivere

$$ds^2 = \langle d\gamma, d\gamma \rangle = \sum_{ab} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_b} \right\rangle dq_a dq_b = \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) dq_a dq_b =: (d\mathbf{q}, d\mathbf{q})$$

dove abbiamo introdotto il *tensore metrico*  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  in ogni punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  localmente data da

$$g_{ab}(\mathbf{q}) := \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_b} \right\rangle$$

e la *forma quadratica* tra due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) := \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) v_a u_b, \quad (\bullet, \bullet): \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} \times \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

La forma introdotta è simmetrica definita positiva e permette di riscrivere per esempio la lunghezza  $\ell$  della curva come

$$\ell = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \sqrt{(\mathbf{q}'(u), \mathbf{q}'(u))} du.$$

La matrice  $g_{ab}$  si trasforma come un *tensore* quando si esegue un cambio di variabili. Quel che questa espressione significa è che, supponendo che  $\mathbf{q} = \phi(\hat{\mathbf{q}})$  con  $\phi$  diffeomorfismo come sopra,



FIGURA 1. Proiezione stereografica.

allora ad essa sarà associata una diversa matrice  $\hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{q}})$  che però è legata alla precedente da una trasformazione nella forma

$$\hat{g}_{ab}(\hat{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_a}, \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_b} \right\rangle = \sum_{uv} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_u}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_v} \right\rangle \frac{\partial \phi_u(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_a} \frac{\partial \phi_v(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_b} = \sum_{uv} g_{uv}(\mathbf{q}) \frac{\partial q_u}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}) \frac{\partial q_v}{\partial \hat{q}_b}(\hat{\mathbf{q}}).$$

**Esempio 2.1** — La sfera  $\mathbb{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$$

è una sottovarietà regolare di dimensione 2, essendo

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = (2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3)$$

di rango 1 in ogni punto di  $\mathbb{S}^2$ . La mappa data da

$$\mathbf{x}_+(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ \|\mathbf{q}\|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di  $\mathbb{S}^2$  eccezion fatta per il polo nord  $\mathbf{z}_+ = (0, 0, 1)^\top$ , mentre la mappa

$$\mathbf{x}_-(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ 1 - \|\mathbf{q}\|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di  $\mathbb{S}^2$  eccezion fatta per il polo sud  $\mathbf{z}_- = (0, 0, -1)^\top$ . Ciascuna delle due mappe introdotte corrisponde ad una *proiezione stereografica* della sfera, vedasi Fig. 1. Con un po' di algebra, si trova che in entrambi i casi

$$g_{ab}(\mathbf{q}) = \frac{4}{(1 + \|\mathbf{q}\|^2)^2} \delta_{ab}.$$

**1.2. Coordinate lagrangiane e principio di d'Alembert–Lagrange.** Nel contesto della meccanica, abbiamo a che fare come abbiamo visto con condizioni olonome nella forma dell'Eq. (2.1). Nel seguito, assumeremo sempre che  $\mathcal{M}(t)$  sia una sottovarietà regolare di dimensione  $n$  in uno spazio di dimensione  $3N$  per ogni valore di  $t$ , ovvero che in ogni istante di tempo  $t$  valga

$$3N - n = \text{rank} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(\mathbf{X}, t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3N \\ 1 \leq j \leq 3N - n}} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}(t).$$



FIGURA 2. Asta rotante con punto materiale vincolato su di essa.

Per quanto detto sopra, in un intorno di un punto  $P$ , individuato da  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}(t)$ , sarà possibile introdurre (non univocamente)  $n$  parametri, detti nel contesto della meccanica *coordinate lagrangiane*,  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ , in cui potremo ri-esprimere localmente le vecchie variabili cartesiane, ovvero  $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$  per una opportuna<sup>1</sup>  $\boldsymbol{\chi}(\bullet, t): \mathcal{V}(t) \rightarrow \mathcal{M}(t)$  in ciascun istante. Si noti che se il vincolo è reonomo  $\boldsymbol{\chi}$  dipende dal tempo  $t$ ; viceversa, se il vincolo è scleronomo, allora semplicemente  $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$ . In seguito assumeremo che la dipendenza di  $\boldsymbol{\chi}$  dal tempo sia tale che  $\boldsymbol{\chi}$  abbia derivate continue almeno fino alla seconda in  $t$ .

La *traiettoria* del sistema su  $\mathcal{M}(t)$  si scrive *localmente* come

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(t), t)$$

per un opportuno set di coordinate lagrangiane, dove  $\mathbf{q}(t)$  incorpora la dipendenza dal tempo delle coordinate lagrangiane del sistema durante l'evoluzione. Lo spazio in cui varia la coppia  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  è detto *spazio delle fasi* ed esiste una corrispondenza tra l'evoluzione della coppia  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e l'evoluzione di  $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ . Se infatti da un lato  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , potremo inoltre scrivere

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \partial_a \mathbf{X} + \partial_t \mathbf{X} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) + \partial_t \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t),$$

che esibisce due termini diversi: il primo,

$$\hat{\mathbf{V}} := \sum_a \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in T_P \mathcal{M}(t)$$

è detto *velocità virtuale* e vive nello spazio tangente ad  $\mathcal{M}(t)$  in  $P$ , punto individuato da  $\mathbf{X}(t)$ . Si tratta del contributo alla velocità a *vincolo fisso*:  $\hat{\mathbf{V}}$  è effettivamente tangente a  $\mathcal{M}(t)$  nel senso usuale nell'istante di tempo  $t$ . Il secondo termine,  $\partial_t \mathbf{X} \equiv \partial_t \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$  è dovuto invece alla sola dipendenza del vincolo dal tempo: questa velocità è detta *velocità di trascinamento* ed è nulla se i vincoli sono scleronomi.

**Esempio 2.2** — Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi lungo un'asta infinita passante per l'origine in un riferimento cartesiano come in Fig. 2. L'asta mantiene un angolo fisso  $\alpha \in (0, \pi/2)$  rispetto alla direzione  $x_3$ , mentre precece attorno a tale asse, in modo che l'angolo tra l'asse  $x_1$  e il piano contenente l'asse  $x_3$  e l'asta sia  $\theta = \omega t$  per un qualche  $\omega \in \mathbb{R}$ . L'asta mobile è in effetti una sottovarietà

<sup>1</sup>In seguito tratteremo in generale  $\boldsymbol{\chi}$  come una funzione definita su un dominio in  $\mathbb{R}^n$  di cui ignoreremo la dipendenza temporale e dipendente dal tempo. La trattazione di varietà dipendenti dal tempo è un argomento interessante che va però oltre lo scopo del corso, essendo la sua trattazione rigorosa non particolarmente utile ai fini degli argomenti trattati qui.

regolare di  $\mathbb{R}^3$ , spazio delle configurazioni del punto, su cui quest'ultimo è vincolato. Essa è identificata dalla condizione  $\mathcal{M}(t): \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ , dove

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin \omega t x_1 - \cos \omega t x_2 \\ x_1 - \tan \alpha \sin \omega t x_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matrice jacobiana associata è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ 1 & 0 & -\tan \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 in ogni punto di  $\mathcal{M}(t)$  e per ogni  $t$ , per cui  $\mathcal{M}(t)$  ha dimensione 1. Una applicazione  $\boldsymbol{\chi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  che permette di parametrizzare globalmente  $\mathcal{M}(t)$  è la seguente

$$\boldsymbol{\chi}(q, t) = \begin{pmatrix} q \sin \alpha \cos \omega t \\ q \sin \alpha \sin \omega t \\ q \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

In altre parole,  $q$  è la distanza (con segno) lungo l'asta di  $P$  dall'origine. In particolare, la traiettoria  $\mathbf{x}(t)$  del punto  $P$  può essere parametrizzata come  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(q, t)$ , con  $q$  dipendente dal tempo, di modo che

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} = \dot{q} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \omega t \\ \sin \alpha \sin \omega t \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + q \omega \sin \alpha \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo termine, come si vede, è diretto come  $\mathbf{x}$ , ovvero nella direzione dell'asta, e corrisponde infatti alla componente della velocità *tangente* a  $\mathcal{M}(t)$  nell'istante  $t$ . Il secondo termine, invece, è ortogonale all'asse  $x_3$  (tangente alla circonferenza tratteggiata in figura) ed è esclusivamente dovuto al fatto che l'asta è in movimento (è infatti identicamente nullo per  $\omega = 0$ ).

In un sistema di  $N$  punti materiali vincolati sul  $\mathcal{M}(t)$ , ciascun punto  $(P_i, m_i)$  sarà sottoposto ad una forza totale  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(v)}$ , dove  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  è il contributo *attivo* ed  $\mathbf{F}_i^{(v)}$  è il contributo vincolare, dovuto proprio alla presenza del vincolo. Possiamo concatenare tali contributi vincolari in un unico vettore di dimensione  $3N$  scrivendo  $\mathbf{F}^{(v)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(v)}$ , similmente possiamo concatenare le forze attive  $\mathbf{F}^{(a)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(a)}$  e introdurre  $\mathbf{Q} := \bigoplus_i (m_i \mathbf{v}_i)$ , di modo che

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)}.$$

La *potenza* espressa da queste reazioni vincolari è

$$\Pi^{(v)} = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{F}_i^{(v)}, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle = \langle \mathbf{F}^{(v)}, \dot{\mathbf{X}} \rangle = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle = \langle \hat{\mathbf{V}}, \mathbf{F}^{(v)} \rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle.$$

Il primo contributo nell'espressione precedente si dice *potenza virtuale della reazione vincolare*. Il suo valore è discriminante, come già abbiamo anticipato per il caso del singolo punto materiale, per distinguere tra vincoli lisci e scabbi nel caso di sistemi di punti soggetti a vincoli olonomi.

**DEFINIZIONE 1.2** (Principio di d'Alembert–Lagrange). Un sistema olonomo si dice *a vincoli lisci* se la potenza virtuale del sistema di reazioni vincolari è nulla in qualsiasi istante e in corrispondenza di qualunque stato cinematico del sistema. Ne consegue che se il sistema è soggetto a sole forze conservative e vincoli lisci e fissi, la legge di conservazione dell'energia resta valida.

In altre parole, in un vincolo liscio per ogni  $\delta \mathbf{X} = \bigoplus_i \delta \mathbf{x}_i \in T_P \mathcal{M}(t)$ ,  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0$ . Il principio può essere trovato espresso in forme diverse. Una di queste si ottiene osservando che  $\mathbf{F}_i^{(v)} =$

$\dot{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}$ , per cui

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{Q}}_i, \delta \mathbf{x}_i \right\rangle = \langle \mathbf{F}^{(a)} - \dot{\mathbf{Q}}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0,$$

dove  $\delta \mathbf{X} \in T_P \mathcal{M}(t)$  viene detto *spostamento virtuale*, di modo che  $\delta \mathbf{x}_i$  sia la terna in  $\delta \mathbf{X}$  corrispondente al punto  $P_i$ . Come nel caso del singolo punto materiale, perciò, questa condizione equivale a richiedere che  $\mathbf{F}^{(v)}$  viva nello spazio normale *in ogni istante di tempo* e generalizza il concetto di vincolo liscio al caso di moto di un sistema su sottovarietà. Come si vede, il principio ha il grande pregio di *non* dipendere dalle forze vincolari, ma solo dalla geometria del vincolo e dalle forze attive.

**1.3. Equazioni di Lagrange.** Cerchiamo ora di riscrivere le equazioni del moto e le quantità derivate nel caso del punto materiale in questo contesto più generale in cui il sistema, che immaginiamo composto da  $n$  punti materiali  $\{(P_k, m_k)\}_{k=1}^N$ , si muove su una sottovarietà di dimensione  $n \leq 3N$ , nell'assunzione di aver a che fare con vincoli olonomi. Anzitutto riscriviamo opportunamente l'energia cinetica: ricordando che localmente  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , essa può essere riscritta come

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \dot{\mathbf{x}}_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b A_{ab}(\mathbf{q}, t) + \sum_a \dot{q}_a B_a(\mathbf{q}, t) + C(\mathbf{q}, t).$$

dove abbiamo denotato con

$$A_{ab}(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle, \quad B_a(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \right\rangle, \quad C(\mathbf{q}, t) := \frac{1}{2} \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t} \right\rangle.$$

Qui occorre osservare che  $\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\chi}_k(\mathbf{q}, t)$ , dove  $\boldsymbol{\chi}_k$  è il vettore tridimensionale che individua le coordinate del punto  $P_k$ . L'espressione si riscrive più semplicemente come

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \mathbf{B}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{q}} \rangle + C(\mathbf{q}, t).$$

Nel caso di *vincoli fissi*, localmente  $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$  per opportune variabili lagrangiane, e quindi i termini in  $\mathbf{B}$  e  $C$  sono nulli. La matrice  $\mathbf{A}$ , a volte detta *matrice di massa*, ha l'importante proprietà stabilita dal seguente teorema.

**TEOREMA 1.2.** *La forma in  $\mathbf{v}$*

$$\hat{T}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \mathbf{v} \rangle$$

(intesa a  $\mathbf{q}$  e  $t$  fissati) è quadratica simmetrica definita positiva, ovvero  $\mathbf{A}$  è simmetrica definita positiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Basta semplicemente esplicitare la forma in termini di velocità virtuali:  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \right\rangle > 0$ , dove abbiamo indicato con  $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} := \sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}$ . Si noti che la disuguaglianza è stretta: la quantità può essere zero solo se tutti i vettori  $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}$  sono nulli, ma in questo caso lo sarebbe anche  $\sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \mathbf{x}_k = \sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \boldsymbol{\chi}_k$ , cosa impossibile (per via della lineare indipendenza) a meno che  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . La simmetria infine si nota osservando direttamente che  $A_{ab} := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle = A_{ba}$ .  $\square$

Dall'energia cinetica è possibile definire anche un vettore  $\mathbf{p}$  di variabili coniugate a  $\mathbf{q}$ , che raccoglie i cosiddetti *momenti cinetici* o *coniugati*

$$p_a := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a.$$

Essi hanno la caratteristica di essere le *componenti lagrangiane* del vettore  $\mathbf{Q}$ , ovvero la proiezione di  $\mathbf{Q}$  sullo spazio tangente,

$$\langle \mathbf{Q}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_k m_k \sum_b \dot{q}_b \langle \partial_b \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle + \sum_k m_k \langle \partial_t \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a \equiv p_a.$$

Derivando ulteriormente  $p_a$  rispetto al tempo si ha

$$\dot{p}_a = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) = \left\langle \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle.$$

L'ultimo termine a destra si può scrivere come

$$\left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \sum_k m_k \left\langle \dot{\mathbf{x}}_k, \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_k}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}.$$

In definitiva abbiamo ottenuto l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = f_a, \quad f_a := \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle.$$

Di nuovo,  $f_a$  sono le componenti lagrangiane della forza totale (anche dette *forze generalizzate* e a volte indicate con  $\mathcal{Q}_a$  — eviteremo però questa notazione dato che potrebbe indurre in confusione con la quantità di moto). Quelle ottenute per  $a = 1, \dots, n$  sono le *equazioni di Lagrange*.

1.3.1. *Forze conservative e vincoli lisci.* Più interessante è il caso in cui le forze attive siano *conservative*, ovvero che esista un potenziale  $V$  tale che

$$\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V.$$

In questo caso, si ha che il contributo dovuto alla forza attiva  $\mathbf{F}^{(a)}$  nel termine destro dell'equazione di Lagrange è

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \left\langle \nabla V, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_a}$$

dove, nell'ultimo passaggio,  $V$  è da intendersi ristretta alla varietà, ovvero  $V = V(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t))$ . Le equazioni di Lagrange diventano così

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \left\langle \mathbf{F}^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle,$$

dove abbiamo introdotto la funzione *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t).$$

Una lagrangiana nella forma sopra può più in generale ottenersi se esiste una funzione  $\hat{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  tale che

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a},$$

quindi non esclusivamente con forze conservative: anche in questo caso si ottengono le stesse equazioni di Lagrange nella forma in Eq. (2.2). Una funzione  $\hat{V}$  che soddisfi le equazioni la condizione precedente è detta *potenziale generalizzato*.

Se i vincoli sono lisci,  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = 0$  per via del principio di d'Alembert, e l'equazione di Lagrange assume la forma molto compatta, e assolutamente fondamentale

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0.$$



La corrispondenza tra equazioni del moto e lagrangiana *non* è biunivoca, ovvero lo stesso moto può essere descritto da più lagrangiane. Supponiamo infatti di considerare

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d h(\mathbf{q}, t)}{d t}$$

per una generica funzione  $h(\mathbf{q}, t)$  differenziabile di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  rispetto a tutti i suoi argomenti. Allora, osservando che

$$\frac{d h(\mathbf{q}, t)}{d t} = \sum_a \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t},$$

possiamo verificare che

$$\frac{d}{d t} \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_a} = \frac{d}{d t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{d}{d t} \left( \frac{\partial h}{\partial q_a} \right) - \sum_b \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial q_b} \dot{q}_b - \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial t} = \frac{d}{d t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}.$$

**Esempio 2.3** (Potenziali generalizzati) — Un caso particolare ma importante di potenziale generalizzato è quello utile per lo studio del moto di punti materiali carichi in campo elettromagnetico. Si assume che esistano due campi  $\mathbf{E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{B}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiti in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^3$ , di modo che la forza applicata ad un punto materiale  $P$  di carica  $e$  sia espressa dalla *forza di Lorentz*

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \wedge \mathbf{B} \right)$$

dove  $c$  è la velocità della luce e  $\dot{\mathbf{x}}$  la velocità del punto. I campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$  devono soddisfare le *equazioni di Maxwell*, che in presenza di una densità di carica  $\rho$  e di una densità di corrente  $\mathbf{j}$  nello spazio assumono la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Immaginiamo che la particella sia soggetta *esclusivamente* all'azione di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$ : in questo caso, quindi, non sarà necessario introdurre coordinate lagrangiane: potremo utilizzare  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  essendo  $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^3$ .

La prima equazione di Maxwell permette di scrivere  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ , per un certo campo  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  detto *potenziale vettore*. La seconda equazione può quindi essere scritta come

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

per una certa funzione scalare  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . La forza di Lorentz si può quindi riscrivere

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right).$$

Ora utilizziamo l'identità formale  $\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) = \nabla \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \nabla \rangle \mathbf{b}$  per riscrivere

$$\dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \langle \dot{\mathbf{x}}, \nabla \rangle \mathbf{A} = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{d \mathbf{A}}{d t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Sostituendo nell'espressione di  $\mathbf{F}$  abbiamo

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{c} \frac{d \mathbf{A}}{d t} \right) = -\nabla \hat{V} + \frac{d}{d t} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad \hat{V} := \varphi - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle.$$

Detta  $m$  la massa del punto materiale, la lagrangiana è quindi

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - e \left( \varphi(\mathbf{x}) - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle \right).$$

**Esempio 2.4** (Forze dissipative) — Si osserva sperimentalmente che, nel caso di vincoli scabbi, una possibilità è che la reazione vincolare  $\mathbf{F}^{(v)}$  abbia una componente diretta lungo il moto nella forma  $\mathbf{F}_{k,t}^{(v)} = -\mu_k \dot{\mathbf{x}}_k$  per un qualche coefficiente di attrito dinamico  $\mu_k > 0$ . Abbiamo già studiato forze di

questo tipo discutendo il caso unidimensionale. Una forza siffatta non soddisfa il principio di d'Alembert e produce nel contributo nell'equazione di Lagrange

$$\left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \sum_k \sum_b \mu_k \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle$$

che può essere pensata come il risultato di un “potenziale” delle variabili cinetiche, detto *funzione di dissipazione di Rayleigh*,

$$\mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2} \sum_k \sum_{ab} \mu_k \dot{q}_a \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a}.$$

Se le reazioni vincolari dissipative sono solo in questa forma, allora le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a} = 0.$$

Un esempio di applicazione di questo formalismo è il caso di un punto materiale su una guida soggetto a una forza armonica e ad uno smorzamento, che abbiamo già studiato. Se  $q$  è l'ascissa curvilinea del punto materiale di massa  $m$  lungo una guida, e se il punto è soggetto ad una forza elastica di modo che vi sia applicato un potenziale  $V(q) = \frac{1}{2} k q^2$ , la lagrangiana sarà

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2.$$

Questa lagrangiana produce, come atteso, le equazioni del moto dell'oscillatore armonico. La presenza di un termine di smorzamento si può includere considerando la funzione di Rayleigh

$$\mathcal{R}(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sigma \dot{q}^2,$$

con  $\sigma > 0$ , di modo che le equazioni di Eulero–Lagrange siano quelle che abbiamo già visto per il moto armonico smorzato in Eq. (1.8) (in assenza di forzante), ovvero

$$(2.4) \quad m \ddot{q} + \sigma \dot{q} + k q = 0.$$

## 2. Equilibrio ed oscillazioni

**2.1. Spazio delle fasi.** Se introduciamo il vettore  $\mathbf{f} = (f_a)_a$  avente come componenti  $f_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \langle \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \partial_a \mathbf{X}(\mathbf{q}, t) \rangle$ , le equazioni di Lagrange possono essere scritte in una forma piuttosto compatta come

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} - \left( \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{f}.$$

Nell'espressione precedente, abbiamo usato le notazioni compatte

$$\left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)_a = \sum_b \dot{q}_b \frac{\partial A_{ab}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle = \sum_u \frac{\partial B_u}{\partial \mathbf{q}} \dot{q}_u.$$

Inoltre, indichiamo con  $\frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  il *gradiente rispetto a  $\mathbf{q}$*  di una funzione scalare  $h$  dipendente da  $\mathbf{q}$ . Osservando ora che  $\mathbf{A}$  è una matrice definita positiva, possiamo invertirla e scrivere le equazioni di Lagrange in forma normale

$$(2.5) \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1} \left( \mathbf{f} - \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B} + \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right).$$

Si tratta quindi di un insieme di equazioni del secondo ordine *in forma normale*, la cui integrazione locale richiede, secondo il teorema di Cauchy, un insieme di condizioni iniziali  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  e

$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{v}_0$ , purché il termine a destra sia sufficientemente regolare, ovvero lipschitziano. Nell'analisi che segue assumeremo che tali ipotesi di regolarità siano verificate, e che quindi la soluzione al problema di Cauchy esista unica, a meno che non sia diversamente specificato.

2.1.1. *Sistemi autonomi.* In questa sezione, ci focalizzeremo in particolare sui *sistemi autonomi*, ovvero tali da non esibire una dipendenza esplicita dal tempo né in  $\mathcal{M}$  né nelle forze applicate. In questo caso quindi  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  e  $C = 0$ . Le equazioni di Lagrange possono essere così scritte nella forma

$$(2.6) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) := [\mathbf{A}(\mathbf{q})]^{-1} \left( \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle \right).$$

Si chiama *spazio delle fasi* lo spazio  $2n$  dimensionale delle coppie  $(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ . In questo spazio, indichiamo con

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0) := (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$$

la soluzione del sistema di equazioni ottenuta per il tempo  $t$  utilizzando le condizioni iniziali  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$  per  $t = 0$ : in altre parole,  $\mathbf{g}^t$  produce il *flusso di fase* associato al sistema in coordinate locali.

**2.2. Funzioni di Ljapunov.** Il concetto di spazio delle fasi permette di introdurre il concetto di *equilibrio* e di *stabilità secondo Ljapunov*. Fissiamo anzitutto la notazione: indichiamo con  $\bar{\mathcal{B}}_r(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} : \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq r\}$  la palla chiusa centrata in  $\mathbf{z}_0$ .

DEFINIZIONE 2.1. Un punto  $\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0) \in \mathcal{M}$ , con  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ , è detto *di equilibrio* se la coppia  $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  nello spazio delle fasi è soluzione del problema in Eq. (2.6),  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Un punto di equilibrio  $\mathbf{X}_0$  è *stabile secondo Ljapunov* se per ogni  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon > 0$ , esiste  $\bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$ , tale che

$$\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \leq \delta \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0), \quad \forall t > 0.$$

In particolare, il punto si dice *asintoticamente stabile* se esiste  $\bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V}$  tale che

$$\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| = 0.$$

Diversamente si dice *instabile*.

TEOREMA 2.1 (Ljapunov). Sia  $\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  punto di equilibrio del sistema. Se esiste una funzione  $\Lambda \in C^1(\Omega)$ , detta *funzione di Ljapunov*, su un intorno  $\Omega$  di  $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  tale che

- (1)  $\Lambda(\mathbf{z}) > \Lambda(\mathbf{z}_0) \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ ;
- (2) per  $t \geq 0$  e per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega$ , vale

$$\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} \leq 0$$

allora  $\mathbf{z}_0$  è di equilibrio stabile. In particolare, se  $\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} < 0$  per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ , il punto  $\mathbf{z}_0$  è *asintoticamente stabile*.

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo, senza perdere in generalità, che  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = 0$ . Sia dunque  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \subset \Omega$ : per il teorema di Weierstrass, essendo la sua frontiera  $\partial \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$  una superficie sferica chiusa e limitata,  $\Lambda$  ammette un minimo su  $\partial \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ , sia esso  $2\lambda = \min_{\mathbf{z} \in \partial \bar{\mathcal{B}}} \Lambda(\mathbf{z}) > 0$ . Definiamo l'insieme

$$\Omega_\lambda = \{\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) : \Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda\}.$$

Questo insieme è interno a  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ : se così non fosse, esisterebbe  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \cap \partial \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ , che è un assurdo essendo, per  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda$ ,  $\Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda < \min_{\mathbf{x} \in \partial \bar{\mathcal{B}}} \Lambda(\mathbf{x}) = 2\lambda$ . Inoltre,  $\mathbf{z}_0 \in \Omega_\lambda$ , che è tale che

$$\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda,$$

per via del fatto che  $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) \leq \lambda \quad \forall t \geq 0$ . Essendo ora  $\Lambda$  continua per ipotesi, esiste un intorno sferico chiuso  $\bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0)$  tale che  $\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda$ , e in particolare vi sarà un  $\delta > 0$  tale

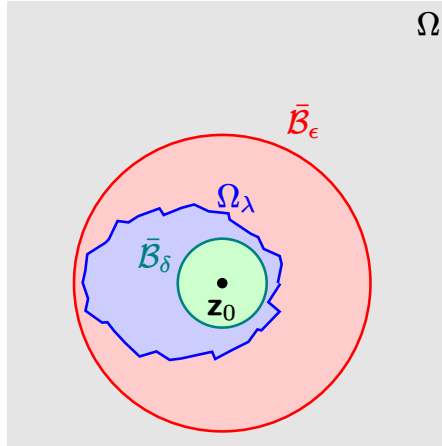


FIGURA 3. Illustrazione pittorica degli interni nella dimostrazione del teorema di Ljapunov.

per cui  $\bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \Omega_\lambda$  (si noti che  $\mathbf{z}_0$  è interno a  $\Omega_\lambda$ : diversamente esisterebbe un suo intorno arbitrariamente piccolo con punti aventi  $\Lambda(\mathbf{z}) > \lambda$ ). Pertanto, ogni punto di tale intorno,  $\mathbf{z} \in \bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$ , ha  $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda \subset \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$  che prova la stabilità secondo Ljapunov.

Se la disuguaglianza sulla derivata è stretta, essendo  $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})$  monotona non crescente e inferiormente limitata in  $\Omega$ , per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \setminus \{\mathbf{z}_0\}$  esiste  $\bar{\lambda}(\mathbf{z}) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z})$ . Supponiamo che  $\bar{\lambda}(\mathbf{z}) \neq 0$ . Per via della continuità di  $\Lambda$ , esiste quindi un  $r < \epsilon$  tale che

$$\bar{B}_r(\mathbf{z}_0) \subset \Omega_{\bar{\lambda}(\mathbf{z})} := \{\mathbf{z}' \in \Omega_\lambda : \Lambda(\mathbf{z}') \leq \bar{\lambda}(\mathbf{z})\} \subseteq \Omega_\lambda \subset \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \quad \text{tale che} \quad \mathbf{z}' \in \bar{B}_r(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \Lambda(\mathbf{z}') \leq \bar{\lambda}(\mathbf{z}).$$

Il fatto che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \bar{\lambda}(\mathbf{z}) > 0$  implica che la traiettoria  $\mathbf{g}^t \mathbf{z}$  è esterna a  $\bar{B}_r$  per  $t \geq 0$ , ma sempre interna a  $\Omega_\lambda$  e quindi  $\bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ . Sia in particolare

$$-\eta := \max_{r \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon} \left. \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} \right|_{t=0} < 0.$$

Questo implica inoltre che  $\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} = \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^\tau(\mathbf{g}^t \mathbf{z}))}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \leq -\eta$ . Allora

$$\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \Lambda(\mathbf{z}) + \int_0^t \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z})}{d\tau} d\tau \leq \Lambda(\mathbf{z}) - \eta t,$$

che per  $t$  sufficientemente grande è una quantità negativa, contraddicendo il fatto che  $\Lambda$  sia inferiormente limitata.  $\square$

**2.2.1. Vincoli lisci e forze conservative.** Il caso dei vincoli lisci e forze conservative indotte da un potenziale  $V$  è particolarmente semplice da studiare: per un vincolo liscio infatti  $\mathbf{f} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$ . Vale il seguente

**TEOREMA 2.2.** *In un sistema olonomo soggetto a forze conservative indotte dal potenziale  $V$  e vincoli lisci, la configurazione  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è di equilibrio se e solo se  $\mathbf{q}_0$  è un punto critico del potenziale, ovvero  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sul punto  $\mathbf{z}_0$  così dato abbiamo che

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = -[\mathbf{A}(\mathbf{q}_0)]^{-1} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0).$$

Essendo  $\mathbf{A}$  definita positiva,  $\phi(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  se e solo se  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ .  $\square$

**TEOREMA 2.3** (Lagrange–Dirichlet). *Sia dato un sistema olonomo con vincoli lisci e fissi, e soggetto a forze conservative indotte da un potenziale  $V$  avente  $\mathbf{q}_0$  punto di equilibrio. Se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale isolato dell'energia potenziale, la corrispondente configurazione è stabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è una conseguenza immediata del teorema di Ljapunov. Basta infatti utilizzare come funzione di Ljapunov l'energia meccanica,

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q}) \equiv \Lambda(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

che in un sistema con vincoli olonomi lisci e fissi e soggetto a sole forze conservative si conserva, dunque  $\frac{d\Lambda}{dt} = 0$ . Inoltre, se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale isolato del potenziale, detto  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ , esiste un intorno  $\Omega$  di  $\mathbf{z}_0$  nello spazio delle fasi in cui, per  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{v})$  con  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0$ ,  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = V(\mathbf{q}_0) < V(\mathbf{q}) \leq \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle + V(\mathbf{q})$  per ogni  $\mathbf{q} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ . Analogamente, se  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{v}) \in \Omega$  con  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ,  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = V(\mathbf{q}_0) < \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle + V(\mathbf{q})$ , di modo che  $\Lambda(\mathbf{z}) > \Lambda(\mathbf{z}_0)$  per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega$ .  $\square$

Il teorema sopra è valido a maggior ragione nel caso in cui siano presenti forze dissipative, dato che l'energia durante il moto non potrà aumentare e anzi diminuirà strettamente: l'applicazione del teorema di Ljapunov in questo caso mostra che il minimo locale isolato è in particolare asintoticamente stabile. Una conseguenza di questo fatto, per esempio, è che, dato un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci le cui forze attive sono solo dovute alla gravità, le posizioni di equilibrio stabile sono minimi isolati della quota del baricentro.

**Esempio 2.5** (Oscillatore smorzato) — Abbiamo già introdotto il caso del moto dell'oscillatore smorzato e mostrato che può essere studiato per mezzo del formalismo lagrangiano se viene introdotta una opportuna funzione di Rayleigh. L'equazione del moto risultante per un punto materiale di massa  $m$  in moto unidimensionale è nella forma

$$m\ddot{q} + \sigma\dot{q} + kq = 0$$

dove  $\sigma > 0$  è un coefficiente di smorzamento e  $k > 0$  è una costante elastica opportuna. Abbiamo già studiato questo moto e sappiamo che  $q = 0$  è una posizione di equilibrio, e in particolare che essa è asintoticamente stabile. Vediamo come è possibile vedere questo fatto tramite una opportuna funzione di Ljapunov. In questo problema (e in molti altri casi) una naturale scelta per  $\Lambda$  è l'energia meccanica,

$$\Lambda \equiv E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2.$$

Questa funzione è nulla in  $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ . D'altra parte, in ogni punto di un qualunque intorno di tale punto si ha

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \dot{q}(m\ddot{q} + kq) = -\sigma\dot{q}^2 < 0.$$

Dal teorema sopra, il punto di equilibrio è quindi asintoticamente stabile.

**2.3. Piccole oscillazioni.** Supponiamo ora che  $\mathbf{q}_0$  sia un minimo isolato del potenziale di un sistema soggetto a vincoli fissi e lisci e forze attive conservative, ovvero, che esso corrisponda ad una configurazione di equilibrio stabile. La lagrangiana, in generale nella forma  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$ , può essere riscritta in termini di nuove variabili  $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  utilizzando una *approssimazione quadratica*. Anzitutto, possiamo sempre assumere  $V(\mathbf{q}_0) = 0$ . In un intorno di  $\mathbf{q}_0$ , quindi, potremo scrivere

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ab} (q_a - q_{a,0})(q_b - q_{b,0}) \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0) + o(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|^2) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} \rangle + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2)$$

dove abbiamo introdotto la matrice  $\hat{\mathbf{V}}$  di elementi

$$\hat{V}_{ab} := \frac{\partial^2 V_{ab}}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0).$$

L'idea è perciò di introdurre una lagrangiana che approssima  $\mathcal{L}$  in vicinanza di  $\mathbf{q}_0$  mantenendo solo termini quadratici in  $\xi$  e  $\dot{\xi}$ , ovvero nella forma

$$\hat{\mathcal{L}}(\xi, \dot{\xi}) := \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_0) \xi \rangle$$

dove abbiamo sostituito  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \rightarrow \hat{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(\mathbf{q}_0)$ . Questo sistema è di più semplice analisi, dato che le corrispondenti equazioni di Lagrange sono lineari,

$$(2.7) \quad \hat{\mathbf{A}} \ddot{\xi} + \hat{\mathbf{V}} \xi = 0.$$

Qui  $\hat{\mathbf{A}}$  è definita positiva per ipotesi in quanto matrice di massa, la seconda semidefinita positiva essendo  $\mathbf{q}_0$  un minimo locale isolato: *assumeremo in particolare che  $\hat{\mathbf{V}}$  sia definita positiva*. Sotto queste ipotesi, vale il seguente teorema.

**TEOREMA 2.4.** *Esiste una trasformazione lineare che disaccoppia il sistema in Eq. (2.7) in  $n$  oscillazioni armoniche indipendenti nella forma*

$$\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n$$

dove ciascun  $z_a$  è detto modo normale del sistema di frequenza propria  $\omega_a$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{S} \in \mathbf{O}(n)$  la matrice che diagonalizza  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{S} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{S}^\top = \text{diag}(\alpha_i)$ . Per ipotesi,  $\alpha_i > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Definiamo la radice di  $\hat{\mathbf{A}}$  come  $\hat{\mathbf{A}}^{1/2} := \mathbf{S}^\top \text{diag}(\sqrt{\alpha_i}) \mathbf{S}$ : essa è simmetrica definita positiva, e indicheremo con  $\hat{\mathbf{A}}^{-1/2}$  la sua inversa. Introduciamo la variabile

$$\mathbf{y} := \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \xi$$

che ci permette di riscrivere l'equazione  $\hat{\mathbf{A}} \ddot{\xi} + \hat{\mathbf{V}} \xi = 0$  come

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Omega} \mathbf{y} = 0 \quad \mathbf{\Omega} := \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{A}}^{-1/2}.$$

Ora possiamo osservare che  $\mathbf{\Omega}$  è anch'essa simmetrica e definita positiva, con  $n$  autovalori (non necessariamente distinti) positivi. In particolare, esiste una matrice ortogonale  $\mathbf{O} \in \mathbf{O}(n)$  tale che  $\text{diag}(\omega_a^2) = \mathbf{O}^\top \mathbf{\Omega} \mathbf{O}$ . Si noti che l'insieme  $\{\omega_a^2\}_{a=1}^n$  consiste delle  $n$  (non necessariamente distinte) soluzioni dell'equazioni  $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{A}}^{-1/2}) = 0$  che, nell'ipotesi  $\hat{\mathbf{V}} \prec 0$ , sono tutte positive. Introduciamo quindi un'ultima variabile  $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{y}$ : l'equazione diventa ora

$$\ddot{\mathbf{z}} - \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} = 0 \Leftrightarrow \ddot{z}_a - \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n.$$

In questa equazione le componenti di  $\mathbf{z}$  sono disaccoppiate e soddisfano ciascuna una equazione armonica con pulsazione  $\omega_i$ , come anticipato nella tesi. Le coordinate originarie si ottengono invertendo la trasformazione,  $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{y} = \mathbf{O}^\top \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \xi \Rightarrow \xi = \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \mathbf{O} \mathbf{z}$ .  $\square$

Come ultima osservazione, notiamo che l'energia meccanica del sistema approssimato ha una espressione piuttosto semplice. Seguendo le trasformazioni descritte nel teorema, infatti, essa vale

$$\hat{E} := \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, \hat{\mathbf{V}} \xi \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{\Omega} \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} \rangle = \sum_{a=1}^n \left( \frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \right)$$

ovvero si riscrive come la somma di energie meccaniche di singoli oscillatori di massa unitaria e pulsazione  $\omega_a$ , disaccoppiati tra loro. In questa approssimazione, *ciascuno* di questi contributi si conserva separatamente, ovvero

$$\hat{E}_a := \frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \Rightarrow \frac{d\hat{E}_a}{dt} = (\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a) \dot{z}_a = 0,$$



FIGURA 4. Problema dei pendoli accoppiati (sinistra). Fenomeno dei battimenti per  $0 < k \ll 1$  (destra).

il che vuol dire che se  $E_a$  è l'energia associata all'oscillatore  $a$ -esimo nell'istante iniziale, durante tutto il moto varrà

$$-1 \leq \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2E_a}} \leq 1.$$

**Esempio 2.6** (Pendoli accoppiati) — Consideriamo due pendoli di uguale lunghezza e massa, tali per cui, in opportune unità,  $m = g = \ell = 1$ . Supponiamo che essi siano uniti da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Essi sono attaccati allo stesso punto, vincolati a oscillare in un piano verticale passante per il punto a cui sono agganciati. Siano  $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$  e  $q_2 \in (-\pi/2, \pi/2)$  gli angoli che i due pendoli descrivono rispetto alla verticale, come in Fig. 4. L'energia cinetica del sistema è

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

mentre quella potenziale è

$$V(\mathbf{q}) = -\cos q_1 - \cos q_2 + \frac{k}{2}((\cos q_1 - \cos q_2)^2 + (\sin q_2 - \sin q_1)^2).$$

Si vede facilmente che  $q_1 = q_2 = 0$  è di equilibrio *stabile*. Possiamo quindi studiare le piccole oscillazioni attorno a questa configurazione (per cui, nella notazione sopra, qui  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{q} - \mathbf{0} = \mathbf{q}$ ). In approssimazione di piccole oscillazioni e trascurando costanti additive irrilevanti,

$$\hat{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} \rangle, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica  $\mathbf{A}$  in questo problema è già diagonale, per cui nella notazione del teorema  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}$ , e possiamo semplicemente fare un cambio di base che diagonalizzi  $\hat{\mathbf{V}}$ : troviamo in particolare che

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto detto sopra, possiamo quindi introdurre una nuova variabile

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

che soddisfa le equazioni

$$\ddot{z}_1 + z_1 = 0, \quad \ddot{z}_2 + \omega^2 z_2 = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$\omega = \sqrt{1+2k}.$$

La soluzione di queste equazioni dipenderà dalle condizioni iniziali date.

Come anticipato, il moto nel piano  $(z_1, z_2)$  è circoscritto al rettangolo individuato dalle relazioni  $z_1^2 \leq 2\hat{E}_1$  e  $\omega^2 z_2^2 \leq 2\hat{E}_2$ . In questo rettangolo, la traiettoria del sistema è individuata da una curva bidimensionale  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (z_1(t), z_2(t))$  che produce una cosiddetta *figura di Lissajous*, tipicamente osservata negli oscillografi. Se  $\omega = 1$  la figura è una ellisse. Tra le curve con  $\omega = n$  vi sono dei polinomi, detto di *Chebyshev*, di interesse indipendente.

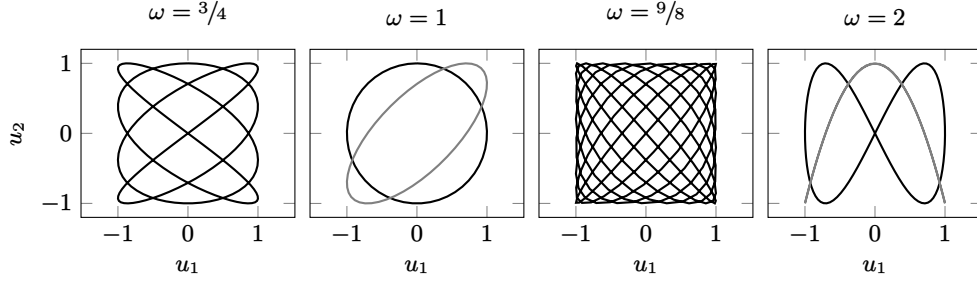


FIGURA 5. Esempi di figure Lissajous per diversi valori di  $\omega$ . Sono plottate le variabili riscalate  $u_a := \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2E_a}}$ .

Vediamo ora alcuni speciali soluzioni.

**Oscillazioni in fase:** Siano  $q_0, v_0$  due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = q_0, \\ q_2(0) = q_0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = \sqrt{2}q_0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \sqrt{2}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \sqrt{2}q_0 \cos t + \frac{\sqrt{2}v_0}{\omega} \sin t, \\ z_2(t) = 0. \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per  $z_2$  implica che per ogni  $t$  si ha  $q_1 = q_2$ , ovvero i due pendoli oscillano *in fase* con frequenza  $\omega_1 = 1$ .

**Oscillazioni in opposizione di fase:** Siano  $q_0, v_0$  due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = -q_0, \\ q_2(0) = q_0, \\ \dot{q}_1(0) = -v_0, \\ \dot{q}_2(0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = \sqrt{2}q_0, \\ \dot{z}_1(0) = 0, \\ \dot{z}_2(0) = \sqrt{2}v_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = 0, \\ z_2(t) = \sqrt{2}q_0 \cos(\omega t) + \sqrt{2}v_0 \sin(\omega t). \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per  $z_1$  implica che per ogni  $t$  si ha  $q_1 = -q_2$ , ovvero i due pendoli oscillano *in opposizione di fase* con frequenza  $\omega = \sqrt{1+2k} > 1$ .

**Trasferimento di energia:** Sia  $v_0$  dato e consideriamo infine le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = 0, \\ q_2(0) = 0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin t \\ z_2(t) = -\frac{v_0}{\omega\sqrt{2}} \sin \omega t. \end{cases}$$

Ciò significa che, tornando alle coordinate  $q_1$  e  $q_2$ ,

$$q_1(t) = \frac{v_0}{2} \left( \sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad q_2(t) = \frac{v_0}{2} \left( \sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Se  $0 < k \ll 1$ ,  $\omega^{-1} = 1 - o(k)$  e si verificano dei *battimenti*, come abbiamo già visto: questo significa che periodicamente il moto di un pendolo si smorza completamente e tutta l'energia è trasferita nell'altro.

### 3. Formulazione variazionale

**3.1. Introduzione ai problemi variazionali.** Una classe di problemi di grande rilevanza per lo studio della meccanica è quella dei cosiddetti *problemi variazionali*. Si tratta di una classe di problemi studiati nel molto più ampio contesto del *calcolo delle variazioni*, una branca



dell'analisi funzionale dalle numerose applicazioni, in particolare in Fisica. Qui proveremo a dare una introduzione minima all'argomento, a partire dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.1. Sia data una curva regolare  $\mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{V}$  aperto. Definiamo

$$(2.8) \quad \mathcal{I}(\mathbf{q}) := \left\{ \tilde{\mathbf{q}}: (-1, 1) \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{V}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{C}^2((-1, 1) \times [t_1, t_2]) \mid \begin{aligned} &\tilde{\mathbf{q}}(0, t) = \mathbf{q}(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ &\tilde{\mathbf{q}}(u, t_1) - \mathbf{q}(t_1) = \tilde{\mathbf{q}}(u, t_2) - \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{0} \quad \forall u \in (-1, 1) \end{aligned} \right\}.$$

L'insieme  $\mathcal{I}(\mathbf{q})$  è quindi un insieme di curve ottenute deformando con continuità  $\mathbf{q}$  e aventi gli stessi estremi. Consideriamo ora un funzionale  $\mathcal{S}: \mathcal{I}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbb{R}$  nella forma

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) dt$$

dove  $\mathcal{L}$  si assume differenziabile con continuità nei suoi argomenti.

DEFINIZIONE 3.2. Il funzionale  $\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}})$  si dice essere stazionario su  $\mathbf{q}$  se

$$\left. \frac{d\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}})}{du} \right|_{u=0} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{I}(\mathbf{q}).$$

TEOREMA 3.1. Il funzionale  $\mathcal{S}: \mathcal{I}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbb{R}$  nella forma

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) dt,$$

con  $\mathcal{L}$  assunta di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  nei suoi argomenti, è stazionario su  $\mathbf{q}$  se  $\mathbf{q}$  soddisfa le equazioni di Eulero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}, \quad a = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il risultato per ispezione diretta:

$$(2.9) \quad \frac{d\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}})}{du} = \sum_{a=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{q}_a} \frac{d\tilde{q}_a}{du} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_a} \frac{d\dot{\tilde{q}}_a}{du} \right) dt.$$

Integrando per parti il secondo termine,

$$\frac{d\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}})}{du} = \sum_{a=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\tilde{q}_a}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{q}_a} \frac{d\tilde{q}_a}{du} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_a} \right) dt + \sum_{a=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_a} \frac{d\tilde{q}_a}{du} \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Calcoliamo ora l'espressione in  $u = 0$ , e usiamo il fatto che  $\partial_u \tilde{\mathbf{q}}(u, t_0) = \partial_u \tilde{\mathbf{q}}(u, t_1) = \mathbf{0}$ ,

$$(2.10) \quad \left. \frac{d\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}})}{du} \right|_{u=0} = \sum_{a=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{d\tilde{q}_a}{du} \right|_{u=0} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) dt.$$

Questa formula mostra come le equazioni di Eulero siano sufficienti per la stazionarietà. Dato però che vogliamo che la quantità sopra sia nulla per ogni  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{I}(\mathbf{q})$ .  $\square$

3.1.1. *Geodetiche.* Un caso piuttosto interessante da studiare riguarda la ricerca di una curva tra due punti su una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^K$  che sia *di lunghezza estrema*. Supponiamo di avere una parametrizzazione locale  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ , e una curva regolare  $\mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{V}$ . Questa curva induce una curva regolare su  $\mathcal{M}$  tramite  $\boldsymbol{\chi}$ , sia  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{M}$ . La lunghezza di tale curva si scrive

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \rangle} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) \rangle} dt \quad \text{dove} \quad (\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) := \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) \dot{q}_a \dot{q}_b.$$

Abbiamo qui introdotto

$$g_{ab}(\mathbf{q}) := \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_a}(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b}(\mathbf{q}) \right\rangle,$$

elemento di una matrice simmetrica in  $\mathbf{g} = (g_{ab})_{ab}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  detta *matrice* o *tensore metrico*. Oltre ad essere simmetrica, la matrice è anche *definita positiva*: per ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{g}(\mathbf{q}) \mathbf{v} \rangle = \sum_{ab} v_a v_b g_{ab}(\mathbf{q}) = \sum_{ab} v_a \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_a}(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b}(\mathbf{q}) \right\rangle v_b = \left\| \sum_a v_a \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_a}(\mathbf{q}) \right\|^2 > 0,$$

tenendo a mente la lineare indipendenza dei vettori  $\{\partial_a \boldsymbol{\chi}\}_{a=1}^n$ . In questo caso quindi

$$(2.11) \quad \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle} = \sqrt{\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle} \equiv \dot{s},$$

dove abbiamo indicato con  $s$  l'ascissa curvilinea. Applichiamo le equazioni di Eulero per cercare la curva che rende *stazionario* il funzionale  $\mathcal{S}$

$$(2.12) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{bc} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \dot{q}_b \dot{q}_c,$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}} \left( -\frac{d \ln \mathcal{L}}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b + \sum_{bc} \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} \dot{q}_b \dot{q}_c + \sum_b g_{ab} \ddot{q}_b \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}} \left( -\frac{d \ln \mathcal{L}}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b + \frac{1}{2} \sum_{bc} \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} \dot{q}_b \dot{q}_c + \frac{1}{2} \sum_{bc} \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} \dot{q}_b \dot{q}_c + \sum_b g_{ab} \ddot{q}_b \right) \end{aligned}$$

per cui, raccogliendo tutti i termini e imponendo l'uguaglianza a zero

$$\sum_b g_{ab} \ddot{q}_b + \frac{1}{2} \sum_{bc} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \dot{q}_b \dot{q}_c = \frac{d \ln \mathcal{L}}{dt} \sum_b g_{ab} \dot{q}_b$$

Moltiplichiamo ora per la *matrice inversa* della matrice metrica  $\mathbf{g}$ , i cui elementi indichiamo con  $g^{ab}$ . Otteniamo

$$\ddot{q}_a + \frac{1}{2} \sum_{abc} g^{ua} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \dot{q}_b \dot{q}_c = \frac{d \ln \mathcal{L}}{dt} \dot{q}_a.$$

Il termine a destra è stato lasciato implicito. Se introduciamo l'ascissa curvilinea  $s$  lungo la curva,  $\dot{s} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , osserviamo che

$$\dot{q}_a = \dot{s} \frac{dq_a}{ds}, \quad \ddot{q}_a = \ddot{s} \frac{dq_a}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2 q_a}{ds^2}, \quad \frac{d \ln \mathcal{L}}{dt} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}},$$

per cui il termine a destra scompare

$$\frac{d^2 q_u}{ds^2} + \frac{1}{2} \sum_{abc} g^{ua} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_a} \right) \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} = 0.$$

Quella ottenuta è l'equazione di una geodetica su  $\mathcal{M}$ , ovvero l'equazione che deve soddisfare localmente la parametrizzazione di una curva su  $\mathcal{M}$  di lunghezza minima tra due punti fissati. Ricordiamo che la parametrizzazione naturale è tale che

$$\left\| \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} \right\|^2 = \left( \frac{d\mathbf{q}}{ds}, \frac{d\mathbf{q}}{ds} \right) = 1.$$

**DEFINIZIONE 3.3** (Geodetica). Sia data una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M}$  e una curva regolare  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q}: [0, \ell] \rightarrow \mathcal{M}$  su di essa, di modo che  $\mathbf{q}: [0, \ell] \rightarrow \mathcal{V}$  sia una curva regolare sull'aperto  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrizzazione di  $\mathcal{M}$ . Si supponga inoltre che la curva sia parametrizzata in modo naturale, di modo che la sua lunghezza sia  $\ell > 0$ . Allora  $\boldsymbol{\gamma}$  è una geodetica se la sua parametrizzazione locale  $\mathbf{q}(s)$  soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2 q_c}{ds^2} + \sum_{ab} \Gamma_{ab}^c \frac{dq_a}{ds} \frac{dq_b}{ds} = 0, \quad \Gamma_{ab}^c := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g^{ci} \left( \frac{\partial g_{bi}}{\partial q_a} + \frac{\partial g_{ai}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q_i} \right),$$

dove  $g^{ab}$  è l'elemento  $(a, b)$  della matrice inversa della matrice metrica, e la quantità  $\Gamma_{ab}^c$  è detta *simbolo di Christoffel*.

**Esercizio 2.1** — Si mostri che una curva regolare non degenera su  $\mathcal{M}$  che soddisfa l'equazione per le geodetiche ha versore normale principale ortogonale ad  $\mathcal{M}$ .

*Soluzione.* — Nel caso in cui  $\mathcal{M}$  sia una superficie regolare nello spazio tridimensionale, abbiamo definito una geodetica come una curva regolare non degenera su  $\mathcal{M}$  avente versore normale principale ortogonale ad  $\mathcal{M}$  stesso: l'esercizio è finalizzato quindi a verificare la consistenza di questa definizione con quella data in termini di curve su sottovarietà regolari. Partiamo dall'equazione per la geodetica, moltiplichiamo per  $g_{vu}$  e sommiamo su  $u$ ,

$$\sum_u g_{vu} \frac{d^2 q_u}{ds^2} + \frac{1}{2} \sum_{bc} \left( \frac{\partial g_{vb}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{vc}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_v} \right) \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} = 0$$

dove abbiamo usato  $\sum_u g_{vu} g^{ua} = \delta_{va}$ . Ora eseguiamo qualche manipolazione nel termine tra parentesi:

$$(2.14) \quad \frac{\partial g_{vb}}{\partial q_c} + \frac{\partial g_{vc}}{\partial q_b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q_v} = \frac{\partial}{\partial q_c} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_v}, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial q_b} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_v}, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_c} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial q_v} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b}, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_c} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_v}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b \partial q_c} \right\rangle.$$

L'equazione quindi si può riscrivere come

$$\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_a}, \sum_b \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b} \frac{d^2 q_b}{ds^2} + \sum_{bc} \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b \partial q_c} \right\rangle = 0.$$

Sia ora  $\boldsymbol{\gamma}(s) = (\boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q})(s)$  una curva su  $\mathcal{M}$  la cui parametrizzazione soddisfa l'equazione per le geodetiche. Allora  $\boldsymbol{\gamma}'(s) = \sum_a \frac{dq_a}{ds} \partial_a \boldsymbol{\chi}$ , mentre

$$\boldsymbol{\gamma}''(s) = \sum_b \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b} \frac{d^2 q_b}{ds^2} + \sum_{bc} \frac{dq_b}{ds} \frac{dq_c}{ds} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_b \partial q_c}.$$

L'equazione per le geodetiche esprime quindi esattamente il fatto che il vettore  $\boldsymbol{\gamma}''$  è ortogonale allo spazio  $T_P \mathcal{M}$ . Essendo questa direzione unica per superfici bidimensionali in  $\mathbb{R}^3$ , la condizione di versore normale della curva parallelo alla normale a  $\mathcal{M}$  è in tal caso *caratterizzante* per le geodetiche.

**3.2. Principio di Hamilton.** La notazione utilizzata ha già probabilmente fatto notare che le equazioni di Lagrange che abbiamo ottenuto riproducono esattamente le equazioni di Eulero per la risoluzione di problemi variazionali su varietà, e sono infatti spesso chiamate *equazioni di Eulero-Lagrange*. Questo fatto ha condotto Hamilton a formalizzare questa corrispondenza nel seguente teorema.

**TEOREMA 3.2 (Principio di Hamilton).** *Il moto naturale di un sistema soggetto a vincoli olonomi lisci e forze conservative parametrizzato da un vettore di variabili lagrangiane  $\mathbf{q}$  rende stazionaria l'azione hamiltoniana, definita come*

$$S(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

sulla classe di tutti i moti sincroni (ovvero, seguenti la stessa scala temporale) che tengano fisse le configurazioni  $\mathbf{q}(t_0)$  e  $\mathbf{q}(t_1)$ , dove la funzione  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è la lagrangiana del sistema.

Questo principio introduce un punto di vista largamente utilizzato in meccanica analitica, ovvero il punto di vista *variazionale*, in cui il moto fisico di un sistema viene caratterizzato come stazionario in un certo funzionale rispetto a tutti gli altri moti possibili. È importante notare che il principio di Hamilton è *invariante* se a  $\mathcal{L}$  si aggiunge una *derivata totale* nel tempo di una funzione differenziabile con continuità  $h(\mathbf{q}, t)$ , dato che

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \frac{dh}{dt} \implies S \mapsto S + h(\mathbf{q}(t_1), t_1) - h(\mathbf{q}(t_0), t_0).$$

Il termine aggiuntivo è costante rispetto alle variazioni di  $\mathbf{q}$  che devono avvenire ad estremi fissati, e quindi ininfluenza. Come per  $\mathcal{L}$ , la corrispondenza tra azione e equazioni del moto non è perciò univoca, e due lagrangiane che differiscono per una derivata totale descrivono la stessa dinamica. È questo un fatto che avevamo già osservato e che viene coerentemente riprodotto dall'approccio variazionale.

**Esempio 2.7** — Consideriamo un sistema olonomo autonomo, non soggetto a forze eccettuata la reazione vincolare, che vive su una sottovarietà regolare  $\mathcal{M}$  fissa. La sua lagrangiana coincide perciò con la sola energia cinetica, che in coordinate locali avrà la forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle.$$

Possiamo interpretare questa espressione un prodotto scalare definendo

$$(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{ab} A_{ab}(\mathbf{q}) \dot{q}_a \dot{q}_b$$

ovvero identificare  $\mathbf{A}$  con un “tensore metrico”. Così facendo, l'azione associata al moto libero è

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) dt.$$

Questa azione è molto simile al funzionale in Eq. (2.11): applicando il criterio variazionale di Hamilton e ripetendo esattamente gli stessi calcoli si ottiene che le variabili  $\mathbf{q}$  devono evolvere secondo l'equazione per le geodetiche *in accordo con la metrica  $\mathbf{A}$* , ovvero indicando con  $A^{ab}$  l'elemento  $(a, b)$  della matrice inversa  $[\mathbf{A}(\mathbf{q})]^{-1}$ ,

$$\ddot{q}_u + \frac{1}{2} \sum_{abc} A^{ua} \left( \frac{\partial A_{ab}}{\partial q_c} + \frac{\partial A_{ac}}{\partial q_b} - \frac{\partial A_{bc}}{\partial q_a} \right) \dot{q}_b \dot{q}_c = 0.$$

In altre parole,  $\mathbf{A}$  rimpiazza  $\mathbf{g}$  nelle equazioni di Eulero-Lagrange, mostrando che il moto avviene non secondo la “metrica naturale”  $g_{uv} = \sum_{k=1}^N \langle \partial_u \mathbf{x}_k, \partial_v \mathbf{x}_k \rangle$  della sottovarietà ma secondo una metrica

modificata  $A_{uv} = \sum_{k=1}^N m_k \langle \partial_u \mathbf{x}_k, \partial_v \mathbf{x}_k \rangle$ . Si noti inoltre che mentre nell'equazione per le geodetiche compariva la parametrizzazione naturale, che corrisponde ad una velocità di percorrenza unitaria lungo la curva, qui compare il tempo  $t$ . D'altra parte, la conservazione dell'energia meccanica implica che durante il moto  $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{costante}$ : in altre parole, la relazione tra  $t$  ed  $s$  è un semplice trasformazione affine.

**3.2.1. Equivalenza con il principio di d'Alembert.** Nell'Eq. (2.10), la condizione di stazionarietà su una deformazione  $\tilde{\mathbf{q}}(u, t)$  ha la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) \frac{d\tilde{q}_a}{du} \Big|_{u=0} dt = 0, \quad \forall a,$$

dove come solito  $\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0, t)$ , soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange. Questa condizione deve valere per ogni deformazione  $\tilde{\mathbf{q}}(u, t)$ . Assumendo ora che il sistema sia autonomo, sia  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$ , abbiamo visto che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle \equiv p_a, \quad \frac{\partial T}{\partial q_a} = \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_a} \right\rangle.$$

Dunque

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_a} \right\rangle - \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}} + \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle$$

dove abbiamo usato  $\partial_a V = \langle \partial_{\mathbf{X}} V, \partial_a \mathbf{X} \rangle$ . La condizione di estremalità si riscrive

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}} + \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle \frac{d\tilde{q}_a}{du} \Big|_{u=0} dt = 0.$$

Osserviamo ora che il vettore

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \frac{d\tilde{q}}{du} \Big|_{u=0} = \frac{d\mathbf{X}}{du} \Big|_{u=0}$$

è un vettore diretto tangenzialmente al vincolo nella direzione della deformazione indotta da  $\tilde{\mathbf{q}}$ , mentre  $\dot{\mathbf{Q}} + \partial_{\mathbf{X}} V = \mathbf{F}^{(v)}$  è semplicemente la reazione vincolare: in definitiva la condizione di stazionarietà richiede che per ogni campo vettoriale tangente la reazione vincolare sia ortogonale al vincolo. Data l'arbitrarietà delle deformazioni, questo equivale al principio di d'Alembert–Lagrange:

$$\langle \dot{\mathbf{Q}} + \partial_{\mathbf{X}} V, \delta \mathbf{X} \rangle = 0 \quad \forall \delta \mathbf{X} \in T_P \mathcal{M}.$$

Questo principio è interpretato in termini di criterio per l'equilibrio. Se infatti la forza attiva totale vive nello spazio normale, essa è bilanciata dalla reazione vincolare; viceversa, in un punto di equilibrio la forza totale è nulla, ovvero la forza attiva è bilanciata esattamente dalla reazione vincolare.

**3.3. Teorema di Noether e leggi di conservazione.** Abbiamo già incontrato un certo numero di leggi di conservazione, riguardanti per esempio il momento angolare o l'energia meccanica. Un'altra legge di conservazione che emerge dalle equazioni di Lagrange riguarda il momento coniugato

$$p_a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}.$$

Potendosi scrivere come  $\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}$ , le equazioni di Lagrange implicano infatti immediatamente il risultato seguente.

**TEOREMA 3.3.** *Il momento  $p_a$  coniugato alla variabile lagrangiana  $q_a$  si conserva se e solo se  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0$ .*

Se  $p_a$  si conserva, la variabile  $q_a$  si chiama *ciclica*: essa non compare esplicitamente nella lagrangiana.

La presenza di quantità conservate non è “accidentale” e risulta da un teorema fondamentale che introdurremo in questa sezione. Sia come al solito  $\mathcal{M}$  il nostro spazio delle configurazioni e  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  la lagrangiana del nostro sistema. Diamo la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 3.4.** Si dice che la famiglia ad un parametro  $\mathbf{G}^s: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , è un *gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili* su  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$  se valgono le seguenti proprietà:

- $\mathbf{G}^0 \mathbf{z} = \mathbf{z}$  per ogni  $\mathbf{z}$ ;
- $\mathbf{G}^{s_1}(\mathbf{G}^{s_2} \mathbf{z}) = \mathbf{G}^{s_1+s_2} \mathbf{z}$ ;
- $\mathbf{G}^s \mathbf{z}$  è analitica in un intorno di  $s = 0$ , di modo che  $\mathbf{G}^s \mathbf{z} = \mathbf{z} + s\boldsymbol{\zeta}(s) + o(s^2)$  dove  $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{z})$  è una funzione continua con derivate continue nei propri argomenti.

**DEFINIZIONE 3.5.** Un gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili  $\mathbf{G}^s: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  è *ammissibile* per un sistema lagrangiano se lascia inalterata l'azione, ovvero

$$\frac{d}{ds} \int_{t_{0,s}}^{t_{1,s}} \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}'_s, t_s) dt_s = 0$$

dove abbiamo indicato con  $\mathbf{G}^s \mathbf{z} = \mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}_s, t_s)$  le variabili lagrangiane e tempo trasformate, e  $\mathbf{q}'_s = \frac{d\mathbf{q}_s}{dt_s}$ .

Possiamo ora enunciare il seguente teorema.

**TEOREMA 3.4 (Noether).** *Se un sistema lagrangiano ammette un gruppo ad un parametro di trasformazioni invertibili  $\mathbf{G}^s: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , di modo che  $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}_s, t_s)$ , allora le equazioni di Lagrange corrispondenti hanno un integrale primo che in coordinate locali assume la forma*

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L}, \quad \text{dove} \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right|_{s=0}, \quad \tau(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{dt_s}{ds} \right|_{s=0}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Iniziamo osservando che, in un intorno sufficientemente piccolo di  $s = 0$ , possiamo riscrivere l'azione variata in termini del parametro temporale non trasformato, dato che  $\lim_{s \rightarrow 0} t_s = t$  e, per via della nostra ipotesi di analiticità,  $\lim_{s \rightarrow 0} \dot{t}_s = 1$ ,

$$\int_{t_{0,s}}^{t_{1,s}} \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}'_s, t_s) dt_s = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\left(\mathbf{q}_s, \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{\dot{t}_s}, t_s\right) \dot{t}_s dt.$$

Imponiamo ora l'invarianza: ciò equivale a richiedere che la derivata dell'argomento dell'integrale rispetto ad  $s$  sia nulla, ovvero

$$0 = \frac{d}{ds} [\mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}'_s, t_s) \dot{t}_s] = \dot{t}_s \left( \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_s}, \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}'_s}, \frac{d\mathbf{q}'_s}{ds} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_s} \frac{dt_s}{ds} \right) + \mathcal{L} \frac{d\dot{t}_s}{ds}.$$

Calcoliamo l'espressione precedente in  $s = 0$ , ottenendo

$$0 = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \frac{d\mathbf{q}'_s}{ds} \Big|_{s=0} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau}$$

dove, come da ipotesi

$$\tau(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{dt_s(\mathbf{q}, t)}{ds} \right|_{s=0}, \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{d\mathbf{q}_s(\mathbf{q}, t)}{ds} \right|_{s=0}.$$

Occorre calcolare con una certa cura la derivata di  $\mathbf{q}'_s = \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{t_s}$  rispetto ad  $s$ . Scriviamo

$$\left. \frac{d\mathbf{q}'_s}{ds} \right|_{s=0} = \left( \frac{1}{t_s} \frac{d\dot{\mathbf{q}}_s}{ds} - \frac{\dot{\mathbf{q}}_s}{t_s^2} \frac{dt_s}{ds} \right) \Big|_{s=0} = \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\tau} \dot{\mathbf{q}}$$

che ci permette di riscrivere

$$\begin{aligned} (2.15) \quad 0 &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\tau} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau} = \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\tau} \dot{\mathbf{q}} - \tau \ddot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \ddot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau + \mathcal{L} \dot{\tau} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L} \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'equazione di Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ . Ciò che abbiamo ottenuto, in definitiva, è che la quantità

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L}$$

si conserva nel tempo, dimostrando il teorema.  $\square$

**COROLLARIO 3.5.** *Se il sistema è autonomo e  $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}_s, t)$  è un gruppo ad un parametro di trasformazioni ammissibile, allora la quantità*

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle, \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, t) := \left. \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right|_{s=0}$$

è conservata.

Si può dimostrare che l'integrale primo non dipende dalla scelta delle coordinate locali.

**Esempio 2.8** (Invarianza traslazionale) — Un primo esempio di applicazione riguarda la possibilità che la lagrangiana sia invariante per traslazioni in una certa direzione  $\mathbf{r}$ , ovvero sotto l'azione di  $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q} + s\mathbf{r}, t)$ . In questo caso  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{r}$  mentre  $\tau(\mathbf{q}, t) = 0$ , e la quantità conservata è

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle,$$

ovvero la proiezione del momento coniugato  $\mathbf{p}$  lungo  $\mathbf{r}$ . Se in particolare la lagrangiana è invariante rispetto a *qualsivoglia* traslazione, allora  $\mathbf{p}$  si conserva. Come abbiamo già visto,  $\mathbf{p}$  contiene le componenti lagrangiane della quantità di moto,  $p_a = \langle \mathbf{Q}, \partial_a \boldsymbol{\chi} \rangle$ : se il moto avviene senza vincoli, allora  $\mathbf{p} = \mathbf{Q}$ . La conservazione della quantità di moto, quando valida, esprime precisamente l'omogeneità dello spazio in cui il moto avviene.

**Esempio 2.9** (Invarianza rotazionale) — Supponiamo che la lagrangiana sia invariante sotto rotazioni, ovvero che detta  $\mathbf{R}(s) \in \text{SO}(m)$  dipendente da un unico parametro,  $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{R}(s)\mathbf{q}, t)$ .  $\mathbf{R}(s)$  può essere ad esempio una rotazione di un angolo  $s$  attorno ad un asse, di modo che  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ . Utilizziamo ora il Lemma 3.1 per studiare la trasformazione sopra. Nel calcolo dell'invariante, abbiamo bisogno di

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \left. \frac{d(\mathbf{R}(s)\mathbf{q})}{ds} \right|_{s=0} = \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{q}.$$

L'invariante è quindi

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{q} \right\rangle.$$

Consideriamo ora il caso di un sistema meccanico di un punto materiale di massa  $m$  e posizione  $\mathbf{x}$ , non soggetto a vincoli e con lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - V(\mathbf{x}).$$

La formula trovata in questo caso diventa

$$I = m \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{x} \rangle \equiv \langle \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{R}}(0)\mathbf{x} \rangle,$$

dove  $\mathbf{Q}$  è la quantità di moto del punto materiale. Indichiamo

$$\dot{\mathbf{R}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv [\boldsymbol{\omega}]_{\wedge}, \quad \boldsymbol{\omega} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

(dal Lemma 3.1 è noto che la matrice deve essere antisimmetrica). La notazione  $[\boldsymbol{\omega}]_{\wedge}$  serve per anticipare l'azione della matrice tridimensionale  $\dot{\mathbf{R}}(0)$ , e in generale di una matrice antisimmetrica tridimensionale. Infatti, dato un generico vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\wedge} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}.$$

Usando la proprietà  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle$ , calcoliamo esplicitamente

$$I = \langle \mathbf{Q}, [\boldsymbol{\omega}]_{\wedge} \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \wedge \mathbf{Q} \rangle$$

ovvero *la quantità conservata è la proiezione del momento angolare in una certa direzione  $\boldsymbol{\omega}$  associata all'azione infinitesima della trasformazione grupale*. Se il sistema è invariante per qualsivoglia rotazione nello spazio, ovvero lo spazio è *isotropo*, il momento angolare si conserva.

**Esempio 2.10** (Indipendenza dal tempo) — Supponiamo infine che il sistema sia autonomo, ovvero  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . In questo caso,  $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}, t + s)$  è una simmetria della lagrangiana, dato che questa non dipende esplicitamente dal tempo. In questo caso,  $\xi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$  e  $\tau(\mathbf{q}, t) = 1$ , per cui l'invariante è

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle - \mathcal{L} = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H}.$$

Come vedremo questa quantità ha il nome di *hamiltoniana*. Se sul sistema agiscono solo forze conservative, e quindi  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$ , dove  $\mathbf{A}$  è la matrice cinetica e  $V$  è l'energia potenziale, si trova subito che

$$I = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q}) \equiv E,$$

ovvero l'invariante associato all'invarianza per traslazioni temporali è l'energia meccanica, la cui conservazione può quindi essere vista come una sorta di conseguenza dell'omogeneità temporale.

**Esempio 2.11** (Brachistocrona) — La conoscenza di invarianti è tipicamente molto utile per l'integrazione delle equazioni del moto, ma anche la risoluzione di problemi in cui non necessariamente compare una variabile “tempo”. Supponiamo di voler sagomare una opportuna guida liscia in un piano verticale, su cui far scivolare un punto materiale  $P$  sotto l'azione gravitazionale. Parametizziamo tale guida come  $\boldsymbol{\gamma}(u) = (u, -h(u))^T$ ,  $u \in [0, \bar{u}]$ , dove la prima coordinata indica l'ascissa, la seconda l'ordinata con asse inteso orientato in maniera opposta al campo gravitazionale. La guida ha  $h(0) = 0$  e  $h(\bar{u}) = -\bar{h}$  dati, di modo che  $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)$  sarà il punto iniziale della corsa di  $P$ . Vorremmo trovare la sagoma in modo tale da rendere il tempo di percorrenza *minimo*<sup>2</sup>. Poiché ipotizziamo il moto soggetto solo a forze conservative e vincoli lisci, quando il punto sarà ad altezza  $h$  lungo  $\boldsymbol{\gamma}$  la sua velocità sarà in modulo  $\|\dot{\mathbf{x}}\| = \sqrt{2gh}$ . Il tempo per arrivare a destinazione è

$$\mathcal{T}(h) = \int_0^{\bar{u}} \sqrt{\frac{1 + h'^2}{2gh}} \, du \equiv \int_0^{\bar{u}} \mathcal{L}(h, \partial_u h) \, du, \quad \mathcal{L}(h, \partial_u h) := \sqrt{\frac{1 + h'^2}{2gh}}.$$

<sup>2</sup>Il problema è stato propriamente formulato per la prima volta da Johann Bernoulli nel 1696 e risolto da Isaac Newton l'anno successivo.



Quello scritto è un funzionale dipendente da  $h$  e dalla sua derivata, di cui vogliamo trovare un estremo (un minimo, nel nostro caso specifico): è quindi un problema totalmente analogo a quelli già studiati, in cui  $h$  svolge il ruolo di “coordinata lagrangiana” e  $u$  svolge il ruolo di “tempo”. La forma della lagrangiana ci suggerisce subito che una quantità verrà “conservata”, ovvero essendo  $\mathcal{L}$  indipendente dalla variabile “tempo”  $u$ , la corrispondente “hamiltoniana” sarà conservata, ovvero

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h'} h' - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2gh(1+h'^2)}},$$

che assume una forma più semplice quadrando,

$$h(1-h'^2) = c^2, \quad c^2 := \frac{1}{8gI^2}.$$

Da questa espressione si ottiene

$$\sqrt{\frac{c^2}{h} - 1} = \frac{dh}{du}$$

dove  $h \leq c^2$  e si assume che  $\frac{dh}{du} \geq 0$  come ragionevole. È conveniente ora risolvere tentando di esprimere  $u$  in funzione di  $h$ , facendo una implicita assunzione di derivata nulla al più negli estremi, dopo aver introdotto una variabile ausiliaria  $\phi \in [0, \pi]$ ,

$$h = c^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{c^2}{2} (1 - \cos \phi) \Rightarrow u = \frac{c^2}{2} (\phi - \sin \phi),$$

dove  $c$  va determinata imponendo la condizione di passaggio per il punto finale. La curva è ottenuta è matematicamente detta *cicloide*.

**Esempio 2.12** (Trasformazioni di gauge) — Le trasformazioni contemplate dal teorema di Noether non sono il solo tipo di trasformazione in grado, in generale, di lasciare invariata una lagrangiana. Consideriamo per esempio la lagrangiana di un punto materiale carico in un campo elettromagnetico statico già vista in Eq. (2.3),

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - e \left( \varphi - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle \right).$$

Se eseguiamo la trasformazione

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla g, \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t},$$

dove  $g \equiv g(\mathbf{x}, t)$ , la lagrangiana viene mappata in

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} - \frac{e}{c} \frac{dg}{dt}.$$

La lagrangiana ha acquisito così un termine di derivata totale e quindi produce le stesse equazioni del moto a mezzo del principio di Hamilton. In effetti questo significa che il potenziale  $\varphi$  e il potenziale  $\mathbf{A}$  sono definiti a meno di una funzione arbitraria, ovvero una *gauge*,  $g$  che si può fissare arbitrariamente. Tuttavia questo tipo di trasformazione non è del tipo contemplato dal teorema: si tratta infatti di una simmetria “funzionale” che trasforma i campi in gioco, e i principi di conservazione ad esso legati necessitano di una trattazione più generale di quella qui presentata.