CAPITOLO 1

Il campo dei numeri complessi

Esercizio 1

Risolvere l'equazione
$$z^2 + 4iz - 4 + i = 0$$

Possiamo ripercorrere gli step necessari per risolvere una equazione del tipo
$$az^2 + bz + c = 0$$
assumendo stavolta che $a, b, c \in \mathbb{C}$. Abbiamo che $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a^2z^2 + abz + ac = 0$. Ora
$$\begin{aligned} a^2z^2 + abz + ac &= a^2z^2 + 2a\frac{b}{2}z + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + ac \\ &= \left(az + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} \end{aligned}$$
che implica
$$\left(az + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$
Nell'estrazione di radice occorre essere cauti esattamente come nel caso reale. In ambo i lati abbiamo numeri complessi e sappiamo che l'estrazione di radice fornisce due possibili soluzioni: per un numero complesso $\alpha + i\beta$, infatti, ricordiamo che
$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i\,\mathrm{sign}(\beta)\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\right).$$
Di conseguenza, chiamando $\Delta = b^2 - 4ac$, $\alpha = \mathrm{Re}(\Delta)$ e $\beta = \mathrm{Im}(\Delta)$ possiamo effettivamente scrivere
$$z_\pm = \frac{-b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i\,\mathrm{sign}(\beta)\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\right).$$
Nel nostro caso
$$\Delta = b^2 - 4ac = -4i$$
per cui $\mathrm{Re}(\Delta) = 0$ e $\mathrm{Im}(\Delta) = -4$, per cui
$$z_\pm = -2i \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

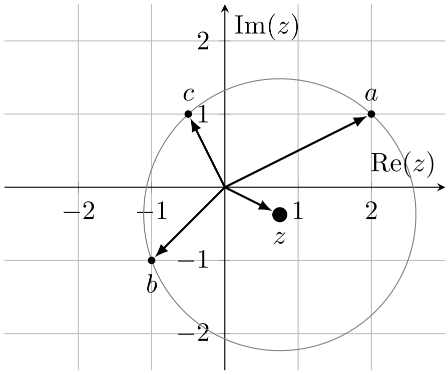
Esercizio 2

Verificare che
$$\overline{\frac{z}{z^2+1}} = \frac{\bar z}{\bar z^2+1}.$$

Possiamo procedere per calcolo esplicito. Abbiamo che, se $z = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
\overline{\frac{z}{z^2+1}} &= \overline{\frac{\alpha + i\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta + 1}} \\
&= \overline{\frac{(\alpha + i\beta)(\alpha^2 - \beta^2 + 1 - 2i\alpha\beta)}{(\alpha^2 - \beta^2 + 1)^2 + 4\alpha^2\beta^2}} \\
&= \frac{(\alpha - i\beta)(\alpha^2 - \beta^2 + 1 + 2i\alpha\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2 + 4\alpha^2\beta^2}
\end{aligned}$$
dove nell'ultima riga abbiamo usato che $\overline{ab} = \bar a \bar b$. D'altra parte
$$\begin{aligned}
\frac{\bar z}{\bar z^2+1} &= \frac{\alpha - i\beta}{(\alpha - i\beta)^2 + 1} \\
&= \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\beta + 1} \\
&= \frac{(\alpha - i\beta)(\alpha^2 - \beta^2 + 1 + 2i\alpha\beta)}{(\alpha^2 - \beta^2 + 1)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Trovare il circocentro del triangolo individuato dai punti a, b e c nel piano complesso.



Il circocentro è definito come il punto equidistante dai tre vertici dati. Sia esso z. Allora

$$|z-a|^2 = |z-b|^2 = |z-c|^2.$$

Dalla prima $(\bar{z}-\bar{a})(z-a) = (\bar{z}-\bar{b})(z-b)$, ovvero $|z|^2 - \bar{z}a - z\bar{a} + |a|^2 = |z|^2 - \bar{z}b - z\bar{b} + |b|^2 \Rightarrow \bar{z}(b-a) + z(\bar{b}-\bar{a}) = |b|^2 - |a|^2$. In maniera simile, $\bar{z}(b-c) + z(\bar{b}-\bar{c}) = |b|^2 - |c|^2$. Le due equazioni implicano

$$z\left(\bar{c}(a-b) + \bar{b}(c-a) + \bar{a}(b-c)\right) = |a|^2(b-c) + |c|^2(a-b) + |b|^2(c-a)$$

ovvero

$$z = \frac{|a|^2(b-c) + |b|^2(c-a) + |c|^2(a-b)}{\bar{c}(a-b) + \bar{b}(c-a) + \bar{a}(b-c)}.$$

Esercizio 4

Si assuma $x \in \mathbb{R}$. Semplificare le due somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx).$$

Possiamo costruire il numero complesso

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos(kx) + i \sin(kx)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos(x) + i \sin(x)\right)^k \\
&= \frac{1 - \left(\cos(x) + i \sin(x)\right)^n}{1 - \cos(x) - i \sin(x)}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato in maniera cruciale la formula di de Moivre.

Esercizio 5

Per quali valori di a, b e c, da intendersi numeri complessi, l'equazione

$$az + b\bar{z} + c = 0$$

rappresenta una retta del piano complesso?

Sappiamo che in coordinate cartesiane una retta è rappresentata da una equazione nella forma $y = \mu x + \nu$ per due numeri reali μ, ν. L'equazione $az + b\bar{z} + c = 0$ può espandersi scrivendo

$$a = \alpha_0 + i\alpha_1, \qquad b = \beta_0 + i\beta_1, \qquad c = \gamma_0 + i\gamma_1$$

dove le quantità rappresentate da lettere greche sono da intendersi reali, per cui, se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\alpha_0 x - \alpha_1 y + ix\alpha_1 + iy\alpha_0 + \beta_0 x + \beta_1 y + ix\beta_1 - iy\beta_0 + \gamma_0 + i\gamma_1 = 0$$

che corrisponde a due equazioni, una per la parte reale e una per la parte immaginaria:

$$(\alpha_0 + \beta_0)x - (\alpha_1 - \beta_1)y + \gamma_0 = 0, \qquad (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_0 - \beta_0)y + \gamma_1 = 0.$$

Queste due equazioni devono essere la stessa equazione, a meno che una delle due equazioni sia triviale. Possono esserci tre casi:

(1) $a = \bar{b}$ e c è reale: in questo caso la seconda equazione è identicamente nulla.

(2) $a = -\bar{b}$, mentre c è immaginario puro. In questo caso la prima equazione è identicamente nulla.

(3) $a \neq \pm\bar{b}$ ma i coefficienti della prima equazione sono proporzionali a quelli della seconda, ovvero esiste un $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale per cui

$$\alpha_0 + \beta_0 = q(\alpha_1 + \beta_1), \qquad \alpha_1 - \beta_1 = -q(\alpha_0 - \beta_0), \qquad \gamma_0 = q\gamma_1.$$

Da queste equazioni otteniamo

$$|a|^2 = |b|^2, \qquad \bar{c}(b - a) = 0.$$

Se $a = b \neq 0$, ovvero $a(z + \bar{z}) + c = 2ax + c = 0$, allora deve essere $x = -\frac{c}{2a} \in \mathbb{R}$, corrispondente ad una retta verticale. Se invece $b \neq a$, allora $c = 0$: possiamo scrivere $a = r\,\mathrm{e}^{i\phi_a}$ e $b = r\,\mathrm{e}^{i\phi_b}$, con ϕ_a, ϕ_b argomenti di a e b reispettivamente. L'equazione è quindi $r\,\mathrm{e}^{i\phi_a}\,z + r\,\mathrm{e}^{i\phi_b}\,\bar{z} = 0$. Se moltiplichiamo ambo i membri per $\mathrm{e}^{-i\frac{\phi_a+\phi_b}{2}}$ otteniamo $r\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi_a-\phi_b}{2}}\,z + r\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi_b-\phi_a}{2}}\,\bar{z} = uz + \overline{uz} = 0$, dove $u = r\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi_a-\phi_b}{2}}$.

In definitiva, raccogliendo tutti i nostri risultati, l'equazione per una retta si può scrivere in generale

$$az + \overline{az} + \gamma = 0, \qquad a \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$