

APPUNTI DI  
**MECCANICA RAZIONALE**  
CORSO DI ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
— 2024 —

GABRIELE SICURO



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

PREMESSA. Sia dato un punto  $P$  in uno spazio affine euclideo tridimensionale. Dato un punto  $O$  nel medesimo spazio da usarsi come origine, indicheremo con  $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$  il vettore dello spazio tridimensionale associato dalla mappa affine alla coppia ordinata  $(O, P)$ : il vettore  $\vec{p}$  individua la posizione di  $P$  rispetto ad  $O$ . Data inoltre una base ortonormale  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$ , tale cioè che  $\langle \hat{i}_j, \hat{i}_k \rangle = \delta_{jk}$ , indicheremo con  $\mathbf{p} = (p_j)_{j=1}^3 \in \mathbb{R}^3$  la terna di coordinate di  $\vec{p}$  rispetto a detta base, ovvero  $\vec{p} = p_1 \hat{i}_1 + p_2 \hat{i}_2 + p_3 \hat{i}_3$ . Il simbolo ■ indica un teorema la cui dimostrazione può essere oggetto di domanda d'esame.

# Indice

Capitolo 1. Cinematica	1
1. Quantità fondamentali della cinematica	1
2. Cambi di riferimento: cinematica relativa	5
3. Cinematica del corpo rigido	10
Capitolo 2. Leggi della meccanica	21
1. Massa e quantità di moto	21
2. Forze e lavoro	23
3. Principi della meccanica	29
4. Vincoli e reazioni vincolari	35
Capitolo 3. Elementi di statica	45
1. Criteri di equilibrio	45
2. Teorema dei lavori virtuali e ricerca dei punti di equilibrio	47
3. Stabilità	52
Capitolo 4. Elementi di dinamica	55
1. Energia cinetica	55
2. Dinamica del punto materiale	63
3. Dinamica dei sistemi	70



## Cinematica

### 1. Quantità fondamentali della cinematica

Consideriamo un riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  nello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}_3$  e supponiamo di osservare un oggetto puntiforme  $P$  occupare un punto di detto spazio. Introducendo una variabile *temporale*  $t$  a valori in un dato intervallo  $[t_0, t_1] \in \mathbb{R}$ , possiamo associare ad ogni valore di  $t$  un vettore

$$\mathbf{p}(t) = p_1(t)\hat{i}_1 + p_2(t)\hat{i}_2 + p_3(t)\hat{i}_3$$

che identifica la posizione del punto occupato secondo il sistema di riferimento scelto al variare della variabile  $t$ . In particolare, al variare di  $t$ , il vettore identifica una *curva*, che noi assumeremo essere regolare a tratti, e che, grazie all'identificazione tra lo spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}_3$  e  $\mathbb{R}^3$ , fornisce la *traiettoria* dell'oggetto puntiforme che stiamo studiando.

Possiamo definire il vettore *velocità* come la derivata prima di  $\mathbf{p}(t)$  rispetto a  $t$ ,

$$\mathbf{v}_P(t) := \dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{p}_1(t)\hat{i}_1 + \dot{p}_2(t)\hat{i}_2 + \dot{p}_3(t)\hat{i}_3$$

e il vettore *accelerazione* come la derivata seconda di  $\mathbf{p}(t)$  rispetto a  $t$

$$\mathbf{a}_P(t) := \ddot{\mathbf{p}}(t) = \ddot{p}_1(t)\hat{i}_1 + \ddot{p}_2(t)\hat{i}_2 + \ddot{p}_3(t)\hat{i}_3.$$

Questi vettori sono naturalmente associati alla traiettoria dell'oggetto puntiforme che stiamo studiando e saranno oggetti centrali in tutta l'analisi del corso.

**1.1. Parametrizzazione intrinseca.** La posizione di un punto materiale è associata ad un vettore  $\mathbf{p}(t)$  che evolve nel tempo descrivendo una *curva* nello spazio. Supponiamo di focalizzarci sull'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ : se in tale intervallo la curva descritta è regolare a tratti, è possibile e utile introdurre la sua *ascissa curvilinea*  $s: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , spesso detta nel contesto della meccanica *legge oraria*

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{p}}(\tau)\| d\tau.$$

Essa quantifica la lunghezza della traiettoria percorsa dal tempo iniziale  $t_0$  al tempo  $t$ . In particolare,  $\ell := s(t_1)$  è la lunghezza della curva percorsa durante tutto l'intervallo. In ogni sottointervallo di  $[t_0, t_1]$  in cui  $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| > 0$ , la funzione  $s$  è invertibile essendo strettamente monotona crescente, ovvero possiamo costruire una funzione  $t = \tau(s)$  che fornisce il tempo associato all'ascissa curvilinea  $s$ . Possiamo così introdurre una diversa parametrizzazione, detta *intrinseca*, che esprime la posizione  $\mathbf{p}$  in termini di  $s$ ,

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ \tau \Leftrightarrow \bar{\mathbf{p}}(s) \equiv \mathbf{p}(\tau(s)),$$

che fornisce informazioni sulla traiettoria senza specificare come questa viene percorsa, ovvero senza riferimento al tempo: in altre parole, il vettore  $\bar{\mathbf{p}}(s)$  percorre, al variare di  $s \in [0, \ell]$ , la stessa traiettoria di descritta da  $\mathbf{p}(t)$  al variare di  $t \in [t_0, t_1]$ . Equivalentemente si può introdurre la funzione  $\varsigma = \tau^{-1}$ , in modo che  $s = \varsigma(t)$  e

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} \circ \varsigma \Leftrightarrow \mathbf{p}(t) \equiv \bar{\mathbf{p}}(\varsigma(t)).$$

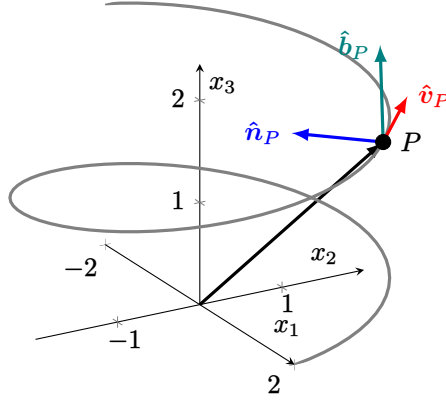


FIGURA 1. Particella che si muove lungo una traiettoria elicoidale, con rappresentazione della sua terna intrinseca in una certa posizione.

In questo modo abbiamo esplicitamente separato l'aspetto puramente geometrico della curva, espresso da  $\bar{p}$ , da quello cinetico, espresso dalla dipendenza di  $s$  da  $t$ .

A partire dalla rappresentazione intrinseca  $\bar{p}$ , possiamo calcolare la “velocità” e l’“accelerazione” rispetto all’ascissa curvilinea  $s$

$$\hat{v}_P(s) := \frac{d\bar{p}}{ds}, \quad \bar{a}_P(s) := \frac{d^2\bar{p}}{ds^2}.$$

È interessante notare che  $\hat{v}_P$  è un *versore*, ovvero  $\|\hat{v}_P\|^2 = 1$ . Infatti basta osservare che, essendo  $\bar{p}(s) = p(\tau(s))$ , allora

$$\hat{v}_P(s) = \frac{d\bar{p}}{ds} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v_P(\tau(s))}{\|v_P(\tau(s))\|}.$$

Da quanto detto discende anche che

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d\|\hat{v}_P(s)\|^2}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d\langle \hat{v}_P(s), \hat{v}_P(s) \rangle}{ds} = \langle \hat{v}_P(s), \bar{a}_P(s) \rangle$$

ovvero  $\hat{v}_P$  e  $\bar{a}_P$  sono ortogonali: essendo  $\hat{v}_P$  un versore tangente alla curva,  $\bar{a}_P$  è un vettore ortogonale ad essa. Il modulo di  $\bar{a}_P$  ha un ruolo geometrico importante in quanto definisce la *curvatura* della curva: si scrive infatti che il *raggio di curvatura*  $\rho$  nel punto di ascissa curvilinea  $s$  e la corrispondente *curvatura*  $\kappa$  sono dati da

$$\rho(s) := \frac{1}{\|\bar{a}_P(s)\|} \quad \kappa(s) := \frac{1}{\rho(s)}.$$

Si osservi che nel caso di un cui la traiettoria sia rettilinea,  $\bar{a}_P = \mathbf{0}$ , che è come dire che il raggio di curvatura è infinito: in effetti, si può dimostrare che il raggio di curvatura in un certo punto è il raggio del *cerchio osculatore* della curva, ovvero del cerchio tangente alla curva in detto punto che meglio approssima la curva stessa. Chiamando

$$\hat{n}_P(s) = \rho(s)\bar{a}_P(s)$$

il *versore* associato a  $\bar{a}_P(s)$ , esso è detto *normale principale* della traiettoria.

Ad ascissa curvilinea  $s$  fissata, i versori  $\hat{v}_P$  e  $\hat{n}_P$  individuano quindi due direzioni ortogonali speciali, una tangente alla curva e l'altra ortogonale ad essa. Insieme ad essi si può definire una terza direzione, detta *binormale* e data dal versore

$$\hat{b}_P := \hat{v}_P \wedge \hat{n}_P$$

in modo che  $(\hat{v}_P, \hat{n}_P, \hat{b}_P)$  costituisca una *terna intrinseca* ortonormale nella posizione della curva di ascissa curvilinea  $s$ . È possibile riscrivere velocità e accelerazione in ciascun punto della traiettoria rispetto a questa terna. Basta infatti osservare che  $p(t) = \bar{p}(s(t))$  per scrivere

$$v_P = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 p_j \hat{i}_j = \dot{s} \sum_{j=1}^3 \frac{d\bar{p}_j}{ds} \hat{i}_j = \dot{s} \hat{v}_P.$$

Si dice che il moto è *uniforme* se  $\dot{s}$  è costante. Derivando ancora una volta si ha

$$a_P = \dot{v}_P = \ddot{s} \hat{v}_P + \dot{s}^2 \bar{a}_P = \ddot{s} \hat{v}_P + \frac{\dot{s}^2}{\rho(s)} \hat{n}_P.$$

Quest'ultima equazione mostra che l'accelerazione ha in generale una componente *parallela* alla traiettoria, nulla solo se  $\ddot{s} = 0$ , e una componente *ortogonale*, tanto più rilevante (a parità di  $\dot{s}$ ) quanto più piccolo è il raggio di curvatura  $\rho$ . D'altra parte, né velocità né accelerazione hanno componenti lungo  $\hat{b}_P$ . Le decomposizioni sopra ancora una volta separano l'informazione puramente cinematica (contenuta in  $s$ ) da quella puramente geometrica (contenuta in  $\hat{v}_P$  e  $\hat{n}_P$ ) relativa alla traiettoria.

**Esempio 1.1** — Consideriamo un punto materiale  $P$  individuato dal vettore  $p(t)$  secondo un riferimento ortonormale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  tale per cui

$$p(t) = R \cos \omega t \hat{i}_1 + R \sin \omega t \hat{i}_2 + v_z t \hat{i}_3, \quad t \in [0, T],$$

dove  $R, \omega, v_z, T$  sono tutte quantità positive. Un moto siffatto è rappresentato in Fig. 1. La velocità del punto ha coordinate date da

$$v_P(t) = \dot{p}(t) = -R\omega \sin \omega t \hat{i}_1 + R\omega \cos \omega t \hat{i}_2 + v_z \hat{i}_3 \Rightarrow \|\dot{p}(t)\| = \sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2} \equiv v,$$

per cui la lunghezza della traiettoria percorsa si trova immediatamente come

$$\ell = \int_0^T \|\dot{p}(\tau)\| d\tau = \sqrt{R^2\omega^2 + v_z^2} T = vT.$$

In particolare, possiamo introdurre l'ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{p}(\tau)\| d\tau = vt \Rightarrow t = \tau(s) = \frac{s}{v}.$$

Stando così le cose, possiamo usare le formule precedenti per derivare la parametrizzazione intrinseca della curva

$$\bar{p}(s) = p(\tau(s)) = R \cos \frac{\omega s}{v} \hat{i}_1 + R \sin \frac{\omega s}{v} \hat{i}_2 + \frac{v_z s}{v} \hat{i}_3.$$

Da questa espressione possiamo calcolare le coordinate dei tre vettori della terna intrinseca. In particolare

$$\hat{v}_P = \frac{d\bar{p}}{ds} = -\frac{R\omega}{v} \sin \frac{\omega s}{v} \hat{i}_1 + \frac{R\omega}{v} \cos \frac{\omega s}{v} \hat{i}_2 + v_z \hat{i}_3,$$

che corrispondono alle coordinate del versore  $\hat{v}_P$ . Derivando una seconda volta si ottiene

$$\bar{a}_P = \frac{d\hat{v}_P}{ds} = \frac{d^2\bar{p}}{ds^2} = -\frac{R\omega^2}{v^2} \cos \frac{\omega s}{v} \hat{i}_1 - \frac{R\omega^2}{v^2} \sin \frac{\omega s}{v} \hat{i}_2 - \frac{R\omega^2 v_z}{v^2} \hat{i}_3$$

che non è un versore (corrisponde al vettore  $\bar{a}_P$ ) ma da cui possiamo estrarre il raggio di curvatura  $\rho$ , essendo

$$\rho = \frac{1}{\|\bar{a}_P\|} = \frac{v^2}{R\omega^2}.$$

Essendo  $\hat{n}_P = \rho \mathbf{a}_P = \frac{\bar{\mathbf{a}}_P}{\|\bar{\mathbf{a}}_P\|}$ , esso ha quindi coordinate

$$\hat{n}_P = -\cos \frac{\omega s}{v} \hat{i}_1 + \sin \frac{\omega s}{v} \hat{i}_2.$$

Il terzo elemento della terna,  $\hat{b}_P$ , si trova ricordando che  $\hat{b}_P := \hat{v}_P \wedge \hat{n}_P$ , per cui eseguendo il prodotto vettoriale esso ha coordinate

$$\hat{b}_P = v_z \sin \frac{\omega s}{v} \hat{i}_1 - v_z \cos \frac{\omega s}{v} \hat{i}_2 + R\omega \hat{i}_3.$$

Supponiamo ora che  $v_z = 0$ : in questo caso, il moto è *piano*,  $v = R\omega$  e, di conseguenza,  $\rho = R$ , come atteso (il raggio di curvatura è il raggio della circonferenza su cui avviene il moto). In questo caso, il moto ha una descrizione molto semplice in coordinate polari: in coordinate polari infatti  $r(t) = R$  e  $\theta(t) = \omega t$ , per cui volendo decomporre posizione, velocità e accelerazione in componenti radiale e trasversa si trova subito

$$\mathbf{p} = R\hat{e}_r, \quad \mathbf{v}_P = R\hat{e}_\theta, \quad \mathbf{a}_P = -R\hat{e}_r,$$

dove

$$\hat{e}_r = \cos \omega t \hat{i}_1 + \sin \omega t \hat{i}_2, \quad \hat{e}_\theta = -\sin \omega t \hat{i}_1 + \cos \omega t \hat{i}_2.$$

**1.1.1. Equazioni di Frenet–Serret.** Esiste un insieme di equazioni differenziali che lega gli elementi della terna intrinseca, dette *equazioni di Frenet–Serret*, che non dimostriamo. Abbiamo già visto la prima di queste equazioni, ovvero che

$$\frac{d\hat{v}_P}{ds} = \kappa(s)\hat{n}_P.$$

Derivando  $\hat{b}_P$ , si vede che vale una relazione simile ma che coinvolge un prefattore diverso, detto *torsione*  $\chi(s)$

$$\frac{d\hat{b}_P}{ds} = \chi(s)\hat{n}_P.$$

L'ultima formula di Frenet–Serret esprime il fatto che la derivata di  $\hat{n}_P$  dipende da  $\hat{v}_P$  e  $\hat{b}_P$  tramite curvatura e torsione,

$$\frac{d\hat{n}_P}{ds} = -\kappa(s)\hat{v}_P - \chi(s)\hat{b}_P.$$

**1.2. Moto nel piano e coordinate polari.** Un caso di particolare interesse è quello in cui la curva  $\mathbf{p}$  giace completamente nel piano. Supponiamo per esempio che  $\mathbf{p}(t) = p_1(t)\hat{i}_1 + p_2(t)\hat{i}_2 + p_3\hat{i}_3$  per  $t \in [t_1, t_2]$ : si noti che  $p_3$  *non* dipende da  $t$ . Lo studio del moto lungo la curva può essere quindi eseguito usando soltanto le due coordinate cartesiane  $(p_1, p_2)^\top$ , dato che  $p_3$  è fisso: possiamo in particolare scegliere l'origine in modo tale che  $p_3 = 0$ . È possibile scrivere la posizione del punto utilizzando le coordinate polari, introducendo due variabili  $(r(t), \theta(t))$  tali per cui

$$\begin{cases} p_1(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ p_2(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{p}(t) = r(t) \cos \theta(t) \hat{i}_1 + r(t) \sin \theta(t) \hat{i}_2,$$

dove abbiamo fissato come asse polare l'asse individuato dalla direzione di  $\hat{i}_1$ . Introduciamo ora una coppia di due versori  $\{\hat{e}_r(t), \hat{e}_\theta(t)\}$  così fatta

$$\hat{e}_r(t) = \cos \theta(t) \hat{i}_1 + \sin \theta(t) \hat{i}_2, \quad \hat{e}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \hat{i}_1 + \cos \theta(t) \hat{i}_2.$$



Il versore  $\hat{e}_r$  punta nella direzione radiale verso  $p$ , mentre il versore  $\hat{e}_\theta$  punta nella direzione trasversa, ovvero ortogonale a  $\hat{e}_r$ . Dato che  $r$  e  $\theta$  dipendono da  $t$ , questi due versori dipenderanno anch'essi da  $t$ . Abbiamo quindi che  $p = r\hat{e}_r$ . Possiamo osservare che

$$\dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \hat{i}_2 = \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{i}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \hat{i}_2 = -\dot{\theta} \hat{e}_r$$

per cui

$$v_P = \dot{p} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad a_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta.$$

I coefficienti della decomposizione in termini di  $\hat{e}_r$  e  $\hat{e}_\theta$  esprimono le componenti radiale e trasversa di velocità e accelerazione. La norma della velocità si può scrivere in termini delle variabili angolari in maniera diretta come

$$\|v_P\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$$

## 2. Cambi di riferimento: cinematica relativa

Nella precedente sezione abbiamo fatto riferimento ad un punto materiale in un moto rispetto ad un riferimento che assumiamo “fisso”  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Ha però senso chiedersi come le quantità introdotte si trasformino passando da un certo riferimento fisso ad un altro che è mobile rispetto al riferimento di partenza<sup>1</sup>. In particolare, consideriamo l'eventualità in cui esistano due osservatori, uno “fisso”, con un associato riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , ed uno *mobile* rispetto al primo, con un riferimento cartesiano  $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , che assumiamo positivamente orientato, in cui  $O_\star$  è un punto che evolve come il vettore  $\mathbf{o}_\star = \overrightarrow{OO_\star}$ , e ugualmente  $\hat{e}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sono versori che evolvono nel tempo rispetto al riferimento fisso. La terna mobile  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$  deve essere ortonormale in ogni istante di tempo: così, per esempio, se osserviamo l'evoluzione nell'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ , varrà

$$\langle \hat{e}_3(t), \hat{e}_1(t) \wedge \hat{e}_2(t) \rangle = 1, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

La terna ortonormale  $\{\hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t)\}$  e l'evoluzione  $\mathbf{o}_\star(t)$  dell'origine sono sufficienti a descrivere l'evoluzione temporale  $p(t)$  di un punto  $P$  nel nuovo riferimento. Infatti, il vettore  $p^\star(t) := p(t) - \mathbf{o}_\star(t)$ , che individua il punto nel *nuovo* riferimento, ha componenti  $p_i^\star(t) = \langle p(t) - \mathbf{o}_\star(t), \hat{e}_i(t) \rangle$  rispetto alla nuova base, di modo che  $p^\star(t) = \sum_{i=1}^3 p_i^\star(t) \hat{e}_i(t)$ , per cui possiamo scrivere

$$(1.1) \quad p(t) = \mathbf{o}_\star(t) + p^\star(t) = \mathbf{o}_\star(t) + \sum_{i=1}^3 p_i^\star(t) \hat{e}_i(t).$$

Come sappiamo dall'algebra lineare, a  $t$  fissato, è possibile individuare una matrice di cambio di base  $\mathbf{R}(t)$  che permette di passare dalla base fissa  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$  alla base mobile  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , scrivendo la nuova base in termini della vecchia,

$$\hat{e}_i(t) = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(t) \hat{i}_j.$$

Da quanto noto dall'algebra lineare, inoltre, questa matrice sarà *ortogonale*, ovvero  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_3$ . La matrice  $\mathbf{R}$  esegue una *rotazione rigida degli assi*: fornisce una terna cartesiana ortonormale a partire da una diversa terna cartesiana ortonormale senza agire sull'origine. In questo modo si ha

$$(1.2) \quad p(t) = \mathbf{o}_\star(t) + \sum_{i=1}^3 p_i^\star(t) \hat{e}_i(t) = \mathbf{o}_\star(t) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_i^\star(t) R_{ij}(t) \hat{i}_j \Leftrightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{o}_\star(t) + \mathbf{p}^{\star\top}(t) \mathbf{R}(t),$$

<sup>1</sup>In questa sezione, indicheremo con un  $u_\star$  una quantità *associata al* riferimento mobile ma espressa *relativamente al riferimento fisso*, e con  $u^\star$  una quantità *espressa nel* riferimento mobile.

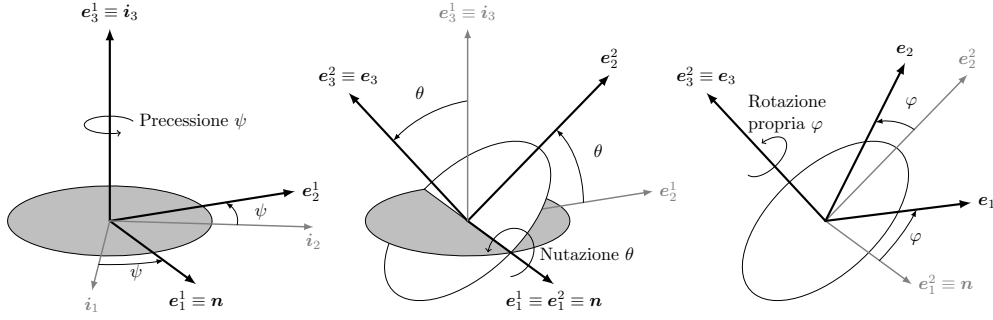


FIGURA 2. Angoli di Eulero.

dove  $\mathbf{p}^*(t) \in \mathbb{R}^3$  è la terna di coordinate del punto nella base mobile, e  $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^3$  è la terna di coordinate dello stesso punto nel riferimento fisso. Vale la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 2.1.** *Si dice che  $P$  evolve in maniera solidale col nuovo riferimento se in tale riferimento è individuato da un vettore  $\mathbf{p}^*$  tale che*

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p}^*(t), \hat{e}_i(t) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

In altre parole, un punto che si muove in modo solidale con la terna mobile ha coordinate che *non* cambiano rispetto a questa terna.

**2.1. Angoli di Eulero.** Come abbiamo detto, la matrice di cambio di base  $\mathbf{R}$  deve essere ortogonale, ovvero deve essere tale che  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$ , espressione che può essere scritta esplicitamente per ogni coppia  $(i, j)$  come

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Questa condizione fornisce sei equazioni distinte per nove quantità da fissare, ovvero gli elementi di  $\mathbf{R}$ . In altre parole, ogni matrice  $\mathbf{R}$  è caratterizzata da soli *tre* parametri arbitrari: ciò significa che per caratterizzare un cambio di riferimento ortonormale sono necessarie le tre coordinate  $\mathbf{o}_*(t)$  della nuova origine rispetto al riferimento fisso, e tre parametri per fissare la matrice  $\mathbf{R}(t)$ , come si vede dall'Eq. (1.2). Per introdurre una opportuna parametrizzazione di  $\mathbf{R}$  utilizzeremo il metodo di Eulero: questo metodo *non* è unico, e in effetti altre scelte di metodo sono possibili, ma è quello più diffusamente utilizzato per via di una serie di vantaggi legati a come la parametrizzazione di  $\mathbf{R}$  viene introdotta.

Immaginiamo quindi di voler fare il cambio di terna ortonormale

$$(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3) \rightarrow (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3).$$

Supponiamo che  $\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3 \neq \mathbf{0}$  (ovvero che  $\hat{i}_3$  e  $\hat{e}_3$  *non* siano paralleli) e definiamo il versore

$$\hat{n} = \frac{\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3}{\|\hat{i}_3 \wedge \hat{e}_3\|}.$$

Questo versore indica il cosiddetto *asse dei nodi*. In base a questo asse possiamo definire tre angoli, detti *angoli di Eulero*:

**Angolo di precessione:** Angolo  $\psi \in [0, 2\pi]$  di cui bisogna ruotare  $\hat{i}_1$ , nel piano ortogonale a  $\hat{i}_3$ , per sovrapporlo a  $\hat{n}$ .

**Angolo di nutazione:** Angolo  $\theta \in [0, \pi]$  di cui bisogna ruotare  $\hat{i}_3$ , nel piano ortogonale a  $\hat{n}$ , per ottenere  $\hat{e}_3$ .

**Angolo di rotazione propria:** Angolo  $\varphi \in [0, 2\pi]$  di cui bisogna ruotare  $\hat{n}$  per sovrapporlo a  $\hat{e}_1$  nel piano ortogonale a  $\hat{e}_3$ .

Questi angoli si possono mettere in corrispondenza con tre *rotazioni* attorno ad assi coordinati, che permettono di trasformare la base di partenza in quella di arrivo. Tali rotazioni si intendono in senso antiorario rispetto al versore ortogonale specificato. Per essere più precisi, con riferimento alla Fig. 2, passiamo dalla base  $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  alla base  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  eseguendo i seguenti passi:

$$(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3) \rightarrow (\hat{e}_1^1, \hat{e}_2^1, \hat{e}_3^1) \rightarrow (\hat{e}_1^2, \hat{e}_2^2, \hat{e}_3^2) \rightarrow (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3),$$

Il primo passo corrisponde ad una rotazione attorno a  $\hat{i}_3$ ,

$$\hat{e}_1^1 = \cos \psi \hat{i}_1 + \sin \psi \hat{i}_2 \equiv \hat{n}, \quad \hat{e}_2^1 = -\sin \psi \hat{i}_1 + \cos \psi \hat{i}_2, \quad \hat{e}_3^1 = \hat{i}_3,$$

seguita da una rotazione attorno al nuovo asse  $\hat{e}_1^1$

$$\hat{e}_1^2 = \hat{e}_1^1, \quad \hat{e}_2^2 = \cos \theta \hat{e}_1^1 + \sin \theta \hat{e}_3^1, \quad \hat{e}_3^2 = -\sin \theta \hat{e}_1^1 + \cos \theta \hat{e}_3^1,$$

e infine una rotazione attorno all'asse  $\hat{e}_3^2$ , che coincide con l'asse finale desiderato  $\hat{e}_3$ ,

$$\hat{e}_1 = \cos \varphi \hat{e}_1^2 + \sin \varphi \hat{e}_2^2, \quad \hat{e}_2 = -\sin \varphi \hat{e}_1^2 + \cos \varphi \hat{e}_2^2, \quad \hat{e}_3 = \hat{e}_3^2.$$

Con un po' di algebra si può esprimere direttamente la nuova base in termini della vecchia come

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) \hat{i}_1 + (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) \hat{i}_2 + \sin \theta \sin \varphi \hat{i}_3 \\ (1.3) \quad \hat{e}_2 &= (-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) \hat{i}_1 + (-\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) \hat{i}_2 + \sin \theta \cos \varphi \hat{i}_3 \\ \hat{e}_3 &= \sin \psi \sin \theta \hat{i}_1 - \cos \psi \sin \theta \hat{i}_2 + \cos \theta \hat{i}_3. \end{aligned}$$

Le formule sopra equivalgono alla seguente forma per  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta & -\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La parametrizzazione della rotazione  $\mathbf{R}$  qui introdotta richiede che  $\hat{i}_3$  e  $\hat{e}_3$  non siano paralleli: si può dimostrare tuttavia che questa difficoltà, ovvero l'impossibilità di associare biunivocamente tutte le rotazioni ad un singolo tipo di parametrizzazione, appare per *qualsiasi* costruzione. Se d'altra parte  $\hat{e}_3 = \hat{i}_3$ , è chiaro che abbiamo bisogno solo di un movimento di rotazione, e più precisamente di una precessione, in cui  $\hat{i}_1 \rightarrow \hat{e}_1$ , per cui le Eq. (1.3) diventano

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \cos \alpha \hat{i}_1 + \sin \alpha \hat{i}_2 \\ (1.4) \quad \hat{e}_2 &= -\sin \alpha \hat{i}_1 + \cos \alpha \hat{i}_2 \Leftrightarrow \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_3 &= \hat{i}_3. \end{aligned}$$

In questo caso,  $\alpha$  è semplicemente detto *angolo di rotazione*. Si noti che la forma sopra di  $\mathbf{R}$  si ottiene anche dalla costruzione di Eulero nel limite  $\theta \rightarrow 0$  e identificando  $\alpha = \psi + \varphi$ .

**2.2. Velocità angolare e formule di Poisson.** Il riferimento mobile dipende naturalmente, in generale, dalla variabile temporale  $t$  ed è quindi utile studiarne l'evoluzione nel tempo. Possiamo anzitutto osservare che, dovendo mantenersi ortonormale in ogni istante,

$$\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow 0 = \frac{d\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle}{dt} = \langle \dot{\hat{e}}_i, \hat{e}_j \rangle + \langle \hat{e}_i, \dot{\hat{e}}_j \rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

In particolare, per  $i = j$ ,  $\langle \dot{\hat{e}}_i, \dot{\hat{e}}_i \rangle = 0$ , ovvero la derivata temporale di  $\hat{e}_i$  è ortogonale al versore  $\hat{e}_i$  stesso. Il seguente teorema, dovuto a Poisson, ottiene una informazione più precisa su come evolvono questi versori ortonormali.

■ **TEOREMA 2.1 (Poisson).** *Sia  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  una terna ortonormale tale che  $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$  dipendente dal tempo. Allora esiste un unico vettore  $\omega_*$ , detto vettore velocità angolare tale per cui*

$$(1.5) \quad \dot{\hat{e}}_i = \omega_* \wedge \hat{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

*Inoltre, ogni terna solidale alla terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  evolve con la stessa velocità angolare.*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è costruttiva. Sia  $\omega_* = \sum_i \omega_i \hat{e}_i$  e moltiplichiamo scalarmente per  $\hat{e}_2$  l'Eq. (1.5) per  $i = 1$ , ottenendo

$$\langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_2 \rangle = \langle \omega_* \wedge \hat{e}_1, \hat{e}_2 \rangle = \omega_3.$$

In maniera simile si procede per ottenere le componenti di  $\omega_*$  rispetto agli altri elementi della base, di modo che l'unica espressione di  $\omega_*$  ammessa è

$$\omega_* = \langle \dot{\hat{e}}_2, \hat{e}_3 \rangle \hat{e}_1 + \langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_2 + \langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_2 \rangle \hat{e}_3.$$

Usiamo ora questa espressione per calcolare  $\omega_* \wedge \hat{e}_1$ : usando il fatto che  $\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = \hat{e}_2$  e  $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 = -\hat{e}_3$ , si ottiene

$$\omega_* \wedge \hat{e}_1 = -\hat{e}_3 \langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{e}_1 \rangle + \hat{e}_2 \langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_2 \rangle.$$

Ma abbiamo visto che  $\langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{e}_1 \rangle = -\langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_3 \rangle$  e inoltre  $\langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_1 \rangle = 0$  per cui possiamo scrivere

$$\omega \wedge \hat{e}_1 = \langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1 + \langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_2 \rangle \hat{e}_2 + \langle \dot{\hat{e}}_1, \hat{e}_3 \rangle \hat{e}_3 \equiv \dot{\hat{e}}_1.$$

In maniera simile si procede per gli altri casi. Infine, dimostriamo che  $\omega$  è lo stesso per ogni terna solidale alla terna mobile considerata. Supponiamo quindi di avere una diversa terna ortonormale  $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$  solidale alla terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . Abbiamo che

$$\dot{\hat{b}}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} (\langle \hat{b}_i, \hat{e}_j \rangle \hat{e}_j) = \sum_{j=1}^3 \frac{d\langle \hat{b}_i, \hat{e}_j \rangle}{dt} \hat{e}_j + \sum_{j=1}^3 \langle \hat{b}_i, \hat{e}_j \rangle \dot{\hat{e}}_j = \omega_* \wedge \sum_{j=1}^3 \langle \hat{b}_i, \hat{e}_j \rangle \hat{e}_j = \omega_* \wedge \hat{b}_i$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\langle \hat{b}_i, \hat{e}_j \rangle$  non dipende dal tempo essendo la terna  $\{\hat{b}_i\}_{i=1}^3$  solidale.  $\square$

Si noti che la formula nell'enunciato del Teorema di Poisson può essere invertita e il vettore  $\omega_*$  si può scrivere come

$$(1.6) \quad \omega_* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \wedge \dot{\hat{e}}_i.$$

Usando l'identità  $a \wedge (b \wedge c) = b\langle a, c \rangle - c\langle a, b \rangle$ , basta infatti osservare che

$$(1.7) \quad \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \wedge \dot{\hat{e}}_i = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \wedge (\omega_* \wedge \hat{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (\omega_* - \langle \omega_*, \hat{e}_i \rangle \hat{e}_i) = 3\omega_* - \omega_* = 2\omega_*.$$

Supponiamo ora di avere un vettore  $u$  generico, espresso in termini della terna fissa come  $u = \sum_{j=1}^3 u_j \hat{i}_j$ , e calcoliamone la derivata temporale. Rispetto alla terna fissa, questa derivata sarà  $\dot{u} = \sum_j \dot{u}_j \hat{i}_j$ . Questo stesso vettore può scriversi rispetto alla terna mobile come  $u = \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{e}_i$ , dove sia i coefficienti che i versori di base sono in generale dipendenti dal tempo. Derivando questa espressione, avremo

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^* \hat{e}_i + \omega_* \wedge \sum_{i=1}^3 u_i^* \hat{e}_i \equiv u' + \omega_* \wedge u.$$

La quantità  $u' = \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^* \hat{e}_i$  è la derivata temporale del vettore *nel riferimento mobile*: in effetti, un osservatore solidale al riferimento mobile vede la terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  come *fissa*, e nel calcolo della velocità tiene conto della dipendenza temporale delle sole coordinate, non della base. In particolare applicando questo risultato a  $\omega_*$  si trova

$$\dot{\omega}_* = \omega'_* + \omega_* \wedge \omega_* = \omega'_*.$$

ovvero le derivate temporali di  $\omega_*$  rispetto ad un riferimento fisso e rispetto ad un riferimento mobile sono uguali.

**2.3. Composizione delle velocità.** Avendo ottenuto la relazione tra derivate temporali in due sistemi di riferimento per un generico vettore, possiamo ora applicare questo risultato ad un vettore posizione. Supponiamo quindi di avere un oggetto puntiforme  $P$  con posizione individuata dal vettore  $p(t)$  rispetto ad un riferimento cartesiano fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . In un riferimento mobile  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , la stessa posizione è individuata dal vettore  $p^*(t) = p(t) - o_*(t)$ , vettore da intendersi applicato in  $O_*$ , origine del riferimento mobile. Varrà la seguente legge di composizione

$$p = o_* + p^*.$$

Derivando rispetto al tempo otterremo

$$v_P := \dot{p} = \dot{o}_* + \dot{p}^* \equiv v_* + \dot{p}^*.$$

dove  $v_* := \dot{o}_*$  è la velocità della nuova origine  $O_*$  rispetto al sistema di riferimento fisso. Per quanto detto sopra

$$\dot{p}^* = v_P^* + \omega_* \wedge p^*$$

dove  $v_P^* := \dot{p}^{*'}$  è la velocità osservata nel riferimento mobile. Abbiamo ottenuto così la *legge di composizione delle velocità di Galilei*

$$(1.8) \quad v_P = v_P^* + v_P^{\tau}, \quad \text{dove} \quad v_P^{\tau} := v_* + \omega_* \wedge p^* = v_* + \omega_* \wedge (p - o_*).$$

Il termine di differenza tra le velocità nei due riferimenti,  $v_P^{\tau}$ , è detta *velocità di trascinamento*. In particolare, si parla di *trasformazione galileiana* nel caso in cui  $\omega_* = \mathbf{0}$  e  $a_* := \ddot{o}_* = \mathbf{0}$ , in modo che

$$v_P = v_P^* + v_*.$$

Vedremo subito che il fatto che in una trasformazione  $\ddot{o}_*$  sia nullo semplifica molto anche la composizione delle accelerazioni.

**2.4. Composizione delle accelerazioni.** Ripetendo i ragionamenti sopra sulla formula per le velocità otteniamo la legge delle composizioni per le accelerazioni. Derivando rispetto al tempo l'Eq. (1.8) otteniamo infatti

$$(1.9a) \quad a_P = a_P^* + a_P^{\tau} + a_P^c,$$

dove abbiamo scritto  $\ddot{o}_* = a_*$  e

$$(1.9b) \quad a_P^{\tau} := a_* + \dot{\omega}_* \wedge p^* + \omega_* \wedge (\omega_* \wedge p^*), \quad a_P^c := 2\omega_* \wedge v_P^*$$

sono dette rispettivamente *accelerazione di trascinamento* e *accelerazione di Coriolis*. L'accelerazione di trascinamento corrisponde all'accelerazione di un punto imperneato al riferimento mobile, privo di velocità relativa rispetto ad esso. Il termine aggiuntivo è dovuto ad una ulteriore accelerazione che appare quando  $\omega_* \wedge v_P^* \neq \mathbf{0}$ . Si noti che se  $\omega_* = \dot{\omega}_* = \mathbf{0}$ , ovvero la velocità angolare è costantemente nulla (osservatore mobile traslante) la legge di composizione delle velocità è semplicemente  $a_P = a_* + a_P^*$ . Infine, se anche  $a_* = \mathbf{0}$ , le accelerazioni nei due riferimenti sono uguali.

**2.5. Composizione delle velocità angolari.** Rimane da specificare come possono essere composte le velocità angolari. Supponiamo per esempio di avere un riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  con base  $\{\hat{i}_j\}_{j=1}^3$ , e un riferimento mobile  $O_\bullet\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$  rispetto ad esso con base  $\{\hat{b}_i\}_{i=1}^3$  avente velocità angolare associata  $\omega$  rispetto al riferimento fisso. Supponiamo quindi di avere un *terzo* riferimento  $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , anch'esso mobile e con base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ , avente velocità angolare  $\omega_\star$  rispetto al riferimento fisso. Vogliamo calcolare la velocità angolare  $\omega_{\bullet|\star}$  del riferimento mobile  $O_\bullet\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$  rispetto al riferimento mobile  $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ . Come osservazione preliminare, supponiamo per che si abbia un vettore  $u$  solidale con il riferimento  $O_\bullet\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$ . Ciò significa che

$$\dot{u} = \omega_\bullet \wedge u$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare del corpo nel riferimento fisso. Nel riferimento  $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  si osserva la stessa relazione

$$u' = \omega_{\bullet|\star} \wedge u$$

per un certo — in generale diverso — vettore velocità angolare  $\omega_{\bullet|\star}$  (qui, come sopra,  $u'$  è la derivata di  $u$  nel riferimento mobile  $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ ). D'altra parte sappiamo che la relazione tra la derivata temporale in  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e la derivata in  $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$$\dot{u} = u' + \omega_\star \wedge u \Leftrightarrow \omega \wedge u = \omega_{\bullet|\star} \wedge u + \omega_\star \wedge u = (\omega_{\bullet|\star} + \omega_\star) \wedge u.$$

Essendo  $u$  arbitrario, questo significa che

$$\omega_\bullet = \omega_{\bullet|\star} + \omega_\star,$$

che è la legge cercata che lega le tre velocità angolari.

**Q** La legge di composizione dei momenti angolari può essere utile per scrivere una espressione esplicita del momento angolare in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate quando si passa da un sistema fisso ad uno mobile. Per essere più precisi, dato un riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , introduciamo tre riferimenti mobili.

- Il riferimento  $O\hat{e}_1^1\hat{e}_2^1\hat{e}_3^1$  ruota, rispetto al riferimento fisso, attorno all'asse  $\hat{e}_3^1 \equiv \hat{i}_3$  con velocità angolare  $\omega_1 = \dot{\psi}\hat{i}_3$ .
- Il riferimento  $O\hat{e}_1^2\hat{e}_2^2\hat{e}_3^2$  ruota, rispetto al riferimento  $O\hat{e}_1^1\hat{e}_2^1\hat{e}_3^1$ , attorno all'asse  $\hat{e}_1^2 \equiv \hat{e}_1^1$  con velocità angolare  $\omega_2 = \dot{\theta}\hat{e}_1^1$ .
- Il riferimento  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  ruota, rispetto al riferimento  $O\hat{e}_1^2\hat{e}_2^2\hat{e}_3^2$ , attorno all'asse  $\hat{e}_3 \equiv \hat{e}_3^2$  con velocità angolare  $\omega_3 = \dot{\varphi}\hat{e}_3^2$ .

In questo modo, in base a quanto detto sopra, la velocità angolare del riferimento mobile finale rispetto al riferimento fisso di partenza è

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \dot{\psi}\hat{i}_3 + \dot{\theta}\hat{e}_1^1 + \dot{\varphi}\hat{e}_3^2.$$

Esprimendo i vettori  $\hat{e}_1^1$  e  $\hat{e}_3^2$  in termini della base fissa si ottiene, dopo un po' di algebra,

$$(1.10a) \quad \omega = (\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) \hat{i}_1 + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) \hat{i}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{i}_3$$

o viceversa, scrivendo tutto in termini della base mobile finale

$$(1.10b) \quad \omega = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) \hat{e}_1 + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \hat{e}_2 + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \hat{e}_3.$$

### 3. Cinematica del corpo rigido

**3.1. Corpo rigido e sistema solidale.** Abbiamo finora considerato il moto di un singolo “oggetto puntiforme”  $P$  la cui posizione evolve nel tempo. Naturalmente ciò non è sufficiente in gran parte delle applicazioni ed occorre considerare sistemi più complicati costituiti da *insiemi* di punti, che costituiscono un *corpo* o *sistema*. Un sistema costituito da un insieme di punti la cui posizione non è in nessun modo vincolata si dice *libero*. Viceversa, se il sistema è costituito da punti la cui posizione o velocità è in qualche modo limitata, il sistema si dice *vincolato*.

Un importante tipo di sistema soggetto a vincoli è il cosiddetto *corpo rigido*. Un insieme di punti materiali  $\mathcal{B}$  si dice essere un *corpo rigido* se le distanze tra tutte le coppie di punti che lo costituiscono rimangono inalterate nel tempo. Si tratta quindi di un vincolo *olonomo interno*, ovvero che dipende dalle sole posizioni relative di componenti interne al sistema. Un corpo rigido può essere soggetto solo a *moti rigidi*, ovvero moti che rispettano questo vincolo lasciando siffatte distanze inalterate.

Un fatto importante riguardante lo studio dei corpi rigidi è costituito dalla possibilità di introdurre un *sistema di riferimento solidale* al corpo rigido stesso, ovvero un sistema di riferimento cartesiano  $O_*(t)\hat{e}_1(t)\hat{e}_2(t)\hat{e}_3(t)$  che partecipa del moto del corpo e tale che, rispetto ad esso, le *coordinate* dei punti del corpo rimangano inalterate al variare del tempo. Chiameremo *solidali* i punti la cui posizione rimane costante rispetto al sistema di riferimento solidale, ovvero che partecipano del moto del corpo rigido. Se  $p(t)$  è la posizione di un punto del corpo, nel riferimento solidale si ha  $p^*(t) = \sum_{i=1}^3 p_i^* \hat{e}_i(t)$ , dove  $p_i^*$  non dipende dal tempo, per cui si può scrivere l'Eq. (1.2) come

$$(1.11) \quad p(t) = o_*(t) + \sum_{i=1}^3 p_i^* \hat{e}_i(t) = o(t) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_i^* R_{ij}(t) \hat{e}_j \Leftrightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{o}(t) + \mathbf{p}^* \mathbf{R}(t),$$

dove stavolta  $\mathbf{p}^*$  è una terna *indipendente* dal tempo. L'equazione ottenuta è detta *equazione cartesiana di un moto rigido* e mostra come l'evoluzione delle coordinate di un punto del corpo possa essere descritta in termini dell'evoluzione della posizione di un punto solidale (l'origine  $O_*$  del riferimento) e di una matrice di rotazione: possiamo quindi caratterizzare il moto usando solo sei quantità, ovvero le tre coordinate di  $O_*$  e i tre angoli di Eulero necessari per scrivere  $\mathbf{R}(t)$ .

**3.2. Moti rigidi.** Avendo introdotto gli strumenti essenziali per la parametrizzazione di un moto rigido, studiamone più in dettaglio la cinematica, ovvero le quantità necessarie per descriverne il movimento e le loro relazioni, rammentando i risultati trovati per i riferimenti mobili.

L'esistenza di un sistema solidale col corpo permette di associare ad esso, per mezzo del teorema di Poisson, una *velocità angolare*, che indicheremo  $\omega$ . Il teorema di Poisson ci aiuta inoltre a *caratterizzare* in maniera semplice un moto rigido, dato che mostra che l'informazione sul moto di rotazione è contenuta in  $\omega$ , vettore tridimensionale, eventualmente dipendente dal tempo. Una conseguenza del teorema, infatti, è la seguente legge fondamentale.

**TEOREMA 3.1** (Legge di distribuzione delle velocità). *Siano dati due punti  $P$  e  $Q$  di un corpo in moto, individuati dai vettori  $p$  e  $q$  rispettivamente. Allora essi si muovono di moto rigido se e solo se*

$$(1.12) \quad v_P = v_Q + \omega \wedge (p - q).$$

**DIMOSTRAZIONE.** La formula di Poisson implica direttamente l'Eq. (1.12) se applicata al vettore solidale  $x = p - q$ . D'altra parte, si dimostra che l'Eq. (1.12) è sufficiente per avere moto rigido osservando che, se la formula sopra è verificata, le distanze tra i due punti rimangono costanti:

$$\frac{d \|p - q\|^2}{dt} = 2 \langle p - q, v_P - v_Q \rangle = 2 \langle p - q, \omega \wedge (p - q) \rangle = 0. \quad \square$$

La legge in Eq. (1.12) è anche detta *legge fondamentale del moto rigido* ed ha come conseguenza diretta la legge di distribuzione delle accelerazioni. Basta infatti derivare ancora una volta per ottenere

$$a_P = a_Q + \dot{\omega} \wedge (p - q) + \omega \wedge (\omega \wedge (p - q)),$$

dove abbiamo usato ancora una volta la formula di Poisson per derivare  $p - q$ , che è solidale.

3.2.1. *Particolari moti rigidi.* A seconda delle caratteristiche di  $\omega$  possono identificarsi alcuni tipi di moto rigido di speciale importanza.

**Moto traslatorio:**  $\omega(t) = \mathbf{0}$ : Un *moto traslatorio* di un corpo rigido è tale per cui *ogni* retta solidale al solido stesso mantiene la sua direzione rispetto al sistema di riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  invariata: questo è equivalente a richiedere che  $\omega \equiv \mathbf{0}$  per ogni tempo  $t$  del moto. Per mostrare ciò, supponiamo di avere un versore solidale al corpo  $\hat{u}$ , che identifica, per esempio, la direzione di una retta passante per due punti del corpo. Derivando rispetto al tempo, si ha che  $\dot{\hat{u}} = \omega \wedge \hat{u}$ : questa quantità è nulla per ogni scelta di  $\hat{u}$  se e solo se  $\omega = \mathbf{0}$ , per ogni direzione  $\hat{u}$ . Il fatto che  $\omega$  sia zero vuol dire che, in particolare, la terna di base solidale non cambia nel tempo: scegliendo al tempo iniziale  $\hat{e}_j(t_0) = \hat{i}_j$ , allora  $\hat{e}_j(t) = \hat{i}_j$  per tutti i tempi seguenti, e quindi

$$v_P = v_Q, \quad a_P = a_Q.$$

In altre parole, in questo caso ha senso parlare di velocità e accelerazione del corpo, avendo tutti i punti che lo costituiscono stesse velocità e accelerazione. Se le velocità sono costanti in direzione e modulo (e quindi le accelerazioni sono identicamente nulle), si dice che il corpo si muove di *moto rettilineo uniforme*.

**Moto rototraslatorio:**  $\omega(t) = \omega(t)\hat{\omega}$ : Un moto *rototraslatorio* consiste in un moto rigido in cui *una certa direzione solidale col corpo*, individuata da un versore  $\hat{u}$ , rimane invariata nel tempo rispetto al riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , ovvero  $\dot{\hat{u}} = \mathbf{0}$ . Come specificato dal seguente Lemma, questo implica che  $\omega = \omega(t)\hat{u}$ .

LEMMA 3.2. *Un moto è rototraslatorio se e solo se  $\omega(t) = \omega(t)\hat{\omega}$ , con  $\hat{\omega}$  direzione solidale con il corpo costante nel tempo.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che la condizione  $\omega \wedge \hat{u} = \mathbf{0}$  esprime il fatto che  $\hat{u}$  e  $\omega$  sono paralleli, ovvero  $\hat{u}$  è esattamente il versore di  $\omega$ .  $\square$

Se due punti del corpo  $p$  e  $q$  sono tali che, al tempo iniziale,  $p - q \parallel \hat{\omega}$ , allora essi si manterranno paralleli a  $\hat{\omega}$  durante tutto il moto e le loro velocità saranno uguali,  $v_P = v_Q$ : in altre parole, lungo una retta solidale parallela a  $\hat{\omega}$  i punti hanno tutti la stessa velocità.

Se si sceglie il riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  in modo che  $\hat{i}_3 \equiv \hat{\omega}$ , allora un cambio di variabili tra il sistema di riferimento dell'osservatore fisso e quello solidale ha la forma delle Eq. (1.4), ovvero il moto viene parametrizzato da quattro (e non sei) variabili. Usando l'espressione per  $\omega$  in Eq. (1.6) in combinazione con l'Eq. (1.4) si trova

$$\omega = \dot{\alpha}\hat{i}_3,$$

ovvero il modulo di  $\omega$  è proprio la derivata dell'angolo di rotazione: pertanto, per ottenere un sistema solidale è sufficiente scegliere un punto solidale  $p$  come origine, fissare  $\hat{e}_3$  nella direzione di  $\omega$  e ruotare di  $\alpha$  il riferimento fisso.

Due moti rototraslatori meritano una particolare attenzione. Supponiamo di avere un moto rototraslatorio con  $\omega = \omega(t)\hat{\omega}$ .

**Moto elicoidale:** Un moto rototraslatorio si dice *elicoidale* se esiste una retta solidale di direzione  $\hat{\omega}$  i cui punti hanno velocità parallela ad  $\hat{\omega}$ . In questo caso, scegliendo un punto  $p$  su detta retta come origine, è sufficiente conoscere la proiezione  $\langle p(t), \hat{\omega} \rangle$  di  $p$  lungo  $\hat{\omega}$ , e l'angolo di rotazione  $\alpha(t)$  per parametrizzare il moto. Se la velocità dei punti sulla retta è semplicemente nulla, allora il moto è **rotatorio** e  $\langle p(t), \hat{\omega} \rangle$  è costante, per cui l'unico parametro del sistema da conoscere per studiare il moto è l'angolo  $\alpha$ : la retta si dice essere un *asse di rotazione*.

**Moto piano:** Un moto rototraslatorio si dice *moto piano* se esiste un piano  $\Pi$  con versore normale  $\hat{\omega}$  e solidale col corpo che si mantiene sempre parallelo e a distanza



fissa da un piano  $\Pi^*$  fisso, detto *piano direttore*: ciò vuol dire che per ogni punto in posizione  $p(t)$  ha  $\langle \dot{p}(t), \hat{\omega} \rangle = 0$ . In altre parole, tutti i punti del corpo si muovono parallelamente a  $\Pi^*$ . La parametrizzazione del moto quindi avviene tenendo conto, oltre che dell'angolo  $\alpha$  di rotazione attorno ad un asse normale al piano direttore, della posizione di un punto di riferimento  $p$  del corpo nel piano ortogonale a  $\hat{\omega}$  passante per  $p$ . Sono pertanto necessarie tre variabili in totale, dato che la posizione del punto nel piano è identificata da sole due variabili. Studiare un moto rigido piano equivale perciò allo studio del moto di un corpo rigido bidimensionale, dato che il moto di tutti i punti è caratterizzato dalla loro proiezione sul piano direttore. Infine si noti che *un moto rotatorio è un caso particolare di moto piano*.

**Moto polare:**  $\exists p(t) = p_0$ : Un moto polare è un moto di un corpo rigido tale per cui esiste un punto  $P$  del corpo che è *fisso*, ovvero tale che il vettore posizione ad esso associato è costante  $p(t) \equiv p_0$  nel riferimento fisso. Possiamo in particolare usare questo punto come origine sia del nostro riferimento fisso che del nostro sistema solidale. La configurazione del corpo rigido è identificata, in generale, dai soli tre parametri euleriani. Il generico punto  $q$  del corpo ha quindi, in questo riferimento,  $v_Q = \omega \wedge q$ , sicché tutti i punti del corpo che giacciono nella direzione  $\omega(t)$  al tempo  $t$  hanno velocità nulla: l'asse passante per il punto fisso e orientato come  $\omega(t)$  si dice essere *asse di rotazione istantanea*, come vedremo di nuovo in seguito.

Tra i moti polari esiste una famiglia di moti con una proprietà particolare, detti *moti precessionali*: in tali moti è possibile scegliere un sistema di riferimento solidale  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  e un sistema di riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  tali per cui  $\langle \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle$  sia costante. Essendo  $\hat{i}_3$  fisso, questa condizione si può scrivere come  $\frac{d}{dt} \langle \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle = \langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{i}_3 \rangle = 0$ .

LEMMA 3.3. *Un moto è precessionale se e solo se  $\omega$  ha la forma*

$$\omega(t) = \omega_e(t)\hat{e}_3(t) + \omega_i(t)\hat{i}_3.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $\langle \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle$  è costante, derivando rispetto al tempo otteniamo che  $\langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{i}_3 \rangle = \langle \omega \wedge \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle = 0$ , ovvero  $\omega$ ,  $\hat{e}_3$  e  $\hat{i}_3$  sono complanari. Viceversa, se invece si assume che  $\omega$  abbia la decomposizione proposta dal Lemma,  $\langle \dot{\hat{e}}_3, \hat{i}_3 \rangle = \langle \omega \wedge \hat{e}_3, \hat{i}_3 \rangle = 0$ .  $\square$

**3.3. Atto di moto.** Il punto di vista seguito finora è stato quello di considerare la posizione  $p$  di ogni punto  $P$  di un corpo  $\mathcal{B}$  in un riferimento cartesiano, e di “seguirla” studiandone l'evoluzione in un intervallo temporale. Questo approccio, che si focalizza sui singoli punti seguendoli, è detto *lagrangiano*.

Un punto di vista diverso è quello *euleriano*: secondo questo approccio, ci si focalizza su un preciso istante di tempo  $t^*$  annotando, per ogni *posizione*  $P$  occupata dal corpo la velocità osservata in quel punto: in questo modo, si ottiene un *campo di velocità*  $v_P$ , detto *atto di moto*, ovvero una funzione che associa (al tempo dato) alla posizione  $P$  la velocità lì osservata. Dalla legge di distribuzione delle velocità sappiamo che, nel moto di un corpo rigido deve valere

$$(1.13) \quad v_P = v_Q + \omega \wedge (p - q)$$

per un vettore di velocità angolare  $\omega$ , dove  $p$  e  $q$  identificano i punti  $P$  e  $Q$  del corpo rigido rispetto ad un riferimento fisso dato nell'istante che stiamo analizzando. Un *atto di moto rigido* è un atto di moto che soddisfa specificatamente la relazione in Eq. (1.13), ovvero un campo di velocità *applicato* in una serie di punti nello spazio che stanno in relazione reciproca secondo l'Eq. (1.13). Esso è anche detto *atto di moto rototraslatorio*: la ragione è che, facendo riferimento ad un tempo fissato, il campo di velocità ha la caratteristica di avere una naturale *direzione privilegiata istantanea*, data proprio da  $\omega$ . Avviene così che  $v_P = v_Q$  per ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$  tale che  $\overrightarrow{PQ} \parallel \omega$ , esattamente come avviene in un moto rototraslatorio: si noti però che qui

si tratta di un *atto* di moto, e non è detto che  $\omega$  mantenga la stessa direzione in ogni istante di tempo.

La formula in Eq. (1.13) è ricca di conseguenze. Essa suggerisce per esempio l'introduzione di una interessante quantità, ovvero

$$I := \langle \omega, v_P \rangle = \langle \omega, v_Q \rangle + \langle \omega, \omega \wedge (p - q) \rangle = \langle \omega, v_Q \rangle.$$

La quantità  $I$  è detta *invariante scalare cinematico* ed esprime il fatto che la componente della velocità lungo  $\omega$  è la stessa per tutti i punti del corpo rigido. Essa *non dipende dal punto  $P$  in cui la si calcola*. Allo stesso modo (forse meno sorprendentemente) si può osservare che la componente delle velocità di due punti distinti lungo la direzione che li congiunge è la stessa ad ogni istante, dato che

$$\langle p - q, v_P \rangle = \langle p - q, v_Q \rangle + \langle p - q, \omega \wedge (p - q) \rangle = \langle p - q, v_Q \rangle.$$

È a questo punto necessaria una osservazione importante che giustificherà molti dei risultati seguenti. L'Eq. (1.13) lega tra loro le velocità dei punti di un corpo rigido. Tuttavia, può essere utilizzata per associare un vettore velocità  $v_X$  a un *qualsiasi* punto  $X$  dello spazio individuato dal vettore  $x$  utilizzando la legge

$$v_X = v_P + \omega \wedge (p - x)$$

dove  $P$  è un punto appartenente al corpo rigido. In questo modo,  $v_X$  è la velocità che avrebbe un *ipotetico punto materiale collocato nel punto  $X$  e in moto solidale col corpo*. Le proprietà di  $v_X$  intesa come funzione dello spazio sono alla base della classificazione degli atti di moto, e inoltre permettono di individuare degli interessanti luoghi geometrici, non necessariamente interni al corpo, che però ne aiutano la descrizione cinematica.

Sulla base di quanto detto, diamo le seguenti definizioni di particolari atti di moto rigido, che ricordano quelle già date per i moti rigidi ma che, va sottolineato, si riferiscono al campo di velocità *in un fissato istante*. Per questa ragione, un atto di moto non può essere caratterizzato in termini dell'evoluzione di rette solidali o di altre quantità, dato che si riferisce ad un istante fissato. Nel seguito, indicheremo come al solito  $\hat{\omega}$  il versore associato ad  $\omega$ .

**Atto di moto traslatorio:**  $\omega = \mathbf{0}$ , per cui  $v_X = v_Y$  per ogni coppia di punti  $X$  e  $Y$  in moto solidale col corpo. Naturalmente, in questo caso  $I = 0$ .

**Atto di moto elicoidale:** atto di moto rototraslatorio che presenta una retta  $\mathcal{R}$ , detto *asse di moto*, di direzione  $\hat{\omega}$  tale che  $v_X = v_Y = v\hat{\omega}$ ,  $v \neq 0$ , per ogni coppia  $X, Y \in \mathcal{R}$ . La velocità dei punti sull'asse di moto è detta *velocità di traslazione*.

**Atto di moto rotatorio:** atto di moto elicoidale che presenta una retta  $\mathcal{R}$  di direzione  $\hat{\omega}$  tale che  $v_X = v_Y = \mathbf{0}$  per ogni coppia  $X, Y \in \mathcal{R}$ : ciò significa che in un generico punto  $Z$  in moto solidale, individuato dal vettore  $z$ , se  $X \in \mathcal{R}$ , allora  $v_Z = \omega \wedge (z - x)$ . Un atto di moto rotatorio ha  $I = 0$ , dato che  $I$  è nullo su  $\mathcal{R}$ , e di conseguenza tutte le velocità hanno componente nulla nella direzione  $\hat{\omega}$ : l'asse di moto si dice quindi, in analogia con quanto fatto col moto rotatorio, *asse di rotazione istantanea*.

Si noti che, come anticipato, l'asse di moto di un atto di moto elicoidale non è necessariamente costituito da punti del corpo: si tratta di un *luogo geometrico* definito da una certa proprietà della funzione  $v_X$ , che può ad esempio essere completamente esterno al corpo.

Un atto di moto rigido non traslatorio ha una speciale proprietà introdotta dal seguente teorema di Giulio Mozzi.

■ **TEOREMA 3.4 (Mozzi–Chasles).** *Dato un atto di moto rigido con  $\omega \neq \mathbf{0}$ , esso è elicoidale. Inoltre, i punti sull'asse di moto hanno velocità di modulo minimo nel corpo rigido.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $v_X$  la velocità di un atto di moto rigido in un punto  $X$ : essa avrà una componente parallela ad  $\omega$  ed una ortogonale ad essa. Cerchiamo ora il punto  $Y$  nel piano ortogonale

al vettore  $\omega$  passante per  $X$  tale che  $v_Y \wedge \omega = \mathbf{0}$ : in altre parole, assumendo che esista un asse di moto rigido  $\mathcal{R}$ , cerchiamone il punto  $Y$  più vicino a  $X$ . Usando la formula dell'atto di moto rigido

$$\mathbf{0} = v_Y \wedge \omega = (v_X + \omega \wedge (y - x)) \wedge \omega = v_X \wedge \omega + \|\omega\|^2 (y - x) - \langle y - x, \omega \rangle \omega = v_X \wedge \omega + \|\omega\|^2 (y - x),$$

dove abbiamo usato l'identità  $a \wedge b \wedge c = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$ . Ciò significa che

$$y - x = \frac{\omega \wedge v_X}{\|\omega\|^2}.$$

Pertanto un punto  $Z$  della retta passante per  $Y$  con direzione  $\omega$  è individuato in generale da un vettore

$$(1.14) \quad z = x + \frac{\omega \wedge v_X}{\|\omega\|^2} + \lambda \omega.$$

per un qualche valore  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'equazione precedente fornisce, al variare di  $\lambda$ , tutti i punti dell'asse di moto. Tali punti hanno per costruzione una velocità parallela a  $\omega$ . D'altra parte  $v_X = v_Y + \omega \wedge (x - y)$ , da cui, essendo  $v_Y$  e  $\omega \wedge (x - y)$  ortogonali,  $\|v_X\|^2 = \|v_Y\|^2 + \|\omega \wedge (x - y)\|^2 \geq \|v_Y\|^2$ : i punti sull'asse di moto hanno velocità in modulo minima. Avendo trovato una retta i cui punti hanno velocità parallela alla retta stessa, l'atto di moto è *elicoidale*. Questo significa che ogni atto di moto rigido è elicoidale.  $\square$

Si noti che, nell'ipotesi  $\omega \neq \mathbf{0}$ , se  $I = \langle \omega, v_Y \rangle = 0$  per un punto  $Y$  dell'asse di moto, ciò significa che  $v_Y$  è nullo (dovendo esso essere parallelo a  $\omega$ ): in questo caso l'atto di moto è quindi rotatorio, e ogni altro punto ha velocità  $v_X = \omega \wedge (x - y)$ . Questa formula implica anche  $v_X$  è sempre ortogonale a  $\omega$ .

**3.3.1. Atti di moto nei moti rigidi piani.** Se si considera ora un moto rigido piano, questo ha  $I = 0$  dato che i vettori velocità sono ortogonali al vettore di velocità angolare. Dal teorema di Mozzi possiamo così derivare il seguente fatto.

**COROLLARIO 3.5 (Eulero).** *Un sistema in moto rigido piano ha un atto di moto traslatorio o rotatorio.*

Ciò equivale a dire che, essendo  $I = 0$ , o  $\omega = \mathbf{0}$  (e allora l'atto di moto è traslatorio) o  $\omega \neq \mathbf{0}$  (e allora l'atto di moto è rotatorio). Se  $\omega \neq \mathbf{0}$ , allora possiamo identificare un punto  $C$  intersezione tra il piano direttore del moto piano e l'asse istantaneo di rotazione: tale punto è detto *centro istantaneo di rotazione* e vale il seguente teorema che porta il nome di Michel Chasles.

**TEOREMA 3.6 (Chasles).** *In un moto rigido piano, le normali alle velocità  $v_X$  e  $v_Y$  in due punti distinti si intersecano nel centro di istantanea rotazione se il moto è rotatorio, mentre invece sono parallele se il moto è traslatorio.*

**DIMOSTRAZIONE.** Detto  $C$  il centro istantaneo di rotazione, identificato da un vettore  $c$  rispetto ad un riferimento fisso dato, il teorema discende dal fatto che, se il moto è rotatorio,  $v_X = \omega \wedge (x - c)$  e  $v_Y = \omega \wedge (y - c)$ .  $\square$

Il centro istantaneo di rotazione  $C$  può essere trovato usando la relazione in Eq. (1.14), scrivendo, dato un punto  $P$  in movimento solidale col corpo,

$$(1.15) \quad c = p + \frac{\omega \wedge v_P}{\|\omega\|^2}.$$

Questa equazione vale naturalmente ad ogni istante di tempo, e, utilizzata in diversi istanti di tempo, fornisce la posizione di  $C$  al variare di  $t$  nel riferimento fisso: la traiettoria descritta da  $C$  si dice *base* o *polare fissa*. Si può anche calcolare la traiettoria  $c^*$  del centro di rotazione  $C$  nel sistema di riferimento solidale  $O_* \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , usando per esempio come punto solidale proprio l'origine  $O_*$  del sistema di riferimento mobile, individuata dal vettore  $o_* = \overrightarrow{OO_*}$  nel riferimento fisso  $O \hat{i}_1 \hat{i}_2 \hat{i}_3$ . Supponendo che  $O_*$  abbia velocità  $v_* = \dot{o}_*$ , abbiamo che

$$c^* = c - o_* = \frac{\omega \wedge v_*}{\|\omega\|^2}.$$

La curva ottenuta applicando questa relazione, da intendersi nel sistema di riferimento solidale, si chiama *rulletta* o *polare mobile*. Ci si riferisce a base e rulletta come alle *traiettorie polari* del moto rigido. Si noti che, in generale,  $C$  non è solidale (diversamente, la rulletta sarebbe semplicemente un punto): esso corrisponde alla posizione in cui un punto solidale avrebbe velocità nulla secondo la legge in Eq. (1.13), ma questa posizione stessa *cambia nel tempo* e infatti in generale  $\dot{c} \neq 0$ .

**Q** Possiamo trovare una espressione piuttosto esplicita per il vettore che individua il centro istantaneo di rotazione  $C$  nel riferimento fisso, sia  $c$ , e nel riferimento solidale, sia  $c^*$ . Sappiamo che in un moto piano possiamo scrivere  $\omega = \dot{\alpha} \hat{i}_3$  e che il riferimento solidale può essere costruito con origine in una posizione solidale col corpo, e con base

$$(1.16) \quad \hat{e}_1 = \cos \alpha \hat{i}_1 + \sin \alpha \hat{i}_2, \quad \hat{e}_2 = -\sin \alpha \hat{i}_1 + \cos \alpha \hat{i}_2, \quad \hat{e}_3 = \hat{i}_3.$$

Se  $P$  è un punto solidale col corpo individuato, rispetto al riferimento fisso, dal vettore  $p$ , allora, il centro istantaneo di rotazione deve essere tale che

$$\dot{p} = v_P = \omega \wedge (p - c) = \dot{\alpha}(p_1 - c_1)\hat{i}_2 - \dot{\alpha}(p_2 - c_2)\hat{i}_1.$$

Questo fornisce automaticamente le equazioni

$$\dot{p}_1 = -\dot{\alpha}(p_2 - c_2), \quad \dot{p}_2 = \dot{\alpha}(p_1 - c_1),$$

oltre all'attesa  $\dot{p}_3 = 0$ . Ma d'altra parte possiamo scrivere  $\dot{p}_i = \dot{\alpha} \frac{dp_i}{d\alpha}$ , per cui otteniamo

$$\frac{dp_1}{d\alpha} = -(p_2 - c_2), \quad \frac{dp_2}{d\alpha} = p_1 - c_1,$$

o invertendo

$$\begin{cases} c_1 = p_1 - \frac{dp_2}{d\alpha} \\ c_2 = p_2 + \frac{dp_1}{d\alpha} \end{cases} \Rightarrow c = p - \frac{dp_2}{d\alpha} \hat{i}_1 + \frac{dp_1}{d\alpha} \hat{i}_2.$$

Per ottenere le coordinate di  $c$  nel riferimento solidale, possiamo scegliere proprio  $P$  come nuova origine e la nuova base solidale come nell'Eq. (1.16), in modo che

$$(1.17) \quad c^* = c - p = -\frac{dp_2}{d\alpha} \hat{i}_1 + \frac{dp_1}{d\alpha} \hat{i}_2 = \left( \sin \alpha \frac{dp_1}{d\alpha} - \cos \alpha \frac{dp_2}{d\alpha} \right) \hat{e}_1 + \left( \cos \alpha \frac{dp_1}{d\alpha} + \sin \alpha \frac{dp_2}{d\alpha} \right) \hat{e}_2.$$

**Esempio 1.2** (Asta con estremi vincolati agli assi) — Calcoliamo base e rulletta del seguente semplice sistema. Abbiamo un'asta rigida di lunghezza  $\ell$  di estremi  $A$ , in posizione  $a$  rispetto ad un riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , e  $B$ , in posizione  $b$  rispetto allo stesso riferimento: gli estremi sono vincolati entrambi a *scorrere* lungo i due assi cartesiani nel piano tramite due *carrelli*: un carrello vincola il moto traslatorio di un punto lungo una certa curva, ma permette al resto del sistema di ruotare liberamente attorno al punto stesso. Questo significa che  $a = a\hat{i}_2$  e  $b = b\hat{i}_1$ , con  $a$  e  $b$  funzioni del tempo. Determiniamo base e rulletta di questo sistema. Anzitutto, naturalmente  $a^2 + b^2 = \ell^2$  lunghezza quadra dell'asta, che è rigida. Possiamo parametrizzare in particolare  $a = \ell \sin \theta$  e  $b = \ell \cos \theta$ , in modo che  $\theta$ , angolo indicato in figura, sia l'unico parametro lagrangiano per il sistema. Per costruzione,  $v_A = \ell \dot{\theta} \cos \theta \hat{i}_2$  e  $v_B = -\ell \dot{\theta} \sin \theta \hat{i}_1$ , per cui il centro istantaneo di rotazione  $C$ , che immaginiamo individuato dal vettore  $c$ , può essere individuato trovando l'intersezione delle due rette ortogonali ai due vettori velocità, ovvero usando il fatto che  $\langle a - c, v_A \rangle = 0$  e  $\langle b - c, v_B \rangle = 0$ . Scrivendo  $c = c_1\hat{i}_1 + c_2\hat{i}_2$  questo significa  $a - c_2 = 0$  e  $b - c_1 = 0$ , per cui  $c = (b, a)^\top = \ell(\cos \theta, \sin \theta)^\top$ . Questa espressione fornisce già la traiettoria della base, essendo espressa nel riferimento fisso: dato che  $\theta \in \mathbb{R}$ , al variare dell'angolo il centro istantaneo di rotazione descrive una circonferenza di raggio  $\ell$ . Per ottenere l'equazione della rulletta, basta osservare che il triangolo avente come vertici i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  è sempre rettangolo per costruzione: questo vuol dire che  $C$  è sempre su una circonferenza che ha come diametro l'asta, che naturalmente è solidale: tale circonferenza è proprio la rulletta. Questo stesso risultato può essere derivato in una maniera più esplicita, usando l'equazione per il centro istantaneo di

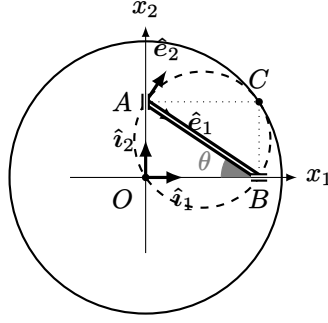


FIGURA 3. Asta rigida con estremi vincolati a scorrere lungo gli assi tramite due carrelli. Sono evidenziate la base (linea continua) e la rulletta (linea tratteggiata) del moto.

rotazione in un riferimento solidale. Scegliamo per esempio un riferimento solidale avente l'origine in  $A$ ,  $\hat{e}_1$  con la stessa direzione del vettore  $b - a$  (la direzione dell'asta),  $\hat{e}_2$  ad esso ortogonale in modo da fornire un riferimento positivamente orientato nel piano, e  $\hat{e}_3 = \hat{i}_3$  (comunque irrilevante dato che il moto è piano). In tal caso

$$\hat{e}_1 = \cos \theta \hat{i}_1 - \sin \theta \hat{i}_2, \quad \hat{e}_2 = \sin \theta \hat{i}_1 + \cos \theta \hat{i}_2, \quad \hat{e}_3 = \hat{i}_3,$$

ovvero

$$\hat{i}_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2, \quad \hat{i}_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2, \quad \hat{i}_3 = \hat{e}_3.$$

Dunque

$$c^* = c - a = \ell \cos^2 \theta \hat{e}_1 + \ell \cos \theta \sin \theta \hat{e}_2 = \frac{\ell}{2} \hat{e}_1 + \frac{\ell}{2} \cos(2\theta) \hat{e}_1 + \frac{\ell}{2} \sin(2\theta) \hat{e}_2,$$

che è una circonferenza centrata in  $\frac{\ell}{2} \hat{e}_1$  (cioè al centro dell'asta) e di raggio  $\frac{\ell}{2}$ , come avevamo anticipato.

**3.4. Rotolamento.** Concludiamo il capitolo con lo studio del rotolamento di due *curve regolari rigide*,  $\gamma$  e  $\psi$ . Assumiamo per esempio che  $\gamma$  sia fissa, mentre  $\psi$  è mobile ma tale da mantenere sempre un unico punto di contatto  $C$  con  $\gamma$  in ogni momento del suo moto: in questo caso si dice che le due curve sono in un *moto di rotolamento*. Sia il punto di contatto  $C$  ad un dato istante individuato da  $c$  in un riferimento fisso  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  solidale con  $\gamma$ : questo punto *non* corrisponde ad un preciso punto materiale delle due curve, ma ad un luogo geometrico, ovvero alla *posizione* in cui le curve sono tangenti. Supponiamo ora di avere un riferimento mobile  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , solidale con  $\psi$ , e sia  $O_*$  individuata dal vettore  $\mathbf{o}_* = \overrightarrow{OO_*}$  rispetto al riferimento fisso. Il riferimento mobile e solidale con  $\psi$  avrà inoltre una velocità angolare  $\omega$ . Se nel riferimento fisso la velocità del punto di contatto è data da  $\mathbf{v}_C$ , il medesimo punto è identificato dal vettore  $\mathbf{c}^* = c - \mathbf{o}_*$  nel riferimento mobile, dove ha velocità  $\mathbf{v}_C^*$ , di modo che

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C^* + \mathbf{v}_C^\tau, \quad \mathbf{v}_C^\tau := \mathbf{v}_* + \omega \wedge \mathbf{c}^*$$

dove  $\mathbf{v}_C^\tau$  è detta, in questo contesto specifico, *velocità di strisciamento*. Il punto  $C$  è sempre un punto di tangenza tra le curve, e dovendo essere  $\mathbf{v}_C$  e  $\mathbf{v}_C^*$  anch'essi tangenti alle due curve in  $c$ , lo sarà anche la velocità di strisciamento.

Se  $\omega = \mathbf{0}$ , allora il moto si dice *di puro strisciamento*: in questo caso la velocità di strisciamento corrisponde alla velocità di traslazione dell'origine del riferimento solidale.

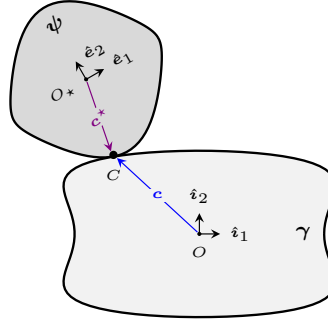


FIGURA 4. Due curve in rotolamento nel piano: la curva  $\gamma$  è fissa nel riferimento  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , mentre  $\psi$  è mobile dispone del suo proprio riferimento solidale  $O_*\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ . In questo esempio,  $\hat{e}_3 \equiv \hat{i}_3$  punta nella direzione uscente del foglio. In figura è anche indicato il punto di contatto  $C$ .

Un caso molto speciale e importante è quello in cui  $v_C^\tau = \mathbf{0}$ : in tal caso  $v_C = v_C^*$  e il moto è detto *di rotolamento puro*. Come si vede, la condizione di rotolamento puro è un vincolo imposto sulle velocità. Quando associato però a curve in rotolamento reciproco, secondo questo vincolo, le velocità del punto di tangenza nei due riferimenti (fisso e solidale) sono uguali e di conseguenza *il punto di tangenza percorre cammini di lunghezza uguale lungo le due curve in tempi uguali*: questa proprietà è caratterizzante di questo tipo di moto, e, come vedremo, rende il vincolo di rotolamento tra curve un vincolo *olonomo*, dato che *fissa come uguali* le lunghezze percorse da  $C$  in un certo intervallo.

3.4.1. *Base, rulletta e rotolamento puro.* Siamo già incappati in un moto di rotolamento puro quando abbiamo studiato la base e la rulletta di un moto rigido piano. Infatti, abbiamo visto che queste due luoghi matematici hanno in ogni istante un punto in comune, il centro di rotazione istantaneo  $C$ , che è anche il punto di contatto tra le due.

**TEOREMA 3.7.** *Due curve rotolano senza strisciare l'una sull'altra se e solo se sono base e rulletta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo una base e una rulletta di un moto rigido piano avente velocità angolare  $\omega$ : il centro istantaneo di rotazione  $C$  è individuato, nel riferimento fisso, dal vettore  $c$  che soddisfa l'equazione  $v_* + \omega \wedge (c - o_*) = \mathbf{0}$ , dove, come prima,  $v_*$  e  $o_*$  sono velocità e posizione dell'origine  $O_*$  di un riferimento solidale rispetto al riferimento fisso. Ma questa quantità coincide esattamente con la velocità di trascinamento  $v_C^\tau$  del punto  $C$ , e quindi  $v_C = v_C^*$ , ovvero base e rulletta sono soggetti a rotolamento puro con punto di contatto  $C$ .

Viceversa, siano date due curve rigide  $\gamma$  e  $\psi$  soggette a rotolamento puro. Per definizione la velocità di trascinamento nel loro punto di contatto è nulla, ovvero il loro punto di contatto  $C$ , individuato dal vettore  $c$  rispetto al riferimento solidale con una delle due curve, soddisfa la condizione  $v_* + \omega \wedge (c - o_*) = \mathbf{0}$ , dove abbiamo usato la stessa convenzione di prima: ma questa è esattamente la condizione che *definisce* un centro istantaneo di rotazione. Dato che le due curve sono precisamente la traiettoria descritta dal punto di contatto nei rispettivi sistemi di riferimento, esse sono una base e una rulletta.  $\square$

**Esempio 1.3** (Disco che rotola) — Consideriamo un disco rigido di raggio  $R$  che rotola senza strisciare lungo una guida coincidente con l'asse orientato secondo  $\hat{i}_1$  rimanendo nel piano generato da  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2\}$ . La condizione di rotolamento puro vuol dire che, detta  $x = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2$  la

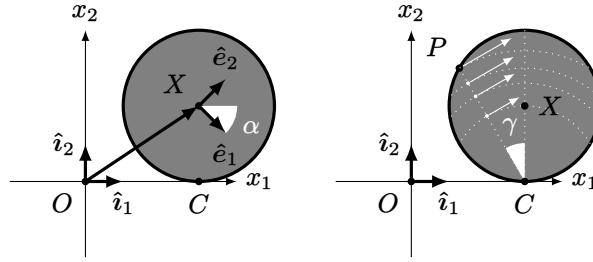
posizione del centro del disco  $X$ , il punto  $C$  di contatto tra disco e guida ha velocità ha una posizione  $c$  rispetto al riferimento fisso che deve soddisfare l'equazione

$$v_X + \omega \wedge (c - x) \equiv v_C = 0,$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare del disco. Essendo, con riferimento alla figura,  $v_X = \dot{x}\hat{i}_1$ ,  $\omega = \dot{\alpha}\hat{i}_3$  e  $c - x = -R\hat{i}_2$ , questa equazione si riscrive

$$\dot{x} = -R\dot{\alpha} \Rightarrow x = -R\alpha + x_0$$

dove  $x_0$  corrisponde al valore di  $x$  per  $\alpha = 0$ . Come anticipato, il rotolamento puro nel moto piano fornisce un vincolo sulle *posizioni*, nonostante appaia espresso inizialmente come una condizione sulle velocità.



Trattandosi di un moto piano, il punto  $C$  è anche il *centro istantaneo di rotazione*. Come esercizio, possiamo ulteriormente verificare questo fatto usando l'Eq. (1.15): la posizione del centro di rotazione è infatti

$$x + \frac{\omega \wedge v_X}{\|\omega\|^2} = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2 + \frac{\dot{\alpha}\hat{i}_3 \wedge \hat{i}_1}{|\dot{\alpha}|^2} = x\hat{i}_1 + R\hat{i}_2 + \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}}\hat{i}_2 = x\hat{i}_1 \equiv c.$$

Senza bisogno di eseguire dei calcoli, si vede che in questo moto di rotolamento puro la *base* è costituita dall'asse delle ascisse, mentre la *rulletta* è proprio il bordo del disco. Sulla base di questo fatto, un generico punto  $P$ , individuato dal vettore  $p$  nel riferimento fisso, ha velocità

$$v_P = \omega \wedge (p - c).$$

Inoltre, la velocità del centro del disco è  $v_X = \omega \wedge (x - c) = R\dot{\alpha}\hat{i}_2$ . Usando questo risultato, possiamo per esempio calcolare il modulo della velocità di un punto  $P$  del *bordo* del disco usando

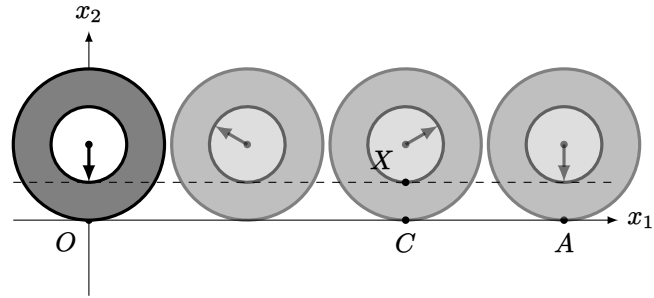
$$\|\omega\| = \frac{\|v_P\|}{\|p - c\|} = \frac{\|v_X\|}{\|x - c\|} \Rightarrow \|v_P\| = \|v_X\| \frac{\|p - c\|}{\|x - c\|} = \|v_X\| \frac{2R \cos \gamma}{R} = 2\|v_X\| \cos \gamma,$$

dove  $\gamma$  è l'angolo tra  $\hat{i}_2$  e la direzione  $p - c$  come rappresentato in figura. Questo significa che  $P$  raggiunge la velocità massima quando  $\gamma = 0$ : in tal caso,  $\|v_P\| = 2\|v_X\| = 2R\dot{\alpha}$ . Da quanto

abbiamo detto, il concetto di rotolamento puro può essere esteso al di là dei problemi in cui si ha a che fare in maniera evidente con curve in rotolamento: in effetti, in ogni *moto piano* si può identificare un centro istantaneo di rotazione, e, di conseguenza, un moto di rotolamento puro tra la base e la rulletta associate.

**Esempio 1.4** (Ruota di Aristotele) — Nella *Meccanica*, attribuita ad Aristotele e scritta attorno al 300 a.C., compare il seguente problema. Sia dato un disco che rotola su un piano, e si consideri un disco più piccolo ad esso concentrico e su esso fissato in maniera rigida. Il disco maggiore rotola come in figura, andando dal punto  $O$  al punto  $A$  senza strisciare compiendo una rivoluzione completa. Le distanze percorse dalle circonferenze di entrambi i dischi sono quindi uguali, essendo essi rigidamente saldati. Questo induce però ad un apparente paradosso: la distanza percorsa dal cerchio più grande è uguale alla sua circonferenza, mentre il disco più piccolo ha compiuto

una rotazione completa percorrendo un tragitto maggiore della sua propria circonferenza. Come è possibile?



La soluzione al paradosso discende da quanto abbiamo detto sopra. Infatti, se è vero che il punto di contatto tra il disco maggiore e il piano di rotolamento ha velocità istantanea nulla, immaginando un ipotetico piano di rotolamento del disco minore (linea tratteggiata in figura), il punto di contatto  $X$  del disco minore con tale piano ipotetico è soggetto a strisciamento. La sua velocità sarà infatti data dalla condizione  $v_X = \omega_* \wedge (x - c)$ , dove  $c$  è il vettore che identifica il punto di contatto reale  $C$  del disco maggiore.



## Leggi della meccanica

### 1. Massa e quantità di moto

Abbiamo finora analizzato la cinematica dei “punti materiali” e dei “corpi rigidi” focalizzandoci sull’evoluzione delle loro posizioni ed ignorandone altre possibili proprietà intrinseche. Se però vogliamo andare oltre la mera descrizione dell’evoluzione della posizione di tali sistemi nello spazio, è importante introdurre altre grandezze che li caratterizzano in maniera complementare all’aspetto puramente geometrico. Una di queste grandezze è la *massa*: la massa di un corpo è una grandezza scalare non negativa associata al corpo stesso. Nel caso di un punto materiale  $P$ , si dice semplicemente che ad esso è associata una certa massa  $m \geq 0$ ; quando si ha a che fare con un oggetto esteso che occupa una porzione di spazio corrispondente a  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ , allora si introduce una *densità volumetrica di massa*  $\rho_v$ , funzione non negativa definita sullo spazio tridimensionale tale che<sup>1</sup>

$$m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \rho_v(x) \, dx$$

sia la *massa* del corpo  $\mathcal{B}$ . Analogamente, se il corpo occupa invece una *superficie*  $\sigma$ , si introduce una densità *superficiale*  $\rho_s$  tale per cui la massa sia data da  $m(\mathcal{B}) = \int_{\sigma} \rho_s \, d\sigma$ ; se infine il corpo occupa una curva  $\gamma$ , si introduce una densità *lineare*  $\rho_\ell$  tale per cui la massa è ottenuta come  $m(\mathcal{B}) = \int_{\gamma} \rho_\ell \, d\gamma$ . Nel seguito indicheremo in generale  $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \rho(x) \, dx$  come l’integrale sul supporto geometrico del corpo, che sarà un volume, una superficie o una curva a seconda dei casi.

**1.1. Centro di massa.** Avendo introdotto i concetti di massa e densità, possiamo definire quello di *centro di massa* come segue. Detta  $\rho$  la densità del corpo  $\mathcal{B}$ , e detta  $m$  la sua massa, il centro di massa  $G$  del corpo è individuato dal vettore

$$x_G := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} x \rho(x) \, dx.$$

Se  $\rho$  ha un valore costante indipendente dalla posizione, si dice che il centro di massa coincide con il centro geometrico del corpo. La posizione del centro di massa non dipende dall’origine del riferimento cartesiano in uso (ma il vettore che la individua ovviamente sì). Essendo il centro di massa definito come un integrale, se scriviamo  $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$  con  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^k$  insiemi quasi disgiunti, allora

$$x_G := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} x \rho(x) \, dx = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{B}_i} x \rho(x) \, dx = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i x_G^{(i)},$$

dove  $x_G^{(i)}$  sono le coordinate del centro di massa corrispondente a  $\mathcal{B}_i$  e  $m_i$  la sua massa.

---

<sup>1</sup>Qui e in seguito utilizzeremo come variabili di integrazione quantità vettoriali intendendo che l’espressione può risciversi in termini delle loro coordinate.

Alcune proprietà del centro di massa possono essere facilmente ottenute dalla sua definizione, che esprime il centro di massa come combinazione *lineare* delle posizioni delle componenti del corpo. Il centro di massa di due punti materiali individuati da  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, per esempio, si trova sul segmento che li congiunge. Se il sistema che si sta considerando è piano, ovvero i punti materiali che lo costituiscono giacciono tutti in un certo piano  $\Pi$ , il centro di massa sarà sul medesimo piano.

Il calcolo del centro di massa può essere poi ulteriormente facilitato dalla presenza di simmetrie nel sistema. Un esempio è il caso in cui il sistema abbia un *piano di simmetria materiale*.

**DEFINIZIONE 1.1** (Piano di simmetria materiale). *Un piano è di simmetria materiale per un corpo  $\mathcal{B}$  se, dato  $p$  vettore che individua un punto materiale di massa  $m$  (o associato alla densità  $\rho(p)$ ) del corpo, il punto individuato da  $q$  diametralmente opposto a  $p$  rispetto a  $\Pi$  appartiene al corpo e ha stessa massa (o densità).*

Due vettori  $p$  e  $q$  individuano posizioni diametralmente opposte rispetto ad un piano  $\Pi$  se  $p - q$  è ortogonale al piano e  $\frac{p+q}{2}$  appartiene al piano.

Un analogo esempio è quello di *asse di simmetria materiale*.

**DEFINIZIONE 1.2** (Asse di simmetria materiale). *Una retta  $\mathcal{R}$  è un asse di simmetria materiale per un corpo  $\mathcal{B}$  se per ogni punto  $p$  di massa  $m$  (o densità  $\rho(p)$ ) del corpo, ne esiste un altro  $q$  di uguale massa (o densità) diametralmente opposto rispetto alla retta.*

Come prima, due vettori  $p$  e  $q$  individuano posizioni diametralmente opposte rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  se  $p - q$  è ortogonale alla retta e  $\frac{p+q}{2}$  appartiene ad essa.

**LEMMA 1.1.** *Se il corpo è dotato di un piano o di un asse di simmetria materiale, allora il suo centro di massa si troverà su di essi.*

Essendo il centro di massa una combinazione convessa delle posizioni di tutti i punti del corpo, se quest'ultimo è convesso il centro di massa si troverà all'interno del corpo stesso; in maniera simile, se il corpo è contenuto dentro una porzione di spazio convessa, il centro di massa sarà nella medesima porzione di spazio.

**1.2. Quantità di moto.** Dato un corpo  $\mathcal{B}$  caratterizzato da una densità  $\rho$ , si definisce *quantità di moto* del corpo il vettore  $Q$  dato da

$$Q := \int_{\mathcal{B}} v_X \rho(x) \, dx,$$

dove  $v_X$  è la velocità osservata nel punto  $X$  individuato dal vettore  $x$ . Se il corpo è costituito da  $N$  masse puntiformi  $\{m_k\}_{k=1}^N$ , di modo che la massa  $m_k$  abbia posizione  $p_k$  e velocità  $v_k$ , allora l'espressione precedente si scrive

$$Q := \sum_{k=1}^N m_k v_k.$$

Vale la seguente Proposizione, che esprime il fatto che la quantità di moto di un corpo coincide con quella di un corpo puntiforme di ugual massa concentrato nel centro di massa.

**PROPOSIZIONE 1.2.** *Sia  $v_G$  la velocità del centro di massa  $x_G$  di un corpo  $\mathcal{B}$  di massa  $m$ . Allora*

$$Q = m v_G.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Svolgiamo la dimostrazione per il caso di un sistema di  $N$  corpi puntiformi. Basta in applicare la definizione, osservando che

$$Q = \sum_{k=1}^N m_k v_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k p_k = m \dot{x}_G = m v_G. \quad \square$$

## 2. Forze e lavoro

Una forza  $F_P$  è definita in maniera intuitiva come *una azione applicata su un punto materiale  $P$  in grado di cambiarne la quantità di moto in una certa direzione*. Una forza è una quantità *invariante* rispetto a cambi di riferimento, ovvero indipendente dall'osservatore, sempre associata ad un certo *punto di applicazione*: si dice quindi che una forza è un *vettore applicato*. Essa può essere funzione del tempo, della posizione  $p$  dell'oggetto materiale  $P$  e della sua velocità  $v_P$ , ovvero in generale  $F_P(t, p, v_P)$ . La retta passante per  $P$  e parallela a  $F_P$  si dice *retta di applicazione* della forza. La forza si dice *costante*,  $F_P \equiv F_P^0$ , se non dipende da alcuna delle quantità menzionate sopra, ovvero non dipende né dal tempo, né dalla posizione del punto né dalla sua velocità. Si dice invece che la forza è *posizionale* se essa dipende solo dalla posizione  $p$ ,  $F_P = F_P(p)$ . Può anche aversi il caso in cui la forza dipenda solo dalla velocità del punto a cui è applicata,  $F_P = F_P(\dot{p}) \equiv F_P(v_P)$ .

Si chiamano *forze attive* le forze di cui sia nota *a priori* la dipendenza funzionale dalle tre quantità suddette, ovvero tempo, posizione e velocità del punto di applicazione, indipendentemente dalla presenza di altre forze applicate al medesimo oggetto.

Per evitare di appesantire la notazione, in seguito ometteremo il pedice in  $F_P$ , ricordando tuttavia che  $F$  va sempre intesa come una quantità applicata. Il risultato dell'azione di una forza su un punto materiale (e su un corpo generico) può essere quantificata attraverso una serie di grandezze.

**2.1. Lavoro.** Consideriamo un punto materiale  $P$  individuato dal vettore  $p(t)$  che evolve nell'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ . Si dice che

$$w := \langle F, dp \rangle$$

è il *lavoro elementare* della forza  $F$ , supposta applicata in  $P$ , lungo lo spostamento infinitesimo  $dp$ . Il lavoro elementare è una *forma differenziale* associata al campo vettoriale  $F$ . È chiaro quindi come calcolare il lavoro di una forza lungo una traiettoria  $p(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$ : è sufficiente integrare la forma differenziale lungo la curva,

$$W = \int_p w = \int_p \langle F, dp \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle F, \dot{p} \rangle dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt.$$

Nell'espressione precedente abbiamo introdotto la *potenza* associata ad una forza, definita come

$$\Pi := \langle F, \dot{p} \rangle = \langle F, v_P \rangle.$$

**2.1.1. Forze posizionali e forze conservative.** Nel caso di forze posizionali, le espressioni integrali introdotte sopra diventano indipendenti dalla "cinematica", ovvero da *come* una certa traiettoria viene percorsa, ma mantengono una dipendenza dalla sola *geometria* della traiettoria. Possiamo infatti riscrivere l'espressione del lavoro di una forza  $F$  lungo una certa traiettoria in funzione della parametrizzazione intrinseca della curva, che assumiamo avere lunghezza  $\ell$ , eseguendo un cambio di variabili e sostituendo la dipendenza da  $t$  con una dipendenza dall'ascissa curvilinea  $s := \int_{t_0}^t \|\dot{p}\| dt'$ ,

$$w = \langle F(p(t)), \dot{p}(t) \rangle dt = \left\langle F(p(t)), \frac{\dot{p}(t)}{\|\dot{p}(t)\|} \right\rangle \|\dot{p}(t)\| dt = \langle F(\bar{p}(s)), \hat{v}_P(s) \rangle ds$$

per cui

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \langle F(p), \dot{p} \rangle dt = \int_0^\ell \langle F(\bar{p}), \hat{v}_P \rangle ds.$$

Come anticipato, ogni dipendenza dalla legge oraria è scomparsa e il lavoro diventa l'integrale della proiezione di  $\mathbf{F}$  lungo la direzione tangente alla curva. In altre parole, il lavoro di una data forza posizionale lungo una curva *non* dipende da come la curva viene percorsa, ma solo dalla curva stessa.

Il lavoro elementare, come abbiamo detto, è una forma differenziale, e sappiamo che una forma differenziale può essere chiusa e, in particolare, esatta: la proprietà di esattezza semplifica di molto il calcolo di integrali di linea e quindi, nel nostro contesto, il calcolo del lavoro di una forza. Il seguente risultato stabilisce che solo le forze posizionali possono essere associate a una forma differenziale esatta.

**TEOREMA 2.1.** *Condizione necessaria perché il lavoro elementare sia una forma esatta è che la forza sia posizionale.*

**DIMOSTRAZIONE.** La forma differenziale  $w = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{p} \rangle$  può essere intesa come una forma in uno spazio a 7 dimensioni  $(t, \mathbf{p}, v_P)$  (dato che queste sono le possibili variabili del campo vettoriale  $\mathbf{F}$ ), in cui però i contributi lungo le direzioni associate a  $dt$  e  $dv_P$  sono assenti. Se la forma è chiusa (condizione necessaria per l'esattezza), dal teorema di Schwartz segue che tutte le derivate parziali rispetto alla velocità e al tempo devono essere nulle, ovvero la forza è posizionale,  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{p})$ .  $\square$

La forma non può perciò essere chiusa, e quindi tantomeno esatta, se  $\mathbf{F}$  dipende da  $t$  o dalla velocità del punto materiale a cui è applicata. D'altra parte, se  $\mathbf{F}$  è posizionale, non è detto che la forma sia chiusa: a tal fine è richiesto che essa soddisfi la definizione

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i, \quad \forall i, j.$$

Queste condizioni sono equivalenti a chiedere che

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Una forza che soddisfi questa proprietà si dice *irrotazionale*. Sappiamo inoltre che se il dominio di definizione di  $\mathbf{F}$  è connesso per archi, una forma chiusa è anche esatta, ovvero che esiste una funzione scalare  $U$ , detta *potenziale* e determinata a meno di una costante additiva, tale che  $\mathbf{F} = \nabla U$ . Questo fatto è di grande importanza, dato che il lavoro infinitesimo di una forza siffatta si può scrivere come un differenziale esatto,

$$w = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{p} \rangle = \langle \nabla U, d\mathbf{p} \rangle = dU.$$

Una forza associata ad una forma esatta si dice *conservativa*. La potenza di una forza conservativa si scrive

$$\Pi = \frac{dU}{dt}.$$

Il lavoro di una forza conservativa lungo una curva  $\mathbf{p}(t)$ , data per  $t \in [t_0, t_1]$  e di estremi  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(t_0)$  e  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(t_1)$ , si calcola semplicemente come

$$W = \int_{\mathbf{p}} dU = U(\mathbf{p}_1) - U(\mathbf{p}_0)$$

e dipende perciò *solo* dai punti iniziale e finale della traiettoria, ma *non* dipende dalla traiettoria seguita. In particolare, se la traiettoria è chiusa, il lavoro di una forza conservativa è nullo. Questa proprietà è *caratterizzante* per le forze conservative. Il potenziale di una forza conservativa è associato ad una quantità molto utile, detta *energia potenziale*  $V$ , che è semplicemente il suo opposto in segno,

$$V := -U \Rightarrow \mathbf{F} = -\nabla V.$$

**Esempio 2.1** (Forze costanti) — Le forze costanti sono un esempio di forza conservativa. In effetti, se  $F = F_0$  vettore costante, allora si vede subito che

$$F = \nabla U \quad \text{con} \quad U(p) = \langle F_0, p \rangle + \text{costante}.$$

Un esempio notevole di forza costante è la *forza peso* che agisce su un corpo puntiforme di massa  $m$  in prossimità della superficie terrestre, che si può approssimare come  $F_0 = -mg\hat{i}_3$  per una certa costante  $g$ , assumendo un riferimento cartesiano in cui  $\hat{i}_3$  è orientato dal basso verso l'alto. In questo caso  $U(p) = -mgy + \text{costante}$ .

**Esempio 2.2** (Forze centrali) — Un'importante famiglia di forze conservative è costituita dalle cosiddette *forze centrali* aventi la forma

$$F = \Phi'(\|p - p_0\|) \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, \quad \text{dove} \quad \Phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

dove  $p_0$  è un certo vettore fissato e  $p$  individua la posizione in cui la forza è applicata. Una forza siffatta è sempre orientata secondo la congiungente tra la posizione  $p$  e quella del “centro”  $p_0$ . Si tratta di forze conservative di potenziale  $U(p) = \Phi(\|p - p_0\|)$ , come si vede prendendo il gradiente:  $\nabla U = \partial_r \Phi(r)|_{r=\|p-p_0\|} \nabla \|p - p_0\| = \Phi'(\|p - p_0\|) \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} \equiv F$ .

Un esempio di forza centrale è la *forza elastica*. Essa ha la forma

$$F = \nabla U = -k(p - p_0),$$

per un qualche vettore  $p_0$ , dove

$$U(p) = -\frac{1}{2}k\|p - p_0\|^2$$

è il *potenziale elastico*, dipendente da una costante positiva  $k$ . La forza elastica modella matematicamente l'azione di una *molla ideale* avente lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k > 0$ . La molla va intesa come fissata nella posizione individuata da  $p_0$  e applicata ad un punto materiale in posizione  $p$ . Data la sua importanza, torneremo sullo studio della forza elastica in seguito.

**2.1.2. Momento di una forza.** Una quantità che giocherà un ruolo rilevante in seguito è il *momento di una forza  $F$  applicata in  $P$  rispetto ad un polo*, che chiameremo  $A$  e supporremo essere individuato dal vettore  $a$  rispetto ad una certa origine  $O$  di un riferimento dato. Tale momento è dato dalla quantità

$$\tau_A := (p - a) \wedge F.$$

La distanza del polo dalla retta di applicazione di  $F$ , pari a  $\frac{\|\tau_A\|}{\|F\|}$ , si dice *braccio* della forza rispetto al polo. È facile trovare una relazione tra il momento calcolato rispetto ad un polo  $A$  e il momento calcolato rispetto ad un polo  $B$ , punto individuato rispetto alla stessa origine dal vettore  $b$ , dato che

$$\tau_B = (p - b) \wedge F = (p - a + a - b) \wedge F = \tau_A + (a - b) \wedge F.$$

Si noti che se ci si sposta parallelamente alla retta di applicazione (ovvero, se  $a - b$  e  $F$  sono paralleli) il momento non cambia.

Se  $\hat{u}$  è il versore di una retta  $\mathcal{R}$  che passa per  $A$ , si dice che il momento *assiale* della forza rispetto alla direzione  $\hat{u}$  è pari a

$$\tau_{\mathcal{R}} = \langle \tau_A, \hat{u} \rangle.$$

Questa quantità non dipende dal punto  $A$ : adoperando come polo un qualsivoglia punto della retta  $\mathcal{R}$  si ottiene lo stesso risultato (che quindi dipende dalla retta stessa). Scegliendo per esempio  $B \in \mathcal{R}$  diverso da  $A$ ,

$$\langle \tau_B, \hat{u} \rangle = \langle \tau_A + (b - a) \wedge F, \hat{u} \rangle = \langle \tau_A, \hat{u} \rangle$$

essendo  $a - b$  e  $\hat{u}$  paralleli. Se decomponiamo  $F$  nelle due componenti parallela,  $F_{\parallel} := \langle F, \hat{u} \rangle \hat{u}$ , e perpendicolare,  $F_{\perp} := F - F_{\parallel}$ , a  $\mathcal{R}$ , è immediato vedere che solo quest'ultima conta nel calcolo del momento assiale,

$$\tau_{\mathcal{R}} = \langle \tau_A, \hat{u} \rangle = \langle (p - a) \wedge (F_{\parallel} + F_{\perp}), \hat{u} \rangle = \langle (p - a) \wedge F_{\perp}, \hat{u} \rangle.$$

**2.2. Sistemi di forze.** Sia dato un insieme  $\mathcal{F} := \{F_k\}_{k=1}^N$  di forze, da intendersi come una collezione di forze  $F_k$  coi loro punti di applicazione  $P_k$ . Supponiamo che la forza  $F_k$  abbia momento  $\tau_{k,A}$  rispetto al polo  $A$ . Questo insieme è detto *sistema di forze*, e possiamo definire la *risultante*  $R$  e il *momento risultante*  $\tau_A$  rispetto al polo  $A$  di  $\mathcal{F}$  come

$$R := \sum_{k=1}^N F_k, \quad \tau_A := \sum_{k=1}^N (p_k - a) \wedge F_k \equiv \sum_{k=1}^N \tau_{k,A}.$$

Questi due vettori sono detti *vettori caratteristici del sistema di forze*  $\{F_k\}_{k=1}^N$ . Due sistemi di forze che hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante si dicono *equivalenti*. Il momento risultante soddisfa la stessa legge di cambiamento di polo vista per il momento di una singola forza: per passare dal polo  $A$ , individuato dal vettore  $a$ , al polo  $B$ , individuato dal vettore  $b$ , possiamo scrivere

$$\tau_B = \tau_A + (b - a) \wedge R.$$

Il momento totale quindi non cambia se si sposta il polo parallelamente a  $R$ , dato che in questo caso  $a - b \parallel R \Rightarrow (b - a) \wedge R = 0$ . Se  $R = 0$  il momento delle forze *non dipende dal polo scelto* e quindi potremo semplicemente scrivere  $\tau$ . Si noti che se due sistemi  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  sono equivalenti rispetto ad un certo polo, lo sono rispetto ad ogni altro. Se per esempio  $\tau_A = \tau'_A$  sono i due momenti risultanti dei due sistemi di forze equivalenti  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  rispetto ad  $A$ ,

$$\tau_B = \tau_A + (b - a) \wedge R = \tau'_A + (b - a) \wedge R' = \tau'_B.$$

Dato un sistema di forze  $\mathcal{F}$ , se ne può ottenere uno equivalente  $\mathcal{F}'$  tramite le seguenti operazioni:

- traslando una forza del sistema lungo la sua retta di applicazione;
- sostituendo un sottoinsieme di forze di  $\mathcal{F}$  con la loro risultante;
- aggiungendo o sottraendo un insieme di forze avente risultante e momento globali nulli.

Esiste un oggetto matematico di particolare interesse che lega i due vettori caratteristici di un sistema di forze, detto *invariante scalare* o *trinomio invariante*,

$$\mathcal{I} := \langle R, \tau_A \rangle.$$

Questo oggetto non dipende da  $A$ , come si vede subito usando la legge di cambiamento del polo: ciò implica che la componente di  $R$  lungo  $\tau_A$  non cambia al variare del polo  $A$  scelto. Vale la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 2.2 (Asse centrale).** *Sia  $R \neq 0$ : esiste un asse  $\mathcal{A}$ , detto asse centrale, parallelo ad  $R$  e rispetto ai cui punti il momento totale delle forze è minimo e parallelo a  $R$ . Inoltre, se  $\mathcal{I} = 0$ , allora il momento rispetto a punti di questa retta, detta in questo caso retta di applicazione del risultante, è nullo.*

Se  $\tau_A$  è il momento delle forze rispetto ad un polo generico  $A$ , identificato dal vettore  $\mathbf{a}$  rispetto ad una origine data, l'asse centrale è parametrizzabile come l'insieme dei punti

$$\mathbf{z}(\lambda) = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{R} \wedge \tau_A}{\|\mathbf{R}\|^2} + \lambda \mathbf{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ancora una volta, si noti l'analogia con l'espressione dell'asse istantaneo di moto nel teorema di Mozzi–Chasles: in effetti siamo nello stesso tipo di situazione, in cui il ruolo che lì aveva il campo di velocità  $\mathbf{v}_A$  è qui preso dai momenti delle forze  $\tau_A$ , mentre il ruolo di  $\omega$  è preso da  $\mathbf{R}$ : in effetti, ciò discende dal fatto che l'equazione  $\tau_B = \tau_A + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{R}$  per il cambio di polo ha la stessa struttura dell'equazione  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (-\omega)$  per l'atto di moto rigido.

2.2.1. *Sistemi di forze a trinomio invariante nullo.* Consideriamo ora alcuni speciali sistemi di forze a trinomio invariante nullo.

DEFINIZIONE 2.1 (Sistema piano di forze). *Un sistema di forze si dice piano se tanto le forze quanto i loro punti di applicazione appartengono ad uno stesso piano.*

Un sistema piano ha quindi  $\mathbf{R}$  appartenente al medesimo piano  $\Pi$  a cui appartengono i punti di applicazione del sistema di forze, mentre  $\tau_A$  rispetto ad un polo  $A \in \Pi$  sarà ortogonale a  $\Pi$ . Per un sistema piano, quindi il trinomio invariante  $\mathcal{I}$  è sempre nullo.

Vi sono altri casi in cui il trinomio invariante può essere nullo.

DEFINIZIONE 2.2 (Sistema di forze concorrenti). *Un sistema di forze concorrenti in  $P$  è tale che le rette di applicazione di tutte le forze si incontrano in un unico punto  $P$ .*

In questo caso, avendo tutte le forze momento nullo rispetto a  $P$ ,  $\mathcal{I} = 0$ .

DEFINIZIONE 2.3 (Sistema di forze parallele). *Un sistema di forze parallele è tale che le rette di applicazione di tutte le forze sono parallele.*

Qui  $\mathbf{R}$  avrà la stessa direzione di tutte le forze, mentre il momento corrispondente sarà ortogonale ad essa, e di conseguenza anche in questo caso il trinomio invariante è nullo. Un sistema di forze parallele  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^N$  permette di introdurre il concetto di *centro di forze*. Dato che, in un siffatto sistema, esiste un versore  $\hat{\mathbf{u}}$  tale per cui  $\mathbf{F}_k = f_k \hat{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{u}}$ , abbiamo che un punto  $\mathbf{p}$  dell'asse centrale è tale che

$$\tau_P = \sum_{k=1}^N (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}) \wedge \mathbf{F}_k = \left( \sum_{k=1}^N f_k \mathbf{p}_k - R \mathbf{p} \right) \wedge \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

ovvero, per un qualche  $\lambda$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N f_k \mathbf{p}_k + \lambda \hat{\mathbf{u}}.$$

Il punto di coordinate

$$\mathbf{p}_{\mathcal{F}} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N f_k \mathbf{p}_k$$

si dice *centro delle forze parallele*: esso è l'unico punto che non dipende dalla direzione  $\hat{\mathbf{u}}$  ma solo dalle posizioni dei punti di applicazione delle forze.

Per concludere, diamo infine le definizioni seguenti.

DEFINIZIONE 2.4 (Sistema di forze equilibrato). *Un sistema di forze si dice equilibrato se*

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \tau = 0.$$

DEFINIZIONE 2.5 (Coppia di forze). *Una coppia di forze  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$  è un sistema di due forze avente  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ .*

Il *momento di una coppia*  $\tau$  è una quantità che non dipende dal polo (essendo  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ) e, se non nullo, esso individua un piano a cui, detto *piano della coppia*: la distanza  $b$  tra le rette di applicazione delle due forze si dice *braccio della coppia*, di modo che  $\|\tau\| = \|\mathbf{F}\|b$ . Naturalmente, ogni momento  $\tau$  può essere immaginato come il risultato di una coppia  $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$  tra le infinite possibili, aventi rette di applicazione nel piano perpendicolare a  $\tau$  e braccio  $b = \|\tau\| \|\mathbf{F}\|^{-1}$ .

**2.2.2. Sistemi equivalenti.** Alla luce di quanto detto, possiamo elencare i seguenti fatti, di facile prova, riguardanti i sistemi di forze.

**TEOREMA 2.3.** *Sia dato un sistema di forze  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^N$  con risultante  $\mathbf{R}$  e momento risultante  $\tau_O$  rispetto all'origine. È sempre possibile costruire un sistema equivalente di forze  $\mathcal{F}'$  costituito da al più due forze.*

**DIMOSTRAZIONE.** Possono esserci quattro possibili casi, che possiamo considerare uno per uno.

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$  e  $\tau = \mathbf{0}$ : Se  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  e  $\tau = \mathbf{0}$ , il sistema è equivalente ad un sistema nullo  $\mathcal{F}' = \emptyset$ .

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$  e  $\tau \neq \mathbf{0}$ : Se  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  e  $\tau \neq \mathbf{0}$ , il sistema è equivalente ad una coppia di forze: possiamo infatti costruire, in infiniti modi,  $\mathcal{F}' = \{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ , in cui per esempio  $-\mathbf{F}$  è applicato nell'origine e  $\mathbf{F}$  in un punto  $p$  di modo che valga  $\tau = p \wedge \mathbf{F}$ .

$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathcal{I} = 0$ : Se  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathcal{I} = 0$ , il sistema è equivalente ad un sistema  $\mathcal{F}' = \{\mathbf{R}\}$  di una sola forza  $\mathbf{R}$  applicata su un punto  $P$  della retta di applicazione del risultante  $\mathcal{R}$ . In un sistema siffatto, scegliendo un polo  $A \in \mathcal{R}$ ,  $\tau'_A = \mathbf{0}$ , che è lo stesso valore assunto da  $\tau_A$ , momento risultante ottenuto in  $\mathcal{F}$ , essendo  $\mathcal{I} = 0$ .

$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathcal{I} \neq 0$ : Se  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathcal{I} \neq 0$ , un sistema equivalente può essere costruito nel seguente modo. Si scelgono anzitutto tre forze  $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}, \mathbf{R}\}$ , in cui  $\mathbf{R}$  e  $-\mathbf{F}$  possono essere immaginate applicate in un punto qualsiasi, per esempio l'origine, e  $\mathbf{F}$  è applicato in un punto  $P$  individuato da  $p$ . A questo punto, il sistema equivalente è dato come un insieme di due forze  $\mathcal{F}' = \{\mathbf{F}, \mathbf{R} - \mathbf{F}\}$ , dove abbiamo sfruttato il fatto che  $\mathbf{R}$  e  $-\mathbf{F}$  sono in effetti applicati sullo stesso punto. Il sistema ha risultante pari a  $\mathbf{R}$  e momento rispetto all'origine dato da  $\tau'_O = p \wedge \mathbf{F}$ : basta perciò scegliere  $p$  e  $\mathbf{F}$  di modo che  $\langle \mathbf{R}, \tau_O \rangle = \mathcal{I}$ .

L'ultimo caso, che è il più generale, può essere scritto in una maniera più semplice ricordando che  $\tau_A$  è parallelo a  $\mathbf{R}$  se  $A$  è un punto dell'asse centrale  $\mathcal{R}$ : scegliendo quindi di applicare  $\mathbf{R}$  e  $-\mathbf{F}$  in  $A \in \mathcal{R}$ ,  $\mathbf{F}$  giacerà in un piano perpendicolare all'asse.  $\square$

**Q Nota finale** — Tutto quanto discusso qui per i sistemi di forze si può ripetere, in generale, per i sistemi di *vettori applicati*, ovvero ogni qualvolta si ha a che fare con un insieme di  $N$  vettori ciascuno dei quali è appaiato ad un punto di applicazione nello spazio: si possono, in tal caso, definire i momenti assiali e polari del sistema di vettori applicati, individuare il loro asse centrale, e così via.

**2.3. Lavoro e potenza di sistemi di forze.** In analogia con quanto fatto per una singola forza, è possibile definire il lavoro infinitesimo e la potenza di un sistema di forze  $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^N$  come

$$w = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, d\mathbf{p}_k \rangle, \quad \Pi = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \dot{\mathbf{p}}_k \rangle,$$

dove  $p_k$  è il punto di applicazione della forza  $\mathbf{F}_k$  di velocità  $\dot{\mathbf{p}}_k \equiv \mathbf{v}_k$ . Queste due formule possono essere ulteriormente manipolate in due casi particolari.

**2.3.1. Corpo rigido.** Nel caso di un corpo rigido sappiamo che tra le velocità di due suoi punti  $p_i$  e  $p_j$  deve valere la relazione  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ , dove appare la velocità angolare del corpo rigido  $\boldsymbol{\omega}$ . Questa relazione si può scrivere in forma differenziale come

$$d\mathbf{p}_i = d\mathbf{p}_j + (\boldsymbol{\omega} dt) \wedge (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j).$$



Questo significa che, scelto un punto  $P$ , individuato dal vettore  $p$  e in moto solidale col corpo rigido, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=1}^N \langle F_k, dp_k \rangle &= \sum_{k=1}^N \langle F_k, dp \rangle + \sum_{k=1}^N \langle F_k, \omega \wedge (p_k - p) \rangle dt = \langle R, dp \rangle + \left\langle \sum_{k=1}^N (p_k - p) \wedge F_k, \omega \right\rangle dt \\ &= \langle R, dp \rangle + \langle \tau_P, \omega \rangle dt, \end{aligned}$$

ovvero

$$\Pi = \langle R, \dot{p} \rangle + \langle \tau_P, \omega \rangle,$$

che mostra come nel caso del corpo rigido si possa esprimere il lavoro infinitesimo e la potenza di un sistema di forze in termini dei vettori caratteristici. Se  $R = 0$ , allora  $\tau_P \equiv \tau$  non dipende dal polo, per cui  $w = \langle \tau, \omega \rangle dt$  e  $\Pi = \langle \tau, \omega \rangle$ .

### 3. Principi della meccanica

Le leggi della meccanica sono il risultato di una serie di accurate sperimentazioni che hanno permesso di identificare la relazione tra l'evoluzione temporale delle posizioni dei corpi e le forze che agiscono su di essi. Le quantità introdotte finora, che sono di natura descrittiva, vengono messe in relazione non triviale grazie a tre postulati, o *principi*, introdotti grazie a Galileo Galilei e, soprattutto, Isaac Newton, che ne ha dato la formulazione moderna. In questa sezione presenteremo questi postulati, o *principi*, e ne discuteremo le più immediate implicazioni.

**POSTULATO 3.1** (Primo principio della meccanica). *Esistono dei sistemi di riferimento, detti sistemi di riferimento inerziali, rispetto ai quali un punto materiale isolato, ovvero non soggetto a forze, rimane in quiete o si muove con accelerazione nulla.*

Questo principio è stato formalizzato da Newton ma introdotto da Galilei, che lo ha descritto in una celebre pagina per mezzo di un semplice ma efficace esperimento mentale riguardante il piano inclinato.

SALVIATI: [...] nel piano inclinato il mobile grave spontaneamente scende e va continuamente accelerandosi [...]; ma sul piano ascendente ci vuol forza a spignerlo ed anco a fermarlo, e che 'l moto impressogli va continuamente scemando, sí che finalmente si annichila. [...] Ora ditemi quel che accaderebbe del medesimo mobile sopra una superficie che non fusse né acclive né declive.

SIMPLICIO: [...] Non vi essendo declività, non vi può essere inclinazione naturale al moto, e non vi essendo acclività, non vi può esser resistenza all'esser mosso, talché verrebbe ad essere indifferente tra la propensione e la resistenza al moto: parmi dunque che e' dovrebbe restarvi naturalmente fermo. [...]

SALVIATI: Così credo, quando altri ve lo posasse fermo; ma se gli fusse dato impeto verso qualche parte, che seguirebbe?

SIMPLICIO: Seguirebbe il muoversi verso quella parte.

SALVIATI: Ma di che sorte di movimento? di continuamente accelerato, come ne' piani declivi, o di successivamente ritardato, come negli acclivi?

SIMPLICIO: Io non ci so scorgere causa di accelerazione né di ritardamento, non vi essendo né declività né acclività.

SALVIATI: Sì. Ma se non vi fusse causa di ritardamento, molto meno vi dovrebbe esser di quiete: quanto dunque vorreste voi che il mobile durasse a muoversi?

SIMPLICIO: Tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie né erta né china.

SALVIATI: Adunque se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimente senza termine, cioè perpetuo?

SIMPLICIO: Parmi di sí, quando il mobile fusse di materia da durare.

Galileo Galilei

*Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo* (1632)

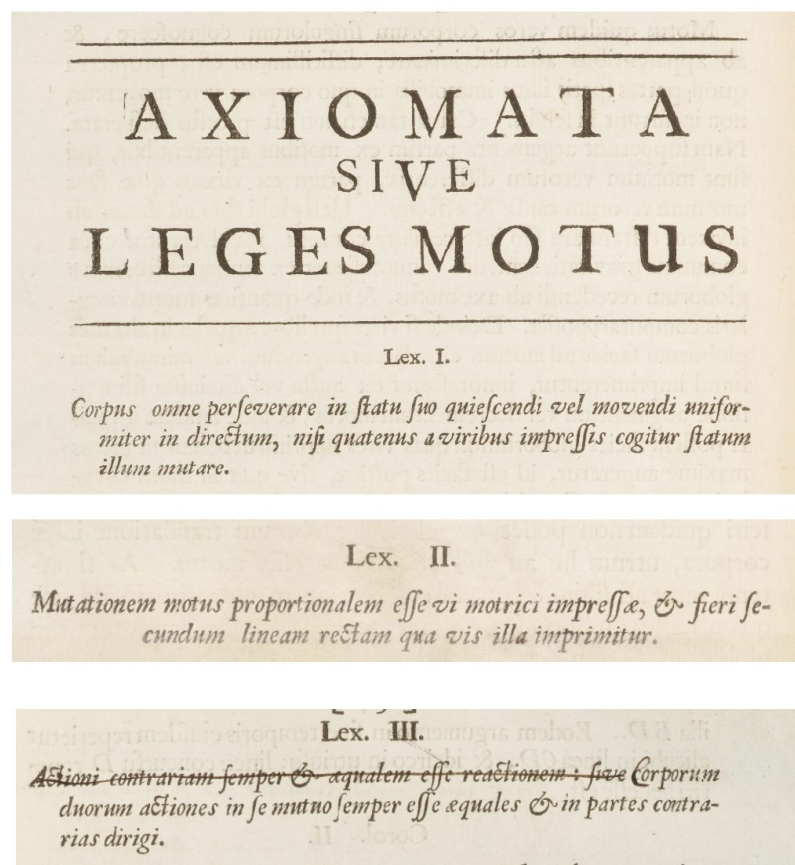


FIGURA 1. Leggi o postulati della meccanica come appaiono nella prima edizione dei *Philosophiæ naturalis principia mathematica* di Isaac Newton (1687), con sue proprie annotazioni, inclusa una cancellazione della prima frase nel Terza legge, corrispondente all'italiano *ad una azione corrisponde una reazione sempre uguale e contraria*.

Dato un sistema inerziale, le trasformazioni galileiane già discusse permettono di costruirne infiniti altri: basta infatti che il nuovo riferimento abbia accelerazione dell'origine e velocità angolare nulle rispetto al primo. In altre parole, dato un riferimento inerziale, ogni altro riferimento inerziale è in moto traslatorio uniforme rispetto al primo.

POSTULATO 3.2 (Secondo principio della meccanica). *In un riferimento inerziale, un punto materiale in posizione  $p$  su cui agisce una forza  $F$  è soggetto ad una variazione  $\dot{Q}$  della quantità di moto parallela alla forza e di intensità pari alla forza stessa, ovvero*

$$F = \dot{Q}.$$

*In particolare, se la massa è costante allora  $F = ma_P \equiv m\ddot{p}$ .*

POSTULATO 3.3 (Terzo principio della meccanica). *Data una coppia di punti materiali in posizioni  $p_1$  e  $p_2$  rispettivamente, indicando con  $F_{12}$  la forza esercitata dal punto in  $p_1$  sul punto*

in  $p_2$  e con  $F_{21}$  la forza esercitata dal punto in  $p_2$  sul punto in  $p_1$ , allora

$$F_{12} + F_{21} = \mathbf{0}, \quad p_2 \wedge F_{12} + p_1 \wedge F_{21} = \mathbf{0}.$$

Il terzo postulato, detto *principio di azione e reazione*, stabilisce che l'interazione reciproca di due punti materiali avviene sulla retta che li congiunge (dato che  $p_2 \wedge F_{12} + p_1 \wedge F_{21} = (p_2 - p_1) \wedge F_{12} = \mathbf{0}$ ) e si manifesta come una coppia di forze.

L'uso dei tre principi necessita di un postulato aggiuntivo.

**POSTULATO 3.4** (Principio di sovrapposizione). *Supponiamo che su un punto materiale agiscano due forze,  $F'$  e  $F''$ , e siano  $\dot{Q}'$  e  $\dot{Q}''$  le variazioni di quantità di moto che esse indurrebbero separatamente. Allora, la contemporanea applicazione di  $F'$  e  $F''$  produce una variazione di quantità di moto  $\dot{Q} = \dot{Q}' + \dot{Q}''$ .*

**3.1. Determinismo meccanico.** Se le forze agenti su un sistema dipendono solo dalla sua posizione, dal suo atto di moto e dal tempo, i postulati enunciati sopra sono *tipicamente* sufficienti a predire il moto dei sistemi materiali in un certo intervallo di tempo, *purché* se ne conoscano le condizioni iniziali, ovvero la configurazione e l'atto di moto del sistema al tempo iniziale.

Per essere più precisi, consideriamo per esempio un punto materiale di massa  $m$ . Supponiamo di conoscere la funzione  $F(p, \dot{p}, t)$  che fornisce la forza totale agente su di esso ad un dato tempo  $t$  e a data posizione  $p$  e velocità  $\dot{p}$  del punto stesso, il problema di predire la traiettoria  $p(t)$  del punto nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  si formula come il seguente *problema di Cauchy*

$$(2.1) \quad \begin{cases} p(t_0) = p_0 \\ \dot{p}(t_0) = v_0 \\ F(p, \dot{p}, t) = m\ddot{p}, \end{cases}$$

in cui  $p_0$  e  $v_0$  sono posizione e velocità del punto al tempo iniziale  $t = t_0$ . Questo problema, la cui incognita è la *funzione vettoriale*  $p(t)$  che soddisfa tutte le equazioni per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , ammette un'unica soluzione sotto l'ipotesi che la funzione  $F$  sia lipshitziana nei suoi argomenti, come richiesto del Teorema di Cauchy. A questo proposito, è utile aprire una breve ma importante parentesi.

**Q Equazioni differenziali ordinarie** — I principi della Meccanica stabiliscono che lo studio dell'evoluzione temporale della posizione dei corpi equivale allo studio di un insieme di *equazioni differenziali*. Elenchiamo qui alcuni fatti riguardo le *equazioni differenziali ordinarie*.

**DEFINIZIONE 3.1.** Sia  $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una funzione definita su un certo intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  è una equazione che coinvolge  $\mathbf{x}(t)$  ed un certo numero di sue derivate, fino ad un ordine massimo  $n$ , valida per ogni  $t \in I$ . Una soluzione dell'equazione differenziale è una funzione che soddisfa l'equazione in ogni punto dell'intervallo  $I$ .

Una equazione differenziale ordinaria ha, in generale, una famiglia di possibili soluzioni, parametrizzata da un certo numero di parametri che l'equazione di per sé non permette di fissare. Questo insieme di soluzioni si dice *soluzione generale*. Una *soluzione particolare* di una equazione differenziale, invece, è un preciso elemento di questa famiglia. Per selezionare una specifica soluzione, sono in generale necessarie alcune condizioni aggiuntive che complementano l'equazione stessa. Tipicamente, queste condizioni riguardano il valore che la soluzione e le sue derivate fino all'ordine  $n - 1$  devono avere in un punto specifico di  $I$ : ciò che ne risulta è il cosiddetto *problema di Cauchy*.

**DEFINIZIONE 3.2.** Sia data una equazione differenziale, ed un insieme di condizioni iniziali. Il problema di determinare, nella famiglia della soluzione generale, la (o le) soluzioni che soddisfino le condizioni iniziali assegnate si dice *problema di Cauchy*.

Il fatto che un problema di Cauchy abbia o meno soluzione, e che eventualmente questa soluzione sia unica, non è banale. Il teorema di Cauchy è, in questo senso, centrale nello studio delle equazioni differenziali e fornisce le condizioni affinché la soluzione di un problema di Cauchy esista e sia unica. L'importanza di questo risultato va oltre il contesto della meccanica.

**TEOREMA 3.5 (Cauchy).** *Sia  $\Phi: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , dove  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ . Siano inoltre  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^d$ . Il problema differenziale di Cauchy*

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \Phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \ddot{\mathbf{x}}(t). \end{cases}$$

*ammette almeno una soluzione  $\mathbf{x}(t): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  se tutte le componenti di  $\Phi$  sono continue nei loro argomenti. Inoltre, la soluzione è unica se dette componenti sono anche lipschitziane su un aperto che contiene la terna iniziale  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ .*

Nel teorema compare il concetto di lipschitzianità, così definito.

**DEFINIZIONE 3.3 (Funzione lipschitziana).** *Sia  $f: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione in molte variabili. Essa si dice lipschitziana su  $\mathcal{A}$  se esiste  $K > 0$  tale che*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}.$$

Si noti che la forma del problema di Cauchy data qui richiede di scrivere la derivata seconda di  $\mathbf{x}$  in termini di una funzione  $\Phi$  della derivata prima e della funzione stessa (oltre a  $t$ ). Una equazione differenziale in cui la derivata di ordine più alto dell'incognita può scriversi come funzione delle derivate di ordine più basso si dice *in forma normale*: non è sempre facile o ovvio scrivere l'equazione differenziale in una forma siffatta. La condizione di lipschitzianità può essere verificata utilizzando il risultato seguente, che non dimostriamo: *se la funzione  $f$  è differenziabile su un compatto e ha su esso derivate continue, essa è lipschitziana.*

Il teorema di Cauchy si applica ugualmente al caso in cui si studi un *insieme* di punti e dimostra che, sotto opportune condizioni di regolarità, la conoscenza delle condizioni iniziali è in effetti sufficiente per caratterizzare l'evoluzione del sistema.

**3.2. Forze interne.** Consideriamo un sistema *isolato*  $\mathcal{U}$  costituito da  $N$  punti materiali, e sia  $\mathbf{F}_{ij}$  la forza esercitata sul punto materiale  $j$  per effetto della presenza del punto materiale  $i$ . Con *isolato* intenderemo un sistema tale che tutte le forze agenti su di esso sono dovute all'esclusiva presenza di elementi del sistema stesso. Assumeremo che tutte le forze in  $\mathcal{U}$  nascano dall'interazione “a due corpi” tra due punti materiali di  $\mathcal{U}$ . Il sistema  $\mathcal{U}$  può sempre considerarsi come partizionato in due diversi sottosistemi disgiunti, siano essi  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{E}$ , di modo che  $\mathcal{S} \cap \mathcal{E} = \emptyset$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{S} \cup \mathcal{E}$ . Se un punto materiale di massa  $m_k$  in posizione individuata da  $\mathbf{p}_k$  rispetto ad un riferimento cartesiano appartiene al sottosistema  $\mathcal{S}$ , possiamo scrivere

$$m_k \ddot{\mathbf{p}}_k = \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{jk} = \sum_{j \in \mathcal{S} \setminus \{k\}} \mathbf{F}_{jk} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_{jk} \equiv \mathbf{F}_k^{(\text{in})} + \mathbf{F}_k^{(\text{ext})},$$

dove  $\mathbf{F}_k^{(\text{in})}$  è la forza *interna* ad  $\mathcal{S}$  applicata al punto  $k$ -esimo, mentre  $\mathbf{F}_k^{(\text{ext})}$  è la forza *esterna* al sottosistema  $\mathcal{S}$  applicata al medesimo punto materiale. In questa maniera abbiamo partizionato il contributo interno e il contributo esterno, che agiscono indipendentemente. Le forze  $\mathbf{F}_{ij}$  con  $i, j \in \mathcal{S}$  si dicono *forze interne* e soddisfano una serie di proprietà.

**TEOREMA 3.6.** *La risultante e il momento delle forze interne di un sistema  $\mathcal{S}$  sono sempre nulli. Le forze interne dunque sono sempre un sistema di forze equilibrato.*

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto, per via del Terzo principio della meccanica, le forze interne sono a due a due opposte, ovvero  $F_{ij} = -F_{ji}$ . Ne segue che la risultante delle forze interne è nulla

$$\mathbf{R}^{(\text{in})} = \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Sempre usando il Terzo principio,

$$\boldsymbol{\tau}_O^{(\text{in})} \equiv \boldsymbol{\tau}^{(\text{in})} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbf{p}_i \wedge \sum_{\substack{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}}} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{p}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{p}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{p}_j \wedge \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}. \quad \square$$

**COROLLARIO 3.7.** *In assenza di forze esterne, il centro di massa  $G$  di un sistema di  $N$  punti materiali di massa totale  $m$  ha accelerazione  $\mathbf{a}_G$  nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo  $\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}$ , si ha

$$m\mathbf{a}_G = m \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{p}}_i = \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{R}^{(\text{in})} = \mathbf{0}. \quad \square$$

**COROLLARIO 3.8.** *Il lavoro infinitesimo e la potenza associati alle forze interne di un corpo rigido sono nulli.*

DIMOSTRAZIONE. Considerato un corpo rigido di velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , detto  $\mathbf{p}$  un punto ad esso solidale, il lavoro infinitesimo  $w^{(\text{in})} = \langle \mathbf{R}^{(\text{in})}, d\mathbf{p} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}^{(\text{in})}, \boldsymbol{\omega} \rangle dt$  e la potenza  $\Pi^{(\text{in})} = \langle \mathbf{R}^{(\text{in})}, \dot{\mathbf{p}} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}^{(\text{in})}, \boldsymbol{\omega} \rangle$  sono nulli per il teorema precedente.  $\square$

**3.3. Principio di Galilei e forze apparenti.** Abbiamo visto che in un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale  $P$  di massa costante  $m$  e traiettoria  $\mathbf{p}$  soggetto ad una forza totale  $\mathbf{F}$  deve soddisfare il Secondo principio della meccanica,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P.$$

Questa legge, così come tutti i principi della meccanica, rimane inalterata se si effettua un cambio di riferimento passando da un sistema inerziale ad un altro sistema inerziale. Supponiamo infatti di avere un sistema inerziale  $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ , e consideriamo un secondo sistema  $O_*\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  che si muove di moto *traslatorio* rispetto al primo, ovvero avente velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}_*$  e accelerazione  $\mathbf{a}_*$  dell'origine  $O_*$  nulle rispetto al riferimento di partenza: il nuovo sistema è quindi inerziale. In questo caso la velocità del punto si trasforma in maniera molto semplice, ovvero secondo le trasformazioni di Galilei

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}_*,$$

dove  $\mathbf{v}_*$  è la velocità di  $O_*$  rispetto al riferimento inerziale di partenza. Soprattutto, questo comporta che l'accelerazione  $\mathbf{a}_P^*$  del punto  $P$  nel nuovo riferimento inerziale è inalterata,  $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_P^*$ , essendo l'accelerazione di trascinamento  $\mathbf{a}_P^T$  e l'accelerazione di Coriolis  $\mathbf{a}_P^C$  entrambe nulle, sicché la formula sopra rimane nel riferimento  $O_*\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$  di nuovo

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P^*.$$

Se il punto non è soggetto a forze e ha quindi accelerazione nulla nel primo riferimento, avrà accelerazione nulla anche nel secondo, rispettando così il Primo principio della meccanica. Ciò che abbiamo verificato è il cosiddetto *principio di relatività Galileiano*: le leggi della meccanica sono invarianti sotto trasformazioni di Galilei, assumendo la stessa forma in tutti i riferimenti inerziali.

Tuttavia, la formulazione del Secondo principio risulta alterata se il nuovo riferimento è non inerziale, ovvero se la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}_*$  del nuovo riferimento e l'accelerazione  $\mathbf{a}_*$  della sua

origine sono non nulli. Utilizzando la legge di composizione delle accelerazioni in Eq. (1.9), infatti, contributi aggiuntivi dovuti all'accelerazione di trascinamento e all'accelerazione di Coriolis appaiono nella legge del moto,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P = m\mathbf{a}_P^* + m\mathbf{a}_P^\tau + m\mathbf{a}_P^c.$$

Ciò equivale a dire che, volendo riscrivere un equivalente “Secondo principio” nel nuovo riferimento, sarà in generale necessario introdurre due nuove “forze”

$$\mathbf{F}^\tau := -m\mathbf{a}_P^\tau, \quad \mathbf{F}^c := -m\mathbf{a}_P^c,$$

dette *forza di trascinamento* e *forza di Coriolis* rispettivamente, in modo che

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^\tau + \mathbf{F}^c = m\mathbf{a}_P^*.$$

Queste “forze” sono dette *apparenti* in quanto compaiono nell'equazione del moto esclusivamente perché il nuovo sistema di riferimento è non inerziale e presenta una accelerazione e una velocità angolare non nulle rispetto al sistema inerziale di partenza. In particolare, la forza apparente di trascinamento

$$\mathbf{F}^\tau = -m(\mathbf{a}_* + \dot{\boldsymbol{\omega}}_* \wedge \mathbf{p}^* + \boldsymbol{\omega}_* \wedge (\boldsymbol{\omega}_* \wedge \mathbf{p}^*))$$

è posizionale, mentre la forza di Coriolis

$$\mathbf{F}^c = -2m\boldsymbol{\omega}_* \wedge \mathbf{v}_P^*$$

dipende dalla velocità. A dispetto del nome, le forze apparenti hanno conseguenze reali molto concrete e importanti.

**3.3.1. Forza centrifuga.** Supponiamo ora che l'osservatore non inerziale sia tale che  $\mathbf{a}_* = \mathbf{0}$  e  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_* = \mathbf{0}$ , ma  $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_* \hat{\boldsymbol{\omega}}_* \neq \mathbf{0}$ . Abbiamo qui indicato con  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_*$  il versore di  $\boldsymbol{\omega}_*$ . In questo caso, la forza di trascinamento assume una forma molto più semplice, ovvero

$$\mathbf{F}^\tau = m\omega_*^2(\mathbf{p}^* - \langle \mathbf{p}^*, \hat{\boldsymbol{\omega}}_* \rangle \hat{\boldsymbol{\omega}}_*).$$

Questa forza è detta *forza centrifuga*. La ragione è che la quantità  $\mathbf{p}^* - \langle \mathbf{p}^*, \hat{\boldsymbol{\omega}}_* \rangle \hat{\boldsymbol{\omega}}_*$  è esattamente la componente di  $\mathbf{p}^*$  ortogonale all'asse di moto  $\mathcal{R}$  passante per  $O_*$ : se chiamiamo  $\mathbf{q}^*$  il punto dell'asse più vicino a  $\mathbf{p}^*$ , possiamo in effetti scrivere

$$\mathbf{F}^\tau = m\omega_*^2(\mathbf{p}^* - \mathbf{q}^*).$$

La forza centrifuga ha una ulteriore proprietà: essa è *conservativa*, dato che è possibile scriverla come il *gradiente* di un potenziale:

$$\mathbf{F}^\tau = \nabla_{\mathbf{p}^*} U^{\text{cen}}, \quad \text{dove} \quad U^{\text{cen}} = \frac{1}{2}m\omega_*^2 \|\mathbf{p}^* - \mathbf{q}^*\|^2 \equiv \frac{1}{2}\omega_*^2 m d^2(P, \mathcal{R}).$$

Vedremo in seguito che  $m d^2(P, \mathcal{R})$  è detto *momento d'inerzia* del punto materiale in  $P$  rispetto all'asse  $\mathcal{R}$ .

**3.3.2. Il problema dei due corpi.** Un caso tipico di studio nel contesto della meccanica è il cosiddetto *problema dei due corpi*, in cui si considera un sistema isolato di due soli punti materiali di massa  $m_P$  e  $m_Q$ , collocati nei punti  $P$  e  $Q$  rispettivamente, soggetti a interazione reciproca. Sappiamo, dal Terzo principio, che in un siffatto sistema, il punto  $P$  esercita sul punto  $Q$  una forza  $\mathbf{F}_{PQ}$ , e il punto  $Q$  esercita sul punto  $P$  una forza  $\mathbf{F}_{QP} = -\mathbf{F}_{PQ}$ , con  $\mathbf{F}_{PQ}$  orientata parallelamente alla congiungente i due punti.

Possiamo effettuare diverse scelte riguardo il riferimento da adottare per analizzare questo sistema. Come abbiamo visto, il centro di massa di un sistema isolato deve rimanere immobile o muoversi di moto rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento inerziale. Può quindi essere sempre scelto come origine di un nuovo riferimento inerziale, in cui le posizioni dei due punti materiali sono individuate da due nuovi vettori  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  tali che  $m_P \mathbf{p} + m_Q \mathbf{q} = \mathbf{0}$ .

È possibile altresì scegliere uno dei due punti materiali come centro di un nuovo riferimento (che sarà, quindi, non inerziale in generale). In particolare, partendo da un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , possiamo cambiare riferimento scegliendo  $Q\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , nuovo riferimento avente come origine il secondo punto materiale  $Q$ . Da quanto abbiamo detto sopra, essendo la velocità angolare del nuovo riferimento rispetto al primo nulla ( $\omega_* = \mathbf{0}$ , dato che stiamo usando la stessa base), nel riferimento centrato in  $Q$  la massa in  $P$  è soggetta all'azione della sola forza di trascinamento

$$\mathbf{F}^\tau = -m_P \mathbf{a}_Q,$$

quindi la sua equazione del moto si ottiene risolvendo

$$\mathbf{F}_{QP} + \mathbf{F}^\tau = \mathbf{F}_{QP} - m_P \mathbf{a}_Q = m_P \mathbf{a}_P^*.$$

dove come al solito  $\mathbf{a}_P^*$  è l'accelerazione di  $P$  nel nuovo riferimento centrato in  $Q$ . Usando ora il fatto che  $\mathbf{a}_Q = \frac{1}{m_Q} \mathbf{F}_{PQ} = -\frac{1}{m_Q} \mathbf{F}_{QP}$ , abbiamo che

$$m_P \mathbf{a}_P^* = \mathbf{F}_{QP} + \frac{m_P}{m_Q} \mathbf{F}_{QP} \Leftrightarrow \frac{m_Q m_P}{m_Q + m_P} \mathbf{a}_P^* = \mathbf{F}_{QP} \Leftrightarrow \mu \mathbf{a}_P^* = \mathbf{F}_{QP},$$

dove la quantità

$$\mu = \frac{m_Q m_P}{m_Q + m_P} = \left( \frac{1}{m_Q} + \frac{1}{m_P} \right)^{-1}$$

è detta *massa ridotta*. L'equazione sopra è interessante perché mostra che, nel riferimento in cui  $Q$  è fisso, il moto di  $P$  segue la stessa legge che si aveva nel sistema inerziale con l'importante differenza che  $m_P$  viene sostituita da  $\mu$ , oltre al fatto che la forza  $\mathbf{F}_{QP}$  agisce nella direzione dell'origine, che è fissa (cosa che tipicamente semplifica il problema). Si noti che se  $m_Q \gg m_P$ , allora  $\mu \simeq m_P$ : in effetti, nel limite  $m_Q \rightarrow +\infty$  il centro di massa del sistema tende a coincidere con  $Q$ , che assume una accelerazione nulla.

#### 4. Vincoli e reazioni vincolari

Abbiamo già incontrato casi in cui un punto materiale o un corpo rigido è soggetto ad alcune limitazioni del moto. In effetti, lo studio di un corpo libero è più l'eccezione che la regola in meccanica e, d'altra parte, esistono moltissimi modi in cui un sistema può essere vincolato. In generale un corpo viene vincolato per via della presenza di dispositivi atti a limitarne la libertà, che vengono detti appunto *vincoli*. Un *vincolo* su un corpo costituito da  $N$  punti di posizione  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , individuati dai vettori  $\mathbf{p}_k$  rispetto ad una origine data, avrà la forma di un insieme  $\mathcal{V}$  di  $V$  equazioni e/o disequazioni che riguardano la posizione e la velocità dei punti

$$(2.3) \quad \mathcal{V} = \begin{cases} \phi_1(\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N, \{\dot{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N, t) \leq 0 \\ \phi_2(\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N, \{\dot{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N, t) \leq 0 \\ \vdots \\ \phi_V(\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N, \{\dot{\mathbf{p}}_k\}_{k=1}^N, t) \leq 0. \end{cases}$$

Abbiamo già per esempio visto il caso del *moto piano* di un singolo oggetto puntiforme in cui il vincolo di muoversi in un piano generato da  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$  è espresso come  $\langle \dot{\mathbf{p}}, \hat{i}_3 \rangle = 0$ . Prima di studiare l'aspetto più genuinamente meccanico, è utile dare una classificazione dei vincoli in termini nelle loro caratteristiche cinematiche.

**4.1. Classificazione cinematica dei vincoli.** I vincoli possono essere classificati sulla base della forma che il sistema di equazioni e disequazioni in Eq. (2.3) assume. Anzitutto, un vincolo può essere *interno* o *esterno*: nel primo caso, il vincolo coinvolge solo ed esclusivamente le *posizioni reciproche* e le velocità dei punti del sistema che si sta studiando, senza nessun riferimento all'interazione con l'ambiente esterno; nel secondo caso, invece, le relazioni in Eq. (2.3) coinvolgono delle quantità dipendenti dalla posizione o velocità di riferimenti esterni al corpo (per esempio, la distanza di un punto dall'origine del riferimento cartesiano fisso che si sta usando). Questo tipo di classificazione dipende ovviamente da ciò che consideriamo essere il "sistema" e ciò che consideriamo essere il suo "esterno". Valgono inoltre le seguenti definizioni:

**DEFINIZIONE 4.1** (Vincoli bilaterali e unilaterali). *Un vincolo  $\mathcal{V}$  come in Eq. (2.3) si dice bilaterale quando nel suddetto sistema compaiono solo equazioni. Diversamente, si dice che è unilaterale.*

**Esempio 2.3** — Un insieme di  $N$  punti in posizioni  $\{p_k\}_{k=1}^N$  che debbono essere contenuti *entro* una sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine del riferimento fisso deve soddisfare  $N$  disequazioni vincolari, ciascuna nella forma

$$\|p_k\|^2 \leq R^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è unilaterale.

**Esempio 2.4** — Un insieme di  $N$  punti in posizioni  $\{p_k\}_{k=1}^N$  che debbono muoversi *sulla superficie* di una sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine del riferimento fisso deve soddisfare  $N$  equazioni vincolari, ciascuna nella forma

$$\|p_k\|^2 = R^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è bilaterale.

**DEFINIZIONE 4.2** (Vincoli scleronomi e reonomi). *Un vincolo  $\mathcal{V}$  come in Eq. (2.3) si dice scleronomo se le relazioni che lo definiscono non dipendono esplicitamente dal tempo; diversamente si dice reonomo.*

**Esempio 2.5** — Gli esempi di vincolo considerati finora sono scleronomi. Se per esempio consideriamo un insieme di  $N$  punti in posizioni  $\{p_k\}_{k=1}^N$  che debbono essere contenuti *entro* una sfera di raggio  $R(t) = R_0 + vt$ ,  $R_0, v$  quantità non negative, esso deve soddisfare  $N$  equazioni vincolari, ciascuna nella forma

$$\|p_k\|^2 \leq (R_0 + vt)^2, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Questo vincolo è reonomo per  $v \neq 0$ , diversamente è scleronomo.

**4.1.1. Sistemi olonomi.** Una definizione che merita un approfondimento particolare è la seguente.

**DEFINIZIONE 4.3** (Vincoli olonomi e anolonomi). *Un vincolo  $\mathcal{V}$  come in Eq. (2.3) si dice olonomo se le relazioni che lo definiscono sono in forma finita, ovvero possono essere messe in una forma tale da non contenere derivate delle posizioni; diversamente si dice anolonomo, o di mobilità.*



Un vincolo anolonomo è un vincolo che coinvolge le velocità in gioco e che *non* può essere riscritto come un equivalente vincolo sulle posizioni. Considereremo esclusivamente vincoli olonomi, ovvero nella forma

$$\mathcal{V} = \begin{cases} \phi_1(\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N, t) \leq 0 \\ \phi_2(\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N, t) \leq 0 \\ \vdots \\ \phi_V(\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N, t) \leq 0 \end{cases}.$$

Un sistema vincolato in maniera olonoma permette di individuare un numero  $n \leq N$  di parametri *essenziali* e tra loro *indipendenti*, ovvero tali da essere tutti necessari e al tempo stesso sufficienti per la descrizione del moto. Questi parametri  $\{q_j\}_{j=1}^n$  si dicono *coordinate lagrangiane* o *generalizzate* o *libere*, e costituiscono i *gradi di libertà* del sistema che si può perciò descrivere per mezzo di un vettore  $n$ -dimensionale  $\mathbf{q} = (q_j)_{j=1}^n$ . Questo è il caso, per esempio, quando il vincolo  $\mathcal{V}$  è espresso in termini di  $V \leq 3N$  equazioni che permettono di scrivere  $V$  coordinate in funzione delle restanti  $n = 3N - V$  (grazie al teorema di Dini): queste ultime possono avere il ruolo di coordinate lagrangiane. La conoscenza di  $\mathbf{q}(t)$  permette di caratterizzare completamente il moto e la funzione  $\mathbf{q}(t)$  fornisce essa stessa le *equazioni orarie* in coordinate lagrangiane. Lo spazio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  dei valori che  $\mathbf{q}$  può assumere è detto *spazio delle configurazioni* del sistema: al variare di  $t$ ,  $\mathbf{q}(t)$  descrive una curva in  $\Omega$  che esprime l'evoluzione del sistema stesso. Dato che le coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  parametrizzano completamente il sistema, il vettore  $\mathbf{p}$  che individua la posizione di un punto del sistema può essere inteso come una funzione di  $\mathbf{q}$  e, eventualmente, del tempo  $t$ , ovvero  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(t, \mathbf{q}(t))$ . Di conseguenza possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{p}} = \partial_t \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^3 \left( \partial_t p_j + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) \hat{\mathbf{i}}_j.$$

Si noti che nel caso di vincoli scleronomi non c'è dipendenza esplicita di  $\mathbf{p}$  da  $t$  e  $\partial_t \mathbf{p} = \mathbf{0}$ . L'espressione sopra si può scrivere in forma differenziale come

$$d\mathbf{p} = \partial_t \mathbf{p} dt + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = \sum_{j=1}^3 \left( \partial_t p_j dt + \sum_{k=1}^n dq_k \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) \hat{\mathbf{i}}_j$$

in cui la *spostamento infinitesimo*  $d\mathbf{p}$  viene espresso in termini di una variazione delle coordinate lagrangiane  $d\mathbf{q}$ . Questo tipo di spostamento si dice essere *reale* e tiene conto della presenza dei vincoli e della loro dipendenza dal tempo.

Da quanto detto sopra, abbiamo che il lavoro infinitesimo fatto dalle forze agenti su in sistema olonoma può scriversi

$$w = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, d\mathbf{p}_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \partial_t \mathbf{p}_k \rangle dt + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial q_i} \rangle dq_i \equiv \mathbf{Q}_t dt + \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i dq_i,$$

dove abbiamo introdotto l'insieme di scalari

$$\mathbf{Q}_t := \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \partial_t \mathbf{p}_k \rangle, \quad \mathbf{Q}_i := \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial q_i} \rangle, \quad i = 1, \dots, n,$$

da *non* confondere con la quantità di moto. La potenza si calcola direttamente come

$$\Pi = \mathbf{Q}_t + \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i \dot{q}_i.$$

Le quantità  $\mathbf{Q}_i$  sono dette *forze generalizzate*; inoltre,  $\mathbf{Q}_t = 0$  se i vincoli in gioco sono fissi.

Se le forze sono conservative, ovvero  $F_k = \nabla U_k$ , allora, definendo  $U = \sum_{k=1}^N U_k$  si ha che

$$Q_t := \sum_{k=1}^N \langle \nabla U_k, \partial_t p_k \rangle = \partial_t U \quad Q_i := \sum_{k=1}^N \langle \nabla U_k, \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \rangle \equiv \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pertanto, in questo caso,

$$w = \partial_t U dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \equiv dU, \quad \Pi = \partial_t U + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i \equiv \frac{dU}{dt},$$

che evidenzia come anche in presenza di vincoli olonomi il lavoro infinitesimo di forze conservative si può scrivere come un differenziale esatto. In definitiva, in presenza di vincoli olonomi le variabili cartesiane possono essere sostituite da quelle lagrangiane e le forze da forze generalizzate, ottenendo lo stesso tipo di formalismo.

**Esempio 2.6** — Consideriamo un punto materiale  $P$ , la cui posizione è parametrizzata da  $p$ , vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio  $R > 0$ . Il suo moto deve soddisfare l'equazione

$$\|p\|^2 = R^2.$$

Questo vincolo è bilaterale olonomo. Questa equazione permette di esprimere *localmente* una delle coordinate di  $p$  in funzione delle altre due, e pertanto il sistema ha  $n = 3 - 1 = 2$  gradi di libertà. Esistono quindi due parametri lagrangiani,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  in grado di parametrizzare il moto. È tuttavia più comodo non scegliere le coordinate cartesiane in questo caso, data la simmetria sferica del problema, ma piuttosto le due variabili angolari  $\theta$  e  $\varphi$  che compaiono nella parametrizzazione sferica della posizione del punto, scrivendo

$$p_1 = R \sin \theta \cos \varphi, \quad p_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad p_3 = R \cos \theta,$$

di modo che  $\mathbf{q} = (\theta, \varphi)^\top$ .

**Esempio 2.7** — Abbiamo visto che il rotolamento puro nel caso di un moto piano o un moto di rotolamento di curva su curva equivale ad un vincolo sulle posizioni, ovvero, sulla base di quanto detto sopra, olonomo. Non vale altrettanto quando si considera un rotolamento tra due superfici nello spazio. Consideriamo per esempio una sfera rigida di raggio  $R$  che rotola di rotolamento puro su un piano. Sia  $X$  il centro della sfera, identificato dal vettore  $x$  di coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, R)^\top$  rispetto ad un riferimento cartesiano ortonormale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Se  $C$  è il punto di contatto, identificato dal vettore  $c$ , per via della condizione di rotolamento puro avremo che

$$v_X + \omega_* \wedge (c - x) = \mathbf{0}.$$

Questa condizione, analoga a quella fatta per il disco che rotola nel piano, *non* può essere messa in forma olonoma e rimane una condizione sulle velocità, ovvero una condizione anolonoma. In altre parole, non equivale ad una relazione finita tra le coordinate libere.

**4.2. Classificazione dinamica dei vincoli.** Dato che la presenza di vincoli non permette al sistema di assumere accelerazioni qualsivoglia, questo significa che un vincolo esercita una o più forze sul sistema per impedire che si realizzino certe sue configurazioni. Per esempio, se consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in posizione  $p$  rispetto all'origine di un riferimento inerziale, in presenza di vincoli il Secondo principio dovrà essere scritto come

$$\mathbf{F} + \Phi = m\mathbf{a}_P$$

dove  $\mathbf{F}$  è la risultante di tutte le forze attive agenti sul punto materiale, mentre  $\Phi$  è una forza “di reazione”, esercitata dai dispositivi vincolari, tale da rendere  $\mathbf{a}_P$  compatibile con i vincoli imposti.

Questo contributo, detto *reazione vincolare*, è una forza non nota a priori, ma che, come vedremo, deve soddisfare certe relazioni imposte dalla natura del vincolo. Caratterizzare un vincolo la cui configurazione può evolvere nel tempo è meno immediato, e richiede l'introduzione del concetto di *spostamento virtuale*, che racchiude l'informazione sulla geometria del vincolo ad un istante fissato.

4.2.1. *Spostamenti virtuali*. Uno *spostamento infinitesimo virtuale* è uno spostamento compatibile coi vincoli che non tiene conto della loro dipendenza dal tempo e viene matematicamente espresso come

$$\delta \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^n \delta q_k \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) \hat{\mathbf{i}}_j$$

dove la presenza di  $\delta$  ricorda che non si tratta di un “vero” differenziale di  $\mathbf{p}$ : il tempo infatti viene immaginato fisso e si variano infinitesimamente solo le coordinate lagrangiane, che per costruzione tengono conto dei vincoli a cui il sistema è soggetto. In altre parole, uno spostamento virtuale contiene informazioni sulla geometria del vincolo attorno ad un punto *in un dato istante*. Ad uno spostamento virtuale si può associare una *velocità virtuale*

$$\tilde{v}_P := \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) \hat{\mathbf{i}}_j,$$

che è diversa da quella reale se  $\partial_t \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ .

**Esempio 2.8** — Consideriamo il caso del moto di un punto materiale  $P$  in posizione individuata dal vettore  $\mathbf{p}$ , vincolato a muoversi su una sfera di raggio  $R(t)$  dipendente dal tempo. L'equazione vincolare è

$$\|\mathbf{p}(t)\|^2 = p_1^2(t) + p_2^2(t) + p_3^2(t) = R^2(t).$$

Uno spostamento reale corrisponde ad uno spostamento tale per cui

$$\frac{1}{2} d \|\mathbf{p}\|^2 = p_1 d p_1 + p_2 d p_2 + p_3 d p_3 = \langle \mathbf{p}, d \mathbf{p} \rangle = \dot{R} R dt$$

ottenuto propriamente differenziando ambo i membri dell'equazione. Viceversa, se lo spostamento è virtuale, la dipendenza esplicita dal tempo viene trascurata e si ottiene

$$\frac{1}{2} \delta \|\mathbf{p}\|^2 = p_1 \delta p_1 + p_2 \delta p_2 + p_3 \delta p_3 = \langle \mathbf{p}, \delta \mathbf{p} \rangle = 0.$$

Come si vede, lo spostamento virtuale è tangente alla sfera, essendo ortogonale a  $\mathbf{p}$ , mentre quello reale in generale non lo è dato che è tenuto a “seguire” la possibile dilatazione o contrazione della sfera che si verifica nell'intervallo temporale infinitesimo  $dt$ . Se quindi calcoliamo la velocità del punto, abbiamo che la velocità reale,  $\mathbf{v}_P$ , ha una componente nella direzione radiale, proprio perché  $\langle \mathbf{p}, d \mathbf{p} \rangle = R \dot{R} dt \Rightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_P \rangle = R \dot{R}$ . Se invece si calcola una *velocità virtuale* utilizzando lo spostamento  $\delta \mathbf{p}$ , si ha  $\langle \mathbf{p}, \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} \rangle = 0$ : la velocità virtuale è tangente cioè al vincolo.

Gli spostamenti virtuali possono essere trattati esattamente come quelli reali, introducendo i concetti di *lavoro infinitesimo virtuale* e *potenza virtuale*. Supponiamo per esempio di avere un sistema olonomo di  $N$  particelle. Possiamo introdurre il lavoro infinitesimo virtuale

$$\tilde{w} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle, \quad \tilde{\Pi} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \tilde{\mathbf{v}}_k \rangle,$$

dove  $\tilde{v}_k := \frac{\delta p_k}{\delta t}$  sono velocità virtuali. Nel caso di un sistema olonomo con  $n$  variabili lagrangiane, queste due quantità si riscrivono come

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad \tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i,$$

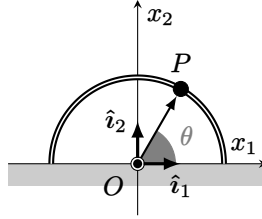
dove, in virtù del fatto che gli spostamenti sono virtuali, i termini dipendenti da  $Q_t$  sono assenti. Se le forze sono ottenute da un potenziale, otteniamo  $\tilde{w} = \delta U$ , dove  $\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i$  è il differenziale ottenuto ignorando la dipendenza esplicita dal tempo di  $U$ , come atteso.

**4.2.2. Configurazioni di frontiera.** Uno spostamento virtuale si dice *reversibile* se il suo opposto è anch'esso uno spostamento virtuale ammesso; viceversa si dice *irreversibile*. Questa definizione è utile per caratterizzare i vincoli unilaterali e le cosiddette configurazioni di confine, o frontiera. Facciamo un esempio.

**Esempio 2.9** — Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  individuato dal vettore  $p$  e tenuto a soddisfare i seguenti tre vincoli:

$$\|p\| = \rho t, \quad \langle p, \hat{i}_3 \rangle = 0, \quad \langle p, \hat{i}_2 \rangle \geq 0, \quad \rho > 0.$$

I vincoli esprimono il fatto che il moto deve avvenire nel semipiano superiore di un riferimento cartesiano su un arco di circonferenza di raggio variabile nel tempo  $\rho t$ . Si tratta quindi di un vincolo reonomo.



Per via del vincolo di planarità del moto e della condizione di appartenenza alla guida, possiamo individuare un unico parametro lagrangiano  $\theta$  per il sistema, e utilizzare una parametrizzazione polare scrivendo

$$p = \rho t \cos \theta \hat{i}_1 + \rho t \sin \theta \hat{i}_2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Ora, per ogni posizione sulla guida con  $0 < \theta < \pi$ , abbiamo che

$$\delta p = \rho t (-\sin \theta \hat{i}_1 + \cos \theta \hat{i}_2) \delta \theta.$$

Questa espressione è associata ad uno spostamento virtuale legittimo sia che si prenda  $\delta \theta > 0$  sia che si prenda  $\delta \theta < 0$  ovunque sulla guida, *eccezion fatta* per i punti  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . In  $\theta = 0$ , per esempio, possiamo considerare solo uno spostamento virtuale con  $\delta \theta > 0$ : il suo opposto è inammissibile. Viceversa, in  $\theta = 2\pi$ , solo  $\delta \theta < 0$  è ammesso. Queste due configurazioni sono dette *di frontiera*. Si noti che la velocità effettiva del nostro punto è

$$v_P = \dot{p} = \rho (\cos \theta \hat{i}_1 + \sin \theta \hat{i}_2) + \frac{\delta p}{\delta t}.$$

Mentre il secondo contributo può avere qualsivoglia segno sui punti non di frontiera (considerando spostamenti virtuali infinitesimi in senso orario o antiorario), il primo contributo *non* può essere mai invertito di segno ed è sempre diretto nella direzione radiale uscente, dato che segue la dilatazione del vincolo.

Possiamo in effetti dare la seguente Definizione generale, che formalizza il fatto che uno spostamento virtuale è irreversibile solo nei punti di frontiera.

DEFINIZIONE 4.4. *Una configurazione è detta di frontiera se ammette spostamenti virtuali irreversibili. Si dice che in tale configurazione agisce un vincolo unilatero.*

4.2.3. *Vincoli ideali.* Torniamo ora al nostro problema meccanico di un singolo punto materiale soggetto ad un vincolo olonomo, e alla ricerca di una condizione che caratterizzi l'azione del vincolo in termini della forza di reazione  $\Phi$  da esso generata: immaginiamo che questa forza di reazione si limiti a imporre la validità del vincolo. Per fissare le idee, immaginiamo che il punto materiale considerato sia vincolato a muoversi *lungo* una certa superficie  $\sigma$  che, in  $p$ , assumiamo avere versore normale  $\hat{n}_P(t)$ . Il vincolo è tale da non permettere al punto di uscire dalla superficie: si tratta quindi di un vincolo bilaterale. Inoltre, supponiamo anche che il vincolo sia *olonomo*, e quindi esista una collezione di coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$  tale per cui  $p \equiv p(t, \mathbf{q})$ . In questo caso, il punto materiale non può avere velocità e accelerazione ortogonali alla superficie stessa (altrimenti ne uscirebbe): in altre parole

$$\langle \hat{n}_P, a_P \rangle = 0.$$

Se  $F$  è la forza attiva sul punto, immaginando che la reazione vincolare abbia come *solo* effetto l'imposizione del vincolo, la reazione vincolare deve agire in modo tale da annullare il contributo di  $F$  nella direzione  $\hat{n}_P$ , per cui  $\Phi = \Phi \hat{n}_P$  per un qualche opportuno  $\Phi$  tale che

$$\langle \hat{n}_P, F + \Phi \rangle = 0 \Rightarrow \Phi = -\langle \hat{n}_P, F \rangle.$$

Il fatto che  $\Phi$  sia parallelo a  $\hat{n}_P$  può esprimersi in termine proprio degli spostamenti virtuali concessi al punto materiale. Essendo infatti gli spostamenti virtuali ammessi sono *tangenti* alla superficie, deve valere

$$\langle \Phi, \delta p \rangle = 0.$$

La relazione sopra equivale a dire che il lavoro virtuale infinitesimo della forza  $\Phi$  è nullo. Consideriamo invece il caso in cui il punto materiale sia libero di muoversi purché rimanga *da un lato* della superficie, ovvero il vincolo sia unilatero. Cioè significa che quando il punto materiale si trova in un punto, individuato da  $p$ , appartenente alla superficie, esso può muoversi, per esempio, nella direzione  $\hat{n}_P$ , ma non nella direzione  $-\hat{n}_P$ . La condizione è che quindi l'accelerazione sia tale che

$$\langle a_P, \hat{n}_P \rangle \geq 0.$$

Anche in questo caso la reazione vincolare interverrà per correggere l'accelerazione generata dalle forze attive lungo  $\hat{n}_P$ , e quindi  $\Phi = \Phi \hat{n}_P$ , per un qualche  $\Phi$ , che però avrà valore positivo o nullo in modo da rimuovere il contributo nella direzione  $-\hat{n}_P$  in  $F$ . Questa condizione si può scrivere ricorrendo ad uno spostamento virtuale, ovvero immaginando di muovere il punto di  $\delta p$  a vincolo fisso: questa volta  $\delta p$  è tale che  $\langle \hat{n}_P, \delta p \rangle \geq 0$ , ovvero, moltiplicando per  $\Phi > 0$ , la reazione vincolare dovrà essere tale che

$$\langle \Phi, \delta p \rangle \geq 0.$$

La relazione sopra equivale a dire che il lavoro virtuale  $\tilde{w}$  della forza  $\Phi$  è non negativo.

Su ispirazione delle osservazioni precedenti, si dà la seguente, generale definizione.

DEFINIZIONE 4.5 (Vincolo ideale e vincolo dissipativo). *Un vincolo ideale genera tutti e soli i sistemi di reazioni vincolari compatibili col vincolo aventi lavoro virtuale infinitesimo non negativo. Se i vincoli sono bilateri, il lavoro infinitesimo virtuale delle reazioni vincolari è in particolare nullo. Un vincolo non ideale si dice dissipativo.*

In un vincolo dissipativo, pertanto, la reazione vincolare non si limita a imporre la validità del vincolo, ma ha altri effetti (per esempio, ostacolando il moto *lungo* il vincolo, come vedremo in seguito).

Gli esempi di vincolo discussi finora sono ideali: essi sono, in particolare, dei *contatti lisci*, un tipo di vincolo ideale molto comune nei modelli teorici. In un vincolo di contatto liscio, la reazione vincolare  $\Phi$  è ortogonale al vincolo stesso: nel caso di vincolo bilatero, non ci sono condizioni sul verso di  $\Phi$ , mentre, se il vincolo è unilatero,  $\Phi$  può puntare solo nella direzione di moto ammesso.

**Rotolamento puro.** — Un caso particolare di vincolo ideale, che non appartiene alla famiglia dei contatti lisci, è il *rotolamento puro*. Il vincolo di puro rotolamento infatti può essere detto un caso di vincolo ideale “scabro”. Sappiamo che in un rotolamento puro, se  $C$  è il punto di contatto tra due corpi rigidi in rotolamento reciproco, tale punto ha istantaneamente una velocità nulla. Sia ora  $\Phi$  la reazione vincolare applicata da uno dei due corpi sull'altro in  $C$ . Il suo lavoro infinitesimo virtuale va calcolato valutando lo spostamento virtuale ammesso del punto di contatto, dove la forza è applicata, *a vincolo fisso*. Tuttavia, il punto di contatto in un rotolamento puro è, per definizione, la posizione di un punto materiale avente istantaneamente *velocità nulla*: il vincolo, cioè, impone che detto punto materiale, *a tempo fissato*, non possa spostarsi. Dato che l'unico spostamento virtuale ammesso è quello nullo, il lavoro virtuale di  $\Phi$  è nullo. Il rotolamento puro è quindi un vincolo ideale *nonostante*  $\Phi$  non sia necessariamente ortogonale alle due superfici nel punto di contatto — e anzi in questo caso è *necessario* che ci sia una componente di  $\Phi$  che agisca nella direzione tangente fornendo l'*attrito statico* utile a permettere al corpo di rotolare e non strisciare.

**Vincoli ideali nei sistemi piani.** — I vincoli ideali applicabili ai sistemi piani sono di particolare interesse e meritano una descrizione più specifica. I più comuni sono i seguenti.

**Cerniera:** Una *cerniera piana* vincola uno o più corpi rigidi nel piano a ruotare attorno al punto in cui è applicata, che può essere fisso (cerniera fissa) o libero di muoversi nel piano (cerniera mobile — in questo caso, la cerniera vincola due corpi rigidi). Una cerniera fissa è un vincolo ideale (il punto in cui è applicata non può muoversi); una cerniera mobile, è anch'essa ideale in quanto non ammette spostamenti relativi tra i punti dei due corpi a cui è applicata.

**Carrelli e pattini:** Un *carrello* vincola un estremo di un corpo rigido a scorrere lungo un binario consentendo una rotazione attorno al punto in cui è applicata. In un carrello ideale, non viene prodotta alcuna reazione lungo la direzione *parallela* al moto del carrello, mentre l'unica possibile reazione del vincolo è nella direzione ortogonale: il carrello è infatti un vincolo ideale liscio bilatero. Un *pattino* agisce come un carrello ma, in aggiunta, non permette una rotazione del corpo attorno al punto in cui è applicato: anche in questo caso l'eventuale reazione vincolare è ortogonale alla direzione di scorrimento.

**Incastro:** Un *incastro* può essere interpretato come il più estremo tipo di vincolo tra due corpi rigidi, ovvero come una cerniera mobile che non ne permette la rotazione relativa. Si tratta quindi di una completa saldatura dei due corpi. Non permettendo alcuno spostamento relativo, è un vincolo ideale.

4.2.4. *Vincoli dissipativi: attrito.* Il vincolo di contatto liscio descritto sopra è naturalmente una astrazione, e in realtà si ha più spesso a che fare con vincoli *dissipativi di contatto scabro*. Un vincolo di contatto scabro si manifesta come un vincolo di contatto che oppone una reazione vincolare con componente tangente al vincolo stesso  $\Phi_t$ , oltre che normale  $\Phi_n$ , di modo che  $\Phi = \Phi_n + \Phi_t$ .

Supponiamo per esempio di avere due corpi rigidi in contatto tra loro in un certo punto geometrico, e che la velocità di tale punto sia nulla secondo entrambi i corpi rigidi. Si osserva sperimentalmente che, nei sistemi reali, le due componenti normale e tangenziale della reazione vincolare prodotta da un corpo sull'altro soddisfano la *disuguaglianza di Coulomb–Morin*,

$$\|\Phi_t\| \leq \mu_s \|\Phi_n\|$$

dove  $\mu_s$  è detto *coefficiente di attrito statico* e dipende dai materiali in contatto reciproco. In altre parole, il contatto può esibire una reazione vincolare tangenziale pari in modulo, *al più*, a  $\mu_s \|\Phi_n\|$ . La componente  $\Phi_t$  è detta *di attrito statico* ed è diretta in modo tale da annullare l'accelerazione del punto di contatto: essa appare in realtà anche in vincoli ideali come il puro rotolamento (che infatti rientra, come caso, nello scenario sopra descritto): il fatto che vi sia una forza d'attrito statico non implica dunque che si abbia a che fare con un vincolo dissipativo, e occorre verificare che la condizione di lavoro virtuale infinitesimo non negativo sia soddisfatta per decidere se il vincolo è in effetti ideale o meno.

Se invece i punti di contatto hanno velocità relativa non nulla (ovvero, la velocità di strisciamento è diversa dal vettore nullo), la situazione è differente e si parla di vincolo di contatto *con strisciamento*. In questo caso, si vede sperimentalmente che esiste una quantità  $\mu_d$ , detta *coefficiente di attrito dinamico* e dipendente dalle superfici in contatto (ma non, in prima approssimazione, dalla velocità di strisciamento), tale per cui vale la *legge di Coulomb–Morin dinamica*

$$\|\Phi_t\| = \mu_d \|\Phi_n\|.$$

In questo contesto,  $\Phi_t$  si dice *attrito dinamico*. Sperimentalmente,  $\mu_d \leq \mu_s$ , mentre la forza  $\Phi_t$  ha direzione opposta alla velocità di strisciamento. È chiaro che una forza di attrito dinamico ammette un lavoro virtuale negativo, ed è pertanto associata ad un vincolo dissipativo.





## Elementi di statica

### 1. Criteri di equilibrio

**1.1. Equilibrio.** Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  *libero* (cioè non soggetto a vincoli) di massa  $m$  in posizione individuata dal vettore  $p$  secondo un sistema di riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Se la risultante delle forze agenti sul punto dipende solo da posizione e dalla velocità del punto stesso, il Secondo principio della meccanica assume la forma

$$ma_P = F(p, v_P).$$

Si dice che  $p(t) \equiv p_0$ , vettore costante, è una configurazione di *equilibrio* del punto materiale, se  $p_0$  è soluzione dell'equazione sopra, ovvero

$$F(p_0, 0) = 0.$$

In altre parole, sotto questa condizione, se il punto materiale si trova in  $p_0$  a velocità nulla, allora rimane nel medesimo punto per un tempo indeterminato. Analogamente, se il punto materiale è vincolato,  $p_0$  è un punto di equilibrio se la forza totale  $F + \Phi$ , somma della risultante delle forze attive  $F$  e della risultante delle reazioni vincolari  $\Phi$ , è nulla se calcolata sulla traiettoria  $p(t) \equiv p_0$ . Si osservi che se siamo interessati esclusivamente a posizioni di equilibrio, la dipendenza dalla velocità di  $F$ , ed eventualmente  $\Phi$ , può essere ignorata: nelle configurazioni di equilibrio, infatti, la velocità è sempre assunta nulla per definizione.

Le configurazioni di equilibrio, pertanto, vanno in generale cercate tra le soluzioni dell'equazione  $F + \Phi = 0$ . Nel caso in cui a priori la reazione vincolare  $\Phi \neq 0$ , e vada quindi anch'essa stimata, l'equazione  $F + \Phi = 0$  può essere insufficiente a individuare tutte le "incognite" del problema, ovvero le tre coordinate  $p_0$  e le tre componenti di  $\Phi$ , i cui valori dipendono dall'azione delle forze attive e dalla posizione del punto. In alcuni casi, però, la natura del vincolo è tale da non generare difficoltà. A titolo esemplificativo, supponiamo di avere a che fare con una superficie liscia, e indichiamone con  $\hat{n}_P$  il versore normale in un certo punto  $P$ . Assumiamo che questa superficie sia un vincolo *bilatere liscio* per un punto materiale  $P$  (ovvero il punto è vincolato a muoversi *lungo* la superficie). La reazione vincolare è tale che  $\Phi = \Phi \hat{n}_P$ , per cui, se  $F_n = \langle F, \hat{n}_P \rangle \hat{n}_P$  è la componente delle forze attive *normale* alla superficie e  $F_t = F - F_n$  quella *tangente* alla superficie, le equazioni di equilibrio si possono scrivere

$$F_t = 0, \quad F_n + \Phi = 0,$$

la seconda delle quali fornisce  $\Phi = -F_n$ . La condizione  $F_t = 0$  è una *equazione pura dell'equilibrio* del punto, dato che non dipende dalle forze di reazione, e fornisce un criterio per individuare l'insieme dei punti di equilibrio.

Se il vincolo di superficie è unilatero ma ideale, sappiamo solo che  $\Phi$  può avere solo un verso, ovvero deve essere orientata verso il lato della superficie dove il punto può trovarsi, per esempio  $\Phi = \Phi \hat{n}_P$  con  $\Phi \geq 0$ . Le condizioni di equilibrio sono quindi

$$F_t = 0, \quad \langle F, \hat{n}_P \rangle \leq 0$$

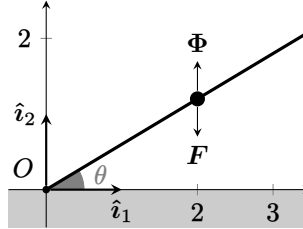
dato che  $\langle F, \hat{n}_P \rangle > 0$  non potrebbe essere bilanciato e il punto non sarebbe in quiete.

Se infine il punto materiale è soggetto ad un vincolo scabro, le condizioni possono riscriversi, ancora una volta, in modo differente. Supponiamo per esempio che la superficie non sia liscia, e che il punto sia soggetto ad un attrito statico, con associato coefficiente  $\mu_s$ . Questo vuol dire che il punto *può* essere in quiete nonostante siano applicate forze attive nella direzione tangente, purché la norma di  $\mathbf{F}_t$  non superi quello della reazione di attrito statico, che la legge di Coulomb–Morin statica dice essere pari a  $\mu_s \|\mathbf{F}_n\|$  per un certo coefficiente di attrito statico  $\mu_s$ , ovvero

$$\|\mathbf{F}_t\| \leq \mu_s \|\mathbf{F}_n\|,$$

che è la condizione pura di equilibrio nel caso di attrito statico.

**Esempio 3.1** (Guida inclinata) — Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una guida scabra di coefficiente d'attrito statico  $\mu_s$ . La guida si sviluppa lungo una retta passante per l'origine  $O$  di un riferimento cartesiano e che forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $\mathcal{X}$  del riferimento cartesiano parallelo a  $\hat{i}_1$ . Essa giace nel piano passante per  $O$  e generato dai vettori  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$ .



Sul punto materiale agisce la forza peso, che in questo riferimento ha la forma  $\mathbf{F} = -mg\hat{i}_2$ , con  $g$  accelerazione di gravità. Questo significa che si ha equilibrio se

$$\mathbf{F} + \Phi = \mathbf{0}$$

dove  $\Phi$  è la reazione della guida. Decomponiamo nella direzione *tangente* alla guida e in quella *normale* le forze in gioco: si ha equilibrio se

$$-mg \cos \theta + \Phi_n = 0, \quad -mg \sin \theta + \Phi_t = 0$$

da cui

$$\Phi_n = mg \cos \theta, \quad \Phi_t = mg \sin \theta.$$

D'altra parte sappiamo che  $|\Phi_t| \leq \mu_s |\Phi_n| = mg \mu_s \cos \theta$ , per cui la seconda equazione può essere soddisfatta solo se

$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s.$$

Se questa disuguaglianza non è soddisfatta, il punto non può essere in equilibrio.

**1.1.1. Equilibrio di un sistema: equazioni cardinali.** Se abbiamo a che fare con un sistema di  $N$  punti materiali  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , ciascuno corrispondente ad una massa  $m_k$  e una posizione  $p_k$  rispetto ad un riferimento inerziale, la condizione di equilibrio può essere scritta in maniera semplice: il sistema è in equilibrio se lo sono tutti i suoi punti. Questa semplice affermazione ha una rilevante conseguenza.

**TEOREMA 1.1** (Equazioni cardinali della statica). *Condizione necessaria perché un sistema di punti materiali sia in equilibrio è che la risultante delle forze esterne  $\mathbf{R}^{(\text{ext})}$  e il momento risultante delle forze esterne  $\boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})}$  siano nulli,*

$$\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}.$$

Le equazioni che appaiono nel precedente teorema sono dette prima e seconda equazione cardinale della statica rispettivamente. Si tratta di *condizioni necessarie ma non sufficienti*: può accadere che un sistema di punti *non* sia in equilibrio nonostante le equazioni cardinali della statica siano soddisfatte.

## 2. Teorema dei lavori virtuali e ricerca dei punti di equilibrio

Se il sistema fisico in esame è soggetto a *solli vincoli ideali*, un importante criterio *necessario e sufficiente* è fornito dal seguente Teorema, detto *principio* per ragioni storiche.



**TEOREMA 2.1** (Principio dei lavori virtuali). *Sia dato un sistema meccanico soggetto a vincoli ideali. Condizione necessaria e sufficiente perché una certa configurazione  $\mathcal{C}$  sia di equilibrio è che il lavoro virtuale infinitesimo  $\tilde{w}^{(a)}$  delle forze attive per un qualsivoglia spostamento virtuale da  $\mathcal{C}$  sia non positivo, ovvero*

$$\tilde{w}^{(a)} \leq 0.$$

*In particolare,  $\tilde{w}^{(a)} = 0$  per ogni spostamento virtuale reversibile da  $\mathcal{C}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo di avere un sistema meccanico  $\mathcal{S}$  di  $N$  punti materiali, di modo che il  $k$ -esimo punto  $P_k$  abbia massa  $m_k$  e posizione  $\mathbf{p}_k$ , in cui agisce una forza attiva risultante  $\mathbf{F}_k$  e, eventualmente, una reazione vincolare  $\Phi_k$ . In tale sistema,  $\mathcal{S}_l$  è il sottoinsieme di punti liberi, mentre  $\mathcal{S}_v$  è il sottoinsieme dei punti vincolati. Il lavoro virtuale infinitesimo associato alle forze attive è dato da

$$\tilde{w}^{(a)} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}_l} \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle + \sum_{k \in \mathcal{S}_v} \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle.$$

Dimostriamo ora che  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$  è condizione necessaria perché una certa configurazione  $\mathcal{C} = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^N$  sia di equilibrio. Se dunque  $\mathcal{C}$  è di equilibrio, in tale configurazione deve essere  $\mathbf{F}_k = \mathbf{0}$  se  $k \in \mathcal{S}_l$ , mentre  $\mathbf{F}_k = -\Phi_k$  per  $k \in \mathcal{S}_v$ . Allora

$$\tilde{w}^{(a)} = \sum_{k \in \mathcal{S}_v} \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle = - \sum_{k \in \mathcal{S}_v} \langle \Phi_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle \leq 0,$$

dove la disuguaglianza segue dalla definizione di vincolo ideale.

Viceversa, supponiamo di osservare che  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$  per ogni spostamento virtuale da una certa configurazione  $\mathcal{C}$ . Se per esempio spostiamo virtualmente un singolo punto libero  $\kappa \in \mathcal{S}_l$  allora avremo  $\langle \mathbf{F}_\kappa, \delta \mathbf{p}_\kappa \rangle \leq 0$ ; ma, essendo il punto libero e quindi lo spostamento reversibile, potremo considerare lo spostamento virtuale opposto  $-\delta \mathbf{p}_\kappa$ , ottenendo  $-\langle \mathbf{F}_\kappa, \delta \mathbf{p}_\kappa \rangle \leq 0$ : queste due condizioni sono compatibili solo se  $\langle \mathbf{F}_\kappa, \delta \mathbf{p}_\kappa \rangle = 0$  che, per via dell'arbitrarietà dello spostamento, implica  $\mathbf{F}_\kappa = \mathbf{0}$ . Considerando invece uno spostamento virtuale di un punto vincolato  $\bar{\kappa} \in \mathcal{S}_v$ , otterremo  $\langle \mathbf{F}_{\bar{\kappa}}, \delta \mathbf{p}_{\bar{\kappa}} \rangle \leq 0$ . Ora, tale punto sarebbe in equilibrio se la reazione vincolare  $\Phi_{\bar{\kappa}}$  su di esso fosse tale che  $\Phi_{\bar{\kappa}} = -\mathbf{F}_{\bar{\kappa}}$ . Ma tale reazione vincolare è *ammissibile*, dato che  $\langle \Phi_{\bar{\kappa}}, \delta \mathbf{p}_{\bar{\kappa}} \rangle = -\langle \mathbf{F}_{\bar{\kappa}}, \delta \mathbf{p}_{\bar{\kappa}} \rangle \geq 0$ , disuguaglianza soddisfatta per via della condizione vincolare ideale. Di conseguenza questa reazione vincolare si realizza, e il punto vincolato è anche esso in equilibrio.

Infine, se ogni spostamento virtuale dalla configurazione  $\mathcal{C}$  è reversibile,  $\tilde{w}^{(a)} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle \leq 0$  ma anche  $-\tilde{w}^{(a)} = -\sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{p}_k \rangle \leq 0$  (considerando lo spostamento virtuale opposto), da cui appunto  $\tilde{w}^{(a)} = 0$ .  $\square$

Il principio dei lavori virtuali è particolarmente utile, dato che fornisce una *relazione pura di equilibrio*, ovvero una relazione che coinvolge le sole forze attive, e non le reazioni vincolari.

**2.1. Equilibrio dei corpi rigidi.** Una conseguenza importante del Teorema dei lavori virtuali riguarda la sua applicazione al corpo rigido, per il quale implica che le equazioni cardinali della statica sono *sufficienti* per l'equilibrio.

**TEOREMA 2.2.** *Un corpo rigido è in equilibrio se e solo se le equazioni cardinali sono soddisfatte, ovvero se il sistema di forze esterne è equilibrato.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo già che la condizione è necessaria. Vediamo se è sufficiente. Decomponiamo le forze esterne agenti sul corpo rigido tra attive e di reazione vincolare. Ad esse corrispondono rispettivamente una risultante delle forze esterne attive  $\mathbf{R}^{(a,ext)}$  e una risultante delle forze esterne vincolari,  $\mathbf{R}^{(v,ext)}$ , così come un momento totale delle forze esterne attive,  $\boldsymbol{\tau}_P^{(a,ext)}$ , e un momento totale delle forze esterne di reazione,  $\boldsymbol{\tau}_P^{(v,ext)}$ , entrambi rispetto ad un punto solidale  $P$ . Indicando con  $\boldsymbol{\omega}\delta t$  uno spostamento *angolare* infinitesimo del corpo rigido, un generico lavoro virtuale compiuto su di esso può scriversi come

$$\tilde{w} = \langle \mathbf{R}^{(ext)}, \delta \mathbf{p} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_P^{(ext)}, \boldsymbol{\omega} \rangle \delta t = \langle \mathbf{R}^{(a,ext)}, \delta \mathbf{p} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_P^{(a,ext)}, \boldsymbol{\omega} \rangle \delta t + \langle \mathbf{R}^{(v,ext)}, \delta \mathbf{p} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_P^{(v,ext)}, \boldsymbol{\omega} \rangle \delta t = 0$$

dove l'ultima uguaglianza discende dalla condizione che le equazioni cardinali della statica siano soddisfatte. Questa espressione può essere scritta come

$$\tilde{w} = \tilde{w}^{(a,ext)} + \tilde{w}^{(v,ext)} = 0.$$

Possiamo sommare il contributo (nullo!) delle forze *interne*, attive e di reazione,  $\tilde{w}^{(a,in)} + \tilde{w}^{(v,in)} = 0$ , senza alterare l'uguaglianza: questo però ci permette di scrivere

$$\tilde{w} = \tilde{w}^{(a,ext)} + \tilde{w}^{(a,in)} + \tilde{w}^{(v,ext)} + \tilde{w}^{(v,in)} = \tilde{w}^{(a)} + \tilde{w}^{(v)} = 0.$$

Ma, essendo  $\tilde{w}^{(v)} \geq 0$ , questo implica che  $\tilde{w}^{(a)} \leq 0$ , e quindi, per il principio dei lavori virtuali, che ci sia equilibrio.  $\square$

**Esempio 3.2** (Corpo rigido con punto fisso) — Consideriamo un corpo rigido avente un punto fisso, che possiamo pensare nell'origine  $O$  del nostro riferimento. Nella solita notazione, equazioni cardinali si scrivono

$$\mathbf{R}^{(a,ext)} + \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}_O^{(a,ext)} = \mathbf{0},$$

dove abbiamo calcolato il momento totale delle forze esterne rispetto all'origine, punto dove è applicata l'unica reazione vincolare esterna,  $\mathbf{R}^{(v,ext)} = \boldsymbol{\Phi}$ . La seconda equazione *non* dipende dalla reazione vincolare (e quindi è una equazione di equilibrio pura) e può essere utilizzata per individuare la posizione del corpo all'equilibrio, dato che a questo scopo sono necessari solo tre angoli: condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio in questa configurazione dunque è che il momento totale delle forze attive esterne agenti sul corpo sia nullo. Questa stessa condizione si ottiene dal principio dei lavori virtuali: in questo caso ogni spostamento virtuale è reversibile, per cui

$$\tilde{w}^{(a)} = 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{\tau}_O^{(a,ext)}, \boldsymbol{\omega} \rangle \delta t = 0 \quad \forall \boldsymbol{\omega} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_O^{(a,ext)} = \mathbf{0}.$$

Si noti che dalla prima equazione cardinale della statica si può ottenere la reazione vincolare applicata nell'origine, che invece è inaccessibile utilizzando il principio dei lavori virtuali.

**Esempio 3.3** (Corpo rigido con asse fisso) — Consideriamo un corpo rigido con un asse fisso, ovvero tale per cui due suoi punti,  $O$  e  $P$ , sono fissi. Possiamo assumere per esempio che la retta passante per tali punti corrisponda con l'asse di riferimento cartesiano orientato come  $\hat{i}_3$ , e che  $O$  corrisponda all'origine del riferimento inerziale in cui operiamo. Essendo  $O$  fisso, deve valere la condizione trovata sopra per il corpo rigido con un punto fisso,

$$\langle \boldsymbol{\tau}_O^{(a,ext)}, \boldsymbol{\omega} \rangle \delta t = 0;$$

tuttavia in questo caso non possiamo effettuare un moto rotatorio qualsiasi, ma si può avere solo  $\boldsymbol{\omega}\delta t = \omega\delta t\hat{i}_3$ , ovvero una rotazione infinitesima compatibile con il vincolo di asse fisso. Questo significa che dobbiamo avere

$$\langle \boldsymbol{\tau}_O^{(a,ext)}, \hat{i}_3 \rangle = 0$$

che fornisce le condizioni di equilibrio del corpo: questa condizione è sufficiente, dato che è necessario un solo parametro (un angolo) per caratterizzare la posizione del corpo rigido. Pertanto

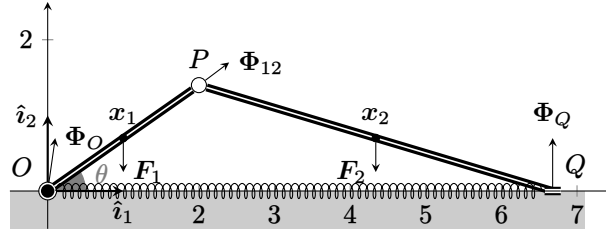
condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido con un asse fisso sia in equilibrio è che il momento assiale delle forze esterne attive rispetto all'asse fisso, sia nullo.

Ancora una volta, questa condizione non fornisce informazioni sulle reazioni vincolari: scrivendo le equazioni cardinali, si trova

$$\mathbf{R}^{(a, \text{ext})} + \Phi_O + \Phi_P = \mathbf{0}, \quad \tau_O^{(a, \text{ext})} + \mathbf{p} \wedge \Phi_P = \mathbf{0}.$$

Dalla seconda equazione si ottiene la condizione imposta dal principio dei lavori virtuali, moltiplicando scalarmente per  $\hat{\mathbf{i}}_3$  e usando il fatto che questa quantità è parallela a  $\mathbf{p}$ .

**Esempio 3.4** (Tecnica dello svincolamento) — Illustriamo tramite un esempio la cosiddetta *tecnica dello svincolamento*, particolarmente utile quando si ha a che fare con sistemi di più corpi rigidi. Consideriamo il sistema piano in figura, costituito da due aste rigide, omogenee di uguale massa  $m$ . La prima,  $\overline{OP}$ , ha lunghezza  $\ell$  ed è fissata nell'origine con una cerniera fissa, mentre la seconda,  $\overline{PQ}$ , ha lunghezza  $2\ell$  e ha in  $Q$ , punto individuato dal vettore  $\mathbf{q}$ , un carrello ideale che vincola il moto di  $Q$  all'asse orizzontale. In  $P$ , punto individuato dal vettore  $\mathbf{p}$ , infine, esiste una cerniera mobile, che vincola i due estremi omonimi delle due aste a coincidere. Una *molla ideale* di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla collega  $P$  a  $O$ . Il parametro lagrangiano del sistema è l'angolo  $\theta$  tra l'asta  $\overline{OP}$  e l'asse delle ascisse, che è vincolato ad assumere valori  $\theta \in [0, \pi]$ .



Ciascuna asta è soggetta ad una identica forza peso  $\mathbf{F}_i = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$ , dove  $i = 1$  individua l'asta  $\overline{OP}$  e  $i = 2$  individua l'asta  $\overline{PQ}$ . Vi sono poi le reazioni vincolari  $\Phi_O$  nell'origine e  $\Phi_Q$  in  $Q$  (quest'ultima sempre verticale, essendo il vincolo liscio). È presente anche una reazione  $\Phi_{12}$  della prima asta sulla seconda in  $P$ , con corrispondente e opposta reazione  $\Phi_{21}$  della seconda asta sulla prima: queste due forze sono interne al sistema. Infine, la molla agisce nella maniera siffatta: essa applica una forza  $\mathbf{F}_{Q, \text{el}} = -k\mathbf{q}$  in  $Q$ , mentre applica una forza  $\mathbf{F}_{O, \text{el}} = k\mathbf{q}$  in  $O$ . Anche queste forze sono da considerarsi interne, dato che agiscono tra componenti del sistema. Tutte le forze in gioco giacciono nel piano, per cui ciascuna è identificata da al più due componenti.

Le equazioni cardinali non bastano a fissare la posizione di equilibrio di questo sistema, che *non* è rigido: per risolvere il problema dell'equilibrio, dobbiamo trovare il valore di  $\theta$  e delle due reazioni vincolari  $\Phi_O$  e  $\Phi_Q$ , per un totale di quattro scalari ( $\Phi_Q \equiv \Phi_Q \hat{\mathbf{i}}_2$  ha solo una componente) mentre le equazioni cardinali forniscono al più tre condizioni, due sulla risultante  $\mathbf{R}^{(\text{ext})}$  delle forze esterne,  $\mathbf{R}^{(\text{ext})} = R_1^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{i}}_1 + R_2^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{i}}_2$  e una sul momento risultante delle forze, che sarà sempre diretto ortogonalmente al piano,  $\tau_O^{(\text{ext})} = \tau_3^{(\text{ext})}\hat{\mathbf{i}}_3$ ,

$$R_1^{(\text{ext})} = 0, \quad R_2^{(\text{ext})} = 0, \quad \tau_3^{(\text{ext})} = 0.$$

In questo tipo di situazioni, in cui il sistema è composto da più componenti rigide e le equazioni cardinali non sono sufficienti, si applica la cosiddetta *tecnica dello svincolamento*, immaginando di applicare le equazioni cardinali a ciascuna delle due componenti rigide “svincolate”. In questo modo, si ottengono due insiemi di equazioni di equilibrio, in cui alcune forze precedentemente

considerate interne appaiono esplicitamente, essendo ora “esterne” per la singola porzione di sistema. Indicando con  $x_1$  e  $x_2$  i centri di massa delle aste  $\overline{OP}$  e  $\overline{PQ}$  rispettivamente, avremo in questo caso

$$\begin{cases} -mg\hat{i}_2 + \Phi_O - \Phi_{12} + kq = 0, \\ x_1 \wedge (-mg\hat{i}_2) + p \wedge (-\Phi_{12}) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -mg\hat{i}_2 + \Phi_Q + \Phi_{12} - kq = 0, \\ (x_2 - q) \wedge (-mg\hat{i}_2) + (p - q) \wedge \Phi_{12} = 0. \end{cases}$$

A questo punto abbiamo quindi sei equazioni in sei incognite (tra le nuove forze in gioco, abbiamo introdotto  $\Phi_{12}$ , che dovremo determinare).

**2.2. Statica dei sistemi olonomi.** Il caso dei sistemi olonomi è particolarmente interessante. Come sappiamo, in un sistema olonomo è possibile individuare  $n$  variabili lagrangiane  $\mathbf{q} = (q_i)_{i=1}^n \in \Omega$  che parametrizzano le configurazioni del sistema tenendo conto dei vincoli in un opportuno spazio delle configurazioni  $\Omega$ . Come prima, supponiamo che il sistema sia costituito da  $N$  punti  $P_k$ , ciascuno in posizione  $p_k$ , massa  $m_k$  e sottoposto ad una forza attiva totale  $F_k$ : in questo caso, il lavoro virtuale delle forze attive si può scrivere come

$$\tilde{w}^{(a)} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad Q_i = \sum_{k=1}^N \left\langle F_k, \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \right\rangle,$$

dove  $Q_i$ ,  $i \in [n]$ , sono le cosiddette forze generalizzate che abbiamo già introdotto. Se indichiamo con  $\mathbf{Q} = (Q_i)_{i=1}^n$  il vettore delle forze lagrangiane, possiamo scrivere in forma più compatta

$$\tilde{w}^{(a)} = \mathbf{Q}^\top \delta \mathbf{q}.$$

Va tenuto a mente che le forze generalizzate dipendono dalle coordinate lagrangiane, ovvero  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{q})$ . A questo punto, possiamo applicare il Teorema dei lavori virtuali, osservando che si può avere a che fare con due diverse situazioni.

**Vincoli bilaterali:** Se il sistema è soggetto a vincoli bilaterali, allora tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili e di conseguenza il criterio di equilibrio è  $\tilde{w}^{(a)} = 0$ , ovvero

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 0.$$

Come si vede, un sistema olonomo si comporta come un *punto materiale libero* in cui la condizione di equilibrio è semplicemente che la forza generalizzata su di esso (intesa come vettore) sia nulla.

**Vincoli unilateri:** In questo caso, dobbiamo distinguere tra due tipi di configurazioni possibili, secondo la seguente Definizione.

**DEFINIZIONE 2.1** (Configurazioni ordinarie e di confine). *Si dicono configurazioni ordinarie di un sistema olonomo quelle descritte da un punto  $\mathbf{q}$  interno allo spazio delle configurazioni  $\Omega$ ,  $\mathbf{q} \in \dot{\Omega}$ . Sono di confine le configurazioni di un sistema con vincoli unilateri in cui  $\mathbf{q}$  appartiene alla frontiera di  $\Omega$ ,  $\mathbf{q} \in \partial\Omega$ .*

Gli spostamenti virtuali a partire da una configurazione ordinaria sono sempre reversibili, mentre ciò non vale quando la configurazione è di confine. Dunque  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 0$  rimane un criterio valido per determinare le configurazioni *ordinarie* di equilibrio in un sistema olonomo anche in presenza di vincoli unilateri. Bisogna però, in più, cercare eventuali possibili configurazioni di confine tali che  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})^\top \delta \mathbf{q} \leq 0$  in un intorno di  $\mathbf{q} \in \partial\Omega$ . In questo caso, chiaramente, entra in gioco la geometria di  $\Omega$ .

In generale, quindi, la seguente Proposizione riformula il Teorema dei lavori virtuali nel caso di sistemi olonomi, fornendo i criteri da applicare per calcolare le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine di un sistema olonomo.

**PROPOSIZIONE 2.3.** *Una configurazione ordinaria  $\mathbf{q}$  è di equilibrio se  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ . Una configurazione  $\mathbf{q}$  di confine è di equilibrio se*

- $Q_i(\mathbf{q}) = 0$  se  $\delta q_i$  può avere qualsivoglia segno (ovvero, ci si può spostare reversibilmente in  $q_i$ );
- $Q_i(\mathbf{q}) \geq 0$  se si può solo avere  $\delta q_i \leq 0$  (spostamento irreversibile in  $q_i$ );
- $Q_i(\mathbf{q}) \leq 0$  se si può solo avere  $\delta q_i \geq 0$  (spostamento irreversibile in  $q_i$ ).

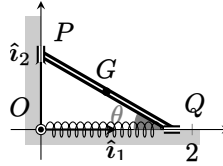
Se le forze attive sono conservative, abbiamo visto che, aggiuntivamente, vale la seguente relazione:

$$Q_i = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad i \in [n].$$

La Proposizione precedente fornisce, in questo caso, condizioni quindi sul gradiente del potenziale. Vale il seguente Teorema.

**TEOREMA 2.4** (Stazionarietà del potenziale). *Le configurazioni ordinarie di equilibrio di un sistema olonomo soggetto a forze conservative sono tutte e sole quelle che annullano il gradiente del potenziale,  $\nabla U(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ , ovvero coincidono con i punti stazionari di  $U$ .*

**Esempio 3.5** — Consideriamo un sistema piano, costituito da un'asta omogenea  $\overline{PQ}$  di massa  $m$  vincolata agli assi cartesiani, in modo che la posizione del punto  $P$  sia individuata da un vettore  $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{i}}_2$  e che la posizione del punto  $Q$  sia individuata da  $\mathbf{q} = q\hat{\mathbf{i}}_1$ . Tali coordinate sono vincolate ad essere tali che  $p \geq 0$  e  $q \geq 0$ . L'asta è rigida, ha massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Infine, una molla ideale, di costante elastica  $k$ , collega il punto  $Q$  all'origine. Il sistema è quindi soggetto a vincoli olonomi ed è possibile parametrizzare le configurazioni ammesse utilizzando un angolo  $\theta$  indicato in figura.



Nel sistema,  $\theta \in \Omega := [0, \frac{\pi}{2}]$ . Le configurazioni  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  sono di confine. Il potenziale del sistema si può scrivere

$$U(\theta) = -mg\frac{p}{2} - \frac{1}{2}kq^2 + \text{costante} = -\frac{mg\ell \sin \theta}{2} - \frac{k(\ell \cos \theta)^2}{2} + \text{costante}.$$

Il primo contributo è quello dovuto al potenziale gravitazionale, che si può stimare immaginando l'intera massa  $m$  concentrata nel centro di massa del sistema; il secondo contributo invece è dovuto alla presenza della molla. Chiamando  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ , le configurazioni di equilibrio si possono trovare studiando

$$\partial_\theta U = -\frac{k\ell^2}{2} \cos \theta (\eta - 2 \sin \theta).$$

Le configurazioni di equilibrio *ordinarie* vanno cercate in  $\mathring{\Omega} = (0, \pi/2)$ , imponendo

$$-\cos \theta (\eta - 2 \sin \theta) = 0.$$

Nell'intervallo aperto che stiamo studiando  $\cos \theta > 0$  e  $\sin \theta > 0$ , per cui occorre trovare  $\theta$  tale che

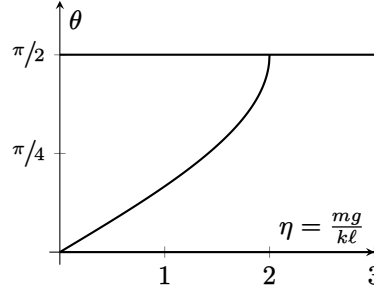
$$\eta - 2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{\eta}{2}.$$

Se  $\eta < 2$ , allora questa equazione ammette una soluzione, ovvero

$$\theta = \arcsin \frac{\eta}{2};$$

diversamente, non esistono soluzioni.

Consideriamo ora le due configurazioni di confine. Per  $\theta = 0$ , i possibili spostamenti virtuali sono sempre  $\delta\theta \geq 0$ , per cui, perché questa configurazione sia di equilibrio, deve valere  $\partial_\theta U|_{\theta=0} \leq 0$ . In effetti, troviamo che  $\partial_\theta U|_{\theta=0} = -\frac{1}{2}k\ell^2\eta \leq 0$ , che è sempre soddisfatto, per cui  $\theta = 0$  è sempre di equilibrio. La configurazione di confine  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , invece, ammette solo  $\delta\theta \leq 0$ , per cui deve valere  $\partial_\theta U|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \geq 0$ : sostituendo si vede che  $\partial_\theta U|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , per cui anche questa configurazione è sempre di equilibrio. Se tracciamo un grafico dei punti di equilibrio al variare di  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ , troviamo il risultato seguente.



### 3. Stabilità

Le considerazioni espresse finora sono utili per identificare le configurazioni di equilibrio, ma non sono sufficienti per studiarne la *stabilità*. Supponiamo che il nostro sistema meccanico sia posto *vicino* ad una certa posizione di equilibrio. Se il sistema rimane nelle vicinanze della configurazione di equilibrio, si dice che essa è di *equilibrio stabile*; viceversa, se si allontana dalla configurazione di equilibrio, si dice che essa è di *equilibrio instabile*. Una definizione più precisa è la seguente, basata sul concetto di *intorno* di una configurazione  $\mathcal{C}$ , inteso come intorno nello spazio delle configurazioni.

**DEFINIZIONE 3.1** (Stabilità in senso statico). *Una configurazione di equilibrio  $\mathcal{C}^*$  si dice stabile in senso statico se esiste un  $\epsilon$  tale per cui il lavoro compiuto dalle forze attive per spostare il sistema da  $\mathcal{C}^*$  ad ogni configurazione  $\mathcal{C} \in I_\epsilon(\mathcal{C}^*) \setminus \{\mathcal{C}^*\}$  è negativo.*

Questa definizione è di difficile applicazione in generale, ma si traduce in un criterio molto semplice se si ha a che fare con un sistema olonomo le cui forze in gioco sono conservative. Infatti in questo caso se  $\mathbf{q}^*$  è il vettore di parametri associato alla configurazione di equilibrio  $\mathcal{C}^*$  e  $\mathbf{q}$  è il vettore di parametri associato alla configurazione di equilibrio  $\mathcal{C}$ , il lavoro delle forze attive che permette di passare da  $\mathcal{C}^*$  a  $\mathcal{C}$  è  $W(\mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}) = U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{q}^*)$ . Il criterio di stabilità sopra, che richiede che  $W(\mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}) < 0$  per una configurazione  $\mathcal{C}$  sufficientemente vicina a  $\mathcal{C}^*$ , ovvero tale che  $\|\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\| \leq \epsilon$ : questo si traduce nel fatto che  $U(\mathbf{q}^*)$  sia un *massimo locale* e quindi nella seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 3.1.** *Un sistema olonomo conservativo è in una configurazione di equilibrio stabile in senso statico se essa corrisponde ad un massimo relativo isolato del sistema.*

Se la configurazione  $\mathbf{q}^*$  è una configurazione di equilibrio ordinaria, questa condizione equivale a chiedere che la matrice hessiana

$$\text{Hess}(U(\mathbf{q}))|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*} := \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{ij} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*}$$



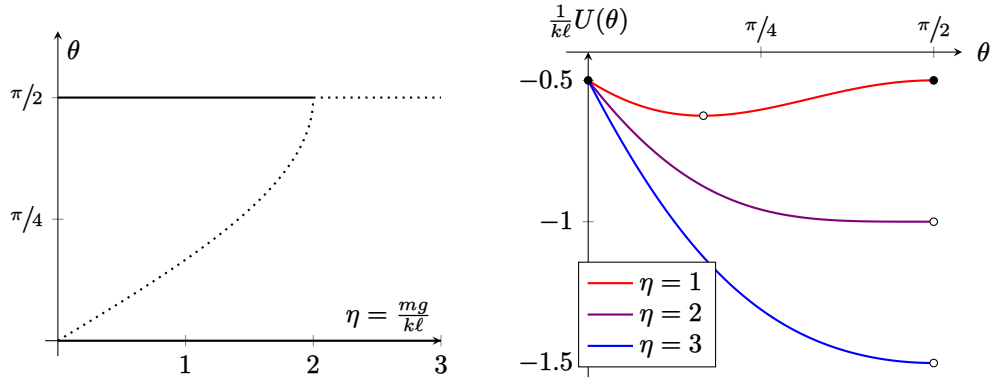


FIGURA 1. (Sinistra) Configurazioni stabili (linea continua) e instabili (linea tratteggiata) al variare del parametro  $\eta$  del sistema studiato a pagina 51. (Destra) Potenziale  $U(\theta)$  per diversi valori di  $\eta$ : per ogni curva sono indicati i punti di equilibrio stabile (nero) o instabile (bianco).

sia definita negativa, ovvero abbia tutti gli autovalori strettamente negativi. Se  $n = 1$ , allora la condizione di stabilità della configurazione associata a  $q^*$  si riduce ad una condizione di derivata seconda negativa del potenziale in  $q^*$ .

**Esempio 3.6** — Riprendiamo il sistema discusso a pagina 51. Abbiamo già visto che le configurazioni di equilibrio sono

$$\theta = \arcsin \frac{\eta}{2} \quad \text{per } \eta < 2, \quad \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

dove  $\eta = \frac{mg}{k\ell}$ . Non abbiamo però studiato la stabilità delle configurazioni. Se calcoliamo questa quantità nella configurazione di equilibrio ordinaria  $\theta = \arcsin \frac{\eta}{2}$ , otteniamo

$$\partial_{\theta}^2 U(\theta)|_{\theta=\arcsin \eta} = k\ell^2 \frac{4 - \eta^2}{4}.$$

Nel regime di valori ammesso per questa configurazione di valori,  $\eta < 2$ , questa derivata è positiva, per cui si tratta di una configurazione instabile.

Lo studio delle configurazioni di confine è più delicato. Per capire se esse sono di massimo o minimo locale, occorre studiare la funzione potenziale nel loro intorno. In un intorno di  $\theta = 0$ , la funzione potenziale è

$$U(\theta) = -\frac{k\ell^2}{2} - \frac{k\ell^2}{2}\eta\theta + o(\theta),$$

per cui la funzione è decrescente in un intorno positivo di  $\theta = 0$ , che è quindi un massimo locale. Intorno a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , abbiamo invece

$$U(\theta) = -\frac{1}{2}\eta k\ell^2 + \frac{1}{2}k\ell^2 \left(\frac{\eta}{2} - 1\right) \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o(|\theta - \pi/2|),$$

che mostra come, al crescere di  $\theta$ ,  $U(\theta)$  cresca se  $\eta < 2$  e quindi  $\theta = \frac{\pi}{2}$  è una configurazione di equilibrio stabile per  $\eta < 2$ ; per  $\eta > 2$ , invece, il potenziale decresce per  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e il punto  $\theta = \frac{\pi}{2}$  è un minimo locale del potenziale: di conseguenza si tratta di una configurazione instabile. Possiamo quindi produrre un grafico delle posizioni di equilibrio in cui indichiamo quali sono stabili (in linea continua) e instabili (in linea tratteggiata) al variare di  $\eta$  come in Fig. 1.



## Elementi di dinamica

### 1. Energia cinetica

**1.1. Energia cinetica di un sistema.** Consideriamo un sistema di punti materiali  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , di modo che il  $k$ -esimo tra loro abbia massa  $m_k$  e sia individuato dal vettore posizione  $p_k$ . Si definisce *energia cinetica* del sistema la quantità

$$T := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|v_k\|^2.$$

Se invece di un sistema di punti materiali è dato invece un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$  con campo di velocità  $v_X$  su di esso (di modo che  $v_X$  sia la velocità del punto in posizione  $x$ ), allora l'energia cinetica del corpo è data da

$$T := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(x) \|v_X\|^2 dx.$$

L'energia cinetica può essere decomposta in due contributi, uno dei quali equivale all'energia cinetica di un punto materiale di massa uguale alla massa totale del sistema e concentrato nel centro di massa.



**TEOREMA 1.1** (Secondo teorema di König). *L'energia cinetica di un sistema materiale di massa  $m$  può essere espressa come*

$$T = \frac{1}{2} m \|v_G\|^2 + T_G$$

dove  $T_G$  è l'energia cinetica del sistema in un riferimento *traslante* con velocità  $v_G$  pari a quella del centro di massa.

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il caso di un corpo composto da  $N$  punti materiali in posizione  $\{p_k\}_{k=1}^N$  con velocità  $\{v_k\}_{k=1}^N$  e masse  $\{m_k\}_{k=1}^N$  rispettivamente. Sia inoltre il centro di massa  $G$  del sistema individuato dal vettore  $x_G$ , con corrispondente velocità  $v_G$ . Per ottenere la decomposizione proposta dal teorema, possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galilei e scrivere

$$v_k = v_k^* + v_G,$$

dove  $v_k^*$  è la velocità della  $k$ -esima particella rispetto ad un riferimento *traslante* centrato nel centro di massa: siffatto sistema ha momento angolare nullo rispetto al riferimento di partenza. Abbiamo quindi che

$$\|v_k\|^2 = \langle v_k, v_k \rangle = \|v_k^*\|^2 + \|v_G\|^2 + 2\langle v_k^*, v_G \rangle.$$

Dunque possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|v_k\|^2 = \frac{1}{2} \|v_G\|^2 \sum_{k=1}^N m_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|v_k^*\|^2 + \sum_{k=1}^N m_k \langle v_k^*, v_G \rangle = \frac{1}{2} m \|v_G\|^2 + T_G.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la linearità del prodotto scalare: infatti,  $\sum_{k=1}^N m_k \langle v_k^*, v_G \rangle = \langle \sum_{k=1}^N m_k v_k^*, v_G \rangle = 0$ , dato che  $\sum_{k=1}^N m_k v_k^*$  è la quantità di moto nel riferimento del centro di massa, che è zero.  $\square$

**1.2. Teorema dell'energia cinetica.** Una delle ragioni per cui abbiamo introdotto l'energia cinetica è dovuta al suo legame con i concetti di potenza e lavoro.

■ **TEOREMA 1.2** (dell'energia cinetica). *Sia  $T$  l'energia cinetica di un sistema e  $\Pi$  la potenza di tutte le forze agenti su di esso. Allora*

$$\frac{dT}{dt} = \Pi.$$

*Inoltre, la variazione  $\Delta T$  dell'energia cinetica di un sistema materiale in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$  eguaglia il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul sistema.*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo il caso di un sistema di punti materiali: per ciascuno di essi vale naturalmente il Secondo principio,

$$\mathbf{F}_k = m_k \mathbf{a}_k,$$

dove  $\mathbf{F}_k$  è la risultante di tutte le forze applicate sul  $k$ -esimo punto materiale. Allora, moltiplicando scalarmente ambo i membri per  $\mathbf{v}_k$  e sommando su  $k$ ,

$$\Pi \equiv \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{F}_k \rangle = \sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 \right) = \frac{dT}{dt}.$$

La seconda parte del teorema segue da una integrazione diretta dell'espressione ottenuta. Supponiamo di considerare l'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ : allora

$$\Delta T := T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt = W.$$

□

Questo teorema generale ha speciali e importanti casi particolari elencati nelle seguenti Proposizioni.

**PROPOSIZIONE 1.3** (Vincoli ideali bilaterali fissi). *Se il sistema è soggetto a vincoli ideali bilaterali fissi, allora*

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{(a)},$$

dove  $\Pi^{(a)}$  è la potenza delle forze attive.

**DIMOSTRAZIONE.** Il lavoro virtuale delle forze di reazione in un vincolo ideale è nullo se il vincolo è bilaterale: inoltre, se il vincolo è fisso, il lavoro infinitesimo reale è un particolare lavoro infinitesimo virtuale, e pertanto il lavoro infinitesimo delle forze di reazione è nullo. Ne consegue, che anche la potenza delle forze di reazione è nulla. □

Dal fatto che la potenza delle forze interne di un corpo rigido è sempre nulla, discende immediatamente la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 1.4** (Corpo rigido). *Nel caso di un corpo rigido, vale*

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{(\text{ext})} \Rightarrow \Delta T = W^{(\text{ext})}$$

dove la potenza è quella dovuta alle sole forze esterne, mentre  $\Delta T$  è la variazione di energia cinetica in un certo intervallo temporale in cui le forze esterne eseguono un lavoro  $W^{(\text{ext})}$ .

Infine, possiamo enunciare il seguente, importante risultato.

**PROPOSIZIONE 1.5** (Conservazione dell'energia meccanica). *Sia dato un sistema sottoposto a vincoli ideali bilateri fissi e su cui agiscono solo forze attive conservative, di potenziale  $U$ . Allora l'energia meccanica*

$$E := T - U \equiv T + V$$

*è costante nel tempo.*

**DIMOSTRAZIONE.** La proposizione discende direttamente da quanto abbiamo detto sopra, essendo

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{(a)} = \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T - U) = \frac{dE}{dt} = 0.$$

□

Quando le ipotesi della precedente Proposizione sono verificate, si dice che l'energia meccanica è un *integrale primo del moto*. L'energia meccanica può conservarsi anche nel caso in cui esistano forze attive non conservative *purché* queste siano associate a potenza nulla, di modo che il secondo passaggio della precedente dimostrazione sia legittimo.

**Esempio 4.1** (Velocità di fuga) — Un esempio di applicazione della conservazione dell'energia meccanica è il calcolo della cosiddetta *velocità di fuga*, ovvero la velocità che deve avere un oggetto per abbandonare la superficie di un pianeta senza ricaderci. Consideriamo il problema sulla Terra, ignoriamo ogni forza d'attrito e consideriamo un corpo di massa  $m$  lanciato orizzontalmente (cioè in direzione perpendicolare alla retta passante da punto e centro della Terra) a quota  $h$  dalla superficie terrestre. Il corpo è così soggetto alla sola forza gravitazionale, che è conservativa, e ha energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} + \text{costante},$$

dove  $v$  è il modulo della velocità del corpo al lancio, mentre  $R_{\oplus}$  e  $M_{\oplus}$  sono rispettivamente raggio e massa della Terra, mentre  $G$  è la costante di gravitazione universale. Se  $v$  è sufficiente per allontanarsi indefinitamente dalla superficie (ovvero, per raggiungere un punto con  $h \rightarrow +\infty$ ), la conservazione dell'energia meccanica comporta che

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2,$$

dove  $v_{\infty}$  è la velocità del corpo a  $h \rightarrow +\infty$ . Se ci basta che  $v_{\infty} = 0$ , allora

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} \stackrel{h \ll R_{\oplus}}{\simeq} \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}.$$

**1.3. Energia cinetica dei corpi rigidi e momento d'inerzia.** Nel caso di un sistema rigido, l'energia cinetica si può decomporre in un contributo traslatorio e uno rotatorio grazie alla relazione che lega le velocità di punti diversi del corpo che abbiamo già studiato. Scrivere la formula per l'energia cinetica di un corpo rigido, tuttavia, fa naturalmente emergere una particolare quantità che racchiude le necessarie informazioni su come la massa del corpo è distribuita nello spazio.

**DEFINIZIONE 1.1** (Tensore d'inerzia). *Sia dato un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$ . Il suo tensore d'inerzia rispetto ad un punto  $P$  (individuato dal vettore  $p$ ) è dato da*

$$\mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|x - p\|^2 \mathbb{I} - (x - p) \otimes (x - p)) \rho \, dx$$

**Q Prodotto tensoriale** — Nell'espressione precedente compare il *prodotto tensoriale* tra due vettori. Dati due vettori  $u, v \in \mathbb{V}$ , spazio vettoriale euclideo, il loro prodotto tensoriale  $u \otimes v: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  è un operatore lineare che, applicato ad un terzo vettore  $w$  dello stesso spazio,  $(u \otimes v)w = u\langle v, w \rangle$ . Se  $u, v$  e  $w$  sono gli elementi di  $\mathbb{R}^2$  corrispondenti alle coordinate di  $v, u$  e  $w$  rispettivamente, possiamo dare una rappresentazione *matriciale* all'operatore  $u \otimes v$  come

$$u \otimes v \mapsto (uv^T)_{ij} = u_i v_j.$$

Per esempio, se  $d = 3$

$$uv^T = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

In questo modo, dato un vettore  $w$  di coordinate  $w$ ,  $(uv^T)w = u(v^T w)$ , che sono le coordinate del vettore  $u\langle v, w \rangle$ . Il prodotto tensore è distributivo, per cui per esempio  $v \otimes (u + w) = v \otimes u + v \otimes w$ , ma *non* commutativo:  $u \otimes v \neq v \otimes u$ . Usando questa notazione si possono scrivere varie quantità. Per esempio, se indichiamo con  $\mathbb{I}$  l'operatore identità, tale che  $\mathbb{I}v = v$  per un generico vettore  $v$ , allora in  $d = 3$  vale l'identità

$$a \wedge (b \wedge c) = (\langle c, a \rangle \mathbb{I} - c \otimes a) b.$$



**PROPOSIZIONE 1.6.** *L'energia cinetica di un corpo rigido di massa  $m$  e centro di massa  $x_G$  si può esprimere come*

$$(4.1a) \quad T = \frac{1}{2} m \|v_P\|^2 + m \langle v_P, \omega \wedge (x_G - p) \rangle + \frac{1}{2} \langle \omega, \mathbf{I}_P \omega \rangle$$

dove  $p$  è il vettore che identifica la posizione di un punto a scelta  $P$  del corpo,  $\omega$  la sua velocità angolare e  $\mathbf{I}_P$  è il tensore d'inerzia rispetto al punto  $P$ . In particolare scegliendo come punto  $P$  il centro di massa  $G$  si ha

$$(4.1b) \quad T = \frac{1}{2} m \|v_G\|^2 + \frac{1}{2} \langle \omega, \mathbf{I}_G \omega \rangle.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo dimostrare la Proposizione sopra direttamente usando la legge fondamentale del moto rigido. Sia  $\rho$  la densità del corpo. Allora

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_B \|v_X\|^2 \rho \, dx = \frac{1}{2} \int_B \|v_P + \omega \wedge (x - p)\|^2 \rho \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_B \|v_P\|^2 \rho \, dx + \frac{1}{2} \int_B \|\omega \wedge (x - p)\|^2 \rho \, dx + \int_B \langle v_P, \omega \wedge (x - p) \rangle \rho \, dx \\ &= \frac{1}{2} m \|v_P\|^2 + \frac{1}{2} \int_B \|\omega \wedge (x - p)\|^2 \rho \, dx + m \langle v_P, \omega \wedge (x_G - p) \rangle. \end{aligned}$$

Ora, sappiamo che dati tre vettori  $a, b$  e  $c$ ,  $\langle a, b \wedge c \rangle = \langle a \wedge b, c \rangle$ , per cui, dato un vettore  $u$ ,

$$\|\omega \wedge u\|^2 = \langle \omega \wedge u, \omega \wedge u \rangle = \langle \omega, u \wedge (\omega \wedge u) \rangle.$$

D'altra parte, essendo  $a \wedge (b \wedge c) = (\langle c, a \rangle \mathbb{I} - c \otimes a)b$ , possiamo ulteriormente semplificare

$$u \wedge (\omega \wedge u) = (\|u\|^2 \mathbb{I} - u \otimes u) \omega,$$

per cui

$$\|\omega \wedge (x - p)\|^2 = \langle \omega, (\|x - p\|^2 \mathbb{I} - (x - p) \otimes (x - p)) \omega \rangle$$

e in definitiva

$$(4.2) \quad \frac{1}{2} \int_B \|\omega \wedge (x - p)\|^2 \rho \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \omega, \left[ \int_{\mathcal{B}} (\|x - p\|^2 \mathbb{I} - (x - p) \otimes (x - p)) \rho \, dx \right] \omega \right\rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \omega, \mathbf{I}_P \omega \rangle,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo identificato l'espressione del tensore di inerzia rispetto a  $P$

$$\mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|x - p\|^2 \mathbb{I} - (x - p) \otimes (x - p)) \rho \, dx.$$

È immediato vedere che se  $p = x_G$  si ottiene come caso particolare il caso proposto dal teorema.  $\square$

**1.4. Il tensore d'inerzia e le sue proprietà.** Il tensore d'inerzia è un oggetto molto importante e per questo merita una trattazione piuttosto dettagliata. Esso ha una espressione apparentemente piuttosto complicata: come abbiamo visto, nel caso di un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$  esso si scrive come

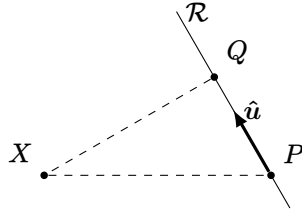
$$(4.3) \quad \mathbf{I}_P := \int_{\mathcal{B}} (\|x - p\|^2 \mathbb{I} - (x - p) \otimes (x - p)) \rho \, dx.$$

Analogamente, se il sistema in esame è costituito da  $N$  particelle in posizioni  $\{x_k\}_{k=1}^N$  e masse  $\{m_k\}_{k=1}^N$ , la corrispondente formula è data da

$$(4.4) \quad \mathbf{I}_P := \sum_{k=1}^N m_k (\|x_k - p\|^2 \mathbb{I} - (x_k - p) \otimes (x_k - p)).$$

Tuttavia il contributo di interesse può essere talvolta ottenuto senza un calcolo di tutti gli elementi del tensore. Consideriamo per esempio una direzione individuata dal versore  $\hat{u}$  nello spazio e calcoliamo  $\langle \hat{u}, \mathbf{I}_P \hat{u} \rangle$ . Abbiamo

$$\langle \hat{u}, \mathbf{I}_P \hat{u} \rangle = \int_{\mathcal{B}} (\|x - p\|^2 - \langle x - p, \hat{u} \rangle^2) \rho \, dx.$$



Ora, la costruzione geometrica sopra permette di vedere che  $\|x - p\|^2 - \langle x - p, \hat{u} \rangle^2 = d^2(X, \mathcal{R})$ , distanza quadra tra il punto  $X$  individuato dal vettore  $x$  e la retta  $\mathcal{R}$  passante per  $P$  e di direzione  $\hat{u}$ : infatti,  $\|x - p\|$  è proprio la distanza tra  $X$  e  $P$ , mentre  $|\langle x - p, \hat{u} \rangle|$  è la lunghezza del segmento  $\overline{PQ}$  in figura. Chiamiamo  $\langle \hat{u}, \mathbf{I}_P \hat{u} \rangle$  *momento d'inerzia del corpo rispetto alla retta  $\mathcal{R}$* , scrivendo

$$I_{\mathcal{R}} := \langle \hat{u}, \mathbf{I}_P \hat{u} \rangle = \int_{\mathcal{B}} d^2(X, \mathcal{R}) \rho \, dx.$$

La quantità

$$\delta_{\mathcal{R}} = \sqrt{\frac{I_{\mathcal{R}}}{m}}$$

è detta *raggio di girazione* e costituisce una sorta di *distanza quadratica media* dalla retta del corpo pesata sulla sua densità di massa: il momento di inerzia, infatti, si può scrivere come  $I_{\mathcal{R}} = m \delta_{\mathcal{R}}^2$ , che è il momento d'inerzia rispetto ad  $\mathcal{R}$  di un punto materiale di massa  $m$  a

distanza  $\delta_{\mathcal{R}}$  dalla retta  $\mathcal{R}$ . Per esempio, scrivendo  $\omega = \omega \hat{\omega}$ , dove sia il modulo  $\omega$  che il versore  $\hat{\omega}$  possono dipendere dal tempo, allora l'energia cinetica di un corpo rigido può riscriversi come

$$T = \frac{1}{2}m\|v_G\|^2 + \frac{1}{2}\langle \hat{\omega}, \mathbf{I}_G \hat{\omega} \rangle \omega^2 = \frac{1}{2}m\|v_G\|^2 + \frac{1}{2}I_G \omega^2 = \frac{1}{2}m(\|v_G\|^2 + \delta_G^2 \omega^2),$$

dove  $I_G$  è il momento d'inerzia rispetto alla retta passante per il centro di massa  $G$  e di direzione  $\hat{\omega}$  e  $\delta_G$  il corrispondente asse di girazione.

1.4.1. *Proprietà generali.* Per semplicità, focalizziamoci inizialmente su  $\mathbf{I}_O$ , ovvero sul tensore calcolato rispetto all'origine. In questo caso, dato un riferimento cartesiano ortonormale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , il tensore si rappresenta come una matrice di nove elementi,

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I_{O,11} & I_{O,12} & I_{O,13} \\ I_{O,12} & I_{O,22} & I_{O,23} \\ I_{O,13} & I_{O,23} & I_{O,33} \end{pmatrix}$$

tale che

$$I_{O,ij} := \langle \hat{i}_i, \mathbf{I}_O \hat{i}_j \rangle = \int_{\mathcal{B}} (\|x\|^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho \, dx.$$

Questa matrice è detta *matrice d'inerzia*. I suoi valori sulla diagonale sono detti *momenti d'inerzia rispetto agli assi cartesiani*: infatti,  $I_{O,jj} = \langle \hat{i}_j, \mathbf{I}_O \hat{i}_j \rangle$  è, come abbiamo visto sopra, il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per  $O$  di direzione  $\hat{i}_j$ , ovvero rispetto all'asse cartesiano  $j$ . Gli elementi fuori diagonale  $I_{ij}$ , con  $i \neq j$ , sono detti *prodotti d'inerzia*. Essa è simmetrica definita positiva: infatti,  $I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{u}, \mathbf{I}_O \hat{u} \rangle \geq 0$  per qualsivoglia direzione  $\hat{u}$  associata ad una retta  $\mathcal{R}$  passante per l'origine, ed è nullo se e solo se  $\rho$  è concentrata sulla retta  $\mathcal{R}$ . Gli autovettori  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  dell'operatore  $\mathbf{I}_O$  sono detti *assi principali d'inerzia* e, nel caso in cui  $O \equiv G$  centro di massa, essi si dicono *assi centrali*, mentre i suoi autovalori si dicono *momenti principali d'inerzia*. Nella base dei suoi assi principali d'inerzia,  $\mathbf{I}_O$  assume quindi la rappresentazione

$$\hat{\mathbf{I}}_O = \begin{pmatrix} \hat{I}_{O,1} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I}_{O,2} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I}_{O,3} \end{pmatrix}.$$

Il calcolo dei momenti d'inerzia rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  di versore  $\hat{u}$  passante per l'origine diventa molto semplice usando la base diagonalizzante, ovvero  $I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{u}, \mathbf{I}_{\mathcal{R}} \hat{u} \rangle = \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{I}}_O \hat{\mathbf{u}} = \hat{u}_1^2 \hat{I}_{O,1} + \hat{u}_2^2 \hat{I}_{O,2} + \hat{u}_3^2 \hat{I}_{O,3}$ .

Gli assi principali d'inerzia sono univocamente determinati se gli autovalori della matrice d'inerzia sono tutti diversi: viceversa, se c'è degenerazione, per esempio  $\hat{I}_{O,1} = \hat{I}_{O,2} \neq \hat{I}_{O,3}$ , sono assi d'inerzia quelli corrispondenti alla direzione di  $\hat{e}_3$  e a qualsivoglia coppia ortonormale che generi lo spazio ortogonale a  $\hat{e}_3$ . Infine, se  $\hat{I}_{O,1} = \hat{I}_{O,2} = \hat{I}_{O,3}$ , allora *tutte le terne* ortonormali sono assi principali d'inerzia. Valgono le seguenti proprietà

- Se  $\Pi$  è un piano di simmetria materiale del corpo, allora il vettore ortogonale ad esso, sia esso  $\hat{e}_3$ , corrisponderà ad un asse principale d'inerzia: se infatti  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  è un riferimento ortonormale, con  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  paralleli quindi al piano, si ha che  $I_{O,13} = I_{O,23} = 0$ , essendo l'integrale che definisce questi momenti dispari in  $x_3$ .
- Se vi sono *due* piani di simmetria materiale,  $\Pi_1$  con versore normale  $\hat{v}_1$ , e  $\Pi_2$  con versore normale  $\hat{v}_2$ , tali da intersecarsi in una retta  $\mathcal{R} = \Pi_1 \cap \Pi_2$  di direzione individuata dal versore  $\hat{v}_3$ , allora possono verificarsi due casi:
  - se  $\hat{v}_1 \perp \hat{v}_2$  si ha che  $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$  è una terna ortonormale di assi principali d'inerzia;
  - se  $\hat{v}_1$  e  $\hat{v}_2$  non sono ortogonali, allora il piano che essi generano contiene una infinità di coppie di assi principali d'inerzia, mentre  $\hat{v}_3$  è asse principale d'inerzia.

**Esempio 4.2** — Consideriamo un anello di centro  $O$ , massa  $m$ , raggio  $R$  e densità lineare uniforme. Dato un riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , questo può essere parametrizzato come una



curva che giace nel piano generato da  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$

$$\gamma = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Introduciamo la densità lineare  $\rho(t) = \frac{m}{2\pi R}$ , di modo che  $\int_{\gamma} \rho \, d\gamma = \int_0^{2\pi} \rho \|\dot{\gamma}\| \, dt = m$ . Il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Z$  ortogonale all'anello e passante per il suo centro è

$$I_Z = \int_{\gamma} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \rho \, d\gamma = \frac{m}{2\pi R} \int_0^{2\pi} R^3 \, dt = mR^2.$$

Il momento invece rispetto ad un asse giacente sul piano dell'anello e passante per il suo centro, per esempio all'asse  $X$  di direzione  $\hat{i}_1$  e passante per l'origine, è

$$I_X = \int_{\gamma} (\gamma_1^2 + \gamma_3^2) \rho \, d\gamma = \frac{m}{2\pi R} \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} mR^2.$$

**1.4.2. Formula di Huygens–Steiner.** Potrebbe sembrare che esista un diverso tensore di inerzia  $\mathbf{I}_P$  per ogni punto  $P$  dello spazio, il che renderebbe impossibile trattare questo oggetto per un dato corpo. È però possibile mostrare che esiste una relazione semplice tra i tensori di inerzia calcolati rispetto a punti diversi.



**TEOREMA 1.7 (Huygens–Steiner).** *Il tensore d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad un punto  $P$  individuato dal vettore  $\mathbf{p}$  è pari alla somma*

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_G + m (\|\mathbf{p} - \mathbf{x}_G\|^2 \mathbb{I} - (\mathbf{p} - \mathbf{x}_G) \otimes (\mathbf{p} - \mathbf{x}_G)).$$

dove  $\mathbf{I}_G$  è il tensore d'inerzia del corpo rispetto al centro di massa  $G$  del corpo stesso, individuato dal vettore  $\mathbf{x}_G$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo di avere un corpo rigido con centro di massa  $G$  nell'origine del nostro riferimento, e voler calcolare  $\mathbf{I}_P$  rispetto ad un certo punto  $P$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_P &= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) [\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 \mathbb{I} - (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{p})] \, d\mathbf{x} \\ (4.5) \quad &= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) [(\|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle + \|\mathbf{p}\|^2) \mathbb{I} - (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p})] \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}) [\|\mathbf{x}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}] \, d\mathbf{x} + m (\|\mathbf{p}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) = \mathbf{I}_G + m (\|\mathbf{p}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}), \end{aligned}$$

dato che ogni integrale lineare in  $\mathbf{x}$  è nullo essendo il centro di massa nell'origine. Naturalmente, nel caso in cui  $G$  non sia nell'origine ma sia identificato da un vettore  $\mathbf{x}_G$ , occorre modificare leggermente la formula sopra eseguendo uno cambio di origine, e scrivendo

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_G + m (\|\mathbf{p} - \mathbf{x}_G\|^2 \mathbb{I} - (\mathbf{p} - \mathbf{x}_G) \otimes (\mathbf{p} - \mathbf{x}_G)).$$

□

Usando la base associata agli assi principali d'inerzia, la formula trovata implica che

$$[\mathbf{I}_P]_{ij} = [\mathbf{I}_G]_{ii} \delta_{ij} + m (\|\mathbf{p}\|^2 \delta_{ij} - p_i p_j),$$

che mostra che se vogliamo che un certo asse, per esempio quello nella direzione  $\hat{e}_3$ , rimanga principale a seguito di un cambio di punto di riferimento da  $G$  a  $P$ , sono ammesse due possibilità:

- avere  $p_1 = p_2 = 0$ , e quindi che  $P$  sia lungo l'asse stesso (se un asse è principale centrale, rimane asse principale rispetto ad ogni altro punto dell'asse stesso);
- avere  $p_3 = 0$ , ovvero che ci si stia muovendo nel piano ortogonale a  $\hat{e}_3$ , e in tal caso tutti i punti del piano ortogonale a  $\hat{e}_3$  passante per il centro di massa hanno la retta di direzione  $\hat{e}_3$  come asse principale d'inerzia corrispondente.

Il risultato di Huygens–Steiner dato sopra in forma tensoriale ha una versione più semplice, molto utile, applicata ai momenti d'inerzia rispetto a specifiche rette.



**COROLLARIO 1.8** (Huygens–Steiner). *Il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  è pari alla somma*

$$I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R})$$

dove  $I_{\mathcal{R}_G}$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta parallela a  $\mathcal{R}$  e passante per il centro di massa  $G$  del corpo stesso.

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente considerare  $\mathbb{I}_P$  per un punto  $P \in \mathcal{R}$  moltiplicare scalarmente per la direzione  $\hat{u}$  della retta  $\mathcal{R}$ . Si ha

$$I_{\mathcal{R}} = \langle \hat{u}, \mathbf{I}_P \hat{u} \rangle = \langle \hat{u}, \mathbf{I}_G \hat{u} \rangle + m (\|p - x_G\|^2 - \langle \hat{u}, p - x_G \rangle^2) = I_{\mathcal{R}_G} + md^2(G, \mathcal{R}). \quad \square$$

Il teorema ha come ulteriore importante corollario il fatto seguente.

**COROLLARIO 1.9.** *Dato il momento di inerzia  $I_{\mathcal{R}'}$  di un corpo di massa  $m$  rispetto ad una retta  $\mathcal{R}'$ , il momento d'inerzia rispetto ad una retta  $\mathcal{R}$  parallela a  $\mathcal{R}'$  è pari a*

$$I_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}'} + m (d^2(G, \mathcal{R}') - d^2(G, \mathcal{R}))$$

dove  $G$  è il centro di massa del corpo.

**1.5. Alcuni esempi di calcolo di energia cinetica.** Alla luce di queste osservazioni, concludiamo con alcuni casi particolari in cui speciali condizioni e le proprietà del tensore d'inerzia permettono di semplificare particolarmente le espressioni dell'energia cinetica di un corpo rigido.

**Esempio 4.3** (Rigido con asse fisso) — Supponiamo che il corpo rigido in esame abbia un asse fisso, per esempio l'asse passante per i punti del corpo  $O$  e  $P$ . Possiamo scegliere per esempio  $O$  come origine del nostro riferimento inerziale e  $P$  tale che il vettore  $p$  che lo individua rispetto a  $O$  sia orientato come l'elemento di base  $\hat{i}_3$  e che quindi  $O$  e  $P$  giacciono sull'asse  $\mathcal{Z}$  del riferimento associato. Di conseguenza,  $\omega = \dot{\theta} \hat{i}_3$  per un opportuno angolo di rotazione  $\theta$ . Il centro di massa  $G$  avrà quindi  $v_G = \omega \wedge x_G$ , da cui  $\|v_G\|^2 = \dot{\theta}^2 d^2(G, \mathcal{Z})$ . Ora, nell'Eq. (4.1)  $\langle \hat{\omega}, \mathbf{I}_G \hat{\omega} \rangle \equiv \langle \hat{i}_3, \mathbf{I}_G \hat{i}_3 \rangle$  è il momento d'inerzia rispetto alla retta parallela a  $\mathcal{Z}$  passante per il centro di massa, per cui possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} m \|v_G\|^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \langle \hat{i}_3, \mathbf{I}_G \hat{i}_3 \rangle = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (md^2(G, \mathcal{Z}) + \langle \hat{i}_3, \mathbf{I}_G \hat{i}_3 \rangle) = \frac{1}{2} I_{\mathcal{Z}} \dot{\theta}^2,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner. Si noti che il caso di un rigido con asse fisso si applica nel caso, per esempio, in cui si abbia a che fare con un sistema rigido planare che ruota *nel piano* attorno ad un punto del piano, ovvero attorno ad un asse perpendicolare al piano passante per detto punto.

**Esempio 4.4** (Rigido con punto fisso) — Se il corpo rigido ha un punto  $O$  fisso, scegliendo come origine tale punto avremo come prima che il centro di massa  $G$  del rigido ha velocità  $v_G = \omega \wedge x_G$ .

In questo caso, l'asse di rotazione istantaneo varierà nel tempo e sarà orientato come  $\hat{\omega}$ , di modo che potremo scrivere

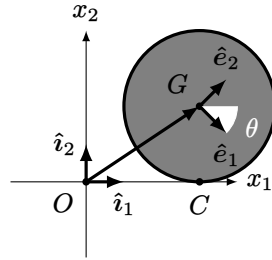
$$\|v_G\|^2 = \langle \omega \wedge x_G, \omega \wedge x_G \rangle = \omega^2 \langle \hat{\omega}, (\|x_G\|^2 \mathbb{I} - x_G \otimes x_G) \hat{\omega} \rangle$$

sicché inserendo questa relazione nella formula generale

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \langle \hat{\omega}, [m(\|x_G\|^2 \mathbb{I} - x_G \otimes x_G) + \mathbf{I}_G] \hat{\omega} \rangle \equiv \frac{1}{2} \omega^2 \langle \hat{\omega}, \mathbf{I}_O \hat{\omega} \rangle.$$

dove abbiamo applicato il teorema di Huygens–Steiner per il tensore di inerzia.

**Esempio 4.5** (Disco rigido che rotola) — Calcoliamo l'energia cinetica di un disco rigido di raggio  $R$  che rotola senza strisciare su una guida orizzontale:



Sappiamo che il sistema ha un solo parametro lagrangiano: possiamo usare per esempio l'ascissa  $x$  del centro di massa, che qui coincide col centro geometrico  $G$  in figura, oppure l'angolo di rotazione  $\theta$ . Inoltre, il punto di contatto  $C$  tra disco e guida è un centro istantaneo di rotazione. Per il Secondo teorema di König, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} m \|v_G\|^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2.$$

In questa espressione  $I_G$  è il momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse  $\mathcal{G}$  perpendicolare al piano e passante per  $G$ , che nel caso del disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  vale  $I_G = \frac{1}{2} m R^2$ . Abbiamo poi già visto che  $v_G = \dot{x} \hat{i}_1 = -R \dot{\theta} \hat{i}_1$  e che  $\omega = \dot{\theta}$ , sicché

$$T = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2.$$

In effetti  $I_C = \frac{3}{2} m R^2$  è proprio il momento d'inerzia del disco rispetto alla retta ortogonale al piano passante per il punto di contatto  $C$ . Questo non deve sorprendere: istante per istante,  $C$  è un centro istantaneo di rotazione con velocità  $v_C = \mathbf{0}$ , per cui l'unico contributo che appare nell'energia cinetica usando l'Eq. (4.1a) scegliendo  $P \equiv C$  è quello rotatorio, purché il tensore d'inerzia usato sia quello rispetto al punto  $C$ .

## 2. Dinamica del punto materiale

In questa sezione inizieremo lo studio del moto dei corpi risolvendo, in alcuni semplici casi, le equazioni di Newton. I casi considerati beneficeranno di ipotesi semplificatrici che agevoleranno l'integrabilità.

**2.1. Dinamica lungo una guida.** Supponiamo per cominciare di avere un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , individuato da un vettore  $p$  rispetto ad un riferimento inerziale e *vincolato a muoversi lungo una guida prefissata* in un certo intervallo  $[t_0, t_1]$ . In altre parole, il supporto di  $p$  coincide con quello di una curva  $\gamma$  e dunque il sistema è olonomo e, come abbiamo visto, possiamo descrivere la configurazione del sistema in termini di un *unico* parametro lagrangiano, ovvero l'ascissa curvilinea  $s$ , che fornisce la lunghezza percorsa a partire dal punto  $p(t_0)$  muovendosi lungo  $\gamma$ . Sul punto materiale agiranno, in generale, delle forze attive con risultante  $F$  e delle forze di reazione  $\Phi$  esercitate dalla guida. Il Secondo principio può essere riscritto in termini di componenti lungo la terna intrinseca, ovvero

$$m\ddot{s} = \langle F + \Phi, \hat{v}_P \rangle, \quad \frac{m\dot{s}^2}{\rho} = \langle F + \Phi, \hat{n}_P \rangle, \quad 0 = \langle F + \Phi, \hat{b}_P \rangle.$$

Supponiamo ora che il vincolo sia *ideale*, ovvero la guida sia liscia: ciò significa che  $\langle \Phi, \hat{v}_P \rangle = 0$  e la prima di queste equazioni, può essere espressa in termini della *forza generalizzata*  $F_t := \langle F, \hat{v}_P \rangle$  come

$$F_t := \langle F, \hat{v}_P \rangle = m\ddot{s}.$$

Se  $F$  è ovunque ortogonale alla curva, ovvero  $\langle F, \hat{v}_P \rangle \equiv 0$ , allora  $\ddot{s} = 0$ , ovvero  $\dot{s}(t) = \dot{s}(t_0) =$  costante  $\equiv v_0$  e quindi  $s(t) = v_0 t$ .

Se  $F$  è in generale non ortogonale a  $\hat{v}_P$  ma posizionale, ovvero dipendente solo dal punto lungo la curva, possiamo scrivere  $F_t = F_t(s)$ . L'equazione da risolvere è  $m\ddot{s} = F_t(s)$ , che implica

$$\dot{s}(m\ddot{s} - F_t(s)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - U(s) \right) = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$U(s) := \int_0^s F_t(x) dx + \text{costante}.$$

In altre parole, la quantità

$$E := \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - U(s)$$

è un integrale del moto, esattamente *come se* la forza in gioco fosse conservativa e *come se*  $E$  fosse l'energia meccanica corrispondente ad un problema unidimensionale parametrizzato dalla sola variabile  $s$  in presenza di un potenziale  $U(s)$ . In effetti,  $F_t(s) = \partial_s U(s)$ : il fatto di avere a che fare con una guida fissa e liscia comporta che il sistema si possa intendere *de facto* come sotto l'azione di una forza (generalizzata) conservativa, di modo che il funzionale  $E$  sia conservato. I punti di equilibrio, in particolare, si potranno ottenere studiando l'equazione  $F_t = \partial_s U(s) = 0$ .

**Esempio 4.6** (Dinamica su guida scabra) — Se consideriamo il caso in cui la guida è scabra, allora esiste una forza d'attrito tangenziale che si oppone al moto, ovvero  $\Phi_t := \langle \Phi, \hat{v}_P \rangle \neq 0$ . Scriviamo ora  $\Phi_n := \langle \Phi, \hat{n}_P \rangle$  e  $\Phi_b := \langle \Phi, \hat{b}_P \rangle$ . Indichiamo ugualmente  $F_n := \langle F, \hat{n}_P \rangle$  e  $F_b := \langle F, \hat{b}_P \rangle$ . Le equazioni della dinamica sono quindi

$$m\ddot{s} = F_t + \Phi_t, \quad \Phi_n = \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_n, \quad \Phi_b = -F_b.$$

Supponendo  $\dot{s} \neq 0$ , l'attrito in azione sarà dinamico, e in particolare

$$\Phi_t = -\mu_d \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2} \operatorname{sign}(\dot{s}) = -\mu_d \sqrt{F_b^2 + \left( \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_n \right)^2} \operatorname{sign}(\dot{s})$$

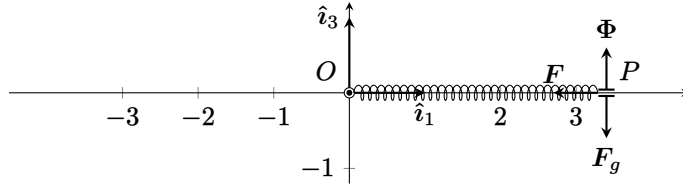


FIGURA 1. Punto materiale vincolato ad una guida orizzontale su cui agisce una molla ideale fissata nell'origine.

per cui occorre risolvere l'equazione

$$m\ddot{s} = F_t - \mu_d \sqrt{F_b^2 + \left( \frac{m\dot{s}^2}{\rho} - F_n \right)^2} \text{sign}(\dot{s})$$

che è una equazione nella sola funzione  $s$  e non dipende più dalle forze di reazione, ma è in generale complessa da risolvere analiticamente.

## 2.2. Analisi dei sistemi con un grado di libertà: generalità. da scrivere

**2.3. Moto armonico.** Il *moto armonico* è senza dubbio uno dei più importanti tipi di moto, per via delle sue innumerevoli applicazioni. Consideriamo la sua versione più semplice. Immaginiamo di avere un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi su una guida rettilinea liscia, che possiamo immaginare coincidere con l'asse di riferimento  $\mathcal{X}$  corrispondente alla direzione  $\hat{i}_1$ . La posizione del punto materiale si può quindi scrivere  $p = s\hat{i}_1$ , vedasi Fig. 1. Su tale punto agisce una *molla ideale* di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo trascurabile, avente l'altro estremo nell'origine  $O$ . Questa espressione equivale a dire che su tale punto agisce la *forza elastica*

$$F = -kp.$$

Sul punto materiale opera anche la forza peso, che assumiamo orientata come  $F_g = -mg\hat{i}_3$ , bilanciata dalla reazione della guida  $\Phi = -F_g$ . La posizione del punto materiale è nota quindi quando è nota l'unica variabile lagrangiana del sistema, ovvero  $s$ . L'equazione che descrive l'evoluzione di  $s$  è

$$m\ddot{s} = -ks.$$

Si tratta di una *equazione differenziale ordinaria del secondo ordine* che possiamo riscrivere come

$$(4.6) \quad \ddot{s} = -\omega^2 s, \quad \text{dove abbiamo definito } \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La quantità  $\omega$  è detta talvolta *pulsazione* del moto. Il punto avente  $s = 0$ , ovvero l'origine, è un punto di equilibrio, dato che in questo caso la somma delle forze agenti sul punto materiale è nulla.

Assumendo ora che per  $t = 0$  si abbia  $s(0) = s_0$  e  $\dot{s}(0) = v_0$  generici, l'evoluzione della posizione del punto per  $t > 0$  è fornita proprio dal Secondo principio e occorre risolvere l'equazione differenziale (4.6). A questo scopo, è utile ricorrere ancora una volta alla teoria delle equazioni differenziali, e in particolare ai seguenti risultati.

**Q Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti** — Una equazione differenziale *ordinaria a coefficienti costanti* del secondo ordine, ha la forma

$$c_2\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_0x = f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

dove  $f: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione supposta nota, mentre la nostra incognita è la funzione  $x(t)$  sullo stesso intervallo. L'equazione si intende accompagnata, come in ogni problema di Cauchy, da opportune condizioni iniziali nella forma

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0,$$

dove  $x_0$  e  $v_0$  sono delle quantità date. Bisogna ora distinguere due casi

**CASO OMOGENEO.** Consideriamo anzitutto il caso *omogeneo*, ovvero il caso in cui  $f(t) \equiv 0$ . Questo tipo di equazione è *lineare*, ovvero appartiene alla più vasta famiglia di equazioni tali per cui, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  soddisfano l'equazione, allora una loro combinazione lineare  $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ , per due costanti generiche  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , soddisfa anch'essa l'equazione. La soluzione generale di una equazione siffatta si ottiene come combinazione lineare di due *soluzioni fondamentali indipendenti* di tipo esponenziale  $x(t) = e^{\lambda t}$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sostituendo questo tipo di soluzione nell'equazione, si ottiene un polinomio di secondo grado

$$c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} := \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2 c_0}}{2c_2},$$

che fornisce una condizione per al più due valori di  $\lambda$ , siano essi  $\lambda_{\pm}$  come già indicato, in generale complessi. Se i due valori ottenuti sono distinti, la soluzione generale ha la forma

$$x(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} + \alpha_- e^{\lambda_- t}.$$

I due coefficienti  $\alpha_{\pm}$  sono da fissare imponendo le due condizioni iniziali. Se viceversa si trova  $\lambda_+ = \lambda_- \equiv \lambda$ , occorre cercare un'altra soluzione fondamentale diversa da  $e^{\lambda t}$ . In particolare, si può verificare che  $x(t) = t e^{\lambda t}$  è in questo caso una soluzione, per cui la soluzione più generale si ottiene scrivendo

$$x(t) = e^{\lambda t}(\alpha_1 + \alpha_2 t).$$

Come prima, le due costanti vengono fissate richiedendo che vengano soddisfatte le condizioni iniziali.

**CASO INOMOGENEO.** Nel caso in cui  $f$  sia non identicamente nulla, la soluzione al problema si ottiene sommando una generica combinazione lineare delle due soluzioni fondamentali dell'equazione omogenea associata (ovvero dell'equazione ottenuta imponendo  $f \equiv 0$ ) ad una soluzione particolare del sistema, ovvero una soluzione dell'equazione "completa" non necessariamente tale da soddisfare le condizioni iniziali. La ricerca di una soluzione particolare è in genere la parte più complessa della risoluzione dell'equazione differenziale. Le due costanti che compaiono nella combinazione lineare delle soluzioni fondamentali verranno poi scelte opportunamente per soddisfare le condizioni iniziali date.

Cerchiamo quindi di risolvere il problema di Cauchy per il moto armonico,

$$\begin{cases} s(0) = s_0 \\ \dot{s}(0) = v_0 \\ \ddot{s} + \omega^2 s = 0. \end{cases}$$

Grazie alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, sappiamo che la soluzione generale al problema è nella forma

$$s(t) = \alpha_+ e^{i\omega t} + \alpha_- e^{-i\omega t}.$$

Per  $t = 0$  deve valere

$$\alpha_+ + \alpha_- = s_0$$

dove  $s_0$  è reale. Quindi  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  sono o entrambi reali, oppure devono avere parte immaginaria opposta, ovvero  $\alpha_+ = a_1 + ib$  e  $\alpha_- = a_2 - ib$  per un certo  $b$  reale, di modo che  $a_1 + a_2 = s_0$ . Deve anche valere

$$i\alpha_+\omega - i\alpha_-\omega = \omega(ia_1 - ia_2 - 2b) = v_0,$$

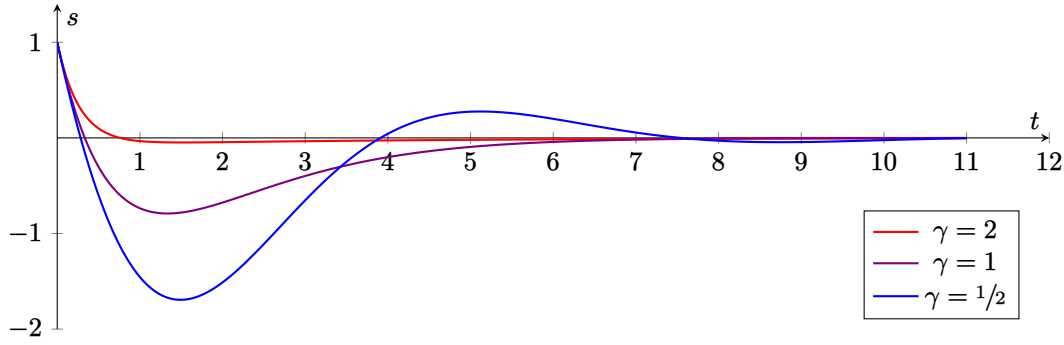


FIGURA 2. Evoluzione di  $s$  in un generico moto armonico smorzato avviato in posizione  $s_0 = 1$  con velocità  $v_0 = -4$  e pulsazione  $\omega = 1$  al variare del coefficiente di smorzamento  $\gamma$ .

dove  $v_0$  è reale, per cui  $a_1 = a_2$ ; di conseguenza,  $2a = s_0$  e  $-2b\omega = v_0$ . In altre parole,  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  sono complessi coniugati, e possiamo scrivere  $\alpha_+ = \bar{\alpha}_- = \frac{A}{2} e^{i\phi}$ , di modo che

$$s(t) = A \frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2} = A \cos(\omega t + \phi), \quad \text{con} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b}{a} = -\frac{v_0}{\omega s_0}.$$

La quantità  $\phi$  si dice *fase* mentre la quantità  $A$  si dice *ampiezza* del moto armonico.

**Esempio 4.7** (Moto armonico smorzato) — In molte applicazioni occorre considerare una forza aggiuntiva che agisce sul punto materiale e tenta di frenarne il moto: tale forza esprime la *resistenza del mezzo* ed è tipicamente nella forma  $F_v = -\sigma v_P$ , con  $\sigma > 0$ , ovvero dipende dalla velocità del corpo. L'equazione per  $s$  viene quindi ad essere modificata e assume la forma

$$m\ddot{s} = -\sigma\dot{s} - ks,$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $v = \dot{s}\hat{i}_1$ . La procedura da applicare è analoga a quella seguita per  $\sigma = 0$ : si cerca una soluzione generica nella forma  $s(t) = e^{\lambda t}$ , sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale e ottenendo

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0, \quad \text{dove} \quad \gamma := \frac{\sigma}{2m}.$$

Le radici di questo polinomio corrispondono a

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \tilde{\omega}, \quad \text{dove} \quad \tilde{\omega} := \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Se  $\gamma \neq \omega$ , si ottiene così che la soluzione generale ha la forma

$$s(t) = e^{-\gamma t} (\alpha_+ e^{\tilde{\omega} t} + \alpha_- e^{-\tilde{\omega} t}).$$

Come sopra, dobbiamo imporre le condizioni iniziali  $s(0) = s_0$  e  $\dot{s}(0) = v_0$ . Possono verificarsi quindi varie circostanze:

**Caso  $\gamma > \omega$ :**  $\tilde{\omega}$  è reale ed inoltre  $\tilde{\omega} < \gamma$ . Il moto è tale che  $s(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  monotonicamente. Infatti, imponendo le condizioni iniziali, si trova che

$$\alpha_+ + \alpha_- = s_0, \quad \alpha_+(\tilde{\omega} - \gamma) - \alpha_-(\tilde{\omega} + \gamma) = v_0$$

da cui, con un po' di algebra, si ottiene

$$s(t) = e^{-\gamma t} \left( s_0 \cosh \tilde{\omega} t + \frac{v_0 + \gamma s_0}{\tilde{\omega}} \sinh \tilde{\omega} t \right).$$

Supponiamo  $s_0 \neq 0$  e cerchiamo il tempo  $t_o > 0$  tale per cui il sistema passa per l'origine, ovvero  $s(t_o) = 0$ . Questo deve soddisfare l'equazione

$$\tanh(\tilde{\omega}t) = -\frac{\tilde{\omega}s_0}{v_0 + \gamma s_0},$$

che ha una *unica* soluzione se e solo se  $\left| \frac{\tilde{\omega}s_0}{v_0 + \gamma s_0} \right| < 1$ : se ciò non avviene, il sistema non passa mai per l'origine.

**Caso  $\gamma < \omega$ :**  $\tilde{\omega}$  è immaginario puro. Anche in questo caso il moto è tale che  $s(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , ma sono presenti delle oscillazioni. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$s(t) = e^{-\gamma t} \left( s_0 \cos(|\tilde{\omega}|t) + \frac{v_0 + \gamma s_0}{|\tilde{\omega}|} \sin(|\tilde{\omega}|t) \right).$$

Come sopra, un sistema con  $s_0$  passa dall'origine al tempo  $t_o$  se

$$\tan(|\tilde{\omega}|t) = -\frac{|\tilde{\omega}|s_0}{v_0 + \gamma s_0}.$$

Si noti che questa equazione ammette *infinite* soluzioni

**Caso  $\gamma = \omega$ :** ovvero  $\tilde{\omega} = 0$ . In questo caso il moto è detto *criticamente smorzato* e la soluzione generale del problema ha la forma

$$s(t) = e^{-\gamma t}(\alpha_+ + \alpha_- t),$$

che, imponendo le condizioni iniziali, si scrive

$$s(t) = e^{-\gamma t}(s_0 + (v_0 + \gamma s_0)t),$$

che ancora una volta descrive un moto che converge alla configurazione di equilibrio. Supponiamo ora, come sopra,  $s_0 \neq 0$  e cerchiamo il tempo  $t_o > 0$  tale per cui il sistema passa per l'origine,  $s(t_o) = 0$ . Ciò avviene una sola volta al tempo

$$t_o = -\frac{s_0}{v_0 + \gamma s_0} \quad \text{se e solo se} \quad -\frac{s_0}{v_0 + \gamma s_0} > 0.$$

Se la quantità sopra è negativa, il sistema non passa mai per l'origine.

La presenza di una forza di attrito dipendente dalla velocità rende il sistema *dissipativo* come si può vedere calcolando la derivata dell'energia meccanica. Troviamo infatti che

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \|v_P\|^2 + \frac{1}{2} k \|p\|^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} k s^2 \right) = -\sigma \dot{s}^2,$$

che mostra che la quantità è monotonamente decrescente per  $\sigma > 0$  con una rapidità dipendente dal valore di  $\gamma$ : per questa ragione,  $\gamma$  prende il nome di *coefficiente di smorzamento*.

**2.4. Il pendolo semplice.** Un pendolo ideale è costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in posizione  $p$  vincolato a muoversi lungo una circonferenza verticale di raggio  $\ell$ , che assumiamo centrata nell'origine di un riferimento cartesiano ortonormale inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ . Su di esso agiscono la sola forza peso  $F_g = -mg\hat{i}_3$  e la reazione del vincolo, supposto ideale. La sua posizione può essere parametrizzata da un parametro lagrangiano  $\theta$ , angolo tra  $p$  e la direzione  $-\hat{i}_3$ , come rappresentato in Fig. 3. Possiamo introdurre l'ascissa curvilinea  $s = \ell\theta$ , che indica l'arco della circonferenza di raggio  $\ell$  sotteso dall'angolo  $\theta$ . Per quanto detto sopra riguardo il moto lungo una curva, l'equazione del moto nella direzione tangente può essere scritta in termini della componente tangenziale  $F_t$  della forza peso,

$$m\ddot{s} = F_t,$$



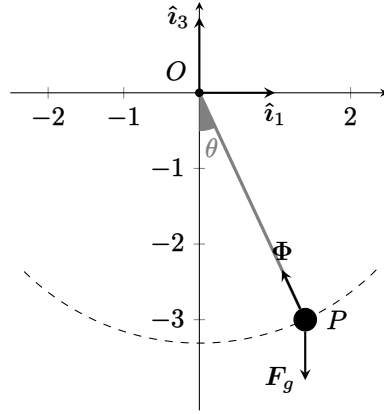


FIGURA 3. Pendolo ideale in un piano verticale.

che si riscrive in termini di  $\theta$  come

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0, \quad \omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Questa equazione differenziale è non lineare e la sua integrazione può eseguirsi numericamente. Possiamo però risolverla esattamente *nel limite delle piccole oscillazioni*, ovvero assumendo che  $\theta$  si mantenga piccolo durante il moto, e che quindi si possa approssimare  $\sin\theta \simeq \theta$ . In questa approssimazione, l'equazione è esattamente quella di un moto armonico, per cui

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = A\cos(\omega t + \phi)$$

per opportuni coefficienti  $A$  e  $\phi$  determinati in funzione delle condizioni iniziali. In particolare, si osserva che il *periodo*  $\tau$  delle oscillazioni armoniche è pari a

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Si osservi che questa quantità *non* dipende dalla massa né, nel detto limite di piccole oscillazioni, dall'ampiezza  $A$  delle oscillazioni del pendolo.

Possiamo calcolare altresì la reazione vincolare  $\Phi$ , osservando che  $\Phi = \Phi_n \hat{n}_P$ . Indichiamo inoltre  $F_n := \langle \mathbf{F}, \hat{n}_P \rangle$ . In questa direzione, osservando che il raggio di curvatura è proprio  $\ell$ , abbiamo

$$m\frac{\dot{s}^2}{\ell} = F_n + \Phi_n = -mg\cos\theta + \Phi_n \Rightarrow \Phi_n = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2,$$

che mostra come la reazione vincolare dipenda dall'evoluzione del moto.

Essendo la forza peso l'unica forza attiva sul pendolo, ed essendo l'unico vincolo in gioco ideale, l'energia meccanica è un integrale primo del moto e possiamo quindi scrivere

$$E = T - U = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_P\|^2 + mg\langle \mathbf{p}, \mathbf{i}_3 \rangle + c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta + c = \text{costante},$$

dove  $c$  è una costante arbitraria. Questa relazione permette di calcolare facilmente alcune utili quantità. Per esempio, indicando con  $\theta_{\max}$  l'angolo massimo raggiunto dal pendolo e punto in cui la velocità è nulla, allora l'energia cinetica a  $\theta = 0$  si potrà ottenere da  $T - mg\ell = -mg\ell\cos\theta_{\max} \Rightarrow T = g\ell(1 - \cos\theta_{\max})$ . Si noti che derivando l'equazione di conservazione dell'energia meccanica rispetto al tempo si riottiene l'equazione differenziale per  $\theta$ .

### 3. Dinamica dei sistemi

**3.1. Momento della quantità di moto.** Ci siamo finora occupati del moto di singoli oggetti puntiformi. Lo studio della dinamica dei sistemi richiede l'introduzione di una nuova quantità, ovvero il *momento della quantità di moto*, detto anche *momento angolare*, che quantifichi il moto rotatorio di cui un sistema esteso può essere dotato. Si tratta di una quantità vettoriale dipendente da un certo punto  $A$ , detto polo, analoga al momento di una forza. Nel caso di un corpo  $\mathcal{B}$  di densità  $\rho$  essa è definita come

$$L_A := \int_{\mathcal{B}} (x - a) \wedge v_X \rho(x) dx,$$

dove  $a$  è il vettore che identifica il polo  $A$ . Equivalentemente, nel caso discreto di un sistema di particelle di posizioni  $\{p_k\}_{k=1}^N$  e masse rispettivamente  $\{m_k\}_{k=1}^N$ ,  $L_A := \sum_{k=1}^N (p_k - a) \wedge Q_k$ , dove  $Q_k = m_k \dot{p}_k$ . Esiste una relazione semplice tra  $L_A$ , calcolato rispetto al polo  $A$  individuato dal vettore  $a$ , e  $L_B$ , rispetto al polo  $B$  individuato dal vettore  $b$ , ovvero

$$L_B = L_A + (a - b) \wedge Q.$$

Questa relazione è detta *legge del cambiamento di polo* ed è identica a quella già vista per il momento di un sistema di forze. Si dimostra esattamente in maniera analoga: nel caso per esempio di un corpo  $\mathcal{B}$  con densità  $\rho$ , si ha

$$L_B = \int_{\mathcal{B}} (x - b) \wedge v_X \rho dx = \int_{\mathcal{B}} (x - b + a - a) \wedge v_X \rho dx = L_A + (a - b) \wedge \int_{\mathcal{B}} v_X \rho dx = L_A + (a - b) \wedge Q.$$

Segue subito che se  $Q = 0$ , allora  $L_A = L_B$ , indipendentemente dal polo. Inoltre, se  $b - a$  e  $Q$  sono paralleli, il momento angolare non cambia.

Vale il seguente, importante, Teorema, che esprime una legge di decomposizione del momento angolare analoga a quella dell'energia cinetica già vista.



**TEOREMA 3.1** (Primo teorema di König). *Dato un corpo  $\mathcal{B}$  di massa  $m$ , quantità di moto  $Q$  e centro di massa  $x_G$ , vale la seguente relazione per un generico punto  $p$*

$$L_P = L + (x_G - p) \wedge Q,$$

dove  $L$  è il momento angolare calcolato in un riferimento traslante con origine il centro di massa.

**DIMOSTRAZIONE.** Si procede in maniera esplicita. Eseguiamo la dimostrazione nel caso di un insieme discreto di masse puntiformi. Sia  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  il riferimento fisso, e consideriamo  $G\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  riferimento traslante con origine nel centro di massa  $G$ . Essendo traslante, tale sistema ha velocità angolare  $\omega = 0$  rispetto al riferimento fisso, e per ogni elemento del sistema la velocità nel riferimento fisso  $v_k$  e quella nel riferimento traslante  $v_k^*$  sono legate dalla semplice relazione  $v_k = v_G + v_k^*$ . Se  $x_G$  è il vettore che identifica  $G$  nel riferimento fisso, abbiamo

$$\begin{aligned} L_P &= \sum_{k=1}^N m_k (p_k - p) \wedge v_k = \sum_{k=1}^N m_k (p_k - p) \wedge (v_k^* + v_G) = \sum_{k=1}^N m_k (p_k - p) \wedge v_k^* + \sum_{k=1}^N m_k (p_k - p) \wedge v_G \\ (4.7) \quad &= \sum_{k=1}^N m_k (p_k - p) \wedge v_k^* + (x_G - p) \wedge Q \equiv \sum_{k=1}^N m_k (x_k^* - p^*) \wedge v_k^* + (x_G - p) \wedge Q \equiv L_P^* + (x_G - p) \wedge Q \end{aligned}$$

dove il termine  $L_P^*$  è il momento angolare rispetto a  $P$  nel riferimento traslante. Il fatto notevole, ora, è che questo momento *non* dipende dal punto  $P$  e può quindi essere indicato con  $L$ . In tale riferimento infatti il centro di massa ha velocità nulla, e quindi la quantità di moto  $Q^*$  è nulla: di conseguenza, per via della legge di cambiamento di polo, il punto rispetto al quale  $L$  viene calcolato è irrilevante.  $\square$

Il primo teorema di König ha come conseguenza immediata che  $L_G = L$ , ovvero il momento angolare calcolato rispetto a  $G$  coincide con il momento angolare calcolato nel riferimento traslante centrato nel centro di massa  $G$ .

3.1.1. *Momento angolare di un corpo rigido.* Nel caso dei corpi rigidi, esiste una relazione di importanza cruciale tra momento di inerzia, momento angolare e velocità angolare. Vale infatti la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 3.2.** *Il momento angolare rispetto ad un polo  $C$  che appartiene ad un asse istantaneo di rotazione di un corpo rigido con atto di moto rotatorio avente velocità angolare  $\omega$  può scriversi*

$$L_C = \mathbf{I}_C \omega.$$

*Inoltre, il momento angolare rispetto al centro di massa si scrive*

$$L = \mathbf{I}_G \omega.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Rispetto al polo  $C$ , individuato dal vettore  $c$  in un opportuno riferimento cartesiano, si ha che ogni elemento del corpo in posizione  $x$  ha  $v_x = \omega \wedge (x - c)$ . Pertanto usando la definizione

$$(4.8) \quad L_C = \int_{\mathcal{B}} (x-c) \wedge v \rho dx = \int_{\mathcal{B}} (x-c) \wedge (\omega \wedge (x-c)) \rho dx = \int [\|x-c\|^2 \mathbb{I} - (x-c) \otimes (x-c)^T] \omega \rho dx = \mathbf{I}_C \omega.$$

Osserviamo ora che vale anche  $L_C = L + (x_G - c) \wedge Q$  per via della legge di cambiamento di polo. Ricordando che  $v_G = \omega \wedge (x_G - c)$ , possiamo scrivere

$$(x_G - c) \wedge Q = m(x_G - c) \wedge v_G = m(x_G - c) \wedge (\omega \wedge (x_G - c)) = m [\|x_G - c\|^2 \mathbb{I} - (x_G - c) \otimes (x_G - c)^T] \omega$$

per cui

$$L = \mathbf{I}_C \omega - m [\|x_G - c\|^2 \mathbb{I} - (x_G - c) \otimes (x_G - c)^T] \omega = \mathbf{I}_G \omega.$$

L'ultima uguaglianza segue dal teorema di Huygens–Steiner.  $\square$

Una conseguenza della relazione precedente è il seguente corollario.

**COROLLARIO 3.3.** *Dato un generico punto  $P$ ,*

$$L_P = \mathbf{I}_G \omega + (x_G - p) \wedge Q$$

**Q** Supponiamo che  $H$  sia un punto su un asse istantaneo di rotazione o il centro di massa: allora  $\omega$  e  $L_H$  sono paralleli se e solo se  $\omega$  è orientato come un asse principale di inerzia  $\hat{e}_k$  di  $\mathbf{I}_H$ . In quel caso,  $\mathbf{I}_H \omega = \hat{I}_k \omega$  con  $\hat{I}_k$  corrispondente autovalore.

**3.2. Equazioni cardinali della dinamica.** Le equazioni cardinali della dinamica riguardano, in analogia con le equazioni cardinali della statica, delle condizioni *necessarie* a soddisfarsi durante l'evoluzione dinamica di un sistema. Esse discendono direttamente dai postulati di Newton e, in analogia alla relazione tra forza e quantità di moto, mettono in relazione momento delle forze e momento angolare.



**TEOREMA 3.4** (Equazioni cardinali della dinamica). *Sia  $R^{(\text{ext})}$  la risultante delle forze esterne agenti su un sistema con quantità di moto  $Q$ , e sia  $\tau_A^{(\text{ext})}$  il momento risultante delle forze esterne individuato rispetto al polo  $A$  individuato dal vettore  $a$ . Allora*

$$R^{(\text{ext})} = \dot{Q}, \quad \tau_A^{(\text{ext})} = \dot{L}_A + v_A \wedge Q,$$

dove  $L_A$  è il momento totale delle quantità di moto rispetto al polo  $A$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni punto materiale di posizione  $p_k$  e massa  $m_k$ , possiamo scrivere che  $F_k^{(\text{ext})} + F_k^{(\text{in})} = Q_k$ , dove  $Q_k$  è la corrispondente quantità di moto, e abbiamo distinto tra la risultante delle forze esterne  $F_k^{(\text{ext})}$  e la risultante delle forze interne  $F_k^{(\text{in})}$ . Basta sommare questa espressione su  $k$  ricordando che  $Q = \sum_k Q_k$  e che  $\sum_k F_k^{(\text{in})} = \mathbf{0}$  per ottenere

$$R^{(\text{ext})} = \sum_k F_k^{(\text{ext})} = \sum_k \dot{Q}_k = \dot{Q}.$$

Per dimostrare la seconda equazione, osserviamo che per il singolo punto vale

$$(p_k - a) \wedge (F_k^{(\text{ext})} + F_k^{(\text{in})}) = (p_k - a) \wedge \dot{Q}_k$$

per cui, sommando su  $k$  ancora una volta e usando il fatto che  $(p_k - a) \wedge (F_k^{(\text{ext})} + F_k^{(\text{in})}) = \tau_{A,k}^{(\text{ext})} + \tau_{A,k}^{(\text{in})}$ , somma dei momenti delle forze rispetto ad  $A$  su  $k$ ,

$$\sum_k \tau_{A,k}^{(\text{ext})} + \sum_k \tau_{A,k}^{(\text{in})} \equiv \tau_A^{(\text{ext})} = \sum_k (p_k - a) \wedge \dot{Q}_k,$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\sum_k \tau_{A,k}^{(\text{in})} = \mathbf{0}$ . Il termine a destra nell'equazione si può scrivere come

$$\sum_k (p_k - a) \wedge \dot{Q}_k = \frac{d}{dt} \left( \sum_k (p_k - a) \wedge Q_k \right) - \sum_k (\dot{p}_k - \dot{a}) \wedge Q_k = \frac{dL_A}{dt} + v_A \wedge \sum_k Q_k = \frac{dL_A}{dt} + v_A \wedge Q,$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\dot{p}_k$  e  $Q_k$  sono paralleli.  $\square$

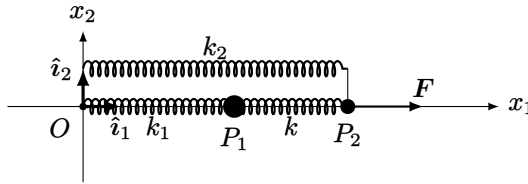
Naturalmente se il polo  $A$  è fisso, oppure  $v_A \parallel Q$  (condizione soddisfatta per esempio se  $A$  è il centro di massa del sistema), l'equazione sui momenti è semplicemente  $\tau_A^{(\text{ext})} = \dot{L}_A$ .

La prima equazione cardinale permette di dare il seguente Teorema, che discende immediatamente dal fatto che  $Q = m\dot{x}_G$ .

**TEOREMA 3.5 (Moto del centro di massa).** *Il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale di massa pari alla massa totale  $m$  del sistema su cui è applicata la risultante delle forze esterne, ovvero*

$$m\ddot{x}_G = R^{(\text{ext})}.$$

**Esempio 4.8** — Il fatto che l'equazione per il centro di massa non dipenda dalle forze interne non significa necessariamente che sia possibile ignorare tali forze: in effetti, l'equazione per  $x_G$  può essere insufficiente per studiare l'evoluzione di questo punto. Consideriamo per esempio un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$  e due punti  $P_1$  e  $P_2$ , di massa  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, vincolati da una guida ideale liscia a muoversi sull'asse  $\mathcal{X}$  di direzione  $\hat{i}_1$ , mentre  $\hat{i}_2$  si suppone puntare nella direzione opposta a quella della gravità. I punti sono disposti come in figura.



Il punto  $P_1$  è collegato all'origine da una molla ideale di costante elastica  $k_1$ , così come il punto  $P_2$ , che è collegato all'origine da una molla di massa  $k_2$ . Inoltre i due punti sono collegati tra loro da una molla di costante elastica  $k$  e su  $P_2$  agisce una forza esterna aggiuntiva  $F = F\hat{i}_2$ . Se indichiamo con  $p_1 = x_1\hat{i}_1$  il vettore posizione di  $P_1$  e con  $p_2 = x_2\hat{i}_1$  il vettore posizione di  $P_2$ , allora il centro di massa è individuato da  $x_G = x_G\hat{i}_1$ , con

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Il teorema del moto del centro di massa stabilisce che, indicando con  $m = m_1 + m_2$ ,

$$m\ddot{x}_G = -k_1x_1 - k_2x_2 + F = -\frac{mk_1}{m}x_G + \frac{m_2k_1 - m_1k_2}{m_1}x_2 + F,$$

essendo la forza esercitata dalla molla tra  $P_1$  e  $P_2$  interna al sistema, mentre le due forze peso sono annullate dalla reazione vincolare della guida. Nel secondo passaggio, abbiamo usato il fatto che, dalla formula per la posizione del centro di massa,  $x_1 = \frac{mx_G - m_2x_2}{m_1}$ . Questa equazione evidentemente non permette di risolvere il problema della dinamica del centro di massa, dato che coinvolge anche la variabile  $x_2$ . Possiamo però studiare i due punti separatamente, scrivendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k(x_2 - x_1) + F \end{cases}$$

che permette in linea di principio di risolvere il problema. Cerchiamo, per esempio, la posizione di equilibrio, imponendo  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$ . Questo fornisce un sistema di equazioni lineari che ci dà

$$x_1 = \frac{Fk}{kk_1 + kk_2 + k_1k_2}, \quad x_2 = \frac{F(k + k_1)}{kk_1 + kk_2 + k_1k_2}$$

che implica che all'equilibrio

$$x_G = \frac{F}{m} \frac{km + m_2k_1}{kk_1 + kk_2 + k_1k_2},$$

che mostra come la posizione di equilibrio del centro di massa dipenda in effetti dalla forza elastica interna (tramite  $k$ ).

**3.2.1. Corpi rigidi ed equazioni di Eulero.** Nelle equazioni cardinali compare la derivata del momento angolare, il cui calcolo naturalmente dipende dalle specifiche proprietà del sistema in esame. Un caso particolare, ancora una volta, è quello del corpo rigido. Abbiamo già visto che nel caso di un corpo rigido possiamo scrivere il momento angolare rispetto ad un polo in termini del momento d'inerzia rispetto al centro di massa  $G$  sostituendo  $L = \mathbb{I}_G\omega$ , così che

$$L_A = \mathbf{I}_G\omega + (x_G - a) \wedge Q,$$

ed in particolare, scegliendo  $A \equiv G$ ,  $L_G \equiv L = \mathbf{I}_G\omega$ . Possiamo calcolare la derivata temporale di questo momento angolare, ottenendo la seguente Proposizione.

**PROPOSIZIONE 3.6.** *La derivata temporale del momento angolare baricentrale in un corpo rigido è*

$$\dot{L} = \mathbf{I}_G\dot{\omega} + \omega \wedge L.$$

*Lo stesso risultato vale se si considera il momento angolare rispetto ad un punto  $C$  di un asse istantaneo di rotazione,*

$$\dot{L}_C = \mathbf{I}_C\dot{\omega} + \omega \wedge L_C.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo un riferimento solidale al corpo rigido. Sappiamo che esiste una relazione tra la derivata temporale  $\dot{u}$  di un vettore  $u$  nel riferimento fisso e la derivata temporale  $u'$  dello stesso vettore in quello solidale data da  $\dot{u} = u' + \omega \wedge u$ . Appliciamo questa formula al momento angolare baricentrale,

$$\dot{L} = L' + \omega \wedge L.$$

Nel riferimento solidale il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_G$  non cambia, per cui  $L' = (\mathbf{I}_G\omega)' = \mathbf{I}_G\omega' = \mathbf{I}_G\dot{\omega}$ , dove abbiamo usato il fatto che la derivata temporale di  $\omega$  è invariante nei due sistemi: ciò fornisce il risultato cercato. Il ragionamento si ripete identico nel caso in cui si consideri un punto  $C$  di un asse istantaneo di rotazione, dato che in questo caso  $L_C = \mathbf{I}_C\omega$ .  $\square$

Vale quindi, infine, la seguente Proposizione, che combina le equazioni cardinali della dinamica con il risultato appena dimostrato.

PROPOSIZIONE 3.7. *Sia  $G$  il centro di massa di un corpo rigido di massa  $m$ , individuato dal vettore  $x_G$  rispetto ad un sistema inerziale. Allora*

$$m\ddot{x}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \quad \boldsymbol{\tau}_G^{(\text{ext})} = \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}.$$

Da questa Proposizione si possono ottenere delle equazioni relativamente semplici, dette *equazioni di Eulero*, se scriviamo le equazioni cardinali rispetto alla base degli assi principali di inerzia  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , dato che in questo caso la matrice  $\mathbf{I}_G$  che rappresenta  $\mathbf{I}_G$  è diagonale, con elementi  $\hat{I}_{G,1}, \hat{I}_{G,2}, \hat{I}_{G,3}$ . Usando questa base, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\tau}_G^{(\text{ext})} = \tau_{G,1}^{(\text{ext})} \hat{e}_1 + \tau_{G,2}^{(\text{ext})} \hat{e}_2 + \tau_{G,3}^{(\text{ext})} \hat{e}_3$$

e inoltre

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}' = \dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + \dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + \dot{\omega}_3 \hat{e}_3.$$

Le equazioni così diventano

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \hat{I}_{G,1} \dot{\omega}_1 - (\hat{I}_{G,2} - \hat{I}_{G,3}) \omega_2 \omega_3 &= \tau_{G,1}^{(\text{ext})}, \\ \hat{I}_{G,2} \dot{\omega}_2 - (\hat{I}_{G,3} - \hat{I}_{G,1}) \omega_3 \omega_1 &= \tau_{G,2}^{(\text{ext})}, \\ \hat{I}_{G,3} \dot{\omega}_3 - (\hat{I}_{G,1} - \hat{I}_{G,2}) \omega_1 \omega_2 &= \tau_{G,3}^{(\text{ext})}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, come detto più volte, la configurazione in cui si trova un corpo rigido è individuata dalla posizione di un punto che si muove di moto solidale col corpo e di una terna di vettori solidali. Possiamo scegliere per esempio come punto solidale il centro di massa  $G$ , e come base di un riferimento solidale i tre assi principali d'inerzia del corpo. Stando così le cose, sarà necessario tracciare l'evoluzione del vettore  $x_G$ , ovvero delle *tre coordinate* che identificano il centro di massa, e dei *tre angoli di Eulero* che permettono di passare dalla base del riferimento fisso alla base solidale. Ciò significa che è in generale sufficiente determinare l'evoluzione di *sei* parametri: le equazioni cardinali sono quindi sufficienti per descrivere la dinamica del corpo rigido, dato che consistono di tre equazioni per il centro di massa e tre equazioni di Eulero. La presenza di vincoli aggiuntivi, tuttavia, può ridurre il numero di parametri necessari. Facciamo qualche esempio più specifico.

**Esempio 4.9** (Corpo rigido libero) — Se il corpo è libero, ovvero non ci sono vincoli, le forze esterne sono tutte attive ed è possibile individuare tutti e sei i parametri necessari a descriverne il moto tramite le sei condizioni fornite dalla prima equazione cardinale della dinamica,  $m\ddot{x}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}$ , e dalle tre equazioni di Eulero. Infatti, è possibile scrivere le componenti della velocità angolare in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime usando l'Eq. (1.10), di modo che le equazioni di Eulero coinvolgono al più derivate seconde di questi angoli. Di conseguenza, per via del Teorema di Cauchy, a condizioni iniziali date, le equazioni cardinali sono *necessarie e sufficienti* nel caso di un corpo rigido.

**Esempio 4.10** (Corpo rigido con punto fisso) — Supponiamo ora che il corpo sia tale che un suo punto  $P$  sia forzatamente *fisso*. In questo caso, è possibile per esempio scegliere tale punto come origine del riferimento solidale, mentre la configurazione del corpo è identificata dalla terna di angoli di Eulero che permettono di ottenere la terna solidale da quella fissa. In questo caso, però, comparirà tra le forze esterne anche la reazione vincolare  $\Phi$  applicata sul corpo in  $P$ . Le equazioni cardinali saranno

$$m\ddot{x}_G = \mathbf{R}^{(\text{a,ext})} + \Phi, \quad \boldsymbol{\tau}_P^{(\text{a,ext})} = \dot{L}_P$$

dove, avendo calcolato il momento delle forze rispetto a  $P$ , il contributo del momento di  $\Phi$  non appare (e inoltre,  $v_P = \mathbf{0}$  essendo il punto fisso). Le due equazioni vettoriali forniscono

sei equazioni scalari per sei quantità: i tre angoli di Eulero e le tre componenti della reazione vincolare  $\Phi$ . Avviene però che  $P$  è anche un punto di un asse istantaneo di rotazione, per cui vale la stessa relazione che abbiamo visto per il momento angolare baricentrale (ma con l'opportuno tensore d'inerzia)

$$\dot{L}_P = \mathbf{I}_P \dot{\omega} + \omega \wedge \mathbf{I}_P \omega,$$

di modo che, esattamente come nel caso del corpo libero, la seconda equazione cardinale *non* coinvolge  $\Phi$ : una volta integrata, il vettore di reazione si potrà ottenere dalla prima equazione cardinale, dato che la posizione del centro di massa e la risultante delle forze attive saranno funzione dei soli angoli di Eulero.

**Esempio 4.11** (Corpo rigido con asse fisso) — Infine, consideriamo il caso di un corpo rigido in moto ma con il vincolo di mantenere fisso l'asse passante per due sue punti, che chiamiamo  $O$  e  $P$ . Come sappiamo, in questo caso una configurazione del corpo è individuata da un solo parametro angolare, che esprime la rotazione del corpo attorno ad un asse. Scegliendo  $O$  come origine del nostro riferimento, e indicando con  $p$  il vettore che individua  $P$  rispetto ad  $O$ , le equazioni cardinali sono

$$m\ddot{x}_G = R^{(a, \text{ext})} + \Phi_O + \Phi_P, \quad \dot{L}_O = \tau_O^{(a, \text{ext})} + p \wedge \Phi_P.$$

Esattamente come sopra,  $O$  è un punto di un asse istantaneo di rotazione, per cui  $\dot{L}_O = \mathbf{I}_O \dot{\omega} + \omega \wedge \mathbf{I}_O \omega$ . Dato che è necessaria una sola equazione, possiamo moltiplicare la seconda equazione cardinale della dinamica per il versore  $\hat{i}_3$  che assumiamo parallelo alla retta passante per  $O$  e  $P$ , di modo che otteniamo (usando il fatto che  $\omega$ ,  $\hat{i}_3$  e  $p$  sono paralleli)

$$\langle \hat{i}_3, \mathbf{I}_O \dot{\omega} \rangle = \langle \hat{i}_3, \tau_O^{(a, \text{ext})} \rangle,$$

che è una equazione pura sufficiente per ottenere informazione sull'unico parametro necessario a descrivere le configurazioni del corpo. Osservando ora che in questo caso  $\omega = \dot{\theta} \hat{i}_3$ , l'equazione diventa

$$\langle \hat{i}_3, \tau_O^{(a, \text{ext})} \rangle = \langle \hat{i}_3, \mathbf{I}_O \hat{i}_3 \rangle \ddot{\theta} \equiv I_Z \ddot{\theta}$$

dove  $I_Z$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso  $Z$ , passante per  $O$  e di direzione  $\hat{i}_3$ .

**Esempio 4.12** (Pendolo fisico) — Un esempio classico di corpo rigido in moto con asse fisso è il pendolo fisico. Si immagina di avere un corpo fissato in modo tale che esso sia libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale, non passante per il suo centro di massa  $G$ : il corpo è soggetto alla forza peso. Scegliamo quindi un riferimento in modo tale che l'origine sia nell'intersezione  $O$  tra l'asse fisso  $Z$  e il piano ad esso perpendicolare passante per  $G$ . Scegliamo inoltre una base  $\{\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3\}$  tale che la forza peso del corpo sia  $F_g = -mg \hat{i}_2$  e  $\hat{i}_3 = \hat{i}_1 \wedge \hat{i}_2$  sia la direzione dell'asse  $Z$ . Secondo quanto detto sopra, il momento della forza peso rispetto all'origine è il momento della risultante delle forze: la forza peso può essere pensata applicata nel centro di massa, che assumiamo individuato dal vettore  $x_G$  nel riferimento scelto, di modo che  $\tau_O^{(a, \text{ext})} = -mg x_G \wedge \hat{i}_2$ . Sia  $r$  la distanza del centro di massa dall'origine (costante, essendo il corpo rigido), e introduciamo un angolo  $\theta$  di modo che

$$x_G = r \sin \theta \hat{i}_1 - r \cos \theta \hat{i}_2.$$

Conoscendo  $\theta$  conosceremo la configurazione del corpo:  $\theta$  è il parametro lagrangiano la cui evoluzione dovremo studiare. Il momento della forza peso è quindi  $\tau_O^{(a, \text{ext})} = -mgr \sin \theta \hat{i}_3$ . Da quanto detto sopra, l'equazione che descrive il moto del sistema è quindi

$$I_Z \ddot{\theta} = -mgr \sin \theta$$

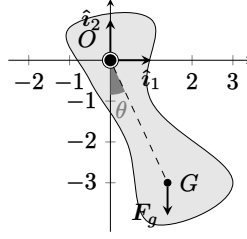


FIGURA 4. Pendolo fisico in moto in un piano verticale.

ovvero è equivalente al moto di un pendolo ideale di massa  $m$  e di lunghezza  $\ell := \frac{I_Z}{mr}$ . Questo vuol dire che, nel limite di piccole oscillazioni, il periodo del pendolo fisico è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_Z}{mgr}}.$$

**3.3. Integrali primi del moto.** Lo studio della dinamica può essere di molto semplificato dall'osservazione che alcune quantità *rimangono costanti* durante il moto. Abbiamo già visto, per esempio, che la conservazione dell'energia meccanica può essere un'utile strumento per calcolare facilmente delle quantità di interesse che diversamente sarebbero complesse da stimare, come per esempio la velocità di fuga.

**DEFINIZIONE 3.1** (Integrale primo). *Consideriamo un sistema generico con vincoli fissi o mobili e descritto da  $n$  coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$ ; una funzione  $\Psi(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  si dice integrale primo del moto se*

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = 0,$$

dove la derivate di  $\mathbf{q}$  sono da intendersi sulla soluzione  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(t)$  delle equazioni del moto.

Un integrale primo del moto ha un valore che tipicamente dipende dalle condizioni iniziali, ma una volta fissato nell'istante iniziale, esso rimane costante durante il moto: si dice che  $\Psi$  si *conserva*. Il problema dell'individuazione degli integrali primi di un moto è non triviale, tuttavia possiamo già identificare due possibili integrali primi che appaiono in particolari condizioni e la cui esistenza è suggerita dalle equazioni cardinali della dinamica.

**PROPOSIZIONE 3.8** (Conservazione della quantità di moto). *Sia  $\hat{u}$  un versore fisso. Se  $\langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{u} \rangle = 0$ , allora la quantità  $\langle \mathbf{Q}, \hat{u} \rangle$  si conserva.*

Questo risultato discende immediatamente dalla prima equazione cardinale della dinamica, dato che  $\langle \dot{\mathbf{Q}}, \hat{u} \rangle = \langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{u} \rangle$ . In particolare, se  $\mathbf{R}^{(\text{ext})} = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{Q}$  è un integrale primo del moto.

Analogamente, vale la seguente Proposizione riguardo il momento angolare.

**PROPOSIZIONE 3.9** (Conservazione del momento angolare). *Sia  $\hat{u}$  un versore fisso e sia  $\tau_A^{(\text{ext})}$  il momento risultante delle forze calcolato rispetto ad un polo  $A$  tale che  $v_A \wedge \hat{u} = \mathbf{0}$ . Se  $\langle \tau_A^{(\text{ext})}, \hat{u} \rangle = 0$ , allora la quantità  $\langle \mathbf{L}_A, \hat{u} \rangle$  si conserva. In particolare, se  $\tau_G^{(\text{ext})} = \mathbf{0}$  allora  $\mathbf{L}$  si conserva.*

**3.3.1. Urti.** Vediamo ora una semplice, ma importante, applicazione del Proposizione 3.8. Supponiamo di avere un riferimento inerziale  $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ , di modo che  $\hat{i}_3$  sia orientato come la forza peso, e due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1$  ed  $m_2$  rispettivamente, vincolati a muoversi lungo l'asse  $\mathcal{X}$ , corrispondente alla direzione  $\hat{i}_1$ . Il vincolo è realizzato da una guida ideale, di modo che la forza peso di entrambi i punti sia bilanciata dalla reazione vincolare della guida stessa. I punti



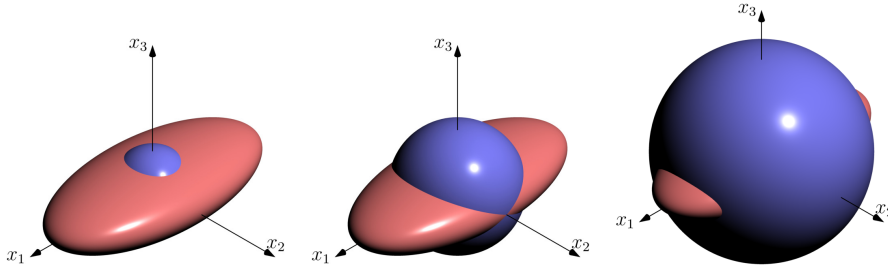


FIGURA 5. Rappresentazione delle due condizioni di conservazione in Eq. (4.10) per un corpo rigido non soggetto a forze esterne per diversi valori di  $L_0^2$  e  $T_0$ . In rosso è rappresentata la condizione derivata dalla conservazione del momento angolare, in blu quella derivata dalla conservazione dell'energia cinetica. Il vettore  $x$  (e quindi  $\omega$ ) è vincolato a evolvere lungo l'intersezione tra le due superfici. In questa figura,  $\hat{I}_3 < \hat{I}_2 < \hat{I}_1$ .

materiali  $P_1$  e  $P_2$  sono individuati dai vettori  $p_1 = x_1 \hat{i}_1$  e  $p_2 = x_2 \hat{i}_1$  rispettivamente. Inoltre, la risultante delle forze esterne applicate al sistema è nulla: questo significa che la quantità di moto totale del sistema si conserva.

Supponiamo ora che al tempo iniziale  $t = 0$   $P_1$  si muova con velocità costante  $v_1 = v_0 \hat{i}_1$  sulla guida, con  $v_0 > 0$  mentre  $P_2$  è in quiete. Assumendo  $x_1(0) < x_2(0) = 0$ , vi sarà un istante di tempo  $t_u$  in cui i due oggetti urteranno: tale istante corrisponde al momento in cui  $P_1$  arriverà nell'origine, ovvero  $t_u = \frac{1}{v_0} |x_1(0)|$ . Se indichiamo con  $v_1 = v_1 \hat{i}_1$  e  $v_2 = v_2 \hat{i}_1$  le velocità di  $P_1$  e  $P_2$  rispettivamente *dopo* l'urto, la conservazione della quantità di moto lungo  $\hat{i}_1$  impone

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Questa relazione non è sufficiente per determinare, in generale,  $v_1$  e  $v_2$ . Tuttavia, in due casi specifici, la presenza di una condizione aggiuntiva permette di risolvere il problema.

**Urto elastico:** Se l'energia cinetica del sistema si conserva, si dice che l'urto è *elastico* e vale la condizione aggiuntiva

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

che, insieme alla condizione di conservazione della quantità di moto, implica

$$v_1 = v_0 \quad \text{e} \quad v_2 = 0 \quad \text{oppure} \quad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

La prima soluzione corrisponde al caso in cui la particella  $P_1$  attraversi la particella  $P_2$  senza urtarla, ovvero senza interazione. Immaginiamo che nel nostro sistema fisico ciò sia inaccettabile, e pertanto la soluzione da considerare è la seconda. Si noti che il segno di  $v_1$  dipende dalla massa relativa dei due punti materiali: se  $m_2 > m_1$ , la prima particella inverte il senso di moto dopo l'urto.

**Urto totalmente anelastico:** Un diverso caso è quello in cui i due corpi si *fondono* a seguito dell'urto, producendo un nuovo punto materiale di massa  $m_1 + m_2$ . In questo caso, detto *totalmente anelastico*,  $v_1 = v_2 \equiv v$  e la condizione imposta dalla conservazione della quantità di moto è

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

**Esempio 4.13** (Ellissoide d'inerzia e teorema della racchetta) — Consideriamo come esercizio finale il seguente problema. È dato un corpo rigido in rotazione *in assenza di forze esterne*: ciò vuol dire che sia la risultante delle forze esterne che il loro momento risultante saranno nulli.

Scegliamo ora un riferimento solidale col centro di massa (che, per quanto detto, sarà fermo o avrà velocità costante rispetto ad un riferimento inerziale). Alla luce della Proposizione sopra riguardante la conservazione del momento angolare, in questo sistema  $\mathbf{L} = \mathbb{I}_G \boldsymbol{\omega}$  si manterrà costante durante tutta la durata del moto. Inoltre, si conserverà anche l'energia cinetica,

$$T = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \rangle.$$

Esprimiamo ora il modulo quadro del momento angolare e l'energia cinetica rispetto alla base degli assi principali d'inerzia, siano essi  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Scriviamo in questa base  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$ , ma soprattutto ricordiamo che  $\mathbf{I}_G$  ha una rappresentazione diagonale, di modo che  $\mathbf{I}_G \hat{e}_i = \hat{I}_i \hat{e}_i$ , con  $\hat{I}_i$  momento principale d'inerzia rispetto all'asse  $\hat{e}_i$  (omettiamo il pedice  $G$  per brevità). Si ottiene

$$L^2 := \|\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}\|^2 = \sum_{i=1}^2 \hat{I}_i^2 \omega_i^2, \quad 2T = \sum_{i=1}^N \hat{I}_i \omega_i^2.$$

Queste due quantità, come si diceva, devono rimanere costanti durante il moto. Introducendo ora il vettore  $x = \sum_i x_i \hat{e}_i$  avente coordinate riscalate  $x_i = \sqrt{\hat{I}_i} \omega_i$ , le condizioni di conservazione diventano

$$(4.10) \quad \sum_{i=1}^2 \hat{I}_i x_i^2 \equiv \langle x, \mathbf{I}_G x \rangle = L^2, \quad \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \|x\|^2 = 2T,$$

che esprimono il fatto che il vettore  $x$  deve appartenere, per tutta la durata del moto, all'intersezione tra un ellissoide, detto *ellissoide d'inerzia*, e una sfera, di raggio pari al doppio dell'energia cinetica del corpo, come in Fig. 5.

Si noti che le proprietà geometriche di questa intersezione possono essere molto diverse al variare delle dimensioni relative tra queste due superfici. Si vede geometricamente che, se per esempio  $\hat{I}_3 < \hat{I}_2 < \hat{I}_1$ , se  $\boldsymbol{\omega}$  inizia la sua evoluzione con direzione prossima a  $\hat{e}_1$  o  $\hat{e}_3$ , essa vi rimane vicine durante il moto, mentre se inizia il suo moto con direzione prossima a  $\hat{e}_2$  essa può allontanarsi notevolmente dalla configurazione iniziale. Questo risultato è a volte indicato come *effetto Džanibekov* o *teorema della racchetta da tennis*, dato che diventa evidente quando il corpo rigido ha momenti principali d'inerzia molto diversi tra loro, come nel caso appunto di una racchetta.

**Q** Per essere più precisi, facciamo riferimento alle equazioni di Eulero. Supponiamo che al tempo  $t = 0$   $\boldsymbol{\omega}$  sia orientato quasi come  $\hat{e}_1$ , ovvero  $\omega_2 \simeq \omega_3 \simeq 0$ . Dalle equazioni di Eulero  $\hat{I}_1 \dot{\omega}_1 = (\hat{I}_2 - \hat{I}_3) \omega_2 \omega_3 \simeq 0$ , cioè  $\omega_1$  varierà poco negli istanti immediatamente successivi. D'altra parte

$$\hat{I}_2 \dot{\omega}_2 = (\hat{I}_3 - \hat{I}_1) \omega_1 \omega_3 \Rightarrow \hat{I}_2 \hat{I}_3 \ddot{\omega}_2 \simeq (\hat{I}_3 - \hat{I}_1) \hat{I}_3 \omega_1 \dot{\omega}_3 = (\hat{I}_3 - \hat{I}_1) (\hat{I}_1 - \hat{I}_2) \omega_1^2 \omega_2.$$

Il prefattore  $(\hat{I}_3 - \hat{I}_1)(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) \omega_1^2$  è negativo pertanto  $\omega_2$  è soggetta ad un 'richiamo elastico' verso il valore  $\omega_2 = 0$ . In maniera analoga lo stesso si vede per  $\omega_3$ .

Se invece immaginiamo che per  $t = 0$  siano  $\omega_1$  e  $\omega_3$  ad essere molto minori di  $\omega_2$ , dalle equazioni di Eulero troviamo di nuovo che  $\dot{\omega}_2 \simeq 0$ , mentre, procedendo esattamente come sopra,

$$\hat{I}_1 \dot{\omega}_1 = (\hat{I}_2 - \hat{I}_3) \omega_2 \omega_3 \Rightarrow \hat{I}_1 \hat{I}_3 \ddot{\omega}_1 \simeq (\hat{I}_2 - \hat{I}_3) \hat{I}_3 \omega_2 \dot{\omega}_3 = (\hat{I}_2 - \hat{I}_3) (\hat{I}_1 - \hat{I}_2) \omega_2^2 \omega_1.$$

Stavolta, la quantità  $(\hat{I}_2 - \hat{I}_3)(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) \omega_2^2$  è positiva pertanto  $\omega_1$  è soggetta ad una instabilità, non c'è nessuna forza di richiamo su di essa e tenderà ad aumentare.