

## 2. Moto unidimensionale

Consideriamo una *guida liscia* nello spazio tridimensionale, individuata da una curva regolare non degenera  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Possiamo sempre assumere che la parametrizzazione della curva sia tale che  $\|\gamma'(s)\| = 1$  per ogni  $s \in I$  e che  $I$  contenga  $s = 0$ , di modo che  $\gamma(0)$  sia un punto del sostegno della curva<sup>7</sup>. Una curva così parametrizzata è dotata di una orientazione naturale in ogni suo punto  $\gamma(s)$ , fornita dal versore tangente  $\mathbf{t}(s) := \gamma'(s) \neq \mathbf{0}$ . È analogamente possibile introdurre  $\hat{\mathbf{n}}(s) := \frac{1}{\kappa(s)}\gamma''(s)$ , con  $\kappa(s) := \|\gamma''(s)\|$  curvatura, e  $\hat{\mathbf{b}}(s) := \hat{\mathbf{t}}(s) \wedge \hat{\mathbf{n}}(s)$ . Si tratta cioè di una parametrizzazione completamente analoga a quella intrinseca già vista per le curve definite su intervalli  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , in cui però ammettiamo che il parametro  $s$  possa avere anche segno negativo, potendo essere l'“origine” del riferimento  $\gamma(0)$  diverso da un estremo della curva. Anche in questo contesto si dice che  $s$  è l'*ascissa curvilinea* (con segno) della curva, in analogia con quanto visto con la parametrizzazione intrinseca già introdotta.

Sia dato un punto materiale  $(P, m)$  vincolato a muoversi su  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , curva che assumiamo parametrizzata intrinsecamente e che rappresenta una *guida liscia* che vincola il suo moto. La traiettoria di  $P$ , sia essa  $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sarà quindi specificata da una *legge oraria*, ovvero una funzione, che assumeremo di classe almeno  $\mathcal{C}^2$ , che fornisce l'ascissa curvilinea del punto materiale lungo  $\gamma$  a dato istante, ovvero  $s: \mathbb{R} \rightarrow I$ , di modo che  $\mathbf{x} = \gamma \circ s$ . Si noti che *non* richiediamo che  $\dot{s} \neq 0$  per ogni istante  $t$  in questo contesto (ovvero ammettiamo che il punto possa avere velocità nulla). Alla luce di questa parametrizzazione, è utile scomporre la forza agente sul punto materiale in ciascuna posizione di ascissa curvilinea  $s$  separando il contributo vincolare da quello attivo, ovvero  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{(a)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, \mathbf{x})$ , ed esprimere l'equazione nella base fornita dalla terna di Frenet della curva per sfruttare la natura intrinsecamente unidimensionale del moto. Sappiamo infatti che

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{s}\hat{\mathbf{t}}(s) + \dot{s}^2\kappa(s)\hat{\mathbf{n}}(s)$$

per cui nel punto di ascissa curvilinea  $s$  devono valere tre equazioni<sup>8</sup>

$$(1.3) \quad m\ddot{s} = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle,$$

$$(1.4) \quad m\kappa(s)\dot{s}^2 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, s), \hat{\mathbf{n}}(s) \rangle,$$

$$(1.5) \quad 0 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, s), \hat{\mathbf{b}}(s) \rangle.$$

Abbiamo qui usato il fatto che la guida è *liscia*, per cui  $\mathbf{F}^{(v)}$  è ortogonale per ipotesi a  $\hat{\mathbf{t}}$ . L'obiettivo dell'indagine è tipicamente ottenere la legge oraria  $s(t)$  disponendo di opportune condizioni iniziali: per esempio, avendo scelto  $t = 0$  come tempo iniziale, sia  $s(0) = s_0$  (posizione iniziale lungo la curva, corrispondente a  $\mathbf{x}(0) = \gamma(s(0))$ ) e  $\dot{s}(0) = v_0$  (ovvero, velocità iniziale  $\dot{\mathbf{x}}(0) = v_0\hat{\mathbf{t}}(s_0)$ ). Assumiamo anche di *conoscere* la curva  $\gamma$  e le sue proprietà geometriche, e la forma funzionale di  $\mathbf{F}^{(a)}$ . Chiamando

$$f(t, s, \dot{s}) := \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle$$

la prima equazione assume la forma più semplice

$$m\ddot{s} = f(t, s, \dot{s}).$$

<sup>7</sup>Data una generica curva  $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare non degenera, possiamo infatti scegliere un punto  $u_0 \in J$  come punto di “origine” e introdurre la parametrizzazione  $s(u) = \int_{u_0}^u \|\psi'(v)\| dv$  di modo che  $\gamma = \psi \circ s^{-1}$  sia parametrizzata come richiesto con  $s(u_0) = 0$  e  $s'(u) > 0 \forall u \in J$ .

<sup>8</sup>Nelle equazioni seguenti faremo un lieve abuso di notazione. La forza attiva è in generale una funzione del tipo  $\mathbf{F}^{(a)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  che quindi si può esprimere come  $\mathbf{F}^{(a)}(t, \gamma(s), \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s))$  esplicitando la dipendenza dalla legge oraria  $s$ . Scrivendo  $\mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s})$  al posto di  $\mathbf{F}^{(a)}(t, \gamma(s), \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s))$  intendiamo mettere in evidenza la dipendenza da  $s$  e dalle sue derivate, essendo  $\gamma$  e  $\hat{\mathbf{t}}$  supposte note. Ragionamento analogo si applica alla notazione adottata per  $\mathbf{F}^{(v)}$ .

Questa equazione può essere integrata più o meno facilmente a seconda della forma funzionale di  $f$ . Una classe particolarmente importante è quella dei sistemi *autonomi*, in cui  $f$  non dipende esplicitamente dal tempo. Tali sistemi sono particolarmente importanti dato che, nei problemi fisici,  $f$  solitamente non manifesta una dipendenza esplicita dal tempo per via dell'invarianza galileiana.

Se  $f \equiv f(\dot{s})$ , per esempio, si può scrivere l'equazione del primo ordine  $\dot{v} = f(v)$  per la variabile  $v = \dot{s}$ . Questa equazione ammette un'unica soluzione se  $f$  è lipschitziana. Assumendo che in un intorno di  $v_0$  si abbia  $f(v) \neq 0$ , in tale soluzione la soluzione soddisfa una equazione nella forma implicita

$$m\dot{s} = f(\dot{s}) \Rightarrow G(v) := m \int_{v_0}^v \frac{1}{f(u)} du = t.$$

Questo riduce il problema dell'integrazione delle equazioni del moto ad una equazione differenziale del primo ordine nella forma  $G(\dot{s}) - t = 0$ , la cui successiva integrazione permette, in linea di principio, di ottenere  $s$  tramite un'ulteriore quadratura.

Il caso  $f \equiv f(s)$  invece merita una analisi più approfondita. Nel seguito, senza perdere in generalità, assumiamo, come sopra, come istante iniziale  $t = 0$  e indichiamo con  $s_0 := s(0)$  e  $v_0 := \dot{s}(0)$  le condizioni iniziali del moto del nostro punto materiale su una guida liscia.

**2.1. Forza posizionale  $f \equiv f(s)$ .** Se la forza attiva è posizionale, ovvero  $\mathbf{F}^{(a)} \equiv \mathbf{F}^{(a)}(\mathbf{x})$ , allora  $f \equiv f(s)$ , di modo che il moto equivale a quello di un punto materiale soggetto ad una forza conservativa in una dimensione. Detta  $s$  la generica ascissa curvilinea toccata dal punto materiale durante il moto, è infatti possibile introdurre il potenziale

$$V(s) := - \int_{s_0}^s f(x) dx,$$

nell'ipotesi che  $f$  sia integrabile sull'intervallo considerato. L'utilità dell'aver introdotto  $V$  sta nel fatto che la quantità

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s)$$

risulta conservata durante il moto, come si vede derivando rispetto al tempo, e dunque essa rimane uguale al valore  $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(s_0)$  dell'istante iniziale  $t = 0$ . Inoltre, il fatto che il contributo cinetico debba essere sempre positivo fa sì che il moto possa avvenire solo in regioni in cui

$$E - V(s) \geq 0.$$

Assumiamo ora che  $v_0 \neq 0$ . Se  $E - V(s) > 0$  in un intorno di  $s_0$ . Per  $s$  in tale intorno, l'espressione dell'energia meccanica implica

$$1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(s)}} \frac{ds}{dt} \Rightarrow t(s) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(x)}} dx \equiv \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx,$$

che è la soluzione implicita del problema. La funzione

$$\Phi(s) := 2 \frac{E - V(s)}{m}$$

contiene in particolare tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse. Il moto può infatti verificarsi solo nelle regioni in cui  $\Phi(s) > 0$ , mentre gli (eventuali) zeri della funzione separano la curva  $\gamma$  in porzioni mutualmente inaccessibili.

Per meglio fissare le idee, supponiamo di avere, nella notazione precedente,  $v_0 > 0$ : se  $\Phi(x) > 0$  per ogni  $x \in [s_0, s]$ , allora

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

è una funzione con derivata strettamente positiva e quindi invertibile: essa quantifica il tempo (finito) necessario al punto materiale per raggiungere  $s$  a partire da  $s_0$ .

Se esiste  $\hat{s} > s_0$  tale che  $\Phi(\hat{s}) = 0$  e  $\Phi(x) > 0$  per  $x \in [s_0, \hat{s})$ , il tempo necessario per raggiungere tale punto a partire da  $s_0$

$$t(\hat{s}) = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

può essere finito o infinito. Assumendo in particolare che  $\Phi$  sia analitica in  $\hat{s}$ , questo dipenderà dal fatto che  $\hat{s}$  sia uno zero semplice o multiplo di  $\Phi(s)$ , rispettivamente.

Se  $\hat{s}$  è uno zero multiplo di  $\Phi(s)$ , l'integrale diverge: questo fatto è coerente con il teorema di Cauchy sull'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali. Osservando infatti che le equazioni del moto si scrivono come  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$ , nel caso in cui  $\hat{s}$  sia uno zero multiplo, la quantità  $\sqrt{\Phi(s)}$  è lipschitziana in un intorno di  $\hat{s}$ , fatto che garantisce l'unicità della soluzione. D'altra parte,  $s(t) = \hat{s}$  risolve l'equazione e pertanto è l'unica soluzione ammessa passante per  $\hat{s}$ : ogni traiettoria ottenuta con diversa condizione iniziale può solo avvicinarsi al punto  $\hat{s}$  senza mai toccarlo (diversamente, vi sarebbero *due* possibili soluzioni passanti per  $\hat{s}$ ). Si noti inoltre che, coerentemente con questo fatto, la forza applicata al punto materiale in uno zero multiplo  $\hat{s}$  è nulla,  $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) = 0$ , per cui in effetti un punto materiale in  $\hat{s}$  non accelera.

Discorso diverso vale per gli zeri semplici. Se  $\hat{s}$  è uno zero semplice, la formula precedente predice che esso verrà toccato in un tempo finito  $t(\hat{s})$ . Questo peraltro mostra che esistono almeno due soluzioni dell'equazione differenziale  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$  passanti per  $\hat{s}$  (ovvero, la soluzione dell'equazione con condizione iniziale  $s(0) = s_0$  e quella con condizione iniziale  $s(0) = \hat{s}$ ). La ragione, nuovamente, è che in questo caso  $\sqrt{\Phi(s)}$  non è lipschitziana in un intorno di  $\hat{s}$ : pur fissando la condizione iniziale  $s(0) = \hat{s}$  (automaticamente associata a  $\dot{s}(0) = 0$ ) l'unicità non è garantita e sono ammesse più soluzioni. D'altra parte, se il punto materiale si trova in uno zero semplice di  $\Phi$  con velocità nulla, l'evoluzione fisica del suo moto (ovvero *quale* delle possibili soluzioni si realizzerà) sarà determinata dal segno della forza  $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) \neq 0$  che non permette alla velocità di rimanere nulla.

Anche se accessibili di per sé, gli zeri semplici di  $\Phi(s)$  costituiscono comunque la frontiera di regioni di accessibilità sulla curva, come si vede dai seguenti risultati.

**DEFINIZIONE 2.1.** Gli zeri semplici di  $\Phi(s)$  sono detti punti di inversione.

**TEOREMA 2.1.** Il moto tra due punti di inversione consecutivi  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+ > \hat{s}_-$  è periodico di periodo

$$\tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+$  due zeri semplici consecutivi di  $\Phi(s)$ . Per ipotesi, nell'intervallo  $[\hat{s}_-, \hat{s}_+]$  possiamo scrivere  $\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(\hat{s}_+ - s)\phi(s)$  con  $\phi(s) > 0$  per  $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$ . La velocità del punto materiale si annulla in  $\hat{s}_\pm$  mentre la forza ha in questi punti segno opposto:

$$f(\hat{s}_+) = \Phi'(\hat{s}_+) = -(\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_+) < 0, \quad f(\hat{s}_-) = \Phi'(\hat{s}_-) = (\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_-) > 0,$$

il che fa sì che il moto si inverta in questi punti estremali. Partendo da  $s_0 \in (\hat{s}_-, \hat{s}_+)$  con  $v_0 > 0$  al tempo  $t = 0$ , il moto prosegue quindi fino a  $\hat{s}_+$  dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, il punto materiale subisce una accelerazione verso  $\hat{s}_-$  che lo fa ripassare da  $s_0$  con velocità opposta in segno, fino ad arrivare in  $\hat{s}_-$ , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in  $s_0$  con stessa velocità  $v_0$  dopo un tempo  $\tau$ : da qui in poi il moto si riproduce *identico* essendosi verificate nuovamente, al tempo  $\tau$ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo  $t = 0$ . Il periodo quindi è

$$\tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx - \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx. \quad \square$$

**Esercizio 1.1** — Un punto materiale di massa  $m$  si muove lungo una guida liscia fissa  $\gamma$  ed è soggetto ad un potenziale lungo la guida nella forma  $V(s) = s^{2n}$ . Supponendo che il punto inizi a muoversi per  $t = 0$  da  $s(0) = 0$  con energia meccanica  $E > 0$ , si dimostri che il periodo non dipende da  $E$  se e solo se  $n = 1$ : si calcoli l'espressione del periodo in questo caso speciale. [ $\tau = \sqrt{2m\pi}$ ]

**2.2. Piano delle fasi.** Nella forma  $m\ddot{s} = f(t, s, \dot{s})$ , l'equazione del moto equivale ad una coppia di equazioni del primo ordine in uno spazio bidimensionale; ovvero, rinominando  $x$  la variabile  $s$  ed indicando con  $y = \dot{s}$ , possiamo scrivere

$$\dot{y} = \frac{1}{m} f(t, x, y), \quad \dot{x} = y.$$

DEFINIZIONE 2.2. Il piano  $\mathbb{R}^2$  in cui varia la coppia  $\mathbf{z} := (x, y)$  prende il nome di *piano delle fasi*. Su di esso, è definito il campo vettoriale  $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $(t, \mathbf{z}) \mapsto (y, \frac{1}{m}f(t, x, y))$ , le cui curve integrali, ovvero le curve  $\mathbf{z}(t)$  soluzioni dell'equazione  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z})$ , sono dette *curve di fase del sistema*. L'operatore  $\mathbf{g}^t$  che associa ad un certo punto del piano delle fasi  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  il punto  $\mathbf{z}(t)$  ottenuto per mezzo dell'evoluzione indotta da  $\mathbf{f}$  è detto *flusso di fase* del sistema ed agisce come

$$\mathbf{g}^t: \mathbf{z}_0 \mapsto \mathbf{z}(t) = \mathbf{g}^t \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0.$$

Un *punto* nel piano delle fasi  $\mathbf{z} = (x, y)$  corrisponde quindi ad uno stato cinematico del punto materiale, ovvero alla sua posizione e alla sua velocità.

DEFINIZIONE 2.3. Un punto  $(x_0, 0)$  si dice *di equilibrio* se il flusso di fase associato si riduce al punto stesso, ovvero  $\mathbf{g}^t(x_0, 0) = (x_0, 0) \forall t > 0$ .

Se  $f \equiv f(s)$  le equazioni del moto implicano, come abbiamo visto, la conservazione dell'energia  $E(s, \dot{s}) := \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s)$ , dove come sopra  $-V'(s) = f(s)$ , pertanto le curve di fase sono *isoenergetiche*, ovvero  $E(x, y)$  non cambia lungo una curva di fase: fissato  $e \in \mathbb{R}$ , l'insieme di livello

$$\mathcal{M}(e) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) := \frac{1}{2}my^2 + V(x) = e \right\}$$

contiene le curve di fase di energia  $e$ . L'insieme  $\mathcal{M}(e)$  è in generale costituito da diverse componenti connesse, la cui regolarità è garantita se  $\nabla E(x, y) = (V'(x), my) \neq \mathbf{0}$  in ogni loro punto.

**Esercizio 1.2** — Dimostrare che la condizione  $E(x, y) := \frac{1}{2}my^2 + V(x) = e$  individua una curva regolare in un intorno di  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{M}(e)$  se  $\nabla E(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ .

*Soluzione.* — Assumiamo per esempio che  $\partial_x E(x_0, y_0) = V'(x_0) \neq 0$ . Il teorema della funzione implicita garantisce che esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  in cui si può trovare una funzione  $f$  di modo che  $E(x, f(x)) = e$  in tale intorno. Similmente se  $\partial_y E(x_0, y_0) = y_0 \neq 0$  esiste una funzione  $g$  in un intorno  $J$  di  $y_0$  tale

che  $E(g(y), y) = e$  in tale intorno. Ciò significa che, a seconda delle circostanze, possiamo localmente parametrizzare  $\mathcal{M}(e)$  come una curva  $\gamma(t) = (t, f(t))$  con  $t \in I$  o  $\gamma(t) = (g(t), t)$ , con  $t \in J$ . In entrambi i casi il vettore tangente non è mai nullo, avendo sempre una componente uguale ad 1.

La condizione di punto di equilibrio nel caso di forze posizionali *equivale* a richiedere che  $V'(x_0) = 0$ , ovvero che  $x_0$  sia un punto stazionario del potenziale: in virtù del teorema di Cauchy, infatti, la condizione iniziale  $(x_0, 0)$  non può che evolvere in se stessa se  $V'(x_0) = 0$ . I punti di equilibrio quindi sono proprio i punti *critici*, ovvero i punti in cui  $\nabla E(x, y) = \mathbf{0}$  e la regolarità di  $\mathcal{M}(e)$  viene meno.

2.2.1. *Stabilità.* Per classificare i punti critici, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4. Un punto del piano delle fasi  $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$  si dice *di equilibrio stabile secondo Lyapunov* se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  per cui, denotato  $\mathbf{z} = (x, y)$  si ha che

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Il punto si dice *asintoticamente stabile* se esiste  $\delta > 0$  tale per cui

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0.$$

L'insieme  $\mathcal{B}(\mathbf{z}_0) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0\}$  è detto *bacino di attrazione* di  $\mathbf{z}_0$ . Un punto non stabile si dice infine *instabile*.

In altre parole, un punto è stabile secondo Lyapunov se, avviando il moto in prossimità di tale punto nel piano delle fasi, non ce ne si allontana mai.

Se la forza in gioco è *posizionale* allora vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.2. Si assuma  $V$  funzione di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  in un intorno di  $x_0$ , punto di minimo relativo isolato di  $V$ ; allora  $x_0$  è un punto di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un qualunque intorno  $I$  di  $\mathbf{z}_0 := (x_0, 0)$ , e osservando che  $E(x_0, 0) = V(x_0)$  valore del potenziale nel punto di minimo relativo isolato, sia

$$J_\delta(\mathbf{z}_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) < V(x_0) + \delta\}.$$

Ovviamente  $\mathbf{z}_0 \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$ . L'insieme  $J_\delta(\mathbf{z}_0)$  ha come caratteristica il fatto che, per via della conservazione dell'energia meccanica, se  $\mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$  allora  $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0) \forall t > 0$ . In questo insieme potremo isolare la componente connessa contenente  $\mathbf{z}_0$ , sia essa  $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$ . Esso è limitata: nella direzione  $y$ , dovrà essere  $y^2 < \frac{2}{m}(V(x_0) - V(x) + \delta) \leq \frac{2}{m}\delta$ ; analogamente  $V(x) < V(x_0) + \delta$  implica che per un  $\mathbf{z} = (x, y) \in \hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$  e  $\delta$  sufficientemente piccolo, si ha  $\frac{1}{2}V''(\xi)(x - x_0)^2 < \delta$  per un qualche  $\xi \in (x_0, x)$  e con  $V''(\xi) > 0$ , ovvero  $(x - x_0)^2 < \frac{2\delta}{V''(\xi)}$ . È possibile quindi trovare  $\delta$  tale che  $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$  è in  $I$ : essendo  $\hat{J}_\delta$  invariante sotto  $\mathbf{g}^t$  per via della conservazione dell'energia — ovvero tutte le traiettorie che iniziano in essa non ne usciranno mai — la definizione di punto stabile secondo Lyapunov è soddisfatta.  $\square$

**Esempio 1.3** — Si noti che se un punto è di equilibrio stabile secondo Lyapunov non è necessariamente un punto di minimo relativo dell'energia potenziale: questo si vede facilmente ammettendo che  $V(x)$  sia non analitica in un qualche suo punto. Supponiamo, per esempio, di avere un punto materiale di massa unitaria in moto nel potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

L'energia potenziale considerata non ammette una espansione in serie in un intorno di  $x_0 = 0$ , e tale punto non è di minimo relativo per  $V(x)$ , dato che per ogni  $\delta > 0$  esiste un  $x \neq 0$  con  $|x| < \delta$  e tale che  $V(x) < 0$ . Tuttavia,  $x_0$  è di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Supponiamo infatti che il sistema

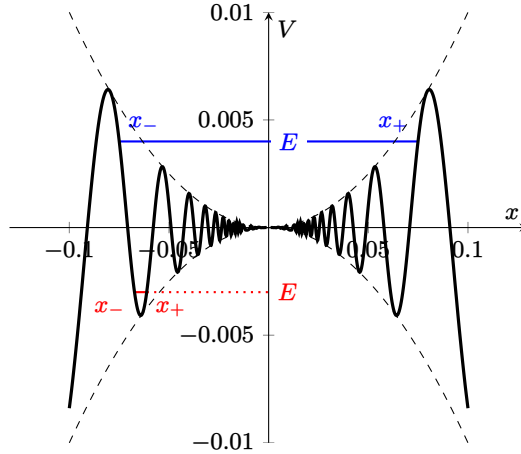


FIGURA 1. Potenziale nell'Esempio 1.3 e due intervalli ammessi per il moto per diversi valori di  $E$ .

abbia energia positiva,  $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E > 0$ . Possiamo individuare due punti di inversione  $x_{\pm}(E)$ , di modo che il moto avvenga sempre nell'intervallo  $[x_-(E), x_+(E)]$  (vedasi Fig. 1) con  $|x_{\pm}(E)| \rightarrow 0$  per  $E \rightarrow 0^+$ . Inoltre, in tale intervallo,  $V(x) > -E$  e quindi  $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) > \frac{1}{2}y^2 - E \Rightarrow |y| < \sqrt{2E}$ . La misura dell'intorno nel piano delle fasi in cui avviene il moto,  $[x_-(E), x_+(E)] \times [-\sqrt{2E}, \sqrt{2E}]$ , può quindi essere resa piccola a piacere. Un ragionamento analogo può essere fatto per  $E < 0$ , dove un intervallo arbitrariamente vicino all'origine può essere scelto di modo che il suo corrispondente intervallo nel piano delle fasi sia arbitrariamente piccolo per  $E \rightarrow 0^-$ . Di conseguenza,  $x = 0$  è una posizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

**DEFINIZIONE 2.5.** Nel caso di moto unidimensionale soggetto a forza posizionale, un insieme  $\mathcal{M}(e)$  contenente un punto critico instabile si dice *curva separatrice*.

Una separatrice è per costruzione data dall'unione dei punti di equilibrio instabili e da curve connesse che esprimono traiettorie di moto che tendono asintoticamente ai detti punti di equilibrio instabile, senza mai raggiungerli. Un punto critico  $(x_0, 0)$  è infatti in corrispondenza con uno zero multiplo di  $\Phi(x)$ , essendo  $\Phi(x_0) = 0$  per via della condizione  $y = 0$ , e dovendo essere  $V'(x_0) = -\frac{m}{2}\Phi'(x_0) = 0$ .

**Esempio 1.4** — Consideriamo il moto di un punto materiale di massa  $m = 1$  nella forma  $\ddot{s} = -s$ , corrispondente all'equazione fondamentale delle oscillazioni. Si tratta di una legge associata all'energia meccanica

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2,$$

che si conserva essendo la forza posizionale e associabile al potenziale  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$ . Gli insiemi di livello del problema sono semplici circonferenze nel piano delle fasi, dove è definito il vettore  $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$  nella notazione già introdotta, vedasi Fig. 2. Esiste un unico punto di equilibrio stabile, corrispondente a  $(x, y) = (0, 0)$ , senza alcuna separatrice.

**Esempio 1.5** — A titolo esemplificativo, consideriamo un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto al potenziale  $V(s) = s^2(s^2 - 1)$  in moto su una curva con  $s \in \mathbb{R}$ . In Fig. 3 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale  $E$ .

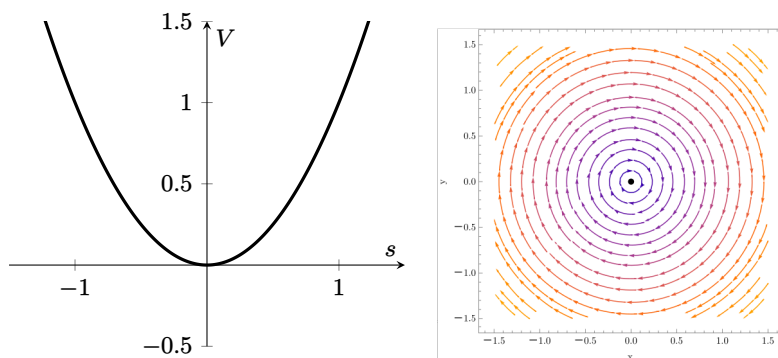


FIGURA 2. Potenziale e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase relativo all'esempio 1.4.

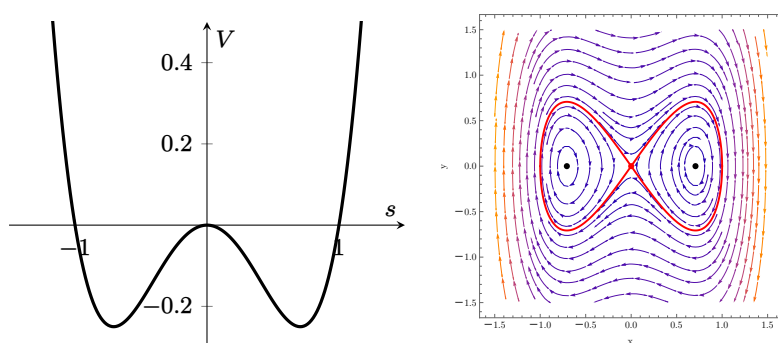


FIGURA 3. Potenziale nell'Esempio 1.5 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa  $m = 1$ .

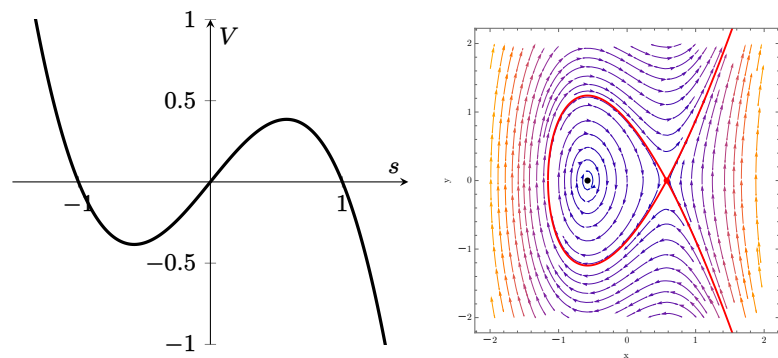


FIGURA 4. Potenziale nell'Esempio 1.6 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa  $m = 1$ .

**Esempio 1.6** — Consideriamo un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto al potenziale  $V(s) = s(1 - s^2)$ . In Fig. 4 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale  $E$ .

**Esercizio 1.3** — Sia  $A(E)$  l'area di una curva di fase chiusa in un sistema conservativo corrispondente ad un valore  $E$  dell'energia meccanica. Si dimostri che il periodo  $\tau$  del moto corrispondente è  $\tau = A'(E)$ .

**2.3. Pendolo.** Il *pendolo semplice* è un dispositivo meccanico che consiste di un punto materiale di massa  $m$  vincolato, tramite vincolo olonomo liscio e fisso, a muoversi su una circonferenza di raggio  $\ell$  in un piano verticale. Il moto è soggetto alla forza di gravità di modo che, indicando con  $\theta \in (-\pi, \pi]$  *a meno di periodicità* la deviazione dalla verticale del dispositivo, il potenziale a cui è soggetto il punto materiale è  $V(\theta) = -mg\ell \cos \theta$ , con  $g$  accelerazione di gravità, e l'energia meccanica, conservata, abbia l'espressione

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

a meno di una costante additiva arbitraria. L'equazione del moto è così

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Si noti che, invece di utilizzare  $s = \ell\theta$ , ascissa curvilinea lungo la circonferenza, stiamo qui utilizzando direttamente come variabile fondamentale l'angolo  $\theta$ : in questa parametrizzazione il moto corrisponde a quello di un punto materiale di massa unitaria che si muove sotto l'azione di un potenziale  $\hat{V}(\theta) = \frac{1}{m\ell^2}V(\theta) = -\frac{g}{\ell} \cos \theta$ . Si tratta di un sistema autonomo che sviluppa il suo moto su una curva, e può quindi essere analizzato con le tecniche discusse sopra. Indicando con

$$e := \frac{E}{mg\ell}, \quad \tau^2 := \frac{\ell}{g}$$

possiamo anzitutto scrivere, dall'equazione per l'energia,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + e) \equiv \Phi(\theta),$$

che richiede  $e \geq -1$  per aver senso. Al variare di  $e$  possono distinguersi diversi tipi di moto. È utile visualizzare queste traiettorie nel piano delle fasi  $(x, y) = (\theta, \dot{\theta})$  da intendersi con condizioni periodiche in  $\theta$ , che quindi in questo caso è  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , ovvero un *cilindro* infinito.

Se  $e > 1$ , allora  $\Phi(\theta)$  non ammette zeri e il moto consiste di *rotazioni* lungo l'intera circonferenza ammessa: in questo regime, le traiettorie nel piano delle fasi si avvolgono infatti attorno al cilindro.

Se invece  $|e| < 1$ ,  $\Phi(e)$  ammette degli zeri: in questo caso il moto è periodico e il moto consiste di *oscillazioni*. Le traiettorie non si avvolgono attorno al cilindro e (a differenza del caso  $e > 1$ ) possono essere deformate con continuità in un punto, corrispondente all'unica soluzione di equilibrio *stabile*  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ , corrispondente ad un punto di minimo relativo isolato del potenziale.

Il caso  $e = 1$  è marginale: l'equazione

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + 1)$$

identifica la *separatrice* nel piano delle fasi che delimitano i due diversi regimi: essa passa infatti per l'unica soluzione di equilibrio *instabile*,  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ . Il caso  $e = -1$  invece ammette come uniche possibili soluzioni le soluzioni di equilibrio stabile e instabile.

**Esercizio 1.4** — Si integri l'equazione del moto lungo la separatrice, ovvero per  $e = 1$ .

*Soluzione.* — Dal fatto che  $2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ , l'equazione del moto si può riscrivere

$$\dot{\theta}^2 = 4\frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\tau^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\dot{\theta}}{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 = \frac{4}{\tau^2},$$



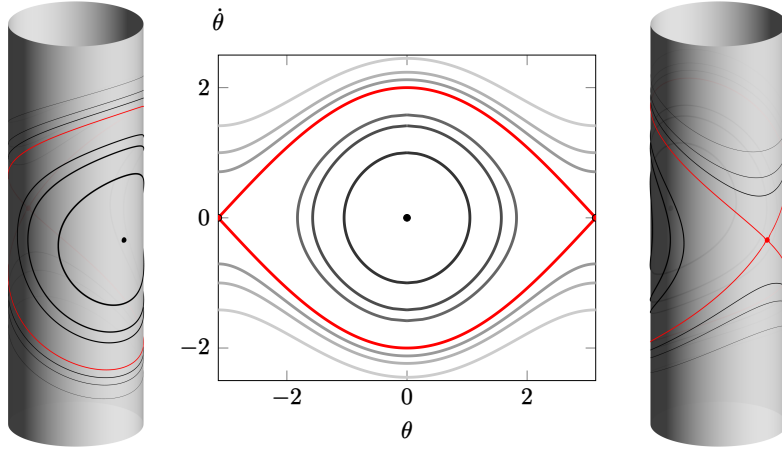


FIGURA 5. Piano delle fasi del pendolo con  $\tau = 1$ . Sono visualizzate le traiettorie per diversi valori di  $e$ , inclusa la separatrice ( $e = 1$ , linea rossa) e i due punti critici stabile (nero) e instabile (rosso).

dove abbiamo introdotto  $u = \sin \frac{\theta}{2}$  assumendo  $u \neq 1$ . L'equazione si integra direttamente su  $u \in (-1, 1)$ : assumendo come istante di tempo iniziale  $t = 0$  e che in tale istante  $u(0) = 0$  (ovvero  $\theta = 0$ ) e  $\dot{u}(0) > 0$ , avremo

$$\frac{t}{\tau} = \int_0^u \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{atanh} u \Rightarrow u(t) = \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Si noti che non abbiamo imposto il modulo della *velocità* iniziale: questo è dovuto al fatto che abbiamo risolto le equazioni ad energia fissa, per cui la velocità iniziale è automaticamente fissata *in modulo*, una volta dato  $u(0)$ , dalla condizione  $e = 1$ . Si noti inoltre che il valore  $u = 1$ , corrispondente alla configurazione di equilibrio instabile, viene raggiunto solo asintoticamente per  $t \rightarrow +\infty$ .

**2.4. Piccole oscillazioni.** Il caso del pendolo semplice mostra che anche i sistemi più elementari possono presentare complesse equazioni differenziali da risolvere. Lo studio di un sistema unidimensionale autonomo in prossimità di un punto  $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$  di equilibrio nel piano delle fasi può essere però effettuato in una certa generalità in approssimazione di *piccole oscillazioni*. Assumiamo che il potenziale a cui il sistema è soggetto sia analitico in un suo punto di equilibrio isolato  $x_0$  e che  $V''(x_0) \neq 0$ . Introduciamo la variabile  $\xi := x - x_0$ , di modo che il sistema di equazioni da studiare possa scriversi come

$$\dot{\xi} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m} V'(x_0 + \xi).$$

Essendo  $x_0$  di equilibrio, espandendo in serie di potenze la seconda equazione si ha

$$\dot{y} = -\frac{1}{m} V''(x_0) \xi + o(\xi).$$

Trascurando gli ordini superiori al primo e introducendo

$$\omega^2 := \frac{1}{m} |V''(x_0)|, \quad \sigma := \operatorname{sign}(V''(x_0)) \in \{-1, 1\}$$

l'equazione assume la formula molto semplice

$$\ddot{\xi} + \sigma \omega^2 \xi = 0,$$

che descrive un cosiddetto *oscillatore armonico* se il punto è di equilibrio *stabile*, ovvero  $\sigma > 0$ . Essa ha soluzioni

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi(0) \cos(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sin(\omega t) & \text{se } V''(x_0) > 0 \\ \xi(0) \cosh(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sinh(\omega t) & \text{se } V''(x_0) < 0. \end{cases}$$

In altre parole, le traiettorie corrispondenti nel piano delle fasi sono ellissi o iperboli a seconda che il punto sia di equilibrio stabile o instabile rispettivamente. Nel caso di oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile, ovvero tale per cui  $V''(x_0) > 0$ , la soluzione è *periodica* di periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

In un pendolo, ad esempio, essendo il punto di equilibrio stabile  $\theta = 0$  e  $\hat{V}''(0) = \frac{g}{\ell}$ , si ritrova la cosiddetta *legge dell'isocronia del pendolo*

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

indipendente dalla massa del punto materiale.

È importante osservare che l'analisi delle piccole oscillazioni è stata fatta nell'ipotesi di *piccole deviazioni* dalla posizione di equilibrio, ed è quindi una soluzione approssimata potenzialmente molto lontana dalla soluzione corretta quando  $\xi$  assume valori troppo grandi.

**Esempio 1.7** (Moto armonico smorzato e forzato) — In molte applicazioni occorre considerare, nello studio di un moto armonico attorno ad un punto di equilibrio stabile, la presenza di una forza aggiuntiva che agisce sul punto materiale  $P$  di traiettoria  $\mathbf{x}$  tentando di frenarne il moto: tale forza esprime la *resistenza del mezzo* ed è tipicamente nella forma  $\mathbf{F}_v = -\eta \dot{\mathbf{x}}$ , con  $\eta > 0$ , di modo che la forza frenante è tanto più intensa quanto più grande è la velocità del corpo. In aggiunta alla forza di richiamo e alla forza dissipativa, è possibile anche includere la presenza di una certa *forzante* esterna  $\mathbf{F}(t)$  nella direzione del moto. Assumeremo in particolare che, detto  $\hat{\mathbf{t}}$  il versore tangente alla traiettoria di  $P$ ,  $\mathbf{F}(t) = F \cos(\omega_* t + \phi_0) \hat{\mathbf{t}}$ , per una certa terna di valori reali  $F, \omega_*, \phi_0 \in \mathbb{R}$ .

Dati i nuovi contributi, l'equazione per  $\xi$  assume la forma

$$(1.6) \quad \ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{F}{m} \cos(\omega_* t + \phi_0),$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{s} \hat{\mathbf{t}} = \dot{\xi} \hat{\mathbf{t}}$ , e si è ridefinito  $\beta := \frac{\eta}{2m}$ . Data la natura periodica della forzante, possiamo convertire il problema in una equazione differenziale per la funzione complessa  $z$ , che soddisfa l'equazione

$$\ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \omega^2 z = \frac{F}{m} e^{i(\omega_* t + \phi)}$$

di cui prenderemo la parte reale come soluzione. La procedura da applicare è standard: si cerca anzitutto una soluzione generica dell'equazione omogenea, nella forma  $z_0(t) = e^{\lambda t}$ . Sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale, otteniamo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \hat{\omega}, \quad \text{dove} \quad \hat{\omega} := \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Si ha così che la soluzione dell'equazione omogenea ha la forma

$$z_0(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \hat{\omega} = 0. \end{cases}$$

Nella formula precedente compaiono le due costanti  $\alpha_{\pm}$ , che andranno fissate imponendo le condizioni iniziali. Dobbiamo ora cercare una soluzione particolare  $z_p$  al problema. Un *ansatz* possibile è  $z_p(t) = b e^{i\omega_* t}$  per un qualche  $b \in \mathbb{C}$ . Inserendo questo *ansatz* nell'equazione si trova che in effetti essa è soddisfatta scegliendo

$$b = \frac{F}{m} \frac{e^{i\phi_0}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2}.$$

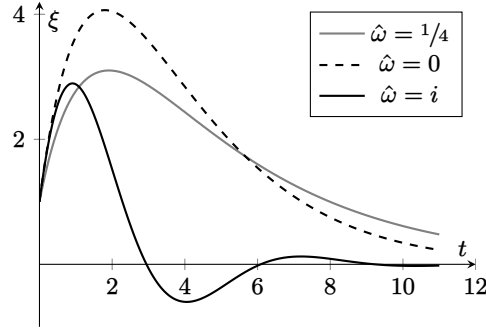


FIGURA 6. Evoluzione di  $\xi$  in un generico moto armonico smorzato (senza forzante) con stesse condizioni iniziali ma diversi parametri  $\beta$  e  $\hat{\omega}$ .

La nostra soluzione generale è quindi

$$z(t) = \frac{F}{m} \frac{e^{i(\omega_* t + \phi_0)}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2} + \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \text{se } \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \text{se } \hat{\omega} = 0, \end{cases}$$

Per semplificare i nostri calcoli e la nostra analisi, consideriamo anzitutto il caso  $F = 0$ , ovvero rimuoviamo la forzante e assumiamo ci sia solo dissipazione. Analizziamo i diversi casi separatamente, con generiche condizioni iniziali  $\xi(0) =: \xi_0$  e  $\dot{\xi}(0) =: v_0$  *non entrambi nulli* (diversamente, il punto rimane in quiete nel suo punto di equilibrio stabile), avendo assunto come istante iniziale  $t = 0$ .

**$\beta > \omega$ :** Supponiamo inizialmente  $\hat{\omega} > 0$  reale. In questo caso, essendo  $\hat{\omega} < \beta$ , il moto è tale che  $\xi(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  monotonicamente, ovvero la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile. Imponendo le condizioni iniziali, si trova che

$$\alpha_+ + \alpha_- = \xi_0, \quad \alpha_+ (\hat{\omega} - \beta) - \alpha_- (\hat{\omega} + \beta) = v_0 \Rightarrow \xi(t) = e^{-\beta t} \left( \xi_0 \cosh \hat{\omega} t + \frac{v_0 + \beta \xi_0}{\hat{\omega}} \sinh \hat{\omega} t \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio  $\xi = 0$  per tempi  $t > 0$  che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega} \xi_0 \cosh \hat{\omega} t + (v_0 + \beta \xi_0) \sinh \hat{\omega} t = 0$$

Se  $v_0 \neq -\beta \xi_0$ , questa equazione ammette un'unica soluzione

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}} \operatorname{arctanh} \frac{\hat{\omega} \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \quad \text{se e solo se} \quad -1 < \frac{\xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \leq 0.$$

In tutti gli altri casi, non esiste soluzione all'equazione e il sistema non passa mai dal punto di equilibrio.

**$\beta = \omega$ :** Se  $\beta = \omega$ , il moto è detto *criticamente smorzato* e la soluzione generale del problema, una volta imposte le condizioni iniziali, ha la forma

$$\xi(t) = e^{-\beta t} (\xi_0 + (v_0 + \beta \xi_0)t).$$

Se  $\xi_0 > 0$  (rispettivamente,  $\xi_0 < 0$ ) il sistema passa per il punto di equilibrio una sola volta se  $v_0 < -\beta \xi_0$  (rispettivamente,  $v_0 > -\beta \xi_0$ ), diversamente ciò non avviene mai.

**$\beta < \omega$ :** Se  $\hat{\omega} = i\hat{\omega}_0 \equiv i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$  è immaginario puro non nullo,  $\xi(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , ma eseguendo un certo numero di oscillazioni. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\xi(t) = e^{-\beta t} \left( \xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + \frac{v_0 + \beta \xi_0}{\hat{\omega}_0} \sin(\hat{\omega}_0 t) \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio  $\xi = 0$  per tempi  $t$  che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega}_0 \xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + (v_0 + \beta \xi_0) \sin(\hat{\omega}_0 t) = 0.$$

Se  $v_0 = -\beta \xi_0 \neq 0$ , il sistema passerà dal punto di equilibrio per

$$t = \frac{\pi}{2\hat{\omega}_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}_0}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$



FIGURA 7. Esempio di battimenti.

Diversamente, il sistema passa dalla posizione di equilibrio negli infiniti istanti di tempo tali che

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}} \arctan \frac{\hat{\omega}_0 \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}_0 & \text{se } \frac{\xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \leq 0, \\ n \in \mathbb{N} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il caso dell'oscillatore armonico puro si recupera per  $\beta = 0$ : in tal caso  $\hat{\omega}_0 = \omega$ .

Nel caso in cui sia presente una forzante, il contributo della soluzione omogenea al variare del campo in cui vive  $\hat{\omega}$  rimane *smorzato* finantoché  $\beta \neq 0$  e diventa trascurabile rispetto al contributo forzante per  $t \gg 0$ , che invece non decade e rimane oscillante. Per  $t \gg 0$  si trova perciò che la soluzione ha la forma

$$\xi(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_*^2)^2 + 4\beta^2 \omega_*^2}} \cos\left(\omega_* t + \phi_0 + \arctan \frac{2\beta \omega_*}{\omega_*^2 - \omega^2}\right) + \text{termini esponenzialmente soppressi.}$$

Il termine forzante, dominante per  $t \gg 0$ , è indipendente dalle precise condizioni iniziali ma mantiene una dipendenza dalla frequenza propria  $\omega$  del sistema. L'ampiezza del termine forzante è massima quando

$$\omega_* = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \quad \text{purché} \quad \omega^2 > 2\beta^2.$$

Questo valore è detto *frequenza di risonanza*.

**Esempio 1.8** (Battimenti) — Il fenomeno dei *battimenti* si verifica quando il moto emerge da una sovrapposizione di due moti oscillatori con frequenze molto vicine, nella forma

$$\xi(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Se  $a = a_1 = a_2$ , possiamo applicare l'identità  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,

$$\xi(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

e osservare che, se  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$ , il primo termine produce una oscillazione di frequenza simile a quella delle due componenti originarie, mentre il secondo fattore manifesta una frequenza molto più bassa, e apparirà come un termine che “modula” il primo contributo su scale temporali più lunghe. Questa circostanza può avvenire quando, per esempio, non si ha contributo smorzante nell'esempio precedente: il contributo della soluzione omogenea è quindi oscillante come quello della soluzione particolare, ma con diverse frequenze che possono però essere molto vicine tra loro.