

INTRODUZIONE ALLA
MECCANICA LAGRANGIANA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

— 5 GENNAIO 2026 —

GABRIELE SICURO



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

PREMESSA. Si raccomandano i seguenti volumi.

V. I. ARNOLD, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 1974.

A. FASANO, S. MARMI, *Meccanica analitica*, Bollati Boringhieri, 2002.

I seguenti possono essere utili per la consultazione complementare.

L. D. LANDAU, *Fisica teorica I. Meccanica*, Editori Riuniti, 1976.

Meriti delle note da darsi alle fonti, errori da assegnarsi all'estensore.

Indice

Capitolo 1. Richiami di meccanica newtoniana	1
1. Spaziotempo galileiano	1
2. Postulati della meccanica	7
3. Cambi di riferimento	14
Capitolo 2. Meccanica lagrangiana	23
1. Le equazioni di Lagrange	23
2. Il moto unidimensionale	34
3. Equilibrio e spazio delle fasi	37
4. Piccole oscillazioni	45
5. Il moto in un campo centrale	50
Capitolo 3. Formulazione variazionale	59
1. Problemi variazionali	59
2. Princípio di Hamilton	62
3. Teorema di Noether e leggi di conservazione	64
Capitolo 4. Meccanica del corpo rigido	69
1. Cinematica del moto rigido	69
2. Aspetti dinamici del moto rigido	73
Appendice A. Richiami matematici	87
1. Richiami sulle curve in \mathbb{R}^n	87

CAPITOLO 1

Richiami di meccanica newtoniana

Non l'ho mai visto concedersi svaghi o passatempi, né cavalcate per prendere aria, né passeggiate, né bowling, né alcun altro tipo di esercizio; riteneva tempo perso ogni ora che non fosse spesa per i suoi studi, ai quali si dedicava con tale costanza da lasciare raramente la sua stanza, se non durante i periodi di lezione, quando teneva lezioni nelle scuole in qualità di Professore Lucasiano. A queste lezioni partecipavano così poche persone, e ancor meno lo comprendevano, che spesso, per mancanza di uditori, sembrava quasi che leggesse alle pareti... Era così concentrato, così serio nei suoi studi, che mangiava pochissimo, anzi, spesso dimenticava del tutto di mangiare, tanto che entrando nella sua stanza trovavo il suo pasto intatto; quando glielo facevo notare, rispondeva: "Davvero?" e poi, avvicinandosi al tavolo, mangiava un paio di bocconi in piedi, e non ricordo di averlo mai visto sedersi a tavola da solo... Andava a letto molto raramente prima delle due o tre del mattino, a volte non prima delle cinque o sei...

Humphrey Newton, assistente di Isaac Newton

1. Spaziotempo galileiano

1.1. Spazi affini. La struttura matematica sottesa a gran parte dell'esposizione che verrà data sarà quella di spazio affine euclideo finito-dimensionale, ovvero uno spazio affine su uno spazio vettoriale reale V dotato di prodotto scalare e di dimensione n finita. Prima di introdurre i concetti fondamentali, presentiamo perciò un brevissimo richiamo del concetto di spazio affine euclideo, che verrà più propriamente discusso e analizzato nei corsi di Geometria.

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio affine). Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Uno spazio affine A su V è un insieme non vuoto i cui elementi si dicono *punti*, e dotato di una applicazione

$$\vec{\bullet}: A \times A \rightarrow V$$

che associa ad ogni coppia ordinata $(P, Q) \in A$ un vettore di V , che indichiamo con \overrightarrow{PQ} . Tale applicazione si dice definire una *struttura di spazio affine* su A . Il vettore \overrightarrow{PQ} si dice avere P come *punto iniziale*, o *di applicazione*, e Q come *punto finale*, in modo che valgano le seguenti due proprietà:

- P1: $\forall P \in A$ e per ogni $v \in V$, esiste unico un punto $Q \in A$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$;
- P2: $\forall P, Q, R \in A$ vale

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lo spazio affine si dice *reale*. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lo spazio affine si dice *complesso*.

La proprietà P2 implica, scegliendo $P = Q = R$, che $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$, vettore nullo di V , per ogni $P \in A$ e, scegliendo $P = R$, che $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ per ogni coppia $P, Q \in A$.

Se la dimensione di V è finita e in particolare $\dim(V) = n$, diremo che A ha dimensione n , scrivendo $\dim(A) = n$. In questo modulo considereremo solo spazi affini di dimensione finita.

Esempio 1.1 (Spazi affini numerici) — Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} : l'operazione $\overrightarrow{vu} := u - v$ permette di definire su V una struttura di spazio affine su se stesso, come si può verificare direttamente. Se in particolare $V \equiv \mathbb{K}^n$, lo spazio affine corrispondente si chiama *spazio affine numerico su \mathbb{K}* e si denota $A^n(\mathbb{K})$.

La proprietà P1 implica che, scegliendo uno speciale punto $O \in A$, si può costruire una corrispondenza biunivoca fra A e V : basta infatti associare $P \in A \mapsto \overrightarrow{OP} \in V$.

DEFINIZIONE 1.2 (Sistema di coordinate affini). Sia A spazio affine su V di dimensione n . Un *sistema di coordinate affini* è dato da un punto $O \in A$, detto *origine*, e una base $\{\hat{e}_k\}_{k=1}^n \subset V$ dello spazio vettoriale. Indicheremo questo sistema di coordinate con $O\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n$.

Dato un sistema di coordinate $O\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n$, possiamo associare biunivocamente ad ogni punto $P \in A$ le sue *coordinate affini* in $(v_k)_{k=1}^n \in \mathbb{K}^n$, potendo univocamente scrivere

$$P \mapsto \overrightarrow{OP} = \sum_{k=1}^n v_k \hat{e}_k.$$

DEFINIZIONE 1.3 (Sottospazio affine). Sia A spazio affine n -dimensionale sul \mathbb{K} -spazio vettoriale V . Sia $Q \in A$ e W sottospazio vettoriale di V . Il sottoinsieme

$$\mathbb{S}(Q, W) := \{P \in A : \overrightarrow{QP} \in W\}$$

è detto sottospazio affine di A per Q parallelo a W . Si dice che W è la *giacitura* di \mathbb{S} e si definisce $\dim(\mathbb{S}) := \dim(W)$.

Dato un sottospazio affine $\mathbb{S}(Q, W)$ di uno spazio affine A di dimensione n , si dice che $\mathbb{S}(Q, W)$ è una retta se $\dim(\mathbb{S}) = 1$, è un piano se $\dim(\mathbb{S}) = 2$, un iperpiano se $\dim(\mathbb{S}) > 2$. Un sottospazio affine $\mathbb{S}(Q, W)$ ha la struttura di spazio affine sulla propria giacitura indotta dalla stessa applicazione $\overrightarrow{\bullet}$ definita su A .

Concludiamo questa prima parte con la seguente

DEFINIZIONE 1.4 (Isomorfismo). Siano V e V' due \mathbb{K} -spazi vettoriali di dimensione n , sia A spazio affine su V e A' spazio affine su V' . Un *isomorfismo affine* Φ è una applicazione biunivoca

$$\Phi: A \rightarrow A'$$

tale che esiste un isomorfismo $L: V \rightarrow V'$ che permette di scrivere, per ogni $P, Q \in A$,

$$\overrightarrow{\Phi(P)\Phi(Q)} = L(\overrightarrow{PQ}).$$

Se un tale isomorfismo tra A e A' esiste, i due spazi affini si dicono *isomorfi*. Un isomorfismo $\Phi: A \rightarrow A'$ è detto *affinità* di A e in questo caso $L: V \rightarrow V'$ è l'automorfismo associato a Φ .

La mappa $\Phi_e: A \rightarrow A^n(\mathbb{K})$ che associa ad un punto P le sue coordinate affini secondo un certo sistema di coordinate affini $O\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n$ è un importante esempio di isomorfismo: ogni spazio affine di dimensione n su un \mathbb{K} -campo vettoriale è perciò isomorfo a $A^n(\mathbb{K})$.

Esercizio 1.1 — Mostrare che Φ_e è effettivamente un isomorfismo.

Esempio 1.2 (Affinità su $A^n(\mathbb{K})$) — Sia $A^n(\mathbb{K})$ uno spazio affine numerico, e sia $\Phi: A^n(\mathbb{K}) \rightarrow A^n(\mathbb{K})$ una affinità associata all'isomorfismo $L: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. Sia $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{c}$. Allora $\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{c} = \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{0}) =$

$\overrightarrow{\Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{0})} = \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{0})$. Se $\mathbf{L} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ è la matrice che rappresenta \mathbf{L} nella base canonica, questo significa che $\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{c} = \mathbf{L}\mathbf{x}$, ovvero l'affinità ha la forma

$$(1.1) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

1.1.1. *Spazi affini euclidei.* Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e supponiamo ora che lo spazio vettoriale \mathbb{V} sia euclideo, ovvero dotato di una operazione di prodotto interno, che indicheremo con

$$\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K},$$

simmetrica definita positiva. In questo caso si dice che uno spazio affine su \mathbb{V} è anch'esso *euclideo*. La struttura euclidea in \mathbb{V} permette di introdurre una *base ortonormale* come un set di n vettori $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^n$ tale che $\mathbb{V} = \mathrm{span}\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_k$ e $\langle \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \delta_{ij}$ per $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Un sistema di coordinate nella forma $O\hat{\mathbf{i}}_1 \dots \hat{\mathbf{i}}_n$, ovvero costruito con una base ortonormale, si dice *sistema di riferimento cartesiano*.

Il prodotto interno induce una norma sullo spazio \mathbb{V} , di modo che detto $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ definiamo la sua norma $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Grazie a questa struttura, possiamo introdurre il concetto di *distanza* $d: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tra due punti di \mathbb{A} come

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}.$$

PROPOSIZIONE 1.1. *La distanza $d: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ introduce delle seguenti proprietà:*

- $\forall P, Q \in \mathbb{A}$, $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;
- $\forall P, Q \in \mathbb{A}$, $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$, $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$.

Le proprietà elencate sono quelle caratterizzanti degli *spazi metrici*, ovvero spazi dotati di una operazione binaria detta appunto distanza che soddisfa precisamente le proprietà elencate nella precedente Proposizione.

ESEMPIO 1.3 (Prodotto scalare canonico) — In uno spazio affine numerico reale $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, il prodotto interno, o *prodotto scalare canonico*, è tale che se $\mathbf{v} = (v_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = (u_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{v}^\top \mathbf{u} = \sum_{k=1}^n v_k u_k \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}.$$

1.2. **Spaziotempo galileiano.** Ci sono vari modi di introdurre lo spaziotempo galileiano in cui si sviluppa la meccanica classica: si tratta di una struttura matematica diversa da quella utilizzata dalla fisica contemporanea, ma tuttavia non banale. Una maniera di procedere è quella di ricorrere al concetto di spazio affine.

DEFINIZIONE 1.5 (Spaziotempo galileiano). Uno spaziotempo galileiano $\mathcal{G} = (\mathbb{A}, \mathbb{V}, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ è una collezione di oggetti matematici costituita da

- uno spazio affine reale quadridimensionale \mathbb{A} sullo spazio vettoriale reale \mathbb{V} ;
- un funzionale lineare non-nullo $\tau: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ che chiamiamo *funzione tempo*;
- un prodotto scalare $\langle \bullet, \bullet \rangle$ su $\mathrm{Ker}(\tau)$.

I punti di \mathbb{A} sono detti *eventi*: se $E_1, E_2 \in \mathbb{A}$, indichiamo come solito $\overrightarrow{E_1 E_2} \in \mathbb{V}$ il vettore associato ad essi dalla struttura affine. La quantità $\tau(\overrightarrow{E_1 E_2}) \in \mathbb{R}$ fornisce un numero reale che

identifichiamo come l'*intervallo di tempo*¹ tra gli eventi E_1 ed E_2 . Due eventi E_1 ed E_2 sono in particolare *simultanei* se $\tau(\overrightarrow{E_1 E_2}) = 0$. Essendo τ una applicazione lineare non nulla, questo nucleo è un sottospazio vettoriale di dimensione 3, essendo $\dim \text{Ker}(\tau) = \dim V - \dim \mathbb{R} = 3$ per il teorema del rango. Inoltre per definizione $\text{Ker}(\tau)$ è dotato di struttura euclidea con prodotto scalare $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Se E_1 ed E_2 sono simultanei, possiamo definire la *distanza*

$$d(E_1, E_2) = \|\overrightarrow{E_1 E_2}\| := \sqrt{\langle \overrightarrow{E_1 E_2}, \overrightarrow{E_1 E_2} \rangle}.$$

Si noti un fatto molto importante: la costruzione è tale che *non ha senso* parlare di distanza tra due eventi non simultanei.

Esempio 1.4 (Spaziotempo galileiano di coordinate) — Un esempio di spaziotempo galileiano è

$$\mathcal{G} = (\mathbb{A}^4(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4, \tau_0, \langle \bullet, \bullet \rangle_0),$$

costruito come segue. Sia $(t, \mathbf{x})^\top \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ un punto-evento, dove $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3$. Detto $E = (t, \mathbf{x})^\top$ e $E' = (t', \mathbf{x}')^\top$, abbiamo visto che

$$(E, E') \mapsto \overrightarrow{EE'} = \begin{pmatrix} t' - t \\ \mathbf{x}' - \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

In questo spaziotempo, l'applicazione tempo $\tau_0: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ agisce (per definizione) come una proiezione, isolando la prima componente del vettore in \mathbb{R}^4 prodotto, per cui

$$\tau_0(\overrightarrow{EE'}) = t' - t,$$

mentre il prodotto scalare su $\text{Ker}(\tau)$ è (di nuovo, per definizione) il prodotto scalare canonico in \mathbb{R}^3 : dato $E = (t, \mathbf{x})^\top \in \mathbb{R}^4$, $E' = (t', \mathbf{x}')^\top \in [e]$ se e solo se $t = t'$, e la distanza tra questi eventi è

$$d(E, E') := \|\overrightarrow{EE'}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x'_i - x_i)^2}.$$

Questo spazio galileiano “canonico” è anche detto *spaziotempo galileiano di coordinate*.

1.2.1. Linee universo. In questo spaziotempo galileiano vivono gli oggetti fondamentali della meccanica, i *punti materiali*. Quello di punto materiale è un concetto primitivo e si può pensare ad esso come un corpo di cui si possono trascurare le dimensioni spaziali che vive nello spaziotempo galileiano. Matematicamente, un punto materiale P corrisponde ad una *linea universo* in \mathbb{A} , che indichiamo con lo stesso simbolo ed è definita come

$$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}.$$

Assumeremo che le linee universo siano sempre *continue* rispetto al loro parametro, ovvero che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \overrightarrow{P(t_0)P(t)} = \mathbf{0} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che nelle assunzioni della nostra costruzione non abbiamo dotato V di una topologia: tuttavia, essendo V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, è noto dalla Geometria che *tutte le norme introdotte su di esso sono equivalenti*, per cui è possibile immaginare V dotato di una qualsivoglia norma e definire rispetto ad essa una topologia e quindi il concetto di limite. Vogliamo infine che la linea temporale sia parametrizzata proprio da ciò che chiamiamo tempo,

¹Nella scelta di τ c'è, implicita, una arbitraria scelta della *scala* di misura del tempo, che qui non investighiamo, ma che non cambia la natura di $\text{Ker}(\tau)$.

ovvero che se sono dati $P(t+h)$ e $P(t)$ lungo la linea universo, essi distano un tempo h : ciò significa che richiediamo che $\tau(\overrightarrow{P(t)P(t+h)}) = h \forall t, h$, o in altre parole

$$\tau(\dot{P}(t)) = 1 \quad \forall t, \quad \text{dove } \dot{P}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{P(t)P(t+h)}}{h} \in \mathbb{V}.$$

1.2.2. Isomorfismi galileiani e riferimenti. Un isomorfismo tra *spazi tempi galileiani* è qualcosa di più sofisticato di un semplice isomorfismo tra spazi affini, dato che richiede di preservare la struttura galileiana.

DEFINIZIONE 1.6 (Isomorfismo galileiano). Siano $\mathcal{G} = (\mathbb{A}, \mathbb{V}, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ e $\mathcal{G}' = (\mathbb{A}', \mathbb{V}', \tau', \langle \bullet, \bullet \rangle)$ due spazi tempi galileiani. Un isomorfismo tra essi è un isomorfismo affine $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ con associato isomorfismo lineare $\mathbf{L}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ tale che valgono le seguenti proprietà:

- \mathbf{L} preserva gli intervalli temporali, ovvero

$$\tau' \circ \mathbf{L} = \tau$$

(e quindi $\mathbf{L}(\text{Ker}(\tau)) = \text{Ker}(\tau')$);

- \mathbf{L} preserva il prodotto interno, ovvero

$$(\mathbf{L}(\mathbf{v}), \mathbf{L}(\mathbf{w})) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Ker}(\tau).$$

Siamo in particolare interessati a isomorfismi galileiani tra lo spaziotempo “fisico”, che supponiamo avere struttura galileiana, $\mathcal{G} = (\mathbb{A}, \mathbb{V}, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$, e lo spaziotempo galileiano di coordinate che abbiamo introdotto sopra, sia $\mathcal{G}' = (\mathbb{A}^4(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4, \tau_0, \langle \bullet, \bullet \rangle_0)$ (in cui τ_0 è la proiezione sulla prima componente di un vettore in \mathbb{R}^4 e $\langle \bullet, \bullet \rangle_0$ è il prodotto scalare canonico), che ci permette di operare con gli strumenti dell’analisi. Questo isomorfismo può essere costruito scegliendo un *sistema di riferimento*, ovvero un *evento origine* O e una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3\}$ in $\text{Ker}(\tau)$ integrata da un vettore \mathbf{j} tale che $\tau(\mathbf{j}) = 1$ (quindi non in $\text{Ker}(\tau)$) in modo che $\{\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3, \mathbf{j}\}$ sia una base di \mathbb{V} : a meno di diversa indicazione, *assumeremo la base in $\text{Ker}(\tau)$ tale che $\hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}}_2$* . La scelta di un evento origine O permette di definire le *fette temporali*

$$\Sigma_t := \{E \in \mathbb{A}: \tau(\overrightarrow{OE}) = t\}$$

che partizionano \mathbb{A} . Per via della Definizione 1.3, Σ_t è un sottospazio affine di dimensione 3 con giacitura $\text{Ker}(\tau)$: essendo inoltre questo spazio vettoriale dotato di prodotto interno definito positivo, Σ_t è più precisamente *uno spazio euclideo tridimensionale*. All’evento O possiamo associare una *linea universo canonica* $O(t)$ come

$$O(t) = O + t\mathbf{j},$$

in modo che $\tau(\overrightarrow{OO(t)}) = t$, e che la proiezione di $\overrightarrow{OO(t)}$ su $\text{Ker}(\tau)$ sia sempre il vettore nullo, ovvero in simboli

$$\text{Proj}_{\text{Ker}(\tau)}(\overrightarrow{OO(t)}) = \mathbf{0}.$$

Indicheremo questo sistema di riferimento con $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$. Ogni evento $E \in \mathbb{A}$ è tale che ad esso sono associati un tempo t e una posizione \mathbf{x}_E ,

$$t = \tau(\overrightarrow{OE}), \quad \mathbf{x}_E := \text{Proj}_{\text{Ker}(\tau)}(\overrightarrow{OE}) = \sum_{k=1}^3 x_k \hat{\mathbf{i}}_k,$$

dove $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1}^3 \in \mathbb{R}^3$ sono le coordinate cartesiane dell’evento. In questo modo, all’evento E si associa

$$\Phi(E) = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R}).$$

Detto $E' \in \mathbb{A}$ un secondo evento tale che $\Phi(E') = (\begin{smallmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{smallmatrix}) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, questo isomorfismo è associato all'applicazione

$$\mathbf{L}(\overrightarrow{EE'}) = \begin{pmatrix} t' - t \\ \mathbf{x}' - \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

che opera come desiderato (si provi a dimostrarlo). L'isomorfismo $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ introduce perciò un *riferimento di coordinate*, mappando lo spaziotempo galileiano generico in uno spazio-tempo di coordinate. Le linee universo possono naturalmente anch'esse essere espresse in questo sistema di riferimento: una linea universo P , parametrizzata in modo che $\tau(\overrightarrow{OP(0)}) = 0$, viene associata ad una *traiettoria*

$$\mathbf{x}_P(t) = \text{Proj}_{\text{Ker}(\tau)}(\overrightarrow{OP(t)}) = \overrightarrow{O(t)P(t)} = \sum_{k=1}^3 x_k(t) \hat{\mathbf{i}}_k.$$

Si definiscono, in corrispondenza, due quantità di interesse, ovvero la *velocità* del punto materiale P ,

$$\dot{\mathbf{x}}_P(t) := \sum_{k=1}^3 \frac{d x_k(t)}{dt} \hat{\mathbf{i}}_k,$$

e l'*accelerazione*

$$\ddot{\mathbf{x}}_P(t) := \sum_{k=1}^3 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} \hat{\mathbf{i}}_k.$$

Formalmente, $\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P, \ddot{\mathbf{x}}_P \in \text{Ker}(\tau)$: questi oggetti *non* dipendono dalla specifica base $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$ scelta in $\text{Ker}(\tau)$, ma le loro coordinate naturalmente sì.

Anche assumendo che esista un unico spaziotempo fisico (e che abbia la struttura che ipotizziamo sopra) la scelta di un riferimento di coordinate non è univoca: dati due isomorfismi $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ e $\hat{\Phi}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, la composizione

$$\Psi := \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}: \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$$

deve anche essa comportarsi da isomorfismo galileiano. Pittorialmente

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A} & \\ & \swarrow \Phi \quad \searrow \hat{\Phi} & \\ \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\Psi := \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}} & \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \end{array}$$

Vediamo più in dettaglio cosa questo comporta. Siano dati due eventi E_1 ed E_2 di \mathbb{A} , che possiamo immaginare come lo “spaziotempo fisico”. Indichiamo $\Phi(E_i) = (t_i, \mathbf{x}_i)^\top$ e $\hat{\Phi}(E_i) = (\hat{t}_i, \hat{\mathbf{x}}_i)^\top$, $i = 1, 2$, le corrispondenti immagini in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ secondo due riferimenti di coordinate. La mappa $\Psi = \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ deve essere una trasformazione affine, quindi genericamente nella forma in Eq. (1.1), che scriviamo

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + t_0 \\ \mathbf{v}t + \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}$$

per due scalari $a, t_0 \in \mathbb{R}$, tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ e una matrice $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ di qualche tipo. Inoltre, essa stessa deve essere un isomorfismo galileiano, dato che permette di passare da uno spaziotempo galileiano ad un altro, e dunque, perché la struttura galileiana sia preservata, dovrà valere²

$$t_2 - t_1 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1 = a(t_2 - t_1) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle, \quad \text{se } \tau(\overrightarrow{E_1 E_2}) = 0 \quad \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1\| = \|\mathbf{R}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|.$$

²Nel seguito faremo riferimento ad una rappresentazione nello spaziotempo di coordinate, e ometteremo il pedice nell'espressione $\langle \bullet, \bullet \rangle_0$ scrivendo semplicemente $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{v}^\top \mathbf{u}$ per il prodotto canonico tra due vettori di \mathbb{R}^3 . Similmente, utilizzeremo $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^\top \mathbf{v}$.

Le uguaglianze sono realizzate per qualsivoglia coppia di eventi se $a = 1$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} \in O(3)$, e per qualsivoglia scelta di t_0 e \mathbf{x}_0 , ovvero se la trasformazione Ψ ha la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, t_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{R} \in O(3).$$

In altre parole, Ψ è esprimibile come una composizione delle seguenti trasformazioni:

Rotazione della componente spaziale: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{R}\mathbf{x})$ per qualche $\mathbf{R} \in O(3)$.

Boost galileiano: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t)$ per qualche $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Traslazione dell'origine: $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t + t_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$ per un dato $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Si noti che la rotazione della componente spaziale avviene per mezzo di una matrice ortogonale, per cui $\det \mathbf{R} = \pm 1$. Si tratta di una matrice che trasforma vettori in vettori mantenendone le lunghezze, ma con la possibilità di *invertirne l'orientamento*: tale inversione avviene se $\det \mathbf{R} = -1$. Come si verifica facilmente l'insieme di trasformazioni del tipo sopra è un *gruppo*, detto *di Galilei*. Da un computo del numero di parametri necessari per specificare ciascuna delle trasformazioni elencate, risulta che sono in generale necessari 10 parametri, più eventualmente una operazione discreta di *parità*, ovvero di riflessione di un asse:

- 3 parametri per specificare una matrice in $SO(3)$, più una inversione se $\mathbf{R} \in O(3) \setminus SO(3)$;
- 3 parametri per specificare \mathbf{v} in un *boost* galileiano;
- 1 + 3 parametri per specificare una traslazione dell'origine.

2. Postulati della meccanica

2.1. Principî di Newton. Un *fatto fisico* è che i punti materiali sono in grado di influenzare reciprocamente le loro linee universo: in altre parole, le linee universo di due punti saranno soggette a delle reciproche condizioni matematiche. Queste proprietà sono specificate dai principî, o postulati, della meccanica. Anzitutto, introduciamo il seguente postulato, anche detto di Galilei, che assume l'esistenza di una classe speciale di sistemi di riferimento.

POSTULATO 2.1 (Primo postulato della meccanica). *Esiste uno speciale riferimento di coordinate, detto inerziale, nel quale l'accelerazione di un punto materiale isolato è nulla in ogni istante, qualunque sia il suo stato cinematico, i.e., la sua posizione e la sua velocità.*

Il postulato si basa sul concetto impreciso di “isolato”, che possiamo qualitativamente immaginare come equivalente a “infinitamente distante da ogni altro sistema con cui il punto materiale possa interagire”. Se esiste un riferimento inerziale, ne esistono infiniti altri: il gruppo di Galilei ha infatti la proprietà di lasciare invariate le accelerazioni delle linee di universo, e si può utilizzare per trasformare un dato riferimento inerziale in un nuovo riferimento inerziale in cui la proprietà continua a valere.

I successivi postulati fanno riferimento alle proprietà meccaniche di *coppie isolate* di punti materiali studiati in riferimenti di coordinate inerziali.

POSTULATO 2.2 (Secondo postulato della meccanica). *È possibile associare a ogni punto materiale P una quantità scalare positiva m , detta massa, indipendente dallo stato cinematico del punto, in modo che, considerato un sistema isolato di due punti materiali P_1 e P_2 di massa m_1 ed m_2 rispettivamente, le loro corrispondenti accelerazioni $\ddot{\mathbf{x}}_1$ e $\ddot{\mathbf{x}}_2$ in un riferimento inerziale soddisfino*

$$m_1 \|\ddot{\mathbf{x}}_1\| = m_2 \|\ddot{\mathbf{x}}_2\|.$$

Si noti che le masse sono definite a meno di un fattore arbitrario; ovvero, immaginando di riscalare $m \rightarrow \alpha m$, con $\alpha > 0$, tutte le masse di tutti i punti materiali nello spaziotempo, il contenuto del postulato rimane invariato: questa invarianza esprime l'arbitrarietà nella scelta della *scala* nella misura della massa. Il postulato suggerisce la definizione della seguente quantità.

DEFINIZIONE 2.1 (Forza). Dato un punto materiale P di massa m che evolve con traiettoria \mathbf{x} , si dice che su di esso è applicata la forza

$$\mathbf{F} := m\ddot{\mathbf{x}}.$$

In molti casi, come vedremo, informazioni sulla forma funzionale di \mathbf{F} (dovute per esempio all'esperienza sperimentale) renderanno a tutti gli effetti la definizione data una equazione differenziale per la dinamica del punto materiale.

Il terzo postulato ci informa sulle direzioni delle accelerazioni in un sistema isolato di due punti materiali.

POSTULATO 2.3 (Terzo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali P_1 e P_2 in posizioni \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 rispettivamente in un riferimento inerziale, le corrispondenti accelerazioni $\ddot{\mathbf{x}}_1$ e $\ddot{\mathbf{x}}_2$ hanno la direzione di $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ e versi tra loro opposti.*

I postulati dati finora sono ancora insufficienti per lo studio della meccanica, dato che riguardano sistemi isolati di al più due punti materiali. Il seguente postulato ausiliario permette di superare questa difficoltà e comporre gli effetti delle interazioni a due corpi finora considerate.

POSTULATO 2.4 (Principio di sovrapposizione). *L'accelerazione prodotta su un punto materiale P di massa m dall'interazione con N punti materiali in un riferimento inerziale è la somma delle accelerazioni che verrebbero prodotte se P interagisse con ciascuno di essi separatamente in un sistema isolato a due corpi.*

2.2. Determinismo di Newton. Dato un sistema isolato $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ di N punti materiali, il tipo di dipendenza funzionale in \mathbf{F}_k , forza applicata sul punto P_k , dalle traiettorie $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ di tutti i punti, è dato implicitamente dal seguente

POSTULATO 2.5 (Principio di determinismo di Newton). *Lo stato cinematico di un sistema isolato, ovvero la posizione e le velocità di tutti i punti materiali che lo compongono, identifica univocamente il suo moto.*

Questo postulato ha infatti una conseguenza importante: dovendo posizioni e velocità essere sufficienti all'integrazione delle equazioni del moto, la dipendenza funzionale della forza \mathbf{F}_k agente su un punto materiale P_k di traiettoria \mathbf{x}_k in un sistema isolato \mathcal{S} di N punti può essere solo del tipo $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$, dove con $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_k)_{k=1}^N$ abbiamo indicato la concatenazione delle posizioni di tutti i punti materiali del sistema. Le quantità \mathbf{F}_k non possono manifestare una dipendenza funzionale da derivate di ordine superiore al primo, diversamente l'evoluzione del sistema non sarebbe univocamente determinata, mancando le garanzie offerte (sotto opportune condizioni di regolarità dell'espressione della forza) dal teorema di Cauchy. Incidentalmente, ha senso chiedersi perché escludiamo la dipendenza funzionale da derivate di ordine secondo, ovvero perché escludiamo il caso in cui \mathbf{F}_k dipenda in forma funzionale dalle accelerazioni $\ddot{\mathbf{X}}$ dei punti del sistema (dipendenza pure compatibile in linea di principio con il teorema di Cauchy). La ragione è che una dipendenza siffatta può portare a delle inconsistenze fisiche. Infatti, supponiamo per semplicità di avere un punto materiale P di massa m , per cui, in presenza di un certo punto materiale P_0 , vale la legge $m\ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}_0)$ (abbiamo per questo specificato il pedice 0 per esprimere il fatto che la forza è il risultato dell'azione di P_0 su P). Dipendentemente dalla forma funzionale di \mathbf{F}_0 , questa legge potrebbe non permettere di identificare \mathbf{x}_0 univocamente nonostante sia dato lo stato cinematico in un certo istante (il teorema di Cauchy è formulato per equazioni differenziali *in forma normale*). Anche ignorando questo fatto, inconsistenze ulteriori possono emergere per via del principio di sovrapposizione: se l'interazione con un secondo punto materiale P_1 produce la forza $\mathbf{F}_1(t) = m\ddot{\mathbf{x}}_1$, allora in presenza di entrambi i punti P_0 e P_1 , deve valere per P l'equazione $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_0(t, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}_1(t)$. Per il principio di sovrapposizione, $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1$,

ovvero

$$\mathbf{F}_0(t, \ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1) + \mathbf{F}_1(t) = m\ddot{\mathbf{x}}_0 + m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_0(t, \ddot{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{F}_1(t)$$

dove nel secondo passaggio è stato usato $m\ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{F}_0(t, \ddot{\mathbf{x}}_0)$ e $m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1(t)$. Ne segue che abbiamo ottenuto $\mathbf{F}_0(t, \ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{F}_0(t, \ddot{\mathbf{x}}_0)$, dove evidentemente risulta che \mathbf{F}_0 dipende da $\ddot{\mathbf{x}}_1$ (ovvero che l'interazione con P_0 dipende da quella, arbitraria, con P_1) il che non è fisico³.

2.2.1. Una nota sulle forze posizionali. Nel caso in cui su un punto materiale agisca una *forza posizionale*, ovvero una forza $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$, l'equazione del moto ha una caratteristica invarianza sotto *traslazioni temporali* e *inversioni temporali*. Ovvero, l'equazione $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ rimane invariata se si effettua il cambio di variabile $t \mapsto \tau \pm t$. Come conseguenza, se abbiamo una soluzione $\bar{\mathbf{x}}(t)$ al problema di Cauchy (assunto ben posto)

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

allora $\hat{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}(\tau \pm t)$ è la soluzione al problema di Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \pm \mathbf{v}_0. \end{cases}$$

2.3. Invarianza galileiana. Abbiamo già detto che una trasformazione galileiana trasforma un sistema inerziale in un altro sistema inerziale. Un fatto notevole è che il contenuto di tutti e tre i postulati è *invariante* sotto queste trasformazioni: se si assume quindi che i tre postulati catturino la fisica del nostro universo, da questo segue che *tutte le leggi della fisica devono essere invarianti sotto trasformazioni galileiane*, dato che devono in ultima analisi essere compatibili con i postulati del moto. È questo un principio formulato nel 1632 da Galilei⁴, ed assunto valido per quasi trecento anni durante tutto lo sviluppo della meccanica *classica*. Abbiamo visto che ogni trasformazione galileiana si può pensare come decomposta in tre trasformazioni più elementari.

- L'invarianza per traslazione dell'origine del riferimento quadridimensionale manifesta l'assunzione che spazio e tempo siano *omogenei*, ovvero che una qualunque legge fisica non può dipendere da posizioni o istanti di tempo particolari.
- L'invarianza dello spazio sotto rotazioni ne esprime l'*isotropia*, ovvero il fatto che non vi sono direzioni privilegiate.
- L'invarianza sotto *boosts* galileiani implica che *non è possibile, per mezzo di un esperimento fisico realizzato entro un riferimento inerziale, rilevare se il riferimento stesso è in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro riferimento inerziale*: ogni riferimento inerziale ha pari dignità.

L'ultimo punto porta alla negazione del concetto aristotelico di *spazio assoluto*: non è possibile *identificare* punti dello spazio in istanti diversi, dato che non abbiamo modo di seguire la posizione di un punto rispetto ad un riferimento assoluto, né ha senso farlo. È questa la ragione per cui lo spaziotempo non ammette la possibilità di parlare di distanza spaziale tra eventi riferiti a istanti diversi⁵.

³Per ulteriori dettagli, si veda L. A. Pars, *A treatise on analytical mechanics* (1965).

⁴G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632).

⁵Questo tipo di struttura può essere matematicamente formalizzata dal concetto di *fibrato*, in cui spazi euclidei tridimensionali costituiscono delle *fibre* associate ciascuna ad un punto della *base*, uno spazio euclideo unidimensionale che rappresenta il tempo. Una discussione di questo punto si può trovare in R. Penrose, *La strada che porta alla realtà* (1968).

Come il principio di determinismo di Newton, anche quello di invarianza galileiana ha conseguenze sulla forma funzionale delle forze. Supponiamo di avere un sistema isolato di N punti materiali $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$, e sia $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_k)_{k=1}^N$ la concatenazione di tutte le posizioni di detti punti in un riferimento inerziale. La traiettoria di ciascun punto P_k soddisfa, in generale, l'equazione $\mathbf{F}_k(t, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = m_k \ddot{\mathbf{x}}_k$, dove m_k è la sua massa.

Dato che il gruppo di Galilei include le traslazioni temporali, se richiediamo che le leggi della natura non dipendano da un tempo specifico t , deve essere $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$, ovvero le forze non possono dipendere dal tempo. Il gruppo, d'altra parte, include anche *invarianza per traslazioni* e *invarianza per boosts*. Le forze potranno quindi dipendere solo da *differenze di posizioni* e *differenze di velocità*, ovvero dovrà essere

$$\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i < j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i < j}), \quad \mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j.$$

Infine, l'*isotropia dello spazio* implica che la legge del moto non può cambiare se eseguiamo una rotazione del riferimento. Detta $\mathbf{R} \in \text{O}(3)$, $\mathbf{F}_k(\{\mathbf{R}\mathbf{x}_{ij}\}_{i < j}, \{\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i < j}) = \mathbf{R}\mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i < j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i < j})$.

Una conseguenza di tutte le osservazioni fatte finora è che se si considera un *singolo punto materiale*, in assenza di altri punti materiali, esso deve essere sottoposto ad una forza nulla. Questo è apparentemente in contrasto con il gran numero di equazioni del moto per singoli punti materiali studiate in Meccanica nella forma $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Leggi di questo tipo, sebbene in violazione con l'invarianza galileiana, sono utili *approssimazioni* in cui l'effetto del moto di P sugli altri punti materiali con cui interagisce viene trascurato. Nel seguito ci focalizzeremo sulla meccanica del *singolo punto materiale* e su una dipendenza funzionale di \mathbf{F} del tipo indicato, ovvero $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, tenendo a mente del fatto che si tratta di una utile approssimazione.

2.4. Equazioni cardinali per sistemi di punti. Si consideri un sistema di N punti materiali $\mathcal{S} := \{P_k\}_{k=1}^N$. Come solito, indichiamo con m_k la massa del punto materiale P_k , di traiettoria \mathbf{x}_k in un riferimento inerziale dato, e sia \mathbf{F}_k la forza agente su di esso. Abbiamo così N equazioni del tipo

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k, \quad k = 1, \dots, N$$

per caratterizzare il moto di questo sistema. Questo sistema di equazioni può essere utilizzato per ottenere due equazioni rilevanti, dette *cardinali*, di una certa utilità quando il sistema \mathcal{S} è costituito da molti punti reciprocamente vincolati. Per discuterle, introduciamo le seguenti quantità.

DEFINIZIONE 2.2 (Centro di massa). Il centro di massa G del sistema \mathcal{S} è il punto individuato dalle coordinate

$$\mathbf{x}_G := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k, \quad \text{dove } m := \sum_{k=1}^N m_k.$$

DEFINIZIONE 2.3 (Quantità di moto e momento della quantità di moto). La *quantità di moto* del sistema di punti \mathcal{S} è definita come

$$\mathbf{Q} := \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}_k, \quad \mathbf{Q}_k := m_k \dot{\mathbf{x}}_k,$$

dove \mathbf{Q}_k è la quantità di moto del punto materiale P_k . Il *momento della quantità di moto*, o *momento angolare rispetto ad un polo A* di coordinate \mathbf{x}_A , è definito come

$$\mathbf{L}_A := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q}_k.$$

È immediato verificare che, se $m := \sum_k m_k$ è la massa totale del sistema, $\mathbf{Q} = m\dot{\mathbf{x}}_G$, che può essere pensata come la quantità di moto di un singolo punto di massa m in G . Esiste una relazione semplice tra \mathbf{L}_A , calcolato rispetto al polo A individuato da \mathbf{x}_A , e \mathbf{L}_B , calcolato rispetto al polo B individuato da \mathbf{x}_B , e quantità di moto, ovvero

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{Q}.$$

Questa relazione è a volte detta *legge del cambiamento di polo*. Segue subito che se $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_B$, ovvero il momento angolare totale non dipende dal polo. Inoltre, se $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ e \mathbf{Q} sono paralleli, il momento angolare non cambia nel passare dal polo A al polo B .

DEFINIZIONE 2.4 (Momento torcente delle forze). Il *momento torcente totale* delle forze applicate al sistema di punti \mathcal{S} rispetto al polo A di coordinate \mathbf{x}_A è definito come

$$\boldsymbol{\tau} := \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\tau}_{A,k}, \quad \boldsymbol{\tau}_{A,k} := (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_k,$$

dove $\boldsymbol{\tau}_{A,k}$ è il momento torcente della forza \mathbf{F}_k applicata in \mathbf{x}_k rispetto al polo A .

Come nel caso del momento della quantità di moto, esiste una relazione semplice tra $\boldsymbol{\tau}_A$, calcolato rispetto al polo A individuato da \mathbf{x}_A , e $\boldsymbol{\tau}_B$, calcolato rispetto al polo B individuato da \mathbf{x}_B , ovvero

$$\boldsymbol{\tau}_B = \boldsymbol{\tau}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{R},$$

dove questa volta

$$\mathbf{R} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k$$

è detta *risultante* delle forze.

Avendo introdotto queste quantità cruciali, possiamo derivare due relazioni tra esse,

$$(1.2) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k =: \mathbf{R},$$

$$(1.3) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_k \wedge \mathbf{Q}_k) = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \wedge \mathbf{F}_k = \sum_k \boldsymbol{\tau}_{O,k} =: \boldsymbol{\tau}_O,$$

dove O è l'origine del riferimento. È possibile anche scegliere come polo rispetto a cui calcolare il momento angolare un punto P del sistema, sia esso per esempio il punto di coordinate \mathbf{x}_P : in tal caso, si vede facilmente che

$$\dot{\mathbf{L}}_P = \boldsymbol{\tau}_P - \dot{\mathbf{x}}_P \wedge \mathbf{Q}.$$

Queste equazioni possono essere semplificate osservando che ciascuna forza \mathbf{F}_k applicata ad un punto materiale P_k contiene contributi di natura diversa. Vi sarà, anzitutto, un contributo *interno* $\mathbf{F}_k^{(in)}$, dovuto all'interazione di P_k con tutti gli altri elementi in \mathcal{S} , ed un contributo rimanente *esterno* $\mathbf{F}_k^{(ext)}$, dovuto all'interazione con punti materiali non in \mathcal{S} . Se indichiamo con \mathbf{F}_{kj} la contributo alla forza interna applicata a k dovuto alla presenza punto materiale j , di modo che $\mathbf{F}_k^{(in)} = \sum_{P_j \in \mathcal{S} \setminus \{P_i\}} \mathbf{F}_{kj}$, possiamo quindi decomporre $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(in)} + \mathbf{F}_k^{(ext)}$. Similmente possiamo definire la risultante delle forze interne e la risultante delle forze esterne come, rispettivamente,

$$\mathbf{R}^{(in)} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(in)}, \quad \mathbf{R}^{(ext)} := \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(ext)}.$$

ed analogamente il momento delle forze interne ed esterne rispetto ad un generico polo A di coordinate \mathbf{x}_A ,

$$\boldsymbol{\tau}^{(\text{in})} := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_k^{(\text{in})}, \quad \boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})} := \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{F}_k^{(\text{ext})}.$$

TEOREMA 2.6. *La risultante e il momento delle forze interne di un sistema \mathcal{S} sono sempre nulli.*

DIMOSTRAZIONE. Per via del terzo postulato della meccanica, le forze interne sono a due a due opposte, ovvero $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Ne segue che la risultante delle forze interne è nulla

$$\mathbf{R}^{(\text{in})} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Sempre usando il terzo postulato, il momento totale delle forze interne è

$$\boldsymbol{\tau}_O^{(\text{in})} = \sum_{P_i \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_i \wedge \sum_{P_j \in \mathcal{S} \setminus \{P_i\}} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Si noti che la scelta del polo è irrilevante essendo $\mathbf{R}^{(\text{in})} = \mathbf{0}$. □

Come conseguenza di quanto detto, vale il seguente

COROLLARIO 2.7 (Prima e seconda equazione cardinale). *Valgono le seguenti equazioni cardinali per un sistema di punti*

$$(1.4) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(\text{ext})},$$

$$(1.5) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}.$$

Inoltre, dato un versore $\hat{\mathbf{u}}$, se $\langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$ allora $\langle \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{u}} \rangle$ si conserva. Similmente, se $\langle \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$ allora $\langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{u}} \rangle$ si conserva.

Si noti che la prima equazione cardinale si può riscrivere come $m\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}$, da cui segue il seguente

COROLLARIO 2.8. *In assenza di forze esterne, il centro di massa G di un sistema di n punti materiali ha accelerazione nulla.*

Come vedremo, il centro di massa può quindi sempre essere considerato come conveniente “osservatore inerziale” rispetto al quale svolgere una analisi quando sul sistema considerato non sono applicate forze esterne, ovvero se il sistema è *isolato*.

2.5. Lavoro, energia cinetica e forze conservative. Concludiamo questa seconda parte introducendo alcuni concetti legati a quantificatori dell’azione delle forze lungo le traiettorie dei punti a cui esse sono applicate. Consideriamo un punto materiale P di massa m e traiettoria \mathbf{x} , soggetto ad una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Si definisce *potenza* associata all’azione della forza \mathbf{F} sul punto materiale al tempo t la quantità

$$\Pi(t) := \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle.$$

L’integrale di questa quantità su un certo intervallo $[t_0, t]$ si definisce *lavoro* della forza nel medesimo intervallo,

$$W(t_0, t) := \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \langle \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau.$$

L'espressione dipende in generale dallo stato cinematico del corpo in tutti gli istanti tra t_0 e t , e ha suggerito l'introduzione della quantità *energia cinetica*.

DEFINIZIONE 2.5. L'energia cinetica di un punto materiale P di massa m che si muove con traiettoria \mathbf{x} è

$$T(\dot{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2.$$

Il legame tra lavoro, potenza ed energia cinetica è espresso dal seguente semplice ma importante

TEOREMA 2.9 (delle “forze vive”). *Dato un punto materiale P di massa m in moto lungo una traiettoria $\mathbf{x}(t)$, il lavoro svolto dalla forza totale agente su di esso tra un tempo t_0 e un tempo $t > t_0$ è uguale alla variazione della sua energia cinetica, ovvero*

$$T(\dot{\mathbf{x}}(t)) - T(\dot{\mathbf{x}}(t_0)) = W(t_0, t).$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$\frac{dT(\dot{\mathbf{x}})}{dt} = m\langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \Pi,$$

e integrare questa relazione nel tempo per ottenere la definizione di W . \square

2.5.1. Forze posizionali. Sia $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$, ovvero la forza applicata a P dipende esclusivamente dalla sua posizione (*forza posizionale*). Supponiamo inoltre che la traiettoria \mathbf{x} sia regolare ($\dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$) in un certo intervallo $[t_0, t_1]$, di modo che sia possibile introdurre una parametrizzazione intrinseca $\boldsymbol{\gamma}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ della traiettoria \mathbf{x} . Scelto infatti un punto sulla traiettoria \mathbf{x} come origine, sia esso per esempio $\mathbf{x}(t_0)$, basta introdurre l'ascissa curvilinea

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

così che $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} \circ s$, ovvero $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{x} \circ s^{-1}$. Il lavoro compiuto da \mathbf{F} nell'intervallo $[t_0, t_1]$ diventa così

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt = \int_0^\ell \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(s)), \boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle ds = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}), d\boldsymbol{\gamma} \rangle.$$

Nell'espressione sopra $\hat{\mathbf{v}}(s) := \boldsymbol{\gamma}'(s)$ è il versore tangente alla curva nel punto di ascissa curvilinea s , e abbiamo indicato con $s(t_1) = \ell$, lunghezza della traiettoria percorsa dal punto materiale tra t_0 e t_1 . L'espressione dipende quindi *puramente dalla traiettoria* percorsa e non da *come* essa è stata percorsa, ovvero è invariante per riparametrizzazioni temporali.

2.5.2. Forze conservative. Un'ulteriore semplificazione si verifica quando la forza è, oltre che posizionale, un , ovvero esiste un *potenziale*, detto *energia potenziale*, $V: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^2(A)$, tale per cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}).$$

Qui e in seguito indicheremo con $\partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ il *gradiente* di V rispetto ad \mathbf{x} . Un campo di forze conservativo ha la proprietà di essere *irrotazionale*, ovvero $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, come diretta conseguenza della sua definizione: viceversa l'irrotationalità garantisce l'esistenza di un potenziale purché il dominio di definizione di \mathbf{F} sia semplicemente connesso. Se ne calcoliamo il lavoro lungo una certa traiettoria $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} \circ s$, otteniamo

$$(1.6) \quad W(t_0, t_1) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}), d\boldsymbol{\gamma} \rangle = - \int_0^\ell \langle \partial_{\mathbf{x}} V(\boldsymbol{\gamma}(s)), \boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle ds = - \int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t_1)} dV = V(\mathbf{x}(t_0)) - V(\mathbf{x}(t_1)),$$

ovvero il lavoro svolto dipende solo dalla posizione finale e iniziale della curva seguita. Legato al precedente risultato è il fatto seguente: se calcoliamo la potenza di una forza conservativa troveremo

$$(1.7) \quad \Pi = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \rangle = -\langle \partial_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \rangle = -\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \equiv -\dot{V}(\mathbf{x}).$$

Questo cruciale fatto permette di enunciare il seguente, importante teorema.

TEOREMA 2.10 (Conservazione dell'energia meccanica). *Dato un punto materiale P di traiettoria \mathbf{x} soggetto a sole forze conservative associate ad un potenziale V , la sua energia meccanica*

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})$$

rimane costante durante il moto.

DIMOSTRAZIONE. Il risultato si ottiene combinando l'Eq. (1.7) con il teorema delle forze vive, ovvero osservando che

$$\frac{dT}{dt} = \Pi = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})) = 0. \quad \square$$

Il teorema rimane valido se sul punto materiale agiscono forze anche non conservative ma aventi potenza nulla.

3. Cambi di riferimento

3.1. Osservatori mobili. Nello studio della linea universo $P(t)$ di un certo punto materiale omonimo, abbiamo scelto un evento origine O e una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^3$ in $\text{Ker}(\tau)$ per ottenere un sistema di coordinate $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$. Non è raro tuttavia scegliere, invece che un evento e una base fissa, una *linea universo non canonica* che funge da *osservatore di riferimento* $O_\alpha(t)$, e adottare una famiglia $\{\hat{\mathbf{a}}_1(t), \hat{\mathbf{a}}_2(t), \hat{\mathbf{a}}_3(t)\}_t$ di basi ortonormali per $\text{Ker}(\tau)$ che “evolve” con esso: assumeremo che, per ogni k , $\hat{\mathbf{a}}_k(t)$ sia differenziabile in t . Richiediamo che la linea universo “osservatore” sia parametrizzata in modo che $\tau(\overrightarrow{O_\alpha(t)P(t)}) = 0 \forall t$. La *traiettoria* di P rispetto all’osservatore O_α è quindi

$$\mathbf{x}^\alpha(t) := \overrightarrow{O_\alpha(t)P(t)} \in \text{Ker}(\tau),$$

dove abbiamo aggiunto un apice per ricordare che si tratta della traiettoria di P vista da O_α . Questa traiettoria potrà essere decomposta come

$$\mathbf{x}^\alpha(t) = \sum_{k=1}^3 x_k^\alpha(t) \hat{\mathbf{a}}_k(t).$$

Le coordinate $\mathbf{x}^\alpha(t) := (x_i^\alpha(t))_{i=1}^3$ sono ottenute in funzione di questo “riferimento mobile”. Quello costruito è, in generale, un riferimento *non inerziale* che indichiamo per brevità con $\alpha := O_\alpha \hat{\mathbf{a}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2 \hat{\mathbf{a}}_3$ e vive “localmente” seguendo la linea universo O_α . In questo riferimento, la velocità di P è

$$\mathbf{v}^\alpha := \left. \frac{d\mathbf{x}^\alpha}{dt} \right|_\alpha := \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k^\alpha \hat{\mathbf{a}}_k(t),$$

in quanto si assume che l’osservatore O_α veda la base $\{\hat{\mathbf{a}}_k\}_k$ come fissa nel tempo. Analogamente, l’accelerazione di P secondo il riferimento α è

$$\mathbf{a}^\alpha := \left. \frac{d^2 \mathbf{x}^\alpha}{dt^2} \right|_\alpha := \sum_{k=1}^3 \ddot{x}_k^\alpha \hat{\mathbf{a}}_k(t),$$

Se per ogni k si ha che x_k^α è indipendente dal tempo, si dice che P è *solidale* con $O_\alpha \hat{\mathbf{a}}_1 \hat{\mathbf{a}}_2 \hat{\mathbf{a}}_3$. Un sistema di riferimento globale del tipo già studiato (che *non* dipende da un parametro temporale

t) può essere visto come un caso particolare. Basta in effetti scegliere, una base “costante” $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_k$ per $\text{Ker}(\tau)$ e una traiettoria costruita canonicamente da un evento origine O .

Sia ora $O_\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$ una diversa linea universo, associata ad un diverso osservatore O_β , che utilizza una diversa famiglia di basi ortonormali $\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_k(t)\}_{k=1}^3$: questo permette di introdurre un secondo riferimento $\beta := O_\beta \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_3$. La traiettoria di P rispetto a questo osservatore sarà

$$\mathbf{x}^\beta(t) := \overrightarrow{O_\beta(t)P(t)} \in \text{Ker}(\tau),$$

e potrà essere scritta come $\mathbf{x}^\beta(t) = \sum_{k=1}^3 x_k^\beta(t) \hat{\boldsymbol{\beta}}(t)$. Varrà⁶

$$\mathbf{x}^\alpha(t) = \overrightarrow{O_\alpha(t)P(t)} = \overrightarrow{O_\alpha(t)O_\beta(t)} + \overrightarrow{O_\beta(t)P(t)} = \mathbf{x}_\beta^\alpha + \mathbf{x}^\beta(t),$$

avendo definito $\mathbf{x}_\beta^\alpha(t) := \overrightarrow{O_\alpha(t)O_\beta(t)}$, posizione di O_β rispetto a O_α .

Le due basi ortonormali vivono nello stesso spazio. Assumendo che esse abbiano la stessa orientazione, è possibile individuare una matrice di cambio di base $\mathbf{R}_\beta^\alpha(t) \in \text{SO}(3)$ che permette di passare dalla base $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_k\}_{k=1}^3$ alla base $\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_k\}_{k=1}^3$ come

$$(1.8) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_i(t) = \sum_{k=1}^3 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k(t) [\mathbf{R}_\beta^\alpha(t)]_{ki}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Se quindi $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 u_k^\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k = \sum_{i=1}^3 u_i^\beta \hat{\boldsymbol{\beta}}_i$, allora

$$\sum_{i=1}^3 u_i^\beta \sum_{k=1}^3 [\mathbf{R}_\beta^\alpha]_{ki} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k = \sum_{k=1}^3 u_k^\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k \Rightarrow \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{R}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta.$$

Ciò significa che si ha la seguente relazione tra le coordinate di P nel riferimento α e quelle nel riferimento β ,

$$(1.9) \quad \mathbf{x}^\alpha(t) = \mathbf{x}_\beta^\alpha(t) + \mathbf{R}_\beta^\alpha(t) \mathbf{x}^\beta(t).$$

La dipendenza tra le coordinate in α e le coordinate β richiede perciò, per essere esplicitata, la conoscenza delle coordinate \mathbf{x}_β^α dell'osservatore mobile in funzione di quello fisso e della matrice \mathbf{R}_β^α in funzione del tempo.

3.2. Angoli di Eulero e velocità angolare. Ogni matrice $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ è caratterizzata da soli tre parametri arbitrari: ciò significa che per specificare un cambio di riferimento ortonormale sono necessarie le tre coordinate $\mathbf{x}_\beta^\alpha(t)$ di O_β rispetto al riferimento α , e tre parametri per fissare la matrice $\mathbf{R}_\beta^\alpha(t)$, come si vede dall'Eq. (1.9). Per introdurre una opportuna parametrizzazione di \mathbf{R}_β^α utilizzeremo il metodo di Eulero: questo metodo non è unico, e in effetti altre scelte di metodo sono possibili, ma è quello più diffusamente utilizzato per via di una serie di vantaggi legati a come la parametrizzazione di \mathbf{R}_β^α viene introdotta.

Immaginiamo quindi di voler fare il cambio di terna ortonormale (omettiamo la dipendenza temporale per semplicità)

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_3) \rightarrow (\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2, \hat{\boldsymbol{\beta}}_3)$$

che avverrà con una certa generica matrice $\mathbf{R}_\beta^\alpha \in \text{SO}(3)$ in modo che valga l'Eq. (1.8). Utilizziamo l'isomorfismo di $\text{Ker}(\tau)$ con \mathbb{R}^3 per dare una rappresentazione grafica della costruzione in Fig. 1. Supponiamo che $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3 \wedge \hat{\boldsymbol{\beta}}_3 \neq \mathbf{0}$ (ovvero che $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}_3$ non siano paralleli) e definiamo il versore

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3 \wedge \hat{\boldsymbol{\beta}}_3}{\|\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3 \wedge \hat{\boldsymbol{\beta}}_3\|}.$$

⁶I pedici in alto possono essere letti come “visto da”.

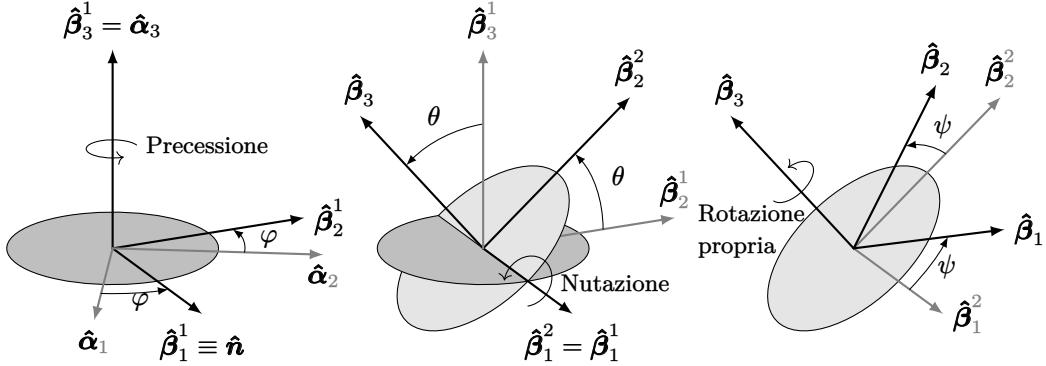


FIGURA 1. Angoli di Eulero.

Questo versore indica il cosiddetto *asse dei nodi*. In base a questo asse possiamo definire tre angoli, detti *angoli di Eulero*, che identificano altrettante rotazioni successive (in senso antiorario) attorno a direzioni della base, e che permettono di ottenere in tre passi la base di $\{\hat{\beta}_k\}_{k=1}^3$ a partire da $\{\hat{\alpha}_k\}_{k=1}^3$:

Precessione: Ruotiamo $\hat{\alpha}_1$ di un opportuno angolo $\varphi \in [0, 2\pi]$ nel piano ortogonale a $\hat{\alpha}_3$ per sovrapporlo a \hat{n} . Questo avverrà applicando una matrice di rotazione

$$\mathbf{R}^{(3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_i^1 = \sum_{j=1}^3 \hat{\alpha}_j R_{ji}^{(3)}(\varphi) \quad \forall i.$$

Nutazione: Ruotiamo $\hat{\alpha}_3$ di un opportuno angolo $\theta \in [0, \pi]$ nel piano ortogonale a \hat{n} fino a sovrapporlo a $\hat{\beta}_3$. ciò corrisponde all'applicazione della matrice

$$\mathbf{R}^{(1)}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_i^2 = \sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_j^1 R_{ji}^{(1)}(\theta) \quad \forall i.$$

Rotazione propria: Ruotiamo \hat{n} di un opportuno angolo $\psi \in [0, 2\pi]$ per sovrapporlo a $\hat{\beta}_1$ nel piano ortogonale a $\hat{\beta}_3$. Questa rotazione corrisponde all'azione di

$$\mathbf{R}^{(3)}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_j^2 R_{ji}^{(3)}(\psi) \quad \forall i.$$

In conclusione otteniamo

$$\hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_j^2 R_{ji}^{(3)}(\psi) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \hat{\beta}_j^1 R_{kj}^{(2)}(\theta) R_{ji}^{(3)}(\psi) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \hat{\alpha}_{\ell} R_{\ell k}^{(3)}(\varphi) R_{kj}^{(2)}(\theta) R_{ji}^{(3)}(\psi),$$

ovvero

$$[\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha}]_{\ell i} = \sum_{jk} R_{\ell k}^{(3)}(\varphi) R_{kj}^{(2)}(\theta) R_{ji}^{(3)}(\psi) \Leftrightarrow \mathbf{R}_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{R}^{(3)}(\varphi) \mathbf{R}^{(2)}(\theta) \mathbf{R}^{(3)}(\psi).$$

La parametrizzazione della rotazione $\mathbf{R}_{\beta}^{\alpha}$ qui introdotta richiede che $\hat{\alpha}_3$ e $\hat{\beta}_3$ non siano paralleli: questa difficoltà, ovvero l'impossibilità di associare biunivocamente tutte le rotazioni ad un singolo tipo di parametrizzazione, appare per *qualsiasi* costruzione. Se d'altra parte $\hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_3$, è chiaro che abbiamo bisogno solo di un movimento di precessione, in cui $\hat{\alpha}_1 \rightarrow \hat{\beta}_1$, per cui

$\mathbf{R}_\beta^\alpha = \mathbf{R}^{(3)}(\alpha)$. In questo caso, α è semplicemente detto *angolo di rotazione*. Si noti che questa parametrizzazione mantiene l'orientazione della base, e infatti in tutti i casi $\det \mathbf{R}_\beta^\alpha = 1$.

3.2.1. *Formula di Poisson.* Per studiare in forma differenziale i cambi di riferimento introdotti, immaginiamo di avere un certo vettore $\mathbf{u} \in \text{Ker}(\tau)$, dipendente dal parametro t . Sia la sua decomposizione nelle due basi

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^2 u_k^\alpha(t) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k(t) = \sum_{k=1}^3 u_k^\beta(t) \hat{\boldsymbol{\beta}}_k(t) = \sum_{k=1}^3 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j(t) [\mathbf{R}_\beta^\alpha(t)]_{jk} u_k^\beta(t).$$

Questo significa che le sue coordinate \mathbf{u}^α ed \mathbf{u}^β rispetto ai riferimenti α e β soddisfano la relazione

$$\mathbf{u}^\alpha(t) = \mathbf{R}_\beta^\alpha(t) \mathbf{u}^\beta(t).$$

Come esprimere le derivate rispetto al tempo di questa espressione? Consideriamo il seguente Lemma preliminare.

LEMMA 3.1. *Sia data una applicazione matriciale $\mathbf{R}(t)$, tale che $\mathbf{R}: \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(n)$ differenziabile in t . La matrice*

$$\boldsymbol{\Omega} := \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top,$$

è antisimmetrica, ovvero $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^\top$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\mathbf{R}(t)$ ortogonale, vale $\forall t$

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top = -\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^\top = -(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top)^\top. \quad \square$$

Questo lemma è utile per provare il seguente teorema, dovuto a Poisson, che fornisce una informazione particolarmente utile su come evolvono questi versori ortonormali.

TEOREMA 3.2 (Poisson). *Siano dati due sistemi di riferimento $O_\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_3$ e $O_\beta \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \hat{\boldsymbol{\beta}}_3$ come sopra. Allora esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha$, detto vettore velocità angolare tale per cui*

$$(1.10) \quad \left. \frac{d \mathbf{u}}{dt} \right|_\alpha = \left. \frac{d \mathbf{u}}{dt} \right|_\beta + \boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}.$$

DIMOSTRAZIONE. Deriviamo $\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{R}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta$ espressione che lega \mathbf{u}^α ad \mathbf{u}^β , vettori delle componenti di \mathbf{u} rispetto alle due basi, ottenendo

$$\dot{\mathbf{u}}^\alpha = \mathbf{R}_\beta^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\beta + \dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta = \mathbf{R}_\beta^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\beta + \dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha \mathbf{R}_\beta^{\alpha\top} \mathbf{R}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\beta \equiv \mathbf{R}_\beta^\alpha \dot{\mathbf{u}}^\beta + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u}^\alpha.$$

Per il Lemma 3.1, la matrice $\boldsymbol{\Omega}_\beta^\alpha := \dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha \mathbf{R}_\beta^{\alpha\top}$ può essere scritta come

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\boldsymbol{\Omega}_\beta^\alpha \mathbf{u}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^\alpha \\ u_2^\alpha \\ u_3^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 u_3^\alpha - \omega_3 u_2^\alpha \\ \omega_3 u_1^\alpha - \omega_1 u_3^\alpha \\ \omega_1 u_2^\alpha - \omega_2 u_1^\alpha \end{pmatrix}$$

In forma vettoriale, l'espressione ottenuta è quindi

$$\sum_k \dot{u}_k^\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k = \sum_{ik} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k [\mathbf{R}_\beta^\alpha]_{ki} \dot{u}_i^\beta + \sum_{ik} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k [\dot{\mathbf{R}}_\beta^\alpha]_{ki} u_i^\beta = \sum_i \dot{u}_i^\beta \hat{\boldsymbol{\beta}}_i + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \omega_i u_j^\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k.$$

Notiamo ora che

$$\left. \frac{d \mathbf{u}}{dt} \right|_\alpha := \sum_{k=1}^3 \dot{u}_k^\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}}_k, \quad \left. \frac{d \mathbf{u}}{dt} \right|_\beta := \sum_{k=1}^3 \dot{u}_k^\beta \hat{\boldsymbol{\beta}}_k$$

sono rispettivamente le derivate temporali di \mathbf{u} rispetto al riferimento α e β . Invece l'ultimo termine si può scrivere come

$$\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \omega_i u_j^\alpha \hat{\alpha}_k = \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}^\alpha, \quad \text{dove } \omega_\beta^\alpha := \sum_k \omega_k \mathbf{a}_k.$$

Si ottiene così l'Eq. (1.10). Naturalmente la relazione può essere invertita scrivendo

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\beta = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\alpha - \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\alpha + \omega_\alpha^\beta \wedge \mathbf{u}, \quad \omega_\beta^\alpha = -\omega_\alpha^\beta.$$

Il vettore ω_β^α , in generale dipendente dal tempo, è unico (se esistesse un diverso $\bar{\omega}_\beta^\alpha$ tale per cui la relazione precedente è soddisfatta, si avrebbe $(\omega_\beta^\alpha - \bar{\omega}_\beta^\alpha) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$ per ogni vettore \mathbf{u}). \square

COROLLARIO 3.3. *Vale*

$$\frac{d\hat{\alpha}_k}{dt}\Big|_\beta = \omega_\alpha^\beta \wedge \hat{\alpha}_k, \quad \frac{d\hat{\beta}_k}{dt}\Big|_\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{\beta}_k, \quad k = 1, \dots, 3,$$

dove $\omega_\beta^\alpha = -\omega_\alpha^\beta$. Inoltre, se un osservatore con riferimento $c = O_\gamma \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$ è solidale con l'osservatore $O_\beta \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3$,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\gamma + \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima parte del corollario discende direttamente dall'applicazione del teorema di Poisson ai vettori di base. Per la seconda parte, scriviamo

$$\frac{d\hat{\gamma}_i}{dt}\Big|_\alpha = \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} (\langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle \hat{\beta}_j) = \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle \frac{d\hat{\beta}_j}{dt}\Big|_\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \sum_{j=1}^3 \langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle \hat{\beta}_j = \omega_\beta^\alpha \wedge \hat{\gamma}_i$$

dove abbiamo usato il fatto che $\langle \hat{\gamma}_i, \hat{\beta}_j \rangle$ non dipende dal tempo. \square

COROLLARIO 3.4. *Il vettore ω_β^α si può scrivere come*

$$(1.11) \quad \omega_\beta^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{\beta}_i \wedge \frac{d\hat{\beta}_i}{dt}\Big|_\alpha.$$

DIMOSTRAZIONE. Usando l'identità $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ per tre generici vettori in uno spazio vettoriale tridimensionale, basta infatti osservare che

$$(1.12) \quad \sum_{i=1}^3 \hat{\beta}_i \wedge \frac{d\hat{\beta}_i}{dt}\Big|_\alpha = \sum_{i=1}^3 \hat{\beta}_i \wedge (\omega_\beta^\alpha \wedge \hat{\beta}_i) = \sum_{i=1}^3 (\omega_\beta^\alpha - \langle \omega_\beta^\alpha, \hat{\beta}_i \rangle \hat{\beta}_i) = 3\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\alpha = 2\omega_\beta^\alpha. \quad \square$$

COROLLARIO 3.5. *Vale*

$$(1.13) \quad \frac{d\omega_\beta^\alpha}{dt}\Big|_\alpha = \frac{d\omega_\beta^\alpha}{dt}\Big|_\beta.$$

Esempio 1.5 — Consideriamo il caso in cui la base $\{\hat{\beta}_k\}_{k=1}^3$ possa essere espressa in funzione di una certa base $\{\hat{\alpha}_k\}_{k=1}^3$ come

$$\hat{\beta}_1 = \cos \theta \hat{\alpha}_1 + \sin \theta \hat{\alpha}_2, \quad \hat{\beta}_2 = -\sin \theta \hat{\alpha}_1 + \cos \theta \hat{\alpha}_2, \quad \hat{\beta}_3 = \hat{\alpha}_3,$$

con $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione differenziabile. Si tratta di un moto di rotazione attorno all'asse fisso $\hat{\alpha}_3$. Dalla formula sopra

$$\omega_\beta^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \hat{\beta}_k \wedge \frac{d\hat{\beta}_k}{dt}\Big|_\theta = \dot{\theta} \hat{\alpha}_3 \equiv \dot{\theta} \hat{\beta}_3,$$

ovvero ω_β^α quantifica la velocità di variazione dell'angolo di rotazione θ ed è diretto come l'asse di rotazione $\hat{\alpha}_3 \equiv \hat{\beta}_3$: questo ne giustifica il nome *velocità angolare*.

3.3. Trasformazioni delle quantità cinematiche. Avendo ottenuto la relazione tra derivate temporali in due sistemi di riferimento per un generico vettore, possiamo ora applicare questo risultato al vettore posizione \mathbf{x} associato al punto materiale P per ottenere l'espressione delle *velocità* nei due riferimenti $\alpha = O_\alpha \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3$ e $\beta = O_\beta \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3$. Abbiamo già stabilito che vale la relazione

$$\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}_\alpha^\beta + \mathbf{x}^\beta.$$

Derivando rispetto al tempo nel riferimento α otterremo

$$\mathbf{v}^\alpha := \frac{d\mathbf{x}^\alpha}{dt} \Big|_\alpha = \frac{d\mathbf{x}_\beta^\alpha}{dt} \Big|_\alpha + \frac{d\mathbf{x}^\beta}{dt} \Big|_\alpha.$$

Per quanto detto sopra

$$\frac{d\mathbf{x}^\beta}{dt} \Big|_\alpha = \frac{d\mathbf{x}^\beta}{dt} \Big|_\beta + \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta \equiv \mathbf{v}^\beta + \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta.$$

Abbiamo ottenuto così la *legge di composizione delle velocità di Galilei*: indicando con $\mathbf{v}_\beta^\alpha := \frac{d\mathbf{x}_\beta^\alpha}{dt} \Big|_\alpha$ la velocità di O_β visto da O_α , possiamo scrivere

$$(1.14) \quad \mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}^\beta + \mathbf{v}^t, \quad \text{dove } \mathbf{v}^t := \mathbf{v}_\beta^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta.$$

Il termine di differenza tra le velocità nei due riferimenti, \mathbf{v}^t , è detta *velocità di trascinamento*.

Ripetendo i ragionamenti sopra sulla formula per le velocità otteniamo la legge delle composizioni per le accelerazioni. Derivando rispetto al tempo l'Eq. (1.14) secondo il riferimento α , otteniamo infatti

$$(1.15a) \quad \mathbf{a}^\alpha = \frac{d^2 \mathbf{x}^\alpha}{dt^2} \Big|_\alpha = \frac{d^2 \mathbf{x}^\beta}{dt^2} \Big|_\beta + \mathbf{a}^t + \mathbf{a}^C \equiv \mathbf{a}^\beta + \mathbf{a}^t + \mathbf{a}^C,$$

dove abbiamo scritto

$$(1.15b) \quad \mathbf{a}^t := \mathbf{a}_\beta^\alpha + \dot{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta + \omega_\beta^\alpha \wedge (\omega_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta), \quad \mathbf{a}^C := 2\omega \wedge \mathbf{v}^\beta.$$

Abbiamo indicato con $\dot{\omega}_\beta^\alpha$ la derivata rispetto al tempo della velocità angolare, che sappiamo non dipendere dal riferimento in cui la si calcola. Queste ultime due quantità sono dette rispettivamente *accelerazione di trascinamento* e *accelerazione di Coriolis*. L'accelerazione di trascinamento corrisponde all'accelerazione di un punto solidale con il riferimento mobile. Il termine di Coriolis è dovuto ad una ulteriore accelerazione che appare quando $\omega \wedge \mathbf{v}^\beta \neq 0$.

Se $\omega_\beta^\alpha = \dot{\omega}_\beta^\alpha = \mathbf{0}$, ovvero la velocità angolare è costantemente nulla, la legge di composizione delle velocità è semplicemente $\mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}_\beta^\alpha + \mathbf{v}^\beta$. Si dice in questo caso che il riferimento β è un *osservatore mobile traslante* rispetto al riferimento α . Se anche $\mathbf{a}_\beta^\alpha = \mathbf{0}$, le accelerazioni nei due riferimenti sono uguali: in questo caso, la trasformazione è *galileiana*, ovvero il riferimento β è semplicemente un riferimento ottenuto da α per mezzo di un elemento del gruppo di Galilei, per cui se il riferimento α è inerziale, lo sarà anche β .

La legge di trasformazione delle accelerazioni ha importanti conseguenze sulla forma che il secondo Postulato della Meccanica assume cambiando riferimento. Supponiamo, per esempio, che α sia un riferimento inerziale: in questo riferimento, il punto materiale P di massa m soddisfa la relazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}^\alpha$. Se ora applichiamo la trasformazione sopra otteniamo che

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}^\alpha = m\mathbf{a}^\beta - \mathbf{F}^t - \mathbf{F}^C \Rightarrow m\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{F} + \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^C,$$

ovvero nel riferimento β verranno in generale osservate due altre forze, dette *apparenti*, ovvero

$$\mathbf{F}^t := -m(\mathbf{a}_\beta^\alpha + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta) + \mathbf{F}^{\text{cf}} \quad \mathbf{F}^{\text{cf}} := -m\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{x}^\beta), \quad \mathbf{F}^C := -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^\beta,$$

dette rispettivamente *forza di trascinamento*, *forza centrifuga* e *forza di Coriolis*. Tutte queste forze sono assenti se anche β è inerziale, e inoltre la forza di Coriolis è sempre assente se il punto materiale è in quiete nel nuovo riferimento. La forza centrifuga, d'altra parte, è sempre *normale* a $\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha$.

Per concludere, vediamo come si compongono le *velocità angolari*. Consideriamo un vettore \mathbf{u} solidale ad un riferimento $\gamma = O_\gamma \hat{\mathbf{y}}_1 \hat{\mathbf{y}}_2 \hat{\mathbf{y}}_3$, solidale ad un osservatore O_γ . Rispetto ai due riferimenti α e β già introdotti, si avrà

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\gamma^\alpha \wedge \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\beta = \boldsymbol{\omega}_\gamma^\beta \wedge \mathbf{u}.$$

Ma d'altronde vale anche

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_\beta + \boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u}.$$

Questo significa che

$$\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha \wedge \mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}_\gamma^\alpha - \boldsymbol{\omega}_\gamma^\beta) \wedge \mathbf{u}.$$

Dovendo valere questa relazione per ogni vettore \mathbf{u} solidale a γ , otteniamo la legge

$$\boldsymbol{\omega}_\beta^\alpha + \boldsymbol{\omega}_\gamma^\beta = \boldsymbol{\omega}_\gamma^\alpha.$$

3.3.1. Teoremi di König. I teoremi di König permettono di mettere in relazione il momento angolare e l'energia cinetica di un sistema di N punti materiali $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ calcolati in un certo sistema di riferimento⁷ $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ con un *sistema di riferimento traslante* centrato nel centro di massa G del sistema, ovvero un sistema di riferimento $\gamma = G\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ a velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_\gamma = \mathbf{0}$ rispetto al riferimento fisso (qui e nel seguito omettiamo apici per quantità calcolate relativamente a $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$).

TEOREMA 3.6 (Primo teorema di König). *Dato un sistema di punti materiali $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ di quantità di moto \mathbf{Q} in $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ e centro di massa G , vale la seguente relazione*

$$\mathbf{L}_A = (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{L}^\gamma,$$

dove \mathbf{x}_A individua la posizione di un generico punto A e \mathbf{L}_A è il momento angolare di \mathcal{S} rispetto ad A in un riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, mentre \mathbf{L}^γ è il momento angolare di \mathcal{S} calcolato in un riferimento traslante $\gamma = G\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ centrato nel centro di massa G .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathbf{x}_k = \overrightarrow{OP_k}$ la posizione del punto materiale P_k nel riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$. Per ogni elemento del sistema, la velocità di P_k nel riferimento fisso \mathbf{v}_k e quella nel riferimento traslante \mathbf{v}_k^γ sono legate dalla semplice relazione $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_k^\gamma$. Se \mathbf{x}_G è il vettore che identifica G nel riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$, abbiamo

(1.16)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A &:= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge (\mathbf{v}_k^\gamma + \mathbf{v}_G) = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_k^\gamma + \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_G \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{v}_k^\gamma + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} \equiv \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k^\gamma - \mathbf{x}_A^\gamma) \wedge \mathbf{v}_k^\gamma + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} \equiv \mathbf{L}_A^\gamma + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{Q} \end{aligned}$$

dove il termine \mathbf{L}_A^γ è il momento angolare rispetto ad A nel riferimento traslante. Il fatto notevole, ora, è che questo momento *non* dipende dal punto A e può quindi essere indicato semplicemente

⁷Il riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ può essere pensato come inerziale, ma non è necessario.

con \mathbf{L}^γ . In tale riferimento traslante infatti il centro di massa ha velocità nulla, e quindi la quantità di moto \mathbf{Q}^γ è nulla: di conseguenza, per via della legge di cambiamento di polo, il punto rispetto al quale il momento angolare viene calcolato è irrilevante. \square

COROLLARIO 3.7. *Il momento angolare \mathbf{L}_G calcolato rispetto a G nel riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$ coincide con il momento angolare \mathbf{L}^γ calcolato nel riferimento traslante centrato nel centro di massa G .*

Veniamo ora al secondo teorema di König, che riguarda invece l'energia cinetica.

TEOREMA 3.8 (Secondo teorema di König). *L'energia cinetica di un sistema materiale di massa m può essere espressa come*

$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + T^\gamma$$

dove T^γ è l'energia cinetica del sistema in un riferimento traslante con origine il centro di massa.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso di un corpo composto da n punti materiali $\mathcal{S} = \{P_k\}_{k=1}^N$ e indichiamo con \mathbf{x}_k la posizione di un punto materiale P_k di massa m_k nel riferimento $O\hat{\mathbf{i}}_1\hat{\mathbf{i}}_2\hat{\mathbf{i}}_3$. Sia inoltre il centro di massa G del sistema individuato dal vettore \mathbf{x}_G nello stesso riferimento. Possiamo usare la legge di composizione delle velocità di Galilei e scrivere

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^\gamma + \mathbf{v}_G,$$

dove \mathbf{v}_k^γ è la velocità di P_k rispetto ad un riferimento traslante centrato in G . Abbiamo quindi che

$$\|\mathbf{v}_k\|^2 = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \|\mathbf{v}_k^\gamma\|^2 + \|\mathbf{v}_G\|^2 + 2\langle \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle.$$

Dunque possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_G\|^2 \sum_{k=1}^N m_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k^\gamma\|^2 + \sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_G\|^2 + T^\gamma.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la linearità del prodotto scalare: infatti, $\sum_{k=1}^N m_k \langle \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle = \langle \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^\gamma, \mathbf{v}_G \rangle = 0$, dato che $\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^\gamma$ è la quantità di moto nel riferimento del centro di massa, che è zero. \square