

## Meccanica newtoniana

### 1. Spaziotempo galileiano e leggi della meccanica

La struttura matematica sottesa a gran parte dell'esposizione che verrà data sarà quella di spazio affine euclideo  $\mathbb{E}^n$ , ovvero uno spazio affine su uno spazio vettoriale reale prehilbertiano  $\mathbb{V}$  di dimensione  $n$ .

Uno spazio affine di dimensione  $n$   $\mathbb{A}_n$  è un *insieme di punti* associato ad uno spazio vettoriale  $n$ -dimensionale  $\mathbb{V}_n$  di *vettori liberi* su un campo  $\mathbb{K}$ , di modo che sia definita una mappa

$$+ : \mathbb{A}_n \times \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{A}_n, \quad (P, \mathbf{v}) \mapsto P + \mathbf{v},$$

con le seguenti proprietà:

- $\forall P \in \mathbb{A}_n, P + \mathbf{0} = P$ , dove  $\mathbf{0}$  è il vettore nullo in  $\mathbb{V}_n$ .
- $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_n$  e  $\forall P \in \mathbb{A}_n, (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  (associatività<sup>1</sup>).
- $\forall P \in \mathbb{A}_n$ , l'applicazione  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_n \mapsto P + \mathbf{v}$  è una biiezione.

Ciò implica anche che  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_n$ , la mappa  $P \in \mathbb{A}_n \mapsto P + \mathbf{v}$  è una biiezione. Si definisce quindi anche la *sottrazione* tra elementi dello spazio affine, ovvero per ogni  $P, Q \in \mathbb{A}_n$  si indica con  $Q - P$  l'unico  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_n$  tale che  $P + \mathbf{v} = Q$ .

Dati due spazi affini  $\mathbb{A}_n$  e  $\mathbb{A}'_n$  di uguale dimensione finita  $n$  e campi vettoriali  $\mathbb{V}_n$  e  $\mathbb{V}'_n$  rispettivamente, un isomorfismo affine tra essi

$$\mathbf{A} : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}'_n,$$

è tale che esiste una mappa lineare  $\mathbf{L} : \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{V}'_n$  biettiva che soddisfa  $\mathbf{A}(e + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(e) + \mathbf{L}(\mathbf{v})$ , di modo che l'isomorfismo inverso  $\mathbf{A}^{-1}$  sia associato alla mappa  $\mathbf{L}^{-1}$ .

Se lo spazio vettoriale  $\mathbb{V}_n$  è inoltre prehilbertiano, esso è inteso dotato di una operazione di prodotto interno, che indicheremo con  $\langle \bullet, \bullet \rangle$ , che permette di introdurre il concetto di *base ortonormale* come un set di  $n$  vettori  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_{k=1}^n$  tale che  $\mathbb{V}_n = \text{span}\{\hat{\mathbf{i}}_k\}_k$  e  $\langle \hat{\mathbf{i}}_i, \hat{\mathbf{i}}_j \rangle = \delta_{ij}$  per  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Il prodotto scalare induce una norma sullo spazio  $\mathbb{V}_n$ , di modo che detto  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_n$  definiamo la sua norma  $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ . Lo spazio affine si dice essere quindi *euclideo di dimensione  $n$*  e si indica con  $\mathbb{E}^n$ . Possiamo introdurre il concetto di *distanza*  $d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  tra punti di  $\mathbb{E}^n$  come

$$d(P, Q) := \|Q - P\|.$$

**1.1. Spaziotempo galileiano.** Lo *spaziotempo* della meccanica classica è uno spazio affine quadridimensionale  $\mathbb{A}_4$  su uno spazio vettoriale reale  $\mathbb{V}_4$ , i cui punti  $e \in \mathbb{A}_4$  si chiamano *punti di universo* o *eventi*. Lo spaziotempo è altresì dotato di una *applicazione lineare* (non nulla)  $\tau : \mathbb{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}$ , detta *tempo*, tale che  $\tau(e_2 - e_1) \in \mathbb{R}$  fornisca l'*intervallo di tempo* tra gli eventi  $e_1$  ed  $e_2$ . Due eventi  $e_1$  ed  $e_2$  sono in particolare *simultanei* se  $\tau(e_2 - e_1) = 0$ . Il nucleo dell'applicazione  $\tau$ , sia  $\text{Ker}(\tau)$ , corrisponde all'insieme degli eventi simultanei. In particolare, possiamo introdurre le classi di equivalenza

$$[e] := \{e' \in \mathbb{A}_4 \mid e' - e \in \text{Ker}(\tau)\}$$

<sup>1</sup>Il secondo  $+$  indica l'operazione di somma in  $\mathbb{V}_n$ .

nello spazio affine  $\mathbb{A}_4$ . Ciascuna di queste classi è uno spazio affine tridimensionale: basta infatti osservare che, essendo  $\tau$  una applicazione lineare non nulla,  $\dim \text{Ker}(\tau) = \dim \mathbb{V}_4 - \dim \mathbb{R} = 3$  per il teorema del rango.

Il kernel di  $\tau$  si assume infine dotato di prodotto scalare  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  che permette di definire la *distanza* tra eventi  $e$  ed  $e'$  simultanei come  $d(e, e') = \|e_2 - e_1\| := \sqrt{\langle e_2 - e_1, e_2 - e_1 \rangle}$ . In virtù di questa ulteriore struttura, ogni classe di equivalenza  $[e]$  è uno spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$ .

Lo spaziotempo galileiano consiste perciò nella combinazione di quattro ingredienti: lo spazio affine quadridimensionale  $\mathbb{A}_4$ ; il corrispondente spazio vettoriale reale quadridimensionale su cui è costruito,  $\mathbb{V}_4$ ; l'applicazione lineare tempo  $\tau: \mathbb{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}$ ; l'operazione di prodotto scalare  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  su  $\text{Ker}(\tau)$ . Scriveremo quindi  $\mathcal{G} = (\mathbb{A}_4, \mathbb{V}_4, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ .

Un isomorfismo tra *spazi galileiani* richiede condizioni più stringenti rispetto al semplice isomorfismo tra spazi affini, ovvero dovrà richiedere di preservare la struttura galileiana.

**DEFINIZIONE 1.1.** Siano  $\mathcal{G} = (\mathbb{A}_4, \mathbb{V}_4, \tau, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  e  $\mathcal{G}' = (\mathbb{A}'_4, \mathbb{V}'_4, \tau', \langle \bullet, \bullet \rangle)$  due spazi galileiani. Un isomorfismo  $\mathbf{A}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  corrisponde ad un isomorfismo affine  $\mathbf{A}$  con associato isomorfismo lineare  $\mathbf{L}: \mathbb{V}_4 \rightarrow \mathbb{V}'_4$  tale che

- $\mathbf{L}$  preserva il tempo,  $\tau' \circ \mathbf{L} = \tau$  (e quindi  $\mathbf{L}(\text{Ker}(\tau)) = \text{Ker}(\tau')$ );
- $(\mathbf{L}(\mathbf{v}), \mathbf{L}(\mathbf{w})) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Ker}(\tau)$ .

La ragione della definizione sta nel fatto che esiste uno spazio galileiano di speciale interesse, ovvero quello ottenuto canonicamente scegliendo  $\mathbb{A}'_4 = \mathbb{V}'_4 = \mathbb{R}^4$ , detto *spaziotempo galileiano di coordinate*. Indicheremo un punto di tale spazio con  $(t, \mathbf{x})$ , dove  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , in modo che l'operazione somma  $(P, \mathbf{v}) \in \mathbb{A}_4 \times \mathbb{V}_4 \mapsto P + \mathbf{v} \in \mathbb{A}_4$  si riduca alla usuale somma di elementi di  $\mathbb{R}^4$ . L'applicazione tempo su di esso agisce in modo tale che  $\tau: (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4 \mapsto t \in \mathbb{R}$ , mentre il prodotto scalare è il prodotto scalare canonico in  $\mathbb{R}^3$ . In questo spazio potremo utilizzare facilmente gli strumenti dell'analisi per lo studio della meccanica.

**DEFINIZIONE 1.2.** Un isomorfismo  $\Phi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  da uno spaziotempo galileiano generico ad uno spaziotempo galileiano di coordinate  $\mathbb{R}^4$  è detto *sistema di riferimento*.

Richiedere che  $\Phi$  sia un isomorfismo galileiano significa che esso deve soddisfare certe precise proprietà ed in particolare queste proprietà devono essere anche soddisfatte dalla mappa

$$\Psi := \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

che compone due sistemi di riferimento  $\Phi$  e  $\hat{\Phi}$  e che permette di passare da un certo spaziotempo di coordinate ad un altro. Pittorialmente

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_4 & \\ \swarrow \Phi & & \searrow \hat{\Phi} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\Psi = \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Siano ora dati due eventi  $e_1$  ed  $e_2$  di  $\mathbb{A}_4$ . Indichiamo  $\Phi(e_i) = (t_i, \mathbf{x}_i)$  e  $\hat{\Phi}(e_i) = (\hat{t}_i, \hat{\mathbf{x}}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , le corrispondenti immagini in  $\mathbb{R}^4$  secondo due riferimenti di coordinate. La mappa  $\Psi = \hat{\Phi} \circ \Phi^{-1}$  deve essere una trasformazione affine, quindi nella forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + t_0 \\ \mathbf{v}t + \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}$$

per uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  e una matrice  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Inoltre, essa stessa deve essere un isomorfismo galileiano, e dunque, perché la struttura galileiana sia preservata, dovrà valere

$$t_2 - t_1 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1 = a(t_2 - t_1) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle, \quad \text{se } \tau(e_1 - e_2) = 0 \quad \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1\| = \|\mathbf{R}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|.$$

Le uguaglianze sono realizzate per qualsivoglia coppia di eventi se  $a = 1$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{R} \in \mathbf{O}(3)$ , e per qualsivoglia scelta di  $t_0$  e  $\mathbf{x}_0$ , ovvero se la trasformazione  $\Psi$  ha la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, t_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{R} \in \mathbf{O}(3).$$

In altre parole,  $\Psi$  è esprimibile *univocamente* in termini delle seguenti trasformazioni

*Traslazione dell'origine:*  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t + t_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$  per un dato  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

*Rotazione della componente spaziale:*  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{R}\mathbf{x})$  per qualche  $\mathbf{R} \in \mathbf{O}(3)$ .

*Moto rettilineo uniforme:*  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t)$  per qualche  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ .

Come si verifica facilmente si tratta di un *gruppo*, detto *di Galilei*. Da un computo del numero di parametri necessari per specificare ciascuna delle trasformazioni elencate, il gruppo ha quindi dimensione  $10 = 4 + 3 + 3$ .

**1.2. Traiettorie in un riferimento cartesiano.** Nello spazio così costruito si può considerare lo studio di un *punto materiale*: il concetto di punto materiale è assunto primitivo e si può pensare come un corpo di cui si possono trascurare le dimensioni spaziali. In altre parole, un punto materiale  $P$  è associato ad una *linea di universo* nella forma  $\Gamma_P = (\Phi^{-1} \circ (\text{id}, \mathbf{x}_P))(I) \subset \mathbb{A}_4$ , dove  $\Phi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  è un riferimento di coordinate e  $\mathbf{x}_P: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva su un certo intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  che assumeremo continua con derivate continue fino alla seconda<sup>2</sup>, e  $\text{id}$  è l'applicazione identità. Una linea di universo corrisponde perciò all'evoluzione di un *punto* in  $\mathbb{R}^3$ . Indicheremo punto materiale e corrispondente punto geometrico in  $\mathbb{R}^3$  con lo stesso simbolo  $P$ , e diremo che questo punto ha posizione individuata dalle coordinate  $\mathbf{x}_P$  al tempo  $t$ . In analogia con quanto detto sulle curve, definiremo la *velocità* del punto materiale  $P$  come

$$\mathbf{v}_P := \frac{d\mathbf{x}_P}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}_P.$$

e la sua *accelerazione* come

$$\mathbf{a}_P := \frac{d^2\mathbf{x}_P}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{x}}_P.$$

Se abbiamo una collezione  $\mathcal{S} = \{P_i\}_{i=1}^n$  di  $n$  punti, lo studio dovrà tenere conto di  $n$  linee di universo, e quindi  $n$  applicazioni  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . La concatenazione  $\mathbf{X} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{x}_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  descrive il *sistema* di  $n$  punti e vive in uno spazio di dimensione  $3n$ , detto *spazio delle configurazioni*: le traiettorie nello spazio delle configurazioni contengono collettivamente le informazioni sulle loro linee universo in  $\mathbb{A}_4$ .

**1.3. Principî della meccanica.** Avendo fissato le proprietà dello spazio in cui opereremo, il primo passo per una trattazione della meccanica è l'introduzione di una serie di postulati che riguardano le proprietà dinamiche dei punti materiali. I punti materiali si assumono in grado di influenzare le loro linee universo reciprocamente: in altre parole, le linee universo di due punti saranno soggette a delle reciproche condizioni matematiche. Queste proprietà sono specificate dai principî, o postulati, della meccanica. Anzitutto, introduciamo il seguente postulato, anche detto di Galilei, che assume l'esistenza di una classe speciale di sistemi di riferimento.

**POSTULATO 1.1** (Primo postulato della meccanica). *Esiste uno speciale sistema di riferimento, detto inerziale, nel quale l'accelerazione di un punto materiale isolato è nulla in ogni istante, qualunque sia il suo stato cinematico, ovvero la sua posizione e la sua velocità.*

<sup>2</sup>In seguito considereremo casi in cui la derivata prima ammette discontinuità su un insieme numerabile del supporto: essi saranno idealizzazioni utili allo studio degli urti.

Il postulato si basa sul concetto impreciso di “isolato”, che possiamo qualitativamente immaginare come equivalente a “infinitamente distante da ogni altro sistema con cui il punto materiale possa interagire”. Se esiste un riferimento inerziale, ne esistono infiniti altri: il gruppo di Galilei ha infatti la proprietà di lasciare invariate le accelerazioni delle linee di universo, e si può utilizzare per trasformare un dato riferimento inerziale in un nuovo riferimento inerziale.

I successivi postulati fanno riferimento alle proprietà meccaniche di punti materiali osservate in sistemi inerziali.

**POSTULATO 1.2** (Secondo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , le loro corrispondenti accelerazioni  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  in un sistema di riferimento inerziale sono tali da soddisfare la relazione*

$$m_{12}\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\|,$$

*per un qualche scalare  $m_{12} > 0$  indipendente dallo stato cinematico del sistema e dall'istante della misura. Dato un sistema isolato  $\hat{S} = \{P_0, P_1\}$  costituito da uno dei due punti già considerati, per esempio  $P_1$ , ed un terzo, diverso punto materiale  $P_0$ , nelle stesse ipotesi precedenti  $m_{10}\|\hat{\mathbf{a}}_1\| = \|\hat{\mathbf{a}}_0\|$  (dove abbiamo evidenziato che le accelerazioni in gioco saranno in generale diverse), e similmente, considerando il sistema isolato  $\tilde{S} = \{P_0, P_2\}$ ,  $m_{20}\|\tilde{\mathbf{a}}_2\| = \|\tilde{\mathbf{a}}_0\|$ . Allora vale*

$$\frac{m_{10}}{m_{20}} = m_{12}.$$

In altre parole, il postulato ammette la scelta di un “punto materiale campione”, per esempio  $P_0$ , da usare come riferimento per assegnare ad ogni altro punto materiale  $P_i$  una *massa inerziale*  $m_i \equiv m_{i0}$  (nella notazione adottata), ovvero uno scalare positivo corrispondente al rapporto delle accelerazioni indotte dall'interazione con il punto materiale campione. In seguito utilizzeremo la notazione  $(P_i, m_i)$  per indicare che la massa assegnata al punto  $P_i$  è  $m_i$ .

Il terzo postulato ci informa sulle direzioni delle accelerazioni in un sistema isolato di due punti materiali.

**POSTULATO 1.3** (Terzo postulato della meccanica). *Dato un sistema isolato di due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  in posizioni  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  rispettivamente, per un osservatore inerziale le corrispondenti accelerazioni  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  hanno la direzione di  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  e versi tra loro opposti.*

I postulati dati finora sono ancora insufficienti per lo studio della meccanica, dato che riguardano sistemi isolati di al più due punti materiali. Il seguente postulato ausiliario permette di superare questa difficoltà e comporre gli effetti delle interazioni a due corpi finora considerate.

**POSTULATO 1.4** (Principio di sovrapposizione). *L'accelerazione prodotta su un punto materiale  $P$  di massa  $m$  dall'interazione con  $n$  punti materiali in un riferimento inerziale è la somma delle accelerazioni che verrebbero prodotte se  $P$  interagisse con ciascuno di essi separatamente in un sistema isolato a due corpi.*

Alla luce di quanto detto è utile dare la seguente

**DEFINIZIONE 1.3** (Forza). Dato un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e soggetto ad una accelerazione  $\mathbf{a}$ , la forza su di esso applicata è definita come

$$\mathbf{F} := m\mathbf{a}.$$

Questa definizione permette, in ultima analisi, di studiare per esempio sistemi isolati  $\mathcal{S} = \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$  di  $n$  punti materiali: per ciascuno di essi vale una equazione nella forma  $m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k$ , dove  $\mathbf{F}_k$  sarà la forza applicata al punto  $P_i$  di massa  $m_k$  e accelerazione  $\mathbf{a}_k$ . In molti casi, come vedremo, informazioni aggiuntive sulla forma funzionale di  $\mathbf{F}_i$  (dovute per esempio all'esperienza sperimentale) renderanno la definizione una equazione differenziale per la dinamica del punto a cui è applicata. Il tipo di dipendenza funzionale in  $\mathbf{F}_k$  dalle traiettorie  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$  è dato dal seguente

POSTULATO 1.5 (Principio di determinismo di Newton). *Lo stato cinematico di un sistema isolato, ovvero la posizione e le velocità di tutti i punti materiali che lo compongono, identifica univocamente il suo moto.*

Questo postulato ha infatti una conseguenza importante: dovendo essere posizioni e velocità sufficienti all'integrazione delle equazioni del moto, la dipendenza funzionale della forza  $\mathbf{F}_k$  agente su un punto materiale  $P_k$  in un sistema isolato  $\mathcal{S} = \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$  di  $n$  punti può essere solo del tipo  $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(t, \{\mathbf{x}_i\}_i, \{\dot{\mathbf{x}}_i\}_i)$ . Dovendo infatti essere sufficienti velocità e posizioni di tutti i punti del sistema per determinare l'evoluzione del sistema stesso, le quantità  $\mathbf{F}_k$  non possono manifestare una dipendenza funzionale da derivate di ordine superiore al primo<sup>3</sup>.

1.3.1. *Invarianza galileiana e sue conseguenze.* Abbiamo già detto che una trasformazione galileiana trasforma un sistema inerziale in un altro sistema inerziale. Il contenuto di tutti e tre i principi è invariante sotto queste trasformazioni. Alla luce di questo, un passo ulteriore è quello proposto da Galilei, ovvero richiedere che *tutte le leggi della fisica siano invarianti sotto trasformazioni galileiane*. Si tratta di un principio formulato nel 1632 ed assunto valido per quasi trecento anni durante tutto lo sviluppo della meccanica classica<sup>4</sup>.

Ciascun tipo di trasformazioni con cui si costruisce la generica trasformazione galileiana ha un significato fisico profondo. L'invarianza per traslazione dell'origine del riferimento quadridimensionale manifesta l'assunzione che spazio e tempo siano *omogenei*, ovvero che una qualunque legge fisica non può dipendere da posizioni o istanti di tempo particolari se vogliamo che sia compatibile con l'invarianza galileiana. L'invarianza dello spazio sotto rotazioni ne esprime l'*isotropia*, ovvero il fatto che non vi sono direzioni privilegiate. Infine, l'intuizione di Galilei ha una implicazione profonda anche sulla nostra interpretazione dello spaziotempo. Dato che non è possibile, per mezzo di un esperimento fisico realizzato entro un riferimento inerziale, rilevare se il riferimento stesso è in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro riferimento inerziale, ogni riferimento inerziale ha pari dignità. La conseguenza è la negazione del concetto aristotelico di *spazio assoluto*: non è possibile *identificare* punti dello spazio in istanti diversi,

<sup>3</sup>Ha senso chiedersi perché escludiamo la dipendenza funzionale da derivate di ordine secondo, ovvero perché escludiamo il caso in cui  $\mathbf{F}_k$  dipenda in forma funzionale dalle accelerazioni dei punti del sistema. La ragione è che una dipendenza siffatta può portare a delle inconsistenze fisiche. Supponiamo per semplicità di avere un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e traiettoria  $\mathbf{x}$ , per cui vale la legge  $m\ddot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0)$ , per esempio in effetto dell'interazione con un altro punto materiale  $P_0$ . Dipendentemente dalla forma funzionale di  $\mathbf{F}_0$ , questa legge potrebbe *non* permettere di identificare  $\mathbf{a}_0$  univocamente in un certo istante in cui è dato lo stato cinematico. Anche ignorando questo fatto, inconsistenze ulteriori possono emergere per via del principio di sovrapposizione: se l'interazione con un secondo punto materiale  $P_1$  produce la forza  $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ , allora in presenza di entrambi i punti  $P_0$  e  $P_1$ , deve valere per  $P$  l'equazione  $m(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) + \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0) + \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ , ovvero  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_0)$ , dove evidentemente risulta che  $\mathbf{F}_0$  dipende da  $\mathbf{a}_1$ , il che non è fisico. Per ulteriori dettagli, si veda L. A. Pars, *A treatise on analytical mechanics* (1965).

<sup>4</sup>Galilei ha espresso il principio in una celebre pagina piuttosto chiara del suo *Dialogo*:

SALVIATI: Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti: siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza. [...] Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia mentre il vascello sta fermo non debbano succedere così: fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur di moto uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti; né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina, o pure sta ferma.

Galileo Galilei  
*Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo* (1632)

dato che non abbiamo modo di seguire la posizione di un punto rispetto ad un riferimento assoluto, né ha senso farlo. Di conseguenza, in letteratura<sup>5</sup> è stato osservato come sia più coerente pensare  $\mathbb{A}_4 = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$  associando *ad ogni elemento* dello spazio euclideo di tipo tempo  $\mathbb{E}^1$  una *diversa copia* di  $\mathbb{E}^3$ , rappresentante l'usuale spazio. È questa la ragione per cui, nella definizione di spaziotempo, abbiamo escluso la possibilità di parlare di distanza spaziale tra eventi riferiti a istanti diversi: ciò equivarrebbe a tentare una impossibile misura di distanza tra punti in spazi diversi. Questo tipo di struttura è quella matematicamente formalizzata dal concetto di *fibrato*, in cui  $\mathbb{E}^3$  è la *fibra* associata ad ogni punto della *base*  $\mathbb{E}^1$ . L'approfondimento di questo aspetto è però oltre gli obiettivi del modulo e verrà omessa.

Come abbiamo già in parte visto, il principio di determinismo di Newton e quello galileiano hanno delle conseguenze sulla forma funzionale delle forze nelle equazioni sopra. Se abbiamo cioè un sistema isolato di  $n$  punti  $\mathcal{S} = \{(P_k, m_k)\}_{k=1}^n$ , se *imponiamo* l'invarianza sotto il gruppo di Galilei delle equazioni del moto, possiamo dedurre una serie di proprietà sulla forma funzionale che, per ciascun  $k$ , la forza  $\mathbf{F}_k$  che agisce sul punto materiale  $P_k$  può assumere.

Anzitutto, il gruppo di Galilei include le traslazioni temporali, per cui se richiediamo che le leggi della natura non dipendano da un tempo specifico  $t$ , deve essere  $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_i\}_i, \{\dot{\mathbf{x}}_i\}_i)$ . Il gruppo include anche *invarianza per traslazioni* e *invarianza per cambi di riferimento in moto rettilineo uniforme reciproco*. Dovrà essere

$$\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i<j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i<j}), \quad \mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j.$$

Infine, lo spazio è *isotropo*: la legge del moto non può cambiare se eseguiamo una rotazione del riferimento. Detta  $\mathbf{R} \in O(3)$ , indicando  $\mathbf{x}_{ij} := \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{F}_k(\{\mathbf{R}\mathbf{x}_{ij}\}_{i<j}, \{\mathbf{R}\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i<j}) = \mathbf{R}\mathbf{F}_k(\{\mathbf{x}_{ij}\}_{i<j}, \{\dot{\mathbf{x}}_{ij}\}_{i<j})$ .

Una conseguenza di tutte le osservazioni fatte finora è che se si considera un *singolo punto materiale*, in assenza di altri punti materiali, esso deve essere sottoposto ad una forza nulla: abbiamo così verificato la compatibilità del secondo postulato e dell'invarianza galileiana con il primo postulato. Questo è apparentemente in contrasto con la gran frequenza con cui vengono studiate in meccanica equazioni di singoli punti materiali nella forma  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , in palese violazione con le osservazioni elencate. Leggi di questo tipo, sebbene in violazione con l'invarianza galileiana, sono utili *approssimazioni* in cui l'effetto del moto di  $P$  sugli altri punti materiali con cui interagisce viene trascurato (per esempio perché si assume che la loro massa sia di molto maggiore della massa di  $P$ , come accade nello studio della caduta dei gravi). Nel seguito ci focalizzeremo sulla meccanica del *singolo punto materiale* e su una dipendenza funzionale di  $\mathbf{F}$  del tipo indicato, ovvero  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , tenendo a mente del fatto che si tratta di una utile approssimazione.

**1.4. Lavoro e forze conservative.** Consideriamo ora un punto materiale  $(P, m)$  individuato dalla traiettoria  $\mathbf{x}$  e soggetto ad una forza  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  che si muove con velocità  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ . La *potenza* associata all'azione della forza  $\mathbf{F}$  sul punto materiale al tempo  $t$  è definita come

$$\Pi(t) := \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle.$$

A tale funzione è associato il *lavoro* eseguito durante la dinamica a partire da un certo tempo  $t_0$  fino al tempo  $t > t_0$ , e definito come l'integrale di linea della forza sulla traiettoria del punto materiale

$$W(t_0, t) := \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \langle \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau.$$

L'espressione dipende in generale dallo stato cinematico del corpo in tutti gli istanti tra  $t_0$  e  $t$ , e ha suggerito l'introduzione della quantità *energia cinetica* associata al punto materiale.

<sup>5</sup>R. Penrose, *Structure of space-time*, in *Battelle Rencontres*, 121-235 (1968).

DEFINIZIONE 1.4. L'energia cinetica di un punto materiale  $(P, m)$  che si muove su una traiettoria  $\mathbf{x}$  è

$$T(\dot{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2.$$

Il legame tra lavoro svolto ed energia cinetica è espresso dal seguente semplice

TEOREMA 1.6 (delle “forze vive”). *Dato un punto materiale  $(P, m)$  in moto lungo una traiettoria  $\mathbf{x}(t)$ , il lavoro svolto dalla forza totale agente su di esso tra un tempo  $t_0$  e un tempo  $t > t_0$  è uguale alla variazione della sua energia cinetica, ovvero*

$$T(\dot{\mathbf{x}}(t)) - T(\dot{\mathbf{x}}(t_0)) = W(t_0, t).$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$\frac{dT(\dot{\mathbf{x}})}{dt} = m \langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \Pi,$$

e integrare questa relazione nel tempo per ottenere la definizione di  $W$ .  $\square$

Se  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , ovvero la forza applicata a  $P$  dipende esclusivamente dalla sua posizione, allora è possibile utilizzare una parametrizzazione intrinseca della traiettoria  $\boldsymbol{\gamma}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $\ell$  è la lunghezza della traiettoria percorsa nell'intervallo  $[t_0, t]$ , introducendo una ascissa curvilinea  $s: [t_0, t] \rightarrow [0, \ell]$ , così che  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} \circ s$ :

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Pi(\tau) d\tau = \int_0^\ell \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(s)), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) \rangle ds.$$

L'espressione dipende quindi *puramente dalla traiettoria* percorsa e non da *come* essa è stata percorsa, ovvero è invariante per riparametizzazioni temporali. Un'ulteriore semplificazione si verifica quando la forza è un *campo conservativo*, ovvero esiste un *potenziale*, detto *energia potenziale*,  $V: A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  e  $V \in \mathcal{C}^2(A)$ , tale per cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

In tal caso, detto  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$  e  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(t)$ ,

$$(1.1) \quad W(t_0, t) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}), d\boldsymbol{\gamma} \rangle = - \int_{\boldsymbol{\gamma}} dV = V(\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x})$$

ovvero il lavoro svolto dipende solo dalla posizione finale e iniziale della curva seguita. Questo cruciale fatto permette di enunciare il seguente, importante teorema.

TEOREMA 1.7 (Conservazione dell'energia meccanica). *Dato un punto materiale  $P$  di traiettoria  $\mathbf{x}$  soggetto a sole forze conservative associate ad un potenziale  $V$ , la sua energia meccanica*

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x})$$

*rimane costante durante il moto.*

DIMOSTRAZIONE. Il risultato si ottiene combinando l'Eq. (1.1) con il teorema delle forze vive, indicando per brevità  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(t_0)$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \equiv \dot{\mathbf{x}}(t)$  e  $\dot{\mathbf{x}}_0 \equiv \dot{\mathbf{x}}(t_0)$ ,

$$T(\dot{\mathbf{x}}) - T(\dot{\mathbf{x}}_0) = -V(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}_0) \Rightarrow E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := T(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x}) = T(\dot{\mathbf{x}}_0) + V(\mathbf{x}_0). \quad \square$$

Il teorema rimane valido se sul punto materiale agiscono forze anche non conservative ma aventi potenza nulla. Un campo di forze conservativo ha la proprietà di essere *irrotazionale*, ovvero  $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , come diretta conseguenza della sua definizione: viceversa l'irrotazionalità garantisce l'esistenza di un potenziale purché il dominio di definizione di  $\mathbf{F}$  sia semplicemente connesso.

**1.5. Quantità di moto e momento della quantità di moto.** Due quantità svolgeranno un ruolo importante nell'analisi delle equazioni del moto e in generale nella teoria che verrà sviluppata in seguito.

DEFINIZIONE 1.5 (Quantità di moto e momento della quantità di moto). Sia dato un punto materiale  $(P, m)$  di traiettoria  $\mathbf{x}$ . Detta  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}}$ , la sua *quantità di moto* è definita come

$$\mathbf{Q} := m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{x}},$$

mentre il suo *momento della quantità di moto*, o *momento angolare*, rispetto ad un polo  $Y$  in posizione  $\mathbf{y}$  è definito come

$$\mathbf{L}_Y := (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{Q}.$$

Analogamente si introduce il *momento della forza*  $\mathbf{F}$  applicata ad un punto materiale  $(P, m)$  rispetto ad un polo.

DEFINIZIONE 1.6. Sia dato un punto materiale  $(P, m)$  in posizione  $\mathbf{x}$  su cui agisce una forza  $\mathbf{F}$ . Il momento della forza rispetto ad un polo  $Y$  in posizione  $\mathbf{y}$  è

$$\boldsymbol{\tau}_Y := (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{F}.$$

Il polo scelto per il calcolo del momento della quantità di moto o il momento della forza può essere cambiato utilizzando una semplice regola di cambio di polo di facile verifica: se  $Z$  è un punto di posizione  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{L}_Z = (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{L}_Y$ ; similmente,  $\boldsymbol{\tau}_Z = (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mathbf{F} + \boldsymbol{\tau}_Y$ .

Così come la relazione  $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \dot{\mathbf{Q}}$  esprime la conservazione della quantità di moto quando  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , esiste una relazione analoga tra il momento di una forza e il momento della quantità di moto, indotta proprio dalle equazioni del moto, da cui si deriva immediatamente.

PROPOSIZIONE 1.8. Sia dato un punto materiale  $(P, m)$  in posizione  $\mathbf{x}$  con velocità  $\mathbf{v}$  in un riferimento inerziale, su cui agisce la forza  $\mathbf{F}$ . Dato un polo di riferimento  $Y$ , fisso, si ha

$$\dot{\mathbf{L}}_Y = \boldsymbol{\tau}_Y.$$

Di conseguenza, se  $\boldsymbol{\tau}_Y = \mathbf{0}$  allora  $\mathbf{L}_Y$  si conserva.

**1.6. Vincoli.** La forza che appare nell'equazione  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  per un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e traiettoria  $\mathbf{x}$  nasce dall'interazione di tale punto con altri sistemi. In particolare, se il sistema è soggetto ad un *vincolo*, essa incorpora anche l'azione del vincolo sul punto materiale. Per esempio, supponiamo che un punto materiale  $P$  sia vincolato a muoversi su una superficie regolare mobile individuata in forma implicita dall'equazione

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

L'insieme dei punti della superficie  $S(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\mathbf{x}, t) = 0\}$  dipende quindi dal tempo. Ciò significa che in ogni istante  $t$  la posizione del punto dovrà soddisfare la condizione precedente. Un vincolo siffatto è detto *semplice*. Si può avere a che fare anche con un vincolo *doppio*, individuato da due superfici regolari (in questo caso, il vincolo può risultare in una curva<sup>6</sup>),

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \varphi_2(\mathbf{x}, t) = 0.$$

<sup>6</sup>Un vincolo doppio, costituito quindi da due superfici regolari  $S_1(t)$  ed  $S_2(t)$ , non necessariamente fornisce una curva: escludendo il caso in cui le due superfici non si intersecano (che implica che non esistono punti dello spazio ammessi per il punto materiale), le due superfici individuano una curva regolare in un intorno di un loro punto  $P \in S_1(t) \cap S_2(t)$  se sono *trasversali*, ovvero non tangenti, in  $P$ . Se la condizione vale per ogni punto della loro intersezione, si scrive  $S_1(t) \pitchfork S_2(t)$ . In altre parole, è necessario che i loro spazi tangenti in  $P$  non coincidano, e che quindi i loro versori normali in quel punto non siano paralleli: diversamente,  $P$  potrebbe essere un singolo punto isolato di tangenza. Il concetto di trasversalità può essere reso più preciso e generale nel contesto della topologia differenziale.



Alternativamente, un vincolo su una curva può essere assegnato fornendo direttamente una equazione in forma parametrica del supporto della curva stessa, nella forma  $\gamma: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  per un qualche  $I \in \mathbb{R}$ , di modo che a  $t$  fissato,  $\gamma(u, t)$  parametrizzi la configurazione della curva nell'istante  $t$  al variare di  $u \in I$ , e richiedendo che  $\mathbf{x}$  appartenga al supporto di  $\gamma$  durante tutto il moto. Vedremo in dettaglio questo caso nella sezione successiva.

Vincoli nella forma qui presentata, dipendenti solo dalla posizione del punto materiale e al più dal tempo, sono detti *olonomi*. Il fatto che la posizione del punto materiale debba soddisfare le equazioni di vincolo implica l'esistenza di una opportuna forza vincolare  $\mathbf{F}^{(v)}$  applicata dal vincolo al punto. In generale, possiamo perciò scomporre la forza totale come  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(v)} + \mathbf{F}^{(a)}$ , dove  $\mathbf{F}^{(a)}$  è il restante *contributo attivo* espresso tipicamente da funzioni esplicite dello stato cinematico del punto materiale e del tempo. Una classe di vincoli olonomi ha importanza particolare in meccanica.

**DEFINIZIONE 1.7 (Vincolo liscio).** Un vincolo è detto *ideale* o *liscio* se la reazione vincolare da esso prodotta su un punto materiale è ortogonale al vincolo in ogni istante indipendentemente dallo stato cinematico del punto.

La definizione data sopra implica che  $\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \lambda(t) \nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$  per un vincolo semplice espresso dall'equazione  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ . Similmente, se il vincolo è doppio,  $\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \lambda_1(t) \nabla \varphi_1(\mathbf{x}, t) + \lambda_2(t) \nabla \varphi_2(\mathbf{x}, t)$  per qualche coppia incognita di funzioni  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . La forza di reazione può essere caratterizzata anche in termini dei cosiddetti *spostamenti virtuali*, da cui il nome della definizione sopra. Supponendo per esempio di essere in presenza di un vincolo semplice, e indicando con  $\mathbf{v} \in T_P S(t)$ , spazio tangente della superficie  $S(t)$  specificata dalla condizione di vincolo  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$  ad un certo istante fissato  $t$ , questo vettore si dice rappresentare una “velocità virtuale”, ovvero una direzione tangente alla superficie. La condizione di vincolo olonomo ideale quindi equivale a dire che la reazione vincolare applicata ad un punto  $P$  sulla superficie deve soddisfare  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle = 0$  per *qualsunque* vettore tangente alla superficie: introducendo un intervallo temporale infinitesimo  $\delta t$ , possiamo interpretare  $\mathbf{v} \delta t$  come lo spostamento infinitesimo di un punto materiale sul vincolo nella direzione  $\mathbf{v} \delta t$ , tangenzialmente al vincolo ma *assumendo il vincolo fisso*, di modo che  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle \delta t = 0$  diventi l'espressione di un ipotetico “lavoro” infinitesimo svolto dalla forza in un moto sul vincolo a vincolo fisso, a cui ci si riferisce come ad un *lavoro virtuale*. La condizione  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle = 0$  può essere vista come una formulazione del cosiddetto *principio dei lavori virtuali* o di *d'Alembert–Lagrange*, che può quindi essere visto come un principio che *definisce* un vincolo liscio. Osserviamo qui che essendo  $\mathbf{F}^{(v)} = m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}^{(a)}$ , se  $\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V$ , ovvero la forza attiva è una forza conservativa derivata da un potenziale  $V$ , la condizione  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{v} \rangle = 0$  per ogni  $\mathbf{v}$  diventa

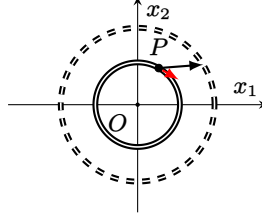
$$\langle m\ddot{\mathbf{x}} + \nabla V, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in T_P S$$

che è una condizione in cui *non* compaiono forze di reazione, da cui l'interesse per tale principio. Torneremo sul principio di d'Alembert–Lagrange in seguito.

**Esempio 1.1** — La differenza tra “spostamenti virtuali” e spostamenti reali si vede più chiaramente nel caso di vincoli mobili. Supponiamo di avere un punto materiale  $P$  soggetto al moto su una guida circolare  $\gamma: [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , individuata dall'equazione

$$(1.2) \quad \gamma(u, t) = \begin{pmatrix} t \cos u \\ t \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Qui  $t$  indica l'istante di tempo, assunto positivo: la guida è quindi una circonferenza che il cui raggio, all'istante  $t$ , è uguale a  $t$ .



Con riferimento alla figura, ad un tempo  $t$  fissato, un vettore di velocità virtuale  $\mathbf{v}$  è il vettore tangente alla curva in quell'istante (linea doppia continua). In un intervallo infinitesimo di tempo  $\delta t$ , esso è associato ad uno spostamento virtuale  $\mathbf{v}\delta t$  *tangente alla circonferenza* (in rosso): questo spostamento non corrisponde ad uno spostamento *reale* del punto, dato che nell'intervallo  $\delta t$  la circonferenza si dilaterà (linea doppia tratteggiata) e il punto dovrà necessariamente evolvere seguendo la guida, di modo che il suo spostamento *reale* infinitesimo (in nero) *non* parallelo a  $\mathbf{v}$  ma avrà una componente diretta radialmente in modo da seguire il vincolo nel suo moto. Gli spostamenti virtuali sono quindi una maniera diversa di intendere lo spazio tangente al vincolo *in un istante fissato*.

Nel caso di vincolo olonomo liscio *fisso*, la reazione vincolare  $\mathbf{F}^{(v)}$  non compie lavoro su un punto materiale sul vincolo che si muove di traiettoria  $\mathbf{x}$ , dato che necessariamente un punto in moto sul vincolo ha velocità tangente al vincolo stesso e la definizione implica quindi che la potenza associata è nulla, ovvero  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0$ . Ciò significa che un vincolo fisso liscio non compie lavoro: se il punto materiale è in moto su un vincolo liscio ed è soggetto a sole forze attive *conservative*, l'energia meccanica si conserva.

1.6.1. *Punto su superficie liscia equipotenziale.* A titolo di esempio, supponiamo di avere un punto materiale soggetto ad una forza attiva *conservativa*, ovvero  $\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V$  per un certo potenziale  $V$ , e che sia vincolato a muoversi su una superficie equipotenziale, ovvero il vincolo assume la forma  $V(\mathbf{x}) - c = 0$  per un qualche  $c \in \mathbb{R}$ . Se assumiamo che la superficie sia regolare, allora ciò significa che in ogni suo punto  $\nabla V \neq \mathbf{0}$  specifica la direzione normale al piano tangente.

DEFINIZIONE 1.8 (Geodetica). Una curva non degenera  $\gamma$  sulla superficie regolare  $S$  è una geodetica se in ogni suo punto  $P$  il suo versore normale  $\hat{\mathbf{n}}(P)$  è nello spazio normale alla superficie, ovvero

$$\hat{\mathbf{n}}(P) \in (\mathcal{T}_P S)^\perp.$$

PROPOSIZIONE 1.9. *Un punto materiale  $(P, m)$  che si muove di traiettoria non degenera sotto l'azione di una forza attiva conservativa su una superficie equipotenziale regolare liscia, segue delle traiettorie geodetiche sulla superficie. Analogamente, un punto materiale soggetto al solo vincolo liscio si muove lungo geodetiche del vincolo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia data una traiettoria  $\mathbf{x}(t)$  regolare seguita dal punto  $P$  sul vincolo. Per ipotesi  $\mathbf{F}^{(v)} = \lambda \nabla V$ , essendo la superficie equipotenziale; ma d'altronde  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} = (\lambda - 1)\nabla V$ , dove per ipotesi  $\lambda \neq 1$  (la traiettoria è assunta non degenera) e  $\nabla V \neq \mathbf{0}$  (la superficie è assunta regolare), per cui l'accelerazione  $\mathbf{a} := \ddot{\mathbf{x}}$  è parallela a  $\nabla V$ , direzione normale al vincolo. Basta ora semplicemente ricordare che in una curva non degenera  $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{s}\hat{\mathbf{t}} + \dot{s}^2\kappa\hat{\mathbf{n}}$ , con  $\kappa$  curvatura,  $\hat{\mathbf{n}}$  versore normale della traiettoria nel punto  $\mathbf{x}$ ,  $\hat{\mathbf{t}}$  versore tangente ad essa nello stesso punto ed  $s$  parametrizzazione intrinseca della traiettoria. Possiamo così concludere che la traiettoria è una geodetica: l'unico contributo nell'accelerazione in grado di concordare con  $\mathbf{F}$  è infatti quello orientato come  $\hat{\mathbf{n}}$ , purché  $\hat{\mathbf{n}}$  sia parallelo a  $\nabla V$  (il contributo  $\hat{\mathbf{t}}$  è sicuramente ortogonale a  $\nabla V$  e pertanto dovrà essere  $\ddot{s} = 0$ ). Analogamente si prova il caso di moto spontaneo su vincolo liscio.  $\square$

1.6.2. *Vincoli scabbi*. L'ipotesi di vincolo liscio è importante in meccanica ma, naturalmente, è il risultato di una semplificazione estrema: più realisticamente, la reazione vincolare presenta una componente tangenziale al vincolo  $\mathbf{F}_t^{(v)}$  oltre a quella normale  $\mathbf{F}_\perp^{(v)}$ , di modo che la reazione vincolare complessiva sia nella forma  $\mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{F}_\perp^{(v)} + \mathbf{F}_t^{(v)}$ . Focalizziamoci su vincoli olonomi *fissi*. Nel caso *statico*, ovvero quando il punto materiale è fermo sul vincolo, sperimentalmente si osserva che il vincolo genera una reazione tangenziale  $\mathbf{F}_t^{(v)}$  atta a mantenere nulla l'accelerazione del punto materiale e tale che

$$\|\mathbf{F}_t^{(v)}\| \leq \mu_s \|\mathbf{F}_\perp^{(v)}\|$$

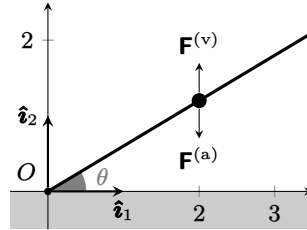
dove  $\mu_s$  è detto *coefficiente di attrito statico*. La forza  $\mathbf{F}^{(v)}$  vive perciò entro doppio un cono, il cui asse è ortogonale al vincolo nel caso di vincolo semplice e ad esso tangente nel caso di vincolo doppio, detto *cono di attrito statico*: di conseguenza, le posizioni di *equilibrio*, cioè tali per cui  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , sono quelle per cui  $\mathbf{F}^{(a)}$  è anch'essa in tale cono, di modo che  $\mathbf{F}^{(v)}$  possa annullarla.

Nel caso dinamico, ovvero se il punto materiale è in moto, la relazione tra componente tangente e normale di  $\mathbf{F}^{(v)}$  coinvolge il cosiddetto *coefficiente di attrito dinamico*  $\mu_d$ , e si trova che

$$\|\mathbf{F}_t^{(v)}\| = \mu_d \|\mathbf{F}_\perp^{(v)}\|.$$

Si osserva che  $0 < \mu_d < \mu_s$ . In questo caso l'attrito *compie lavoro*; inoltre  $\mathbf{F}_t^{(v)}$  è sempre *opposto* alla velocità del punto materiale, ovvero la presenza dell'attrito induce *dissipazione* di energia meccanica, in quanto il lavoro fatto è negativo.

**Esempio 1.2** (Guida inclinata scabra) — Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una guida scabra di coefficiente d'attrito statico  $\mu_s$ . La guida si sviluppa lungo una retta passante per l'origine  $O$  di un riferimento cartesiano e che forma un angolo  $\theta$  con l'asse del riferimento parallelo a  $\hat{\mathbf{i}}_1$ . Essa giace nel piano passante per  $O$  e generato dai vettori  $\hat{\mathbf{i}}_1$  e  $\hat{\mathbf{i}}_2$ .



Sul punto materiale agisce la forza peso, che in questo riferimento assumiamo avere la forma  $\mathbf{F}^{(a)} = -mg\hat{\mathbf{i}}_2$ , con  $g$  accelerazione di gravità. Questo significa che si ha equilibrio se  $\mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{0}$ , dove  $\mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{F}_t^{(v)} + \mathbf{F}_\perp^{(v)}$  è la reazione vincolare della guida. La condizione di equilibrio nelle due direzioni ortogonale e tangenziale si scrive rispettivamente

$$-mg \cos \theta + F_\perp^{(v)} = 0, \quad -mg \sin \theta + F_t^{(v)} = 0$$

da cui  $F_\perp^{(v)} = mg \cos \theta$  e  $F_t^{(v)} = mg \sin \theta$ . D'altra  $|F_t^{(v)}| \leq \mu_s |F_\perp^{(v)}| = mg \mu_s \cos \theta$ , per cui la seconda equazione può essere soddisfatta solo se

$$mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s.$$

Se questa disuguaglianza non è soddisfatta, il punto non può essere in equilibrio.

1.6.3. *Vincoli unilateri.* Concludiamo con una breve osservazione riguardante il caso in cui il vincolo sia nella forma

$$\varphi(\mathbf{x}) \leq 0,$$

di modo che questo delimiti una regione di spazio, piuttosto che una superficie. Il vincolo, in questo caso, si “attiva” solo quando il punto materiale  $P$  è in una posizione tale da soddisfare l’uguaglianza: in tal caso compariranno reazioni vincolari del tipo discusso sopra. Diversamente, il punto non viene influenzato dal vincolo. Come riflessione aggiuntiva, notiamo che, se il punto materiale interagisce in modo *istantaneo* (urto) con la frontiera della regione ammessa, tale urto può essere assunto come ideale (ovvero, indurre una semplice inversione della componente della velocità ortogonale alla frontiera della regione ammessa) o dissipativo. Nel caso di *urto ideale*, l’energia cinetica del punto materiale viene conservata. Il caso di urto ideale può essere formalmente descritto introducendo un potenziale improprio  $V(\mathbf{x})$  pari a 0 per  $\varphi(\mathbf{x}) \leq 0$  e a  $+\infty$  per  $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ , effettivamente proibendo l’accesso alla regione vietata.

## 2. Moto unidimensionale

Sia dato un punto materiale  $(P, m)$  vincolato a muoversi su  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , curva che assumiamo parametrizzata intrinsecamente e che rappresenta una *guida liscia* che vincola il suo moto. La traiettoria di  $P$ , sia essa  $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sarà quindi specificata da una *legge oraria*, ovvero una funzione, che assumeremo di classe almeno  $\mathcal{C}^2$ , che fornisce l’ascissa curvilinea del punto materiale lungo  $\gamma$  a dato istante, ovvero  $s: \mathbb{R} \rightarrow I$ , di modo che  $\mathbf{x} = \gamma \circ s$ . Si noti che *non* richiediamo che  $\dot{s} \neq 0$  per ogni istante  $t$  in questo contesto (ovvero ammettiamo che il punto possa avere velocità nulla). Alla luce di questa parametrizzazione, è utile scomporre la forza agente sul punto materiale in ciascuna posizione di ascissa curvilinea  $s$  separando il contributo vincolare da quello attivo, ovvero  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{(a)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, \mathbf{x})$ , ed esprimere l’equazione nella base fornita dalla terna di Frenet della curva per sfruttare la natura intrinsecamente unidimensionale del moto. Sappiamo infatti che

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{s}\hat{\mathbf{t}}(s) + \dot{s}^2\kappa(s)\hat{\mathbf{n}}(s)$$

per cui nel punto di ascissa curvilinea  $s$  devono valere tre equazioni<sup>7</sup>

$$(1.3) \quad m\ddot{s} = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle,$$

$$(1.4) \quad m\kappa(s)\dot{s}^2 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, s), \hat{\mathbf{n}}(s) \rangle,$$

$$(1.5) \quad 0 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, s), \hat{\mathbf{b}}(s) \rangle.$$

Abbiamo qui usato il fatto che la guida è *liscia*, per cui  $\mathbf{F}^{(v)}$  è ortogonale per ipotesi a  $\hat{\mathbf{t}}$ . L’obiettivo dell’indagine è tipicamente ottenere la legge oraria  $s(t)$  disponendo di opportune condizioni iniziali: per esempio, avendo scelto  $t = 0$  come tempo iniziale, sia  $s(0) = s_0$  (posizione iniziale lungo la curva, corrispondente a  $\mathbf{x}(0) = \gamma(s(0))$ ) e  $\dot{s}(0) = v_0$  (ovvero, velocità iniziale  $\dot{\mathbf{x}}(0) = v_0\hat{\mathbf{t}}(s_0)$ ). Assumiamo anche di *conoscere* la curva  $\gamma$  e le sue proprietà geometriche, e la forma funzionale di  $\mathbf{F}^{(a)}$ . Chiamando

$$f(t, s, \dot{s}) := \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle$$

la prima equazione assume la forma più semplice

$$m\ddot{s} = f(t, s, \dot{s}).$$

<sup>7</sup>Nelle equazioni seguenti faremo un lieve abuso di notazione. La forza attiva è in generale una funzione del tipo  $\mathbf{F}^{(a)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  che quindi si può esprimere come  $\mathbf{F}^{(a)}(t, \gamma(s), \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s))$  esplicitando la dipendenza dalla legge oraria  $s$ . Scrivendo  $\mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s})$  al posto di  $\mathbf{F}^{(a)}(t, \gamma(s), \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s))$  intendiamo mettere in evidenza la dipendenza da  $s$  e dalle sue derivate, essendo  $\gamma$  e  $\hat{\mathbf{t}}$  supposte note. Ragionamento analogo si applica alla notazione adottata per  $\mathbf{F}^{(v)}$ .

Questa equazione può essere integrata più o meno facilmente a seconda della forma funzionale di  $f$ . Una classe particolarmente importante è quella dei sistemi *autonomi*, in cui  $f$  non dipende esplicitamente dal tempo. Tali sistemi sono particolarmente importanti dato che, nei problemi fisici,  $f$  solitamente non manifesta una dipendenza esplicita dal tempo per via dell'invarianza galileiana.

Se  $f \equiv f(\dot{s})$ , per esempio, si può scrivere l'equazione del primo ordine  $\dot{v} = f(v)$  per la variabile  $v = \dot{s}$ . Questa equazione ammette un'unica soluzione se  $f$  è lipschitziana. Assumendo che in un intorno di  $v_0$  si abbia  $f(v) \neq 0$ , in tale soluzione la soluzione soddisfa una equazione nella forma implicita

$$m\dot{s} = f(\dot{s}) \Rightarrow G(v) := m \int_{v_0}^v \frac{1}{f(u)} du = t.$$

Questo riduce il problema dell'integrazione delle equazioni del moto ad una equazione differenziale del primo ordine nella forma  $G(\dot{s}) - t = 0$ , la cui successiva integrazione permette, in linea di principio, di ottenere  $s$  tramite un'ulteriore quadratura.

Il caso  $f \equiv f(s)$  invece merita una analisi più approfondita. Nel seguito, senza perdere in generalità, assumiamo, come sopra, come istante iniziale  $t = 0$  e indichiamo con  $s_0 := s(0)$  e  $v_0 := \dot{s}(0)$  le condizioni iniziali del moto del nostro punto materiale su una guida liscia.

**2.1. Forza posizionale**  $f \equiv f(s)$ . Se la forza attiva è posizionale, ovvero  $\mathbf{F}^{(a)} \equiv \mathbf{F}^{(a)}(\mathbf{x})$ , allora  $f \equiv f(s)$ , di modo che il moto equivale a quello di un punto materiale soggetto ad una forza conservativa in una dimensione. Detta  $s$  la generica ascissa curvilinea toccata dal punto materiale durante il moto, è infatti possibile introdurre il potenziale

$$V(s) := - \int_{s_0}^s f(x) dx,$$

nell'ipotesi che  $f$  sia integrabile sull'intervallo considerato. L'utilità dell'aver introdotto  $V$  sta nel fatto che la quantità

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s)$$

risulta conservata durante il moto, come si vede derivando rispetto al tempo, e dunque essa rimane uguale al valore  $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(s_0)$  dell'istante iniziale  $t = 0$ . Inoltre, il fatto che il contributo cinetico debba essere sempre positivo fa sì che il moto possa avvenire solo in regioni in cui

$$E - V(s) \geq 0.$$

Assumiamo ora che  $v_0 \neq 0$ . Se  $E - V(s) > 0$  in un intorno di  $s_0$ . Per  $s$  in tale intorno, l'espressione dell'energia meccanica implica

$$1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(s)}} \frac{ds}{dt} \Rightarrow t(s) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(x)}} dx \equiv \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx,$$

che è la soluzione implicita del problema. La funzione

$$\Phi(s) := 2 \frac{E - V(s)}{m}$$

contiene in particolare tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse. Il moto può infatti verificarsi solo nelle regioni in cui  $\Phi(s) > 0$ , mentre gli (eventuali) zeri della funzione separano la curva  $\gamma$  in porzioni mutualmente inaccessibili.

Per meglio fissare le idee, supponiamo di avere, nella notazione precedente,  $v_0 > 0$ : se  $\Phi(x) > 0$  per ogni  $x \in [s_0, s]$ , allora

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

è una funzione con derivata strettamente positiva e quindi invertibile: essa quantifica il tempo (finito) necessario al punto materiale per raggiungere  $s$  a partire da  $s_0$ .

Se esiste  $\hat{s} > s_0$  tale che  $\Phi(\hat{s}) = 0$  e  $\Phi(x) > 0$  per  $x \in [s_0, \hat{s}]$ , il tempo necessario per raggiungere tale punto a partire da  $s_0$

$$t(\hat{s}) = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

può essere finito o infinito. Assumendo in particolare che  $\Phi$  sia analitica in  $\hat{s}$ , questo dipenderà dal fatto che  $\hat{s}$  sia uno zero semplice o multiplo di  $\Phi(s)$ , rispettivamente.

Se  $\hat{s}$  è uno zero multiplo di  $\Phi(s)$ , l'integrale diverge: questo fatto è coerente con il teorema di Cauchy sull'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali. Osservando infatti che le equazioni del moto si scrivono come  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$ , nel caso in cui  $\hat{s}$  sia uno zero multiplo, la quantità  $\sqrt{\Phi(s)}$  è lipschitziana in un intorno di  $\hat{s}$ , fatto che garantisce l'unicità della soluzione. D'altra parte,  $s(t) = \hat{s}$  risolve l'equazione e pertanto è l'unica soluzione ammessa passante per  $\hat{s}$ : ogni traiettoria ottenuta con diversa condizione iniziale può solo avvicinarsi al punto  $\hat{s}$  senza mai toccarlo (diversamente, vi sarebbero *due* possibili soluzioni passanti per  $\hat{s}$ ). Si noti inoltre che, coerentemente con questo fatto, la forza applicata al punto materiale in uno zero multiplo  $\hat{s}$  è nulla,  $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) = 0$ , per cui in effetti un punto materiale in  $\hat{s}$  non accelera.

Discorso diverso vale per gli zeri semplici. Se  $\hat{s}$  è uno zero semplice, la formula precedente predice che esso verrà toccato in un tempo finito  $t(\hat{s})$ . Questo peraltro mostra che esistono almeno due soluzioni dell'equazione differenziale  $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$  passanti per  $\hat{s}$  (ovvero, la soluzione dell'equazione con condizione iniziale  $s(0) = s_0$  e quella con condizione iniziale  $s(0) = \hat{s}$ ). La ragione, nuovamente, è che in questo caso  $\sqrt{\Phi(s)}$  non è lipschitziana in un intorno di  $\hat{s}$ : pur fissando la condizione iniziale  $s(0) = \hat{s}$  (automaticamente associata a  $\dot{s}(0) = 0$ ) l'unicità non è garantita e sono ammesse più soluzioni. D'altra parte, se il punto materiale si trova in uno zero semplice di  $\Phi$  con velocità nulla, l'evoluzione fisica del suo moto (ovvero *quale* delle possibili soluzioni si realizzerà) sarà determinata dal segno della forza  $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) \neq 0$  che non permette alla velocità di rimanere nulla.

Anche se accessibili di per sé, gli zeri semplici di  $\Phi(s)$  costituiscono comunque la frontiera di regioni di accessibilità sulla curva, come si vede dai seguenti risultati.

**DEFINIZIONE 2.1.** Gli zeri semplici di  $\Phi(s)$  sono detti punti di inversione.

**TEOREMA 2.1.** Il moto tra due punti di inversione consecutivi  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+ > \hat{s}_-$  è periodico di periodo

$$\tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\hat{s}_-$  ed  $\hat{s}_+$  due zeri semplici consecutivi di  $\Phi(s)$ . Per ipotesi, nell'intervallo  $[\hat{s}_-, \hat{s}_+]$  possiamo scrivere  $\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(\hat{s}_+ - s)\phi(s)$  con  $\phi(s) > 0$  per  $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$ . La velocità del punto materiale si annulla in  $\hat{s}_\pm$  mentre la forza ha in questi punti segno opposto:

$$f(\hat{s}_+) = \Phi'(\hat{s}_+) = -(\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_+) < 0, \quad f(\hat{s}_-) = \Phi'(\hat{s}_-) = (\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_-) > 0,$$

il che fa sì che il moto si inverta in questi punti estremali. Partendo da  $s_0 \in (\hat{s}_-, \hat{s}_+)$  con  $v_0 > 0$  al tempo  $t = 0$ , il moto prosegue quindi fino a  $\hat{s}_+$  dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, il punto materiale subisce una accelerazione verso  $\hat{s}_-$  che lo fa ripassare da  $s_0$  con velocità opposta in segno, fino ad arrivare in  $\hat{s}_-$ , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in  $s_0$  con stessa velocità  $v_0$  dopo un tempo  $\tau$ : da qui in poi il moto si riproduce *identico* essendosi verificate nuovamente, al tempo  $\tau$ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo  $t = 0$ . Il periodo quindi è

$$\tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx - \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx. \quad \square$$

**Esercizio 1.1** — Un punto materiale di massa  $m$  si muove lungo una guida liscia fissa  $\gamma$  ed è soggetto ad un potenziale lungo la guida nella forma  $V(s) = s^{2n}$ . Supponendo che il punto inizi a muoversi per  $t = 0$  da  $s(0) = 0$  con energia meccanica  $E > 0$ , si dimostri che il periodo non dipende da  $E$  se e solo se  $n = 1$ : si calcoli l'espressione del periodo in questo caso speciale. [ $\tau = \sqrt{2m\pi}$ ]

**2.2. Piano delle fasi.** Nella forma  $m\ddot{s} = f(t, s, \dot{s})$ , l'equazione del moto equivale ad una coppia di equazioni del primo ordine in uno spazio bidimensionale; ovvero, rinominando  $x$  la variabile  $s$  ed indicando con  $y = \dot{s}$ , possiamo scrivere

$$\dot{y} = \frac{1}{m} f(t, x, y), \quad \dot{x} = y.$$

**DEFINIZIONE 2.2.** Il piano  $\mathbb{R}^2$  in cui varia la coppia  $\mathbf{z} := (x, y)$  prende il nome di *piano delle fasi*. Su di esso, è definito il campo vettoriale  $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $(t, \mathbf{z}) \mapsto (y, \frac{1}{m}f(t, x, y))$ , le cui curve integrali, ovvero le curve  $\mathbf{z}(t)$  soluzioni dell'equazione  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z})$ , sono dette *curve di fase del sistema*. L'operatore  $\mathbf{g}^t$  che associa ad un certo punto del piano delle fasi  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$  il punto  $\mathbf{z}(t)$  ottenuto per mezzo dell'evoluzione indotta da  $\mathbf{f}$  è detto *flusso di fase* del sistema ed agisce come

$$\mathbf{g}^t: \mathbf{z}_0 \mapsto \mathbf{z}(t) = \mathbf{g}^t \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0.$$

Un *punto* nel piano delle fasi  $\mathbf{z} = (x, y)$  corrisponde quindi ad uno stato cinematico del punto materiale, ovvero alla sua posizione e alla sua velocità.

**DEFINIZIONE 2.3.** Un punto  $(x_0, 0)$  si dice *di equilibrio* se il flusso di fase associato si riduce al punto stesso, ovvero  $\mathbf{g}^t(x_0, 0) = (x_0, 0) \forall t > 0$ .

Se  $f \equiv f(s)$  le equazioni del moto implicano, come abbiamo visto, la conservazione dell'energia  $E(s, \dot{s}) := \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s)$ , dove come sopra  $-V'(s) = f(s)$ , pertanto le curve di fase sono *isoenergetiche*, ovvero  $E(x, y)$  non cambia lungo una curva di fase: fissato  $e \in \mathbb{R}$ , l'insieme di livello

$$\mathcal{M}(e) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: E(x, y) := \frac{1}{2}my^2 + V(x) = e \right\}$$

contiene le curve di fase di energia  $e$ . L'insieme  $\mathcal{M}(e)$  è in generale costituito da diverse componenti connesse, la cui regolarità è garantita se  $\nabla E(x, y) = (V'(x), my) \neq \mathbf{0}$  in ogni loro punto.

**Esercizio 1.2** — Dimostrare che la condizione  $E(x, y) := \frac{1}{2}my^2 + V(x) = e$  individua una curva regolare in un intorno di  $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{M}(e)$  se  $\nabla E(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ .

*Soluzione.* — Assumiamo per esempio che  $\partial_x E(x_0, y_0) = V'(x_0) \neq 0$ . Il teorema della funzione implicita garantisce che esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  in cui si può trovare una funzione  $f$  di modo che  $E(x, f(x)) = e$  in tale intorno. Similmente se  $\partial_y E(x_0, y_0) = y_0 \neq 0$  esiste una funzione  $g$  in un intorno  $J$  di  $y_0$  tale

che  $E(g(y), y) = e$  in tale intorno. Ciò significa che, a seconda delle circostanze, possiamo localmente parametrizzare  $\mathcal{M}(e)$  come una curva  $\gamma(t) = (t, f(t))$  con  $t \in I$  o  $\gamma(t) = (g(t), t)$ , con  $t \in J$ . In entrambi i casi il vettore tangente non è mai nullo, avendo sempre una componente uguale ad 1.

La condizione di punto di equilibrio nel caso di forze posizionali *equivale* a richiedere che  $V'(x_0) = 0$ , ovvero che  $x_0$  sia un punto stazionario del potenziale: in virtù del teorema di Cauchy, infatti, la condizione iniziale  $(x_0, 0)$  non può che evolvere in se stessa se  $V'(x_0) = 0$ . I punti di equilibrio quindi sono proprio i punti *critici*, ovvero i punti in cui  $\nabla E(x, y) = \mathbf{0}$  e la regolarità di  $\mathcal{M}(e)$  viene meno.

2.2.1. *Stabilità.* Per classificare i punti critici, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4. Un punto del piano delle fasi  $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$  si dice *di equilibrio stabile secondo Lyapunov* se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  per cui, denotato  $\mathbf{z} = (x, y)$  si ha che

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Il punto si dice *asintoticamente stabile* se esiste  $\delta > 0$  tale per cui

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0.$$

L'insieme  $\mathcal{B}(\mathbf{z}_0) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0\}$  è detto *bacino di attrazione* di  $\mathbf{z}_0$ . Un punto non stabile si dice infine *instabile*.

In altre parole, un punto è stabile secondo Lyapunov se, avviando il moto in prossimità di tale punto nel piano delle fasi, non ce ne si allontana mai.

Se la forza in gioco è *posizionale* allora vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.2. Si assuma  $V$  funzione di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  in un intorno di  $x_0$ , punto di minimo relativo isolato di  $V$ ; allora  $x_0$  è un punto di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un qualunque intorno  $I$  di  $\mathbf{z}_0 := (x_0, 0)$ , e osservando che  $E(x_0, 0) = V(x_0)$  valore del potenziale nel punto di minimo relativo isolato, sia

$$J_\delta(\mathbf{z}_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) < V(x_0) + \delta\}.$$

Ovviamente  $\mathbf{z}_0 \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$ . L'insieme  $J_\delta(\mathbf{z}_0)$  ha come caratteristica il fatto che, per via della conservazione dell'energia meccanica, se  $\mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$  allora  $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0) \forall t > 0$ . In questo insieme potremo isolare la componente connessa contenente  $\mathbf{z}_0$ , sia essa  $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$ . Esso è limitata: nella direzione  $y$ , dovrà essere  $y^2 < \frac{2}{m}(V(x_0) - V(x) + \delta) \leq \frac{2}{m}\delta$ ; analogamente  $V(x) < V(x_0) + \delta$  implica che per un  $\mathbf{z} = (x, y) \in \hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$  e  $\delta$  sufficientemente piccolo, si ha  $\frac{1}{2}V''(\xi)(x - x_0)^2 < \delta$  per un qualche  $\xi \in (x_0, x)$  e con  $V''(\xi) > 0$ , ovvero  $(x - x_0)^2 < \frac{2\delta}{V''(\xi)}$ . È possibile quindi trovare  $\delta$  tale che  $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$  è in  $I$ : essendo  $\hat{J}_\delta$  invariante sotto  $\mathbf{g}^t$  per via della conservazione dell'energia — ovvero tutte le traiettorie che iniziano in essa non ne usciranno mai — la definizione di punto stabile secondo Lyapunov è soddisfatta.  $\square$

**Esempio 1.3** — Si noti che se un punto è di equilibrio stabile secondo Lyapunov non è necessariamente un punto di minimo relativo dell'energia potenziale: questo si vede facilmente ammettendo che  $V(x)$  sia non analitica in un qualche suo punto. Supponiamo, per esempio, di avere un punto materiale di massa unitaria in moto nel potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

L'energia potenziale considerata non ammette una espansione in serie in un intorno di  $x_0 = 0$ , e tale punto non è di minimo relativo per  $V(x)$ , dato che per ogni  $\delta > 0$  esiste un  $x \neq 0$  con  $|x| < \delta$  e tale che  $V(x) < 0$ . Tuttavia,  $x_0$  è di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Supponiamo infatti che il sistema



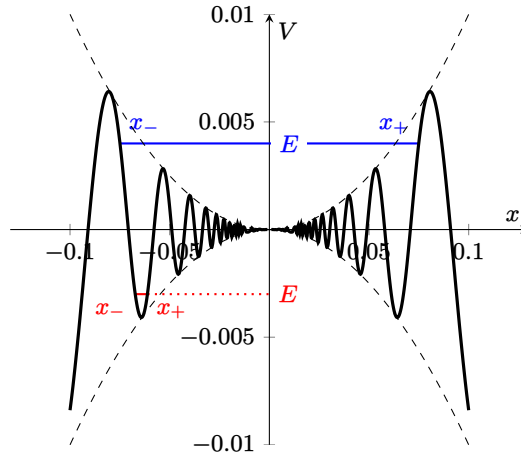


FIGURA 1. Potenziale nell'Esempio 1.3 e due intervalli ammessi per il moto per diversi valori di  $E$ .

abbia energia positiva,  $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E > 0$ . Possiamo individuare due punti di inversione  $x_{\pm}(E)$ , di modo che il moto avvenga sempre nell'intervallo  $[x_-(E), x_+(E)]$  (vedasi Fig. 1) con  $|x_{\pm}(E)| \rightarrow 0$  per  $E \rightarrow 0^+$ . Inoltre, in tale intervallo,  $V(x) > -E$  e quindi  $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) > \frac{1}{2}y^2 - E \Rightarrow |y| < \sqrt{2E}$ . La misura dell'intorno nel piano delle fasi in cui avviene il moto,  $[x_-(E), x_+(E)] \times [-\sqrt{2E}, \sqrt{2E}]$ , può quindi essere resa piccola a piacere. Un ragionamento analogo può essere fatto per  $E < 0$ , dove un intervallo arbitrariamente vicino all'origine può essere scelto di modo che il suo corrispondente intervallo nel piano delle fasi sia arbitrariamente piccolo per  $E \rightarrow 0^-$ . Di conseguenza,  $x = 0$  è una posizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

**DEFINIZIONE 2.5.** Nel caso di moto unidimensionale soggetto a forza posizionale, un insieme  $\mathcal{M}(e)$  contenente un punto critico instabile si dice *curva separatrice*.

Una separatrice è per costruzione data dall'unione dei punti di equilibrio instabili e da curve connesse che esprimono traiettorie di moto che tendono asintoticamente ai detti punti di equilibrio instabile, senza mai raggiungerli. Un punto critico  $(x_0, 0)$  è infatti in corrispondenza con uno zero multiplo di  $\Phi(x)$ , essendo  $\Phi(x_0) = 0$  per via della condizione  $y = 0$ , e dovendo essere  $V'(x_0) = -\frac{m}{2}\Phi'(x_0) = 0$ .

**Esempio 1.4** — Consideriamo il moto di un punto materiale di massa  $m = 1$  nella forma  $\ddot{s} = -s$ , corrispondente all'equazione fondamentale delle oscillazioni. Si tratta di una legge associata all'energia meccanica

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2,$$

che si conserva essendo la forza posizionale e associabile al potenziale  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$ . Gli insiemi di livello del problema sono semplici circonferenze nel piano delle fasi, dove è definito il vettore  $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$  nella notazione già introdotta, vedasi Fig. 2. Esiste un unico punto di equilibrio stabile, corrispondente a  $(x, y) = (0, 0)$ , senza alcuna separatrice.

**Esempio 1.5** — A titolo esemplificativo, consideriamo un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto al potenziale  $V(s) = s^2(s^2 - 1)$  in moto su una curva con  $s \in \mathbb{R}$ . In Fig. 3 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale  $E$ .

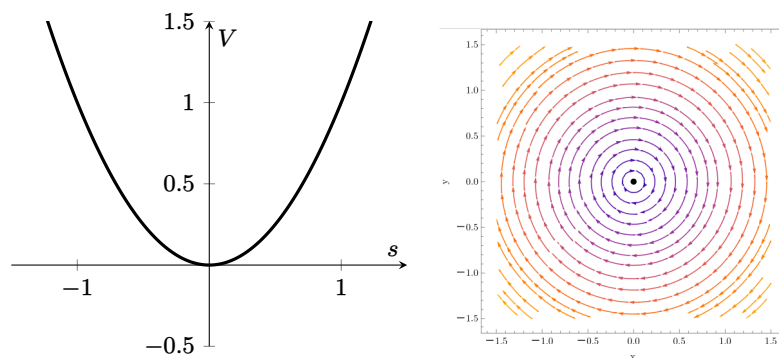


FIGURA 2. Potenziale e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase relativo all'esempio 1.4.

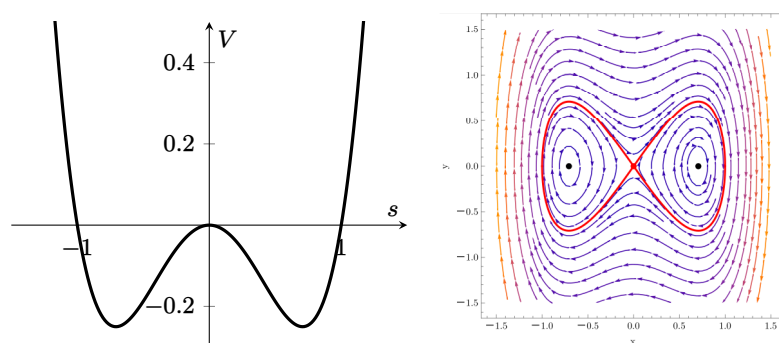


FIGURA 3. Potenziale nell'Esempio 1.5 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa  $m = 1$ .

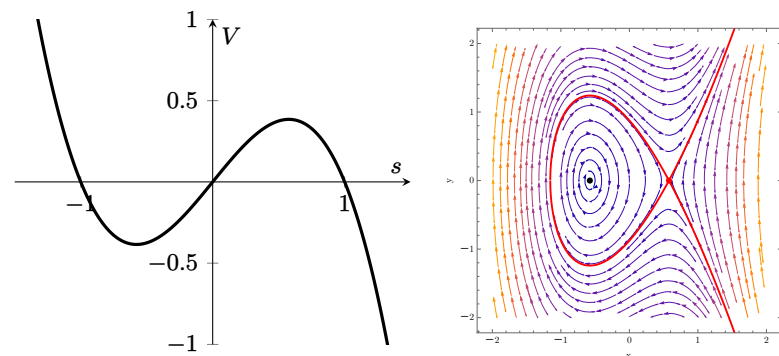


FIGURA 4. Potenziale nell'Esempio 1.6 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa  $m = 1$ .

**Esempio 1.6** — Consideriamo un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto al potenziale  $V(s) = s(1 - s^2)$ . In Fig. 4 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale  $E$ .

**Esercizio 1.3** — Sia  $A(E)$  l'area di una curva di fase chiusa in un sistema conservativo corrispondente ad un valore  $E$  dell'energia meccanica. Si dimostri che il periodo  $\tau(E)$  del moto corrispondente è  $\tau(E) = m A'(E)$ , con  $m$  massa.

*Soluzione.* — Assumeremo che il potenziale  $V(s)$  sia una funzione differenziabile con continuità. Il risultato si prova utilizzando la formula di Leibniz. Consideriamo un moto tra due zeri semplici consecutivi del potenziale  $V(s)$ , ovvero  $s \in [s_-(E), s_+(E)]$ . L'area corrispondente alla traiettoria associata nello spazio delle fasi è due volte l'area sotto la curva  $y = \sqrt{\Phi(x, E)}$  per  $x \in [s_-(E), s_+(E)]$ , dove  $\Phi(x, E) := \frac{2}{m}(E - V(x))$  (abbiamo esplicitato la dipendenza funzionale da  $E$ ). Allora

$$A(E) = 2 \int_{s_-(E)}^{s_+(E)} \sqrt{\Phi(x, E)} dx.$$

Derivando rispetto ad  $E$  si trova

$$(1.6) \quad A'(E) = 2\Phi(s_+(E), E)s'_+(E) - 2\Phi(s_-(E), E)s'_-(E) + \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{s_-(E)}^{s_+(E)} \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx \\ = \frac{1}{m} \int_{s_-(E)}^{s_+(E)} \frac{2}{\sqrt{\Phi(x, E)}} dx = \frac{\tau(E)}{m}.$$

Si è qui usato il fatto che  $\Phi(s_{\pm}(E)) = 0$ . Si noti che il fatto che  $s_{\pm}(E)$  siano zeri semplici implica che  $\partial_s \Phi(s_{\pm}, E) \neq 0$ , e quindi, per il teorema della funzione implicita, che  $s_{\pm}(E)$  esista continua con derivata continua. Per la stessa ragione, l'integrale è finito e pari, appunto, a  $\tau(E)$ .

**Esercizio 1.4** — Si studi il moto nel potenziale  $V(s) = V_0(e^{-2as} - 2e^{-as})$  di un punto materiale di massa  $m$ , assumendo  $V_0 > 0$  e  $a > 0$ . Si dica per quali valori dell'energia meccanica  $E$  il moto è limitato. Si calcoli in questo caso l'area racchiusa dalla corrispondente traiettoria chiusa nel piano delle fasi.

*Soluzione.* — Cerchiamo anzitutto gli zeri della funzione  $\Phi(x) = \frac{2}{m}(E - V(s))$  in funzione di  $E$ . Abbiamo che  $e^{-2as} - 2e^{-as} = E/V_0$ , ovvero, introducendo  $x = e^{-as}$ ,  $x^2 - 2x - E/V_0 = 0$ . Questa equazione ha soluzione solo per  $E > -V_0$ . Detto  $\beta := \sqrt{1 + E/V_0}$ , in tale regime, si trova  $x_{\pm} = 1 \pm \beta$ , ma la soluzione  $x_-$  è accettabile a condizione che  $x_- > 0 \Rightarrow E < 0$ . Di conseguenza esistono due zeri se e solo se  $E \in [-V_0, 0)$ . In tale intervallo,  $x^2 - 2x - \frac{E}{V_0} \leq 0$  per  $x \in [x_-(E), x_+(E)]$ , ovvero  $\Phi(s) \geq 0$  per  $s \in [s_-, s_+]$ , dove  $s_{\pm} = -\frac{1}{a} \ln x_{\mp}(E)$ . Viceversa, fuori da questo intervallo, il moto è proibito per  $E \in [-V_0, 0)$ . Calcoliamo ora il periodo. Possiamo utilizzare la formula solita

$$(1.7) \quad \tau(E) = \int_{s_-(E)}^{s_+(E)} \frac{2}{\sqrt{\Phi(s)}} ds = \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \int_{-\frac{1}{a} \ln(1-\beta)}^{-\frac{1}{a} \ln(1+\beta)} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1 - e^{-2as} + 2e^{-as}}} ds \\ = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \int_{1-\beta}^{1+\beta} \frac{1}{x \sqrt{\beta^2 - (1-x)^2}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2m}{V_0}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\beta \sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile  $1 - x = \beta \sin \theta$ . Da quanto detto sopra, possiamo facilmente calcolare l'area racchiusa da una curva nello spazio delle fasi di energia  $E$  integrando  $\tau(E)$ . Osservando che per  $E = -V_0$  quest'area è nulla, per  $E \in [-V_0, 0)$

$$A(E) = \frac{\pi}{am} \int_{-V_0}^E \sqrt{\frac{2m}{-E}} = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{2V_0}{m}} - \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{-2E}{m}}.$$

Si noti che per  $E \rightarrow 0^-$  si ha  $\lim_{E \rightarrow 0^-} A(E) = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$ , che è una quantità finita.

**Esempio 1.7** (Pendolo) — Il *pendolo semplice* è un dispositivo meccanico che consiste di un punto materiale di massa  $m$  vincolato, tramite vincolo olonomo liscio e fisso, a muoversi su una circonferenza di raggio  $\ell$  in un piano verticale. Il moto è soggetto alla forza di gravità di modo che, indicando con  $\theta \in (-\pi, \pi]$  a meno di periodicità la deviazione dalla verticale del dispositivo, il potenziale a cui è soggetto il punto materiale è  $V(\theta) = -mg\ell \cos \theta$ , con  $g$  accelerazione di gravità, e l'energia meccanica, conservata, abbia l'espressione

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

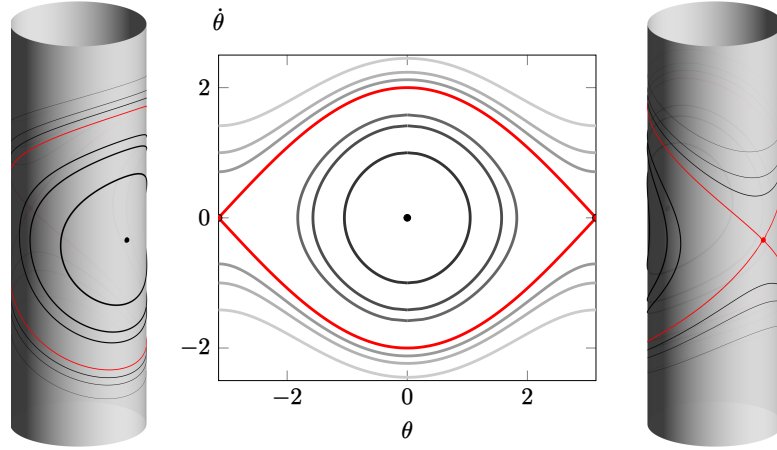


FIGURA 5. Piano delle fasi del pendolo con  $\tau = 1$ . Sono visualizzate le traiettorie per diversi valori di  $e$ , inclusa la separatrice ( $e = 1$ , linea rossa) e i due punti critici stabile (nero) e instabile (rosso).

a meno di una costante additiva arbitraria. L'equazione del moto è così

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Si noti che, invece di utilizzare  $s = \ell\theta$ , ascissa curvilinea lungo la circonferenza, stiamo qui utilizzando direttamente come variabile fondamentale l'angolo  $\theta$ : in questa parametrizzazione il moto corrisponde a quello di un punto materiale di massa unitaria che si muove sotto l'azione di un potenziale  $\hat{V}(\theta) = \frac{1}{m\ell^2}V(\theta) = -\frac{g}{\ell} \cos \theta$ . Si tratta di un sistema autonomo che sviluppa il suo moto su una curva, e può quindi essere analizzato con le tecniche discusse sopra. Indicando con

$$e := \frac{E}{mg\ell}, \quad \tau^2 := \frac{\ell}{g}$$

possiamo anzitutto scrivere, dall'equazione per l'energia,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + e) \equiv \Phi(\theta),$$

che richiede  $e \geq -1$  per aver senso. Al variare di  $e$  possono distinguersi diversi tipi di moto. È utile visualizzare queste traiettorie nel piano delle fasi  $(x, y) = (\theta, \dot{\theta})$  da intendersi con condizioni periodiche in  $\theta$ , che quindi in questo caso è  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , ovvero un *cilindro* infinito.

Se  $e > 1$ , allora  $\Phi(\theta)$  non ammette zeri e il moto consiste di *rotazioni* lungo l'intera circonferenza ammessa: in questo regime, le traiettorie nel piano delle fasi si avvolgono infatti attorno al cilindro.

Se invece  $|e| < 1$ ,  $\Phi(e)$  ammette degli zeri: in questo caso il moto è periodico e il moto consiste di *oscillazioni*. Le traiettorie non si avvolgono attorno al cilindro e (a differenza del caso  $e > 1$ ) possono essere deformate con continuità in un punto, corrispondente all'unica soluzione di equilibrio *stabile*  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ , corrispondente ad un punto di minimo relativo isolato del potenziale.

Il caso  $e = 1$  è marginale: l'equazione

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + 1)$$

identifica la *separatrice* nel piano delle fasi che delimitano i due diversi regimi: essa passa infatti per l'unica soluzione di equilibrio *instabile*,  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ . Il caso  $e = -1$  invece ammette come uniche possibili soluzioni le soluzioni di equilibrio stabile e instabile.

**Esercizio 1.5** — Si integri l'equazione del moto lungo la separatrice nel pendolo semplice, ovvero per  $e = 1$ .

*Soluzione.* — Dal fatto che  $2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ , l'equazione del moto si può riscrivere

$$\dot{\theta}^2 = 4 \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\tau^2} \Leftrightarrow \left( \frac{\dot{u}}{1 - u^2} \right)^2 = \frac{1}{\tau^2},$$

dove abbiamo introdotto  $u = \sin \frac{\theta}{2}$  assumendo  $u \neq 1$ . L'equazione si integra direttamente su  $u \in (-1, 1)$ : assumendo come istante di tempo iniziale  $t = 0$  e che in tale istante  $u(0) = 0$  (ovvero  $\theta = 0$ ) e  $\dot{u}(0) > 0$ , avremo

$$\frac{t}{\tau} = \int_0^u \frac{1}{1 - x^2} dx = \operatorname{atanh} u \Rightarrow u(t) = \tanh \left( \frac{t}{\tau} \right).$$

Si noti che non abbiamo imposto il modulo della *velocità* iniziale: questo è dovuto al fatto che abbiamo risolto le equazioni ad energia fissa, per cui la velocità iniziale è automaticamente fissata *in modulo*, una volta dato  $u(0)$ , dalla condizione  $e = 1$ . Si noti inoltre che il valore  $u = 1$ , corrispondente alla configurazione di equilibrio instabile, viene raggiunto solo asintoticamente per  $t \rightarrow +\infty$ .

**2.3. Piccole oscillazioni.** Il caso del pendolo semplice mostra che anche i sistemi più elementari possono presentare complesse equazioni differenziali da risolvere. Lo studio di un sistema unidimensionale autonomo in prossimità di un punto  $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$  di equilibrio nel piano delle fasi può essere però effettuato in una certa generalità in approssimazione di *piccole oscillazioni*. Assumiamo che il potenziale a cui il sistema è soggetto sia analitico in un suo punto di equilibrio isolato  $x_0$  e che  $V''(x_0) \neq 0$ . Introduciamo la variabile  $\xi := x - x_0$ , di modo che il sistema di equazioni da studiare possa scriversi come

$$\dot{\xi} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m} V'(x_0 + \xi).$$

Essendo  $x_0$  di equilibrio, espandendo in serie di potenze la seconda equazione si ha

$$\dot{y} = -\frac{1}{m} V''(x_0) \xi + o(\xi).$$

Trascurando gli ordini superiori al primo e introducendo

$$\omega^2 := \frac{1}{m} |V''(x_0)|, \quad \sigma := \operatorname{sign}(V''(x_0)) \in \{-1, 1\}$$

l'equazione assume la formula molto semplice

$$\ddot{\xi} + \sigma \omega^2 \xi = 0,$$

che descrive un cosiddetto *oscillatore armonico* se il punto è di equilibrio *stabile*, ovvero  $\sigma > 0$ . Essa ha soluzioni

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi(0) \cos(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sin(\omega t) & \text{se } V''(x_0) > 0 \\ \xi(0) \cosh(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sinh(\omega t) & \text{se } V''(x_0) < 0. \end{cases}$$

In altre parole, le traiettorie corrispondenti nel piano delle fasi sono ellissi o iperboli a seconda che il punto sia di equilibrio stabile o instabile rispettivamente. Nel caso di oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile, ovvero tale per cui  $V''(x_0) > 0$ , la soluzione è *periodica* di periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

In un pendolo, ad esempio, essendo il punto di equilibrio stabile  $\theta = 0$  e  $\hat{V}''(0) = \frac{g}{\ell}$ , si ritrova la cosiddetta *legge dell'isocronia del pendolo*

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

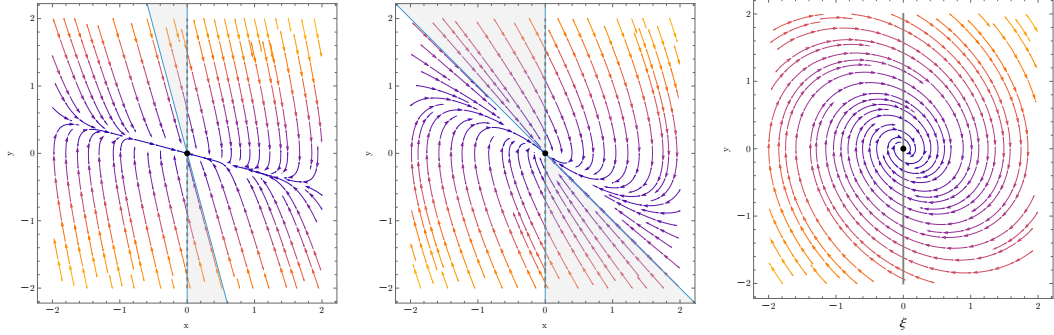


FIGURA 6. Diagramma di fase dell'oscillatore smorzato nei casi  $\beta > \omega$  (sinistra),  $\beta = \omega$  (centro),  $\beta < \omega$  (destra) in assenza di forzante, con  $(x, y) = (\xi, \xi)$ . Nei casi  $\beta \geq \omega$  è indicata in grigio la porzione del piano delle fasi corrispondente a condizioni iniziali la cui evoluzione attraversa  $\xi = 0$ .

indipendente dalla massa del punto materiale.

È importante osservare che l'analisi delle piccole oscillazioni è stata fatta nell'ipotesi di *piccole deviazioni* dalla posizione di equilibrio, ed è quindi una soluzione approssimata potenzialmente molto lontana dalla soluzione corretta quando  $\xi$  assume valori troppo grandi in modulo.

**Esempio 1.8** (Moto armonico smorzato e forzato) — In molte applicazioni occorre considerare, nello studio di un moto armonico attorno ad un punto di equilibrio stabile, la presenza di una forza aggiuntiva che agisce sul punto materiale  $P$  di traiettoria  $\mathbf{x}$  tentando di frenarne il moto: tale forza esprime la *resistenza del mezzo* ed è tipicamente nella forma  $\mathbf{F}_v = -\eta \dot{\mathbf{x}}$ , con  $\eta > 0$ , di modo che la forza frenante è tanto più intensa quanto più grande è, in modulo, la velocità del corpo, e ad essa opposta. In aggiunta alla forza di richiamo e alla forza frenante, è possibile anche includere la presenza di una certa *forzante* esterna  $\mathbf{F}(t)$  nella direzione del moto. Assumeremo in particolare che, detto  $\hat{\mathbf{t}}$  il versore tangente alla traiettoria di  $P$ ,  $\mathbf{F}(t) = F \cos(\omega_* t + \phi_0) \hat{\mathbf{t}}$ , per una certa terna di valori reali  $F, \omega_*, \phi_0 \in \mathbb{R}$ .

Dati i nuovi contributi, l'equazione per  $\xi$  assume la forma

$$(1.8) \quad \ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{F}{m} \cos(\omega_* t + \phi_0),$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}\hat{\mathbf{t}} = \dot{\xi}\hat{\mathbf{t}}$ , e si è ridefinito  $\beta := \frac{\eta}{2m}$ . Data la natura periodica della forzante, possiamo convertire il problema in una equazione differenziale per la funzione complessa  $z$ , che soddisfa l'equazione

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega^2 z = \frac{F}{m} e^{i(\omega_* t + \phi_0)}$$

di cui prenderemo la parte reale come soluzione. La procedura da applicare è standard: si cerca anzitutto una soluzione generica dell'equazione omogenea, nella forma  $z_0(t) = e^{\lambda t}$ . Sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale omogenea associata, otteniamo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \hat{\omega}, \quad \text{dove} \quad \hat{\omega} := \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Si ha così che la soluzione dell'equazione omogenea ha la forma

$$z_0(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \hat{\omega} = 0. \end{cases}$$

Nella formula precedente compaiono le due costanti  $\alpha_{\pm}$ , che andranno fissate imponendo le condizioni iniziali. Dobbiamo ora cercare una soluzione particolare  $z_p$  al problema. Un *ansatz* possibile è  $z_p(t) = b e^{i\omega_* t}$  per un qualche  $b \in \mathbb{C}$ . Inserendo questo *ansatz* nell'equazione si trova che in effetti essa è soddisfatta scegliendo

$$b = \frac{F}{m} \frac{e^{i\phi_0}}{\omega^2 - \omega_*^2 + 2i\beta\omega_*}.$$

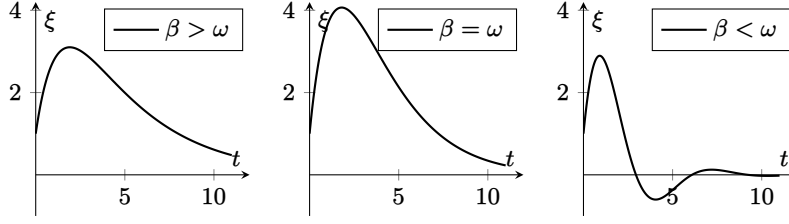


FIGURA 7. Evoluzione di  $\xi$  in un generico moto armonico smorzato (senza forzante) con stesse condizioni iniziali ma diversi parametri  $\beta$  e  $\omega$ .

La nostra soluzione generale è quindi

$$z(t) = \frac{F}{m} \frac{e^{i(\omega_* t + \phi_0)}}{\omega^2 - \omega_*^2 + 2i\beta\omega_*} + \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \text{se } \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \text{se } \hat{\omega} = 0, \end{cases}$$

**2.3.1. Moto smorzato.** Per semplificare la nostra analisi, consideriamo anzitutto il caso  $F = 0$ , ovvero rimuoviamo la forzante e assumiamo ci sia solo dissipazione. Analizziamo i diversi casi separatamente, con generiche condizioni iniziali  $\xi(0) =: \xi_0$  e  $\dot{\xi}(0) =: v_0$  *non entrambi nulli* (diversamente, il punto rimane in quiete nel suo punto di equilibrio stabile), avendo assunto come istante iniziale  $t = 0$ .

**$\beta > \omega$ :** Se  $\beta > \omega$ , allora  $\hat{\omega} > 0$  è una quantità reale. In questo caso, il moto è tale che  $\xi(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  monotonicamente, ovvero la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile. Imponendo le condizioni iniziali, si trova che

$$\alpha_+ + \alpha_- = \xi_0, \quad \alpha_+ (\hat{\omega} - \beta) - \alpha_- (\hat{\omega} + \beta) = v_0 \Rightarrow \xi(t) = e^{-\beta t} \left( \xi_0 \cosh \hat{\omega} t + \frac{v_0 + \beta \xi_0}{\hat{\omega}} \sinh \hat{\omega} t \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio  $\xi = 0$  per tempi  $t > 0$  che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega} \xi_0 \cosh \hat{\omega} t + (v_0 + \beta \xi_0) \sinh \hat{\omega} t = 0$$

Se  $v_0 \neq -\beta \xi_0$ , questa equazione ammette un'unica soluzione

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}} \operatorname{arctanh} \frac{\hat{\omega} \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \quad \text{se e solo se} \quad -1 < \frac{\hat{\omega} \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \leq 0.$$

In tutti gli altri casi, non esiste soluzione all'equazione e il sistema non passa mai dal punto di equilibrio.

**$\beta = \omega$ :** Se  $\beta = \omega$ , il moto è detto *criticamente smorzato* e la soluzione generale del problema, una volta imposte le condizioni iniziali, ha la forma

$$\xi(t) = e^{-\beta t} (\xi_0 + (v_0 + \beta \xi_0)t).$$

Se  $\xi_0 > 0$  (rispettivamente,  $\xi_0 < 0$ ) il sistema passa per il punto di equilibrio una sola volta se  $v_0 < -\beta \xi_0$  (rispettivamente,  $v_0 > -\beta \xi_0$ ), diversamente ciò non avviene mai.

**$\beta < \omega$ :** Se  $\beta < \omega$ ,  $\hat{\omega} = i\hat{\omega}_0 \equiv i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$  è immaginario puro non nullo,  $\xi(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , ma eseguendo un certo numero di oscillazioni. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\xi(t) = e^{-\beta t} \left( \xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + \frac{v_0 + \beta \xi_0}{\hat{\omega}_0} \sin(\hat{\omega}_0 t) \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio  $\xi = 0$  per tempi  $t$  che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega}_0 \xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + (v_0 + \beta \xi_0) \sin(\hat{\omega}_0 t) = 0.$$

Se  $v_0 = -\beta \xi_0 \neq 0$ , il sistema passerà dal punto di equilibrio per

$$t = \frac{\pi}{2\hat{\omega}_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}_0}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

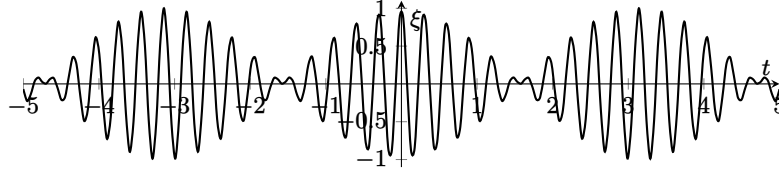


FIGURA 8. Esempio di battimenti.

Diversamente, il sistema passa dalla posizione di equilibrio negli infiniti istanti di tempo tali che

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}_0} \arctan \frac{\hat{\omega}_0 \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}_0} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}_0 & \text{se } \frac{\xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \leq 0, \\ n \in \mathbb{N} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il caso dell'oscillatore armonico puro si recupera per  $\beta = 0$ : in tal caso  $\hat{\omega}_0 = \omega$ . Si noti che nel caso del moto smorzato con l'energia meccanica  $E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s)$  ha

$$\dot{E} = m\dot{s}\ddot{s} + V'(s)\dot{s} = -\eta\dot{s}^2 \leq 0,$$

ovvero essa è decrescente e viene *dissipata* durante il moto.

**2.3.2. Moto smorzato e forzato.** Nel caso in cui sia presente una forzante, il contributo della soluzione omogenea al variare del campo in cui vive  $\hat{\omega}$  rimane *smorzato* finantoché  $\beta \neq 0$  e diventa trascurabile rispetto al contributo forzante per  $t \gg 0$ , che invece non decade e rimane oscillante. Per  $t \gg 0$  si trova perciò che la soluzione ha la forma

$$\xi(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_*^2)^2 + 4\beta^2\omega_*^2}} \cos\left(\omega_* t + \phi_0 + \arctan \frac{2\beta\omega_*}{\omega_*^2 - \omega^2}\right) + \text{termini esponenzialmente soppressi.}$$

Il termine forzante, dominante per  $t \gg 0$ , è indipendente dalle precise condizioni iniziali ma mantiene una dipendenza dalla frequenza propria  $\omega$  del sistema. L'ampiezza del termine forzante è massima quando

$$\omega_* = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \quad \text{purché} \quad \omega^2 > 2\beta^2.$$

Questo valore è detto *frequenza di risonanza*.

**Esempio 1.9 (Battimenti)** — Il fenomeno dei *battimenti* si verifica quando il moto emerge da una sovrapposizione di due moti oscillatori con frequenze molto vicine, nella forma

$$\xi(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Se  $a = a_1 = a_2$ , possiamo applicare l'identità  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ,

$$\xi(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

e osservare che, se  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$ , il primo termine produce una oscillazione di frequenza simile a quella delle due componenti originarie, mentre il secondo fattore manifesta una frequenza molto più bassa, e apparirà come un termine che “modula” il primo contributo su scale temporali più lunghe, vedasi Fig. 8. Questa circostanza può avvenire quando, per esempio, non si ha contributo smorzante nell'esempio precedente: il contributo della soluzione omogenea è quindi oscillante come quello della soluzione particolare, ma con diverse frequenze che possono però essere molto vicine tra loro.



### 3. Moto in un campo centrale

**3.1. Proprietà generali.** Il secondo tipo di equazione del moto che considereremo è quella in cui un punto materiale  $(P, m)$  di traiettoria  $\mathbf{x}$  a valori in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  è soggetto ad una *forza centrale*, ovvero di equazione del moto

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\|\mathbf{x}\|) = -V'(\|\mathbf{x}\|) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Qui  $V: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione che assumeremo essere di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  su  $(0, +\infty)$ . La forza totale è perciò sempre diretta lungo la congiungente con un *centro* di un campo di forze che qui si assume essere l'origine del riferimento. Essendo tale forza conservativa, l'energia meccanica si conserva durante il moto. Un'altra caratteristica cruciale dei moti in un campo centrale (che ne permette l'integrazione) è che, essendo il momento della forza rispetto all'origine  $O$  nullo, il momento angolare del punto materiale si conserva,  $\mathbf{L}_O = \mathbf{0}$ .

Il caso  $\mathbf{L}_O = \mathbf{0}$  è particolarmente semplice da studiare: il fatto che il momento angolare sia nullo significa che posizione iniziale  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  e velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  sono vettori paralleli (o che  $\mathbf{v}_0$  è nulla): il moto, pertanto, avrà una evoluzione nella forma  $\mathbf{x}(t) = s(t) \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|}$ , ovvero sarà un moto unidimensionale con equazione  $m\ddot{s} = -V'(|s|)$ .

Supponiamo quindi di essere nel caso meno elementare  $\mathbf{L}_O \neq \mathbf{0}$ . Essendo il momento angolare un vettore costante non nullo, esso identifica un piano ad esso normale passante per la posizione iniziale della traiettoria, detto *piano dell'orbita*: il moto si manterrà sempre in questo piano in virtù della conservazione di  $\mathbf{L}_O$ . Assumeremo che il nostro riferimento di coordinate sia tale che  $\mathbf{L}_O = (0, 0, L_z)^\top$  con  $L_z > 0$ , per cui potremo parametrizzare il moto in coordinate polari nel piano ortogonale a  $\mathbf{L}_O$  per mezzo di due funzioni  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$(1.9) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \theta(t) \\ r(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix},$$

dove abbiamo ignorato, come sempre faremo da questo punto in poi, la terza componente, che rimane fissa. Inoltre è molto utile introdurre, nel piano del moto, la seguente base mobile

$$\hat{\mathbf{e}}_r := \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta := \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = r \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Oltre ad essere ortonormali, i due versori introdotti hanno l'utile proprietà  $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$  e  $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r$ , da cui si deriva facilmente che  $\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta$ . Scrivendo esplicitamente in questa parametrizzazione  $L_z$  si ottiene

$$L_z = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = mr^2\dot{\theta}.$$

Questa formula implica anche che, nel riferimento scelto,  $\dot{\theta} > 0$ , ovvero sarà possibile eseguire un cambio di variabile in  $r(t)$  ed esprimere il raggio *in funzione dell'angolo* facendo assumere a quest'ultimo il ruolo di "tempo": con un leggero abuso di notazione, indicheremo anche questa dipendenza come  $r(\theta)$ .

**3.1.1. Energia meccanica.** Il valore dell'energia meccanica può anch'esso essere riscritto in coordinate polari: si trova

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$

dove abbiamo introdotto il *potenziale efficace*

$$V_{\text{eff}}(r) := \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r).$$

La forma funzionale dell'energia meccanica anticipa la natura intrinsecamente unidimensionale del problema, essendo indipendente dalla variabile angolare.

3.1.2. *Prima forma dell'equazione delle orbite.* Una volta passati alle coordinate polari, la legge del moto  $m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\|\mathbf{x}\|)$  si riscrive  $m\ddot{\mathbf{x}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta = -V'(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ , ovvero produce la coppia di equazioni

$$2m\dot{r}\dot{\theta} + mr\ddot{\theta} \equiv \frac{1}{r}\dot{L}_z = 0, \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \equiv m\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} = -V'(r),$$

dove la prima equazione non è altro che la conservazione di  $L_z$  che abbiamo discusso finora. La seconda, invece, sempre in virtù di tale conservazione, è una equazione nella sola variabile radiale, essendo  $L_z$  fissato dalle condizioni iniziali, e si può riscrivere come

$$(1.10) \quad m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r),$$

che descrive il moto unidimensionale di un punto materiale soggetto al potenziale efficace  $V_{\text{eff}}$ . L'integrazione può quindi essere eseguita esattamente come fatto nel caso unidimensionale. Sia  $v_0 := \dot{r}(0) \neq 0$  la velocità *radiale* iniziale. Assumendo che in  $t = 0$  si abbia  $r(0) = r_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$ , se  $E - V_{\text{eff}}(x)$  non si annulla in un intorno  $I$  di  $r_0$ , il tempo necessario al punto materiale per raggiungere la distanza  $r \in I$  dall'origine è

$$t = \int_{r_0}^r \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx, \quad \text{dove} \quad \Phi(x) := 2 \frac{E - V_{\text{eff}}(x)}{m}.$$

Una volta integrata l'equazione per  $r$ , la legge per  $\theta$  si può trovare dal fatto che

$$\frac{d\theta}{dr} = \dot{\theta} \frac{dt}{dr} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(r)}}.$$

Quella ottenuta è detta *prima forma dell'equazione delle orbite* e specifica la relazione tra  $\theta$  ed  $r$ . Essa dipende da un segno fissato dalle condizioni iniziali del problema. La sua integrazione ci permette di ottenere

$$\theta(r) = \theta_0 + \frac{L_z}{m} \int_{r_0}^r \frac{\text{sign}(v_0)}{x^2 \sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

**3.2. Proprietà delle orbite.** Passiamo ora allo studio delle proprietà geometriche delle *orbite*, ovvero delle possibili traiettorie del punto materiale. Ha senso chiedersi, per esempio, se il moto in un campo centrale ammette orbite chiuse, ovvero se data una certa condizione iniziale il punto materiale ritorna esattamente nella stessa configurazione. Valutare se il potenziale ammette orbite chiuse è in generale piuttosto complicato, ma si può partire dall'osservazione che l'insieme

$$\mathcal{O}(E) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V_{\text{eff}}(\|\mathbf{x}\|) \leq E\}$$

ha come frontiera una o più circonferenze, che individuano varie regioni ammesse. Ciascuna regione ammessa ha un raggio minimo, detto *pericentro*  $r_p$ , e un raggio massimo, detto *apocentro*  $r_a$  (eventualmente infinito). A valore di  $E$  fissato, queste due circonferenze corrispondono a zeri consecutivi della funzione  $\Phi(r)$ . L'angolo  $\vartheta$  descritto dal vettore posizione nel muoversi tra pericentro e apocentro è

$$\vartheta = \frac{L_z}{m} \int_{r_p}^{r_a} \frac{1}{x^2 \sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

Condizione necessaria e sufficiente perché l'orbita sia chiusa è che

$$\frac{\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

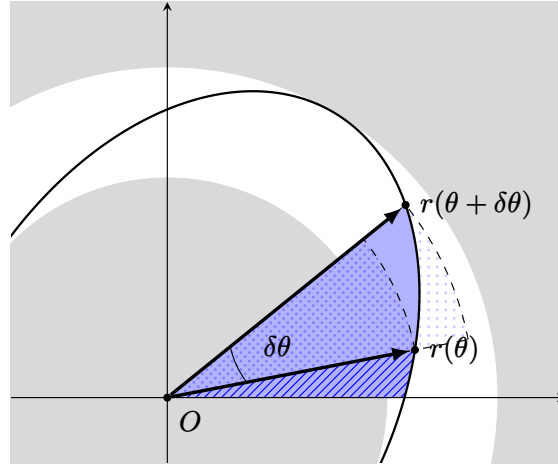


FIGURA 9. Seconda legge di Keplero:  $A(\theta)$  è l'area spazzata dal vettore posizione  $\mathbf{x}$  a partire dall'angolo iniziale  $\theta_0$ , qui pari a zero. Nell'intervallo temporale  $\delta t$ , il punto materiale incrementa la sua anomalia di  $\delta\theta$  spazzando una superficie di area  $A(\theta + \delta\theta) - A(\theta)$ , dove  $A(\theta + \delta\theta)$  appare in blu e  $A(\theta)$  appare tratteggiata. In questo esempio, la porzione in grigio corrisponde a regioni di spazio al di fuori di  $\mathcal{O}(E)$ , qui delimitato da due circonferenze.

La domanda è quindi per quali forme di  $V$  una condizione siffatta si realizza *sempre* quando si ha a che fare con orbite limitate. In primis, dato che vogliamo che il tempo necessario per raggiungere apocentro da pericentro (e viceversa) sia finito, sarà necessario che sia  $r_a$  che  $r_p$  siano zeri *semplici* di  $\Phi(x)$  (diversamente, l'integrale divergerebbe).

3.2.1. *Seconda legge di Keplero.* Consideriamo dunque il moto ad energia data  $E$ , quindi vincolato a svolgersi in  $\mathcal{O}(E)$ . Una osservazione di natura prettamente geometrica è stata fatta da Keplero. Con riferimento alla Fig. 9, consideriamo l'area spazzata da  $\mathbf{x}$  che si muove, nell'intervallo temporale  $[t, t + \delta t]$ , di modo che la sua anomalia aumenti dal valore  $\theta$  al valore  $\theta + \delta\theta$ ,  $\delta\theta > 0$  (stiamo assumendo  $L_z > 0$ ). Supponiamo per semplicità che in questo intervallo  $r$  cresca (questa ipotesi può essere facilmente rilassata). Indichiamo con  $A(\theta)$  l'area spazzata da  $\mathbf{x}$  nell'intervallo  $[\theta_0, \theta]$ , con  $\theta_0$  angolo iniziale del moto. Nell'intervallo  $\delta t$ , il vettore  $\mathbf{x}$  aumenta la sua anomalia da  $\theta$  a  $\theta + \delta\theta$ , spazzando un'area  $A(\theta + \delta\theta) - A(\theta)$ . La porzione di piano dell'orbita corrispondente è inclusa nel settore circolare di angolo  $\delta\theta$  e raggio  $r(\theta + \delta\theta)$  ed include il settore circolare di angolo  $\delta\theta$  e raggio  $r(\theta)$ , per cui vale la disuguaglianza

$$\frac{\delta\theta}{2\pi} \pi r^2(\theta) \leq A(\theta + \delta\theta) - A(\theta) \leq \frac{\delta\theta}{2\pi} \pi r^2(\theta + \delta\theta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} r^2(\theta) \leq \frac{A(\theta + \delta\theta) - A(\theta)}{\delta\theta} \leq \frac{1}{2} r^2(\theta + \delta\theta).$$

Nel limite  $\delta\theta \rightarrow 0$ , questa relazione implica

$$\frac{dA(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2(\theta).$$

D'altra parte

$$\frac{dA(\theta)}{dt} = \dot{\theta} \frac{dA(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L_z}{2m}.$$

La derivata di  $A$  nel tempo è quindi *costante*, essendo tali sia  $L_z$  che  $m$ . La quantità  $\dot{A}$  è detta *velocità areolare*. La sua costanza implica che  $\mathbf{x}$  spazza *aree uguali in tempi uguali* e corrisponde

alla *seconda legge di Keplero*. Si tratta di una prima proprietà geometrica di ogni orbita generata da un moto in campo centrale.

3.2.2. *Orbite circolari*. Torniamo ora alla questione della possibilità o meno di avere orbite chiuse. Un punto di partenza è considerare soluzioni nella forma

$$r = r_c, \quad \theta = \theta_0 + \omega t, \quad \text{dove } \omega := \frac{L_z}{mr_c^2},$$

ovvero *orbite circolari*, chiuse per costruzione. Si noti che la conservazione del momento angolare impone una legge lineare per  $\theta$ . Il valore  $r_c$  deve necessariamente essere critico rispetto al potenziale efficace, per quanto detto nel caso del moto unidimensionale, ovvero questa soluzione può esistere se e solo se  $V'_{\text{eff}}(r_c) = 0$ . A tale soluzione corrisponderà l'energia meccanica

$$E = V_{\text{eff}}(r_c) = V(r_c) + \frac{L_z^2}{2mr_c^2}.$$

Ammesso quindi che tale soluzione esista, essa può essere o meno stabile. La definizione di stabilità di un'orbita circolare è dovuta a Lagrange.

**DEFINIZIONE 3.1** (Stabilità secondo Lagrange). Si supponga  $L_z$  fissato. Un'orbita circolare di raggio  $r_c$  è stabile se la traiettoria  $r(t) = r_c$  è stabile secondo Lyapunov in un moto unidimensionale su  $\mathbb{R}^+$  soggetto a potenziale  $V_{\text{eff}}(r)$ .

La definizione quindi corrisponde a quella di Lyapunov se pensata limitata al moto nella direzione radiale ma, come si vede, ignora volutamente la variabile angolare (ed è per questo più debole). Quanto detto sul moto unidimensionale si traduce quindi nell'analisi della stabilità secondo Lagrange. In particolare

**PROPOSIZIONE 3.1.** *Se il potenziale efficace  $V_{\text{eff}}$  ha un minimo relativo isolato in  $r_c$ , un'orbita circolare di raggio  $r_c$  è stabile secondo Lagrange.*

3.2.3. *Seconda forma dell'equazione delle orbite*. Proviamo ora ad andare oltre il caso di orbita circolare. Lo studio delle orbite chiuse è reso più facile da una forma diversa di equazione delle orbite. Abbiamo già scritto la prima forma, valida nel caso in cui si studi l'evoluzione in un intorno di  $r > 0$  tale che  $\Phi(r) \neq 0$ ,

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(r)}}$$

che mostra qual è il legame tra variabile angolare e variabile radiale. Una forma diversa, ma utile, in cui mettere l'equazione delle orbite è ottenuta facendo il cambio di variabile

$$r = \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{L_z^2}{mr^2} = L_z \dot{\theta}.$$

Di conseguenza

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{u^2}{L_z} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{du}{d\theta}, \quad \ddot{r} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{u^2}{L_z \sqrt{m}} \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

L'equazione del moto si può quindi riscrivere in termini della variabile  $u$  come

$$m\ddot{r} = -V_{\text{eff}}(r) \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{L_z}{\sqrt{mu}^2} V'_{\text{eff}} \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right).$$

Abbiamo così ottenuto la *seconda forma dell'equazione delle orbite*,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -W'(u), \quad \text{dove } W(u) := V_{\text{eff}} \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right) = \frac{u^2}{2} + V \left( \frac{L_z}{\sqrt{mu}} \right)$$

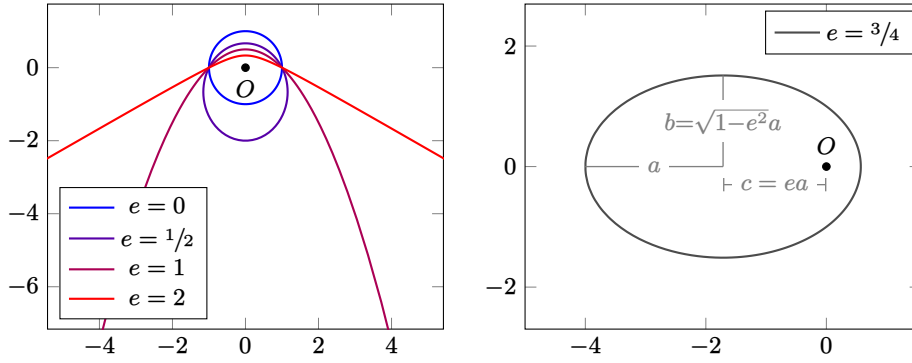


FIGURA 10. Orbite del problema di Keplero con orbita circolare  $r_c = 1$  e diversi valori dell'eccentricità  $e$ .

che nuovamente descrive un moto *unidimensionale* di una particella di massa unitaria e parametrizzato da  $u$  rispetto alla variabile “temporale”  $\theta$ . Esplicitando la dipendenza dal potenziale  $V$ , l'equazione si scrive a volte nella forma detta *di Binet*

$$u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{L_z}{\sqrt{m}} V' \left( \frac{L_z}{\sqrt{m}u} \right).$$

Anche l'energia meccanica del problema originale si traduce immediatamente in una forma corrispondente per il problema in  $u$ ,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \left( -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{du}{d\theta} \right)^2 + V_{\text{eff}} \left( \frac{L_z}{\sqrt{m}u} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + W(u).$$

L'utilità di questa forma sta nel fatto che il “semiperiodo” del moto descritto da  $u$  non è altro che l'angolo tra un punto estrema e l'altro del moto (pericentro ed apocentro),

$$\vartheta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{\Psi(x)}} dx, \quad \Psi(u) := 2(E - W(u)),$$

dove  $u_a$  e  $u_p > u_a$  sono due zeri consecutivi di  $\Psi(u)$  corrispondenti ad apocentro e pericentro della regione di moto ammessa  $\mathcal{O}(E)$ .

**Esercizio 1.6** — Dimostrare che se  $r_p$  ed  $r_a$  sono due zeri semplici consecutivi di  $\Phi(r)$ , allora  $u_a$  e  $u_p$  sono due zeri semplici consecutivi di  $\Psi(u)$ .

**Esempio 1.10** (Problema di Keplero) — Il caso  $V(r) = -\frac{k}{r}$  con  $k > 0$  corrisponde al cosiddetto problema di Keplero. Alla luce di quanto discusso, e la seconda forma dell'equazione delle orbite diventa in questo caso

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{k\sqrt{m}}{L_z}$$

la cui soluzione si può ottenere componendo una soluzione particolare dell'equazione con la soluzione del caso omogeneo. Una soluzione generica del problema omogeneo si può scrivere come  $u(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta$ , o equivalentemente come  $u(\theta) = \alpha \cos(\theta - \theta_0)$ , dove  $\alpha$  e  $\theta_0$  saranno parametri da fissare per mezzo delle condizioni iniziali. Una soluzione particolare è invece l'orbita circolare

$$u(\theta) \equiv u_c = \frac{k\sqrt{m}}{L_z} \Rightarrow r(\theta) \equiv r_c = \frac{L_z}{\sqrt{m}u_c} = \frac{L_z^2}{mk},$$

dove  $r_c$  è il raggio dell'unica orbita circolare ammessa, ovvero avente energia meccanica

$$E_c = V_{\text{eff}}(r_c) = -\frac{k^2 m}{2L_z^2} = -\frac{k}{2r_c}.$$

Questa quantità è l'energia *minima* ammessa dato che il potenziale efficace ha un minimo assoluto in  $r_c$ . Se ridefiniamo  $\alpha = \frac{L_z}{\sqrt{mr_c}} e$  per un qualche  $e$  reale, la soluzione generale si può scrivere come

$$u(\theta) = \frac{L_z}{\sqrt{m}} \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{r_c}.$$

La corrispondente relazione per  $r$  si ottiene facendo un cambio di variabile

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

ed è detta *prima legge di Keplero*. In questa espressione,  $r_c > 0$  è il raggio dell'orbita circolare. Il valore di  $e$  può essere sempre assunto positivo<sup>8</sup>. Esso è legato all'energia  $E \geq E_c$  dell'orbita. Infatti,

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + W(u) = \frac{(e^2 - 1)k^2 m}{2L_z^2} = (1 - e^2)E_c \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{E}{E_c}}.$$

L'equazione per  $r(\theta)$  parametrizza una conica di *eccentricità*  $e$  e parametro  $r_c$  con un fuoco nell'origine. Se  $e = 0$ , l'equazione descrive l'orbita circolare di raggio  $r_c$ ; se  $e \in (0, 1)$  essa descrive una ellisse; se  $e = 1$  essa corrisponde ad una parabola; se  $e > 1$  corrisponde ad una iperbole. Nel caso ellittico, è noto dalla geometria elementare che le dimensioni dei semiassi maggiore  $a$  e minore  $b$  sono

$$a = \frac{r_c}{1 - e^2}, \quad b = \frac{r_c}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 - e^2} a.$$

La seconda legge di Keplero, infine, implica che, detto  $\tau$  il periodo dell'orbita,

$$\pi ab = \frac{L_z}{2m} \tau.$$

Essendo ora  $L_z^2 = mkr_c = mka(1 - e^2)$ , questa stessa legge diventa

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{k}{4\pi^2 m},$$

che non è altro che la *terza legge di Keplero* che mostra che quadrati dei periodi e cubi dei semiassi maggiori sono in rapporto costante.

**Esempio 1.11** — Supponiamo di disporre di un punto materiale di massa  $m$  e di voler costruire un potenziale associato ad un campo centrale che generi un'orbita limitata parametrizzata da

$$r(\theta) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + e \cos(\omega\theta)}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

con  $a > 0$  e  $e \in (0, 1)$ , e rappresentata in Fig. 11. Assumeremo per semplicità il caso in cui intendiamo studiare orbite con  $\omega > 0$ . L'orbita è quindi tale che  $\frac{1}{a(1+e)} =: r_p \leq r \leq r_a := \frac{1}{a(1-e)}$ . Cerchiamo un potenziale che genera un'orbita siffatta, esprimendo eventualmente i parametri dell'orbita in funzione di quelli del potenziale. Sappiamo che, detto  $L_z > 0$  il momento angolare del punto materiale,  $u = \frac{L_z}{\sqrt{mr}}$  deve soddisfare la seconda forma dell'equazione delle orbite. Per semplicità, riparametrizziamo l'orbita scrivendo  $a = \frac{\sqrt{m}}{L_z} \alpha$ , di modo che  $u = \alpha(1 + e \cos(\omega\theta))$  e quindi

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -W'(u) \Rightarrow W'(u) = \alpha e \omega^2 \cos(\omega\theta) = \omega^2(u - \alpha) \Rightarrow W(u) = \frac{\omega^2 u^2}{2} - \alpha \omega^2 u,$$

a meno di una costante additiva arbitraria. D'altra parte,

$$V(r) = W\left(\frac{L_z}{\sqrt{mr}}\right) - \frac{L_z^2}{2mr^2} = \frac{(\omega^2 - 1)L_z^2}{2mr^2} - \frac{L_z \alpha \omega^2}{\sqrt{mr}}.$$

<sup>8</sup>Se  $e < 0$ , allora è possibile, naturalmente, riscrivere  $e \cos(\theta - \theta_0) = e' \cos(\theta - \theta'_0)$  con  $\theta'_0 = \theta_0 + \pi$  e  $e' = -e > 0$ .

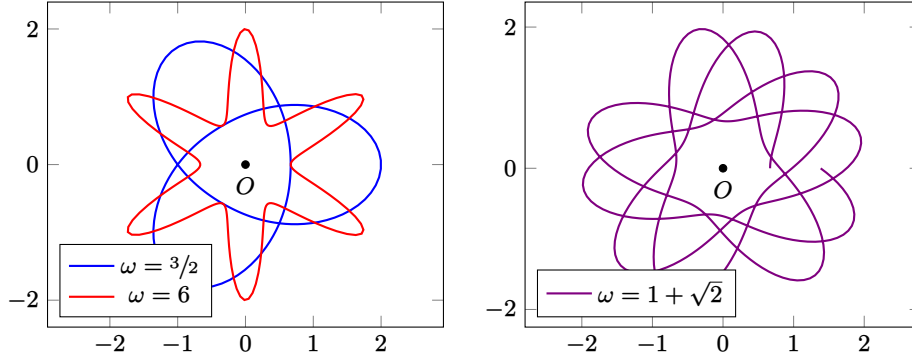


FIGURA 11. Orbite nell'Esempio 1.11 per diversi valori di  $\omega$  ottenute in un potenziale con  $\kappa = k = 1$ . In tutti i casi,  $e = 1/2$ . Orbite con  $\omega \in \mathbb{Q}$  sono chiuse, diversamente si ha a che fare con orbite aperte.

Questa espressione *non* dipende da  $L_z$  (come deve essere, dovendo essere il potenziale indipendente dalle condizioni iniziali del moto) se  $(\omega^2 - 1)L_z^2 = 2m\kappa > -L_z^2$  e  $\alpha L_z \omega^2 = \sqrt{mk} > 0$ , con  $k$  e  $\kappa$  entrambe costanti indipendenti da  $L_z$ , di modo che la forma di potenziale cercata è

$$V(r) = \frac{\kappa}{r^2} - \frac{k}{r}, \quad \kappa > 0, \quad k > 0.$$

Questo potenziale è associato al potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2 + 2m\kappa}{2mr^2} - \frac{k}{r},$$

e ammette un'orbita circolare di raggio  $r_c$  ed energia  $E_c$  dati rispettivamente da

$$r_c := \frac{L_z^2 + 2m\kappa}{mk}, \quad E_c = -\frac{mk^2}{2L_z^2 + 4m\kappa} = -\frac{k}{2r_c} < 0,$$

come si trova imponendo  $V'_{\text{eff}}(r_c) = 0$  e verificando che  $V''_{\text{eff}}(r_c) = kr_c^{-3} > 0$ . Quindi, essendo  $\alpha = \frac{\sqrt{mk}}{L_z \omega^2}$ , l'equazione per l'orbita assume la forma

$$r(\theta) = \frac{L_z^2 \omega^2}{mk} \frac{1}{1 + e \cos(\omega\theta)} = \frac{r_c}{1 + e \cos(\omega\theta)}, \quad \text{dove } \omega = \sqrt{1 + \frac{2m\kappa}{L_z^2}}.$$

Questa orbita è chiusa se, a  $\kappa$  dato,  $\omega \in \mathbb{Q}$ . La quantità  $e$  è fissata dall'energia  $E \geq E_c$ : infatti, basta scrivere

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + W(u) = \frac{(e^2 - 1)k^2 m}{2(L_z^2 + 2m\kappa)} = -(e^2 - 1)E_c \leq 0 \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{E}{E_c}}.$$

Per  $E = E_c$  si ritrova  $e = 0$  e quindi l'orbita circolare. Il limite  $\kappa \rightarrow 0$ , d'altra parte, riproduce il caso kepleriano.

**3.2.4. Teorema di Bertrand.** Supponiamo ora di occuparci di orbite vicine ad un'orbita circolare *stabile* di raggio  $r_c$ , ovvero tale che  $V'_{\text{eff}}(r_c) = 0$  e  $V''_{\text{eff}}(r_c) > 0$  per un certo  $r_c = \frac{L_z^2}{\sqrt{mu_c}}$ : questo implica che  $u_c$  è un punto di minimo locale anche per  $W$ . La seconda forma dell'equazione delle orbite può essere studiata nel limite di piccole oscillazioni attorno a  $u_c$ , sostituendo  $\xi := u - u_c$  e quindi

$$\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} = -\omega_c^2 \xi + o(u), \quad \omega_c^2 := W''(u_c) > 0.$$

Si tratta dell'equazione di un oscillatore armonico, il cui semiperiodo è

$$\vartheta = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{\sqrt{W''(u_c)}} = \pi \sqrt{\frac{V'(r_c)}{r_c V''(r_c) + 3V'(r_c)}}.$$

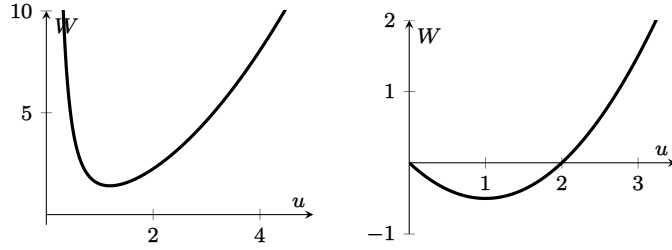


FIGURA 12. Potenziale  $W$  nel teorema di Bertrand per  $b = 2$  (sinistra) e  $b = -1$  (destra) con  $\bar{a} = 1$ .

Questa quantità dipende, in generale, da  $r_c$  in maniera continua: il valore di  $r_c$  è infatti funzione del momento  $L_z$  dato dalle condizioni iniziali, e non è univocamente determinato dalla forma di  $V$ . Vi sono però due casi in cui essa *non* dipende dal valore di  $r_c$  ma solo dalla forma del potenziale  $V$ . Questi casi possono essere trovati per ispezione diretta, imponendo che esista una costante  $\alpha > 0$  tale che

$$\frac{V'(r_c)}{r_c V'''(r_c) + 3V''(r_c)} \equiv \frac{1}{\alpha} \Rightarrow V''(r_c) = \frac{\alpha - 3}{r_c} V'(r_c).$$

Questa equazione ammette come soluzione<sup>9</sup>  $V'(r) = \hat{a} r^{\alpha-3}$  per un qualche  $\hat{a} \in \mathbb{R}$  se  $\alpha \neq 3$ , ed è compatibile con due forme per  $V$ , ovvero, per un qualche  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$V(r) = ar^b \quad b > -2 \text{ e } b \neq 0, \quad V(r) = a \ln r.$$

Sostituendo nell'espressione trovata per  $\vartheta$  si trova quindi che

$$(1.11) \quad \vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2+b}} \quad b > -2.$$

dove  $b = 0$  corrisponde al caso logaritmico. Grazie a questo risultato possiamo dare il seguente

**TEOREMA 3.2 (Bertrand).** *In un campo centrale di potenziale analitico  $V(r)$ , tutte le orbite limitate sono chiuse se e solo se*

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{o} \quad V(r) = kr^2$$

per una qualche costante positiva  $k$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per quanto abbiamo mostrato sopra, le orbite limitate che si tengono vicine a quella circolare di raggio  $r_c$  hanno in generale un semiperiodo angolare  $\vartheta$  dipendente da  $r_c$ : poiché però  $r_c$  può essere alterato con continuità in ogni potenziale sufficientemente regolare, perché queste orbite siano chiuse questa dipendenza deve essere assente. Ciò significa che, per quanto detto sopra, le uniche due forme funzionali ammesse sono  $V(r) = ar^b$ , con  $b > -2$  e  $b \neq 0$ , e  $V(r) = a \ln r$ . D'altra parte, nel secondo caso  $\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  e dunque le orbite non possono essere chiuse. L'unica possibilità è quindi che sia  $V(r) = ar^b$ , con  $b > -2$  e  $b \neq 0$ . Nella notazione sopra, il potenziale che appare nella seconda forma dell'equazione delle orbite si scrive quindi

$$W(u) = \frac{u^2}{2} + \frac{am^{\frac{b}{2}}}{L_z^b u^b} \equiv \frac{u^2}{2} + \frac{\bar{a}}{u^b}, \quad b > -2, \quad b \neq 0$$

dove abbiamo introdotto la costante  $\bar{a}$  che incorpora la dipendenza dalla massa e dal momento angolare. Per ogni valore ammesso di  $b$  esiste un'unica orbita circolare a  $\bar{a}$  fissato. Distinguiamo ora due casi.

$b > 0$  Perché il potenziale sia confinante, deve essere  $a > 0$ . Vogliamo calcolare

$$\vartheta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{\sqrt{\Psi(x)}} dx \stackrel{x=u_p y}{=} \int_{\frac{u_a}{u_p}}^1 \frac{u_p}{\sqrt{\Psi(u_p y)}} dy.$$

Osservando che  $E = W(u_p)$ , abbiamo quindi

$$\frac{\Psi(u_p y)}{u_p^2} = 2 \frac{W(u_p) - W(u_p y)}{u_p} = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{a}}{u_p^{2+b}} - \frac{1}{2} y^2 - \frac{\bar{a}}{u_p^{2+b} y^b} \right) \xrightarrow[L_z \text{ fisso}]{E \rightarrow +\infty} 1 - y^2.$$

<sup>9</sup>Il caso  $\alpha = 3$  è escluso perché implicherebbe  $V''(r_c) = 0$ .



Nel limite abbiamo usato il fatto che a  $L_z$  fisso, prendendo  $E \rightarrow +\infty$  si ha che  $u_p \rightarrow +\infty$  mentre  $\bar{a}$  rimane fissato. In questo limite quindi

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \vartheta = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Questo valore è compatibile con un'orbita chiusa, ma, se vogliamo che tutte le orbite limitate siano chiuse, deve essere anche compatibile con la formula  $\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{2+b}}$  ottenuta per le orbite vicino a quella circolare: l'unico valore ammesso è perciò  $b = 2$ .

$b < 0$

Perché il potenziale sia confinante, deve essere  $a < 0$  e le uniche orbite limitate hanno energia negativa.

Indicando con  $\beta := -b \in (0, 2)$ ,  $W(u) = \frac{u^2}{2} + \bar{a}u^\beta$ . A  $L_z$  fisso, procediamo come nel caso precedente calcolando il limite di  $\vartheta$  nell'energia massima compatibile con orbite chiuse, ovvero  $\lim_{E \rightarrow +0^-} \vartheta$ . In questo limite  $u_a \rightarrow 0$ , mentre  $u_p$  è tale che  $u_p^{2-\beta} = -2\bar{a}$ . Procedendo ora come nel caso  $b > 0$ , eseguiamo un cambio di variabili  $u = u_p y$  di modo che

$$\frac{\Psi(u_p y)}{u_p^2} = 2 \frac{W(u_p) - W(u_p y)}{u_p} = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{a}}{u_p^{2-\beta}} - \frac{1}{2} y^2 - \frac{\bar{a}}{u_p^{2-\beta}} y^\beta \right) \xrightarrow[L_z \text{ fisso}]{E \rightarrow 0^-} y^\beta - y^2.$$

A velocità angolare fissata, perciò,

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \vartheta = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{\sqrt{2-\beta}},$$

che nuovamente è compatibile con la formula valida in un intorno dell'orbita circolare se e solo se  $b = -\beta = -1$ . Il corrispondente valore di  $\vartheta$ ,  $\vartheta = \pi$ , produce orbite periodiche chiuse.  $\square$

**3.3. Problema a due corpi.** Siano dati due punti materiali,  $(P_1, m_1)$  in posizione  $\mathbf{x}_1$ , e  $(P_2, m_2)$  in posizione  $\mathbf{x}_2$ , interagenti per mezzo di un potenziale  $V(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)$ , ovvero con equazioni del moto  $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)$ ,  $i = 1, 2$ . Studiare questo problema equivale a studiare un problema di un punto materiale in un campo centrale. Le equazioni del moto dei due punti sono infatti

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -V'(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -V'(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} = -m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1.$$

Definendo quindi

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_G = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2},$$

rispettivamente vettore posizione relativa e vettore del centro di massa  $G$ , si ha che l'accelerazione di  $G$  è nulla rispetto ad un riferimento inerziale, essendo

$$\ddot{\mathbf{x}}_G = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{0}.$$

Inoltre, definendo  $\mathbf{r} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ,

$$\begin{aligned} (1.12) \quad m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}} &= m_1 m_2 \ddot{\mathbf{x}}_1 - m_1 m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 \\ &= -m_2 V'(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} + m_1 V'(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} \\ &= -(m_1 + m_2) V'(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} = -(m_1 + m_2) V'(\|\mathbf{r}\|) \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -(m_1 + m_2) \nabla_{\mathbf{r}} V(\|\mathbf{r}\|), \end{aligned}$$

ovvero

$$\hat{m} \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}), \quad \hat{m} := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

che è il moto in un campo centrale di un punto materiale di massa  $\hat{m} := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ : tale massa è detta *massa ridotta*. Si noti che è sempre possibile scegliere un riferimento inerziale con  $\mathbf{x}_G = 0$ , di modo che  $m_1 \mathbf{x}_1 = -m_2 \mathbf{x}_2$ , e quindi  $\mathbf{r} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \mathbf{x}_1 = -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \mathbf{x}_2$ .

#### 4. Sistemi a molti punti materiali

Abbiamo finora considerato il problema di un singolo punto materiale in moto soggetto ad una dinamica unidimensionale o effettivamente unidimensionale. Più in generale, dato un sistema di  $n \geq 2$  punti materiali  $\mathcal{S} := \{(P_i, m_i)\}_{i=1}^n$ , possibilmente soggetto a dei vincoli, il problema della meccanica consiste nel risolverne le traiettorie per mezzo delle equazioni del moto, che assumono la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove  $\mathbf{x}_i$  è la posizione del punto materiale  $P_i$ , soggetto ad una forza totale  $\mathbf{F}_i$ . Due quantità “globali” saranno oggetto di interesse, ovvero la quantità di moto totale

$$\mathbf{Q} := \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i$$

e il momento totale della quantità di moto

$$\mathbf{L}_A := \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_A) \wedge (m_i \dot{\mathbf{x}}_i),$$

qui calcolato rispetto ad un polo  $A$  individuato dal vettore  $\mathbf{x}_A$ . Come osservato nel caso di un singolo punto materiale, esiste una relazione semplice tra  $\mathbf{L}_A$ , calcolato rispetto al polo  $A$  individuato dal vettore  $\mathbf{x}_A$ , e  $\mathbf{L}_B$ , calcolato rispetto al polo  $B$  individuato dal vettore  $\mathbf{x}_B$ , e quantità di moto, ovvero

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{Q}.$$

Questa relazione è a volte detta *legge del cambiamento di polo*. Segue subito che se  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_B$ , ovvero il momento angolare totale non dipende dal polo. Inoltre, se  $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$  e  $\mathbf{Q}$  sono paralleli, il momento angolare non cambia nel passare dal polo  $A$  al polo  $B$ .

Avendo introdotto queste quantità cruciali, le loro derivate temporali sono uguali rispettivamente a

$$(1.13) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i =: \mathbf{R},$$

$$(1.14) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \wedge (m_i \dot{\mathbf{x}}_i)) = \sum_i \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} =: \boldsymbol{\tau}_O,$$

dove  $\mathbf{R}$  e  $\boldsymbol{\tau}_O$  sono la risultante di tutte le forze e il momento risultante di tutte le forze rispetto ad  $O$ . È possibile anche scegliere come polo rispetto a cui calcolare il momento angolare un punto  $P$  del sistema, sia esso per esempio il punto di coordinate  $\mathbf{x}_P$ : in tal caso, si vede facilmente che

$$\dot{\mathbf{L}}_P = \boldsymbol{\tau}_P - \dot{\mathbf{x}}_P \wedge \mathbf{Q}.$$

Il momento totale  $\boldsymbol{\tau}_B$  è legato al momento  $\boldsymbol{\tau}_A$  da una legge di cambio di polo analoga a quella già vista per il momento angolare, ovvero

$$\boldsymbol{\tau}_B = \boldsymbol{\tau}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{R}$$

per cui il momento totale delle forze non dipende dal polo in cui è calcolato quando  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ .

Queste equazioni possono essere semplificate osservando che ciascuna forza  $\mathbf{F}_i$  applicata ad un punto materiale  $P_i$  contiene contributi di natura diversa. Vi sarà, anzitutto, un contributo *interno*  $\mathbf{F}_i^{(\text{in})}$ , dovuto all'interazione di  $P_i$  con tutti gli altri elementi in  $\mathcal{S}$ , ed un contributo rimanente *esterno*  $\mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$ , dovuto all'interazione con sistemi non in  $\mathcal{S}$ , o ai vincoli. Indichiamo

con  $\mathbf{F}_{ij}$  la contributo alla forza interna applicata ad  $i$  dovuto alla presenza punto materiale  $j$ : possiamo ora derivare il seguente risultato.

**TEOREMA 4.1.** *La risultante e il momento delle forze interne di un sistema  $\mathcal{S}$  sono sempre nulli.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per via del terzo principio della meccanica, le forze interne sono a due a due opposte, ovvero  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Ne segue che la risultante delle forze interne è nulla

$$\mathbf{R}^{(\text{in})} = \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{P_i, P_j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Sempre usando il terzo principio, il momento totale delle forze interne è

$$\boldsymbol{\tau}_O^{(\text{in})} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_i \wedge \sum_{\substack{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}}} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \wedge \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}.$$

Si noti che la scelta del polo è irrilevante essendo  $\mathbf{R}^{(\text{in})} = \mathbf{0}$ . □

Come conseguenza di quanto detto, vale il seguente

**COROLLARIO 4.2** (Prima e seconda equazione cardinale). *Valgono le seguenti equazioni cardinali per un sistema di punti*

$$(1.15) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(\text{ext})},$$

$$(1.16) \quad \dot{\mathbf{L}}_O = \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}.$$

Dato un versore  $\hat{\mathbf{u}}$ , se  $\langle \mathbf{R}^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$  allora  $\langle \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{u}} \rangle$  si conserva. Similmente, se  $\langle \boldsymbol{\tau}_O^{(\text{ext})}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$  allora  $\langle \mathbf{L}_O, \hat{\mathbf{u}} \rangle$  si conserva.

Si noti che  $\mathbf{Q}$  si può immaginare come la quantità di moto di un punto materiale  $G$  di massa  $m := \sum_i m_i$  in posizione data dal centro di massa

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{x}_i,$$

ovvero si può scrivere

$$m\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{R}^{(\text{ext})}.$$

**COROLLARIO 4.3.** *In assenza di forze esterne, il centro di massa  $G$  di un sistema di  $n$  punti materiali ha accelerazione nulla.*

Il centro di massa può quindi sempre essere considerato come conveniente origine di un riferimento inerziale in cui svolgere una analisi quando sul sistema considerato non sono applicate forze esterne, ovvero se il sistema è *isolato*.

La suddivisione tra contributo interno ed esterno può essere applicata anche nel calcolo della potenza. Infatti, derivando l'energia cinetica potremo separare un contributo dovuto alle forze interne ed uno dovuto alle forze esterne,

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{(\text{ext})} + \Pi^{(\text{int})}, \quad \Pi^{(\text{ext})} := \sum_i \langle \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle, \quad \Pi^{(\text{int})} := \sum_i \langle \mathbf{F}_i^{(\text{int})}, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle.$$

Si noti che, se abbiamo a che fare con un sistema *isolato*, per quanto detto sopra disporremo di *nove integrali primi del moto*, ovvero nove quantità che si conservano: sei legati a posizione e velocità del centro di massa, tre espressi dalla conservazione del momento angolare. Se inoltre le forze interne in gioco sono conservative, anche l'energia meccanica si conserva, per un totale

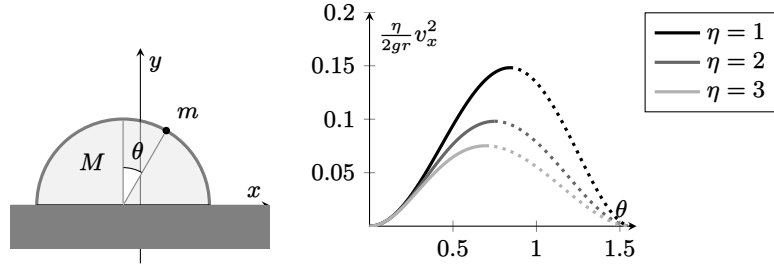


FIGURA 13. Punto materiale di massa  $m$  su emisfero di raggio  $r$  e massa  $M$  e funzione di  $v_x^2$  in funzione dell'angolo con la verticale  $\theta$  per diversi valori di  $\eta = 1 + \frac{m}{M}$ .

di dieci integrali primi. In generale, tuttavia, questo numero di integrali primi non è sufficiente per determinare completamente la soluzione del problema dinamico.

**Esercizio 1.7** (Distacco da emisfero) — Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  giace in cima ad un emisfero di massa  $M$  e raggio  $r$ , a sua volta poggiato su un piano liscio. In un certo istante, il punto materiale subisce un impulso infinitesimo, in modo da acquisire una velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  tangente all'emisfero. Supponendo il contatto tra punto materiale ed emisfero anch'esso liscio, si scriva una equazione per l'angolo  $\theta$ , misurato dalla sommità dell'emisfero, a cui il punto materiale si distacca. Si assuma che  $\mathbf{v}_0$  sia arbitrariamente piccola in norma.

*Soluzione.* — Il moto avviene nel piano verticale passante per il centro dell'emisfero e in cui giace la velocità iniziale del punto materiale  $\mathbf{v}_0$ . Utilizziamo un riferimento come in Fig. 13. Eccezion fatta per le forze peso, l'unica altra forza esterna in gioco è quella vincolare, anch'essa diretta verticalmente: pertanto nella direzione orizzontale non vi sono forze esterne applicate e la quantità di moto si conserva. Indicando con  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  la velocità del punto materiale e con  $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$  la velocità dell'emisfero nel riferimento in figura, dovremo perciò avere

$$mv_x + MV_x = 0 \Rightarrow V_x = -\frac{m}{M}v_x.$$

Osserviamo ora che se la particella si trova in posizione  $\mathbf{x}$  ad un angolo  $\theta$  dalla verticale sull'emisfero, detto  $\mathbf{x}_C$  la posizione del centro dell'emisfero, esso avrà

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_C + r \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{V} + r\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v_y}{V_x - v_x} = -\frac{v_y}{\eta v_x} \Leftrightarrow v_y = -\eta v_x \tan\theta, \quad \eta := 1 + \frac{m}{M}.$$

Infine, nel sistema deve conservarsi l'energia, ovvero, indicando con  $g$  l'accelerazione di gravità,

$$mgr(1 - \cos\theta) = m \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{MV_x^2}{2} \Rightarrow v_x^2 = \frac{2gr(1 - \cos\theta)}{\eta(1 + \eta \tan^2\theta)}.$$

La quantità  $v_x^2$  appena calcolata si annulla solo per  $\theta = 0$  (configurazione iniziale) e  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ : in questo intervallo la funzione ha un certo massimo. Il punto di distacco è esattamente il punto in cui la forza di reazione applicata dall'emisfero diventa nulla, ovvero  $\dot{v}_x = 0$ , posizione che può essere individuata calcolando

$$0 = \dot{v}_x = \dot{\theta} \frac{dv_x}{d\theta} = \frac{\dot{\theta}}{2v_x} \frac{dv_x^2}{d\theta}.$$

Abbiamo qui usato il fatto che fino al punto di distacco  $\dot{\theta} > 0$  (il punto scivola lungo l'emisfero verso il basso), per cui la condizione diventa semplicemente  $\frac{dv_x^2}{d\theta} = 0$ : la curva che esprime la dipendenza di  $v_x^2$  da  $\theta$  diventa *non fisica* oltre il punto di massimo, dato che sarebbe associata ad una forza applicata orizzontale negativa. Con un po' di algebra, la condizione  $\frac{dv_x^2}{d\theta} = 0$  si scrive

$$(\eta - 1) \cos^3\theta - 3\eta \cos\theta + 2\eta = 0.$$

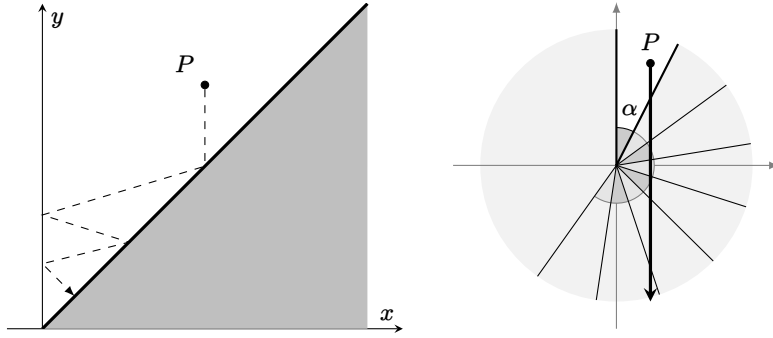


FIGURA 14. Problema di Galperin (a sinistra) e descrizione equivalente in termini di biliardo su settore del primo quadrante.

Utilizzando le formule di Cardano per le equazioni cubiche, si trova che la soluzione è

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{\eta}{\eta-1}} \left( \cos \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{\eta-1}} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{\eta-1}} \right) \right).$$

Per  $\eta \rightarrow 1^+$  e per  $\eta = 2$  non è necessario ricorrere a questa formula, dato che è possibile trattare più semplicemente l'equazione. Nel limite  $\eta \rightarrow 1^+$ , ovvero  $M \rightarrow +\infty$  (emisfero fisso),

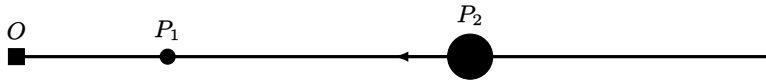
$$\cos \theta = \frac{2}{3}.$$

L'equazione può essere risolta con semplicità anche per  $\eta = 2$ , dato che in questo caso diventa

$$\cos^3 \theta - 6 \cos \theta + 4 = 0 \Rightarrow (\cos \theta - 2)(\cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 2) = 0 \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{3} - 1.$$

Per  $\eta \rightarrow +\infty$ , naturalmente, non c'è moto (in questo caso occorrerebbe un'energia infinita per mettere in movimento il punto materiale).

**Esempio 1.12** (Un esempio di biliardo<sup>10</sup>) — Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , di massa rispettivamente  $m_1 = 1$  e  $m_2 = \eta$ , con  $\eta > 1$ , sono vincolati a scorrere lungo una guida liscia. La guida consiste in una semiretta, di modo che si possa considerare parametrizzata da  $\gamma(s) = (s, 0, 0)^\top$  con  $s \in \mathbb{R}^+$ . Nell'origine della semiretta si ha un fermo invalicabile. La configurazione di  $P_1$  e  $P_2$  è quindi univocamente determinata dalla loro ascissa curvilinea che indichiamo con  $x$  ed  $y$  rispettivamente. Assumiamo come condizioni iniziali per  $t = 0$  siano  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ , con  $0 \leq x_0 \leq y_0$ , il che implica  $0 \leq x \leq y$  ad ogni  $t > 0$ , dato che i punti non possono attraversarsi reciprocamente. Inoltre, a  $t = 0$ , assumiamo che  $P_1$  sia fermo,  $\dot{x}(0) = 0$ , mentre  $P_2$  ha velocità  $\dot{y}(0) = -v_0$  con  $v_0 > 0$ , ovvero è diretto verso l'origine della semiretta, e quindi andrà a collidere con  $P_1$ .



Ci si chiede ora *quanti urti* (tra i punti materiali o tra  $P_1$  e il fermo in  $O$ ) *avranno luogo durante l'evoluzione del sistema* assumendo che le collisioni siano *elastiche*, ovvero che si conservi sia la quantità di moto che l'energia cinetica ad ogni urto. Lo spazio delle configurazioni è un settore del primo quadrante nel piano  $(x, y)$  con angolo al centro  $\frac{\pi}{4}$ , come in Fig. 14: il sistema è individuato da un punto  $P = (x, y)$  nella porzione di spazio compresa tra l'asse  $y$  e la retta  $y = x$  per  $x > 0$ : se  $P$  tocca l'asse  $y$ , significa che  $P_1$  urta  $O$ ; se  $P$  tocca la retta  $y = x$ , significa che  $P_1$  urta  $P_2$ . Questo punto *si muove di moto rettilineo uniforme* tra un urto e l'altro dato che non vi sono altre forze agenti lungo la traiettoria dei punti materiali: la velocità di  $P$  è  $(\dot{x}, \dot{y})$ , ovvero ha come componenti le velocità di  $P_1$  e  $P_2$ . Un fatto molto interessante della dinamica di questo sistema è che gli urti sulla frontiera del suo dominio possono

<sup>10</sup>G. Galperin, *Playing pool with  $\pi$* , Regular and chaotic dynamics, 8(4), 375 (2003).

essere studiati come in un *biliardo*. Per essere più precisi, immediatamente dopo  $t = 0$ ,  $P$  si muoverà verticalmente nello spazio delle configurazioni con velocità  $\mathbf{v}_0 = (0, -v_0)$ , fino ad urtare la retta  $y = x$ . A quel punto la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica impongono che subito dopo l'urto la velocità di  $P$  sia  $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$  tale che

$$u_1 + \eta v_1 = -\eta v_0, \quad \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}\eta v_1^2 = \frac{1}{2}\eta v_0^2.$$

Dopo la collisione,  $P_1$  continuerà a muoversi verso  $O$  (essendo  $\eta > 1$ ) con velocità  $u_1$ , in modulo minore di  $v_1$  per ragioni di conservazione dell'energia. Ciò significa che  $P_1$  raggiungerà  $O$  prima di essere raggiunta da  $P_2$  e quindi il secondo urto sarà tra  $P_1$  e l'origine: la velocità di  $P$  passerà da  $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$  a  $\mathbf{v}_2 = (u_2, v_2) = (-u_1, v_1)$ . A questo punto  $P_1$  tornerà indietro, urtando nuovamente  $P_2$  in un terzo urto. Le equazioni che forniscono la velocità di  $P$  dopo il terzo urto, sia  $\mathbf{v}_3 = (u_3, v_3)$ , sono

$$u_3 + \eta v_3 = u_2 + \eta v_2 = -u_1 + \eta v_1, \quad \frac{1}{2}u_3^2 + \frac{1}{2}\eta v_3^2 = \frac{1}{2}\eta v_0^2$$

che occorrerà analizzare in termini di  $\eta$ , etc. Per fare progressi sul problema, è utile, come anticipato, mapparla in un vero “biliardo”. L’“urto” di  $P$  sulla retta  $y = x$  non produce, in generale, una riflessione “ottica”, ovvero tale per cui l'angolo di incidenza e di riflessione sono uguali. Si può però eseguire una speciale trasformazione lineare che rende questa riflessione del tipo desiderato. Introduciamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}$$

di modo che  $\mathbf{x} = (x, y)^T \mapsto \mathbf{X} = (X, Y)^T = \mathbf{A}\mathbf{x} = (x, \sqrt{\eta}y)^T$ . Si tratta di un cambio di scala, che modifica l'angolo al centro del settore ammesso da  $\frac{\pi}{4}$  ad un nuovo angolo  $\alpha$  tale per cui

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\eta}}.$$

Se l'asse  $y$  viene mappato in se stesso da questa trasformazione, la retta  $y = x$  viene mappata nella retta  $Y = \sqrt{\eta}X$ , che ha direzione

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\eta} \end{pmatrix}.$$

Vediamo come cambiano ora le condizioni di conservazione di quantità di moto ed energia cinetica utilizzando le nuove variabili. L'urto con l'asse  $Y$  non cambia natura, dato che  $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{v} = (v_x, \sqrt{\eta}v_y)^T \mapsto (-v_x, \sqrt{\eta}v_y)^T$  (già in forma adeguata prima della trasformazione). La legge che regola gli urti tra  $P_1$  e  $P_2$  invece si riscrive in modo piuttosto elegante: se il  $k$ -esimo urto avviene tra  $P_1$  e  $P_2$ , la velocità dopo l'urto  $\mathbf{V}_k$  è legata alla velocità prima dell'urto  $\mathbf{V}_{k-1}$  come

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_k \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_{k-1} \rangle, \quad \|\mathbf{V}_k\|^2 = \|\mathbf{V}_{k-1}\|^2,$$

che equivale a dire che l'urto ruota il vettore velocità mantenendone costante il modulo e la proiezione nella direzione della frontiera  $\mathbf{t}$ : questo è esattamente quel che accade in un urto “ottico”, dove la velocità conserva il suo modulo e mantiene uguale la proiezione lungo la direzione tangente alla superficie di impatto. Nelle nuove coordinate, quindi,  $P$  si muove nella regione ammessa esattamente come un punto materiale in un biliardo ideale. L'utilità di questo fatto è che possiamo studiare il moto di  $P$  con una semplice costruzione geometrica. Basta osservare che esiste una corrispondenza biunivoca tra la traiettoria in questo speciale biliardo e la costruzione in Fig. 14. Il diagramma rappresentato è stato ottenuto replicando un angolo  $\alpha$  nel piano, ottenendo una infinità di settori ciascuno con angolo al centro  $\alpha$ , e considerando la traiettoria che  $P$  seguirebbe nel piano stesso se non ci fosse riflessione sulla retta  $Y = \eta X$ . La traiettoria che esso segue nel secondo settore è *speculare* rispetto a  $Y = \eta X$  a quella che  $P$  segue nel primo in presenza di riflessione, ovvero coincide con una traiettoria reale a meno di una riflessione attorno alla bisettrice del settore e una traslazione di  $\alpha$ . La traiettoria di  $P$  nel terzo settore è *uguale* a quella seguita nel primo settore a meno di una rotazione di  $2\alpha$ , e così via. Il numero di collisioni corrisponde quindi al numero di settori attraversati da  $P$ . Questa traiettoria interseca necessariamente un numero *finito* di settori  $n$ , pari a  $n = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil - 1$ , dove ricordiamo che  $\alpha$  è tale che  $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{\eta}}$ . Se

$\eta = 100^N$ , per esempio,  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\arctan 10^{-N}} = 10^N + \frac{1}{3 \cdot 10^N} + o(10^{-N})$  e quindi, per  $N \gg 1$ ,  $n = \lceil \pi 10^N \rceil$ , ovvero il numero di urti corrisponde all'intero ottenuto considerando le prime  $N$  cifre di  $\pi$ .

**4.1. Considerazioni di similitudine.** Concludiamo con una osservazione generale ma importante<sup>11</sup>. È spesso possibile ottenere informazioni qualitative dalle equazioni del moto senza necessariamente procedere alla loro risoluzione ma osservando come queste si comportano rispetto a trasformazioni di similitudine dei loro parametri. La più semplice considerazione di questo tipo è la seguente. Supponiamo di disporre di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e soggetto a sole forze conservative di potenziale  $V$ . Sappiamo che il suo moto è caratterizzato dall'equazione

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

Il termine a destra dipende esclusivamente da  $\mathbf{x}$ , mentre il termine a sinistra è invariante per trasformazioni  $m \mapsto \alpha^2 m$ ,  $t \mapsto \alpha t$  per  $\alpha \neq 0$ . Ciò significa che le traiettorie ottenute come soluzione del problema originale varranno per problemi in cui la massa è riscalata di un fattore  $\alpha^2$  purché il tempo venga riscalato di un fattore  $\alpha$ . Si noti che è anche ammesso che l'orientamento del tempo venga invertito: le equazioni del moto sono infatti *invarianti per inversione temporale* se le forze non dipendono esplicitamente dal tempo.

Più precisamente, sia dato un corpo materiale di massa  $m$ , in posizione  $\mathbf{x}$  e soggetto ad un potenziale  $V(\mathbf{x})$ . Ipotizziamo di conoscere la sua traiettoria  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  soluzione del problema di Cauchy

$$(1.17) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0. \end{cases}.$$

Poniamo  $t = \alpha \hat{t}$  e  $m = \alpha^2 \hat{m}$ . Se ipotizziamo che  $V$  non viene alterato dalla trasformazione, avremo che

$$\begin{cases} \hat{m} \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\hat{t}^2} = -\nabla V(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \frac{d\mathbf{x}}{d\hat{t}}(0) = \alpha \mathbf{v}_0. \end{cases}.$$

Si ha ora che  $\hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) := \bar{\mathbf{x}}(\alpha \hat{t})$  è soluzione di questo problema di Cauchy. Infatti

$$\hat{m} \frac{d^2 \hat{\mathbf{x}}(\hat{t})}{d\hat{t}^2} = \hat{m} \frac{d^2 \bar{\mathbf{x}}(\alpha \hat{t})}{d\hat{t}^2} = \hat{m} \alpha^2 \frac{d^2 \bar{\mathbf{x}}(t)}{dt^2} = -\nabla V(\bar{\mathbf{x}}(t)) = -\nabla V(\bar{\mathbf{x}}(\alpha \hat{t})) = -\nabla V(\hat{\mathbf{x}}(\hat{t})).$$

Inoltre  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  e  $\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\hat{t}}(0) = \alpha \frac{d\bar{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \alpha \mathbf{v}_0$ . Il *secondo* problema di Cauchy ha quindi come soluzione una trasformata opportuna della soluzione del *primo* problema di Cauchy, ottenuta sostituendo  $t \mapsto \alpha \hat{t}$  e  $m \mapsto \alpha^2 \hat{m}$ : in particolare, scegliendo  $\alpha = -1$ , si ha che  $\hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) = \bar{\mathbf{x}}(-\hat{t})$ , ovvero l'evoluzione per  $\hat{t} > 0$  crescente nel secondo problema di Cauchy corrisponde all'evoluzione "a ritroso" descritta dal primo problema con  $t < 0$  decrescente.

Analogamente, se  $V$  è una funzione omogenea di grado  $\nu$ , ovvero gode della proprietà  $V(\beta \mathbf{x}) = \beta^\nu V(\mathbf{x})$  per  $\beta > 0$ , data una soluzione  $\bar{\mathbf{x}}$  dell'equazione del moto lo sarà anche  $\hat{\mathbf{x}} = \beta^{-1} \bar{\mathbf{x}}$  purché si riscali il tempo introducendo  $t = \hat{t} \beta^{1-\frac{\nu}{2}}$ . In altre parole, se disponiamo di una soluzione  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  di un certo problema di Cauchy nella forma in Eq. (1.17), allora  $\hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) = \beta^{-1} \bar{\mathbf{x}}(\beta^{1-\frac{\nu}{2}} \hat{t})$  è

<sup>11</sup>Per questa sezione si veda in particolare V. I. Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori riuniti (1974), da cui l'ultimo esempio è riprodotto pressoché *verbatim*.

soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \beta \mathbf{x}_0, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt}(0) = \beta^{\frac{\nu}{2}} \mathbf{v}_0. \end{cases}.$$

ovvero della stessa equazione ma con diverse condizioni iniziali. Questa semplice osservazione permette di derivare immediatamente risultati fondamentali. Il potenziale del problema di Keplero, per esempio, è omogeneo con  $\nu = -1$ , il che significa che orbite di  $\beta$  volte più grandi vengono percorse in tempi riscalati di un fattore  $\beta^{3/2}$ . Similmente, nel caso del moto armonico,  $\nu = 2$  e di conseguenza una variazione di scala delle traiettorie *non* induce una variazione dei tempi di percorrenza, che è la nota isocronia delle oscillazioni del pendolo in approssimazione di piccole oscillazioni.

**Esempio 1.13** — Le considerazioni di scala possono essere utili per produrre una analisi qualitativa semplice ma efficace. Valutiamo per esempio come scala l'altezza raggiungibile con un salto da un animale con la sua taglia  $\ell$ . L'energia meccanica necessaria per compiere un salto di altezza  $h$  è  $V \sim h\ell^3$ , essendo il peso dell'animale proporzionale al suo volume. D'altro canto, la forza esprimibile dalla muscolatura dell'animale dipende dall'area della sezione dei suoi muscoli, ovvero  $F \sim \ell^2$ , e il lavoro eseguibile dagli stessi scala come  $W \sim F\ell \sim \ell^3$ . Ne segue che deve valere  $h\ell^3 \sim \ell^3$ , ovvero  $h \sim 1$ . In altre parole,  $h$  non dipende dalle dimensioni dell'animale e in effetti *il topo delle piramidi e il canguro saltano più o meno alla stessa altezza*.