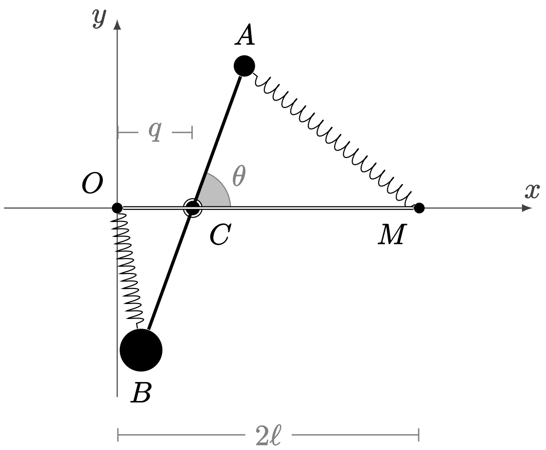
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI ARCHITETTURA E INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

1 Dicembre 2023

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Ogni domanda corrisponde ad un massimo di 6 punti. Il voto minimo per l'accesso all'orale è `15/30`.

In figura è rappresentato un sistema mobile su un piano dove è dato un sistema di riferimento cartesiano Oxy. Il sistema è costituito da un'asta rigida, di massa trascurabile e di lunghezza 2ℓ, incerniata nel suo centro geometrico C vincolato a muoversi lungo l'asse x. L'asta è libera di ruotare attorno a C, che a sua volta è libero di scorrere senza attrito lungo l'asse delle ascisse tra l'origine O e un punto fisso a distanza 2ℓ da essa, che chiamiamo M. Agli estremi dell'asta si trovano due masse: in un estremo, sia detto A, è collocata una massa pari a m, mentre nell'altro, sia detto B, la massa è pari a $2m$. La massa in B è collegata all'origine O da una molla ideale di costante elastica k, mentre la massa in A è collegata a M da una seconda molla ideale, di uguale costante elastica k. Entrambe le molle hanno lunghezza a riposo trascurabile.



(1) Individuare i gradi di libertà del sistema, i suoi parametri lagrangiani con i rispettivi domini, le forze *attive* agenti e il tipo di vincoli a cui esso è soggetto.

(2) Determinare le due configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità. A quali configurazioni corrispondono nel limite $k \to 0^+$? Qual è il valore di equilibrio di q in questo limite?

Suggerimento. Ricordate che, dato un triangolo di lati a, b e c, se α è l'angolo compreso tra i lati a e b, allora vale la legge del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.
Suggerimento. L'equazione $\tan\theta = c$, con $c \in \mathbb{R}$, ha *due* soluzioni $\theta_\pm$ sul dominio $[-\pi, \pi)$, una con $\cos\theta_+ > 0$ e una con $\cos\theta_- < 0$.

---

(3) Valutare se le configurazioni di confine possono essere di equilibrio.

(4) Calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse perpendicolare al piano passante per C e rispetto all'asse perpendicolare al piano passante per O in funzione della distanza q tra O e C e dell'angolo $\theta = \widehat{ACM}$.

(5) Calcolare l'energia cinetica del sistema e derivare la matrice cinetica associata.

SOLUZIONE

(1) Il sistema ha due gradi di libertà, descritti dai parametri lagrangiani $\theta \in [-\pi, \pi)$ e $q \in [0, 2\ell]$. Le forze attive agenti sono la forza peso su A, $\boldsymbol{P}_A = -mg\hat{\imath}_2$, la forza peso su B, $\boldsymbol{P}_B = -2m\hat{\imath}_2$ (con $\hat{\imath}_2$ versore diretto verso l'alto), la forza elastica applicata su A, $\boldsymbol{F}_A = k'\overrightarrow{AM}$ e la forza elastica applicata su B, $\boldsymbol{F}_B = k\overrightarrow{BO}$. L'unico vincolo attivo è olonomo, ideale e bilaterale, tale da forzare C a muoversi sul segmento $\overline{OM}$.

(2) Essendo

$$y_A = \ell \sin\theta, \qquad y_B = -\ell \sin\theta,$$

ed inoltre (usando la legge del coseno)

$$d^2(A, M) = \ell^2 + (2\ell - q)^2 - 2\ell(2\ell - q)\cos\theta, \qquad d^2(B, O) = \ell^2 + q^2 - 2\ell q \cos\theta.$$

l'energia potenziale del sistema può essere espressa in termini delle due variabili q e θ come segue:

$$\begin{aligned} V(q, \theta) &= mgy_A - 2mgy_B + \frac{k}{2}d^2(A, M) - \frac{k}{2}d^2(B, O) + c \\ &= -mg\ell \sin\theta + k(3\ell^2 - 2\ell q + q^2 + 2\ell^2 \cos\theta) + c \end{aligned}$$

dove c è una generica costante additiva. Le posizioni di equilibrio si ottengono cercando i punti stazionari di questa funzione. Si ottiene

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 2k(q - \ell) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \ell(2l\ell \sin\theta - mg\cos\theta) = 0.$$

Queste forniscono come soluzione

$$q = \ell$$

e $\tan\theta = \frac{mg}{2k\ell}$, che, come da suggerimento, ha due soluzioni, $\theta_\pm$, una con coseno positivo, $\theta_+ = \arctan\frac{mg}{2k\ell}$, e l'altra con coseno negativo, $\theta_- = \arctan\frac{mg}{2k\ell} - \pi$. Abbiamo quindi due possibili punti di equilibrio,

$$(q, \theta) = (\ell, \theta_+), \qquad (q, \theta) = (\ell, \theta_-)$$

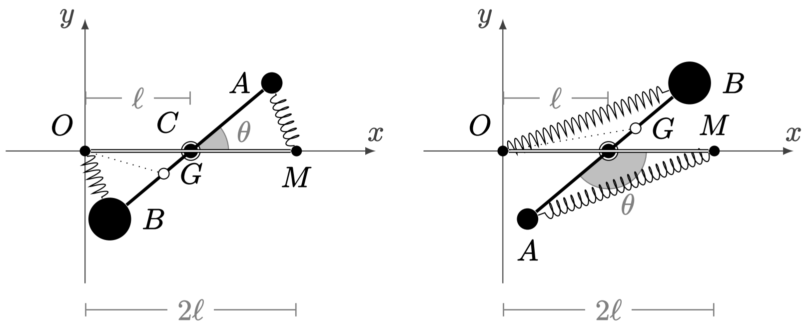
La matrice Hessiana può essere scritta come

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \partial_q^2 V & \partial_{q\theta}^2 V \\ \partial_{q\theta}^2 V & \partial_\theta^2 V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \ell(2k\ell\cos\theta + mg\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \ell\cos\theta(2k\ell + mg\tan\theta) \end{pmatrix}$$

che nei nostri punti di equilibrio diventa

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{4k^2\ell + m^2g^2}{2k}\cos\theta_\pm \end{pmatrix}$$

Questa ha determinante positivo per θ_+ (quest'angolo corrisponde quindi ad una soluzione stabile) e determinante negativo per θ_- (quest'angolo corrisponde perciò ad una soluzione instabile).



Nel limite $k \to 0^+$, le due molle sono assenti. Le due configurazioni di equilibrio trovate corrispondono a $\theta_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$, ovvero le due masse sono in verticale: nella configurazione stabile, la massa più pesante è in basso. Nel limite $k \to 0^+$, q può essere qualsivoglia nell'intervallo $[0, 2\ell]$, dato che l'equazione per esso $\partial_q V = 0$ è sempre soddisfatta

(3) Le configurazioni di confine si hanno per $q = 0$ e $q = 2\ell$, e per ogni θ. Per valutare se sono di equilibrio utilizziamo il principio dei lavori virtuali, scrivendo

$$\delta L = -\frac{\partial V}{\partial q}\delta q - \frac{\partial V}{\partial \theta}\delta\theta = 2k(\ell - q)\delta q + \ell(mg\cos\theta - 2k\ell\sin\theta)\delta\theta \leq 0.$$

Nel primo punto si deve avere $\delta q > 0$ e $\delta\theta$ arbitrario, per cui

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=0} \geq 0 \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{q=0} = 0.$$

La seconda equazione fornisce la nota condizione di equilibrio per θ, $\tan\theta = \frac{mg}{2k\ell} \Rightarrow \theta = \theta_\pm$, e la disuguaglianza $2k\ell \leq 0$, mai soddisfatta. Nel secondo punto si deve avere $\delta q < 0$ e $\delta\theta$ arbitrario, per cui

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=2\ell} \leq 0 \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{q=2\ell} = 0.$$

Di nuovo, la seconda condizione fornisce la nota condizione di equilibrio per θ, $\tan\theta = \frac{mg}{2k\ell} \Rightarrow \theta = \theta_\pm$, e la disuguaglianza $-2k\ell \geq 0$, anche questa mai soddisfatta. Le configurazioni non sono quindi mai di equilibrio se $k > 0$.

(4) Il calcolo del momento di inerzia rispetto a C si può effettuare utilizzando la definizione in maniera immediata,

$$I_C = 2m\ell^2 + m\ell^2 = 3m\ell^2.$$

Per calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse passante per O, possiamo calcolare anzitutto le coordinate del centro di massa G partendo dalle coordinate delle due masse date rispetto alle variabili θ e q. Abbiamo che

$$x_A = q + \ell\cos\theta, \qquad y_A = \ell\sin\theta$$

e

$$x_B = q - \ell\cos\theta, \qquad y_B = -\ell\sin\theta,$$

per cui

$$x_G = \frac{mx_A + 2mx_B}{3m} = q - \frac{\ell\cos\theta}{3}, \qquad y_G = \frac{my_A + 2my_B}{3m} = -\frac{\ell\sin\theta}{3}.$$

Il momento d'inerzia rispetto al centro di massa è

$$I_G = \frac{8}{3}m\ell^2$$

che si può calcolare anche osservando direttamente che, per ragioni di simmetria, il baricentro deve trovarsi nel segmento $\overline{AB}$ e che quindi $d(A,G) = \frac{4}{3}\ell$ e $d(B,G) = \frac{2}{3}\ell$. Il momento di inerzia rispetto ad O può essere calcolato usando il teorema di Huygens–Steiner, osservando che

$$d^2(G,O) = x_G^2 + y_G^2 = \frac{9q^2 - 6\ell q\cos\theta + \ell^2}{9},$$

e quindi

$$I_O = m(3q^2 - 2\ell q\cos\theta + 3\ell^2).$$

Alternativamente, I_O si può calcolare direttamente utilizzando $d^2(O,A)$ e $d^2(O,B)$.

(5) Per scrivere l'energia cinetica, osserviamo che

$$\dot{x}_A = \dot{q} - \ell\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y}_A = \ell\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \dot{q}^2 - 2\ell\dot{q}\dot{\theta}\sin\theta + \ell^2\dot{\theta}^2$$

e in maniera simile

$$\dot{x}_B = \dot{q} + \ell\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y}_B = -\ell\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \dot{q}^2 + 2\ell\dot{q}\dot{\theta}\sin\theta + \ell^2\dot{\theta}^2$$

per cui

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + mv_B^2 = \frac{m}{2}\left(3\dot{q}^2 + 3\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{q}\dot{\theta}\sin\theta\right).$$

La matrice cinetica è quindi

$$\begin{pmatrix} 3m & m\ell\sin\theta \\ m\ell\sin\theta & 3m\ell^2 \end{pmatrix}.$$