

## Meccanica lagrangiana

### 1. Formalismo lagrangiano

**1.1. Sottovarietà regolari.** La necessità di sviluppare una adeguata teoria per sistemi vincolati di molti punti materiali, in particolare quando questi sono soggetti a vincoli olonomi fissi, ha motivato la nascita della *meccanica lagrangiana*. Questo formalismo ha permesso di inquadrare in un potente quadro geometrico la meccanica, e di individuare proprietà non banali del moto meno evidenti nel formalismo newtoniano.

Abbiamo già studiato il caso di un singolo punto materiale soggetto ad un vincolo olonomo unidimensionale, ovvero vincolato a muoversi su una *guida*. Abbiamo anche ridotto problemi più complessi, come quello di un punto materiale in campo centrale, allo stesso tipo di analisi. Il caso di  $N$  punti materiali è più complesso, perché ci costringe a studiare il sistema in uno spazio, in generale, di dimensione più alta. A questo scopo saranno utili i concetti introdotti riguardanti superfici in  $\mathbb{R}^3$  e la generalizzazione di tali concetti al caso di ipersuperfici in  $\mathbb{R}^{3N}$ . Supponiamo quindi di considerare un sistema di  $N$  punti  $P_1, \dots, P_N$ , in  $\mathbb{E}^3$ , le cui posizioni sono soggette in generale ad evoluzione rispetto alla variabile temporale  $t$ . Ogni punto  $P_i$  quindi è associato, secondo un certo riferimento, ad una certa terna  $\mathbf{x}_i$ : abbiamo già introdotto la concatenazione  $\mathbf{X} = \bigoplus_i \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{3N}$  che rappresenta la configurazione del sistema. Se qualsivoglia configurazione è ammessa, il sistema si dice *libero*, e lo spazio esplorabile da  $\mathbf{X}$  è effettivamente  $\mathbb{R}^{3N}$ . Viceversa, un sistema *vincolato* presenta una condizione su  $\mathbf{X}$  da rispettare durante tutta l'evoluzione. Considereremo vincoli *olonomi* nella forma

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0},$$

dove  $\boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3N-n}$ , con  $n \leq 3N$ . Si noti che il vincolo è in generale *mobile*, ovvero l'applicazione  $\boldsymbol{\varphi}$  dipende, in generale, esplicitamente dal tempo. Il vincolo determinerà un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{3N}$ , eventualmente dipendente dal tempo, che è lo *spazio delle configurazioni* del sistema,

$$(2.1) \quad \mathcal{M}(t) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}\}.$$

Nel caso in cui  $\mathcal{M}$  sia *indipendente* dal tempo, si dice che il vincolo è *scleronomo*, viceversa si dice *reonomo*. Sotto certe ipotesi, *che assumeremo soddisfatte*, il vincolo così introdotto identifica, in ogni istante di tempo  $t$ , una *sottovarietà regolare* su cui il sistema evolve che supporremo di dimensione  $n$ . Per precisare cosa intendiamo con questa affermazione, facciamo una breve digressione.

1.1.1. *Sottovarietà regolari.* Diamo anzitutto questa definizione preliminare.

**DEFINIZIONE 1.1** (Sottovarietà regolare). Sia  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^K$  aperto connesso, con  $K > 1$ , e sia  $\boldsymbol{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $1 \leq s < K$ , una applicazione di classe  $\mathcal{C}^p(\mathcal{A})$ , con  $p \geq 2$ . Sia anche definito l'insieme  $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  supposto non vuoto. Se la matrice jacobiana dell'applicazione  $\boldsymbol{\varphi}$  ha rango  $s$  in ogni punto di  $\mathcal{M}$ , allora  $\mathcal{M}$  si dice sottovarietà regolare di dimensione  $n = K - s$  di  $\mathbb{R}^K$  e ordine  $p$ .

Vale il seguente teorema.

**TEOREMA 1.1.** *Sia data una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale di ordine  $p \geq 2$   $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{A} : \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^K$ ,  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^K$ . Allora, per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$  esiste un intorno aperto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  ove è definita unica una funzione iniettiva  $\boldsymbol{\chi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^K$  differenziabile con continuità tale che  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  per un certo  $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{V}$  e tale che  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{M}$  per  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo l'insieme finito  $\mathcal{I}$  di tutte le funzioni iniettive  $h : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, K\}$ . Per ciascuna di esse, introduciamo l'insieme

$$\mathcal{U}_h := \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{A} : \det \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_{h(b)}}(\mathbf{x}) \right)_{\substack{1 \leq a \leq s \\ 1 \leq b \leq s}} \neq 0 \right\}.$$

Dato che il rango dello jacobiano di  $\boldsymbol{\varphi}$  è massimo in ogni punto di  $\mathcal{M}$ , allora  $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{h \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_h$ . Supponiamo quindi che  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_h \cap \mathcal{M}$ , e in particolare che  $h(b) = n + b$  per  $b = 1, \dots, s$  (possiamo sempre riordinare le variabili in modo che questo sia verificato). Scriviamo  $(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathbf{q}$  e  $(x_{n+1}, \dots, x_K) = \mathbf{y}$ , di modo che  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{y})$  e in particolare indichiamo  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0)$ . Per il teorema della funzione implicita, la condizione  $\det \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$  implica che esiste un aperto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  contenente  $\mathbf{q}_0$ , un aperto  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{K-n}$  contenente  $\mathbf{y}_0$  ed un'unica funzione  $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  di classe  $\mathcal{C}^p$  tale che  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{y}_0$  e  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$ . La funzione  $\boldsymbol{\chi}$  desiderata è quindi  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}))$ . Essa è iniettiva, dato che, dati  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathcal{V}$ ,  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}') \Leftrightarrow (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q})) = (\mathbf{q}', \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}')) \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}'$ .  $\square$

**1.1.2. Spazio tangente e spazio normale.** Consideriamo una parametrizzazione locale  $\boldsymbol{\chi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  nella forma  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}))$ , come individuata dal teorema precedente in un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ . Allora

$$\text{rank}(\partial_a \chi_i(\mathbf{q}_0))_{ai} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \partial_1 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_1 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \partial_2 \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_2 \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \partial_n \psi_1(\mathbf{q}_0) & \dots & \partial_n \psi_{K-n}(\mathbf{q}_0) \end{pmatrix} = n, \quad \partial_a \chi_i(\mathbf{q}) := \frac{\partial \chi_i(\mathbf{q})}{\partial q_a}.$$

Gli  $n$  vettori  $\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  sono quindi *linearmente indipendenti* e sono una *base* per uno spazio che chiamiamo *spazio tangente* in  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} = \text{span}\{\partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)\}_{a=1}^n.$$

Per spiegare questa terminologia, consideriamo una curva regolare su  $\mathcal{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \boldsymbol{\chi}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{M}$  con  $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ . Questa può essere parametrizzata in un intorno di  $P$  in termini delle coordinate  $\mathbf{q}$ , di modo che  $\boldsymbol{\gamma}(u) \equiv (\boldsymbol{\chi} \circ \mathbf{q})(u)$ , dove  $\mathbf{q}(u)$  è la controimmagine di  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $\mathcal{V}$ , univocamente determinata essendo  $\boldsymbol{\chi}$  iniettiva e tale che  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ . Abbiamo quindi

$$\boldsymbol{\gamma}'(0) = \sum_{a=1}^n q'_a(0) \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0).$$

Si ha perciò che  $\boldsymbol{\gamma}'(0) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$  e in particolare si può intendere  $\mathbf{q}'(0)$  come il vettore delle componenti della tangente a  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $\mathbf{x}_0$  secondo la base  $\{\partial_a \boldsymbol{\chi}\}_a$ . Lo spazio tangente è quindi lo spazio in cui vivono i vettori tangenti alle curve in  $\mathbf{x}_0$  su  $\mathcal{M}$ , cioè lo spazio dei vettori tangenti ad  $\mathcal{M}$  in  $\mathbf{x}_0$ . L'unione *disgiunta* degli spazi tangenti di  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathbf{T}\mathcal{M} := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \{\mathbf{x}\} \times \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \mathcal{M}.$$

Se  $n$  è la dimensione dello spazio tangente, la quantità  $K - n$  è la dimensione dello *spazio normale*: in un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ , infatti, esistono  $K - n$  vettori normali a  $\mathcal{M}$ , ovvero  $\{\nabla \varphi_j\}_{j=1}^{K-n}$ , e la condizione di rango massimo significa che tali vettori sono linearmente

indipendenti. Per vedere questo fatto, data come sopra una curva  $\gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{M}$  passante per  $\mathbf{x}_0 = \gamma(0) = \chi(\mathbf{q}_0)$ , abbiamo che

$$\frac{d}{du} \varphi_j(\gamma(u))|_{u=0} = \sum_{a=1}^n \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}_0), \partial_a \chi(\mathbf{q}_0) \rangle q'_a(0) = 0,$$

per qualsivoglia curva regolare, ovvero  $\langle \nabla \varphi_j, \partial_a \chi \rangle = 0$ : i vettori  $\nabla \varphi_j$  calcolati in un certo punto  $P$  sono perciò effettivamente normali allo spazio tangente. Scriveremo

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M})^\perp = \text{span}\{\nabla \varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^{K-n}.$$

**1.1.3. Cambio di parametrizzazione.** La parametrizzazione di una sottovarietà regolare  $n$ -dimensionale  $\mathcal{M}$  in un intorno di un suo punto  $\mathbf{x}_0$  non è unica, tuttavia lo spazio tangente e lo spazio normale in  $\mathbf{x}_0$  non dipendono dalla parametrizzazione. Supponiamo di disporre di una parametrizzazione  $\chi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ , di modo che  $\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{q}_0)$ , e sia  $\phi: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$ , con  $\hat{\mathcal{V}} \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto connesso, un  $C^p$ -diffeomorfismo, ovvero una applicazione biettiva con derivate continue fino all'ordine  $p$ , la cui inversa esiste e ha derivate continue fino all'ordine  $p$ . La mappa  $\hat{\chi} = \chi \circ \phi: \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{M}$  è anch'essa una parametrizzazione di  $\mathcal{M}$ . Se dunque il punto  $P$  ha coordinate  $\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{q}_0)$  e  $\mathbf{q}_0 = \phi(\hat{\mathbf{q}}_0)$

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \chi}{\partial q_b}(\phi(\hat{\mathbf{q}}_0)) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) = \sum_b \frac{\partial \chi}{\partial q_b}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial \phi_b}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0),$$

il che implica che  $\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$  e d'altronde, essendo la matrice jacobiana della funzione  $\phi$  di rango  $n$ ,  $\text{rank} \left( \frac{\partial \hat{\chi}_i}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \right)_{ai} = n$  ovvero  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} = \text{span} \left\{ \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}_0) \right\}_a$ . Di conseguenza, anche lo spazio normale rimane inalterato.

**1.1.4. Tensore metrico.** Una sottovarietà regolare  $\mathcal{M}$  di dimensione  $n$  può essere naturalmente dotata di una *struttura riemanniana* indotta dalla metrica naturale su  $\mathbb{R}^K$ . Supponiamo infatti di avere una curva regolare  $\gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \chi(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{M}$ , di modo che  $\gamma(0) = \mathbf{x} = \chi(\mathbf{q})$ , dove  $\chi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrizzazione di  $\mathcal{M}$  in un intorno del punto  $P$  di coordinate  $\mathbf{x}$ . Sia  $\mathbf{q} = \chi^{-1} \circ \gamma: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathcal{V}$ . L'infinitesimo di lunghezza quadra della curva in un intorno di  $\mathbf{x}$  si può scrivere

$$ds^2 = \langle d\gamma, d\gamma \rangle = \sum_{ab} \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial q_a}, \frac{\partial \chi}{\partial q_b} \right\rangle dq_a dq_b = \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) dq_a dq_b =: (d\mathbf{q}, d\mathbf{q})$$

dove abbiamo introdotto il *tensore metrico*  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  in ogni punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  localmente data da

$$g_{ab}(\mathbf{q}) := \left\langle \frac{\partial \chi(\mathbf{q})}{\partial q_a}, \frac{\partial \chi(\mathbf{q})}{\partial q_b} \right\rangle$$

e la *forma quadratica* tra due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M}$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) := \sum_{ab} g_{ab}(\mathbf{q}) v_a u_b, \quad (\bullet, \bullet): \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} \times \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

La forma introdotta è simmetrica definita positiva e permette di riscrivere per esempio la lunghezza  $\ell$  della curva come

$$\ell = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \sqrt{(\mathbf{q}'(u), \mathbf{q}'(u))} du.$$

La matrice  $g_{ab}$  si trasforma come un *tensore* quando si esegue un cambio di variabili. Quel che questa espressione significa è che, supponendo che  $\mathbf{q} = \phi(\hat{\mathbf{q}})$  con  $\phi$  diffeomorfismo come sopra,



FIGURA 1. Proiezione stereografica.

allora ad essa sarà associata una diversa matrice  $\hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{q}})$  che però è legata alla precedente da una trasformazione nella forma

$$\hat{g}_{ab}(\hat{\mathbf{q}}) = \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_a}, \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_b} \right\rangle = \sum_{uv} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_u}, \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial q_v} \right\rangle \frac{\partial \phi_u(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_a} \frac{\partial \phi_v(\hat{\mathbf{q}})}{\partial \hat{q}_b} = \sum_{uv} g_{uv}(\mathbf{q}) \frac{\partial q_u}{\partial \hat{q}_a}(\hat{\mathbf{q}}) \frac{\partial q_v}{\partial \hat{q}_b}(\hat{\mathbf{q}}).$$

**Esempio 2.1** — La sfera  $\mathbb{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$$

è una sottovarietà regolare di dimensione 2, essendo

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = (2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3)$$

di rango 1 in ogni punto di  $\mathbb{S}^2$ . La mappa data da

$$\mathbf{x}_+(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ \|\mathbf{q}\|^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di  $\mathbb{S}^2$  eccezion fatta per il polo nord  $\mathbf{z}_+ = (0, 0, 1)^\top$ , mentre la mappa

$$\mathbf{x}_-(\mathbf{q}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{q}\|^2} \begin{pmatrix} 2q_1 \\ 2q_2 \\ 1 - \|\mathbf{q}\|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

permette di parametrizzare l'intorno di qualsivoglia punto di  $\mathbb{S}^2$  eccezion fatta per il polo sud  $\mathbf{z}_- = (0, 0, -1)^\top$ . Ciascuna delle due mappe introdotte corrisponde ad una *proiezione stereografica* della sfera, vedasi Fig. 1. Con un po' di algebra, si trova che in entrambi i casi

$$g_{ab}(\mathbf{q}) = \frac{4}{(1 + \|\mathbf{q}\|^2)^2} \delta_{ab}.$$

**1.2. Coordinate lagrangiane e principio di d'Alembert–Lagrange.** Nel contesto della meccanica, abbiamo a che fare come abbiamo visto con condizioni olonome nella forma dell'Eq. (2.1). Nel seguito, assumeremo sempre che  $\mathcal{M}(t)$  sia una sottovarietà regolare di dimensione  $n$  in uno spazio di dimensione  $3N$  per ogni valore di  $t$ , ovvero che in ogni istante di tempo  $t$  valga

$$3N - n = \text{rank} \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(\mathbf{X}, t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3N \\ 1 \leq j \leq 3N - n}} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}(t).$$



FIGURA 2. Asta rotante con punto materiale vincolato su di essa.

Per quanto detto sopra, in un intorno di un punto  $P$ , individuato da  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}(t)$ , sarà possibile introdurre (non univocamente)  $n$  parametri, detti nel contesto della meccanica *coordinate lagrangiane*,  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ , in cui potremo ri-esprimere localmente le vecchie variabili cartesiane, ovvero  $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$  per una opportuna<sup>1</sup>  $\boldsymbol{\chi}(\bullet, t): \mathcal{V}(t) \rightarrow \mathcal{M}(t)$  in ciascun istante. Si noti che se il vincolo è reonomo  $\boldsymbol{\chi}$  dipende dal tempo  $t$ ; viceversa, se il vincolo è scleronomo, allora semplicemente  $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$ . In seguito assumeremo che la dipendenza di  $\boldsymbol{\chi}$  dal tempo sia tale che  $\boldsymbol{\chi}$  abbia derivate continue almeno fino alla seconda in  $t$ .

La *traiettoria* del sistema su  $\mathcal{M}(t)$  si scrive *localmente* come

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(t), t)$$

per un opportuno set di coordinate lagrangiane, dove  $\mathbf{q}(t)$  incorpora la dipendenza dal tempo delle coordinate lagrangiane del sistema durante l'evoluzione. Lo spazio in cui varia la coppia  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  è detto *spazio delle fasi* ed esiste una corrispondenza tra l'evoluzione della coppia  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e l'evoluzione di  $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ . Se infatti da un lato  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , potremo inoltre scrivere

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \partial_a \mathbf{X} + \partial_t \mathbf{X} = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) + \partial_t \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t),$$

che esibisce due termini diversi: il primo,

$$\hat{\mathbf{V}} := \sum_a \dot{q}_a \partial_a \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in T_P \mathcal{M}(t)$$

è detto *velocità virtuale* e vive nello spazio tangente ad  $\mathcal{M}(t)$  in  $P$ , punto individuato da  $\mathbf{X}(t)$ . Si tratta del contributo alla velocità *a vincolo fisso*:  $\hat{\mathbf{V}}$  è effettivamente tangente a  $\mathcal{M}(t)$  nel senso usuale nell'istante di tempo  $t$ . Il secondo termine,  $\partial_t \mathbf{X} \equiv \partial_t \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$  è dovuto invece alla sola dipendenza del vincolo dal tempo: questa velocità è detta *velocità di trascinamento* ed è nulla se i vincoli sono scleronomi.

**Esempio 2.2** — Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi lungo un'asta infinita passante per l'origine in un riferimento cartesiano come in Fig. 2. L'asta mantiene un angolo fisso  $\alpha \in (0, \pi/2)$  rispetto alla direzione  $x_3$ , mentre precece attorno a tale asse, in modo che l'angolo tra l'asse  $x_1$  e il piano contenente l'asse  $x_3$  e l'asta sia  $\theta = \omega t$  per un qualche  $\omega \in \mathbb{R}$ . L'asta mobile è in effetti una sottovarietà

<sup>1</sup>In seguito tratteremo in generale  $\boldsymbol{\chi}$  come una funzione definita su un dominio in  $\mathbb{R}^n$  di cui ignoreremo la dipendenza temporale e dipendente dal tempo. La trattazione di varietà dipendenti dal tempo è un argomento interessante che va però oltre lo scopo del corso, essendo la sua trattazione rigorosa non particolarmente utile ai fini degli argomenti trattati qui.

regolare di  $\mathbb{R}^3$ , spazio delle configurazioni del punto, su cui quest'ultimo è vincolato. Essa è identificata dalla condizione  $\mathcal{M}(t): \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ , dove

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin \omega t x_1 - \cos \omega t x_2 \\ x_1 - \tan \alpha \sin \omega t x_3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La matrice jacobiana associata è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ 1 & 0 & -\tan \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 in ogni punto di  $\mathcal{M}(t)$  e per ogni  $t$ , per cui  $\mathcal{M}(t)$  ha dimensione 1. Una applicazione  $\boldsymbol{\chi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  che permette di parametrizzare globalmente  $\mathcal{M}(t)$  è la seguente

$$\boldsymbol{\chi}(q, t) = \begin{pmatrix} q \sin \alpha \cos \omega t \\ q \sin \alpha \sin \omega t \\ q \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

In altre parole,  $q$  è la distanza (con segno) lungo l'asta di  $P$  dall'origine. In particolare, la traiettoria  $\mathbf{x}(t)$  del punto  $P$  può essere parametrizzata come  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(q, t)$ , con  $q$  dipendente dal tempo, di modo che

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} = \dot{q} \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \omega t \\ \sin \alpha \sin \omega t \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + q \omega \sin \alpha \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo termine, come si vede, è diretto come  $\mathbf{x}$ , ovvero nella direzione dell'asta, e corrisponde infatti alla componente della velocità *tangente* a  $\mathcal{M}(t)$  nell'istante  $t$ . Il secondo termine, invece, è ortogonale all'asse  $x_3$  (tangente alla circonferenza tratteggiata in figura) ed è esclusivamente dovuto al fatto che l'asta è in movimento (è infatti identicamente nullo per  $\omega = 0$ ).

In un sistema di  $N$  punti materiali vincolati sul  $\mathcal{M}(t)$ , ciascun punto  $(P_i, m_i)$  sarà sottoposto ad una forza totale  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(v)}$ , dove  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  è il contributo *attivo* ed  $\mathbf{F}_i^{(v)}$  è il contributo vincolare, dovuto proprio alla presenza del vincolo. Possiamo concatenare tali contributi vincolari in un unico vettore di dimensione  $3N$  scrivendo  $\mathbf{F}^{(v)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(v)}$ , similmente possiamo concatenare le forze attive  $\mathbf{F}^{(a)} := \bigoplus_i \mathbf{F}_i^{(a)}$  e introdurre  $\mathbf{Q} := \bigoplus_i (m_i \mathbf{v}_i)$ , di modo che

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)}.$$

La *potenza* espressa da queste reazioni vincolari è

$$\Pi^{(v)} = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{F}_i^{(v)}, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle = \langle \mathbf{F}^{(v)}, \dot{\mathbf{X}} \rangle = \sum_{a=1}^n \dot{q}_a \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle = \langle \hat{\mathbf{V}}, \mathbf{F}^{(v)} \rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \mathbf{F}^{(v)} \right\rangle.$$

Il primo contributo nell'espressione precedente si dice *potenza virtuale della reazione vincolare*. Il suo valore è discriminante, come già abbiamo anticipato per il caso del singolo punto materiale, per distinguere tra vincoli lisci e scabbi nel caso di sistemi di punti soggetti a vincoli olonomi.

**DEFINIZIONE 1.2** (Principio di d'Alembert–Lagrange). Un sistema olonomo si dice *a vincoli lisci* se la potenza virtuale del sistema di reazioni vincolari è nulla in qualsiasi istante e in corrispondenza di qualunque stato cinematico del sistema. Ne consegue che se il sistema è soggetto a sole forze conservative e vincoli lisci e fissi, la legge di conservazione dell'energia resta valida.

In altre parole, in un vincolo liscio per ogni  $\delta \mathbf{X} = \bigoplus_i \delta \mathbf{x}_i \in T_P \mathcal{M}(t)$ ,  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0$ . Il principio può essere trovato espresso in forme diverse. Una di queste si ottiene osservando che  $\mathbf{F}_i^{(v)} =$

$\dot{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}$ , per cui

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{Q}}_i, \delta \mathbf{x}_i \right\rangle = \langle \mathbf{F}^{(a)} - \dot{\mathbf{Q}}, \delta \mathbf{X} \rangle = 0,$$

dove  $\delta \mathbf{X} \in T_P \mathcal{M}(t)$  viene detto *spostamento virtuale*, di modo che  $\delta \mathbf{x}_i$  sia la terna in  $\delta \mathbf{X}$  corrispondente al punto  $P_i$ . Come nel caso del singolo punto materiale, perciò, questa condizione equivale a richiedere che  $\mathbf{F}^{(v)}$  viva nello spazio normale *in ogni istante di tempo* e generalizza il concetto di vincolo liscio al caso di moto di un sistema su sottovarietà. Come si vede, il principio ha il grande pregio di *non* dipendere dalle forze vincolari, ma solo dalla geometria del vincolo e dalle forze attive.

**1.3. Equazioni di Lagrange.** Cerchiamo ora di riscrivere le equazioni del moto e le quantità derivate nel caso del punto materiale in questo contesto più generale in cui il sistema, che immaginiamo composto da  $n$  punti materiali  $\{(P_k, m_k)\}_{k=1}^N$ , si muove su una sottovarietà di dimensione  $n \leq 3N$ , nell'assunzione di aver a che fare con vincoli olonomi. Anzitutto riscriviamo opportunamente l'energia cinetica: ricordando che localmente  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , essa può essere riscritta come

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \dot{\mathbf{x}}_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b A_{ab}(\mathbf{q}, t) + \sum_a \dot{q}_a B_a(\mathbf{q}, t) + C(\mathbf{q}, t).$$

dove abbiamo denotato con

$$A_{ab}(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle, \quad B_a(\mathbf{q}, t) := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \right\rangle, \quad C(\mathbf{q}, t) := \frac{1}{2} \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t} \right\rangle.$$

Qui occorre osservare che  $\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\chi}_k(\mathbf{q}, t)$ , dove  $\boldsymbol{\chi}_k$  è il vettore tridimensionale che individua le coordinate del punto  $P_k$ . L'espressione si riscrive più semplicemente come

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \rangle + \langle \mathbf{B}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{q}} \rangle + C(\mathbf{q}, t).$$

Nel caso di *vincoli fissi*, localmente  $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$  per opportune variabili lagrangiane, e quindi i termini in  $\mathbf{B}$  e  $C$  sono nulli. La matrice  $\mathbf{A}$ , a volte detta *matrice di massa*, ha l'importante proprietà stabilita dal seguente teorema.

**TEOREMA 1.2.** *La forma in  $\mathbf{v}$*

$$\hat{T}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \mathbf{v} \rangle$$

(intesa a  $\mathbf{q}$  e  $t$  fissati) è quadratica simmetrica definita positiva, ovvero  $\mathbf{A}$  è simmetrica definita positiva.

**DIMOSTRAZIONE.** Basta semplicemente esplicitare la forma in termini di velocità virtuali:  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} \right\rangle > 0$ , dove abbiamo indicato con  $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} := \sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}$ . Si noti che la disuguaglianza è stretta: la quantità può essere zero solo se tutti i vettori  $\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v}$  sono nulli, ma in questo caso lo sarebbe anche  $\sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \mathbf{x}_k = \sum_a v_a \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a} \boldsymbol{\chi}_k$ , cosa impossibile (per via della lineare indipendenza) a meno che  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . La simmetria infine si nota osservando direttamente che  $A_{ab} := \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle = A_{ba}$ .  $\square$

Dall'energia cinetica è possibile definire anche un vettore  $\mathbf{p}$  di variabili coniugate a  $\mathbf{q}$ , che raccoglie i cosiddetti *momenti cinetici* o *coniugati*

$$p_a := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a.$$

Essi hanno la caratteristica di essere le *componenti lagrangiane* del vettore  $\mathbf{Q}$ , ovvero la proiezione di  $\mathbf{Q}$  sullo spazio tangente,

$$\langle \mathbf{Q}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = \sum_k m_k \langle \dot{\mathbf{x}}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_k m_k \sum_b \dot{q}_b \langle \partial_b \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle + \sum_k m_k \langle \partial_t \mathbf{x}_k, \partial_a \mathbf{x}_k \rangle = \sum_b A_{ab} \dot{q}_b + B_a \equiv p_a.$$

Derivando ulteriormente  $p_a$  rispetto al tempo si ha

$$\dot{p}_a = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) = \left\langle \dot{\mathbf{Q}}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle.$$

L'ultimo termine a destra si può scrivere come

$$\left\langle \mathbf{Q}, \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \sum_k m_k \left\langle \dot{\mathbf{x}}_k, \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_k}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}.$$

In definitiva abbiamo ottenuto l'equazione

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = f_a, \quad f_a := \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle.$$

Di nuovo,  $f_a$  sono le componenti lagrangiane della forza totale (anche dette *forze generalizzate* e a volte indicate con  $\mathcal{Q}_a$  — eviteremo però questa notazione dato che potrebbe indurre in confusione con la quantità di moto). Quelle ottenute per  $a = 1, \dots, n$  sono le *equazioni di Lagrange*.

1.3.1. *Forze conservative e vincoli lisci.* Più interessante è il caso in cui le forze attive siano *conservative*, ovvero che esista un potenziale  $V$  tale che

$$\mathbf{F}^{(a)} = -\nabla V.$$

In questo caso, si ha che il contributo dovuto alla forza attiva  $\mathbf{F}^{(a)}$  nel termine destro dell'equazione di Lagrange è

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \left\langle \nabla V, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_a}$$

dove, nell'ultimo passaggio,  $V$  è da intendersi ristretta alla varietà, ovvero  $V = V(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t))$ . Le equazioni di Lagrange diventano così

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \left\langle \mathbf{F}^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle,$$

dove abbiamo introdotto la funzione *lagrangiana*

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t).$$

Una lagrangiana nella forma sopra può più in generale ottenersi se esiste una funzione  $\hat{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  tale che

$$\left\langle \mathbf{F}^{(a)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{q}_a} \right\rangle = - \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{q}_a},$$

quindi non esclusivamente con forze conservative: anche in questo caso si ottengono le stesse equazioni di Lagrange nella forma in Eq. (2.2). Una funzione  $\hat{V}$  che soddisfi le equazioni la condizione precedente è detta *potenziale generalizzato*.

Se i vincoli sono lisci,  $\langle \mathbf{F}^{(v)}, \partial_a \mathbf{X} \rangle = 0$  per via del principio di d'Alembert, e l'equazione di Lagrange assume la forma molto compatta, e assolutamente fondamentale

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0.$$



La corrispondenza tra equazioni del moto e lagrangiana *non* è biunivoca, ovvero lo stesso moto può essere descritto da più lagrangiane. Supponiamo infatti di considerare

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{dh(\mathbf{q}, t)}{dt}$$

per una generica funzione  $h(\mathbf{q}, t)$  differenziabile di classe almeno  $\mathcal{C}^2$  rispetto a tutti i suoi argomenti. Allora, osservando che

$$\frac{dh(\mathbf{q}, t)}{dt} = \sum_a \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial h(\mathbf{q}, t)}{\partial t},$$

possiamo verificare che

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial h}{\partial q_a} \right) - \sum_b \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial q_b} \dot{q}_b - \frac{\partial^2 h}{\partial q_a \partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}.$$

**Esempio 2.3** (Potenziali generalizzati) — Un caso particolare ma importante di potenziale generalizzato è quello utile per lo studio del moto di punti materiali carichi in campo elettromagnetico. Si assume che esistano due campi  $\mathbf{E}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{B}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiti in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^3$ , di modo che la forza applicata ad un punto materiale  $P$  di carica  $e$  sia espressa dalla *forza di Lorentz*

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \wedge \mathbf{B} \right)$$

dove  $c$  è la velocità della luce e  $\dot{\mathbf{x}}$  la velocità del punto. I campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$  devono soddisfare le *equazioni di Maxwell*, che in presenza di una densità di carica  $\rho$  e di una densità di corrente  $\mathbf{j}$  nello spazio assumono la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Immaginiamo che la particella sia soggetta *esclusivamente* all'azione di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{B}$ : in questo caso, quindi, non sarà necessario introdurre coordinate lagrangiane: potremo utilizzare  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  essendo  $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^3$ .

La prima equazione di Maxwell permette di scrivere  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ , per un certo campo  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  detto *potenziale vettore*. La seconda equazione può quindi essere scritta come

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi,$$

per una certa funzione scalare  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . La forza di Lorentz si può quindi riscrivere

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right).$$

Ora utilizziamo l'identità formale  $\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) = \nabla \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \nabla \rangle \mathbf{b}$  per riscrivere

$$\dot{\mathbf{x}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \langle \dot{\mathbf{x}}, \nabla \rangle \mathbf{A} = \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Sostituendo nell'espressione di  $\mathbf{F}$  abbiamo

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = -\nabla \hat{V} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad \hat{V} := \varphi - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle.$$

Detta  $m$  la massa del punto materiale, la lagrangiana è quindi

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - e \left( \varphi(\mathbf{x}) - \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle \right).$$

**Esempio 2.4** (Forze dissipative) — Si osserva sperimentalmente che, nel caso di vincoli scabbi, una possibilità è che la reazione vincolare  $\mathbf{F}^{(v)}$  abbia una componente diretta lungo il moto nella forma  $\mathbf{F}_{k,t}^{(v)} = -\mu_k \dot{\mathbf{x}}_k$  per un qualche coefficiente di attrito dinamico  $\mu_k > 0$ . Abbiamo già studiato forze di

questo tipo discutendo il caso unidimensionale. Una forza siffatta non soddisfa il principio di d'Alembert e produce nel contributo nell'equazione di Lagrange

$$\left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \sum_k \sum_b \mu_k \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle$$

che può essere pensata come il risultato di un “potenziale” delle variabili cinetiche, detto *funzione di dissipazione di Rayleigh*,

$$\mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2} \sum_k \sum_{ab} \mu_k \dot{q}_a \dot{q}_b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_a}, \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_b} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \mathbf{F}_t^{(v)}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_a} \right\rangle = - \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a}.$$

Se le reazioni vincolari dissipative sono solo in questa forma, allora le equazioni di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} + \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_a} = 0.$$

Un esempio di applicazione di questo formalismo è il caso di un punto materiale su una guida soggetto a una forza armonica e ad uno smorzamento, che abbiamo già studiato. Se  $q$  è l'ascissa curvilinea del punto materiale di massa  $m$  lungo una guida, e se il punto è soggetto ad una forza elastica di modo che vi sia applicato un potenziale  $V(q) = \frac{1}{2} k q^2$ , la lagrangiana sarà

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2.$$

Questa lagrangiana produce, come atteso, le equazioni del moto dell'oscillatore armonico. La presenza di un termine di smorzamento si può includere considerando la funzione di Rayleigh

$$\mathcal{R}(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sigma \dot{q}^2,$$

con  $\sigma > 0$ , di modo che le equazioni di Eulero–Lagrange siano quelle che abbiamo già visto per il moto armonico smorzato in Eq. (1.8) (in assenza di forzante), ovvero

$$(2.4) \quad m \ddot{q} + \sigma \dot{q} + k q = 0.$$

## 2. Equilibrio ed oscillazioni

**2.1. Spazio delle fasi.** Se introduciamo il vettore  $\mathbf{f} = (f_a)_a$  avente come componenti  $f_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \langle \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \partial_a \mathbf{X}(\mathbf{q}, t) \rangle$ , le equazioni di Lagrange possono essere scritte in una forma piuttosto compatta come

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} - \left( \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{f}.$$

Nell'espressione precedente, abbiamo usato le notazioni compatte

$$\left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)_a = \sum_b \dot{q}_b \frac{\partial A_{ab}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle = \sum_u \frac{\partial B_u}{\partial \mathbf{q}} \dot{q}_u.$$

Inoltre, indichiamo con  $\frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  il *gradiente rispetto a  $\mathbf{q}$*  di una funzione scalare  $h$  dipendente da  $\mathbf{q}$ . Osservando ora che  $\mathbf{A}$  è una matrice definita positiva, possiamo invertirla e scrivere le equazioni di Lagrange in forma normale

$$(2.5) \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1} \left( \mathbf{f} - \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B} + \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right).$$

Si tratta quindi di un insieme di equazioni del secondo ordine *in forma normale*, la cui integrazione locale richiede, secondo il teorema di Cauchy, un insieme di condizioni iniziali  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  e  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{v}_0$ , purché il termine a destra sia sufficientemente regolare, ovvero lipschitziano. *In tutti i casi che seguono assumeremo questa condizione valida a meno che non diversamente specificato.*

2.1.1. *Sistemi autonomi.* In questa sezione, ci focalizzeremo in particolare sui *sistemi autonomi*, ovvero tali da non esibire una dipendenza esplicita dal tempo né in  $\mathcal{M}$  né nelle forze applicate. In questo caso quindi  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  e  $C = 0$ . Le equazioni di Lagrange possono essere così scritte nella forma

$$(2.6) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) := \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \left( \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \left\langle \dot{\mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right\rangle \right).$$

Si chiama *spazio delle fasi* lo spazio  $2n$  dimensionale delle coppie  $(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ . In questo spazio, indichiamo con

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0) := (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$$

la soluzione del sistema di equazioni ottenuta per il tempo  $t$  utilizzato le condizioni iniziali  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)$  per  $t = 0$ : in altre parole,  $\mathbf{g}^t$  produce il *flusso di fase* associato al sistema in coordinate locali.

**2.2. Funzioni di Ljapunov.** Il concetto di spazio delle fasi permette di introdurre il concetto di *equilibrio* e di *stabilità secondo Ljapunov*. Fissiamo anzitutto la notazione: indichiamo con  $\bar{\mathcal{B}}_r(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} : \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq r\}$  la palla chiusa centrata in  $\mathbf{z}_0$ .

DEFINIZIONE 2.1. Un punto  $\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0) \in \mathcal{M}$ , con  $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ , è detto *di equilibrio* se la coppia  $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  nello spazio delle fasi è soluzione del problema in Eq. (2.6), ovvero  $\mathbf{g}^t \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0$ . Un punto di equilibrio  $\mathbf{X}_0$  è *stabile secondo Ljapunov* se per ogni  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V}$ ,  $\epsilon > 0$ , esiste  $\bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V}$ ,  $\delta > 0$ , tale che

$$\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \leq \delta \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0), \quad \forall t > 0.$$

In particolare, il punto si dice *asintoticamente stabile* se esiste  $\bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \subseteq \mathcal{V}$  tale che

$$\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\delta(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| = 0.$$

Diversamente si dice *instabile*.

È evidente che un punto  $\mathbf{X}(\mathbf{q}_0)$  può essere di equilibrio se e solo se  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . La caratterizzazione dei punti stabili e asintoticamente stabili può essere fatta tramite il seguente risultato.

TEOREMA 2.1 (Ljapunov). Sia  $\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  punto di equilibrio del sistema. Se esiste una funzione  $\Lambda \in C^1(\Omega)$ , detta *funzione di Ljapunov*, su un intorno  $\Omega$  di  $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  tale che

- (1)  $\Lambda(\mathbf{z}) > \Lambda(\mathbf{z}_0) \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ ;
- (2) per  $t \geq 0$  e per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega$ , vale

$$\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} \leq 0$$

allora  $\mathbf{z}_0$  è di equilibrio stabile. In particolare, se  $\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} < 0$  per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ , il punto  $\mathbf{z}_0$  è *asintoticamente stabile*.

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo, senza perdere in generalità, che  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = 0$ . Sia dunque  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \subset \Omega$ : per il teorema di Weierstrass, essendo la sua frontiera  $\partial \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$  una superficie sferica chiusa e limitata,  $\Lambda$  ammette un minimo su  $\partial \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ , sia esso  $2\lambda = \min_{\mathbf{z} \in \partial \bar{\mathcal{B}}} \Lambda(\mathbf{z}) > 0$ . Definiamo l'insieme

$$\Omega_\lambda = \{\mathbf{z} \in \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0) : \Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda\}.$$

Questo insieme è interno a  $\bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ : se così non fosse, esisterebbe  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \cap \partial \bar{\mathcal{B}}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ , che è un assurdo essendo, per  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda$ ,  $\Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda < \min_{\mathbf{x} \in \partial \bar{\mathcal{B}}} \Lambda(\mathbf{x}) = 2\lambda$ . Questo insieme, che contiene  $\mathbf{z}_0$ , è tale che

$$\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \Rightarrow \mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda,$$

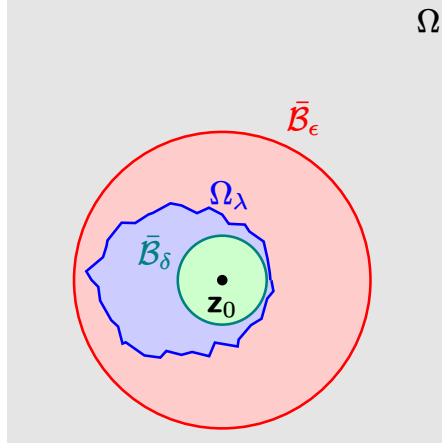


FIGURA 3. Illustrazione pittorica degli interni nella dimostrazione del teorema di Ljapunov.

per via del fatto che  $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) \leq \lambda \forall t \geq 0$ . Essendo ora  $\Lambda$  continua per ipotesi, esiste un  $\delta > 0$  tale che, detto  $\bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$  l'intorno sferico chiuso di  $\mathbf{z}_0$  di raggio  $\delta$ ,

$$\bar{B}_\delta \subset \Omega_\lambda \subset \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \quad \text{tale che} \quad \mathbf{z} \in \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \Lambda(\mathbf{z}) \leq \lambda$$

e quindi ogni punto  $\mathbf{z} \in \bar{B}_\delta(\mathbf{z}_0)$  è tale che  $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in \Omega_\lambda \subset \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$  che prova la stabilità secondo Ljapunov.

Se la disuguaglianza sulla derivata è stretta, essendo  $\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})$  monotona non crescente e inferiormente limitata in  $\Omega$ , per ogni  $\mathbf{z} \in \Omega_\lambda \setminus \{\mathbf{z}_0\}$  esiste  $\lambda(\mathbf{z}) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z})$ . Supponiamo che  $\lambda(\mathbf{z}) \neq 0$ . Per via della continuità di  $\Lambda$ , esiste quindi un  $r < \epsilon$  tale che

$$\bar{B}_r(\mathbf{z}_0) \subset \Omega_{\lambda(\mathbf{z})} \subseteq \Omega_\lambda \subset \bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0) \quad \text{tale che} \quad \mathbf{z}' \in \bar{B}_r(\mathbf{z}_0) \Rightarrow \Lambda(\mathbf{z}') \leq \lambda(\mathbf{z}).$$

Il fatto che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{z}) > 0$  implica che la traiettoria  $\mathbf{g}^t \mathbf{z}$  è esterna a  $\bar{B}_r$  per  $t \geq 0$ , ma sempre interna a  $\Omega_\lambda$  e quindi  $\bar{B}_\epsilon(\mathbf{z}_0)$ . Sia in particolare

$$-\eta := \max_{r \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon} \left. \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} \right|_{t=0} < 0.$$

Questo implica inoltre che  $\frac{d\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z})}{dt} = \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^\tau(\mathbf{g}^t \mathbf{z}))}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \leq -\eta$ . Allora

$$\Lambda(\mathbf{g}^t \mathbf{z}) = \Lambda(\mathbf{z}) + \int_0^t \frac{d\Lambda(\mathbf{g}^\tau \mathbf{z})}{d\tau} d\tau \leq \Lambda(\mathbf{z}) - \eta t,$$

che per  $t$  sufficientemente grande è una quantità negativa, contraddicendo il fatto che  $\Lambda$  sia inferiormente limitata.  $\square$

**Esempio 2.5** (Oscillatore smorzato) — Abbiamo già introdotto il caso del moto dell'oscillatore smorzato e mostrato che può essere studiato per mezzo del formalismo lagrangiano se viene introdotta una opportuna funzione di Rayleigh. L'equazione del moto risultante per un punto materiale di massa  $m$  in moto unidimensionale è nella forma

$$m\ddot{q} + \sigma\dot{q} + kq = 0$$

dove  $\sigma > 0$  è un coefficiente di smorzamento e  $k > 0$  è una costante elastica opportuna. Abbiamo già studiato questo moto e sappiamo che  $q = 0$  è una posizione di equilibrio, e in particolare che essa è

asintoticamente stabile. Vediamo come è possibile vedere questo fatto tramite una opportuna funzione di Ljapunov. In questo problema (e in molti altri casi) una naturale scelta per  $\Lambda$  è l'energia meccanica,

$$\Lambda \equiv E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2.$$

Questa funzione è nulla in  $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ . D'altra parte, in ogni punto di un qualunque intorno di tale punto si ha

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \dot{q}(m\ddot{q} + kq) = -\sigma\dot{q}^2 < 0.$$

Dal teorema sopra, il punto di equilibrio è quindi asintoticamente stabile.

**2.2.1. Vincoli lisci e forze conservative.** Il caso dei vincoli lisci e forze conservative indotte da un potenziale  $V$  è particolarmente semplice da studiare: per un vincolo liscio infatti  $\mathbf{f} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$ . Vale il seguente

**TEOREMA 2.2.** *In un sistema olonomo soggetto a forze conservative indotte dal potenziale  $V$  e vincoli lisci, la configurazione  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è di equilibrio se e solo se  $\mathbf{q}_0$  è un punto critico del potenziale, ovvero  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sul punto  $\mathbf{z}_0$  così dato abbiamo che

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}_0) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0).$$

Essendo  $\mathbf{A}$  definita positiva,  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  se e solo se  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$ . □

**TEOREMA 2.3 (Lagrange–Dirichlet).** *Sia dato un sistema olonomo con vincoli lisci e fissi, e soggetto a forze conservative indotte da un potenziale  $V$ . Se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale isolato dell'energia potenziale, la corrispondente configurazione è stabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è una conseguenza immediata del teorema di Ljapunov. Basta infatti utilizzare come funzione di Ljapunov l'energia meccanica,

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q}) \equiv \Lambda(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

che in un sistema con vincoli olonomi lisci e fissi e soggetto a sole forze conservative si conserva, dunque  $\frac{d\Lambda}{dt} = 0$ . Inoltre, se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale isolato del potenziale, detto  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ , esiste un intorno  $\Omega$  di  $\mathbf{z}_0$  nello spazio delle fasi  $\Lambda(\mathbf{z}_0) = V(\mathbf{q}_0) < V(\mathbf{q}) \leq \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \rangle + V(\mathbf{q})$  per ogni  $\mathbf{q} \in \Omega \setminus \{\mathbf{z}_0\}$ . □

Il teorema sopra è valido a maggior ragione nel caso in cui siano presenti forze dissipative, dato che l'energia durante il moto non potrà aumentare e anzi diminuirà strettamente: l'applicazione del teorema di Ljapunov in questo caso mostra che il minimo locale isolato è in particolare asintoticamente stabile. Una conseguenza di questo fatto, per esempio, è che, dato un sistema olonomo a vincoli fissi e lisci le cui forze attive sono solo dovute alla gravità, le posizioni di equilibrio stabile sono minimi isolati della quota del baricentro.

**2.3. Piccole oscillazioni.** Supponiamo ora che  $\mathbf{q}_0$  sia una posizione di equilibrio stabile in un sistema autonomo soggetto a vincoli lisci e fissi, e a forze conservative. La lagrangiana, in generale nella forma  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q})$ , può essere riscritta in termini di nuove variabili  $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  utilizzando una *approssimazione quadratica*. Anzitutto, possiamo sempre assumere  $V(\mathbf{q}_0) = 0$ . In un intorno di  $\mathbf{q}_0$ , quindi, potremo scrivere

$$V(\mathbf{q}_0) = \frac{1}{2} \sum_{ab} (q_a - q_{a,0})(q_b - q_{b,0}) \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0) + o(\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0\|^2) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\xi}, \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\xi} \rangle + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2)$$

dove abbiamo introdotto la matrice  $\hat{\mathbf{V}}$  di elementi

$$\hat{V}_{ab} := \frac{\partial^2 V_{ab}}{\partial q_a \partial q_b}(\mathbf{q}_0).$$

L'idea è perciò di introdurre una lagrangiana che approssima  $\mathcal{L}$  in vicinanza di  $\mathbf{q}_0$  mantenendo solo termini quadratici in  $\xi$  e  $\dot{\xi}$ , ovvero nella forma

$$\hat{\mathcal{L}}(\xi, \dot{\xi}) := \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_0) \xi \rangle$$

dove abbiamo sostituito  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \rightarrow \hat{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(\mathbf{q}_0)$ . Questo sistema è di più semplice analisi, dato che le corrispondenti equazioni di Lagrange sono lineari,

$$(2.7) \quad \hat{\mathbf{A}} \ddot{\xi} + \hat{\mathbf{V}} \xi = 0.$$

Sia  $\hat{\mathbf{A}}$  che  $\hat{\mathbf{V}}$  sono matrici definite positive per ipotesi (la prima in quanto matrice di massa in  $\mathbf{q}_0$ , la seconda essendo  $\mathbf{q}_0$  un minimo locale isolato). Sotto queste ipotesi, vale il seguente teorema.

**TEOREMA 2.4.** *Esiste una trasformazione lineare che disaccoppia il sistema in Eq. (2.7) in  $n$  oscillazioni armoniche indipendenti nella forma*

$$\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n$$

dove ciascun  $z_a$  è detto modo normale del sistema di frequenza propria  $\omega_a$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{S} \in O(n)$  la matrice che diagonalizza  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{S} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{S}^\top = \text{diag}(\alpha_i)$ . Per ipotesi,  $\alpha_i > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Definiamo la radice di  $\hat{\mathbf{A}}$  come  $\hat{\mathbf{A}}^{1/2} := \mathbf{S}^\top \text{diag}(\sqrt{\alpha_i}) \mathbf{S}$ : essa è simmetrica definita positiva, e indicheremo con  $\hat{\mathbf{A}}^{-1/2}$  la sua inversa. Introduciamo la variabile

$$\mathbf{y} := \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \xi$$

che ci permette di riscrivere l'equazione  $\hat{\mathbf{A}} \ddot{\xi} + \hat{\mathbf{V}} \xi = 0$  come

$$\ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y} = 0 \quad \boldsymbol{\Omega} := \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{A}}^{-1/2}.$$

Ora possiamo osservare che  $\boldsymbol{\Omega}$  è anch'essa simmetrica e definita positiva, con  $n$  autovalori (non necessariamente distinti) positivi. In particolare, esiste una matrice ortogonale  $\mathbf{O} \in O(n)$  tale che  $\text{diag}(\omega_a^2) = \mathbf{O}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{O}$ . Introduciamo quindi un'ultima variabile  $\mathbf{z} = \mathbf{O}^\top \mathbf{y}$ : l'equazione diventa ora

$$\ddot{\mathbf{z}} - \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} = 0 \Leftrightarrow \ddot{z}_a - \omega_a^2 z_a = 0, \quad a = 1, \dots, n.$$

In questa equazione le componenti di  $\mathbf{z}$  sono disaccoppiate e soddisfano ciascuna una equazione armonica con pulsazione  $\omega_i$ , come anticipato nella tesi.  $\square$

Come ultima osservazione, notiamo che l'energia meccanica del sistema approssimato ha una espressione piuttosto semplice. Seguendo le trasformazioni descritte nel teorema, infatti, essa vale

$$\hat{E} := \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}, \hat{\mathbf{A}} \dot{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, \hat{\mathbf{V}} \xi \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{z}, \text{diag}(\omega_a^2) \mathbf{z} \rangle = \sum_{a=1}^n \left( \frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \right)$$

ovvero si riscrive come la somma di energie meccaniche di singoli oscillatori di massa unitaria e pulsazione  $\omega_a$ , disaccoppiati tra loro. In questa approssimazione, *ciascuno* di questi contributi si conserva separatamente, ovvero

$$\hat{E}_a := \frac{1}{2} \dot{z}_a^2 + \frac{\omega_a^2}{2} z_a^2 \Rightarrow \frac{dE_a}{dt} = (\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a) \dot{z}_a = 0,$$

il che vuol dire che se  $E_a$  è l'energia associata all'oscillatore  $a$ -esimo nell'istante iniziale, durante tutto il moto varrà

$$-1 \leq \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2E_a}} \leq 1.$$



FIGURA 4. Problema dei pendoli accoppiati (sinistra). Fenomeno dei battimenti per  $0 < k \ll 1$  (destra).

**Esempio 2.6** (Pendoli accoppiati) — Consideriamo due pendoli di uguale lunghezza e massa, tali per cui, in opportune unità,  $m = g = \ell = 1$ . Supponiamo che essi siano uniti da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Essi sono attaccati allo stesso punto, vincolati a oscillare in un piano verticale passante per il punto a cui sono agganciati. Siano  $q_1$  e  $q_2$  gli angoli che i due pendoli descrivono rispetto alla verticale, come in Fig. 4. L'energia cinetica del sistema è

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

mentre quella potenziale è

$$V(\mathbf{q}) = -\cos q_1 - \cos q_2 + \frac{k}{2}((\cos q_1 - \cos q_2)^2 + (\sin q_2 - \sin q_1)^2).$$

Si vede facilmente che  $q_1 = q_2 = 0$  è di equilibrio *stabile*. Possiamo quindi studiare le piccole oscillazioni attorno a questa configurazione (per cui, nella notazione sopra, qui  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{q} - \mathbf{0} = \mathbf{q}$ ) scrivendo

$$V(\mathbf{q}) = -2 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 + o(\|\mathbf{q}\|^2)$$

per cui, in approssimazione di piccole oscillazioni e trascurando costanti additive irrilevanti,

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} \rangle, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica  $\mathbf{A}$  in questo problema è già diagonale, per cui nella notazione del teorema  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}$ , e possiamo semplicemente fare un cambio di base che diagonalizzi  $\hat{\mathbf{V}}$ : troviamo in particolare che

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Per quanto detto sopra, possiamo quindi introdurre una nuova variabile

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{q_1-q_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

che soddisfa le equazioni

$$\ddot{z}_1 - z_1 = 0, \quad \ddot{z}_2 - \omega^2 z_2 = 0$$

dove abbiamo introdotto

$$\omega = \sqrt{1+2k}.$$

La soluzione di queste equazioni dipenderà dalle condizioni iniziali date.

Come anticipato, il moto nel piano  $(z_1, z_2)$  è circoscritto al rettangolo individuato dalle relazioni  $z_1^2 \leq 2\hat{E}_1$  e  $\omega^2 z_2^2 \leq 2\hat{E}_2$ . In questo rettangolo, la traiettoria del sistema è individuata da una curva bidimensionale  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (z_1(t), z_2(t))$  che produce una cosiddetta *figura di Lissajous*, tipicamente osservata negli oscillografi. Se  $\omega = 1$  la figura è una ellisse. Tra le curve con  $\omega = n$  vi sono dei polinomi, detto di *Chebyshev*, di interesse indipendente.

Vediamo ora alcuni speciali soluzioni.

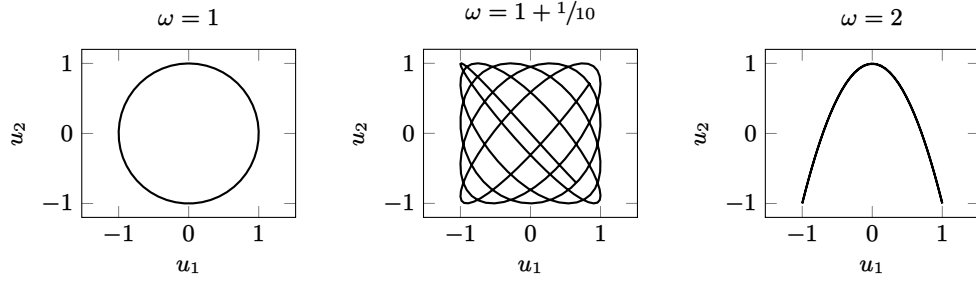


FIGURA 5. Esempi di figure Lissajous per diversi valori di  $\omega$ . Sono plottate le variabili riscalate  $u_a := \frac{\omega_a z_a}{\sqrt{2E_a}}$ .

**Oscillazioni in fase:** Siano  $q_0, v_0$  due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = q_0, \\ q_2(0) = q_0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = \sqrt{2}q_0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \sqrt{2}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \sqrt{2}q_0 \cos t + \frac{\sqrt{2}v_0}{\omega} \sin t, \\ z_2(t) = 0. \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per  $z_2$  implica che per ogni  $t$  si ha  $q_1 = q_2$ , ovvero i due pendoli oscillano *in fase* con frequenza  $\omega_1 = 1$ .

**Oscillazioni in opposizione di fase:** Siano  $q_0, v_0$  due quantità date e consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = q_0, \\ q_2(0) = -q_0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = -v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = \sqrt{2}q_0, \\ \dot{z}_1(0) = 0, \\ \dot{z}_2(0) = \sqrt{2}v_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = 0, \\ z_2(t) = \sqrt{2}q_0 \cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2}v_0}{\omega} \sin(\omega t). \end{cases}$$

In questo caso la soluzione per  $z_1$  implica che per ogni  $t$  si ha  $q_1 = -q_2$ , ovvero i due pendoli oscillano *in opposizione di fase* con frequenza  $\omega = \sqrt{1+2k} > 1$ .

**Trasferimento di energia:** Sia  $v_0$  dato e consideriamo infine le condizioni iniziali

$$\begin{cases} q_1(0) = 0, \\ q_2(0) = 0, \\ \dot{q}_1(0) = v_0, \\ \dot{q}_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(0) = 0, \\ z_2(0) = 0, \\ \dot{z}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \\ \dot{z}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin t \\ z_2(t) = \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}} \sin \omega t. \end{cases}$$

Ciò significa che, tornando alle coordinate  $q_1$  e  $q_2$ ,

$$q_1(t) = v_0 \left( \sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad q_2(t) = v_0 \left( \sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Se  $0 < k \ll 1$ ,  $\omega^{-1} = 1 - o(k)$  e si verificano dei *battimenti*, come abbiamo già visto: questo significa che periodicamente il moto di un pendolo si smorza completamente e tutta l'energia è trasferita nell'altro.