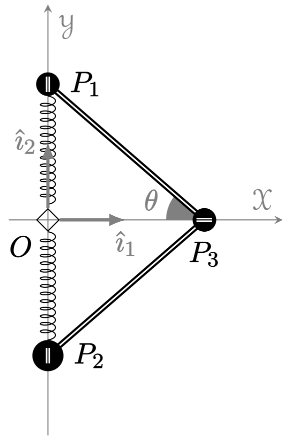
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

17 Giugno 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Il voto minimo per l'accesso all'orale è `15/30`.

Si consideri un riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ come in figura, orientato in modo che il versore di base $\hat{\imath}_2$ sia contrario alla forza peso. Due masse puntiformi, in P_1 e P_2 rispettivamente, sono vincolate a scorrere lungo l'asse $\mathcal{Y}$, corrispondente alla direzione $\hat{\imath}_2$, su lati opposti rispetto all'origine, dove è presente un fermo che non può essere attraversato. La massa più in alto, P_1, ha valore $m_1 = m$, mentre quella più in basso, P_2, ha valore $m_2 = 2m$. Ciascuna massa è collegata da un'asta rigida di lunghezza ℓ allo stesso punto materiale P_3, avente massa pari a $m_3 = m$. Tale punto materiale è vincolato a scorrere, tramite un carrello ideale, lungo il semiasse positivo $\mathcal{X}$, orientato come $\hat{\imath}_1$. Infine, le masse in P_1 e P_2 sono ciascuna collegata all'origine da una molla ideale di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k.



Usando come parametro lagrangiano per il sistema l'angolo θ in figura, si risponda alle seguenti domande.

- **A** Si calcoli il centro di massa del sistema. [`5 pt`]
- **B** Si calcolino i momenti d'inerzia del sistema secondo gli assi cartesiani $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$, asse ortogonale al piano di direzione $\hat{\imath}_3 = \hat{\imath}_1 \wedge \hat{\imath}_2$. [`6 pt`]
- **C** Si determinino le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema e se ne studi la stabilità in funzione del parametro $\eta := \frac{mg}{k\ell}$. [`12 pt`]
- **D** Si calcoli il momento angolare del sistema rispetto all'origine e rispetto al centro di massa. [`7 pt`]

Soluzione

Anzitutto osserviamo che, per via dei vincoli, $\theta \in [0, \pi/2]$.

A Possiamo applicare la definizione osservando che le tre masse in P_1, P_2 e P_3 hanno posizione individuata rispettivamente da

$$\overrightarrow{OP_1} = \ell \sin\theta \hat{\imath}_2, \quad \overrightarrow{OP_2} = -\ell \sin\theta \hat{\imath}_2, \quad \overrightarrow{OP_3} = \ell \cos\theta \hat{\imath}_1.$$

Allora il centro di massa è in

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OP_1} + 2m\overrightarrow{OP_2} + m\overrightarrow{OP_3}}{4m} = \frac{\ell\cos\theta}{4}\hat{\imath}_1 - \frac{\ell\sin\theta}{4}\hat{\imath}_2.$$

B I tre casi si studiano applicando direttamente la definizione $I_{\mathcal{R}} = \sum_i m_i\, d^2(P_i, \mathcal{R})$, ovvero

$$I_{\mathcal{X}} = 3m(\ell\sin\theta)^2, \qquad I_{\mathcal{Y}} = m(\ell\cos\theta)^2, \qquad I_{\mathcal{Z}} = 3m(\ell\sin\theta)^2 + m(\ell\cos\theta)^2,$$

risultando il contributo di P_3 a $I_{\mathcal{X}}$ nullo e il contributo di P_1 e P_2 a $I_{\mathcal{Y}}$ nullo.

C L'energia potenziale del sistema si può scrivere come

$$V(\theta) = -mg\ell\sin\theta + k(\ell\sin\theta)^2 + \text{costante} \equiv k\ell^2\left(-\eta\sin\theta + \sin^2\theta\right) + \text{costante}.$$

Cerchiamo le configurazioni di equilibrio *ordinarie* imponendo

$$\partial_\theta V(\theta) = k\ell^2 \cos\theta\,(2\sin\theta - \eta) = 0$$

che per $\theta \in (0, \pi/2)$ si annulla se $\sin\theta = \frac{\eta}{2}$, che ha soluzione per $0 \le \eta \le 2$: in questo caso si ottiene $\theta = \arcsin\frac{\eta}{2}$. Per studiarne la stabilità, calcoliamo la derivata seconda,

$$\partial^2_\theta V(\theta) = k\ell^2\left(\eta\sin\theta + 2(1 - 2\sin^2\theta)\right).$$

Per $\sin\theta = \frac{\eta}{2}$, questa quantità è pari a $\partial^2_\theta V(\theta)|_{\theta=\arcsin\frac{\eta}{2}} = 2k\ell^2\left(1 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\right)$, che è sempre positiva quando $\eta < 2$, per cui la configurazione è sempre stabile, quando esiste, eccetto nel punto marginale $\eta = 2$.

La configurazione di confine $\theta = \pi/2$ ammette spostamenti virtuali $\delta\theta < 0$: possiamo quindi studiare la variazione del potenziale $\delta U = \partial_\theta V(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}}\delta\theta$ al primo ordine e valutare se $\delta V \le 0$ in questo punto. Essendo $\partial_\theta V(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$, la posizione è di equilibrio per il principio dei lavori virtuali. Per capire se è di equilibrio stabile o instabile, occorre studiare se la funzione cresce o decresce per $\delta\theta < 0$: ciò si vede guardando gli ordini superiori, ovvero scrivendo

$$\delta V = \partial_\theta V(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}}\delta\theta + \frac{1}{2}\partial^2_\theta V(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}}(\delta\theta)^2 + \dots$$

Il primo termine è nullo, mentre $\partial^2_\theta V(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = k\ell^2(\eta - 2)$, che è positivo per $\eta > 2$: in questo regime, quindi, la configurazione $\theta = \frac{\pi}{2}$ è un minimo locale, ed è quindi stabile, mentre per $\eta < 2$ è un massimo locale, ed è quindi instabile; per $\eta = 2$ è un punto marginale.

Esiste infine una seconda configurazione di confine corrispondente a $\theta = 0$. Per valutare se questa configurazione è di equilibrio, osserviamo che, in virtù del principio dei lavori virtuali, in tale configurazione possiamo avere solo $\delta\theta > 0$. Essendo $\partial_\theta V|_{\theta=0} = -\eta k\ell^2 < 0$, $\delta V = \partial_\theta V|_{\theta=0}\delta\theta < 0$ per cui la configurazione *non* è di equilibrio.

D È possibile rispondere al quesito applicando la definizione. Da quanto detto sopra, le velocità dei tre punti sono

$$\vec{v}_1 = \ell\dot\theta\cos\theta\hat{\imath}_2, \quad \vec{v}_2 = -\ell\dot\theta\cos\theta\hat{\imath}_2, \quad \vec{v}_3 = -\ell\dot\theta\sin\theta\hat{\imath}_1.$$

Osservando che $\overrightarrow{OP_i} \parallel \vec{v}_i$, il momento angolare del sistema rispetto all'origine è nullo, dato che $\vec{L}_O = \sum_{i=1}^3 m_i\overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{v}_i = \vec{0}$, che è quindi una somma di vettori nulli. Il momento angolare rispetto al centro di massa è invece

$$\begin{aligned}\vec{L} &= (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OG}) \wedge (m\vec{v}_1) + (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OG}) \wedge (2m\vec{v}_2) + (\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OG}) \wedge (m\vec{v}_3) \\ &= -m\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = -m\ell\dot{\theta}\left(\frac{\cos\theta}{4}\hat{\imath}_1 - \frac{\sin\theta}{4}\hat{\imath}_2\right) \wedge (-\sin\theta\hat{\imath}_1 - \cos\theta\hat{\imath}_2) \\ &= \frac{m\ell\dot{\theta}}{4}\hat{\imath}_3.\end{aligned}$$

dove, nel secondo rigo, abbiamo usato che $\vec{v}_i \parallel \overrightarrow{OP_i}$. Alternativamente, si può usare il fatto che $\vec{L}_O = \vec{L} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{Q}$ e quindi $\vec{L} = -\overrightarrow{OG} \wedge \vec{Q}$ che è proprio la formula sopra dato che $\vec{Q} = m\vec{v}_1 + 2m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3$.