

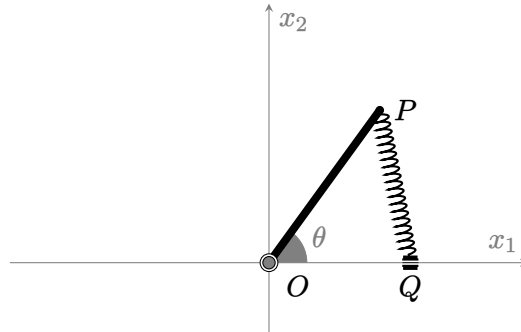
## ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

24 Luglio 2025

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

In un piano verticale è dato un riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2$  come in figura. Un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ ,  $\overline{OP}$ , è incernierata nell'origine  $O$  in modo da poter ruotare liberamente. L'estremo  $P$  dell'asta è collegato ad un carrello  $Q$  di massa  $2m$  che si muove liberamente e senza strisciare sull'asse delle ascisse.



Utilizzando l'ascissa  $q$  di  $Q$  e l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con l'asse orizzontale (indicato in figura) come parametri lagrangiani, si risponda alle seguenti domande.

- A Si calcoli la posizione del centro di massa del sistema.
- B Si calcolino le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro

$$\eta = \frac{mg}{k\ell}.$$

**Suggerimento.** Si ricordi che, per  $a \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$ .

- C Assumendo che la configurazione

$$q = 0, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

sia di equilibrio, si dica per quali valori di  $\eta \neq 1$  essa è stabile.

- D Si calcoli il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse perpendicolare al piano e passante per  $Q$ .

SOLUZIONE

- A** Il centro di massa  $G_a$  dell'asta  $\overline{OP}$  è nel suo punto medio, essendo l'asta omogenea. Poiché

$$\overrightarrow{OP} = \ell \cos \theta \hat{i}_1 + \ell \sin \theta \hat{i}_2 \Rightarrow \overrightarrow{OG_a} = \frac{\ell \cos \theta}{2} \hat{i}_1 + \frac{\ell \sin \theta}{2} \hat{i}_2.$$

Essendo il carrello in posizione  $\overrightarrow{OQ} = q \hat{i}_2$ , il centro di massa  $G$  è tale che

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m \overrightarrow{OG_a} + 2m \overrightarrow{OQ}}{3m} = \frac{\ell \cos \theta + 2q}{3} \hat{i}_1 + \frac{\ell \sin \theta}{3} \hat{i}_2.$$

- B** L'energia potenziale del sistema, soggetto solo a vincoli ideali e forze conservative, è dovuta all'azione gravitazionale e alla molla, ed è data (a meno di una costante additiva globale arbitraria) da

$$V(q, \theta) = 3mg \frac{\ell \sin \theta}{3} + \frac{k}{2} \|\overrightarrow{OQ}\|^2 = mg\ell \sin \theta + \frac{k}{2} (q^2 + \ell^2 - 2q\ell \cos \theta).$$

Le posizioni di equilibrio possono essere trovate imponendo

$$\frac{\partial V}{\partial q} = k(q - \ell \cos \theta) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\ell \cos \theta + q\ell \sin \theta = 0.$$

Dalla prima equazione otteniamo  $q = \ell \cos \theta$  e quindi

$$mg\ell \cos \theta + k\ell^2 \cos \theta \sin \theta = \cos \theta (mg\ell + k\ell^2 \sin \theta) = k\ell^2 \cos \theta (\eta + \sin \theta) = 0.$$

Abbiamo quindi due possibili soluzioni per  $\theta$  per ogni valore di  $\eta$

$$\theta_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2},$$

e due soluzioni aggiuntive quando  $\eta \in (0, 1]$ ,

$$\theta_1 = -\arcsin \eta, \quad \theta_2 = \pi - \arcsin \eta.$$

che corrispondono a quattro possibili soluzioni per  $q$ , ovvero  $q_{\pm} = 0$  per ogni valore di  $\eta$  e, se  $\eta \in (0, 1]$ ,  $q_1 = \ell \sqrt{1 - \eta^2}$ ,  $q_2 = -\ell \sqrt{1 - \eta^2}$ .

- C** Per calcolare la stabilità di queste posizioni di equilibrio, consideriamo la matrice hessiana del potenziale,

$$\text{Hess}[V](q, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial q} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial q} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k\ell \sin \theta \\ k\ell \sin \theta & -mg\ell \sin \theta + qk\ell \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo questa matrice nel punto di equilibrio dato, ovvero

$$\mathbf{H} := \text{Hess}[V](0, -\pi/2) = \begin{pmatrix} k & -k\ell \\ -k\ell & m g \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k\ell \\ -k\ell & \eta k \ell^2 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante  $\det \mathbf{H} = (\eta - 1)k^2 \ell^2$ . Essendo  $H_{11} > 0$ , entrambi i suoi autovalori sono positivi se e solo se  $\eta > 1$ : in questo caso, il punto dato è di equilibrio stabile.

- D** Il momento di un'asta omogenea di lunghezza  $L$  e massa  $M$  rispetto ad un asse ad essa ortogonale passante per il suo centro di massa è  $I_G = \frac{1}{12}ML^2$ . Poiché la massa in  $Q$  non contribuisce al calcolo del momento di inerzia richiesto (essendo sull'asse di interesse), è sufficiente traslare in  $Q$  il contributo  $I_{G_a}$  del momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse passante per il suo centro di massa  $G_a$  utilizzando il teorema di Huygens–Steiner, ovvero

$$I_Q = \frac{1}{12}m\ell^2 + md^2(G_a, Q) = \frac{1}{12}m\ell^2 + m \left( \frac{\ell^2}{4} + q^2 - q\ell \cos \theta \right) = m \left( \frac{\ell^2}{3} + q^2 - q\ell \cos \theta \right).$$