FOGLIO 2

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Richiami di meccanica newtoniana

1. Esercizi

Sia dato un riferimento inerziale $O\hat{\boldsymbol{\imath}}_1\hat{\boldsymbol{\imath}}_2\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$, tale per cui indichiamo una generica posizione $\boldsymbol{x} = \sum_k x_k\hat{\boldsymbol{\imath}}_k$. Si risolvano i seguenti esercizi.

Esercizio 1.1 — Si dica se i campi di forze

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) = x_2\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 - x_1\hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \qquad \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})}{x_1^2 + x_2^2},\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},$$

sono o meno conservativi.

Esercizio 1.2 — Sia dato un sistema isolato di due punti P_1 e P_2. Per mezzo della condizione di invarianza galileiana, si mostri che, se inizialmente in quiete, essi rimarranno in quiete o si muoveranno lungo la retta che li congiunge. Se il sistema è costituito da tre punti P_1, P_2 e P_3 in posizioni non allineate, si dimostri che essi si muovono nel piano passante per essi.

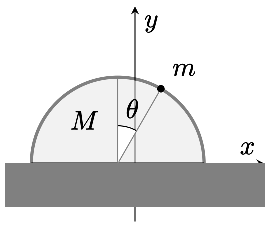
Esercizio 1.3 — Si considerino due punti materiali P_1 e P_2, dotati di *carica elettrica* rispettivamente q_1 e q_2 e massa rispettivamente m_1 ed m_2, si muovono lungo traiettorie $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$. La legge del moto del punto materiale P_1 e quella del punto materiale P_2 sono rispettivamente

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = k\frac{q_1q_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3} + \kappa\frac{q_1q_2\dot{\mathbf{x}}_1 \wedge (\dot{\mathbf{x}}_2 \wedge (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}, \qquad m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = k\frac{q_1q_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} + \kappa\frac{q_1q_2\dot{\mathbf{x}}_2 \wedge (\dot{\mathbf{x}}_1 \wedge (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}$$

per due costanti $k > 0$ e $\kappa > 0$. Il primo contributo nel secondo membro di ciascuna equazione è la cosiddetta *legge di Coulomb*, mentre il secondo, dovuto alla *legge di Biot–Savart*, nasce dal fatto che, nel suo moto, P_2 genera un campo magnetico, con cui una carica elettrica interagisce se in moto a sua volta. Spiegare come mai questa legge del moto è solo parzialmente compatibile col terzo principio della meccanica.

2. Problemi

Esercizio 2.1 (Distacco da emisfero) — Un punto materiale P di massa m giace in cima ad un emisfero di massa M e raggio r, a sua volta poggiato su un piano liscio. In un certo istante, il punto materiale subisce un impulso infinitesimo, in modo da acquisire una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ tangente all'emisfero. Supponendo il contatto tra punto materiale ed emisfero anch'esso liscio, si scriva una equazione per l'angolo θ, misurato dalla sommità dell'emisfero, a cui il punto materiale si distacca. Si assuma che $\mathbf{v}_0$ sia arbitrariamente piccola in norma.



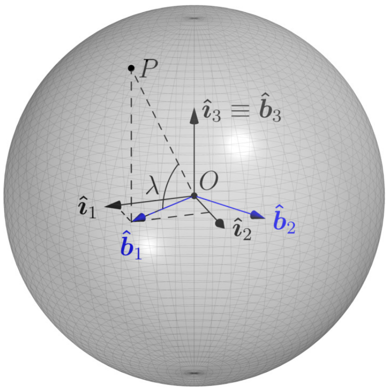
Esercizio 2.2 (Una correzione non-inerziale a g) — Un riferimento solidale con la Terra *non* è un sistema di riferimento inerziale per via di vari moti di rotazione e rivoluzione che la Terra compie e che tipicamente vengono trascurati in prima approssimazione. Una prima correzione non-inerziale da tenere in conto è l'effetto della *rotazione* terrestre: come ben noto, la Terra ruota attorno ad un suo asse, compiendo una rotazione completa nell'arco di 24 ore. Indichiamo con $O\hat{\boldsymbol{\imath}}_1\hat{\boldsymbol{\imath}}_2\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$ un riferimento che *assumiamo* inerziale, con origine nel centro della Terra[1]. Introduciamo altresì un riferimento mobile *solidale col moto della Terra*, $\beta = O\hat{\boldsymbol{b}}_1\hat{\boldsymbol{b}}_2\hat{\boldsymbol{b}}_3$, con origine sempre il centro della Terra ma solidale ad essa, tale per cui

$$\hat{\boldsymbol{b}}_1 = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \qquad \hat{\boldsymbol{b}}_2 = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \qquad \hat{\boldsymbol{b}}_3 = \hat{\boldsymbol{\imath}}_3,$$

nell'assunzione che $\omega := \dot{\phi}$ sia una quantità costante. Un punto materiale P di massa m fermo sulla superficie (ma in moto con la Terra) è individuato rispetto ad O dal vettore[2]

$$\boldsymbol{x}^\beta = R_T\cos\lambda\,\hat{\boldsymbol{b}}_1 + R_T\sin\lambda\,\hat{\boldsymbol{b}}_3.$$

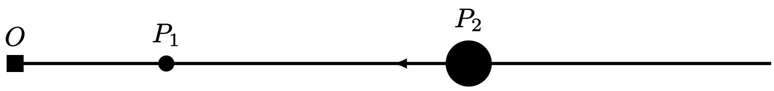
Qui λ è l'angolo di $\boldsymbol{x}^\beta$ con il piano dell'equatore, come in figura:



Si risponda alle seguenti domande.

(1) Si calcoli la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_\beta$ del riferimento β rispetto al riferimento inerziale.
(2) Si esprima la forza peso agente su P nella base del riferimento β.
(3) Si calcoli il modulo dell'accelerazione del punto materiale nel riferimento β solidale con la Terra.
(4) Si supponga ora che $\dot{\lambda} \neq 0$, ovvero il punto di muove lungo il meridiano. Si calcoli l'accelerazione di Coriolis su P.

Esercizio 2.3 (Biliardo di Galperin[3]) — Due punti materiali P_1 e P_2, di massa rispettivamente $m_1 = 1$ e $m_2 = \eta$, con $\eta > 1$, sono vincolati a scorrere lungo una guida liscia. La guida consiste in una semiretta di origine O, dove è collocato un perno inamovibile. Le posizioni di P_1 e P_2 sono univocamente determinata dalla loro ascissa rispetto all'origine, che indichiamo con x ed y rispettivamente. Assumiamo come condizioni iniziali per $t = 0$ siano $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, con $0 \leq x_0 \leq y_0$. I punti non possono attraversarsi reciprocamente, il che implica $0 \leq x \leq y$ ad ogni $t > 0$. Inoltre, a $t = 0$, assumiamo che P_1 sia fermo, $\dot{x}(0) = 0$, mentre P_2 ha velocità $\dot{y}(0) = -v_0$ con $v_0 > 0$, ovvero è diretto verso l'origine della semiretta, e quindi andrà a collidere con P_1.



Quanti urti (tra i punti materiali P_1 e P_2, o tra P_1 e il fermo in O) *avranno luogo durante l'evoluzione del sistema* assumendo che le collisioni siano *elastiche*, ovvero che si conservi sia la quantità di moto che l'energia cinetica ad ogni urto?

Soluzione. — Lo spazio delle configurazioni è un settore del primo quadrante nel piano (x, y) con angolo al centro $\frac{\pi}{4}$, come in Fig. 2: il sistema è individuato da un punto $P = (x, y)$ nella porzione di spazio compresa tra l'asse y e la retta $y = x$ per $x > 0$: se P tocca l'asse y, significa che P_1 urta O; se P tocca la retta $y = x$, significa che P_1 urta P_2. Questo punto *si muove di moto rettilineo uniforme* tra un urto e l'altro dato che non vi sono altre forze agenti lungo la traiettoria dei punti materiali: la velocità di P è $(\dot{x}, \dot{y})$, ovvero ha come componenti le velocità di P_1 e P_2. Un fatto molto interessante della dinamica di questo sistema è che gli urti sulla frontiera del suo dominio possono essere studiati come in un *biliardo* nel piano. Per essere più precisi, immediatamente dopo $t = 0$, P si muoverà verticalmente nello spazio delle configurazioni con velocità $\mathbf{v}_0 = (0, -v_0)$, fino ad

[1]Stiamo trascurando ogni altro moto terrestre fuorché quello di rotazione

[2]Nel seguito, ometteremo apici di quantità viste dal riferimento inerziale. Inoltre, qui $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\beta$, dato che le due origini coincidono, ma espliciteremo comunque l'apice β per ricordarci che stiamo lavorando rispetto al riferimento mobile.

[3]G. Galperin, *Playing pool with* π, Regular and chaotic dynamics, 8(4), 375 (2003).

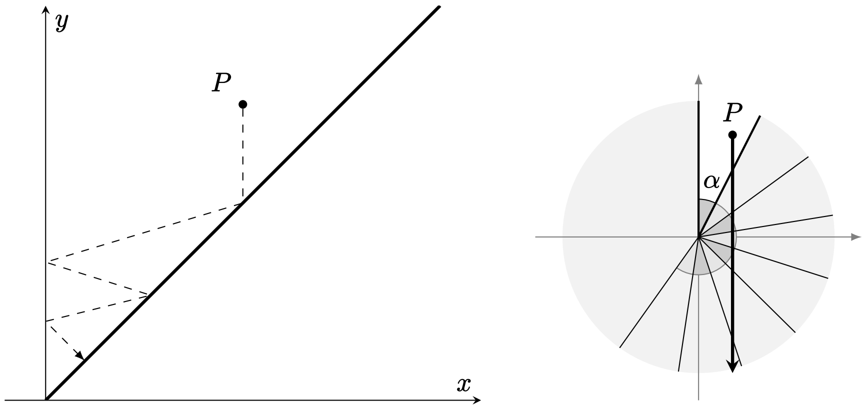


FIGURA 1. Problema di Galperin (a sinistra) e descrizione equivalente in termini di biliardo su settore del primo quadrante.

urtare la retta $y = x$. A quel punto la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica impongono che subito dopo l'urto la velocità di P sia $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$ tale che

$$u_1 + \eta v_1 = -\eta v_0, \qquad \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}\eta v_1^2 = \frac{1}{2}\eta v_0^2.$$

Dopo la collisione, P_1 continuerà a muoversi verso O (essendo $\eta > 1$) con velocità u_1, in modulo minore di v_1 per ragioni di conservazione dell'energia. Ciò significa che P_1 raggiungerà O prima di essere raggiunta da P_2 e quindi il secondo urto sarà tra P_1 e l'origine: la velocità di P passerà da $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1)$ a $\mathbf{v}_2 = (u_2, v_2) = (-u_1, v_1)$. A questo punto P_1 tornerà indietro, urtando nuovamente P_2 in un terzo urto. Le equazioni che forniscono la velocità di P dopo il terzo urto, sia $\mathbf{v}_3 = (u_3, v_3)$, sono

$$u_3 + \eta v_3 = u_2 + \eta v_2 = -u_1 + \eta v_1, \qquad \frac{1}{2}u_3^2 + \frac{1}{2}\eta v_3^2 = \frac{1}{2}\eta v_0^2$$

che occorrerà analizzare in termini di η, etc. Per fare progressi sul problema, è utile, come anticipato, mapparlo in un vero "biliardo". L'"urto" di P sulla retta $y = x$ non produce, in generale, una riflessione "ottica", ovvero tale per cui l'angolo di incidenza e di riflessione sono uguali. Si può però eseguire una speciale trasformazione lineare che rende questa riflessione del tipo desiderato. Introduciamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}$$

di modo che $\mathbf{x} = (x, y)^\intercal \mapsto \mathbf{X} = (X, Y)^\intercal = \mathbf{A}\mathbf{x} = (x, \sqrt{\eta}y)^\intercal$. Si tratta di un cambio di scala, che modifica l'angolo al centro del settore ammesso da $\frac{\pi}{4}$ ad un nuovo angolo α tale per cui

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\eta}}.$$

Se l'asse y viene mappato in se stesso da questa trasformazione, la retta $y = x$ viene mappata nella retta $Y = \sqrt{\eta}X$, che ha direzione

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\eta} \end{pmatrix}.$$

Vediamo come cambiano ora le condizioni di conservazione di quantità di moto ed energia cinetica utilizzando le nuove variabili. L'urto con l'asse Y non cambia natura, dato che $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{v} = (v_x, \sqrt{\eta}v_y)^\intercal \mapsto (-v_x, \sqrt{\eta}v_y)^\intercal$ (già in forma adeguata prima della trasformazione). La legge che regola gli urti tra P_1 e P_2 invece si riscrive in modo piuttosto elegante: se il k-esimo urto avviene tra P_1 e P_2, la velocità dopo l'urto $\mathbf{V}_k$ è legata alla velocità prima dell'urto $\mathbf{V}_{k-1}$ come

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_k \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{V}_{k-1} \rangle, \qquad \|\mathbf{V}_k\|^2 = \|\mathbf{V}_{k-1}\|^2,$$

che equivale a dire che l'urto ruota il vettore velocità mantenendone costante il modulo e la proiezione nella direzione della frontiera $\mathbf{t}$: questo è esattamente quel che accade in un urto "ottico", dove la velocità conserva il suo modulo e mantiene uguale la proiezione lungo la direzione tangente alla superficie di impatto. Nelle nuove coordinate, quindi, P si muove nella regione ammessa esattamente come un punto materiale in un biliardo ideale. L'utilità di questo fatto è che possiamo studiare il moto di P con una semplice costruzione geometrica. Basta osservare che esiste una corrispondenza biunivoca tra la traiettoria in questo speciale biliardo e la costruzione in Fig. 2. Il diagramma rappresentato è stato ottenuto replicando un angolo α nel piano, ottenendo una infinità di settori ciascuno con angolo al centro α, e considerando la traiettoria che P seguirebbe nel piano stesso se non ci fosse riflessione sulla retta $Y = \eta X$. La traiettoria che esso segue nel secondo settore è *speculare* rispetto a $Y = \eta X$ a quella che P segue nel primo in presenza di riflessione, ovvero coincide con una traiettoria reale a meno di una riflessione attorno alla bisettrice del settore e una traslazione di α. La traiettoria di P nel terzo settore è *uguale* a quella seguita nel primo settore a meno di una rotazione di 2α, e così via. Il numero di collisioni corrisponde quindi al numero di settori attraversati da P. Questa traiettoria interseca necessariamente un numero *finito* di settori n, pari a $n = \lceil \frac{\pi}{\alpha} \rceil - 1$, dove ricordiamo che α è tale che $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{\eta}}$. Se $\eta = 100^N$, per esempio, $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\arctan 10^{-N}} = 10^N + \frac{1}{3 \cdot 10^N} + o(10^{-N})$ e quindi, per $N \gg 1$, $n = \lceil \pi 10^N \rceil$, ovvero il numero di urti corrisponde all'intero ottenuto considerando le prime N cifre di π.