

I LIBRI DE «IL COLLE DI GALILEO»

- 1 -

**DIRETTORE**

---

Roberto Casalbuoni (*Università di Firenze*)

**COMITATO SCIENTIFICO**

---

Francesco Cataliotti (*Università di Firenze*)

Guido Chelazzi (*Università di Firenze; Museo di Storia Naturale, Presidente*)

Stefania De Curtis (*INFN*)

Paolo De Natale (*Istituto Nazionale di Ottica, Direttore*)

Daniele Dominici (*Università di Firenze*)

Pier Andrea Mandò (*Università di Firenze; Sezione INFN Firenze, Direttore*)

Francesco Palla (*Osservatorio di Arcetri*)

Giuseppe Pelosi (*Università di Firenze*)

Giacomo Poggi (*Università di Firenze*)

# **Enrico Fermi a Firenze**

Le «Lezioni di Meccanica Razionale»  
al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria:  
1924-1926

*a cura di*

**Roberto Casalbuoni  
Giovanni Frosali  
Giuseppe Pelosi**

Firenze University Press  
2014

Enrico Fermi a Firenze : le «Lezioni di Meccanica Razionale» al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria: 1924-1926 / a cura di Roberto Casalbuoni, Giovanni Frosali, Giuseppe Pelosi. – Firenze : Firenze University Press, 2014.

(I libri de «Il Colle di Galileo» ; 1)

<http://digital.casalini.it/9788866556732>

ISBN 978-88-6655-672-5 (print)

ISBN 978-88-6655-673-2 (online)

Progetto grafico di Alberto Pizarro Fernández, Pagina Maestra snc

Immagine in quarta di copertina: Istituto di Fisica «Antonio Garbasso» ad Arcetri

Organizzazione dei testi e delle immagini: Leonardo Lucci, Università di Firenze

#### ***Certificazione scientifica delle Opere***

Tutti i volumi pubblicati sono soggetti ad un processo di referaggio esterno di cui sono responsabili il Consiglio editoriale della FUP e i Consigli scientifici delle singole collane. Le opere pubblicate nel catalogo della FUP sono valutate e approvate dal Consiglio editoriale della casa editrice. Per una descrizione più analitica del processo di referaggio si rimanda ai documenti ufficiali pubblicati sul sito-catalogo della casa editrice (<http://www.fupress.com>).

#### ***Consiglio editoriale Firenze University Press***

G. Nigro (Coordinatore), M.T. Bartoli, M. Boddi, R. Casalbuoni, C. Ciappei, R. Del Punta, A. Dolfi, V. Fargion, S. Ferrone, M. Garzaniti, P. Guarnieri, A. Mariani, M. Marini, A. Novelli, M. Verga, A. Zorzi.

© 2014 Firenze University Press

Università degli Studi di Firenze

Firenze University Press

Borgo Albizi, 28, 50122 Firenze, Italy

[www.fupress.com/](http://www.fupress.com/)

*Printed in Italy*



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
**FIRENZE**



Questo volume è pubblicato con il contributo  
dell'Ente Cassa di Risparmio di Firenze.





# Sommario

Presentazione <i>Alberto Tesi</i>	XI
Prefazione <i>Roberto Casalbuoni, Giovanni Frosali, Giuseppe Pelosi</i>	1
Il contributo scientifico di Fermi <i>Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici</i>	5
Meccanica Razionale... «quæ per demonstrationes accurate procedit» <i>Franco Angotti, Giovanni Frosali, Paolo Maria Mariano</i>	17
Parte I Enrico Fermi, gli anni fiorentini	
Enrico Fermi docente alla Regia Università degli Studi di Firenze <i>Leonardo Lucci, Fioranna Salvadori, Stefano Selleri</i>	29
Ricordi di Fermi <i>Nello Carrara</i>	45
Enrico Fermi e la nascita dell'elettronica dei semiconduttori <i>Giuseppe Pelosi, Massimiliano Pieraccini</i>	59
Una partita a tennis e tanti ricordi <i>Carlo Franchetti</i>	63
Parte II Lezioni di Meccanica Razionale	67
Ringraziamenti	379
Gli autori	381





# Ingegneri & Ingegneria a Firenze

A quarant'anni  
dall'istituzione  
della Facoltà di  
Ingegneria

a cura di  
Andrea Corvi  
Giovanni Frosali  
Enio Paris  
Giuseppe Pelosi  
Alessandro Viviani



La copertina del volume *Ingegneri & Ingegneria a Firenze*. Il libro – pubblicato in occasione dei quarant'anni della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Firenze – rappresenta la prima pubblicazione della Firenze University Press dedicata alla storia della Facoltà, a cui segue questo libro *Enrico Fermi a Firenze*.



# Presentazione

**Alberto Tesi**

Rettore dell'Università di Firenze

In questo libro vengono riprodotte per la prima volta – su concessione degli eredi e della Temple University (Philadelphia, Pennsylvania, USA), che detiene una copia del manoscritto originale – le «Lezioni di Meccanica Razionale» che Enrico Fermi – Premio Nobel per la Fisica nel 1938 – ha tenuto alla Regia Università degli Studi di Firenze dal 1924 al 1926. Le «Lezioni di Meccanica Razionale» erano indirizzate prevalentemente agli studenti del biennio propedeutico per l'avviamento agli studi di Ingegneria della nostra Università.

Nel momento della transizione dalla Facoltà alla Scuola di Ingegneria, transizione che è avvenuta a quarant'anni dalla nascita della Facoltà, vede la luce questo che è il secondo volume di una trilogia di testi la cui pubblicazione ha lo scopo di segnare la memoria degli studi di Ingegneria presso l'Università di Firenze.

Di questa memoria fa certamente parte Enrico Fermi che ha lasciato un'importante traccia della sua presenza con le lezioni raccolte da due studenti e certamente da lui riconosciute dal momento che egli stesso si presenta, nel frontespizio, come autore. Oltre alla chiarezza espositiva, alle concise dimostrazioni e alla scelta degli argomenti oggetto delle sue lezioni, Fermi lascia anche un significativo segno del suo ottimo rapporto con gli studenti.

Bisogna altresì ricordare che la presenza di Fermi a Firenze è soprattutto legata a quel filone di ricerca, noto come 'statistica di Fermi', che è certamente uno dei suoi contributi scientifici più importanti.

Il primo volume della trilogia – *Ingegneri & Ingegneria a Firenze. A quarant'anni dall'istituzione della Facoltà di Ingegneria* (a cura di Andrea Corvi, Giovanni Frosali, Giuseppe Pelosi, Enio Paris e Alessandro Viviani), pubblicato sempre dalla casa editrice dell'Ateneo fiorentino – è stato presentato in una manifestazione tenutasi presso il Rettorato dell'Università di Firenze nel dicembre 2013.

È prevista infine, a chiudere la trilogia, la pubblicazione del testo *Onde elettromagnetiche* di Nello Carrara. Nello Carrara, le cui tracce sono ben presenti nel tessuto culturale della città di Firenze, ha ottenuto – insieme con Giovanni Sansone, Giovanni Michelucci, Paolo Fresco e Jean Todt – una delle poche lauree *honoris causa* in Ingegneria conferite dalla nostra Università.

Questo libro inaugura anche una collana di pubblicazioni associate alla rivista «Il Colle di Galileo». Ricordo che la rivista pubblica articoli in lingua italiana e inglese, esclusivamente su invito, per illustrare le attività principali nel campo della ricerca in Fisica che si svolgono in quegli Istituti con sede sulla storica collina di Arcetri: Dipartimento di Fisica e Astronomia, Istituto Galileo Galilei per la Fisica Teorica, Istituto Nazionale di Ottica e Osservatorio Astrofisico di Arcetri.

Desidero infine esprimere un sentito ringraziamento ai curatori del presente volume che contribuisce alla valorizzazione del patrimonio culturale del nostro Ateneo.



# Prefazione

*Roberto Casalbuoni, Giovanni Frosali, Giuseppe Pelosi*

Questo volume vuole rendere omaggio a Enrico Fermi per il periodo da lui trascorso a Firenze. Periodo breve ma sicuramente estremamente significativo nella sua vita scientifica.

La pubblicazione trae origine dai contatti che il Rettore della nostra Università, prof. Alberto Tesi, ha avuto con la Temple University (Philadelphia, Pennsylvania, USA) e che ha permesso il recupero delle note delle «Lezioni di Meccanica Razionale» che Fermi tenne a Firenze nel biennio 1924-1926. Le «Lezioni di Meccanica Razionale» furono raccolte da Bonanno Bonanni e Paolo Pasca, studenti di Fermi al predetto corso, e stampate dalla Litografia Tassini (via Cavour 29, Firenze). Nonostante questo libro fosse stato stampato a Firenze, non è stato possibile trovarne una copia nelle biblioteche dell'Università e nelle altre biblioteche di Firenze. Una lunga ricerca ci ha portato a trovarne una copia presso lo Special Collections Research Center della Temple University.

Queste note erano indirizzate prevalentemente agli studenti del biennio propedeutico per l'avviamento agli studi di Ingegneria dell'Università di Firenze. L'anno della pubblicazione, cioè il 1926, può essere solo desunto dalla dedica a mano esistente sulla copertina.

I temi affrontati da Enrico Fermi nelle sue lezioni includono la cinematica e la dinamica del punto, la cinematica e la statica dei sistemi rigidi, inclusa la statica di sistemi più in generale. Infine le lezioni contengono le equazioni di 'Lagrangia' e alcuni elementi di idromeccanica.

Abbiamo diviso questo libro in due parti, la prima dal titolo *Enrico Fermi, gli anni fiorentini* e l'altra contenente una copia anastatica delle «Lezioni di Meccanica Razionale», messe a disposizione dalla Temple University. Le due parti sono precedute da due contributi introduttivi: *Il contributo scientifico di Fermi* (di Roberto Casalbuoni e Daniele Dominici) e *Meccanica Razionale... «quæ per demonstrationes accurate procedit»* (di Franco Angotti, Giovanni Frosali e Paolo Maria Mariano).

La prima parte del libro *Enrico Fermi, gli anni fiorentini* è dedicata alla ricostruzione del periodo che Enrico Fermi ha trascorso a Firenze ed è articolata in quattro contributi. Tracce di questo periodo, importante ma non molto conosciuto, possono essere trovate anche nelle seguenti pubblicazioni:

- E. Segrè, *E. Fermi, Physicist*, University of Chicago Press, Chicago 1970 (edizione italiana di Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1971);
- L. Fermi, *Atoms in the Family. My life with Enrico Fermi*, University of Chicago Press, Chicago 1954 (edizione italiana di Arnoldo Mondadori Editore, Verona 1954);
- F. Cordella, A. De Gregorio, F. Sebastiani, *Enrico Fermi. Gli anni italiani*, Editori Riuniti, Roma 2001;
- W. Joffrain (a cura di), E. Fermi, *Elettrodinamica*, Ulrico Hoepli Editore, Milano 2006 (dattiloscritto del corso di Fisica Matematica dell'a.a. 1924-1925 tenuto da Enrico Fermi presso la Regia Università di Firenze).

**Fig. 1** – La copertina dell'edizione italiana della casa editrice Zanichelli del libro di Emilio Segrè – Premio Nobel per la Fisica nel 1959 – su Enrico Fermi.

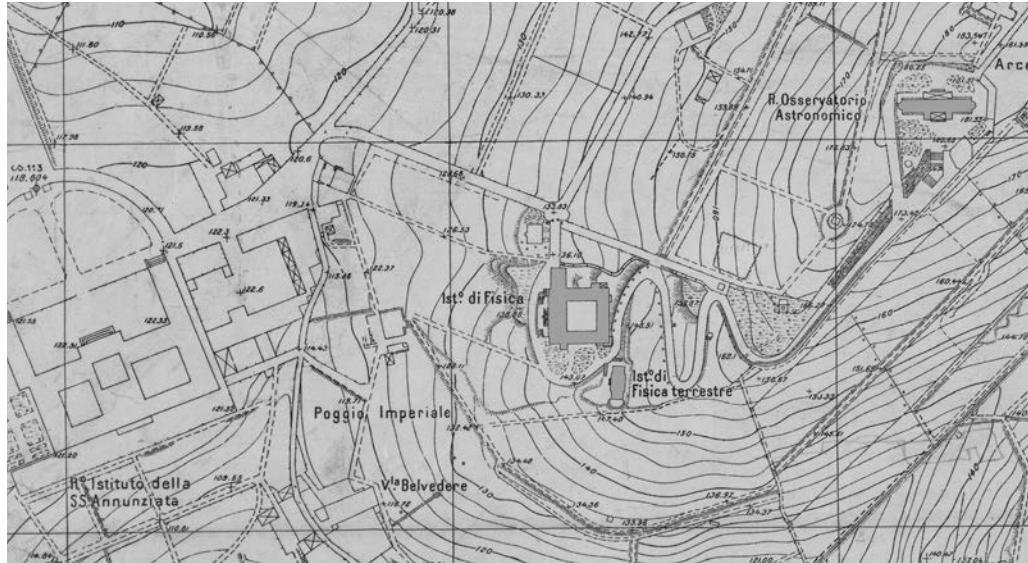


Una curiosa testimonianza del periodo fiorentino di Enrico Fermi la ritroviamo in un'intervista del 4 febbraio 1982 a Franco Rasetti di Judith R. Goodstein<sup>1</sup>, archivista presso l'Institute of Technology di Pasadena, California, in cui Rasetti racconta la sua temporanea convivenza con Enrico Fermi presso Arcetri a Firenze:

And at the side of the physics building was a little building that was completely unoccupied and unfurnished. There, I had only one room, furnished with a bed and a little oil stove to keep warm, so to speak, to some extent. At least it raised the temperature some five or six degrees above the outdoor temperature at night. And I lived alone there, with only the company of some scorpions. [Laughter] If you had something hanging on the wall, like a picture, when you turned it, behind it was a scorpion

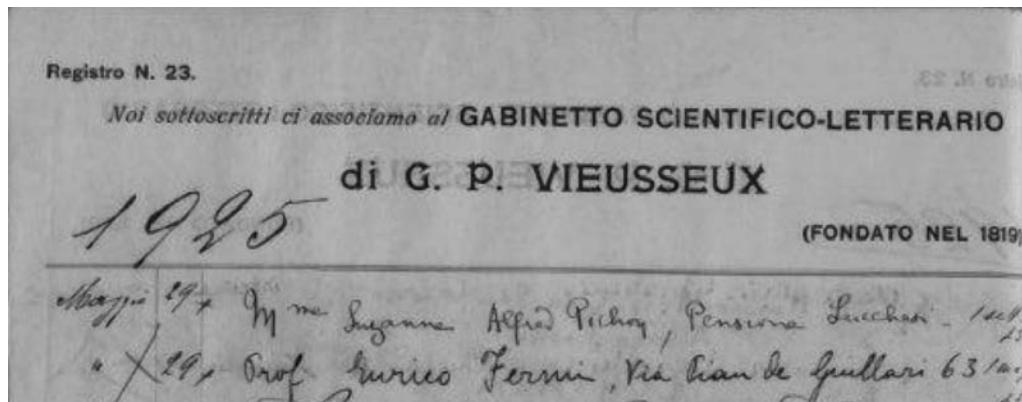
and a few spiders. So I lived there for two years. The third year I was there, Fermi came [at the end of 1924], and we kept company for two years. But in these two years he took my room in this little building, which later became the first building of the National Institute of Optics<sup>2</sup>.

**Fig. 2** – Carta dell'Istituto Geografico Militare 1913-1920. [Per cortesia dell'Archivio Storico del Comune di Firenze] Nella carta appare l'Istituto di Fisica, l'Istituto di Fisica Terrestre e il Regio Osservatorio Astronomico. L'Istituto di Fisica Terrestre è il nucleo dal quale ha avuto origine l'Istituto Nazionale di Ottica e, quindi, dovrebbe essere proprio l'edificio in cui sono stati ospitati Franco Rasetti e Enrico Fermi.



<sup>1</sup> J.R. Goodstein, *Conversando con Franco Rasetti*, traduzione di E. Piccio in «Sapere», giugno 2003 (versione integrale in *Physics in perspective*, vol. III, 2001).

<sup>2</sup> «E accanto all'edificio di fisica c'era un piccolo edificio che nessuno occupava e che era completamente privo di mobili. Lì ho avuto un'unica stanza, attrezzata con un letto ed una piccola stufa ad olio per scaldarsi, per così dire, in qualche modo. Almeno però riusciva ad alzare la temperatura di cinque o sei gradi rispetto alla temperatura esterna di notte. E ho vissuto da solo in quella stanza con l'unica compagnia di qualche scorpione. [Risata] Se avevi qualcosa attaccato alla parete, come un quadro, guardando dietro trovavi uno scorpione e qualche ragno. Dunque, ho vissuto lì per due anni. Il terzo anno in cui mi trovavo lì arrivò Fermi [alla fine del 1924] e ci siamo tenuti compagnia per due anni. Ma in questi due anni egli occupò la mia stanza in questo piccolo edificio, che in seguito divenne il primo edificio dell'Istituto Nazionale di Ottica».



Il primo contributo sugli anni fiorentini di Fermi ha per titolo *Enrico Fermi docente alla Regia Università degli Studi di Firenze*. Gli autori – Leonardo Lucci, Fioranna Salvadori e Stefano Selleri – hanno avuto la pazienza di ‘rovistare’ nell’Archivio Storico dell’Università di Firenze per ricostruire il periodo (relativo agli anni accademici 1924-1925 e 1925-1926) in cui Enrico Fermi era docente al biennio propedeutico per l’avviamento agli studi di Ingegneria, ma anche per ricercare nomi e curiosità.

Il secondo contributo è il ricordo di Nello Carrara (Firenze, 19 febbraio 1900-Firenze, 5 giugno 1993) – compagno di Enrico Fermi alla Scuola Normale di Pisa – in una conferenza intitolata *Ricordi di Fermi* e tenuta al Rotary Club di Firenze nel maggio del 1955, pochi mesi dopo, quindi, la scomparsa di Enrico Fermi, avvenuta nel novembre 1954.

Segue un contributo che ha per titolo *Enrico Fermi e la nascita dell’elettronica dei semiconduttori* (autori Giuseppe Pelosi e Massimiliano Pieraccini). Infine il quarto e ultimo contributo è di Carlo Franchetti – nipote di Enrico Fermi e già docente di Analisi matematica presso la Facoltà di Ingegneria dell’Università di Firenze – dal titolo *Una partita a tennis e tanti ricordi*.

Tutti i dati, comprese le affiliazioni di coloro che hanno contribuito alla stesura dei testi, sono ‘fotografati’ alla data di pubblicazione del libro.



**Fig. 3** – La firma di Enrico Fermi sul libro dei soci del Gabinetto Scientifico-Letterario G.P. Vieusseux di Firenze. Dopo la firma si legge di pugno di Fermi il domicilio a Firenze «Via Pian de Giullari 63/a». [Per cortesia del Gabinetto Scientifico-Letterario G.P. Vieusseux].

**Fig. 4** – Il triodo Philips tipo ‘E’ in produzione dal 1922 al 1926 circa, con cui Nello Carrara generò per la prima volta le ‘microonde’. Si deve proprio a Carrara l’introduzione del termine nella letteratura tecnico scientifica (N. Carrara, *The detection of microwaves*, Proceedings of the Institute of Radio Engineers, October 1932). [Per cortesia del Dipartimento di Ingegneria dell’Informazione dell’Università di Firenze]



# Il contributo scientifico di Fermi

Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici

Questo volume vuole rendere omaggio ad Enrico Fermi per il periodo da lui trascorso a Firenze nella nostra Università, periodo breve ma estremamente significativo per la sua vita scientifica. Da un lato nel periodo fiorentino Fermi concepì il lavoro sul gas monoatomico sfruttando il principio di esclusione di Pauli: questo lavoro ha originato la statistica di Fermi-Dirac che ha una importanza fondamentale non solo in tutta la fisica moderna, ma anche in settori più applicativi, quali i semiconduttori e di conseguenza la moderna elettronica, la supercondutività e così via. Dall'altro Fermi ritrovò Franco Rasetti, un maestro della fisica sperimentale, che poi raggiunse lo stesso Fermi a Roma negli anni successivi. La presenza di Rasetti tra i ‘ragazzi di via Panisperna’ fu di grande rilievo per tutte le vicende connesse con l’attività del gruppo nella Fisica Nucleare.

Ovviamente non era il caso di scrivere un contributo sulla vita e sulla attività scientifica di Fermi, date le numerose opere che sono state scritte su questi argomenti. Pareva però riduttivo non rendere un omaggio alla sua carriera scientifica. A questo scopo abbiamo pensato a un omaggio consistente nell’elencare tutte le espressioni usate in fisica, e non solo, che siamo stati in grado di reperire, che contengano in qualche forma il nome di Fermi. Queste espressioni sono poi state raggruppate per argomento. Come apparirà evidente dalla lettura, risulta molto difficile trovare un argomento di fisica in cui non appaia il nome di Fermi.

## Statistica di Fermi-Dirac

Questo è forse uno dei contributi più importanti di Fermi perché, come vedremo, questa statistica sta alla base di numerosissimi fenomeni fisici. Il lavoro di Fermi fu sviluppato mentre era a Firenze negli anni 1925-1926 e dette luogo a due articoli, uno in italiano<sup>1</sup> e l’altro in tedesco<sup>2</sup>, come usava all’epoca. Il lavoro di Fermi discuteva il comportamento di un gas monoatomico nell’assunzione che i singoli atomi soddisfassero il Principio di esclusione di Pauli<sup>3</sup>. Pauli, per spiegare certe proprietà delle righe di emissione atomiche, aveva postulato che gli elettroni atomici possedessero un nuovo numero quantico (in seguito riconosciuto come lo spin) e che in uno stesso stato quantico non potesse stare più di un elettrone. Questo comportamento era profondamente diverso da quello dei fotoni che, viceversa, possono convivere in numero arbitrario nello stesso stato quantico. La situazione fu chiarita da Dirac<sup>4</sup> che denominò la statistica delle particelle che obbediscono al Principio di Pauli «la

<sup>1</sup> E. Fermi, *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, «Rendiconti Lincei», 145, 1926.

<sup>2</sup> E. Fermi, *Zur Quantelung des Idealen Einatomigen Gases*, «Zeitschrift für Physik», 36, 902, 1926.

<sup>3</sup> W. Pauli, *Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeeman-Effekt*, «Zeitschrift für Physik», 31, 373, 1925.

<sup>4</sup> P.A.M. Dirac, *On the Theory of Quantum Mechanics*, «Proceedings of the Royal Society», A 112, 661, 1926.

statistica di Fermi» (poi ridenominata «statistica di Fermi-Dirac»). Come vedremo, la statistica di Fermi-Dirac ha importantissime conseguenze, dal collasso di una stella in una stella nana<sup>5</sup> al comportamento degli elettroni nei metalli<sup>6,7</sup>. Infatti molta della terminologia usata in questi settori fa riferimento a Fermi. Iniziamo con i seguenti termini.

### Fermioni

Fu Dirac, in un'una presentazione pubblica tenuta a Le Palais de la Découverte a Parigi, il 6 dicembre del 1945, a introdurre il nome di *fermioni* per le particelle che soddisfano il Principio di Pauli, e di bosoni per tutte le altre.

### Gas di Fermi

È un insieme di un gran numero di particelle fermioniche non interagenti, caratterizzato dalla loro densità, la temperatura e l'insieme degli stati energetici disponibili. In questo gas, allo zero assoluto, l'energia totale è maggiore della somma delle energie dello stato fondamentale delle singole particelle a causa del principio di esclusione che, impedendo alle particelle di stare nello stesso stato quantico, crea una interazione o una pressione che tiene i fermioni lontani gli uni dagli altri e in movimento. Questa pressione stabilizza le stelle a neutroni (costituite per la massima parte da neutroni) o le stelle nane (con all'interno un gas di elettroni) contro la compressione dovuta alla gravità, e che tende a trasformare la stella in un buco nero. Questo fenomeno può però avvenire se la massa iniziale della stella risulta sufficientemente grande.

### Temperatura di Fermi

Nel contesto del gas di Fermi si definisce la temperatura di Fermi, sotto la quale la pressione deriva esclusivamente dal Principio di Pauli e il gas è detto degenere. Questa temperatura dipende dalla massa dei fermioni e dalla densità degli stati energetici. Nel caso dei metalli è di molte migliaia di gradi Kelvin e quindi il gas di elettroni in un metallo a temperature ordinarie è un gas degenere.

### Energia di Fermi

La massima energia di un gas di fermioni a temperatura nulla è chiamata l'energia di Fermi.

### Superficie di Fermi

Se si considera un gas di fermioni a temperatura nulla nello spazio degli impulsi, l'insieme degli stati energetici occupati forma un volume (*di Fermi*) la cui superficie, definita dal valore dell'energia di Fermi, viene detta superficie di Fermi. La superficie è una sfera (*di Fermi*) nel caso di fermioni liberi.

### Vettore d'onda di Fermi

È il raggio della sfera di Fermi.

<sup>5</sup> R.H. Fowler, *On dense matter*, «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», A 87, 114, 1926.

<sup>6</sup> A. Sommerfeld, *Zur Elektronentheorie der Metalle*, «Naturwissenschaften», 15, 824, 1927.

<sup>7</sup> R.H. Fowler, L.W. Nordheim, *Electron Emission in Intense Electric Fields*, «Proceedings of the Royal Society», A 119, 173, 1928.

## Liquido di Fermi

È noto anche con il nome di liquido di Landau-Fermi. Rappresenta un modello teorico in cui i fermioni che costituiscono il liquido non sono non interagenti, come per il caso del gas di Fermi, ma sono presenti delle interazioni reciproche. Il modello è più realistico di quello rappresentato dal gas di Fermi e spiega perché molte delle proprietà degli elettroni interagenti sono simili a quelle descritte dal gas di Fermi, mentre altre proprietà ne differiscono.

## Livello di Fermi

Il livello di Fermi di un corpo rappresenta il potenziale elettrochimico per gli elettroni, ovvero il lavoro richiesto per aggiungere un elettrone al corpo stesso. Nel caso di un gas di elettroni non interagenti a temperatura zero coincide con l'energia di Fermi.

## Quasi livello di Fermi

Il termine quasi livello di Fermi viene usato nella fisica dello stato solido quando si abbia una variazione della popolazione elettronica di equilibrio delle bande di conduzione e di valenza causata da una forza esterna, ad esempio l'applicazione di un potenziale elettrico. In queste situazioni non si può ricorrere al concetto di livello di Fermi ma si possono introdurre dei quasi livelli che facilitano la descrizione. I quasi livelli di Fermi sono anche denominati «imref» che è la parola «fermi» scritta in ordine invertito.

## Arco di Fermi

Come abbiamo visto, l'energia di Fermi rappresenta la massima energia dei fermioni in un gas di Fermi a temperatura zero. Corrispondentemente la superficie di Fermi delimita la regione dello spazio degli impulsi che separa gli stati occupati dai fermioni (all'interno della superficie) e quella non occupata. Nel 1998<sup>8</sup> si è scoperto che nei cuprati superconduttori ci sono dei segmenti in cui la superficie di Fermi è disconnessa. Queste zone sono dette archi di Fermi. Il fenomeno è tutt'ora sotto studio.

## Fermi heap e Fermi hole

Letteralmente ‘mucchio’ e ‘lacuna’ di Fermi. È un fenomeno legato alla statistica di Fermi-Dirac che richiede che la funzione d'onda che descrive due fermioni cambi segno quando si scambiano tra loro tutti i numeri quantici dei due elettroni. La funzione d'onda complessiva ha una parte che descrive lo spin e una parte che descrive il moto orbitale dei due fermioni. Se la parte di spin non cambia segno per inversione, allora deve cambiare di segno la parte orbitale. Questo implica che la probabilità che i due fermioni siano vicini è piccola (hole). Nel caso opposto, cambia di segno la parte di spin e quindi la probabilità è massima quando i fermioni sono vicini (heap).

## Punto di Fermi

La grafite in fogli è un materiale conduttore ma, quando la si arrotola in modo da formare un piccolo cilindro, il flusso di elettroni esterni viene inibito e la grafite diventa un

<sup>8</sup> M. Norman *et al.*, *Destruction of the Fermi surface in underdoped high-Tc superconductors*, «Nature», 392, 157, 1998.

semiconduttore. Si forma un punto di transizione tra la banda di valenza e quella di conduzione che è detto punto di Fermi. Si parla di punto di Fermi anche in un contesto diverso (sebbene la spiegazione teorica sia simile). In un gas di Fermi, in presenza di un'interazione debole repulsiva, si ha una rottura della simmetria particella-antiparticella nel punto in cui l'energia della particella si annulla.

### Integrale completo e incompleto di Fermi

Sono i tipici integrali dei momenti della distribuzione di Fermi-Dirac. Nel caso completo, l'integrazione va tra zero e infinito:

$$F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \frac{t^n}{e^{t-x} + 1} dt$$

Mentre nel caso incompleto, tra un limite inferiore arbitrario,  $b$ , e infinito:

$$F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_b^{\infty} \frac{t^n}{e^{t-x} + 1} dt$$

### Derivata e trasporto di Fermi-Walker

Se si considera una curva con vettore tangente  $V$  di tipo tempo, con derivata covariante  $a$ , la derivata di Fermi-Walker<sup>9</sup> di un vettore  $X$  è definita dall'equazione:

$$\frac{D_F X}{dt} = \frac{DX}{dt} - \langle X, a \rangle V + \langle X, V \rangle a$$

L'annullarsi della derivata di Fermi-Walker permette di definire il corrispondente *trasporto* del vettore  $X$  lungo la curva con tangente  $V$ .

### Coordinate di Fermi

Sono delle coordinate adattate a una linea geodetica di tipo spazio. Preso un punto  $P$  sulla geodetica, si possono scegliere delle coordinate tali che la distanza spaziale è espressa dal tensore metrico euclideo e i simboli di Christoffel si annullano<sup>10</sup>.

### Il modello di Fermi, Pasta e Ulam

Nell'estate del 1953 Fermi, con i suoi collaboratori Pasta e Ulam<sup>11</sup>, iniziò lo studio numerico dell'approccio all'equilibrio termico di una corda vibrante. La corda, approssimata da una catena lineare di masse connesse da molle, era sottoposta a forze anarmoniche di tipo

<sup>9</sup> E. Fermi, *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali», 31, 184, 306, 1922; A.G. Walker, *On small deformation of sub-spaces of a flat space*, «Proceedings of the London Mathematical Society», 42, 90, 1932.

<sup>10</sup> E. Fermi, *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali», 31, 21, 1922.

<sup>11</sup> E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of the Nonlinear Problems*, I, Los Alamos Report LA-1940, 1955, later published in E. Segre (a cura di), *Collected Papers of Enrico Fermi*, vol. II, University of Chicago Press, Chicago 1965, p. 978; also reprinted in A.C. Newell (a cura di), *Nonlinear Wave Motion, Lecture Notes in Applied Mathematics*, vol. 15, AMS Providence, RI, 1974, also in D.C. Mattis (a cura di), *Many-Body Problems*, World Scientific, Singapore 1993.

cubico e quartico. Quello che gli autori si aspettavano era che il sistema andasse all'equilibrio termodinamico, come previsto dal teorema di equipartizione dell'energia. In particolare, eccitando uno dei modi possibili di vibrazione, gli autori si aspettavano che l'energia di eccitazione si distribuisse su tutti gli altri modi sino a dar luogo all'equilibrio termodinamico. Questo studio fu effettuato inizialmente sul computer MANIAC. I risultati furono sorprendenti: inizialmente tutto andava come previsto ma, dopo un migliaio di oscillazioni del periodo dello stato eccitato, il flusso di energia agli altri modi si invertiva e l'energia rifiuiva nel modo eccitato inizialmente con una efficienza del 98%. Dunque il sistema non si stabilizzava all'equipartizione ma presentava dei quasi-modi di oscillazione. Questo lavoro ha dato origine a una linea di ricerca estremamente fruttuosa e si può affermare che ha dato inizio a una nuova era della fisica associata ai problemi non lineari.

Contributi importanti sono stati dati da Fermi nel campo delle particelle elementari, a partire dalla teoria del decadimento beta.

### **Teoria di Fermi del decadimento beta**

Nel decadimento beta con un elettrone, un nucleo con  $Z$  protoni e numero di massa  $A$  si trasforma in un nucleo con  $Z + 1$  protoni, stesso numero di massa  $A$ , un elettrone e un antineutrino. La teoria di Fermi del decadimento beta dei nuclei si basa su una analogia con quella dell'interazione elettromagnetica, ovvero postula una interazione proporzionale al prodotto di due correnti cariche: una, la corrente adronica, trasforma un neutrone in un protone, l'altra, leptonica, crea una coppia elettrone antineutrino. È chiamata anche interazione a quattro fermioni perché coinvolge quattro particelle di spin 1/2. La costante di accoppiamento dell'interazione è una costante dimensionale,  $G_F$ , detta costante di Fermi. Il decadimento beta è una delle tante manifestazioni delle interazioni deboli, quindi la teoria di Fermi è la prima teoria delle interazioni deboli. Fermi fu anche il primo a utilizzare la teoria quantistica dei campi fermionici<sup>12</sup>.

### **La costante di accoppiamento di Fermi**

(Vedi anche Teoria di Fermi del decadimento beta) La costante di Fermi,  $G_F$ , può esser determinata sperimentalmente misurando la vita media di un neutrone libero. Il suo valore (in unità naturali, ovvero quelle in cui la costante di Planck e la velocità della luce sono pari a 1) è  $G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ . Nella teoria moderna delle interazioni deboli,  $G_F$  è correlata con la massa del bosone carico  $W$ , che viene scambiato dai fermioni interagenti.

### **Scala di Fermi**

È l'energia associata alla radice dell'inverso della costante di Fermi e quindi alla scala di energia delle interazioni deboli.

### **Funzione di Fermi**

È la funzione che compare nella distribuzione in energia dei raggi beta quando si includono le interazioni coulombiane tra l'elettrone e il nucleo del decadimento.

<sup>12</sup> E. Fermi, *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi "beta"*, «La Ricerca Scientifica», 4, 491, 1933; E. Fermi, *Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen*, «Zeitschrift für Physik», 88, 161, 1934; E. Fermi, *Tentativo di una teoria dei raggi  $\beta$* , «Nuovo Cimento», II, 1, 1934.

## Campo fermionico

Un campo che descrive particelle con spin semintero. Il caso più semplice è quello di Dirac, di spin  $\frac{1}{2}$  (in unità in cui la costante di Planck è uguale a 1) che descrive la funzione d'onda di un elettrone relativistico. La corrispondente teoria quantistica è una teoria a molte particelle che permette di descrivere la creazione e l'annichilazione delle stesse particelle.

## Transizioni di Fermi

Sono le transizioni descritte dalla teoria di Fermi ovvero quelle in cui gli stati nucleari iniziali e finali hanno la stessa parità e momento angolare. Un tipo diverso di transizioni sono quelle di Gamow-Teller.

## Modello di Fermi-Yang

Precursore delle teorie moderne delle interazioni fondamentali, è un modello in cui protone e neutrone sono elementari e i mesoni  $\pi$  sono pensati come composti da protone e neutrone<sup>13</sup>. La teoria si basa sul gruppo di simmetria dell'isospin SU(2). La generalizzazione al gruppo SU(3), ovvero basata su  $p$ ,  $n$  e la particella strana Lambda è il modello di Sakata<sup>14</sup> che a sua volta è il precursore del modello a quark di Gell Mann e Zweig<sup>15</sup>.

## Fermi

Unità di misura della lunghezza pari a  $1 \times 10^{-15}$  metri. Il termine fu coniato dal fisico Robert Hofstadter in un articolo del 1956 su «Reviews of Modern Physics».

Nel campo della meccanica quantistica e della fisica atomica, possiamo ricordare i seguenti termini.

## Risonanza di Fermi

Se si hanno due livelli vibrazionali simili e vicini in energia si produce un fenomeno di risonanza (di Fermi) per cui il modo vibrante di energia maggiore acquista energia, mentre quello di energia inferiore la perde e contemporaneamente il modo meno intenso acquista intensità mentre quello più intenso la perde. Il fenomeno è una diretta conseguenza del fenomeno del mescolamento in meccanica quantistica ed è stato studiato da Fermi<sup>16</sup>.

## Teorema di Fermi-Watson

È un risultato del 1953, che permette di approssimare una matrice di transizione tra stati quantistici (in una parte diagonale e una piccola correzione, entrambe esprimibili in termini della matrice di diffusione elastica)<sup>17</sup>.

<sup>13</sup> E. Fermi, C.N. Yang, *Are Mesons Elementary Particles?*, «Physical Review», 76, 1739, 1949.

<sup>14</sup> S. Sakata, *On a Composite Model for the New Particles*, «Progress of Theoretical Physics», 16, 6, 1956.

<sup>15</sup> M. Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, «Physics Letters», 8, 214, 1964; G. Zweig, *An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*, «CERN preprint 8182/Th 401», January 1964, unpublished.

<sup>16</sup> E. Fermi, *Üben den Ramaneffekt des Kohlendioxids*, «Zeitschrift für Physik», 71, 250, 1931.

<sup>17</sup> E. Fermi, *Lectures on Pions and Nucleons*, «Nuovo Cimento», suppl. 2, 17, 1955; K.M. Watson, *Some General Relations between the Photoproduction and Scattering of  $\pi$  Mesons*, «Physical Review», 95, 22, 1954.

## Regola d'oro di Fermi

Si tratta di una formula della Meccanica quantistica che permette di ricavare probabilità di transizioni atomiche o sezioni d'urto di diffusione all'interno della cosiddetta teoria perturbativa. La teoria perturbativa permette di calcolare grandezze misurabili come serie di potenze nella costante che regola l'interazione tra le particelle. Si ottiene quindi un risultato con una precisione via via più elevata con l'aumentare dei termini considerati della serie. Di solito con regola d'oro di Fermi si intende la formula al primo ordine perturbativo, perché in un suo lavoro<sup>18</sup> Fermi la indica come «Regola d'oro n. 2». La regola d'oro n. 1 per Fermi era la formula al secondo ordine perturbativo.

## Interazione di contatto di Fermi

È l'interazione tra l'elettrone e il momento di dipolo magnetico del nucleo presente quando c'è una densità finita di spin dell'elettrone sul nucleo, ovvero in orbitali s<sup>19</sup>.

## Fermi plateau

È l'intervallo di energie dove la perdita di energia di una particella che attraversa un mezzo smette di crescere all'aumentare dell'energia della particella.

## Modello di Thomas-Fermi

Si tratta di un modello semiclassico dell'atomo in cui ciascun elettrone si muove in un potenziale centrale che rappresenta l'attrazione del nucleo e l'effetto repulsivo medio degli altri elettroni. Il modello permette di determinare la distribuzione della densità di elettroni negli atomi pesanti utilizzando le conseguenze della statistica di Fermi-Dirac<sup>20</sup>.

## Screening di Thomas-Fermi

Il potenziale che emerge dall'approssimazione di Thomas-Fermi è un potenziale schermato, ovvero si riduce a distanze dell'ordine dell'inverso del vettore d'onda di Fermi. Quindi gli elettroni in un metallo schermano il potenziale generato da una carica esterna.

Nel campo della fisica nucleare sono stati molti i contributi di Fermi e non solo nel campo della teoria.

## Modello nucleare del gas di Fermi

È un modello del nucleo atomico in cui i nucleoni (protoni e neutroni) sono assimilati a un gas di Fermi (vedi Gas di Fermi). L'energia media per nucleone deriva così dal Principio di Pauli.

## Moto di Fermi

È il moto dei nucleoni all'interno del nucleo.

<sup>18</sup> E. Fermi, *Nuclear Physics*, A course given at the University of Chicago, University of Chicago Press, Chicago 1950.

<sup>19</sup> E. Fermi, *Üben die magnetischen Momente der Atomkerne*, «Zeitschrift für Physik», 60, 320, 1930.

<sup>20</sup> L.H. Thomas, *The calculation of atomic fields*, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 23, 542, 1927; E. Fermi, *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo*, «Accademia dei Lincei», 6, 602, 1927.

## Età di Fermi

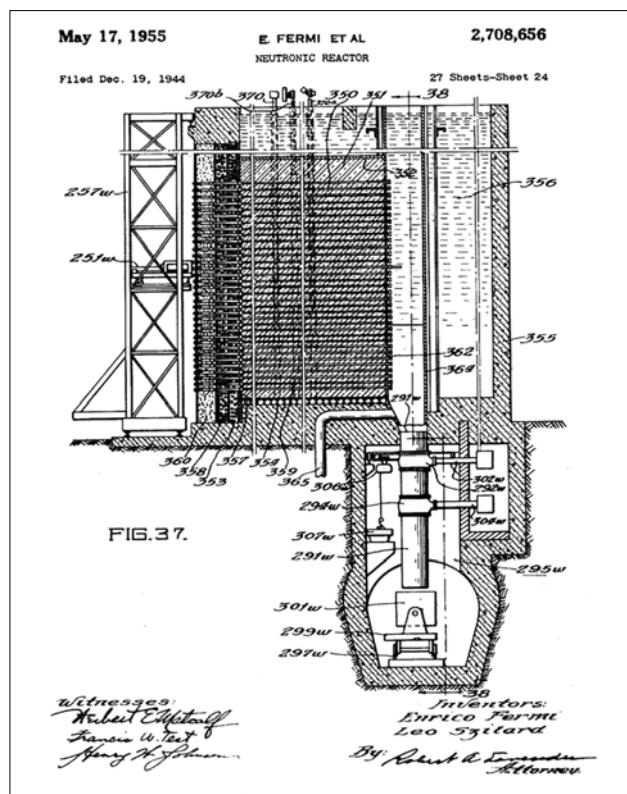
È una grandezza, delle dimensioni di un'area, introdotta da Fermi nello studio della diffusione dei neutroni nei moderatori. Rappresenta la distanza quadratica media che un neutrone percorre rallentando e perdendo una determinata quantità di energia.

## Fermio, Fm

Elemento chimico di numero atomico 100, è l'ottavo elemento della serie degli attinidi. Il fermio fu scoperto da un gruppo di scienziati guidati da Albert Ghiorso nel 1952 studiando il fallout prodotto dalla detonazione della prima bomba a idrogeno. Il corallo, contaminato a ground zero in un atollo delle isole Marshall nel Pacifico, fu spedito a Berkeley e analizzato. L'isotopo prodotto allora era il  $^{255}\text{Fm}$ , con una vita media di circa 20 ore. La scoperta fu tenuta segreta fino al 1955 a causa delle tensioni della guerra fredda. L'isotopo più stabile è il  $^{257}\text{Fm}$  con una vita media di circa 100.5 giorni.



**Fig. 1** – Il brevetto di E. Fermi e L. Szilard.



**Fig. 2** – Particolare del brevetto di reattore di Fermi-Szilard.

## Il reattore neutronico di Fermi-Szilard

Nel dicembre del 1944 Fermi e Szilard depositarono il brevetto (US 2,708,656) con il disegno del primo reattore a neutroni.

I seguenti due termini ricordano la facilità con la quale Fermi riusciva a calcolare l'ordine di grandezza dei problemi con i quali aveva a che fare o che gli venivano sottoposti.

## Il problema di Fermi

Fermi amava risolvere dei problemi sulla base di dati scarsi o inesistenti, basandosi su delle ipotesi ragionevoli e sfruttando l'analisi dimensionale. Inoltre proponeva problemi di questo tipo anche ai suoi studenti. L'idea era che, prima di affrontare un qualunque problema in maniera seria, fosse necessario fare una stima degli ordini di grandezza. Uno degli esempi più famosi è quello della stima della potenza della prima bomba atomica esplosa nel *Trinity test*. La stima di Fermi fu basata sull'os-

servazione della distanza percorsa da alcuni pezzetti di carta che fece cadere durante l'esplosione. La potenza stimata da Fermi fu circa 10 kiloton contro i 20 effettivi.

### Il paradosso di Fermi

Questo paradosso nasce da una stima effettuata da Fermi della probabilità di contatti tra la terra e popolazioni extraterrestri. Il paradosso nasce dal fatto che secondo la stima di Fermi, la Terra dovrebbe essere stata colonizzata o visitata da intelligenze extraterrestri, ma non ci sono evidenze che questo sia accaduto. I dati empirici su cui si basava il calcolo di Fermi sono i seguenti: il Sole è una stella giovane e ci sono miliardi di stelle più vecchie di vari miliardi di anni; alcune di queste stelle dovrebbero avere pianeti abitabili in cui, se la Terra è un pianeta tipico, dovrebbe essersi sviluppata una vita intelligente; alcune di queste civiltà dovrebbero avere sviluppato i viaggi interstellari. Il risultato di questa analisi era che la nostra galassia doveva essere stata completamente colonizzata nel giro di qualche decina di milioni di anni!

I risultati ottenuti da Fermi nei vari settori della Fisica sono stati così tanti e importanti che numerose istituzioni, strumenti di ricerca e scoperte sono state intitolate a suo nome. Qui ricordiamo in particolare i seguenti.

### Istituto Enrico Fermi

L'Istituto per gli Studi Nucleari (Institute for Nuclear Studies) di Chicago fu fondato nel 1945 come parte dell'Università di Chicago. Nel 1955 fu ridenominato Istituto Enrico Fermi per gli studi Nucleari (Institute Enrico Fermi for Nuclear Studies) in riconoscimento degli anni trascorsi da Fermi presso quell'Università e dei risultati raggiunti nel settore nucleare. Finalmente, nel 1968 questo Istituto è stato ridenominato Istituto Enrico Fermi (Enrico Fermi Institute, EFI).

### Fermilab

Noto anche come FNAL, abbreviazione per Fermi National Accelerator Laboratory. Il Laboratorio, fondato nel 1967 e intitolato a E. Fermi, si trova a Batavia, in Illinois, vicino a Chicago. Il laboratorio, il più importante negli Stati Uniti per quanto riguarda gli esperimenti di fisica delle particelle elementari, ha ospitato dal 1983 al 2011 il collider protoni antiprotoni Tevatron dove nel 1995 è stato scoperto il quark top. Il laboratorio continua a ospitare numerosi esperimenti con fasci di protoni, muoni e neutrini e studi di fattibilità di futuri acceleratori. Dal 2007 è diretto dalla Fermi Research Alliance, una impresa congiunta dell'Università di Chicago, dell'Illinois Institute of Technology e dell'University Research Association.



**Fig. 3** – Il Laboratorio Fermilab a Batavia, Illinois.

## Centro Fermi

Il Centro nasce nel 1999 con la trasformazione dello storico Istituto di Fisica sito in Via Panisperna a Roma, nel Museo della Fisica e Centro Studi e Ricerche Enrico Fermi. Il Centro ha una propria autonomia ed è sottoposto alla vigilanza del MIUR. Il Centro svolge attività di ricerca nel campo della fisica e promuove progetti interdisciplinari e cooperazioni internazionali.

**Fig. 4** – Il collisionatore TEVATRON al Fermilab.



Fig. 4 – Il collisionatore TEVATRON al Fermilab.

## Enrico Fermi Nuclear Generating Station

Si tratta di una centrale nucleare installata sulle rive del lago Erie vicino a Monroe in Michigan. Si tratta di due unità di cui la prima ha iniziato la sua attività nel 1963, mentre la seconda nel 1988.

## Centrale Nucleare Enrico Fermi

È una centrale nucleare installata a Trino Vercellese, in provincia di Vercelli. Fu installata nel 1964 ed è stata operativa sino al 1990, quando fu chiusa a seguito del referendum antinucleare del 1987.

## RA-1 Enrico Fermi

Il RA-1 è il primo reattore di ricerca costruito in Argentina nel 1957. È stato usato per la produzione di radioisotopi a scopo medico e industriale ed è servito per l'addestramento del personale delle due prime centrali nucleari argentine.

## Fermi Large Area Telescope

È il principale strumento del satellite Fermi Gamma Ray Space Telescope. Lanciato nel 2008, è una collaborazione internazionale finanziata da diverse agenzie scientifiche di Stati Uniti, Francia, Italia, Giappone e Svezia. Si tratta di un telescopio a raggi gamma di alta energia, nel range da 20 MeV a oltre 300 GeV.

## Fermi bubbles

Sono due grandi regioni, sopra e sotto il centro galattico, di emissione di raggi gamma scoperte nel 2010 dal Fermi Gamma Ray Space telescope e confermate dall'esperimento PLANCK. Queste regioni coincidono a bassa latitudine con la velatura già osservata dall'esperimento WMAP.

## FERMIAC

Si tratta di un calcolatore analogico, detto anche «carrello Montecarlo», che fa uso del metodo Montecarlo per l'integrazione numerica, sviluppato da Fermi per calcolare il percor-

so dei neutroni in vari sistemi nucleari. Il metodo Montecarlo fu usato per la prima volta da Fermi in questa circostanza, ma mai pubblicato. Fu sviluppato successivamente da Ulam e von Neumann.

Il nome di Fermi risulta associato anche ad alcuni oggetti della moderna tecnologia. Ad esempio:

### Nvidia Fermi

Si tratta della undicesima generazione di un processore grafico della Nvidia che costituisce l'introduzione alla microarchitettura Fermi (chip GF). È stato lanciato nel 2010.



**Fig. 5** – Il calcolatore analogico FERMIAC. Bradbury Museum, Los Alamos.

### Filtro di Fermi

È un filtro usato nei processori grafici che fa uso della distribuzione di Fermi-Dirac (vedi Statistica di Fermi-Dirac).

### Fermi Linux

È il nome generico delle distribuzioni Linux rilasciate dal Fermilab.

A Fermi sono stati dedicati anche alcuni premi quali:

### Enrico Fermi Award

È un premio rilasciato dal Dipartimento dell'energia (DOE) degli Stati Uniti a scienziati che abbiano contribuito alla sviluppo, uso o produzione dell'energia. Lo scienziato che lo riceve ottiene un contributo di 50000 Dollari US, un certificato di attestazione e una medaglia d'oro con l'effige di Fermi. Il premio è stato rilasciato per la prima volta nel 1956 a John von Neumann.

### Premio Enrico Fermi

Istituito nel 2001 dalla Società Italiana di Fisica (SIF) in occasione del centenario della nascita di Fermi. Viene rilasciato ogni anno a soci che abbiano onorato la fisica con le loro scoperte.



# **Meccanica Razionale...**

## **«quæ per demonstrationes accurate procedit»**

*Franco Angotti, Giovanni Frosali, Paolo Maria Mariano*

### **Note preliminari**

La pubblicazione delle «Lezioni di Meccanica Razionale», tenute da Enrico Fermi nell’Università di Firenze nei due anni accademici 1924-1925 e 1925-1926, e che costituiscono la seconda parte di questo volume, è un’occasione per riflettere sulla genesi e l’evoluzione della disciplina che è stata ed è una tappa essenziale nel processo formativo delle Scuole di Scienze e di Ingegneria.

Nell’Università di Firenze, istituita il 1 ottobre 1924, Fermi fu il primo docente di Meccanica Razionale. Prima di quella data il corso era tenuto presso l’Istituto di Studi Superiori Pratici e di Perfezionamento. Fermi tenne il corso per la prima volta agli studenti del biennio propedeutico agli studi d’Ingegneria che da quell’anno entrò a far parte della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Furono due studenti di Ingegneria a stilare gli appunti.

Certo Fermi aveva molti riferimenti per definire gli argomenti del corso, trattandosi di una disciplina classica sia per la Facoltà di Scienze sia per gli studi d’Ingegneria. Già nel 1865, infatti, al Politecnico di Milano, nel corso dei tre anni ai quali si accedeva dai bienni propedeutici, era obbligatorio l’insegnamento di Meccanica Razionale<sup>1</sup>. E nelle scelte di programma, come si vedrà scorrendo la seconda parte di questo volume, Fermi si mantenne nella tradizione.

Nel processo formativo degli ingegneri il corso di Meccanica Razionale è la prima introduzione alla formulazione e all’analisi rigorose di modelli matematici di fenomeni fisici. Il corso costituisce la base per i successivi studi che si affrontano in discipline di base dell’Ingegneria come la Meccanica Applicata alle Macchine, l’Idraulica e la Scienza delle Costruzioni. In quest’ultima, ad esempio, la modellazione del comportamento meccanico dei corpi deformabili permette di valutare le capacità di resistenza delle strutture ingegneristiche alle azioni che l’ambiente esercita su di esse, consentendo di fare valutazioni sulla sicurezza.

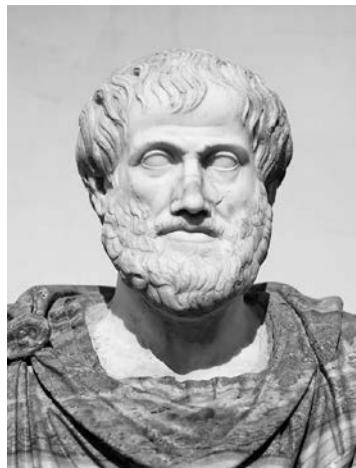
L’educazione alla costruzione di modelli di fenomeni fisici e alla loro analisi rigorosa è (e dovrebbe sempre essere) il tratto distintivo dell’organizzazione degli studi in Scienze e in Ingegneria. La Meccanica Razionale è il primo passo fondamentale nel percorso. Non è l’unico ma è cruciale, proprio perché iniziale: un’inevitabile base formativa.

### **Genesi di una disciplina**

‘Meccanica’, se intendiamo il termine come il sostantivo che indica una disciplina del sapere, è parola dal sapore antico. *Questioni meccaniche* è il più remoto testo pertinente no-

<sup>1</sup> C. Pirovano, G. Gardel, G.B. Stracca, *Il Politecnico di Milano 1863-1914*, Electa, Milano 1981.

**Fig. 1** – Ritratto di Aristotele (Stagira, 384 o 383 a.C.-Calcide, 322 a.C.), conservato a Palazzo Altaemps, Roma. Marmo, copia romana di un originale greco di Lisippo (330 a.C. ca.); il mantello in alabastro è un'aggiunta moderna. Dalla collezione Ludovisi.



to e ancora si dibatte se sia da attribuire ad Aristotele, ad Archita di Taranto<sup>2</sup> (Taranto, 428 a.C.-Mattinata, 360 a.C.), o se infine e più genericamente si possa solo affermare che sia stato scritto da qualcuno del Liceo ateniese per interpretare alcuni fenomeni nei termini della ‘filosofia naturale’ aristotelica<sup>3</sup>. Trentacinque questioni sono lì discusse: dal chiedersi perché tra due bilance di dimensioni differenti è la più grande a essere più precisa, o perché se lanciamo una pietra con una fionda riusciamo a mandarla più lontano di quanto riusciremmo a fare con il solo uso del braccio, al domandarsi la ragione per cui oggetti in un fluido in moto vorticoso tendano ad andare al centro dei vortici.

Di là dall’elenco specifico dei problemi affrontati, però, una questione rilevante è l’emergere già in questo

documento del tentativo di ridurre l’analisi di vari problemi ‘meccanici’, suggeriti dall’osservazione della natura, a tre schemi semplici<sup>4</sup>. L’essenza di questa idea – cioè la tendenza alla ‘riduzione’ delle descrizioni dei fenomeni ad aspetti essenziali, che appare in maniera embrionale nelle *Questioni meccaniche* – è stata ed è permanente nella disciplina. Tale tendenza è stata formalizzata da William of Ockham (Ockham, 1285-Monaco di Baviera, 1349) in ambito filosofico e a scopi più generali, ed è alla base dei tentativi di analisi dei fondamenti (quindi di assiomatizzazione) che caratterizzano la continua riorganizzazione e l’espansione del dominio della meccanica. La frontiera di tale dominio, comunque, non è d’immediata individuazione. Si può chiedere, infatti, cosa sia la meccanica (*μηχανική* l’originale parola greca, legata ai dispositivi manufatti, alla loro progettazione e alla loro analisi, contrapposte alla speculazione filosofica), quale ambito, cioè, si voglia delimitare con tale termine e anche quali siano i suoi metodi. L’idea comune, che appare in dizionari ed encyclopedie, è che la meccanica sia «lo studio del moto dei corpi», includendo in ciò anche l’equilibrio, cioè la statica intesa come un moto che lascia invariata nel tempo la posizione di un corpo.

## Ramificazioni

L’elenco dei problemi affrontati nelle *Questioni meccaniche* include casi che possono essere trattati considerando corpi rigidi – quelli per i quali, durante un generico moto, non si alterano le mutue distanze tra tutte le coppie di punti che li compongono – ma anche casi dove l’idea di corpi deformabili è prevalente: il fluido che appare nella discussione sui vortici. In tutti questi casi, l’analisi del comportamento meccanico – una locuzione in un certo senso gergale, questa – consiste nel tentativo di determinare le configurazioni che il corpo assume nel tempo come conseguenza dell’interazione con l’ambiente esterno. Le questioni ancillari coinvolte, però, sono differenti, tanto da spingere a distinguere due ambiti della ‘meccanica’, quella ‘dei corpi rigidi’ e quella ‘dei corpi deformabili’ (la prima è un sottoinsieme della seconda), così come differenti sono le difficoltà delle analisi in dipendenza delle

<sup>2</sup> T.N. Winter, *The mechanical problems in the corpus of Aristotle*, Digital Commons @ University of Nebraska – Lincoln, 2007.

<sup>3</sup> M.A. Coxhead, *A close examination of the pseudo-Aristotelian Mechanical Problems: The homology between mechanics and poetry as technē*, «Studies in History and Philosophy of Science», vol. 43, 2012, pp. 300-306.

<sup>4</sup> M. Schiefsky, *Structures of arguments and concepts of forces in the Aristotelian Mechanical Problems*, «Early Science and Medicine», vol. 14, 2009, pp. 43-67.



Fig. 2



Fig. 3

condizioni imposte da vincoli ai possibili moti. D'altra parte, si può anche avere la necessità di considerare anche ‘insiemi di corpi’, rigidi o deformabili che siano. Quando il numero dei corpi coinvolti è molto elevato – è il caso della descrizione ‘molecolare’ dei gas – le informazioni sul moto che si riescono a fornire hanno natura statistica. È questo l’ambito della ‘meccanica statistica’, che apre la strada alla giustificazione ‘corpuscolare’ dei fenomeni termici.

Hanno un ruolo cruciale anche le scale spaziali ove si sviluppano gli eventi analizzati e le velocità coinvolte. Dopo l’idea cruciale di Max Planck, per cui gli scambi di energia nei fenomeni di assorbimento della radiazione elettromagnetica avvengono in maniera discreta, proporzionale alla loro frequenza di oscillazione per il tramite di una costante universale (la costante di Planck, appunto), quando le dimensioni spaziali sono atomiche o subatomiche è d’uso parlare di ‘meccanica quantistica’. Così come l’impossibilità (almeno per ciò che finora appare noto) di superare la velocità della luce ha portato Albert Einstein (Ulma, 14 marzo 1879-Princeton, 18 aprile 1955) all’apertura del corpus della ‘meccanica relativistica’, descrizione macroscopica dell’universo, soprattutto nella sua versione ‘generale’ che interpreta la gravitazione in termini della curvatura dello spazio-tempo, con la conseguente perdita della distinzione tra luogo (lo spazio) e l’istante (il tempo) e la conseguente attenzione sull’evento in sé, senza ulteriori distinzioni.

Gli ambiti della meccanica sin qui tracciati sommariamente, però, non sono stanze separate di un unico edificio, quanto piuttosto s’intersecano spesso e ampliano il loro dominio proprio attraverso i risultati dell’intersezione. L’esempio più noto, ma non l’unico, quello che talvolta raggiunge anche i mezzi di comunicazione non specialistici a causa dell’esoticità, per così dire, dei risultati e del conseguente fascino, è il tentativo di unificazione tra le idee della meccanica quantistica e la descrizione della gravitazione che emerge nella relatività generale, tentativo che ha dato luogo a quella che è detta ‘teoria delle stringhe’, o anche delle ‘brane’, nelle sue più recenti manifestazioni.

Un altro esempio, forse meno emozionante e sicuramente meno pubblicizzato ma non privo di articolate conseguenze sia teoriche sia tecnologiche, è l’interazione tra la descrizione atomistica della materia e quella che è propria della meccanica dei corpi deformabili. Di quest’ultima è semplice avere una percezione intuitiva: si considera un corpo qualsiasi – un oggetto della comune percezione sensoriale, un corpo tangibile, quindi, a dimensioni maggiori di quelle atomiche e minori della scala dell’universo – in una qualche configurazione, che si prende come riferimento, e si cerca di determinare come cambi la forma del corpo rispetto a essa, a seguito dell’interazione con l’ambiente esterno. L’analisi conseguente implica scelte descrittive prima ancora di difficoltà analitiche e geometriche. Essa comincia con la selezione a priori di quelle caratteristiche materiali che appaiono avere un ruolo essenziale nel processo. In merito,

**Fig. 2** – Karl Ernst Ludwig Marx Planck (Kiel, 23 aprile 1858-Göttingen, 4 ottobre 1947).

**Fig. 3** – Max-Planck-Institut für Mikrostrukturphysik (Istituto Max Planck di Fisica Microstrutturale), Halle (Germania).

il formato tradizionale della meccanica dei corpi deformabili ha un approccio minimalista: si considera solo la regione di spazio che il corpo può occupare senza fornire alcuna informazione sull'architettura della materia a scale microscopiche. Ogni punto della regione occupata dal corpo è inteso come ‘elemento materiale’, un agglomerato indistinto di atomi.

La descrizione geometrica di un corpo nei termini della sola regione che occupa nello spazio determina quella delle interazioni tra parti distinte del corpo stesso e con l’ambiente esterno. Tali interazioni, suddivise in azioni di volume e di superficie, soddisfano relazioni – le equazioni di bilancio – che possono essere postulate a priori o dedotte da principi più generali<sup>5</sup>.

Solo in seguito, nell’assegnare le funzioni di stato, dette anche ‘relazioni costitutive’, si forniscono informazioni su quelli che si ritiene siano gli aspetti essenziali della tessitura del materiale che compone il corpo. Sono gli esperimenti a suggerirle, ma per quanto precisi e per quanto numerosi essi siano, non possono coinvolgere tutti i casi possibili. C’è quindi una certa arbitrarietà nella loro assegnazione, ristretta dai vincoli imposti dalla seconda legge della termodinamica e dalla richiesta che la struttura delle leggi fisiche debba essere invariante rispetto a classi differenti dei modi che abbiamo di osservare i fenomeni, quindi rispetto a classi di cambiamenti di osservatore. Quello che stabilisce un legame con la descrizione atomistica della materia è il chiedersi come quest’ultima possa giustificare le funzioni di stato, eminentemente empiriche, che sono adottate negli schemi continui.

Fu Augustin-Louis Cauchy a considerare per primo la questione, tentando di interpretare in termini atomistici le relazioni costitutive dell’elasticità lineare, considerando un reticolo di punti massa connessi da molle<sup>6</sup>. Per i materiali cristallini, un essenziale elemento

chiarificatore della questione è quanto chiamiamo legge di Cauchy-Born<sup>7</sup>. Dei due, che operarono in tempi e luoghi diversi, Cauchy ipotizzò coincidenza tra gli spostamenti atomici e quelli macroscopici nella descrizione alla scala del continuo. Più tardi, Max Born (Breslau, 11 dicembre 1882-Göttingen, 5 gennaio 1970) presuppose che i vettori che generano il reticolo periodico degli atomi di un cristallo deformato si ottengono dalla configurazione di riferimento del cristallo stesso per il solo tramite della deformazione macroscopica: s’immagina quindi che il cristallo si deformi in maniera omogenea.

Per reticolli bidimensionali di punti massa connessi da molle, si è mostrato in maniera rigorosa che la legge di Cauchy-Born è valida per un insieme aperto di parametri – questi sono le distanze tra i punti massa nelle configurazioni di equilibrio e i

valori della costante elastica delle molle – mentre perde validità per un altro insieme aperto di parametri in corrispondenza del quale vi sono forti oscillazioni nelle configurazioni di equilibrio<sup>8</sup>. D’altra parte, i reticolli cristallini sono costituiti da atomi che sono sistemi piut-

<sup>5</sup> Quest’ultima è la strada preferibile perché costituisce uno strumento adatto alla determinazione delle equazioni di bilancio nei casi non tradizionali in cui si tiene conto di maggiori dettagli nella descrizione di un corpo.

<sup>6</sup> I. Stackgold, *The Cauchy relations in a molecular theory of elasticity*, «Quarterly of Applied Mathematics», vol. 8, 1950, pp. 169-186.

<sup>7</sup> M. Born, K. Huang, *Dynamic theory of crystal lattices*, Oxford University Press, Oxford 1954.

<sup>8</sup> G. Friesecke, F. Theil, *Validity and failure of the Cauchy-Born hypothesis in a two-dimensional mass-spring lattice*, «Journal of Nonlinear Science», vol. 12, 2002, pp. 445-478.



**Fig. 4** – Augustin-Louis Cauchy (Parigi, 21 agosto 1789-Sceaux, 23 maggio 1857).

tosto complessi. Il guardarli come punti massa è una semplificazione di natura modellistica, che può trovare ragionevole giustificazione nel fatto che a temperatura zero la distribuzione di un insieme canonico degenera e si concentra sui minimi (discreti) dell'energia potenziale – un risultato della meccanica statistica. Inoltre, se si tiene conto del fatto che gli stati elastici di equilibrio corrispondono in genere a minimi locali dell'energia, si può mostrare che, per appropriate scelte della cella unitaria del reticolo cristallino, la legge di Cauchy-Born è sempre valida per cristalli deformati in maniera elastica<sup>9</sup>. L'idea su cui essa si fonda si è mostrata anche utile in alcuni aspetti dell'analisi del comportamento meccanico di alcune strutture biologiche, di là quindi dall'ambito dei cristalli.

La legge di Cauchy-Born non è però il solo collegamento tra le descrizioni continue e corpuscolari della materia, tra quei due ambiti, quindi, della meccanica a esse pertinenti. Un altro aspetto essenziale è, ad esempio, il tentativo di trovare in maniera rigorosa il limite dell'equazione di Boltzmann (Ludwig Boltzmann: Vienna, 20 febbraio 1844-Duino, 5 settembre 1906) al crescere del numero delle molecole cui si riferisce. L'equazione descrive, infatti, l'evoluzione nel tempo della funzione di distribuzione delle velocità di un insieme di  $N$  molecole dotate di massa, che possono collidere l'una con l'altra, in modi differenti, specificati di volta in volta nelle analisi particolari<sup>10</sup>.

Possiamo elencare relazioni evidenti tra la meccanica dei continui e gli schemi quantistici a molti corpi, connessioni desiderabili perché questi ultimi non contengono parametri empirici. Tuttavia, la loro complessità richiede il ricorso ad approssimazioni per nulla banali e che anche tengono conto di sistemi di elettroni disomogenei, la correlazione è quindi con le descrizioni subatomiche. Il metodo di Thomas-Fermi<sup>11</sup> (1927), valido quando le variazioni spaziali della lunghezza d'onda di de Broglie sono piccole, e la semplificazione di Slater<sup>12</sup> nell'equazione di Hartree-Fock<sup>13</sup> sono in quest'ottica. L'ambito è ampliato dalla teoria di Walter Kohn e Lu Jue Sham<sup>14</sup>. Quest'ultima è basata sulla scelta di un'energia non locale nello spazio ma il potenziale di scambio in cui sono inclusi tutti gli effetti d'interazione tra i molteplici corpi cui si riferisce l'energia – si tratta sempre di sistemi quantistici coinvolgenti molti corpi – ha natura locale: la sua densità, calcolata in un punto, dipende solo dallo stato locale e non da quelli di punti distanti. Se sono verificate condizioni appropriate, l'equazione che emerge dalla variazione prima dell'energia considerata da Kohn e Sham ammette soluzione localmente unica che può essere adeguatamente approssimata tramite una versione

<sup>9</sup> W.E. P. Ming, *Cauchy-Born rule and the stability of crystalline solids: static problems*, «Archive for Rational Mechanics and Analysis», vol. 183, 2007, pp. 241-297.

<sup>10</sup> W. E. P. Ming, *Cauchy-Born rule and the stability of crystalline solids: dynamic problems*, «Acta Mathematica Sinica, English Series», vol. 529, 2007, pp. 529-550.

<sup>11</sup> Per una descrizione dei problemi inerenti il limite dell'equazione di Boltzmann quando il numero di particelle cresce all'infinito si veda L. Saint-Raymond, *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*, «Lecture Notes in Mathematics», vol. 1971, Springer, Berlino 2009.

<sup>12</sup> Llewellyn Hilleth Thomas ed Enrico Fermi considerano gli elettroni di un atomo come un gas di fermioni interagenti per il tramite di un potenziale che soddisfa l'equazione di Poisson non omogenea. Il modello è alla base della teoria funzionale della densità (si veda in merito E.H. Lieb, *Thomas-Fermi and related theories of atoms and molecules*, «Reviews of Modern Physics», vol. 53, 1981, p. 603).

<sup>13</sup> La semplificazione di Slater consiste nell'esprimere la funzione d'onda di un sistema di  $N$  particelle interagenti nei termini di un determinante le cui componenti sono funzioni d'onda di singola particella, tra loro ortogonali rispetto alla metrica nello spazio infinito-dimensionale in cui sono scelte.

<sup>14</sup> Il metodo proposto da Duglas Rayner Hartree (Cambridge, 27 marzo 1897-Cambridge, 12 febbraio 1958) e Vladimir Aleksandrovich Fock (San Pietroburgo, 22 dicembre 1898-San Pietroburgo, 27 dicembre 1974) permette di approssimare la funzione d'onda di un sistema quantistico composto di molti corpi nel suo stato stazionario. In particolare, per gli atomi s'ipotizza nel metodo che la funzione d'onda corrisponda a una singola funzione di stato di configurazione, cioè una combinazione di determinanti di Slater, con numeri quantici ben definiti, tale che il livello di energia non corrisponda necessariamente a un minimo.

<sup>15</sup> W. Kohn, J.L. Sham, *Self-consistent equations including exchange and correlation effects*, «Physical Review», vol. 140, 1965, pp. A1133-A1138.

**Fig. 5** – Llewellyn Hilleth Thomas (Londra, 21 ottobre 1903-Raleigh, 20 aprile 1992).



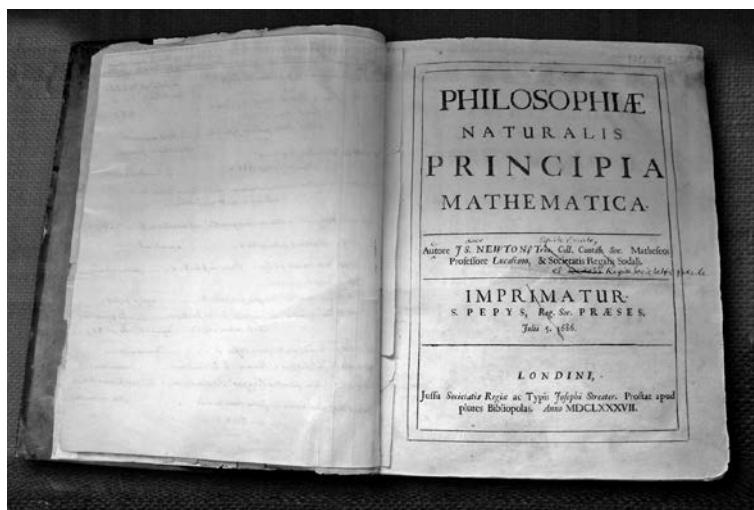
si sviluppa lo studio della meccanica, sempre che quest'ultima non si voglia considerare, per lo meno per i suoi aspetti teorici, come una parte integrante della matematica stessa.

appropriata della legge di Cauchy-Born<sup>15</sup>. In questo modo il legame tra descrizioni atomistiche e quelle continue della materia riappare.

Il dominio della meccanica ha, quindi, frontiere per così dire frastagliate e mobili. S'interseca con l'Ingegneria in tutte le sue forme, meccanica (relativa alle macchine; non confonda l'identità terminologica), civile (principalmente nell'ambito strutturale), elettronica (a proposito della descrizione dei materiali usati per la realizzazione degli strumenti elettronici e dell'influenza sul loro comportamento dei fenomeni elettromagnetici), con la fisica teorica, con quella sperimentale, perfino con la medicina (l'ortopedia è infarcita di meccanica, ad esempio), e poi, soprattutto, l'intero corpus della matematica. La relazione con la matematica ha uno statuto speciale che coinvolge principalmente i metodi con cui

## Questioni di metodo

Nella *praefatio ad lectorem* dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 25 dicembre 1642-Londra, 20 marzo 1727) ricordava che i suoi predecessori distinguevano la meccanica in «razionale» (*rationalem*), che procede per mezzo di dimostrazioni rigorose (*quae per demonstrationes accurate procedit*), espresse in termini matematici, e «pratica» (*practicam*), che riguarda le arti manuali, quelle che hanno lo scopo di costruire macchine e utensili di ausilio alla vita dell'uomo.



**Fig. 6** – Copia di proprietà di Newton dei suoi *Principia*, con correzioni manoscritte per la seconda edizione.

Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut Geometria ad magnitudinem, Mechanica ad motum vulgo reseratur. Quo sensu Mechanica rationalis erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunq; resultant, et virium quæ ad motus quoscunq; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. [...] Nos autem non Artibus sed Philosophiaæ consulentes, deq; potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elasticam, resistantiam Fluidorum et ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant<sup>16</sup>.

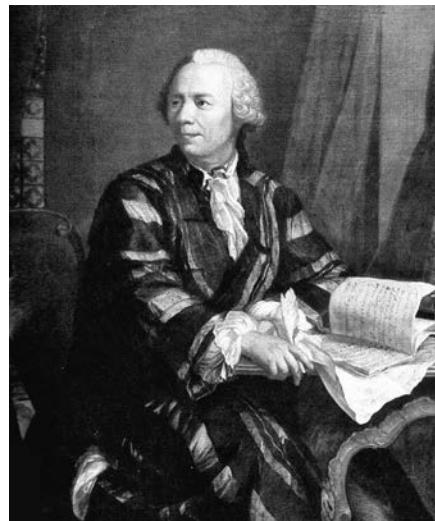
<sup>15</sup> W.E, J. Lu, *The Kohn-Sham equations for deformed crystals*, «Memoirs of the American Mathematical Society», vol. 221, 2013, p. 97.

<sup>16</sup> «Poiché le arti manuali sono interessate soprattutto ai corpi in movimento, accade di solito che la geometria sia riferita alla grandezza e la meccanica al moto. In questo senso la meccanica razionale sarà la scienza dei moti che risultano da forze qualsiasi, e delle forze richieste da moti qualsiasi, esattamente esposta e dimostrata. [...] Noi invece esaminiamo non le arti ma la filosofia, e scriviamo non sulle potenze manuali ma su quelle naturali, e trattiamo soprattutto quelle cose che riguardano la gravità, la leggerezza, la forza elastica, la resistenza dei flu-

Newton affrontava la discussione dei problemi meccanici essenzialmente in termini geometrici. Si dovette aspettare il 3 settembre 1750, sessantatré anni dopo la pubblicazione dei *Principia*, perché fosse presentata una formulazione in termini differenziali della seconda legge del moto, quella oggi utilizzata, che apparve in un articolo di Leonhard Euler, che latinizziamo in Eulero, dal titolo *Découverte d'un nouveau principe de mécanique*, letto nell'Accademia berlinese il 3 settembre 1750 e pubblicato due anni dopo<sup>17</sup>.

La legge del momento della quantità di moto, che non è presente in maniera esplicita nei *Principia* di Newton, apparve attraverso le riflessioni di Jakob Bernoulli (Basilea, 27 dicembre 1654-Basilea, 16 agosto 1705), esposte in maniera completa in un articolo del 1703<sup>18</sup>.

I *Principia*, comunque, pur con mancanze di sufficienti motivazioni fisiche o non concordanza di previsioni con i dati, come nel caso dei moti lunari, evidenziarono problemi e tecniche, suggerirono una strada, influenzarono in maniera decisiva lo sviluppo del pensiero scientifico e aprirono essenzialmente il percorso lungo il quale si è sviluppata in maniera sistematica la meccanica razionale. Che il campo fosse vasto era già chiaro dal tempo dei greci, ma il punto di vista di Newton apriva nuovi territori sia nelle norme espressive di presentazione dei concetti, sia nelle tecniche e nei problemi matematici correlati che emergivano. Che il linguaggio della meccanica nel suo sviluppo teorico dovesse essere analitico e geometrico apparve esplicito già nel titolo del trattato di meccanica<sup>19</sup> che Eulero diede alle stampe nel 1736, ma che aveva completato due anni prima, ventisette, nel suo primo periodo a San Pietroburgo<sup>20</sup>. L'aspetto razionale dell'approccio alla meccanica, anzi proprio il segno di considerare la Meccanica Razionale come vera e propria disciplina, fu enfatizzato più tardi da Auguste Comte nel *Cours de philosophie positive*, 1830-1842, sulla cui copertina l'autore si qualificava come «ancien élève de l'École Polytechnique, répétiteur d'analyse transcendante et de mécanique rationnelle»<sup>21</sup>. Comte divide la matematica in due classi distinte, l'una astratta, che per lui coincide con il *calculus* sebbene inteso esplicitamente nel suo senso più ampio, l'altra che si divide tra la geometria e la meccanica razionale. Quest'ultima viene a tergo della geometria nel *Cours*, perché le idee geometriche possono svilupparsi in manie-



**Fig. 7** – Leonhard Euler (Basilea, 15 aprile 1707-San Pietroburgo, 18 settembre 1783) in un ritratto di Jakob Emanuel Handmann.

idi e le forze di ogni genere, sia attrattive sia repulsive»: I. Newton, *Principi matematici della filosofia naturale*, a cura di A. Pala, UTET, Torino 1965.

<sup>17</sup> L. Euler, *Découverte d'un nouveau principe de mécanique*, «Mémoires de l'académie des sciences de Berlin», vol. 6, 1752, pp. 185-217, in *Opera omnia*, serie II, vol. 5, pp. 81-108.

<sup>18</sup> J. Bernoulli, *Démonstration générale du centre de balancement ou d'oscillation tirée de la nature du levrier*, «Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris», 1703, pp. 78-84, in *Opera Mathematica Varia*, vol. 2, pp. 930-936.

<sup>19</sup> L. Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, auctore Leonhardo Eulerio, Academiæ Imper. scientiarum membro et matheseos sublimioris professore, Tomus I, Petropoli, ex typographia Academiæ Scientiarum, 1736. Ristampato in: Leonhardi Euleri Opera Omnia, Lipsiæ et Berolini, typis et in ædibus B.G. Teubneri, 1912.

<sup>20</sup> Per un'analisi storica dello sviluppo della meccanica e della matematica tutta nel periodo da Newton a Eulero si veda M. Giaquinta, *La forma delle cose*, vol. II: *Il calcolo da Leibniz a Newton a Eulero e Lagrange e un po' oltre*, Edizioni di Storia e Letteratura, Roma 2014.

<sup>21</sup> Si veda <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k76267p/f548.image.r=cours%20de%20philosophie%20positive%20m%C3%A9canique%20rationnelle.langEN> (consultato il 30 giugno 2014).

ra distinta da considerazioni di tipo meccanico, mentre nell'analisi dei problemi meccanici emergono costantemente questioni geometriche, fosse solo perché la forma di un corpo influenza sul moto dello stesso, con le naturali complicazioni che sopraggiungono quando un corpo cambia la propria forma durante un moto<sup>22</sup>. E sebbene la meccanica possa essere fondata puramente su basi analitiche e geometriche come disciplina astratta, è nel contatto con il mondo fisico, con la capacità d'osservazione, quindi, che essa trova la sua ragion d'essere. È questo il senso di un passaggio del *Cours* che è esplicito in merito<sup>23</sup>:



**Fig. 8** – Isidore Marie Auguste François Xavier Comte (Montpellier, 19 gennaio 1798-Parigi, 5 settembre 1857).

S'il était possible de constituer entièrement la science de la mécanique d'après de simples conceptions analytiques on ne pourrait se représenter comment une telle science deviendrait jamais vraiment applicable à l'étude effective de la nature. Ce qui établit la réalité de la mécanique rationnelle, c'est précisément, au contraire, d'être fondée sur quelques faits généraux, immédiatement fournis par l'observation [...]<sup>24</sup>.

Emergono quindi, sin dai primi trattati che affrontano la natura della meccanica, questioni che sono tuttora attuali perché riguardano la natura della disciplina e i suoi modi di espressione.

- La Meccanica Razionale si occupa della descrizione del mondo fisico: essa esprime modelli di fenomeni naturali. E un modello non è altro che una 'rappresentazione' del fenomeno o della classe di fenomeni cui si riferisce, il tentativo di enucleare e descrivere i meccanismi essenziali attraverso cui essi si sviluppano, per avere uno strumento che abbia capacità predittive e che sia costruito restringendo le ipotesi (ancora il punto di vista di Ockham), con la consapevolezza di non riuscire a cogliere consapevolmente le cause prime, esterne all'ambito del fenomeno stesso. Un'analogia presentata da Truesdell chiarisce il punto:

I turn to a theory of modest generality, which is just what mechanics is. The picture of nature as a whole given us by mechanics may be compared to a black-and-white photograph: It neglects a great deal, but within its limitations, it can be highly precise. Developing sharper and more flexible black-and-white photography has not attained pictures in color or three-dimensional casts, but it serves in cases where color and thickness are irrelevant, presently impossible to get in the required precision, distractive from the true content<sup>25</sup>.

<sup>22</sup> M.A. Comte, *Cours de philosophie positive*, Quinzième Leçon, tomo I, Rouen/Bachelier, Parigi 1830, p. 539.

<sup>23</sup> Ivi, pp. 542-543.

<sup>24</sup> «Se fosse possibile costruire del tutto la scienza della meccanica da mere concezioni analitiche non si capirebbe come una simile scienza possa diventare davvero applicabile allo studio effettivo della natura. Ciò che stabilisce la realtà della meccanica razionale è precisamente, al contrario, il suo essere fondata su alcuni fatti generali, immediatamente forniti dall'osservazione [...].»

<sup>25</sup> «Torno a una teoria di modesta generalità che riguarda la natura della meccanica. La descrizione della natura come un tutto, che la meccanica fornisce, può essere paragonata a una fotografia in bianco e nero: trascura molto ma, entro le sue limitazioni, può essere molto precisa. Sviluppare fotografie in bianco e nero più nitide e flessibili non ci permette di ottenere immagini a colori o calchi tridimensionali, ma è utile nei casi in cui colore e spessore sono irrilevanti, o sia al momento impossibile raggiungere la precisione richiesta, o perfino quest'ultima distrugga dal vero contenuto [dalla vera essenza dei fenomeni, n.d.t.]: C.A. Truesdell, *Six lectures on modern natural philosophy*, Springer Verlag, Berlino 1966, pp. 1-2.

- Un modello è suggerito da dati empirici, si basa su di essi, ma va di là di essi perché a esso è richiesta capacità predittiva che può anche suggerire nuovi esperimenti, ritornando all'origine empirica e influenzandola. L'interpretazione dei dati, infatti, presuppone in qualche grado una visione teorica sulla classe di fenomeni analizzati.
- I modelli meccanici si esprimono attraverso l'analisi matematica e la geometria perché esse sono strutture linguistiche che permettono di fornire al 'contempo' informazioni qualitative e quantitative, le uniche strutture linguistiche di tal guisa a nostra disposizione. Il calcolo numerico è di essenziale ausilio quando sia particolarmente arduo – se non in pratica impossibile – trovare soluzioni esplicite di problemi particolari. Le analisi numeriche, però, si basano su approssimazioni che sono aggiuntive a quelle che determinano il modello stesso (la foto in bianco e nero richiamata da Truesdell) e sulla cui influenza sul significato fisico dei risultati si deve avere chiaro controllo. Quest'aspetto rimarca la necessità di un'attenta analisi proprio del significato fisico degli elementi che costituiscono un dato modello o la classe cui appartiene, necessità peraltro sempre chiaramente evidenziata in tutti gli scritti classici.
- Comunque, l'analisi dei fondamenti di specifici modelli meccanici e soprattutto d'interi settori della meccanica stessa non ha solo natura strumentale, al fine di costruire approssimazioni che si possano considerare accettabili. Essa è uno strumento essenziale per indicare vie di sviluppo di modelli esistenti e *soprattutto* per costruirne di nuovi, utili sia per la rappresentazione di fenomeni inattesi che possono emergere nell'attività sperimentale corrente, sia per la descrizione del comportamento di materiali prodotti dall'industria per specifiche esigenze tecnologiche. Un esempio di analisi dei fondamenti, elementare in un certo senso ma foriero di conseguenze non banali, può essere già estratto dal *Cours* di Comte quando egli discute della natura delle forze:

Ainsi les forces ne sont autre chose, en mécanique, que les mouvements produits ou tendant à se produire; et deux forces qui impriment à un même corps la même vitesse dans la même direction sont regardées comme identiques, quelque diverses que puisse être leur origine [...]<sup>26</sup>.

L'idea moderna che le forze non siano enti primitivi, ma rappresentino interazioni che sono definite dalla potenza che sviluppano nel moto di un corpo, e che può trovare echi non evanescenti nel passo di Comte, permette di descrivere in maniera naturale interazioni non propriamente rappresentate da 'vettori forza', quelli che sono pertinenti alla meccanica del punto materiale, o di classi di corpi estesi quali quelli rigidi o quelli rappresentanti nello schema più semplice della meccanica dei corpi deformabili. È questo quanto accade nella descrizione della meccanica dei cristalli liquidi, dei quasicristalli, di classi di polimeri e così via. Altri esempi delle conseguenze che emergono dalle analisi dei fondamenti della meccanica potrebbero essere fatti. Già quello appena proposto, però, contiene gli elementi essenziali che appaiono nella discussione.

- L'analisi dei fondamenti della meccanica tutta, o di suoi settori, serve inoltre a chiarire e ad approfondire il legame tra l'essenza fisica dei fenomeni considerati, la descrizione matematica degli stessi e la necessità degli strumenti analitici e/o geometrici utilizzati da chi esprime e/o analizza un modello. La questione è essenziale. Bisogna fare attenzione a distinguere con la dovuta cura tra l'interesse per la struttura formale dei modelli meccanici e il lavoro di analisi dei loro fondamenti. La confusione indurrebbe in quel tipo

<sup>26</sup> «In meccanica le forze non sono altro che i movimenti prodotti, o tendenti a prodursi [virtuali, n.d.t.], e due forze che imprimono a uno stesso corpo la stessa velocità nella stessa direzione sono considerate identiche, qualunque possa essere la loro origine [...]: Comte, *Cours de philosophie positive*, cit., p. 544.

di errore in cui incorrerebbe chi confondesse, ad esempio, la classe di deformazioni ammissibili per un corpo (che ha un preciso carattere connesso al materiale di cui il corpo è composto) con quella dei cambiamenti di osservatore (che, invece, riguardano i sistemi di riferimento nello spazio ambiente), e sarebbe un errore caratteristico di chi orecchia distrattamente la meccanica piuttosto di avere di essa comprensione appena sufficiente.

### L'insegnamento della Meccanica

Le questioni metodologiche e di fondamento sollevate nei paragrafi precedenti riguardano sia la ricerca sia la didattica, e quest'ultima non solo nelle forme della sua espressione ma anche nei modi in cui l'insegnamento delle strutture teoriche della meccanica è esercitato, indipendentemente dal nome specifico che si attribuisce ai corsi universitari pertinenti.

Per quanto riguarda la ricerca, essa dovrebbe svilupparsi tenendo conto equamente degli aspetti matematici, del significato fisico delle scelte esercitate nel costruire un dato modello, delle approssimazioni per utilità analitica e/o numerica, per evitare che gli aspetti fisici possano diventare un mero pretesto per giustificare la presentazione di analisi poco differenti dalla routine.

Per la didattica la questione ha sfumature perfino più delicate. In molti ambiti non è perfino chiaro quale sia il compito della Meccanica Razionale, intesa come disciplina d'insegnamento: chi ne ha una visione riduttiva, la ritiene semplicemente una ripetizione, con approfondimenti, di quanto s'insegna nei corsi di fisica generale, o invece la considera una collezione di esercizi di analisi matematica e di geometria, che nascono dalla fisica. Queste visioni hanno non banale influenza, purtroppo, sia nelle scelte in merito alla gestione dell'accademia sia nella ricerca. Difficile dire in quale dei due aspetti si esprima il danno maggiore. Negli ultimi riordini universitari sono state preferite nella proposta didattica le scelte informative piuttosto che quelle formative; i crediti sono stati suddivisi fra i vari settori scientifico-disciplinari tenendo conto della formazione finale che voleva essere raggiunta, ma anche dei 'pesi' dei vari settori con una valutazione che è variata da sede a sede.

Fino alla fine degli anni Novanta del Novecento, la Meccanica Razionale era un corso obbligatorio per il Corso di Laurea in Fisica, per quello in Matematica e per tutti i Corsi di Laurea nelle Facoltà di Ingegneria. Con i nuovi ordinamenti, la Meccanica Razionale, almeno con questo nome, è rimasta in pochi di questi corsi di laurea. Eppure i suoi concetti e i suoi metodi popolano e influenzano tanti insegnamenti, dalla Scienza delle Costruzioni alla Meccanica Applicata alle Macchine, alla Dinamica delle Strutture, alla Teoria delle Strutture, alla Fluidodinamica e così di seguito. La permanenza dei concetti e dei metodi della meccanica razionale e la loro trasmissione in termini formativi piuttosto che informativi sono quindi lasciate alla sensibilità e alla cultura dei singoli operatori. Si può quindi, al momento, solo conservare la speranza che, nella preparazione universitaria, gli aspetti formativi non siano soffocati da quelli informativi.

Parte I

## **Enrico Fermi, gli anni fiorentini**



# Enrico Fermi docente alla Regia Università degli Studi di Firenze

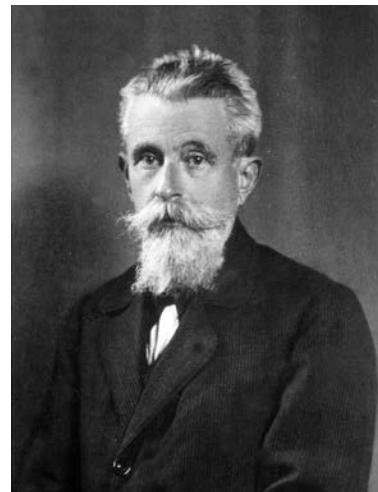
Leonardo Lucci, Fioranna Salvadori, Stefano Selleri

Per avere un'idea del periodo trascorso da Enrico Fermi a Firenze come docente, è interessante fornire un quadro dell'ambiente universitario fiorentino di allora, anche per capire com'era strutturata la Regia Università degli Studi di Firenze negli anni accademici 1924-1925 e 1925-1926 e dare inoltre un breve excursus storico delle sue origini.

Il nucleo dell'Università di Firenze, lo Studium Generale, nacque nel 1321, con i corsi di diritto, sia civile che canonico, di Medicina, di Filosofia e di «altre scienze»; tuttavia la vita dello Studium Fiorentino fu difficile e subì lunghi periodi di cessazione delle attività, periodi i quali «costringevano i rampolli delle più altolate famiglie fiorentine ad iscriversi ad altre Università»<sup>1</sup>. Ad esempio l'episodio della peste nera nel 1348 rappresentò una cesura importante. Una data fondamentale nella storia dello Studio è rappresentata dal 1388, anno nel quale fu emanato uno Statuto in tre libri, contenente il complesso delle prescrizioni cui l'istituzione avrebbe dovuto attenersi. E tuttavia la sua storia continuò a non essere lineare, dal momento che le vicende politiche della città influirono su di essa in maniera pesante tanto da interrompere l'insegnamento per alcuni anni.

Nel 1429 Niccolò da Uzzano progettò la costruzione di una Casa della Sapienza, in parte ultimata nel 1434, ma il suo uso alla fine non fu destinato all'Università. Le traversie dello Studio Fiorentino comunque non finiscono qui. Nel 1472 si deliberò di trasferire l'Università da Firenze a Pisa, pare per l'impulso dello stesso Lorenzo de' Medici; a Firenze rimase solo il Collegio Teologico. È un fatto significativo: la vivacità culturale di una città come Firenze, centro dell'Umanesimo e del Rinascimento, mal si conciliava con una struttura organizzata al modo in cui lo era un'Università. A Firenze in quel periodo fiorirono infatti le Accademie, l'Accademia platonica di Marsilio Ficino, con il suo incomparabile lavoro di traduzione dei classici greci, e l'Accademia Fiorentina.

L'Università tornò a Firenze soltanto con il crollo dei Lorena e la nascita dello Stato unitario. Nel 1859 venne infatti fondato il Regio Istituto di Studi Superiori, Pratici e di Perfezionamento, che ebbe la fisionomia di alta scuola di specializzazione a carattere scientifico e professionale, diretta quindi ai laureati di altre università. In questo erano previste inizialmente tre sezioni (Filosofia e Filologia, Scienze Naturali e Medicina e Chirurgia, a cui si



**Fig. 1** – Giulio Chiarugi [Castelletto di Chiusdino (Siena), 28 gennaio 1859-Firenze, 17 marzo 1944], fu il primo Rettore, per un anno, della Regia Università degli Studi di Firenze.

<sup>1</sup> S. Rogari, *L'Università di Firenze*, in Amedeo Belluzzi ed Emanuela Ferretti (a cura di), *La Sede della Sapienza a Firenze. L'Università e l'Istituto geografico militare a San Marco*, Firenze 2009, p. 7.

affiancò ben presto la scuola di Farmacia), che nel giro di un ventennio assunsero la denominazione di facoltà. A esse si aggiunse solo nel 1924 la formazione della facoltà di Giurisprudenza; fino a quel momento infatti gli studi giuridici si svolgevano al di fuori dell'Istituto, nella Scuola di Giurisprudenza e Notariato e presso la Scuola di Scienze Sociali e Politiche Cesare Alfieri, scuola che rimase autonoma fino al 1936, quando divenne facoltà e fu inglobata nella Regia Università. Sempre nello stesso anno gli studi di matematica entrarono a far parte della facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali.

Questa istituzione si inscriveva ovviamente nell'ottica di Firenze capitale e aveva lo scopo di conferire prestigio culturale alla città che si era meritata quell'alto onore. La sede fu il palazzo del rettorato in piazza San Marco, quello costruito, come già si è detto, da Niccolò da Uzzano; questa volta però la sua destinazione fu quella che era stata nelle intenzioni del suo fondatore. Le ristrettezze finanziarie e la necessità di potenziare le cattedre per far sì che l'Istituto mantenesse il carattere di centro di alta cultura, soprattutto dopo che Firenze aveva perso il suo ruolo di capitale politica, portarono alla convenzione del 1872, per opera della quale anche gli enti locali, Comune e Provincia, contribuivano al mantenimento dell'Università. Il Regio Istituto di Studi Superiori si trasformò in Regia Università degli Studi a seguito della riforma, nel 1923, del ministro dell'istruzione Giovanni Gentile<sup>2</sup>. Essa comprendeva quattro facoltà, Lettere e Filosofia, Medicina e Chirurgia, Scienze Matematiche Fisiche e Naturali e Giurisprudenza, e aveva circa mille studenti. I due organi direttivi della neonata Università, che già esistevano, mutarono il loro nome. L'organo di direzione didattica da Consiglio Accademico, composto dal Sovraintendente e dai direttori delle sezioni, prese il nome di Senato Accademico; questo era composto da sei membri ovvero, oltre che dal Rettore, dai quattro Presidi della Facoltà di Medicina e Chirurgia, della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, della Facoltà di Lettere e Filosofia e della Facoltà di Giurisprudenza, e dal Direttore della Scuola di Farmacia. Nel 1924-1925 un settimo membro fu costituito dal Soprintendente, scaduto d'ufficio, del già Regio Istituto di Studi Superiori, Pratici e di Perfezionamento, che affiancò il Rettore Giulio Chiarugi per tutto il 1925. L'organo di direzione amministrativa mutò il nome da Consiglio Direttivo a Consiglio di Amministrazione e la sua composizione fu determinata proprio da quella convenzione del 1872, che resta un *unicum* nella storia delle università come inizialmente resta un *unicum* la presenza di questo organo, che solo in seguito entra stabilmente nella struttura di governo di quasi tutte le università italiane. Era composto da due rappresentanti del Governo, un rappresentante della Provincia e da uno del Comune di Firenze; aveva funzioni di segretario dell'organo il direttore della segreteria (si può equiparare la segreteria agli attuali uffici amministrativi con 10 addetti di gradi diversi) e quindi, oltre al Soprintendente prima e al Rettore dopo, vi erano solo due rappresentanti del collegio dei professori<sup>3</sup>.

### I docenti alla Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Gli studenti del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria a Firenze si riferivano al corso di laurea in Matematica e al corso di laurea in Fisica e Matematica della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, di cui in questa sezione viene descritto il corpo docente.

Gli insegnanti della Facoltà erano 16, di cui 7 professori stabili, 5 non stabili e 4 incaricati. Fra questi vi erano Antonio Garbasso, professore stabile di Fisica Sperimentale e incaricato di Fisica Superiore, Giorgio Abetti, professore non stabile di Astrofisica e direttore dell'Osserva-

<sup>2</sup> Regio Decreto 30 settembre 1923, n. 2102 (in Gazzetta Ufficiale, 11 ottobre, n. 239) – Ordinamento dell'istruzione superiore: con esso l'università poté godere di personalità giuridica e autonomia amministrativa e didattica.

<sup>3</sup> Per un approfondimento della storia degli Studi superiori a Firenze vedi *Storia dell'ateneo Fiorentino. Contributi di studio*, vol. I-II, Edizioni F. & F., Parretti Grafiche, Firenze 1986; *L'Università degli Studi di Firenze 1924-2004*, Olschki, Firenze 2004.

torio Astrofisico di Arcetri, Francesco Tricomi, che a soli 28 anni era stato nominato professore non stabile di Analisi Algebrica e Infinitesimale e incaricato di Analisi Superiore. Nell'anno accademico 1925-1926, in seguito al trasferimento a Torino di Tricomi, l'incarico di Analisi Matematica Algebrica fu assegnato a Giovanni Sansone. Fra questi docenti, in qualità di incaricato, c'è anche il giovane Enrico Fermi, che a soli 23 anni fu chiamato dal direttore dell'Istituto di Fisica Antonio Garbasso. Nella Facoltà di Scienze vi erano anche 29 liberi insegnanti con effetti legali. Oltre a questi vi erano 2 professori emeriti e un professore onorario.

Il prof. Enrico Fermi, di Roma, era insegnante incaricato di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica, e allo stesso tempo era elencato fra i liberi insegnanti con effetti legali per la Fisica Matematica.



**Fig. 2** – Decreto rettorale della Regia Università degli Studi di Firenze con cui Enrico Fermi fu incaricato dell'insegnamento di Meccanica Razionale per l'anno accademico 1924-1925<sup>4</sup>.



**Fig. 3** – Istituto di Fisica ad Arcetri, da sinistra a destra: Franco Rasetti, Rita Brunetti, Nello Carrara ed Enrico Fermi.

<sup>4</sup> Archivio Storico dell'Università di Firenze, *Soprintendenza del Regio Istituto di Studi Superiori*, filza n. 544, anno 1924, fasc. 10c «Personale insegnante».

Nell'orario ufficiale della Facoltà, pubblicato nell'Annuario del 1924-1925, si trova che il prof. Enrico Fermi insegnava Meccanica Razionale al terzo anno dei corsi di laurea in Fisica, in Matematica e in Fisica e Matematica, dalle 9 alle 10 nei giorni di lunedì, mercoledì e venerdì, in piazza S. Marco 2. Inoltre Fermi insegnava anche Fisica Matematica al quarto anno degli stessi corsi di laurea, dalle 10 alle 11 negli stessi giorni. Nell'anno accademico successivo, al posto di Fisica Matematica, Enrico Fermi insegnava, al quarto anno degli stessi corsi di laurea, Fisica Teorica, dalle 15 alle 16 nei giorni di lunedì, mercoledì e venerdì, sempre in piazza S. Marco 2. Fermi, oltre a esaminare gli studenti dei suoi insegnamenti, spesso faceva parte di commissioni di esami di altri corsi come ad esempio Analisi Matematica, Geometria Descrittiva e Astrofisica.

Nell'Annuario per l'anno accademico 1925-1926, della Regia Università degli Studi di Firenze, si possono trovare le pubblicazioni di tutti docenti. In particolare si trovano elencati i seguenti articoli del prof. Enrico Fermi:

- E. Fermi, *Sopra la teoria dei corpi solidi*, «Periodico di Matematiche», n. 5, 1925, pp. 264-274.
- E. Fermi, F. Rasetti, *Ueber den Einfluss eines wechselnden magnetischen Feldes auf die Polarisation des Resonanzlichtes*, «Zeitschrift für Physik», vol. 33, n. 1, 1925, pp. 246-250.
- E. Fermi, *Una relazione tra le costanti delle bande infrarosse delle molecole triatomiche*, «Rendiconti Lincei», vol. 1, 1925, pp. 386-387.
- E. Fermi, *Sopra l'intensità delle righe multiple*, «Rendiconti Lincei», vol. 1, 1920, pp. 120-124.
- E. Fermi, *Problemi di chimica nella fisica dell'atomo*, «Periodico di Matematiche», n. 6, 1926, pp. 19-26.
- E. Fermi, *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, «Rendiconti Lincei», vol. 3, 1926, pp. 145-149.

Per l'insegnamento del corso di Meccanica Razionale, dopo Enrico Fermi e fino all'a.a. 1970-1971, anno di nascita della Facoltà di Ingegneria, i docenti che si sono succeduti sono: Enrico Persico, dall'a.a. 1926-1927 all'a.a. 1928-1929, Gilberto Bernardini, dall'a.a. 1929-1930 all'a.a. 1930-1931, Bruto Caldonazzo, dall'a.a. 1931-1932 all'a.a. 1955-1956, Giorgio Sestini, dall'a.a. 1956-1957 all'a.a. 1969-1971. Dall'a.a. 1965-1966 all'a.a. 1969-1971 viene raddoppiata la cattedra di Meccanica Razionale con l'incarico affidato a Demore Quilghini.

### **Ordine degli studi dei corsi di laurea in Fisica e Matematica e in Matematica, a cui si riferiva il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria**

In questa sezione si prende brevemente in esame l'ordine degli studi dei corsi di laurea in Fisica e Matematica e in Matematica, a cui si riferivano gli studenti del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria, dedotto dall'annuario per l'a.a. 1924-1925, anno del primo incarico di docenza di Fermi a Firenze.

L'ordine degli studi prevedeva il seguente piano:

#### *Anno I*

Analisi Matematica (Parte I) e relativi esercizi – prof. Francesco Tricomi  
 Geometria Analitica e Proiettiva (con esercizi) – prof. Edgardo Ciani  
 Fisica Sperimentale – prof. Antonio Garbasso  
 Chimica Generale e Inorganica – prof. Luigi Rolla  
 Disegno – prof. Raffaello Brizzi (solo per il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria)

#### *Anno II*

Analisi Matematica (Parte II) e relativi esercizi – prof. Francesco Tricomi  
 Geometria Descrittiva (con esercizi) – prof. Edgardo Ciani

Fisica Sperimentale – prof. Antonio Garbasso

Esercizi di Chimica – prof. Luigi Rolla (solo per Fisica e Matematica e per il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria)

Disegno – prof. Raffaello Brizzi (solo per il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria)

### *Anno III*

Meccanica Razionale – prof. Enrico Fermi

Fisica Superiore – prof. Antonio Garbasso (solo per Fisica e Matematica)

Analisi Superiore – prof. Francesco Tricomi

Astrofisica – prof. Giorgio Abetti

Esercizi di Fisica – prof. Antonio Garbasso

Chimica Fisica con esercizi – prof. Luigi Rolla (solo per Fisica e Matematica)

### *Anno IV*

Fisica Matematica – prof. Enrico Fermi

Fisica Superiore – prof. Antonio Garbasso

Geometria Superiore – prof. Edgardo Ciani

Esercizi di Fisica – prof. Antonio Garbasso (solo per Fisica e Matematica)

Materia facoltativa a scelta tra Matematiche Complementari, Chimica Organica, Mineralogia e Disegno (solo per Fisica e Matematica)

Agli studenti che avrebbero poi frequentato la Scuola di Ingegneria e che frequentavano il biennio di Scienze Matematiche e Fisiche, come propedeutico, veniva espressamente consigliato, al secondo anno (e non al terzo), di seguire il corso di Meccanica Razionale tenuto dal prof. Enrico Fermi.

Si evidenzia che negli anni successivi all'anno accademico 1924-1925 si aggiungono come 'consigliati' gli esami di Mineralogia e di Geologia e come 'obbligatorio' l'esame di Meccanica Razionale.



**Fig. 4** – Francesco Tricomi (Napoli, 5 maggio 1897-Torino, 21 novembre 1978) è stato un matematico italiano, notissimo per i suoi studi sulle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto, sulle funzioni speciali e sulle serie ortogonali. Nel 1925 ottenne una cattedra a Firenze, ma si trasferì subito dopo a Torino, chiamatovi da Giuseppe Peano. Qui tenne la cattedra di Analisi Infinitesimale fino al suo collocamento a riposo. [Per cortesia dell'Unione Matematica Italiana]

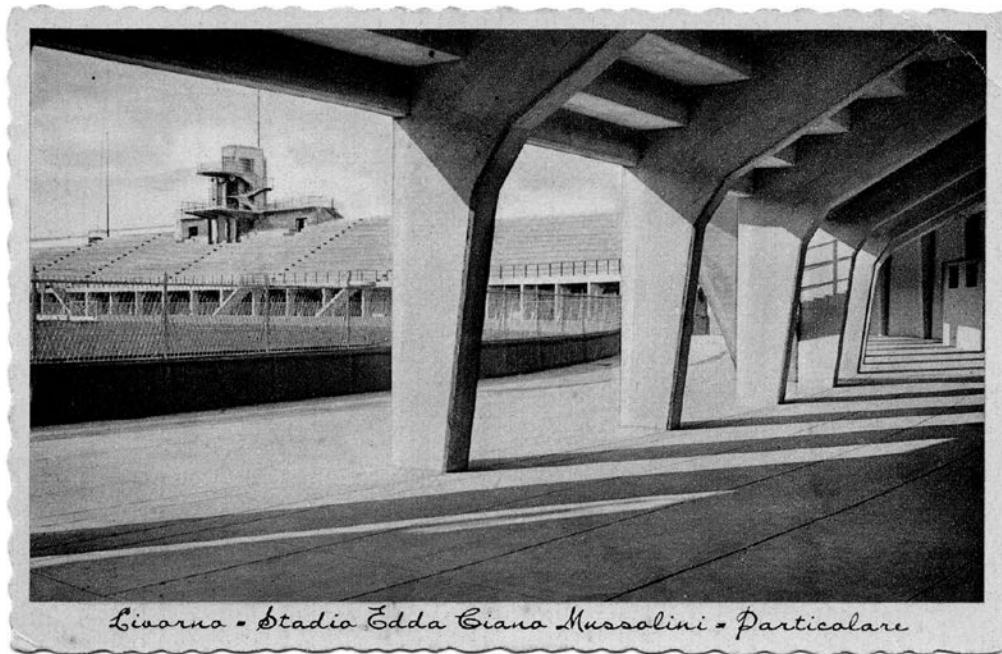


**Fig. 5** – Edgardo Ciani [Rocca San Casciano (Forlì), 7 ottobre 1864-Rocca San Casciano (Forlì), 14 settembre 1942], laureato nel 1886 a Pisa, insegnò in varie università fino a che non venne chiamato, nel 1925, alla neo-costituita sezione matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Firenze, ove con Giovanni Sansone operò per l'organizzazione dell'Istituto di Matematica (in figura, a sinistra, uno dei testi di Geometria scritti da Ciani prima di essere chiamato a Firenze). Qui rimase sino al collocamento a riposo nel 1935. Ebbe come allievi Federigo Enriques (Livorno, 5 gennaio 1871-Roma, 14 giugno 1946 – foto al centro) e Guido Fubini (Venezia, 19 gennaio 1879-New York, 6 giugno 1943 – foto a destra).

**Fig. 6** – Antonio Garbasso (Vercelli, 16 aprile 1871-Firenze, 14 marzo 1933), laureato in Fisica all'Università di Torino nel 1892, si perfezionò in Germania con Heinrich Hertz e Hermann von Helmholtz. Fu professore di Fisica Matematica e di Fisica Sperimentale a varie università e, dal 1913 al 1933, all'Università di Firenze, dove contribuì a far potenziare l'Istituto di Fisica di Arcetri, facendo chiamare molti dei più brillanti ricercatori della fisica italiana. Fu prima sindaco e poi podestà di Firenze, e senatore del Regno d'Italia. Diresse la Società Italiana di Fisica e fu presidente dell'Accademia dei Lincei.

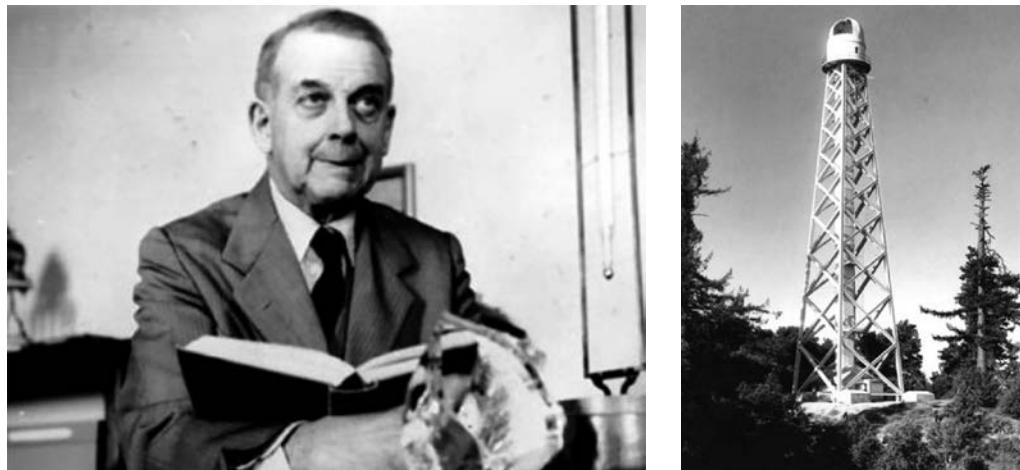


**Fig. 7** – Strumentazione del laboratorio di Luigi Vittorio Rolla (Genova, 21 maggio 1882-Genova, 8 novembre 1960), professore di Chimica Generale e Inorganica alla Regia Università degli Studi di Firenze. Luigi Rolla nel 1924 ritenne (con il collega L. Fernandes), in base a misure spettroscopiche, di avere individuato l'elemento chimico 61, che chiamò Florenzio – derivato di Florentia, nome latino di Firenze – ma la scoperta non fu confermata. L'elemento radioattivo 61 (Promezio), preparato artificialmente anni dopo, non esiste in natura perché troppo instabile. [Per cortesia di Piero Baglioni]



**Fig. 8** – Raffaello Brizzi [Montecatini Terme (Pistoia), 4 aprile 1883-Montecatini Terme (Pistoia), 23 febbraio 1946], professore alla cattedra di Architettura presso l'Accademia di Belle Arti di Firenze, è tra i fondatori della nuova Regia Scuola Superiore di Architettura di Firenze, dove insegna Composizione Architettonica e della quale diviene preside dal 1932 fino alla morte. Tra le sue opere il Palazzo Comunale a Montecatini Terme (in collaborazione con L. Righetti) e lo Stadio Comunale di Livorno, all'epoca dedicato a Edda Ciano Mussolini [Collezione F. Giannini], ora intitolato ad Armando Picchi<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> E. Insabato, C. Ghelli (a cura di), *Guida agli archivi di architetti e ingegneri nel Novecento in Toscana*, Edifir-Editioni, Firenze 2007.

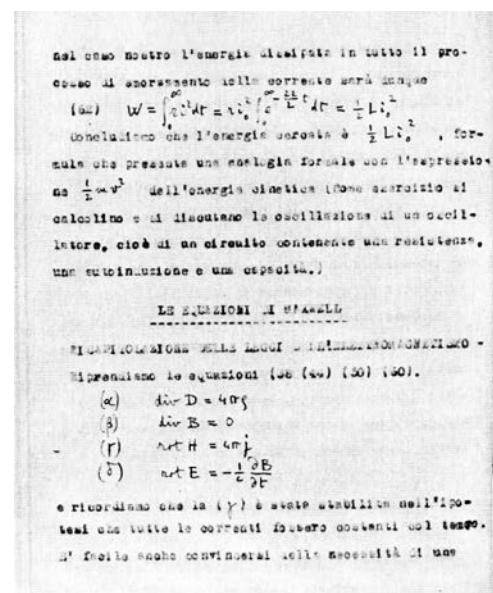


**Fig. 9** – Giorgio Abetti (Padova, 5 ottobre 1882-Firenze, 24 agosto 1982) si laureò in Fisica a Padova nel 1904. Lavorò in Germania, agli osservatori di Berlino e di Heidelberg, e negli Stati Uniti, agli osservatori di Yerkes e di Monte Wilson. Diresse l'Osservatorio di Arcetri a Firenze dal 1922 al 1957. Progettò la costruzione della prima torre solare italiana ad Arcetri<sup>6</sup> (in figura, a destra), ispirandosi a quella ideata a Mount Wilson. Le sue ricerche più importanti riguardano le stelle doppie, la cromosfera solare e la fisica del Sole.

## Il programma del corso di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica

Il programma del corso di Meccanica Razionale, tenuto da Enrico Fermi al terzo anno dei corsi di laurea in Fisica, in Fisica e Matematica e in Matematica – di cui nella seconda parte di questo libro è riprodotto il manoscritto delle dispense a cura di Bonanno Bonanni e Paolo Pasca, studenti di Fermi a tale corso – comprendeva: *Elementi della teoria, Cinematica del punto e del corpo rigido, Statica e dinamica del punto, Statica e dinamica dei corpi rigidi, Princípio dei lavori virtuali, Dinamica dei sistemi, Cennò sulla statica e dinamica dei sistemi continui*.

Per quanto riguarda il corso di Fisica Matematica tenuto da Enrico Fermi al quarto anno dei corsi di laurea in Fisica, in Fisica e Matematica e in Matematica, il programma era il seguente: *Campi vettoriali, Elementi della teoria del potenziale e delle funzioni armoniche, Elettrostatica dei dielettrici, Campi magnetici, Elettromagnetismo ed elettrodinamica, Equazioni di Maxwell, Propagazione della luce in un dielettrico e in un conduttore, Dispersione, Irradiazione dell'energia elettromagnetica, Masse elettromagnetiche, Cennò sulle teorie spettroscopiche, Cennò sulla teoria della relatività*.



**Fig. 10** – Prima pagina del capitolo sulle equazioni di Maxwell del dattiloscritto del libro *Elettrodinamica* di Enrico Fermi a cura di W. Joffrain<sup>7</sup>. Secondo Joffrain si tratterebbe della copia originale degli appunti, con le parti manoscritte forse proprio da Enrico Fermi<sup>8</sup>.

<sup>6</sup> G. Abetti, *Progetto della torre solare per l'osservatorio di Arcetri*, «Rivista d'ottica e meccanica di precisione», 1921.

<sup>7</sup> W. Joffrain (a cura di), E. Fermi, *Elettrodinamica*, Ulrico Hoepli Editore, Milano 2006.

<sup>8</sup> W. Joffrain, *Un inedito di Enrico Fermi: Elettrodinamica*, «XVII Conference on Physics and Astronomy History», Como, 15-19 maggio 1998, pp 1-11.

## Gli studenti di Enrico Fermi alla Regia Università degli Studi di Firenze

In questa sezione sono presentati i risultati di una ricerca effettuata presso l'Archivio Storico dell'Università di Firenze, relativa agli studenti di Enrico Fermi, sia del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria sia dei corsi di laurea in Fisica, in Fisica e Matematica e in Matematica. I dati sono stati ricavati dagli annuari per gli anni accademici 1924-1925, 1925-1926, e dai registri della carriera scolastica degli studenti delle sezioni di Scienze Fisiche e Naturali e di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Sulla base di questi documenti sono state elaborate le tabelle riepilogative riportate di seguito.

Nelle Tabelle 1 e 2 è riportato l'elenco degli studenti del corso Meccanica Razionale di Enrico Fermi che rispettivamente hanno e non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria<sup>9</sup>. Nelle Tabelle 3 e 4 sono invece riportati gli studenti del corso di Fisica Matematica di Enrico Fermi che rispettivamente hanno e non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico. Si osserva che su un totale di 63 studenti (17 del corso di Fisica Matematica e 46 del corso di Meccanica Razionale), ben 28 (di cui 25 di Meccanica Razionale) fanno riferimento al biennio propedeutico.

Come curiosità, in tutte le tabelle, oltre alla votazione ottenuta agli esami, sono riportate anche le scuole di provenienza e le destinazioni degli studenti. Da queste informazioni si può osservare che gli studenti fiorentini provenivano dal Liceo Scientifico Leonardo da Vinci<sup>10</sup>, dal Liceo Classico Dante<sup>11</sup>, dal Liceo Classico Galileo<sup>12</sup> e dal Liceo Classico Michelangelo<sup>13</sup>. Si ricorda che, fino alla *Legge Codignola* 910/69, gli studenti che avevano frequentato gli Istituti Tecnici non potevano accedere direttamente all'Università.

Alcuni degli studenti di Fermi si ritrovano nell'Albo degli Ingegneri della Provincia di Firenze, come riportato nella Tabella 5, costruita sulla base dei dati presenti sulle versioni cartacee degli elenchi disponibili presso l'Ordine degli Ingegneri della Provincia di Firenze, disponibili – per il periodo compreso tra il 1926 e il secondo conflitto mondiale – solo per gli anni 1928, 1929, 1931, 1937, 1941.

<sup>9</sup> Fino all'anno accademico 1933-1934, anno in cui con il RD 2044/1935-XIV venne stabilito il nuovo ordinamento della didattica, era previsto un esame per il superamento del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria presso l'Università di Firenze.

<sup>10</sup> Nel settembre 1923 veniva istituito a Firenze il primo Liceo Scientifico. Il Liceo ebbe la prima sede in via della Colonna, nei locali della soppressa Scuola Normale Complementare Carducci. Nel 1924 si spostò nei locali dell'ex Scuola Normale Tornabuoni alle Cure nel viale Regina Vittoria (l'attuale viale Don Minzoni) e fu intitolato a Leonardo da Vinci. Negli anni Cinquanta la Provincia di Firenze provvide alla costruzione di un nuovo edificio che è l'attuale sede del Liceo.

<sup>11</sup> Il Liceo Ginnasio Dante si trova a Firenze, in via Puccinotti 55, affacciato su piazza della Vittoria, ed è una delle scuole più antiche della città. La sua fondazione, col nome di Liceo Fiorentino, risale al 30 settembre 1853, per decreto del granduca Leopoldo II. Nel 1859 esso ebbe sede nel palazzo Borghese in via del Palagio del Podestà (oggi via Ghibellina), nel 1862 si trasferì nel palazzo Da Cepparello in via del Corso. Nel 1865 divenne Liceo Dante, in occasione del sesto centenario della nascita di Dante Alighieri e trovò la sua sede attuale solo nel 1921.

<sup>12</sup> Nel 1775 gli Scolopi acquistarono l'edificio di via Martelli (sede attuale del Liceo-Ginnasio Galileo) e trasferirono lì la loro scuola, che ebbe immediato sviluppo. Nel palazzo gli Scolopi rimasero anche dopo la formazione del Regno d'Italia, ma spostarono altrove la scuola quando, nel 1878, cedettero una parte dell'edificio come sede di un Ginnasio Regio che prese il nome di Galileo, al quale nel 1884 fu aggiunto anche il Liceo.

<sup>13</sup> Il Liceo Classico Michelangelo si trova in via della Colonna. Fu fondato nel 1898 con sede nei locali del Convento di Santa Maria Maddalena.

**Tab. 1** – Studenti del corso di Meccanica Razionale tenuto da Enrico Fermi a Firenze che hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria; il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Meccanica Razionale.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	destinazione	voto finale
1924-25	De Giorgi	Vincenzo	Liceo Dante	Politecnico di Torino	30
1924-25	Grillo	Eugenio	Istituto Tecnico Galileo	Politecnico di Torino	21
1925-26	Berti	Costantino	Istituto Tecnico Siena	Politecnico di Torino	27
1925-26	Bonanni	Bonanno	Liceo Dante	Politecnico di Torino	30
1925-26	Braccini	Antonio	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	25
1925-26	Brizzi	Emilio	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	24
1925-26	Brunetti	Tito	Liceo Galileo	Politecnico di Milano	26
1925-26	Bruscaglioni	Raffaello	Liceo Galileo	Politecnico di Torino	24
1925-26	Cammeo	Angiolo	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	30
1925-26	Carini	Silvio	Liceo Galileo	Politecnico di Milano	27
1925-26	Comba	Lorenzo	Liceo Michelangelo	Scuola di Appl.ne Roma	30
1925-26	Croci	Luigi	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	25
1925-26	De Giorgi	Giorgio	Liceo Galileo	Politecnico di Torino	24
1925-26	Frangioni	Fernando	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Pisa	28
1925-26	Jozsef	Adalberto	Liceo Alba Julia (Romania)	Politecnico di Torino	30
1925-26	Le Divelec	Giampietro	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Roma	25
1925-26	Lochoff	Boris	Istituto Tecnico Galileo	Istituto Nautico di Livorno	-
1925-26	Masciadri	Cesare	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	28
1925-26	Materassi	Leonetto	Istituto Tecnico Pisa	Scuola di Appl.ne Pisa	25
1925-26	Pasca	Paolo	Liceo Michelangelo	Scuola di Appl.ne Padova	24
1925-26	Perinelli	Renzo	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Roma	30
1925-26	Piperno	Ugo	Liceo Scientifico L. da Vinci	Politecnico di Torino	27
1925-26	Pratesi	Alberto	Liceo Galileo	Politecnico di Milano	27
1925-26	Simoncini	Alvaro	Liceo Scientifico L. da Vinci	Scuola di Appl.ne Padova	20
1925-26	Stefanelli	Giuseppe	Liceo Michelangelo	Scuola di Appl.ne Pisa	30

**Tab. 2** – Studenti del corso di Meccanica Razionale tenuto da Enrico Fermi a Firenze che non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria; il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Meccanica Razionale.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	destinazione	voto finale
1924-25	Conti	Mario	Liceo Galileo		24
1924-25	De Seras	Luigi	Istituto Tecnico Galileo		-
1924-25	Fabroni	Nestore	Istituto Tecnico Galileo		-
1924-25	Fortini	Luigi	Istituto Tecnico Galileo	Scuola di Appl.ne Roma	-
1924-25	Masini	Mario Raffaello	Liceo Michelangelo		-
1924-25	Puccini	Guglielmo	Istituto Tecnico Galileo		-
1924-25	Rossi	Corrado	Istituto Tecnico Galileo		30
1924-25	Sanpaolesi	Piero	Liceo Dante	Università di Pisa	-
1924-25	Socci	Clotilde	Istituto Tecnico Galileo		25
1924-25	Tarabusti	Renzo	Istituto Tecnico Galileo		-
1924-25	Teicher	Burech	Ginnasio in Polonia		-
1925-26	Bacci	Ideale	Istituto Tecnico Galileo		20
1925-26	Bianconcini	Francesco	Liceo Galileo		-
1925-26	Calamai	Giulio	Istituto Tecnico Galileo		28
1925-26	Gennai	Antonio	L. Classico Galilei Pisa		-
1925-26	Gianangeli	Gualtiero			-
1925-26	Jolles	Kirsch	L. Classico Leopoli (Polonia)		-
1925-26	Nuterini	Bianca	Istituto Tecnico Arezzo		22
1925-26	Rossi	Bernardino	Istituto Tecnico Trento		-
1925-26	Scippa	Italo	Liceo Scientifico L. da Vinci		21
1925-26	Villani	Flora	Istituto Tecnico Galileo		30

**Tab. 3** – Studenti del corso di Fisica Matematica tenuto da Enrico Fermi a Firenze che hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria; il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Fisica Matematica.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	destinazione	voto finale
1924-25	Del Guercio	Alfonso	Politecnico di Milano		28
1924-25	Ricci	Roberto	Istituto Tecnico Galileo		30
1925-26	Pepi	Dino	Liceo Michelangelo	Politecnico di Torino	20

**Tab. 4** – Studenti del corso di Fisica Matematica tenuto da Enrico Fermi a Firenze che non hanno sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria (in questo caso la colonna «destinazione» manca perché non contenente informazioni); il «voto finale» si riferisce al superamento dell'esame di Fisica Matematica.

anno accademico	cognome	nome	scuola di provenienza	voto finale
1924-25	Fiorilli	Erberto	Istituto Tecnico Milano	–
1924-25	Mancinelli	Renato	Istituto Tecnico Galileo	30
1924-25	Paggi	Goffredo	Istituto Tecnico Pisa	–
1924-25	Socci	Clotilde	Istituto Tecnico Galileo	24
1924-25	Talei	Gianni	Ist. Tec. Livorno	–
1925-26	Bacci	Ideale	Istituto Tecnico Galileo	–
1925-26	Conti	Mario	Liceo Galileo	30
1925-26	Fabroni	Nestore	Istituto Tecnico Galileo	–
1925-26	Masini	Mario Raffaello	Liceo Michelangelo	–
1925-26	Puccini	Guglielmo	Istituto Tecnico Galileo	–
1925-26	Rado	Nicolino	Istituto Tecnico Galileo	25
1925-26	Reggiani	Luigi	Istituto Tecnico Galileo	–
1925-26	Tarabusti	Renzo	Istituto Tecnico Galileo	–
1925-26	Villani	Flora	Istituto Tecnico Galileo	–

**Tab. 5** – Gli studenti di Fermi a Firenze che si ritrovano nell'Albo degli Ingegneri della Provincia di Firenze: la quarta colonna riporta l'anno in cui per la prima volta il nome è presente sull'Albo. Dal confronto con le tabelle precedenti, si osserva che per alcuni studenti non risulta sostenuto l'esame del biennio propedeutico agli studi di Ingegneria all'Università di Firenze.

anno accademico	cognome	nome	primo anno su Albo	corso	corso di laurea
1924-25	Fabroni	Nestore	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1924-25	Fortini	Luigi	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1924-25	Grillo	Eugenio	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1924-25	Sanpaolesi	Piero	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925-26	Braccini	Antonio	1937	Meccanica Razionale	Matematica
1925-26	Brizzi	Emilio	1937	Meccanica Razionale	Matematica
1925-26	Bruscaglioni	Raffaello	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925-26	Croci	Luigi	1931	Meccanica Razionale	Matematica
1925-26	De Giorgi	Giorgio	1937	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925-26	Fabroni	Nestore	1937	Fisica Matematica	Fisica e Matematica
1925-26	Materassi	Leonetto	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica
1925-26	Simoncini	Alvaro	1931	Meccanica Razionale	Matematica
1925-26	Stefanelli	Giuseppe	1931	Meccanica Razionale	Fisica e Matematica

## Alcuni studenti di Enrico Fermi in evidenza

Questa sezione è dedicata a una selezione di studenti che hanno seguito i corsi tenuti da Enrico Fermi negli anni accademici 1924-1925 e 1925-1926 presso la Regia Università degli Studi di Firenze.



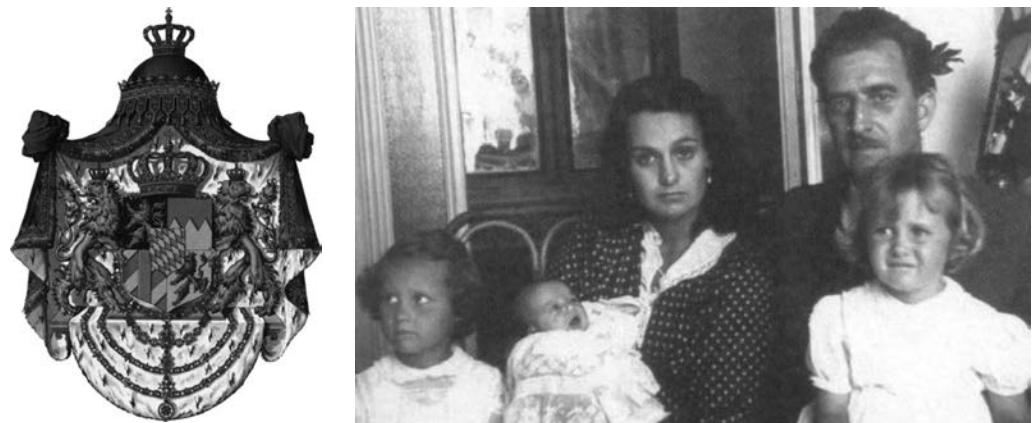
**Fig. 11** – Bonanno Bonanni (Carrara, 25 aprile 1906-dato non disponibile) in una foto sul registro della Scuola di Ingegneria di Torino, dove si è laureato nel 1929. [Per cortesia dell'Archivio Storico Studenti del Politecnico di Torino] Bonanno Bonanni – insieme a Paolo Pasca (Roma, 28 luglio 1904-dato non disponibile), laureatosi nel 1930 in Ingegneria Civile presso la Scuola di Ingegneria di Padova dopo essersi iscritto inizialmente al Politecnico di Milano ed essere passato temporaneamente all'Università di Firenze – ha raccolto le «Lezioni di Meccanica Razionale» che Enrico Fermi ha tenuto alla Regia Università degli Studi di Firenze dal 1924 al 1926 e che vengono riprodotte nella seconda parte di questo libro.



**Fig. 12** – Giuseppe Stefanelli (Firenze, 10 giugno 1905–Firenze, 18 ottobre 2009) (a destra) in una foto dell’agosto 1926 insieme a due amici. Giuseppe Stefanelli frequentò a Firenze il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria, durante il quale sostenne, tra gli altri, l’esame di Meccanica Razionale tenuto da Enrico Fermi, di cui nell’immagine di destra si riporta il verbale. Dopo essersi laureato in Ingegneria a Pisa, fu professore ordinario di Meccanica Agraria e Presidente dell’Accademia dei Georgofili dal 1977 al 1986. [Per cortesia di Paolo Blasi]



**Fig. 13** – Ugo Piperno (Firenze, 24 febbraio 1908-Milano, 31 marzo 1996), dopo il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria a Firenze nel 1924-1926, si laureò in Ingegneria Elettrotecnica presso il Politecnico di Torino a ventuno anni. Lavorò alla Autelco, società di telefoni e apparecchi di precisione, con varie cariche. La società venne acquisita da GTE nel 1963 e fusa con la parte radio della Magneti Marelli (già diventata in precedenza GTE) diventando in Italia GTE-Telecomunicazioni (nella foto l'ing. Piperno, a sinistra, riceve l'Ambrogino d'Oro dal Comune di Milano, nel 1973). Piperno fu uno dei pionieri della produzione di fibre ottiche in Italia e amministratore delegato del consorzio STS per le trasmissioni da satellite.



**Fig. 14** – Una curiosità: Tito Tommaso Maria Brunetti (Firenze, 18 dicembre 1905-Piacenza, 13 luglio 1954), dopo il biennio propedeutico agli studi di Ingegneria a Firenze nel periodo 1924-1926, si laureò presso il Politecnico di Milano. Figlio di Giovanni Brunetti – che insegnò diritto civile all'Università di Firenze e fu preside della Facoltà di Giurisprudenza – sposò la figlia di Ruppert di Baviera, principe ereditario della corona di Baviera. Nella foto Tito Tommaso Maria Brunetti è con la moglie, la principessa Editha Marie Gabrielle Anna di Baviera e con le tre figlie.

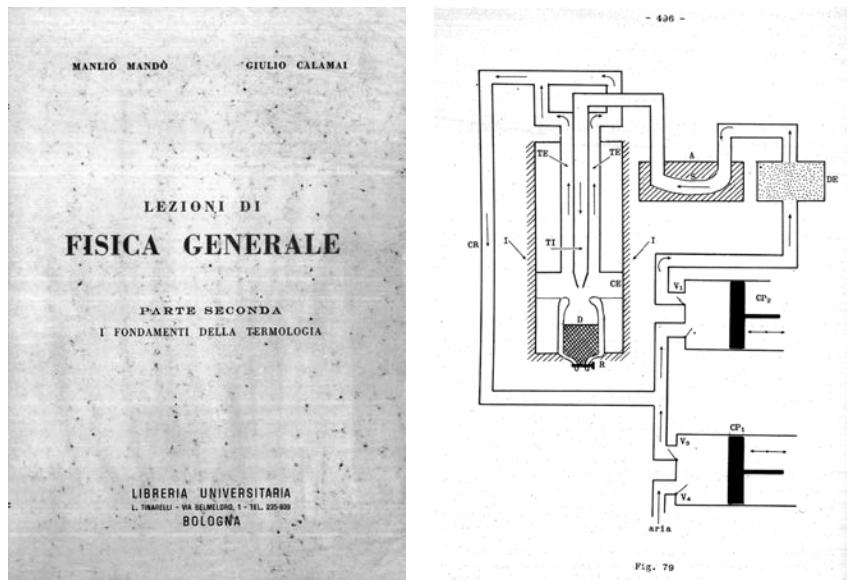


**Fig. 15** – Leonetto Materassi (Firenze, 27 settembre 1905-Firenze, 20 aprile 1980) laureatosi in Ingegneria a Pisa, supera l'esame di Stato per l'abilitazione alla professione di Ingegnere a Bologna nel 1930. Fra il 1934 e il 1941 è attivo a Firenze con una sessantina di edifici in vari quartieri, soprattutto a Campo di Marte, Gavinana e Legnaia. Nel 1938 circa progetta tutta la nuova strada, via Francesco Berni, aperta parallelamente a viale Aleardo Aleardi<sup>14</sup>. Tra i suoi vari altri interventi a Firenze, ricordiamo il restauro del Palazzo Anselmi Ristori, operato negli anni 1975-1976 (via Strozzi angolo via dei Sassetti, in figura), che le fotografie degli anni Sessanta mostrano in uno stato di grave degrado.



**Fig. 16** – Piero Sanpaolesi (Rimini, 8 gennaio 1904-Firenze, 10 marzo 1980), storico dell'architettura e restauratore. Laureatosi in Ingegneria a Pisa nel 1929 e in Architettura a Firenze nel 1936, prese servizio nel 1937 presso la Soprintendenza alle Belle Arti di Firenze, e nel 1943 fu nominato Soprintendente ai monumenti e alle gallerie di Pisa. Libero docente dal 1941 in Caratteri Stilistici e Costruttivi dei Monumenti, nel 1946 ricevette un incarico d'insegnamento presso la Facoltà di Ingegneria di Pisa e nel 1954 presso quella di Architettura di Firenze, dove nel 1960 fu chiamato come professore ordinario di Restauro dei Monumenti e dove fondò e diresse l'Istituto di Restauro dei Monumenti, divenendo poi preside della Facoltà. Tenne anche corsi presso le Facoltà di Architettura delle Università di Istanbul (dal 1959) e di Teheran (dal 1963): in Iran eseguì anche restauri, tra i quali quello del mausoleo Oljotou di Soltanieh.

<sup>14</sup> G. Isola, M. Cozzi, F. Nuti, G. Carapelli, *Edilizia in Toscana fra le due guerre*, Edifir-Editioni, Firenze 1994, p. 229.



**Fig. 17** – Due immagini dal libro (la copertina e la macchina di Linde) di Manlio Mandò e Giulio Calamai, *Lezioni di Fisica Generale. I fondamenti della Termologia*, Libreria Universitaria, Bologna 1968. Giulio Calamai (Firenze, 15 giugno 1906-Firenze, 9 luglio 1984), laureatosi in Matematica presso l'Università di Firenze nel 1929, fu assistente incaricato prima presso la cattedra di Analisi Matematica della medesima Università e poi, dal 1934 al 1935, presso l'Osservatorio di Arcetri. Dal 1945 al 1947 fu professore incaricato di Fisica Sperimentale e di Fisica Teorica per i corsi integrativi. Nel 1964 ottenne la libera docenza in Ottica. Successivamente fu nominato astronomo capo presso l'Osservatorio di Arcetri ed ebbe l'incarico dell'insegnamento di Fisica II fino al raggiungimento dei limiti di età.



**Fig. 18** – Raffaello Bruscaglioni (Firenze, 13 aprile 1907-Firenze, 6 agosto 1976) laureato in Ingegneria al Politecnico di Torino nel 1929, si specializzò in Ottica ad Arcetri. Dopo un breve periodo ad Arcetri entrò nello stabilimento ottico San Giorgio di Genova-Sestri, dove divenne prima, giovanissimo, dirigente nel 1940 e, nel 1943, direttore. Fu poi alla Ducati e alla Marelli di Sesto San Giovanni<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> V. Ronchi, *Raffaello Bruscaglioni 1906-1976*, «Atti della Fondazione Giorgio Ronchi», Anno LV, n. 1, 2000, pp. 55-62.

### **Fonti dell'Archivio Storico dell'Università di Firenze**

Presso l'Archivio Storico dell'Università di Firenze sono conservate, e sono state consultate per la stesura del presente lavoro, le seguenti fonti:

*Regio Istituto di Studi Superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Sezione di Scienze Fisiche e Naturali. Registro della Carriera scolastica degli studenti.* Voll. VI, VII, VIII.

*Regia Università degli Studi di Firenze, Sezione di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, Avviamento all'Ingegneria. Registro della Carriera scolastica degli studenti.* Voll. I, II, III.

*Regia Università degli Studi di Firenze, Annuari per l'anno accademico 1924-1925,* Tipografia Galletti e Cacci, Firenze, 1925.

*Regia Università degli Studi di Firenze, Annuari per gli anni accademici 1925-1929, (5 v.),* Firenze, Stab. Tip. Già Chiari, succ. C. Mori, Firenze, 1926-1930.

Sono inoltre disponibili le schede di ogni studente e la cartella dei documenti. Alcune cartelle risultano danneggiate dall'alluvione di Firenze del 4 novembre 1966.



# Ricordi di Fermi\*

Nello Carrara

Nell'estate del 1953 ricevetti la visita, inaspettata ma straordinariamente gradita, di una persona che non rivedevo ormai da circa trenta anni. Si trattava di una cara, intelligente, colta Signora, la madre di un mio antico compagno di studi universitari, che fu per me, nella mia giovane età e durante il periodo goliardico, quasi una seconda Madre: la signora Rasetti.

La signora Rasetti, che avevo perduto da gran tempo di vista, perché aveva seguito il suo illustre figlio Franco nelle molte peregrinazioni per il mondo, era ritornata da poco definitivamente in Italia, dopo lunghissima permanenza in America.

Ella aveva uno scopo nel venirmi a cercare: la signora Fermi stava compilando un libro sulla vita del marito e, mentre non le mancavano naturalmente notizie dal periodo romano in poi, ne era sprovvista per il periodo pisano e fiorentino. Essendo io stato compagno di studi di Fermi e di Rasetti sia a Pisa sia a Firenze, avrei dunque potuto essere una buona fonte per le informazioni mancanti.

Ricordammo insieme quel lontano periodo della nostra vita; ulteriori ricordi affiorano poi l'estate scorsa a Pozzuolo Umbro, dove i Rasetti hanno una bella proprietà, e dove ebbi la ventura di trovare Franco in persona.

Promisi alla signora Rasetti di farle pervenire quelle notizie, e quelle fotografie, di cui potevo disporre; ma la mia fu una promessa da marinaio.

La prematura e dolorosa scomparsa del mio antico compagno di studi, mi induce a raccolgere e ad esporre i miei ricordi, così che non vada completamente perduta anche questa traccia, sia pure modesta e tenue, del suo passaggio fra noi.

Dopo brevissima permanenza a Pisa, come studente del primo anno di Fisica ed alunno della Scuola Normale Superiore, fui chiamato, nel marzo del 1918, in servizio militare; eravamo in guerra, la prima guerra mondiale. Ritornai agli studi assai tardi, iscritto al terzo anno; trovai la scuola popolata da ufficiali di vario grado, antichi scolari che, come me, avevano dovuto interrompere gli studi a causa della guerra, ed alcuni giovinetti in borghese, che noi, forti delle nostre divise e dei nostri galloni, considerammo inizialmente con supremo disprezzo e superiorità.

Ben presto però dovemmo accorgerci che fra loro ve ne era qualcuno meritevole di particolare considerazione. E ben presto si strinse fra tutti noi una cara e simpatica amicizia, cementata dalla consapevolezza di appartenere ad una scuola illustre, e dal comune appellativo di «sgobboni», che ci veniva gratificato dagli altri studenti.

\* Archivio di Stato di Firenze, Fondo Nello Carrara, Relazione tenuta al Rotary Club di Firenze il 16 maggio 1955. Pubblicato su concessione del Ministero dei Beni e delle Attività culturali e del Turismo. Divieto di ulteriori riproduzioni o duplicazioni con qualsiasi mezzo. Le figure sono state introdotte dai curatori della presente pubblicazione.

**Fig. 1** – Adele Galeotti Rasetti (Narni, 8 gennaio 1870-Pozzuolo Umbro, 30 ottobre 1972) (seconda in piedi da sinistra) nella classe di pittura con le compagne di studio. Sulla sinistra Giovanni Fattori. La foto è del 1898 circa. [Per cortesia della Fondazione Franco Rasetti]

**Fig. 2** – La villa a Pozzuolo Umbro – frazione del comune di Castiglione del Lago (Perugia) – della famiglia Rasetti. [Per cortesia di Stefano Malvagia]

**Fig. 3** – Nello Carrara alla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1920. [Per cortesia di Eugenio Carrara]



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

Fondata da Napoleone nel 1813 come succursale della *Ecole Normale Supérieure* di Parigi, la Scuola Pisana ha sede nel bel Palazzo Vasariano dei Cavalieri di Santo Stefano.

Gli studenti, per esservi ammessi, dopo la maturità classica o scientifica, debbono sostenere difficili prove. In seguito frequentano i normali corsi universitari, e debbono regolarmente sostenere e superare gli esami con una media non inferiore al 27; debbono inoltre seguire alcuni corsi speciali, complementari nella Scuola. E in compenso hanno l'alloggio e il vitto gratuiti nello stesso Palazzo; hanno a disposizione una meravigliosa biblioteca; godono dei vantaggi che porta la vita in comune in un severo ambiente di studi.

L'ambiente era allora veramente severo, molto più di quanto non lo sia ora; scale immense, trete e buie; camere, per noi normalisti, vaste, fredde, francescanamente ammobiliate; cibo monotono e scarso duravano le restrizioni di guerra – ; severissimi e inaccessibili i professori: Bianchi, Bertini, Maggi, Puccianti, Nasini, D'Achiardi e via dicendo, nomi illustri, di fama mondiale.

Ma la nostra giovinezza e la nostra gaiezza temperavano l'austerità dell'ambiente, e, raggiunto fra di noi l'affiatamento, le nostre menti si allenarono insieme agli studi e alle burle.

Cominciammo così: davanti al nostro Palazzo, a fronte della meravigliosa scalinata d'accesso, si erge la mole della gigantesca statua a Cosimo I (ai piedi della quale chioccola l'acqua da una graziosa fontana). Non ricordo bene a chi venne in mente di adornare la nuda testa del Granduca con un adeguato copricapo: una notte decidemmo di fare una prima scalata della statua per prenderne le misure. L'impresa risultò tutt'altro che facile. Vista dal basso, la statua sembrava accessibile, ma per salire fino alla testa occorrevano doti di agilità non comuni. Solo in due superammo il cimento: io ed un altro ragazzo press'a poco della mia statura, che non presentava alcuna particolare caratteristica per farsi notare. Insieme arrivammo in cima nelle più strane posizioni e con adeguate contorsioni svolgemmo il nostro compito. Quasi una settimana durò la fabbricazione di un piumato e variopinto cilindro, che richiese spese, non indifferenti per le nostre tasche. E finalmente, i medesimi ardimentosi poterono notte tempo coronare l'opera. Il successo fu notevole; la statua così adornata richiamò l'attenzione del pubblico; avemmo l'onore di vederla citata sui giornali, con paternali dirette ai soliti ignoti. Fino a che una squadra di spazzini, provvisti di scale e attrezzi, fu inviata dal Comune a togliere l'indegno copricapo.

Il mio collaboratore nell'epica impresa era stato proprio Fermi. Quel Fermi che avevo già avuto modo di apprezzare come vorace mangiatore di castagnaccini, necessaria integrazione alla nostra parca mensa. Quel Fermi che già mi aveva intimidito in aula col suo incredibile sapere.

Il compito di chiarire alle nostre menti il mistero dell'analisi infinitesimale era affidato ad un valente professore, ex normalista, dalla cui bocca uscivano con incredibile velocità teoremi e spruzzi di saliva. Un giorno, al termine di una lezione particolarmente faticosa per l'insegnante e per noi, Fermi si alzò, e con la sua caratteristica, strascicata voce, espresse il parere che tutto quanto era stato detto, avrebbe potuto essere presentato sotto un aspetto assai più semplice. Il professore lo prese in parola e lo invitò ad esporre l'argomento secondo il suo punto di vista. Per il timore che tutti noi avevamo per i luminari della scienza, il gesto



**Fig. 4** – Luigi Puccianti (Pisa, 11 giugno 1875–Pisa, 9 giugno 1952) (costruì uno spettroscopio ad alta sensibilità, con il quale studiò l'assorbimento di raggi infrarossi di molti composti, ponendo in correlazione gli spettri con le strutture molecolari).



Pisa - Monumento a Cosimo I De' Medici in piazza dei Cavalieri  
(P. Francavilla sec. XVII)

**Fig. 5** – Il monumento a Cosimo I dei Medici in piazza dei Cavalieri a Pisa in un'immagine del 1920 circa. [Collezione Giannini] Alle sue spalle il palazzo della Carovana (o dei Cavalieri) – già quartier generale dell'Ordine dei cavalieri di Santo Stefano – sede storica della Scuola Normale Superiore di Pisa.

di Fermi apparve di una audacia inconcepibile: ma il Fermi, in un glaciale silenzio di attesa, fece una brillantissima lezione, riscuotendo la completa approvazione del difficile professore e lasciando in noi un senso di reverente sgomento.

Il Fermi non era uno scolaro come gli altri: non studiava alcuna lezione, e non ne aveva bisogno; andava per conto suo. Mentre noi eravamo costretti ad affannarci per poter seguire gli insegnanti, egli si occupava già dei problemi più attuali della Fisica. Chi di noi conosceva a fondo quel misterioso personaggio della termodinamica, che va solto il nome di entropia? Nessuno; ma Fermi aveva già da dire qualche cosa di nuovo sul suo conto.

Uno dei principali svaghi di noi normalisti, cui si erano frattanto aggiunti alcuni altri simpatici e valenti studenti, erano le escursioni invernali sulle Alpi Apuane. Facevano parte del gruppo quasi sempre un aspirante filosofo, anche lui attualmente in America, De' Negri, qualche ragazzo della tribù dei Pontecorvo, sempre Rasetti, qualche volta Fermi. Tutti riconoscevano la superiore preparazione alpinistica di Rasetti, il quale si prendeva in ogni caso l'iniziativa, e i cui ordini erano legge: Rasetti era fino da allora un uomo straordinario; dotato di grandissima intelligenza e di straordinaria memoria, conosceva una enorme quantità di cose; la sua cultura e i suoi interessi andavano dalla fisica ai coleotteri, di cui aveva una fra le migliori collezioni di tutta Italia: dalla chimica all'arte, alla letteratura. Alto, magro, con un mento prominente, che denotava la sua straordinaria forza di volontà, estremamente preciso nelle sue cose, nella sua attività, nei suoi movimenti, sguardo acutissimo e penetrante, spirito caustico molto temibile, egli si faceva notare di primo acchito. Quanto Fermi passava inosservato, tanto Rasetti con la sua rumorosa, crosciante, petulante risata su tutto e su tutti, richiamava immediatamente l'attenzione. È stata una mia singolare ventura aver potuto passare un periodo della mia vita, purtroppo assai breve, con questi due uomini eccezionali, Fermi e Rasetti.

Le Alpi Apuane, nonostante la loro modesta altezza, presentano notevoli difficoltà; irrite, dirupate, coperte d'inverno di lastroni di ghiaccio, vogliono vedere l'uomo in faccia. La soddisfazione delle difficoltà superate, i meravigliosi panorami che si presentano a chi ne raggiunga i vertici, sul mare ad ovest e sulle montagne altrove, ne costituiscono il fascino. Estremamente pericolose le eventuali cadute. Ed ecco che noi, riconoscendo l'opportunità di placare la divinità della montagna, facevamo precipitare a valle di tanto in tanto qualche masso, con un complicato rito propiziatorio. Logicamente la caduta del masso avrebbe fatto accrescere l'entropia dell'universo, che così soddisfatta, speravamo ci avrebbe risparmiato. E poiché mai nulla di spiacevole accadde, possiamo concludere che i rituali sacrifici dell'entropia furono veramente efficaci.

Fu proprio in occasione di quelle escursioni e di questi sacrifici propiziatori, che Fermi ci iniziò alle sue nuove e straordinarie idee in proposito all'entropia.



**Fig. 6** – Da sinistra a destra: Franco Rasetti, Nello Carrara e Enrico Fermi in una escursione sulle Alpi Apuane nel 1920. [Per cortesia di Eugenio Carrara]

Come si sa, l'entropia, nello svolgimento dei fenomeni naturali, ha il vizio di crescere sempre; nulla può accadere nel mondo fisico senza che l'accrescimento dell'entropia sia massimo; l'accrescimento dell'entropia è criterio per distinguere i fenomeni che possono realmente manifestarsi dagli altri; caratterizza i fenomeni irreversibili.

Consideriamone uno dei più semplici; un recipiente

pieno di un qualsiasi gas, ad una determinata temperatura e pressione. Un secondo recipiente, inizialmente vuoto, viene posto in comunicazione col primo. Una parte del gas passa allora dal primo al secondo e, dopo un tempo conveniente, il gas si distribuisce nei due recipienti, assumendo una diversa pressione. Questo processo è irreversibile, perché mai si è potuto constatare che il gas, distribuito nei due recipienti, spontaneamente si raccolga in uno solo; e durante questo processo l'entropia aumenta.

La legge di distribuzione delle velocità fra le molecole del gas, proposta dal Maxwell, la teoria cinetica dei gas che ne consegue elaborata dal Boltzmann, permettono la formulazione matematica dell'entropia; e, ammettendo che il gas evolva spontaneamente da stati meno probabili a stati più probabili, l'entropia risulta proporzionale al logaritmo della probabilità di stato.

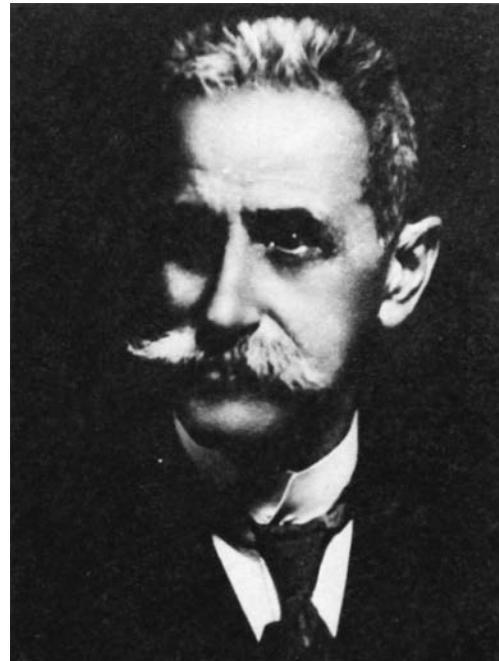
Rimaneva tuttavia una lacuna: il valore assoluto dell'entropia in uno stato non è conoscibile, ma soltanto si possono valutare le sue variazioni nel passaggio da uno stato ad un altro: come se si sapessero contare gli scalini che separano il quindicesimo piano di un grattacielo dal sedicesimo, ma non si potesse conoscere il principio della scala.

Pur con queste limitazioni, la dottrina dell'entropia aveva risolto gran numero di questioni della fisica e della chimica; la conoscenza del valore assoluto dell'entropia, del principio della scala, avrebbe tuttavia permesso progressi straordinariamente importanti.

Questo, la determinazione del valore assoluto dell'entropia, era il problema che mulinava nella mente del giovane Fermi, non ancora ventenne, che con noi mangiava il castagnaccio, saliva sulla statua di Cosimo I, faceva sacrifici all'entropia sulle Alpi Apuane; mentre noi dovevamo limitarci allo studio scolastico, e per noi durissimo, sulle dispense e sui libri, da lungo tempo abbandonati per il servizio militare.

Piccolo di statura, magro, di colore piuttosto oscuro, folti i capelli, il naso minuto, un impertinente dentino di latte in bella mostra, il capo teso in avanti, la profondità del pensiero di Fermi appariva solo dagli occhi, dalla interiorità del suo sguardo.

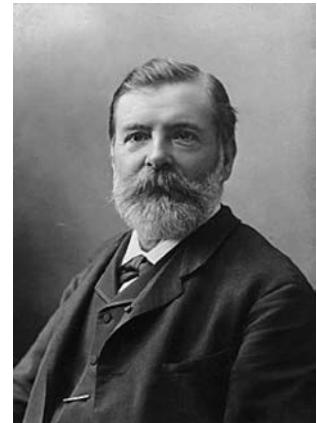
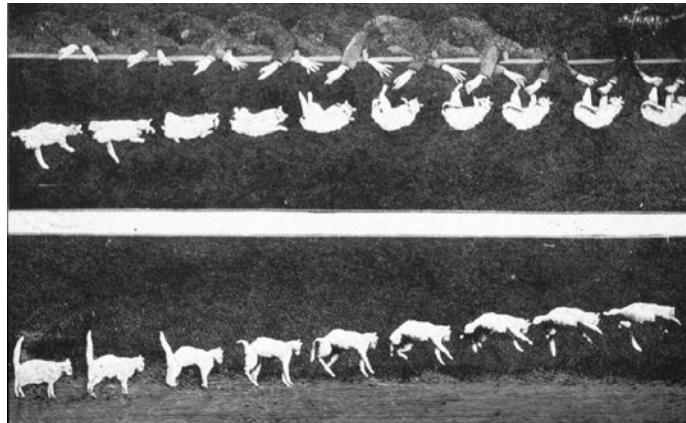
Uno degli studi più ostici era il corso di meccanica razionale del simpatico ed illustre professore Maggi, quello che non facevamo in tempo a salutare, incontrandolo per via, perché riusciva a precederci. Un lungo baffo brizzolato, drizzato in alto, il sinistro; un lungo baffo volto in basso, il destro, il vivacissimo e asciutto professore ci iniziava ai misteri delle sue figure materiali, riempiendo lavagne di formule e rifuggendo nel modo più assoluto da qualsiasi ausilio grafico, che secondo noi, sarebbe stato invece efficacissimo: la supposta retta, la retta precedentemente indicata, la retta in discorso, invece della retta  $a$ , della retta  $b$ , della retta  $c$ , e di un conveniente disegno alla lavagna, accrescevano per noi le difficoltà della difficile materia. Fermi non aveva bisogno di alcuna meditazione, egli sapeva già tutto; Rasetti imparava tutto senza sforzo e, con la sua prodigiosa memoria, era in grado di ripetere in qualunque momento qualunque pagina del testo, a cominciare dalla prefazione, compresi i segni di interpunkzione: «la presente edizione virgola sollecitamente allestita virgola per servir di guida virgola ai nostri giovani virgola». Le virgolette e le lingue straniere erano il debole del prof. Maggi, che, conoscendo perfino il russo, si diceva avesse dimenticato l'italiano, tanto involute ci apparivano le sue esposizioni.



**Fig. 7** – Gian Antonio Maggi (Milano, 19 febbraio 1857-Milano, 12 giugno 1937), studente di Kirchhoff a Berlino, tenne la cattedra di Meccanica Razionale a Pisa per circa un trentennio.

Ed un bel giorno arrivammo finalmente all'attesissimo teorema del gatto. Il gatto, comunque venga lasciato cadere, ricade sempre sulle zampe. «*Le chat retombe toujours sur ses pattes*»: questione grave, che aveva affaticato la celebre scuola dei meccanici francesi, perché apparentemente in contrasto con uno dei principi più solidi della meccanica razionale, il principio della conservazione della quantità di moto areale.

**Fig. 8** – Sequenza della caduta di un gatto ripresa nel 1894 da Étienne-Jules Marey (Beaune, 5 marzo 1830-Parigi, 15 maggio 1904). Marey inventò il cronofotografo, uno strumento, tra i precursori del cinema ma ideato per indagini scientifiche e non per l'intrattenimento, in grado di fissare le varie fasi di un movimento a scopo di studio.



se niente. Il corpo del gatto può rappresentarsi schematicamente, e in modo approssimato, mediante due paia di masse sferoidali lungo due asse girevoli intorno ad uno stesso asse e capaci di una rotazione relativa.  $m_1$ ,  $m_1'$  sono le masse che stanno a indicare le zampe anteriori,  $m_2$ ,  $m_2'$  quelle posteriori. Il momento d'impulso totale del sistema è:

$$(20) \quad \vec{N} = 2m_1 u_1 d_1^2 + 2m_2 u_2 d_2^2, \text{ essendo } u_1, u_2 \text{ le velocità angolari delle due coppie di zampe.}$$

**Fig. 9** – Schema di un gatto secondo Max Abraham<sup>1</sup>. Max Abraham (Danzica, 23 marzo 1875-Monaco di Baviera, 16 novembre 1922) fu un fisico e matematico tedesco, tra i primi a occuparsi della teoria della relatività; lavorò in concerto con Tullio Levi-Civita e Albert Einstein, operando soprattutto in Italia.

Da eccellenti fisici sperimentalisti, Fermi, Rasetti ed io decidemmo di tentare la prova; e di tentarla in lezione, proprio durante l'attesa lezione del teorema del gatto. Rinuncio a descrivere il pandemonio che successe quando, terminata la esposizione del teorema, l'innocente bestiola fu lanciata nell'aula. Va tuttavia ricordato che il professore fu, in quell'occasione, come del resto ne eravamo certi, di grande spirito e comprensione. D'altronde era noto nell'ambiente goliardico pisano, e credo anche ai professori, che, capitano Rasetti, era stata fondata una ristrettissima società, la «Società Antiprossimo», il cui nome era tutto un programma. In quel periodo ovunque, nella scuola e nei salotti, si faceva gran parlare della teoria della relatività di Einstein. Chi la portava alle stelle e chi la considerava parto di una fantasia malata: il tempo non è assoluto ma relativo; diverso nei vari sistemi di riferimento: le dimensioni degli oggetti appaiono diverse a seconda dello stato di moto dell'osservatore; la velocità della luce invariante. Particolarmente interessava nei salotti sapere se, viaggiando a velocità prossime a quelle della luce, il corso della nostra vita sarebbe accelerato o ritardato;

<sup>1</sup> *Meccanica razionale. Appunti presi alle lezioni del Prof. Max Abraham*, G. Tenconi, Milano 1910-1911, pp. 218-221.

se, per mezzo di Einstein sarebbe stato possibile disporre dell'elisir di lunga vita. Avvenne così che il prof. Maggi si trovò in obbligo di manifestare la sua opinione, ciò che egli fece con una «esposizione compendiosa dei principi scientifici della teoria della relatività generale». Fermi era già padrone di questa sottile e profonda teoria. Ed io ricordo le lezioni che egli ne fece, nell'aula di fisica, essendo seduti, nei banchi degli scolari, gli stessi professori. E da quel giorno Fermi fu quelli che sopra gli altri come aquila vola. Ma, nonostante la potenza del suo volo, egli rimase, allora e sempre, il caro compagno, semplice e buono, che partecipava alla nostra vita, alle nostre birbonate, al quale sempre potevamo ricorrere, certi del suo aiuto.

Mentre la «Società Antiprossimo» iniziava la sua attività, di cui una delle prime manifestazioni fu il lancio del gatto – e una delle successive il lancio di pezzetti di sodio metallico durante i giorni di pioggia ai piedi dei passanti, per goderne le subitanee reazioni alla improvvisa fiammata provocata dal sodio al contatto con l'acqua – i membri della medesima società erano alle prese non solo con la teoria della relatività ma anche con la teoria dei quanti, che insieme con la prima, anzi più della prima, stava sconvolgendo la fisica dalle fondamenta. È molto probabile che di nostra iniziativa non avremmo neppure pensato alla possibilità di affrontare una teoria così nuova e misteriosa, se non ci avesse stimolato la consapevolezza che per Fermi si trattava di affari di ordinaria amministrazione.

I quanti sono davvero qualche cosa di misterioso; de Broglie, l'iniziatore della meccanica ondulatoria e Premio Nobel nel 1941 scriveva «per conto mio ero ventenne quando ho cominciato ad occuparmene, è dunque un quarto di secolo che medito su di essi; ebbene, debbo umilmente confessarlo, che se sono giunto nel corso di queste meditazioni a capire un po' meglio qualcuno dei loro aspetti, io non so davvero che cosa realmente nasconde la maschera che ne copre il volto. Mi pare tuttavia che una cosa possa essere affermata: nonostante l'ampiezza e l'importanza dei progressi compiuti dalla fisica negli ultimi secoli, finché i fisici ignoravano l'esistenza dei quanti, nulla potevano comprendere dell'intima e profonda natura dei fenomeni fisici, perché senza quanti non ci sarebbe né luce né materia, e, se è lecito parafrasare un testo evangelico, si può dire che nulla di quello che è stato fatto è stato fatto senza di essi».

Soltanto oggi possiamo misurare l'estensione della rivoluzione compiuta dai quanti. La fisica classica ci mostrava l'universo simile ad un gigantesco meccanismo, suscettibile di essere descritto con assoluta precisione, localizzando le sue parti nello spazio e la loro modifica- zione nel tempo; meccanismo la cui evoluzione poteva essere rigorosamente prevista in base a un certo numero di dati sulla sua situazione iniziale.

La teoria della relatività, pur rimaneggiando profondamente queste idee, le aveva però sufficientemente rispettate e non sconfessava il determinismo classico. Non così la teoria dei quanti, che, non permettendo di rappresentare con continuità nello schema dello spazio e del tempo, l'evoluzione di fenomeni naturali, obbliga a modificarne completamente il concetto.

L'origine della teoria dei quanti si trova nelle ricerche compiute da Max Planck sulla teoria dell'irraggiamento del corpo nero. I metodi della fisica classica, applicati a questo problema, conducevano a conclusioni non solo in contrasto con l'esperienza, ma addirittura assurde (Rayleigh) senza alcuna speranza di giungere ad un risultato accettabile.

Appariva la necessità di introdurre nella fisica punti di vista affatto nuovi, Planck ebbe allora l'idea geniale di enunziare un postulato interamente estraneo alle concezioni classiche, che è il seguente: la materia non può emettere energia raggiante che per quantità finite, proporzionali alla frequenza: il fattore di proporzionalità è una costante universale delle dimensioni di un'azione meccanica. È la celebre costante  $\hbar$  di Planck. Partendo da questo postulato, paradossale secondo la fisica classica, Planck giunse a scrivere una legge dell'irraggiamento termico, cui è legato il suo nome.

Il confronto mostrò che la teoria di Planck è perfettamente in accordo con l'esperienza; e a poco a poco ne apparve l'importanza fondamentale non solo nel problema particolare dell'irraggiamento del corpo nero, ma in qualunque campo.

Fu l'introduzione dei quanti ad esempio che permise la risoluzione completa dei problemi spettroscopici e consentì di svelare il segreto della costituzione atomica e molecolare. I primi metodi per questa introduzione si debbono al Bohr e successivamente al Sommerfeld. A dir vero essi sapevano piuttosto di magia o di stregoneria, più che di scienza vera e propria: ma, con la successiva elaborazione della meccanica quantistica e ondulatoria, le regole di quantizzazione appaiono oggi sotto una luce ben diversa.

Allora però, verso il 1920, la benemerita «Società Antiprossimo» si trovava di fronte ai primi incerti e farraginosi inizi di un così brillante avvenire della teoria dei quanti e la nostra introduzione nei suoi misteri apparve estremamente faticosa.

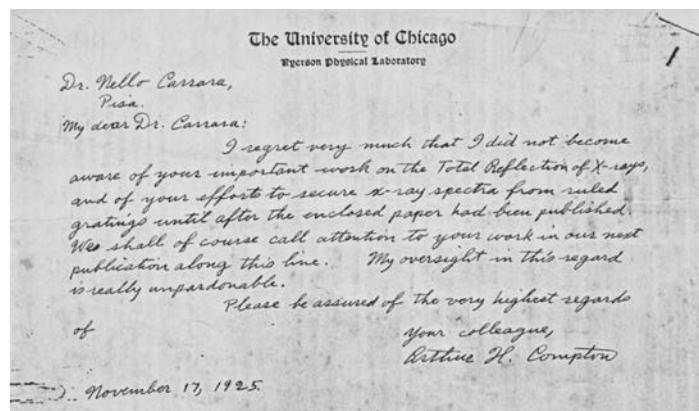
Non così per Fermi, il quale accoppiava ad una abilità matematica eccezionale una altrettanto eccezionale intuizione dei fenomeni fisici. E non solo Fermi era perfettamente al corrente delle nuove idee, ma già stava maturando nella sua mente la possibilità di servirsi, per risolvere il problema che personalmente lo assillava, quello della determinazione del valore assoluto dell'entropia.

Egli pensava che, essendo le leggi spettroscopiche esaurientemente spiegate «quantizzando» i moti degli elettroni negli atomi, fosse necessario quantizzare anche i moti delle molecole nei gas. L'entropia allora, legata direttamente alla velocità delle molecole, dovrà contenere il quanto d'azione  $h$  e vi sono ragioni per prevedere che la divergenza fra l'entropia calcolata nel modo classico e quella calcolata secondo le moderne vedute quantistiche sarà sensibile specialmente verso le forti pressioni, le basse temperature, cioè per gli stati fortemente condensati o, come disse Fermi, negli stati degenerati.

Non è il caso di addentrarci nello sviluppo assai difficile della teoria del Fermi; basterà affermare che non solo egli poté arrivare alla determinazione del valore assoluto dell'entropia, ma ad accorgersi che la regola semplice del Sommerfeld per quantizzare un sistema non vale quando il sistema stesso contenga particelle identiche, com'è ad esempio il caso dell'elio, il cui atomo contiene due elettroni fra loro indistinguibili: qui spuntava in germe il principio di esclusione del Pauli.

Mentre Fermi era perduto dietro a queste elevate speculazioni teoriche, io andavo elaborando il mio lavoro di tesi di laurea: un lavoro sperimentale su un argomento allora di grande attualità: lo studio della diffrazione dei raggi X mediante i cristalli. Si trattava di ripetere e discutere difficili esperienze di Friedrich, di Knipping e di Bragg, di cui tutti allora parlavano. Oggi, che si possono acquistare spettroografi a raggi X così come si compra un microscopio, non ci si può rendere conto delle difficoltà cui andava incontro un inesperto ragazzo, di fronte ad esperienze così nuove e sconcertanti. Tutto era da fare: dai tubi per raggi X agli apparecchi per la loro alimentazione; dai dispositivi per cristalli, ai cristalli stessi. Col consiglio e con preziosi suggerimenti, mi fu di grandissimo aiuto il nostro comune maestro, prof. Puccianti, abilissimo sperimentatore, uomo di acuto ingegno e di vasta cultura, che non

**Fig. 10** – Lettera del novembre del 1925 di Arthur H. Compton – Premio Nobel per la Fisica nel 1927 – a Nello Carrara: «Mio caro Dr. Carrara, mi dispiace molto di non aver saputo dei suoi importanti lavori sulla riflessione totale dei raggi X, e dei suoi sforzi per accettare lo spettro dei raggi X tramite reticolati di diffrazione, fino a dopo la pubblicazione del lavoro che le allego. Ovvamente citeremo il suo lavoro nel nostro prossimo articolo sull'argomento. La mia svisita in questo caso è stata imperdonabile. La prego di accettare i migliori omaggi da parte del suo collega Arthur H. Compton». [Per cortesia di Eugenio Carrara]



posso ricordare se non con la più profonda commozione, perché mi fu paterno amico fino ai suoi ultimi giorni. Anche Fermi mi assisteva in queste ricerche, e, se il suo aiuto mi fu prezioso per la parte teorica, fu invece nullo per la parte sperimentale propriamente detta, per la quale pareva non avesse alcuna particolare disposizione. Questa impressione, che conservo ben viva nel ricordo, doveva essere clamorosamente smentita, perché Fermi si dimostrò grandissimo, non solo come teorico, ma anche come uomo di laboratorio.

La nostra giornata era davvero piena di avventure: avventure scientifiche, avventure go-liardiche. Rasetti, che pure seguiva il mio lavoro di tesi e mi consolava nelle numerose difficoltà, aveva messo singolarmente a profitto della «Società Antiprossimo» le sue molteplici conoscenze chimiche. Egli aveva elaborato sostanze estremamente pestifere, di cui fu deciso l'impiego il giorno in cui venimmo a sapere che un intero collegio di graziose ragazze sarebbe salito sul campanile pendente. Mentre le disgraziate salivano, una dietro l'altra, la scala a chiocciola che corre lungo la torre, fu gettata nell'interno una delle più poderose ed efficienti bombe Rasetti. Un odore tremendo riempì il campanile; alcune ragazze si sentirono male, alcune addirittura svannero: l'avvenimento ebbe l'onore della cronaca.

Ad avventure del genere, faticose e pericolose, seguivano periodi di riposo dedicati alla attenta lettura e al commento del Corriere dei Piccoli, in casa Rasetti. Tutto valeva a farci ridere; e fra le risate emergeva in modo particolare quella di Rasetti; tutto appariva straordinariamente divertente.

Di pari passo si sviluppava l'attività sportiva: alle escursioni in montagna si alternavano gite in bicicletta nei dintorni di Pisa; e per poco una di queste non ebbe conseguenze spia-cevoli. Andavamo verso Navacchio di passo turistico, navigando in un mare di fango per le recenti piogge, con scassatissime biciclette prese a nolo. Erano momenti politicamente assai inquieti e gli studenti, in modo particolare, erano malvisti: l'attraverso di alcuni paesi già ci era stato motivo di inquietudine, e finalmente passando per la piazzetta di non ricordo più quale località, fummo salvi solo perché la bicicletta di Fermi non aveva parafanghi. La vista di Fermi, mutato in una maschera di fango, volse in riso e innocua derisione le gravi minacce che ci erano state rivolte.

Potrei continuare a lungo con la descrizione di queste avventure. Ma il tempo passa. Pre-sa finalmente la laurea con piena soddisfazione e scelto come assistente dal mio professore, dopo breve tempo dovetti nuovamente abbandonare studi ed amici perché richiamato in servizio militare. La guerra era finita, ma il nostro paese non era tranquillo. Mi aspettava un servizio davvero poco divertente.

Nel lasciare i miei amici, in particolare ben ricordo di aver detto rivolto a Fermi: quando ritornerò e avrai avuto il Premio Nobel, non mi guarderai mica dall'alto in basso!

Ma quando ritornai, ormai libero da obblighi militari, Fermi non era più a Pisa; appena laureato era stato chiamato all'Università di Firenze.

Là potei continuare a frequentarlo, favorito dal fatto che sono fiorentino e che i miei ge-nitori e la mia casa paterna sono a Firenze.

Nella nuova destinazione Fermi continuava a meditare sui problemi riguardanti l'entropia. Se nel calcolo dell'entropia è la legge dei quanti che domina e non la meccanica classica, tutto l'edificio teorico corrente, nel quale era stato inquadrato fino allora il comportamento dei gas ignorando il concetto di discontinuità del Planck, avrebbe dovuto essere corretto; si poteva pensare che, con la quantizzazione, i risultati sarebbero stati diversi e più conformi all'esperienza specialmente alle basse temperature, alle forti pressioni, ossia in stato di degenerazione.

Una regola importantissima era stata enunciata in quel tempo dal fisico Pauli, in aggiunta alle regole di Bohr e Sommerfeld, e cioè che quando in un atomo esiste un elettrone, il cui moto è definito da quattro numeri quantici, è escluso che a un altro elettrone corrispondano i medesimi numeri: questo principio di esclusione affermava dunque che in un atomo un solo elettrone può stare in una determinata condizione quantica. Pauli dimostrò che la siste-

matica degli spettri è dominata da questo principio: e non solo quella degli spettri atomici, ma anche quella degli spettri molecolari.

E il Fermi compì l'ardito passo di estendere la regola all'insieme delle molecole costituenti la massa gassosa ed elaborò sulla base della regola di Pauli, una nuova statistica dei moti molecolari che da lui ha preso il nome.

Le conseguenze della statistica di Fermi non tardarono ad essere sempre più numerose ed importanti. Nella sua luce furono risolti problemi famosi sui calori specifici dei gas e dei metalli; furono completamente chiarite la legge di Wiedmann e Franz sul rapporto fra conducibilità termica ed elettrica, la legge di Richardson dell'emissione termoelettronica, l'effetto Volta, l'effetto Peltier, la conduzione elettrica dei metalli e dei semiconduttori e così via; i modernissimi diodi a cristallo di silicio e di germanio, e i transistor, che costituiscono l'ultima novità dell'elettronica, e tanto avvenire sembrano avere in ogni campo della moderna civiltà, derivano dalla statistica di Fermi.

Due sono oggi le statistiche che dominano la fisica: quella di Bose-Einstein e quella di Fermi-Dirac; l'una valevole tipicamente per i fotoni, l'altra per gli elettroni. La meccanica ondulatoria ha stabilito un criterio generale per conoscere quale delle due debba essere applicata. Un insieme di particelle uguali possono obbedire all'una o all'altra statistica. Si tratta di considerare una certa funzione, detta funzione d'onda, che dipende dalle coordinate dello spazio e dal momento angolare o spin delle particelle. Per le particelle che, come i fotoni, seguono la statistica di Bose, la funzione d'onda è simmetrica, per quelle invece che, come gli elettroni, seguono la statistica di Fermi, la funzione è antisimmetrica. Questo risultato è di straordinaria importanza in quanto ha consentito di raggiungere profonde informazioni sulla struttura dei nuclei atomici, e, fra l'altro, ha permesso di escludere nei nuclei stessi, la presenza degli elettroni.

Come ho detto, Fermi elaborava queste nuovissime teorie a Firenze, nella quiete del laboratorio dell'Istituto di Fisica di Arcetri, fondato da un altro illustre fisico umanista della vecchia scuola, il Garbasso, nel luogo stesso dove Galileo aveva svelato per primo le vie dell'Universo.

La permanenza di Fermi a Firenze fu breve. Chiamato a Roma alla Cattedra di Fisica Teorica da Corbino, rapidamente ascese a fama internazionale. Dopo la sua partenza da Firenze, le nostre strade si separarono e solo raramente ebbi occasione di rivederlo. L'ultima volta, mi incontrai con lui durante il Congresso Voltiano sui raggi cosmici nel 1949 a Co-



**Fig. 11** – L'Istituto Nazionale di Elettroacustica fondato da Mario Corbino in Via Panisperna a Roma in una cartolina del 1943. [Collezione Giannini]



**Fig. 12** – La Società Italiana di Fisica, che aveva fondato nel dopoguerra la Scuola Internazionale di Fisica di Villa Monastero a Varenna, organizzò nel settembre del 1949 – in occasione del 150° anniversario dell'invenzione della pila – un Convegno internazionale sui Raggi cosmici, a cui partecipò Enrico Fermi (presentato dal programma come «grande fisico italo-americano»), al suo primo rientro in Italia. [Collezione Giannini]

mo. Allora egli mantenne la promessa e, nonostante il Premio Nobel e il resto, ebbe con me la familiarità degli antichi tempi.

Ritornò anche l'estate scorsa in Italia, a Varenna, per tenere un corso di Lezioni alla Scuola Internazionale organizzata dalla Società Italiana di Fisica. Non andai a Varenna, perché da lungo tempo la mia attività si svolge in altre direzioni. Tuttavia, non volendo rinunciare ad un nuovo incontro con lui, pregai la signora Rasetti di combinare una riunione in Valdarno, dove parenti della signora Fermi posseggono una villa assai prossima alla nostra. La riunione non poté avvenire, perché Fermi, già sofferente per i primi e pur gravi sintomi del male, dopo un breve soggiorno in alta Italia, fece direttamente ritorno in America.



**Fig. 13** – 'Il Frassine,' la villa a Rignano sull'Arno frequentata da Enrico Fermi. [Collezione Giannini] Della villa in Valdarno ne parla anche Laura Fermi nel libro *Atomi in famiglia* (Arnoldo Mondadori Editore, Verona 1954, pp- 66-67).

Pochi mesi dopo, seppi che Fermi era stato sottoposto ad un grave atto operativo, poi la notizia ferale della immatura fine.

Vi leggo quanto mi scrisse in tale occasione la signora Rasetti.

«La morte, dovuta ad un embolo, fu pietosa con lui, risparmiandogli gli ultimi tempi della malattia che sono i più atroci, l'unica consolazione che abbiamo avuto è stata il sapere che non ha sofferto molto, dormendo quasi sempre sotto l'influsso di uno speciale calmante. Segrè che andò a visitarlo prima e stette qualche giorno con lui, disse che Fermi e la moglie erano perfettamente informati della malattia e che ne parlavano con uno stoicismo incredibile. Discorsi degni – scrisse Segrè – dei dialoghi di Platone».

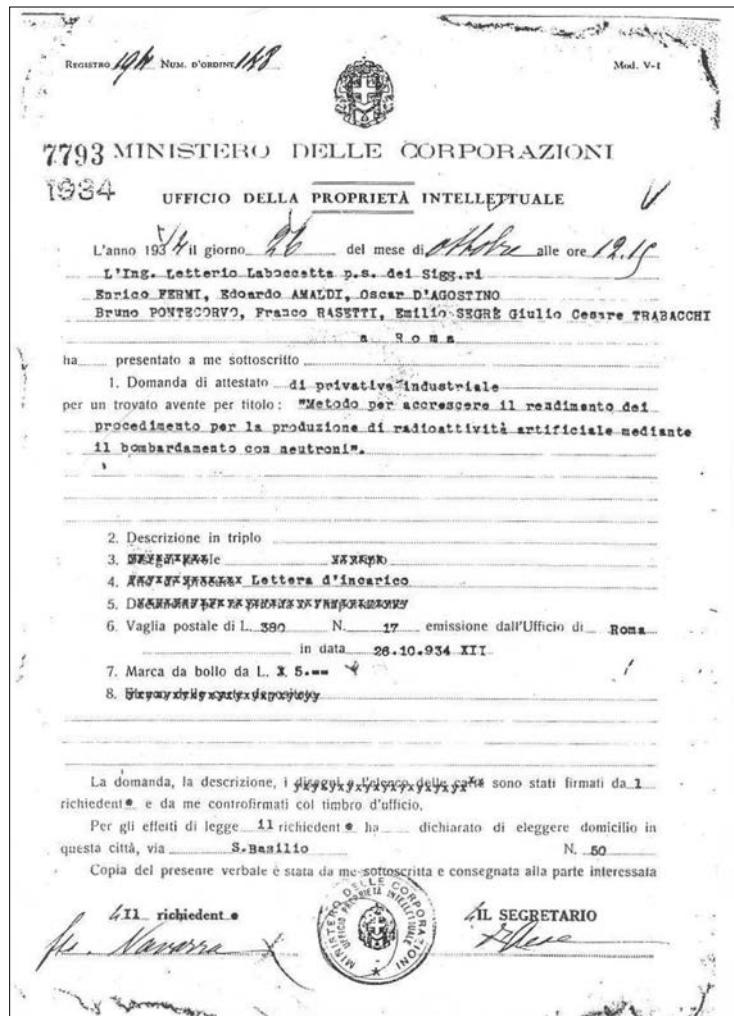
Non sono certo la persona più qualificata per render conto delle successive grandi scoperte di Fermi; ho già detto che i campi in cui si svolsero le nostre attività furono diversi. Mi proverò tuttavia a darne un cenno, sia pure fugacemente.

Se la statistica di Fermi escludeva che l'interno dei nuclei atomici potesse alloggiare elettroni, tuttavia era un fatto sperimentale che nelle trasformazioni radioattive i nuclei espellono proprio elettroni, dotati di alta velocità, i cosiddetti raggi beta. Era dunque naturale che l'attenzione di Fermi fosse richiamata da questa apparente contraddizione fra la sua statistica e i fatti sperimentali accertati. Per di più, mentre i fenomeni atomici e subatomici sono dominati dai quanti, l'emissione beta sembra sottrarvisi, in quanto si riscontra che le velocità delle particelle beta, sono distribuite in modo continuo, sino ad un certo valore massimo. Pauli aveva già suggerito che l'emissione beta potesse essere dovuta ad un processo nucleare nel quale un protone si trasforma in neutrone, emettendo appunto un elettrone – la particella beta –. Ma, per rispettare il principio della conservazione dell'energia, egli era stato costretto ad ammettere che insieme con l'elettrone venisse espulsa un'altra particella, neutra e di massa trascurabile, e perciò irrilevabile negli esperimenti. Fermi, ripreso il suggerimento di Pauli, seppe dargli forma quantitativamente e fornire solide argomentazioni a favore dell'esistenza della nuova particella che prese poi, in tutto il mondo scientifico, su sua proposta, la denominazione di «neutrino».

In quello stesso periodo di tempo, a Parigi i coniugi Joliot e Curie riuscivano a produrre artificialmente alcuni nuclei radioattivi, bombardando con particelle nuclei di elementi leggeri. Fermi, illuminato da questa possibilità, e pensando che i neutroni, sprovvisti di carica elettrica, dovessero risultare ben più efficaci, mosse all'attacco dei nuclei atomici sottoponendoli a bombardamento neutronico. Scoprì così nel 1934 la radioattività artificiale, in collaborazione con i ragazzi di Corbino, cioè con quel gruppo di valentissimi giovani, fra cui Rasetti, Amaldi, Segrè, che Corbino aveva saputo riunire nel suo Istituto romano. Ad arricchire la preziosa raccolta di risultati che rapidamente essi ottennero col bombardamento neutronico, si aggiunse poi la casuale scoperta della molto maggiore efficacia dei neutroni lenti. Negli anni successivi Fermi e i suoi collaboratori si dedicarono alla estensione dei risultati conseguiti, finché nel 1939 Fermi, ottenuto il Premio Nobel, si trasferì stabilmente in America alla Columbia University. Già avevano lasciato l'Italia Rasetti e Segrè e Pontecorvo. Non si può a questo punto tacere la profonda amarezza nella constatazione di un così grave dissanguamento del nostro Paese, che tuttora continua, e rivolgere un invito alla ricerca dei mezzi adeguati per porvi riparo.

Nel 1939, dopo la scoperta di Hahn e Strassmann della scissione dell'uranio, sulla base di uno dei più importanti risultati ottenuti da Fermi col bombardamento a mezzo di neutroni lenti, Fermi rivolse la sua attenzione sull'assorbimento e sulla emissione di neutroni nel corso della scissione o fissione. Da qui sorse l'idea del processo a catena e della pila atomica, costruita a Chicago nel 1942.

Finita la seconda guerra mondiale, Fermi si dedicò allo studio dei mesoni. La sua ultima scoperta fu che i nuclei di idrogeno bombardati con mesoni veloci, passano ad uno stato eccitato, equivalente ad un aumento della loro massa; meravigliosa conferma della equivalenza della materia e della energia.



**Fig. 14** – La richiesta di brevetto del 1934 per la scoperta della radioattività artificiale di Enrico Fermi, Edoardo Amaldi, Cesare D'Agostino, Bruno Pontecorvo, Franco Rasetti, Emilio Segrè e Giulio Cesare Trabacchi.

Il rimpianto per la perdita di uno scienziato di così alto valore, il cui nome va affiancato a quelli di Galileo e di Newton, di colui che per primo ha messo a disposizione dell'uomo una grandiosa fonte di energia non derivante dal Sole, è stato universale; ma, nel rimpianto si insinua una sottile inquietudine: egli ha contribuito alla ideazione e alla realizzazione della bomba atomica, che avrebbe potuto essere usata contro il suo stesso Paese.

«Noi chiniam fronte al massimo Fattor, che volle in lui del creator suo spirito più vasta orma stampare»<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> A. Manzoni, *Il cinque maggio*, vv. 32-36.



# Enrico Fermi e la nascita dell'elettronica dei semiconduttori

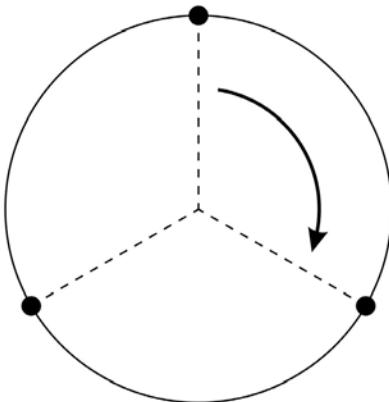
Giuseppe Pelosi, Massimiliano Pieraccini

Enrico Fermi fu un fisico. Uno dei più grandi. Ma con lo spirito di un ingegnere. Amava le cose concrete, le macchine, i meccanismi. Forse non era un grande riparatore di elettrodomestici, come ci testimonia la moglie nella brillante biografia *Atomi in famiglia*<sup>1</sup>, ma sicuramente diffidava delle astrattezze, di certe «fumisterie teutoniche», come all'inizio gli apparve la nascente meccanica quantistica. E questa fu la sua forza.

Di certo all'inizio controvoglia, ma poi afferrò profondamente la realtà della nuova fisica dei quanti, con tutte le sue implicazioni più controintuitive. E non per il gusto della disquisizione filosofica, ma per trovarne immediate applicazioni pratiche. E che applicazioni! Nientemeno che il primo reattore nucleare.

Ma la fisica nucleare non fu l'unico suo interesse. Anzi, soprattutto all'inizio della carriera, non c'era argomento scientifico che non lo interessasse. Una voracità insaziabile, anche se limitata alla sola scienza, come notavano scherzosamente la moglie e gli amici. E il suo primo grande contributo, in effetti, non fu di fisica nucleare, ma di statistica. Un argomento per certi versi piuttosto esoterico. Come contare gli stati possibili degli atomi in un gas perfetto. Una questione che in fisica quantistica non è così ovvia come sembra. Fermi stesso fa un esempio illuminante. Prendiamo un ipotetico sistema di tre particelle, disposte sui tre vertici di un triangolo equilatero, come mostrato nella figura che segue.

Se le particelle fossero distinguibili, ad esempio fossero tre palline, una rossa, una verde, una blu, le possibili configurazioni sarebbero tre, ovvero le tre rotazioni di 120°. Ma se le palline sono indistinguibili, ogni rotazione di 120° riporta il sistema nella condizione iniziale. Non ci sono tre stati possibili, ma solo uno. La questione è una di quelle profonde che fanno girare la testa. Le proprietà di un sistema fisico (le tre palline) non sono più intrinseche agli oggetti che lo compongono, ma legate a una qualità che ha a che fare con l'osservatore. Per un vedente le configurazioni sono tre, per un cieco una sola! C'è ovviamente qualcosa che non va. Un rompicapo per filosofi. Ma Fermi aborrisce la filosofia



**Fig. 1** – Tre particelle sui tre vertici di un triangolo equilatero<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> L. Fermi, *Atoms in the Family. My life with Enrico Fermi*, University of Chicago Press, Chicago 1954.

<sup>2</sup> Rielaborazione grafica tratta da E. Fermi, *Considerazioni sulla quantizzazione dei sistemi che contengono degli elementi identici*, «Nuovo Cimento», anno I, n. 1, 1924, pp. 145-152.

e quindi affrontò la cosa con il piglio dell'ingegnere: vediamo come tutto ciò ha a che fare con i valori dei calori specifici. Ebbene, se ne infischiarono dei paradossi filosofici e risolse il problema di termodinamica. Questo era Enrico Fermi. All'epoca un giovane assistente all'Università di Firenze.

Ne scrisse quindi una memoria in italiano<sup>3</sup> e in tedesco<sup>4</sup>, che lo avrebbe fatto entrare nella storia. Ma non subito. Troppo scarna, un linguaggio troppo pratico. I fisici dell'epoca non lo capirono subito. Il grande teorico inglese P.A.M. Dirac la lesse, ma non ne fu impressionato. Gli sembrò solo una particolare applicazione, niente di fondamentale. In realtà era la soluzione al problema a cui stava lavorando da molti mesi. Non ci è dato sapere se qualcosa dell'articolo di Fermi si sedimentò in un angolo remoto del cervello di Dirac, ma comunque siano andate le cose, pochi mesi dopo, Dirac formulò la sua famosa statistica<sup>5</sup>, valevole non solo per un gas perfetto, ma per qualunque particella di spin 1/2, tra cui gli elettroni.

La formulazione di Dirac era, come al suo solito, elegante, generale e completa, ma era chiaramente basata sulle stesse idee di Fermi. Lo scienziato italiano scrive quindi una lettera, cortese ma ferma, in cui rivendicava la sua scoperta. L'inglese lo ammette di buon grado. Si ricordava dell'articolo del collega, ma non l'aveva collegato al suo lavoro. Almeno non consapevolmente.

Il fatto che la statistica Fermi-Dirac si applichi agli elettroni ha un'immediata enorme valenza applicativa. È la chiave per la comprensione della conduzione nei metalli e, di lì a poco, anche dei semiconduttori. Uno studente di elettronica di oggi incontra la statistica di Fermi-Dirac nella sua prima settimana di studio, prima di qualunque dispositivo. Fermi, a tutti gli effetti, può essere considerato uno dei padri fondatori dell'elettronica dei semiconduttori. Anche se, dopo quello storico lavoro sulla statistica, di fatto non se ne occupò più. Fu infatti Alan Wilson quattro anni dopo<sup>6</sup> ad applicare la statistica di Fermi-Dirac ai semiconduttori. Tutt'altro che sorprendente è il fatto che Wilson elaborò la teoria che attualmente usiamo per la conduzione nei semiconduttori durante un soggiorno all'Università di Lipsia, presso il gruppo di Werner Heisenberg. Ovvero in uno dei tre-quattro centri di ricerca dove stava prepotentemente nascendo la fisica quantistica.

Wilson definì il concetto di banda proibita, donatore e accettore, ma non quello di lacuna, evidentemente un po' troppo azzardato. Solo Heisenberg osò parlare esplicitamente di lacuna, ovvero di un 'buco' che si comporta come una particella. Per tutti gli anni Trenta i semiconduttori rimasero dei materiali esotici, dalle proprietà erratiche. Il grande Wolfgang Pauli, caustico e sprezzante, come era sua abitudine, sconsigliava agli amici di occuparsene<sup>7</sup>: «Sui semiconduttori è meglio non lavorare proprio, è un pasticcio, chissà poi se esistono veramente!».

Malgrado lo scetticismo dello scienziato austriaco, poco dopo la seconda guerra mondiale, William Shockley, John Bardeen e Walter Brattain, presso i laboratori Bell, inventarono il primo triodo a semiconduttore, il transistor. E fu un trionfo. In qualche decennio i

<sup>3</sup> E. Fermi, *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, «Atti dell'Accademia dei Lincei», vol. 3, 1926, pp. 145-149.

<sup>4</sup> E. Fermi, *Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases*, «Zeitschrift für Physik», vol. 36, nn. 11-12, 1926, pp. 902-912.

<sup>5</sup> P.A.M. Dirac, *On the theory of quantum mechanics*, «Proceedings of the Royal Society (London)», vol. A112, 1926, pp. 281-305.

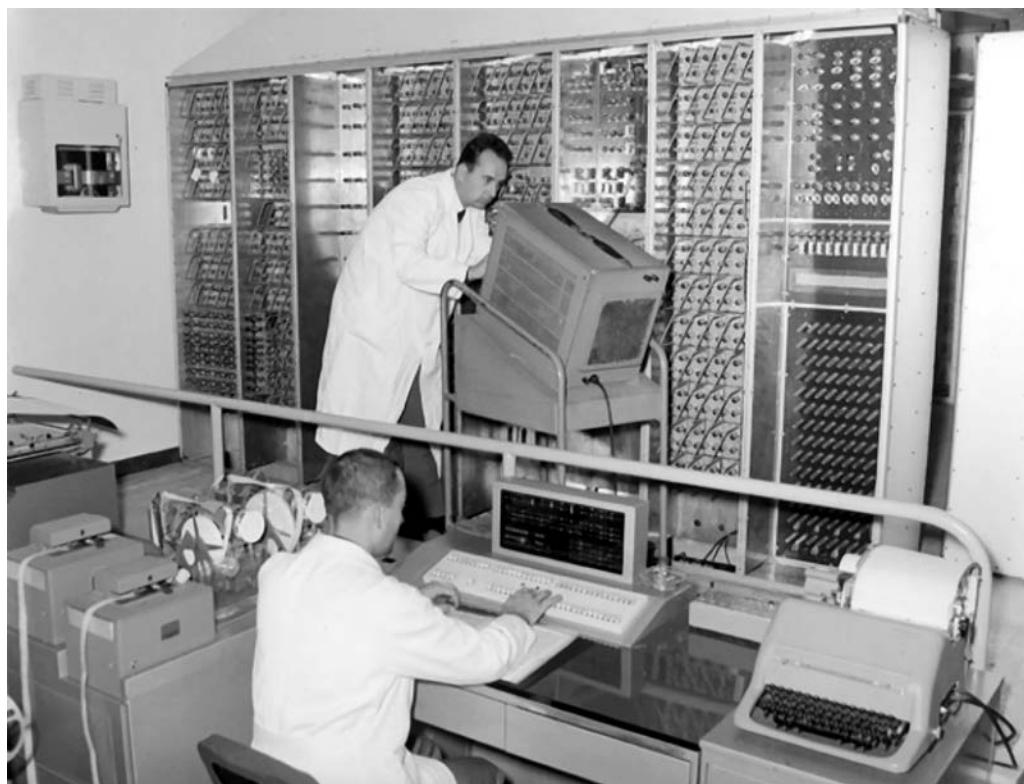
<sup>6</sup> A.H. Wilson, *The Theory of Electronic Semi-Conductors*, «Proceedings of the Royal Society (London)», vol. A133, 1931, pp. 661-677.

<sup>7</sup> G. Busch, *Early history of the physics and chemistry of semiconductors - from doubts to fact in a hundred years*, «European Journal of Physics», vol. 10, n. 4, 1989, p. 254.

semiconduttori cambiarono il mondo. Ma Fermi rimase molto distante da questi sviluppi. Non era affascinato dalle meraviglie della microelettronica, quanto piuttosto dalle applicazioni dei computer. I suoi ultimi due lavori, prima della scomparsa prematura, sono di computazione<sup>8,9</sup>.

Fermi prenotava ore di calcolo della potente macchina MANIAC per investigare problemi non lineari di fisica. Un campo che sarebbe diventato di grande moda una ventina d'anni dopo. Era così consapevole dell'importanza dei computer nel progresso scientifico che, quando nell'estate del 1954, durante il suo ultimo viaggio in Italia, gli fu chiesto come spendere una cospicua cifra che il comune di Pisa avrebbe messo a disposizione per la ricerca scientifica, non suggerì la costruzione di un reattore nucleare o di un acceleratore di particelle, ma la progettazione di un computer<sup>10</sup>.

Fu così che nacque il primo computer italiano, la CEP (Calcolatrice Elettronica Pisana). Un capolavoro di ingegneria elettronica, che gettò le basi dell'informatica italiana e dei successi commerciali di Olivetti come produttore di macchine calcolatrici.



**Fig. 2** – La CEP (Calcolatrice Elettronica Pisana), inaugurata nel novembre 1961 alla presenza del Presidente della Repubblica Giovanni Gronchi.

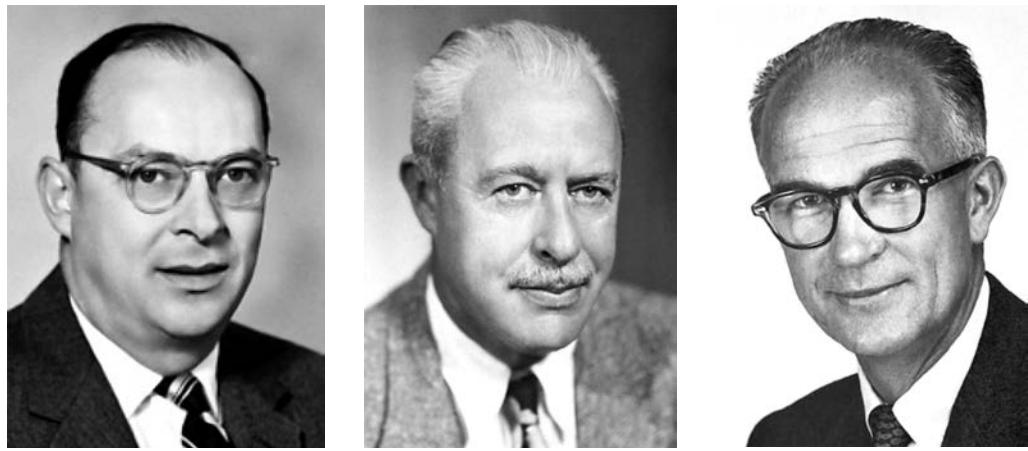
Fermi morì nel novembre del 1954, prima di poter vedere realizzato il suo suggerimento. Due anni dopo, nel 1956, ai tre inventori del transistor fu conferito il Premio Nobel. Come di consueto i premiati fecero la loro *Nobel Lecture* al cospetto delle autorità. Uno dei

<sup>8</sup> E. Fermi, N. Metropolis, *Numerical Solution of a Minimum Problem*, «Document LA-1492», November 1952.

<sup>9</sup> E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of the Nonlinear Problems*, «Document LA-1940», May 1955.

<sup>10</sup> In una lettera datata 11 agosto 1954 indirizzata al Rettore dell'Università di Pisa, Enrico Fermi scrive: «Interrogato circa le varie possibilità di impiego di tale somma, quella di costruire in Pisa una macchina calcolatrice elettronica mi è sembrata, tra le altre, di gran lunga la migliore». La lettera è conservata negli archivi dell'Università di Pisa.

**Fig. 3** – Da sinistra a destra, John Bardeen [Madison (Wisconsin, USA), 23 maggio 1908-Boston (Massachusetts, USA), 30 gennaio 1991], Walter H. Brattain [Amoy (Cina), 10 febbraio 1902-Seattle (Washington, USA), 13 ottobre, 1987] e William B. Shockley [Londra (Regno Unito), 13 febbraio 1910-Stanford (California, USA), 12 agosto 1989], vincitori nel 1956 del Premio Nobel per la Fisica per il loro lavoro sul transistor.



tre, John Bardeen, salutò, introdusse l'argomento e poi mostrò una formula<sup>11</sup>: la funzione di Fermi, proprio quella elaborata dall'italiano a Firenze nel 1926 e ripresa da Dirac pochi mesi dopo. Quel giorno Enrico Fermi fu a tutti gli effetti consacrato padre fondatore dell'elettronica dei semiconduttori.

JOHN BARDEEN

Semiconductor research leading to the point contact transistor

*Nobel Lecture, December 11, 1956*

[...]

Occupancy of the levels is given by the position of the Fermi level,  $E_F$ . The probability,  $f$ , that a level of energy  $E$  is occupied by an electron is given by the Fermi-Dirac function:

$$f = \frac{1}{1 + e^{(E - E_F)/kT}}$$

**Fig. 4** – La prima pagina della *Nobel Lecture* di John Bardeen (1956). Bardeen è stato il solo ad aver vinto due Premi Nobel per la Fisica, il primo nel 1956 (per il transistor), il secondo nel 1972 (per la supercondutività).

<sup>11</sup> Berdeen Nobel Lecture 1956, [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1956/bardeen-lecture.pdf](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1956/bardeen-lecture.pdf) (consultato nel novembre 2014).

# Una partita a tennis e tanti ricordi

Carlo Franchetti

La moglie di Enrico Fermi, Laura Capon, era sorella di mia madre Paola e quindi per noi quattro suoi figli Fermi era lo zio Enrico: lui aveva contemporaneamente le caratteristiche di essere ‘zio d’America’ e di essere anche un personaggio molto famoso. Nessuno di noi quattro l’aveva mai visto e spesso domandavamo: «quando finalmente lo incontreremo?». Nell’estate del 1945, alla fine della guerra, la mia famiglia era tornata a Gozzano dove risiedeva: mio padre era un chimico impiegato presso la Bemberg, allora un’importante fabbrica di seta artificiale. Gozzano è un paese della provincia di Novara di circa 5000 abitanti che si trova a un km dalla sponda sud del lago d’Orta a 350 metri di altezza; quando è sereno si vedono bene le Alpi, in particolare il monte Rosa.

Dopo la fine della guerra Enrico Fermi tornò in Italia due volte: nel 1949 a Como per il congresso voltiano sui raggi cosmici e nell'estate del 1954 a Varenna, sul lago di Como, dove tenne delle lezioni. Per quanto ricordi nessuno di noi incontrò Fermi nel 1949.

Nel 1954 io avevo 11 anni, mio fratello Sergio 15, mia madre 45. Varenna è relativamente vicina a Gozzano: finalmente si rese possibile il tanto atteso incontro, andammo in macchina (non so se tutta la famiglia ma io sicuramente c’ero) alla sede del convegno, pranzammo insieme a Fermi in un ristorante. Quale impres-



Gozzano - Panorama e Stabilimenti Bemberg

**Fig. 1** – Lo stabilimento della Bemberg – azienda tessile sorta in Germania agli inizi del Novecento – a Gozzano (Novara) in una immagine del 1950. [Collezione Giannini]



**Fig. 2** – Cogne (Aosta), 1949. Da sinistra a destra: Laura Capon, moglie di Enrico Fermi, con il figlio Giulio Fermi e Paola Capon Franchetti (in primo piano i suoi quattro figli).

sione ricevetti nel vederlo? Di sicuro non era di quelle persone la cui presenza incute timore a un ragazzino, l'emozione per l'incontro si calmò subito e anche il suo parlare dalla caratteristica pronuncia strascicata era tranquillizzante; ho il ricordo di un piccolo avvenimento: da un tavolo vicino si alzò una persona e chiese a Fermi un autografo (che ottenne). Qui desidero osservare che in quegli anni Fermi era molto popolare fra la gente comune, di lui si diceva: «quello che ha inventato la bomba atomica» (ritornerò su questo punto).

Alcuni giorni dopo Fermi venne da solo a trovarci a casa nostra dove si intrattenne per una giornata, dormì da noi e ripartì il giorno seguente.

In quegli anni il 'miracolo economico' era ancora lontano, ma Gozzano godeva di una relativa prosperità per via della Bemberg che impiegava più di mille operai; i suoi dipendenti godevano di un singolare privilegio: in qualunque momento volessero potevano giocare a tennis in due campi creati e mantenuti molto bene dalla Bemberg (insieme ad altre strutture sportive e di ricreazione). Naturalmente la mia famiglia ne approfittava spesso: tutti e sei vi abbiamo giocato tante volte; per questo per me il tennis è rimasto un mito.

Torno alla giornata con Fermi: il pomeriggio era libero (tranne che per mio padre che era al lavoro) e fu deciso di impiegarlo con il tennis. Enrico Fermi, mia madre, mio fratello Sergio e io andammo ai campi. Non fui considerato (giustamente) all'altezza di giocare ma solo accettato come raccattapalle. Gli altri si cimentarono in una partita detta 'all'americana', che consiste in tre sets in ciascuno dei quali un giocatore da solo fronteggia gli altri due; se un set viene vinto dal singolo gli spettano due punti, un punto per ciascuno se vince la coppia, chi fa più punti vince la partita. Vinse Enrico Fermi, non ricordo il punteggio ma ricordo il suo modo di giocare tranquillo, misurato; durante la partita mi sembrava che il giocatore coi colpi più belli fosse mio fratello Sergio che però perdeva molti punti volendo rischiare troppo, anche se per me avrebbe meritato di vincere; molto probabilmente mi sbagliavo perché Fermi era un buon giocatore e la sua fu una giusta vittoria.

A prova di questo riporterò una testimonianza. La signora Bianca Casaroli fu la bambinaia, in Italia e in America, dei due figli di Fermi dal 1930 fino al 1944; in un'intervista rilasciata nel 2002, alla domanda «Che cosa faceva Fermi nel tempo libero?» rispose (cito testualmente): «Giocava a tennis. A Roma la domenica non mancava mai una partita con i compagni di sempre: Amaldi, Segrè e soprattutto il professor Franco Rasetti, l'amico del cuore, che aveva frequentato con lui la Normale di Pisa».

**Fig. 3** – Enrico Fermi, Giuseppe Amaldi, Edoardo Amaldi ed Enrico Persico a Pera di Fassa (frazione di Pozza di Fassa, Trento) nell'estate del 1954.



un'operazione 'esplorativa'; non passò molto tempo e ci giunse la notizia della sua prematura scomparsa.

Aggiungo ora a questo resoconto alcune considerazioni personali.

Credo che nessuno di noi si accorse che Enrico Fermi stava male. Si sa che anche in quella sua ultima estate Fermi non aveva rinunciato alla sua attività sportiva, alle sue amate escursioni, dovette fermarsi solo quando il male gli impose di tornare al più presto a Chicago. Dall'America ci giunse qualche mese dopo una telefonata di mia zia Laura: comunicava che Enrico aveva subito

Enrico Fermi era «quello che ha inventato la bomba atomica»: di sicuro oggi non si direbbe così per mostrare ammirazione, anzi una simile affermazione equivarrebbe a un atto di accusa; devo dire che anche negli anni Cinquanta alcuni intellettuali vedevano Fermi in maniera molto critica collegandolo ai tragici bombardamenti atomici del 1945 in Giappone. Dal mio punto di vista gli esperimenti atomici operati negli Stati Uniti erano del tutto giustificati e opportuni date le circostanze del tempo: a questi Fermi dette un contributo fondamentale; fu invece estraneo alla successiva decisione di usare l'atomica contro il Giappone; in seguito, come è ben noto, rifiutò per motivi etici di partecipare al progetto della bomba H. Quello che turba un po' è che certi atteggiamenti del pubblico sembrano dovuti a 'mode', alla propaganda dei media piuttosto che a una riflessione personale.

Ho partecipato in passato a due avvenimenti celebrativi di Enrico Fermi. A Firenze, in occasione di un convegno sui raggi cosmici, nel settembre del 1995 fu posta a cura dell'Accademia dei Lincei nella chiesa di Santa Croce una lapide in ricordo di Fermi: erano presenti tra gli altri il presidente dei Lincei Sabatino Moscati, il ministro dell'Università Giorgio Salvini e il sindaco Mario Primicerio. A Roma nel settembre del 2001 fu celebrato il centenario della nascita di Fermi: presidente del comitato Carlo Bernardini. All'inaugurazione fu presente anche il Presidente della Repubblica Carlo Azeglio Ciampi.

In entrambe le occasioni i presentatori che erano non estranei al mondo della scienza tennero discorsi adeguati alla fama di Fermi: tributo di onore al grande scienziato; viceversa ebbi l'impressione che (specie nel primo evento) alcuni personaggi pubblici e anche stampa e televisione tenessero un basso profilo: come per dare poco rilievo all'evento, magari per non urtare la sensibilità della gente ormai abituata a considerare l'energia atomica come diabolica. Mi turbava il pensiero: «forse che lo stato un po' si vergogna di uno dei suoi più grandi scienziati?».

Nel presente mi sembra che quel disagio nel parlare di Fermi si stia pian piano dissolvendo, scienziati illustri hanno evidenziato i suoi contributi fondamentali anche in settori della fisica non connessi con l'energia atomica, la quale tuttora rimane in disgrazia.

**Fig. 4** – L'opera dello scultore Corrado Cagli posta nella Basilica di Santa Croce – la chiesa nella quale la città di Firenze ricorda da secoli i 'grandi' italiani – dedicata a Enrico Fermi.





Parte II

## **Lezioni di Meccanica Razionale**



Al suo profondo  
merito  
nuovo corso ed immutabile  
affetto

**PROF. E. FERMI**

21-6-26

## LEZIONI

DI

# MECCANICA RAZIONALE

raccolte da

B. Bonanni e P. Pasca





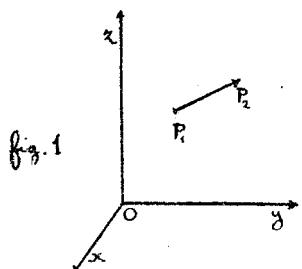




# Introduzione alla Meccanica Razionale.

## - Elementi della Teoria dei vettori. -

§1 - Dati due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , nello spazio, per portare  $P_1$  in  $P_2$  bisogna spostarlo di un tratto di lunghezza  $\overline{P_1 P_2}$ , nella direzione  $P_1 P_2$  e nel senso che va da  $P_1$  a  $P_2$ . - Ci troviamo dunque, in questo caso, di fronte ad un ente (spostamento che porta  $P_1$  in  $P_2$ ) che consta di tre elementi:



una grandezza ordinaria (la lunghezza del segmento  $\overline{P_1 P_2}$ ), una direzione (quella della retta  $P_1 P_2$ ) ed un verso (quello che va da  $P_1$  a  $P_2$ ). Nella meccanica e nella fisica ricorre spesso la considerazione di enti di questo tipo, che sono definiti da una grandezza, una direzione ed un verso. Questi enti, che si chiamano vettori o quantità vettoriali (in contrapposito a quantità scalari, che è il nome riservato alle grandezze ordinarie) sono stati perciò l'oggetto di uno studio speciale, di cui vogliamo qui esporre gli elementi.

Ocupiamoci anzitutto dei vari modi con cui si può caratterizzare matematicamente un vettore. Prendiamo, perciò un sistema ( $x, y, z$ ) di assi cartesiani ortogonali per riferimento. Il nostro vettore  $A$  è definito dalla sua grandezza e dalla sua orientazione. Per caratterizzarla daremo, dunque, la sua grandezza:

(1)

a

ed i coseni di direzione della sua orientazione:

(2)

 $\alpha, \beta, \gamma$ 

Queste quattro grandezze, che caratterizzano il vettore  $A$ , non sono indipendenti tra di loro, poiché tra  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , passa la nota relazione:

(3)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

P.es., il vettore spostamento che da  $P_1$  porta in  $P_2$  ha, per grandezza, la distanza  $P_1P_2$ , cioè, se con  $x_1, y_1, z_1$  ed  $x_2, y_2, z_2$  indichiamo le coordinate di  $P_1$  e  $P_2$ , la grandezza di questo vettore è:

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

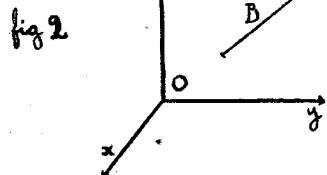
ed i suoi coseni di direzione sono:

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \quad \beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \quad \gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Per procurarsi una rappresentazione intuitiva geometrica di un vettore A, conviene rappresentarlo per mezzo di un segmento che abbia la direzione e il verso del vettore A, e lunghezza misurata dallo stesso numero che misura la grandezza del vettore A (p.es., se il vettore A è una forza, e se si prende per unità di forza il Kg. e per unità di lunghezza il cm., una forza di 7 Kg. sarà rappresentata con un segmento lungo 7 cm.). Per indicare il senso, si usa muovere il segmento di una freccia. Si intende che per la caratterizzazione del vettore quello che conta è soltanto la lunghezza e l'orientazione del segmento rappresentativo, e non la sua posizione assoluta nello spazio.

P.es., nella fig. 2, i due segmenti A e B rappresentano vettori eguali:

$$A = B$$



Per conseguenza, nella rappresentazione geometrica dei vettori, si può, secondo l'opportunità, fare, p.es., uscire tutti i segmenti rappresentativi da un estremo comune, o, comunque, disporre a piacere della loro posizione nello spazio.

Indicheremo, normalmente, i vettori con lettere minuscole, o con minuscole sormontate da una piccola freccia, e la loro grandezza col simbolo del vettore chiuso fra due astri verticali.

P.es.  $A, B, \dots$  e  $\vec{a}, \vec{b}, \dots$  rappresentano dei vettori, e  $|A|, |B|, \dots$  e  $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \dots$  rappresentano le loro grandezze.

§2: Abbiamo visto nel paragrafo precedente, che, per caratterizzare analiticamente un vettore  $A$ , basta darne la grandezza  $|A|$  ed i coseni di direzione  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , ed abbiamo anche notato che queste quattro grandezze sono vincolate dalla relazione (3). Ora, conviene, in molte applicazioni, caratterizzare  $A$  mediante tre sole grandezze indipendenti fra di loro. Per ottenere tale caratterizzazione, ci conviene introdurre la nozione importantissima di componente di un vettore  $A$  sopra un asse  $s$ . Si chiama componente di un vettore  $A$  sopra un asse  $s$ , e si indica con la scrittura  $A_s$ , uno scalare eguale al prodotto della grandezza  $|A|$  del vettore, per il coseno dell'angolo  $\vartheta$  formato tra le orientazioni di  $A$  e di  $s$ .

Abbiamo dunque:

$$(4) \quad A_s = |A| \cos \vartheta$$

$A_s$  è, dunque, in altre parole, la proiezione di  $A$  sopra l'asse  $s$ . - Siccome, poi,  $|A|$  è sempre positivo,  $A_s$  sarà positivo o negativo, secondo che  $\vartheta$  è acuto od ottuso. - Le componenti di  $A$ , sopra gli assi coordinati, sono:

$$(5) \quad A_x = |A| \alpha ; \quad A_y = |A| \beta ; \quad A_z = |A| \gamma .$$

Bossiamo, ora, facilmente dimostrare, che quando di un vettore sono date le tre componenti,  $A_x, A_y, A_z$ , sopra gli assi coordinati, il vettore è completamente determinato. Ed infatti, quadrando e sommando le (5), e tenendo conto della (3), si trova:

$$(6) \quad A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |A|^2$$

da cui, siccome  $|A| > 0$ , si trova:

$$(7) \quad |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Una volta determinata  $|A|$ , le (5) ci danno:

$$(8) \quad \alpha = \frac{A_x}{|A|} \quad , \quad \beta = \frac{A_y}{|A|} \quad , \quad \gamma = \frac{A_z}{|A|} \quad .$$

Conoscendo quindi le componenti di  $A$ , il vettore resta completamente individuato.

Dati  $A_x, A_y, A_z$ , è facile determinare la componente di  $A$  sopra una qualsiasi orientazione  $s$ ; siano infatti  $\lambda, \mu, \nu$ , i coseni direttori di  $s$ . Si avrà:

$$\cos \vartheta = \alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu$$

e quindi:

$$(9) \quad A_s = |A| \cos \vartheta = |A| \alpha \lambda + |A| \beta \mu + |A| \gamma \nu = A_x \lambda + A_y \mu + A_z \nu$$

§ 3.- In questo paragrafo vogliamo occuparci delle operazioni algebriche sui vettori. Esse sono:

Prodotto di uno scalare per un vettore. - Si chiama prodotto dello scalare  $a$  per il vettore  $A$ , e si indica col simbolo:

$$a A$$

il vettore che ha per grandezza  $|a| |A|$ , per direzione la direzione di  $A$ , e per senso quello di  $A$  o l'opposto, a seconda che  $a$  è positivo o negativo.

In particolare, il simbolo:

$$-1 A = -A$$

rappresenta il vettore eguale ed opposto ad  $A$ .

Le componenti di  $aA$  si ottengono, semplicemente, moltiplicando per  $a$  le componenti di  $A$ :

$$(10) \quad (aA)_x = a A_x \quad .$$

Somma di due vettori = Si chiama somma di due vettori, A, B, un terzo vettore C, indicato col simbolo:

(11)

$$A + B = C$$

che è così definito. A partire da un punto, O, si tracci

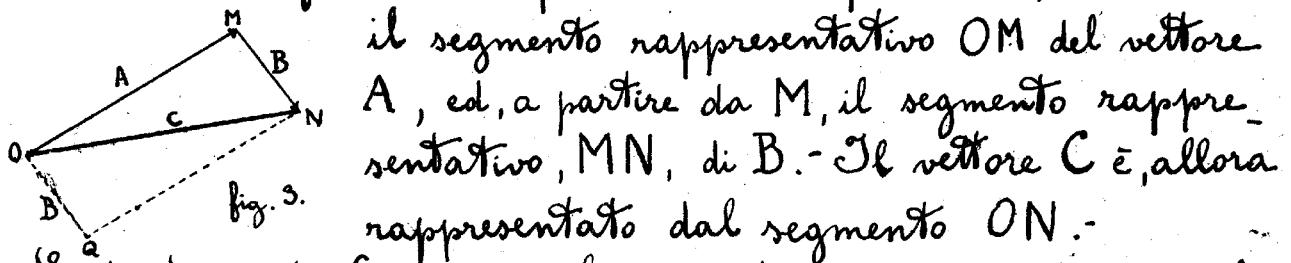


fig. 3.

il segmento rappresentativo OM del vettore A, ed, a partire da M, il segmento rappresentativo, MN, di B. - Il vettore C è, allora rappresentato dal segmento ON.

Evidentemente fa più anche considerarsi come diagonale, ON, del parallelogramma OMNQ che ha per lati i segmenti OM, OQ, rappresentativi di A e di B (la regola del parallelogramma). Si riconosce immediatamente che vale la proprietà commutativa:

(12)

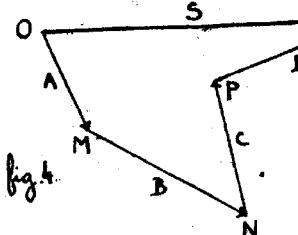
$$A + B = B + A$$

Essendo, poi, C il lato di chiusa della spaccata poligonal OMN, si avrà che la proiezione di C su qualche asse è la somma delle proiezioni di A e di B, e quindi:

$$(13) \quad C_x = (A+B)_x = A_x + B_x \quad \text{e analogamente per } y \text{ e } z.$$

Cioè: le componenti della somma di due vettori, sono la somma delle componenti dei due vettori.

Somma di più vettori A, B, C, D, si chiama un vettore S che ha per segmento rappresentativo il lato di chiusa, OQ, della spaccata poligonale, OMNPQ, costruita coi segmenti rappresentativi OM, MN, NP, PQ, dei vettori dati A, B, C, D. - Si riconosce,



dunque che le componenti di  $S$  sono la somma delle componenti di  $A, B, C, D$ , cioè:

$$(14) \quad S_x = (A + B + C + D)_x = A_x + B_x + C_x + D_x; \dots$$

Si vede, anche, che, per la somma dei vettori valgono le proprietà commutativa e additiva della somma ordinaria, cioè:

$$(15) \quad A + B + C + D = B + D + A + C = D + (A + C) + B = \dots$$

Differenza di due vettori  $A$  e  $B$ , è il vettore  $C$ , somma dei due vettori  $A$  e  $-B$ :

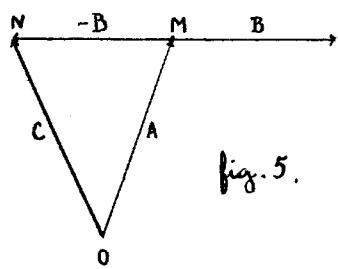


fig. 5.

$$A - B = A + (-B)$$

La costruzione geometrica della differenza di due vettori è rappresentata dalla fig. 5. - Valgono, evidentemente le seguenti proprietà:

$$(16) \quad (A - B)_x = A_x - B_x$$

$$(17) \quad B + (A - B) = A$$

Prodotto scalare di due vettori,  $A$  e  $B$ , è uno scalare,  $p$ , indicato col simbolo:

$$p = A \times B,$$

eguale al prodotto delle grandezze dei due vettori per il coseno dell'angolo  $\vartheta$ , da essi formato. Abbiamo dunque:

$$(18) \quad p = A \times B = |A| \cdot |B| \cos \vartheta.$$

Se i due vettori sono dati per mezze delle loro componenti, si ha (8) che i coseni di direzione di  $A$  sono  $\frac{A_x}{|A|}, \frac{A_y}{|A|}, \frac{A_z}{|A|}$ , quelli di  $B$ :  $\frac{B_x}{|B|}, \frac{B_y}{|B|}, \frac{B_z}{|B|}$ , e quindi:

$$(19) \quad \cos \vartheta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A| \cdot |B|} .$$

Sostituendo nella (18), si trova:

$$(20) \quad A \times B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z .$$

Il prodotto scalare gode, evidentemente, delle proprietà commutativa e distributiva

$$(21) \quad A \times B = B \times A ; \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C .$$

Perchè il prodotto scalare sia nullo, è necessario che sia  
 $\circ |A|=0$ ,  $\circ |B|=0$ ,  $\circ \cos \vartheta=0$ ; ossia che uno dei due vettori sia nullo, oppure che i due vettori siano perpendicolari tra loro. - Se i due vettori hanno la stessa direzione, il loro prodotto scalare è, semplicemente, uguale al prodotto delle loro grandezze, col segno + o -, secondochè i due vettori hanno senso uguale o contrario. In particolare, il prodotto scalare,  $A \times A$ , di un vettore per se stesso, è uguale al quadrato della sua grandezza, e lo indicheremo semplicemente col simbolo  $A^2$ . - Si ha così:

$$(22) \quad A \times A = |A|^2 = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 .$$

Prodotto vettoriale di due vettori,  $A$  e  $B$ , è un vettore indicato col simbolo:

$$A \wedge B$$

che ha per grandezza il prodotto delle grandezze dei due vettori moltiplicato per il seno dell'angolo  $\vartheta$  da essi formato:

$$(23) \quad |A \wedge B| = |A| \cdot |B| \sin \vartheta ,$$

per direzione quella della normale al piano dei due vettori  $A$  e  $B$ , e per senso quello indicato dal medis della mano

destra, quando si ponga il pollice nella direzione di A, e l'indice in quella di B. - Geometricamente  $|A \wedge B|$  è uguale all'area del parallelogramma che ha per lati A e B. - Dalla definizione scaturiscono, immediatamente, alcune proprietà del prodotto vettoriale. Intanto perché  $A \wedge B$  sia nullo è necessario che uno dei due vettori sia nullo, oppure che i due vettori siano paralleli; in particolare:

$$(24) \quad A \wedge A = 0.$$

Per il prodotto vettoriale non vale la proprietà commutativa, perché è evidente, dalla definizione che scambiando l'ordine dei fattori il prodotto cambia di segno, cioè:

$$(25) \quad A \wedge B = -B \wedge A.$$

Vogliamo, ora, dimostrare che le componenti del prodotto vettoriale  $A \wedge B = P$ , sono date da:

$$(26) \quad \begin{cases} P_x = A_y B_z - A_z B_y \\ P_y = A_z B_x - A_x B_z \\ P_z = A_x B_y - A_y B_x \end{cases}$$

Basta perciò osservare che queste espressioni non sono altro che i minori (resi algebrici) della matrice:

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

E quindi sviluppano per gli elementi della prima orizzontale il determinante nullo (perché ha due righe uguali)

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Si Trova:

$$A_x P_x + A_y P_y + A_z P_z = \mathbf{A} \times \mathbf{P} = 0;$$

dunque il vettore  $\mathbf{P}$ , definito dalle (26) è perpendicolare ad  $\mathbf{A}$ , e, analogamente, si dimostra che esso è perpendicolare anche a  $\mathbf{B}$ . - Dunque la direzione di  $\mathbf{P}$  è quella perpendicolare al piano di  $\mathbf{A}$  e di  $\mathbf{B}$ . - Per trovare la grandezza di  $\mathbf{P}$ , osserviamo che:

$$\begin{aligned} P^2 &= P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} A^2 & \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} & B^2 \end{vmatrix} = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = \\ &= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \vartheta = A^2 B^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

da cui

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \sin \vartheta.$$

La grandezza e la direzione di  $\mathbf{P}$  coincidono dunque con quelle di  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ . - Per dimostrare ora che anche i sensi coincidono, consideriamo due vettori,  $\mathbf{A}'$  e  $\mathbf{B}'$ , di componenti rispettivamente  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$ . Il loro prodotto vettoriale è, evidentemente, il vettore di componenti  $(0, 0, 1)$  (questo dipende dal fatto che noi prendiamo gli assi in modo che, ponendo il pollice e l'indice della mano destra nelle direzioni  $x$  ed  $y$ , il medio ci indica la direzione di  $z$ ). Se si facesse la convenzione contraria bisognerebbe cambiare di segno le (26).), e, in questo caso, le (26) ci danno il prodotto vettoriale  $\mathbf{P}'$  col segno esatto. - Se, ora, pensiamo di far variare con continuità  $\mathbf{A}'$  e  $\mathbf{B}'$  fino a farli coincidere con  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , evitando che, in qualche posizione intermedia si abbia  $\mathbf{A}' \wedge \mathbf{B}' = 0$ , troviamo che le componenti di  $\mathbf{P}'$  passano, con continuità in quelle di  $\mathbf{P}$ . Quindi, il prodotto vettoriale che coincide in grandezza e direzione con  $\mathbf{P}'$ , e che, inizialmente, coincide con  $\mathbf{P}'$  anche in senso, deve

coincidervi sempre, poiché ove avvenisse un cambiamento di segno, il prodotto vettoriale dovrebbe presentare una discontinuità, ciò che è escluso dalla sua stessa definizione. Resta dunque provato che le (26) ci danno le componenti del prodotto vettoriale. Provato questo, si può immediatamente far vedere che il prodotto vettoriale soddisfa alla proprietà distributiva, cioè che:

$$(27) \quad A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C$$

Infatti la componente  $x$ , p. es., del primo membro è:

$$A_y(B_x + C_x) - A_x(B_y + C_y) = (A_y B_x - A_x B_y) + (A_y C_x - A_x C_y)$$

essa è, dunque, uguale alla componente  $x$  del secondo membro, e parimenti vale per le altre componenti.

§ 4.- Consideriamo ora un vettore  $A$  che sia funzione di una variabile  $t$ :

$$(28) \quad A = A(t).$$

P. es., potremo supporre che le componenti di  $A$  siano funzioni note di  $t$ :

$$(29) \quad A_x = A_x(t); \quad A_y = A_y(t); \quad A_z = A_z(t).$$

Consideriamo, ora, il vettore:

$$A(t+h) - A(t),$$

cioè la differenza tra i due vettori corrispondenti ai valori  $t$  e  $t+h$  della variabile. Quando  $h$  tende a zero, tale differenza tende anch'essa a zero; se però consideriamo il rapporto:

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h},$$

avremo che esso ha invece, in generale un limite finito. Questo

limite si dirà derivata del vettore A rispetto a t. Esso è, dunque, un vettore, che noi indicheremo col simbolo  $\frac{dA}{dt}$ . Abbiamo:

$$(30) \quad \frac{dA}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

Siccome le componenti di  $A(t+h) - A(t)$  sono  $A_x(t+h) - A_x(t)$ , ed espressioni analoghe, abbiamo che le componenti di  $\frac{dA}{dt}$  saranno:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_x(t+h) - A_x(t)}{h}, \text{ ed analogamente per } y \text{ e } z,$$

e cioè:

$$\frac{dA_x}{dt}; \frac{dA_y}{dt}; \frac{dA_z}{dt}.$$

Troviamo, dunque, che le componenti della derivata di un vettore sono le derivate delle sue componenti.-

Sono di immediata dimostrazione le seguenti formule, analoghe a quelle, note, del calcolo:

$$(31) \quad \frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt},$$

$$(32) \quad \frac{d}{dt} A \times B = A \times \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \times B; \frac{dA^2}{dt} = 2A \times \frac{dA}{dt},$$

$$(33) \quad \frac{d}{dt} A \wedge B = A \wedge \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \wedge B.$$

La loro verifica può farsi, immediatamente, sopra le componenti.

### Elementi della Teoria delle curve.-

§1.- Una linea, C, nello spazio, si può descrivere in molti modi: a) Dando due equazioni

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = 0 \quad e \quad \psi(x, y, z) = 0$$

Tra le coordinate; in questo caso, la linea viene ad esser data come intersezione delle due superfici:  $\varphi = 0$  e  $\psi = 0$ .

b) Dando le due coordinate, y e z, in funzione della x

$$(2) \quad y = y(x), \quad z = z(x).$$

Questo non è che un caso particolare del precedente, perché basta porre  $\varphi = y - y(x)$  e  $\psi = z - z(x)$ . Le due superfici,  $\varphi = 0$  e  $\psi = 0$ , sono in questo caso due cilindri (in genere non circolari), il primo con le generatrici parallele a  $z$ , ed il secondo con le generatrici parallele ad  $y$ .

c) Si possono dare le tre coordinate,  $x, y, z$ , in funzione di un parametro  $\vartheta$ :

$$(3) \quad x = x(\vartheta), \quad y = y(\vartheta), \quad z = z(\vartheta).$$

Eliminando  $\vartheta$  tra queste tre equazioni, si trovano le equazioni della curva sotto la forma (1). Se, in particolare, è  $x = \vartheta$ , le (3) coincidono con le (2). E' molte volte, conveniente prendere come parametro  $\vartheta$  l'arco  $s$  della curva (contato a partire da un certo punto  $P_0$ ); allora le (3) prendono la forma:

$$(4) \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Noi supporremo sempre, in questo capitolo, che le equazioni siano sotto la forma (4). Se esse fossero date, p.es., sotto la forma (3), si potrebbe passare alla (4) introducendo, al posto di  $\vartheta$ , la sua funzione  $s$ ; definita dall'equazione:

$$(5) \quad s = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{x^2(\vartheta)^2 + y^2(\vartheta)^2 + z^2(\vartheta)^2} \, d\vartheta$$

dove  $\vartheta_0$  rappresenta il valore di  $\vartheta$  che corrisponde al punto  $P_0$ , e bisogna prendere il segno + o - a seconda che, al crescere di  $\vartheta$ , il punto si muove lungo la curva nel senso positivo o nell'opposto.

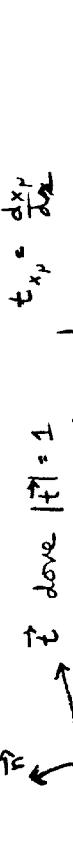
Definiamo, ora, un vettore  $\vec{t}$ , funzione di  $s$ , che ha, per ogni valore di  $s$ , la direzione della tangente alla curva  $C$  nel punto corrispondente ad  $s$ , il verso in cui  $s$  cresce, e grandezza 1. Le componenti di questo vettore saranno evidentemente date da:

$\alpha, \beta, \gamma$  eguale i coreri di direzione  
della tangente, cioè le componenti (6)  
di  $\vec{t}$  e con  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  si ottengono di  
direzione della normale principale

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{dx}{ds} \rho, \quad \mu = \frac{d\beta}{ds} \rho, \quad \nu = \frac{d\alpha}{ds} \rho \\ \vec{b} &\circ \vec{t} \times \vec{n} (\equiv \vec{t} \wedge \vec{n}) |\vec{b}| = |\vec{t} \times \vec{n}| \\ &= |\vec{b}| \sin \theta = |\vec{t}| |\vec{n}| \Leftrightarrow t_n = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Dimostra  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \chi \vec{n}$  :  $\vec{b}^2 = 1 \Rightarrow \vec{b} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} = 0$

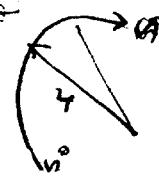
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b} \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} = A \vec{n} + B \vec{t} \\ &\text{ma } \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \\ &\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} + \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} = \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \\ &\Rightarrow \text{(implicando } \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \frac{d\vec{t}}{ds} \text{)} \perp \vec{t} \text{ ergo } \frac{d\vec{b}}{ds} = A \vec{n} + D \vec{t} \\ &\text{ergo since } \frac{d\vec{t}}{ds} \perp \frac{d\vec{t}}{ds} \text{ e } C = 0 \text{ set } D = \frac{1}{T} \vec{t} \\ &T = \text{torsione whence} \\ &\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{t} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\vec{t} \text{ dove } |\vec{t}| = 1 \quad t_{x_\mu} = \frac{dx_\mu}{ds} \\ &\text{e anche} \quad \sum \left( \frac{dx_\mu}{ds} \right)^2 = 1 \Rightarrow |\vec{t}|^2 = \vec{t}^2 \\ &\vec{t}(\nu) \cdot \vec{t}(\mu) = 1 \\ &\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \quad \text{ergo } \frac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t} \text{ se } \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| \neq 0 \\ &\text{hence large is } \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \\ &\text{since } \vec{t}_s = \sum \frac{dx_\mu}{ds} \vec{e}_{x_\mu} \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \sum \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} \vec{e}_{x_\mu} \\ &\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \sqrt{\frac{dt}{ds} \cdot \frac{dt}{ds}} = \sqrt{\sum \frac{\left( \frac{dx_\mu}{ds} \right)^2}{\left( \frac{dx_\mu}{ds} \right)^2}} = \frac{1}{Q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z \\ &t_x \quad t_y \quad t_z \\ &b_x t_z - b_z t_x \quad b_x t_y - b_y t_x \\ &\Rightarrow \left( b_x t_y^2 - b_y t_y t_x - b_x t_z^2 + b_z t_x t_z \right) \vec{e}_x \\ &\quad b_x (t_y^2 - t_z^2) + t_x (b_z t_x - b_y t_y) \\ &n \times t = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta & \text{are const} \\
 y' &= -r \sin \theta & y' &= r \cos \theta \\
 \Rightarrow & \dot{x} = -r \sin \theta & \dot{y} = r \cos \theta \\
 \dot{s} = & \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\theta
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{ergo} \quad x &= r \cos(\frac{s}{r}) & \frac{dx}{ds} &= -r \left( \frac{1}{r} \right) \sin\left(\frac{s}{r}\right) \\
 y &= r \sin(\frac{s}{r}) & \frac{dy}{ds} &= +r \left( \frac{1}{r} \right) \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\
 \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 & \Rightarrow = 0 & \Rightarrow \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 &= \sin^2(\eta) + \cos^2(\eta) = 1 \\
 \frac{d^2x}{ds^2} &= -\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right) & \left| \frac{d^2x}{ds^2} \right| &= \frac{1}{r} \sqrt{\cos^2\left(\frac{s}{r}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{r}\right)} = \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

Se  $x_\mu = x_\mu(\theta)$  for  $\mu = 1, 2, 3$   
 then passando alla forma  
 $x_\mu = x_\mu(s)$   
 dove  $s$  è definita dall'equazione  
 $s = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2} ds = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{x_\mu'(s)^2} ds$   
 derivando da  
 $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_i (dx_i)^2$   
 deriva  $ds = \frac{dx_\mu}{dx_\mu'} ds$   
 ergo la equazione per  $s$  sopra.

$$(6) \quad \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$$

Esse soddisfano alla relazione:

$$(7) \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

cioè:  $\vec{t}^2 = 1$ , che esprime che il vettore  $\vec{t}$  ha lunghezza 1.

Derivando la (7), si trova:

$$(8) \quad \vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

che ci dice che la derivata di  $\vec{t}$ , rispetto ad  $s$ , è perpendicolare a  $\vec{t}$ , e, quindi, anche alla curva C. Il piano che contiene i due vettori  $\vec{t}$  e  $\frac{d\vec{t}}{ds}$ , si dice piano osculatore. Le componenti di  $\frac{d\vec{t}}{ds}$  sono date da:

$$(9) \quad \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$$

e quindi:

$$(10) \quad \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \sqrt{\left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2} = \frac{1}{\rho}$$

dove  $\rho$  è il raggio di prima curvatura. Concludiamo che  $\frac{d\vec{t}}{ds}$  ha grandezza eguale alla curvatura, e, quindi, il vettore:

$$(11) \quad \vec{n} = \rho \frac{d\vec{t}}{ds}$$

avrà grandezza 1; la sua direzione si dice normale principale della curva. Abbiamo dunque, indicando con  $\alpha, \beta, \gamma$ , i coseni di direzione della tangente, cioè le componenti (6) di  $\vec{t}$ , e con  $\lambda, \mu, \nu$ , i coseni di direzione della normale principale, cioè le componenti di  $\vec{n}$ :

$$(12) \quad \lambda = \frac{dx}{ds} \rho, \mu = \frac{dy}{ds} \rho, \nu = \frac{dz}{ds} \rho.$$

Queste formule sono dette a Serret.

Introduciamo, ora, un terzo vettore  $\vec{b}$  così definito:

$$(13) \quad \vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}, \quad |\vec{b}| = 1.$$

Il piano  $\vec{t}, \vec{n}$  (perpendicolare a  $\vec{b}$ ) è, ancora, il piano osculatore, e la direzione di  $\vec{b}$  si dice binormale. - Il piano  $\vec{b}, \vec{n}$ , si dice piano normale (perpendicolare alla tangente). - Il piano  $\vec{t}, \vec{b}$ , si dice piano rettificante (perpendicolare alla normale principale). -

Possiamo, ora dimostrare che il vettore  $\frac{d\vec{b}}{ds}$  è parallelo ad  $\vec{n}$ .

Infatti, derivando la relazione:

$$\vec{b}^2 = 1$$

Troviamo:

$$\vec{b} \times \frac{d\vec{b}}{ds} = 0$$

che ci dice che  $\frac{d\vec{b}}{ds}$  è perpendicolare a  $\vec{b}$ , giace, cioè, nel piano  $\vec{t}, \vec{n}$ . - D'altra parte, derivando la prima delle (13) e tenendo presente la (11), troviamo:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{T} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} + \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{n} = \vec{T} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds},$$

che ci dice che  $\frac{d\vec{b}}{ds}$  è perpendicolare a  $\vec{T}$  e giace, dunque, nel piano  $\vec{b}, \vec{n}$ . Concludiamo che  $\frac{d\vec{b}}{ds}$  è parallelo ad  $\vec{n}$  e, quindi, essendo  $T$  uno scalare conveniente, si potrà scrivere:

$$(14) \quad \vec{n} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{n}$$

T si dice raggio di torsione della curva C ( $\frac{1}{T}$  si dice torsione). - Derivando la relazione

$$(15) \quad \vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{T}$$

e tenendo presenti la (11) e la precedente, si trova:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{T} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{n} \wedge \vec{T} + \frac{1}{S} \vec{b} \wedge \vec{n},$$

ma si ha:

$$\vec{n} \wedge \vec{T} = -\vec{b}; \quad \vec{b} \wedge \vec{n} = -\vec{T}$$

e, così, troviamo:

$$(16) \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{T} \vec{b} - \frac{1}{S} \vec{T}$$

Le formule (14) e (16) sono dovute a Frenet. Esse, insieme alla (11), permettono di esprimere le derivate dei coseni di direzione della tangente ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), della normale ( $\lambda, \mu, \nu$ ) e della binormale ( $l, m, n$ ), per mezzo di queste stesse quantità e dei raggi di curvatura e di torsione. Prendendo, infatti, le componenti di (11), (14) e (16) si trova:

$$(17) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \lambda ; \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{1}{\rho} \alpha - \frac{1}{T} l ; \quad \frac{dl}{ds} = \frac{1}{T} \lambda ,$$

e formule analoghe per gli altri assi. -

---

## ~ Meccanica Razionale ~

### - Cinematica del punto. -

#### Calcolo della Traiettoria di un punto mobile.

Sia data la posizione del punto mediante le sue coordinate in funzione del tempo, rappresentate dalle funzioni scalari:

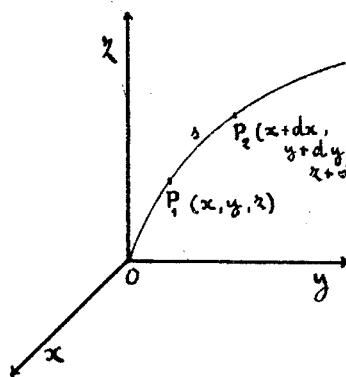
$$(1) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Eliminando t dalle precedenti, si possono ottenere due relazioni fra x, y, z, del tipo:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0$$

che mi danno l'equazione della Traiettoria. Date, ora, le (1), bisogna cercare di determinare la lunghezza s dello spazio (in generale curvilineo) percorso dal punto P nell'intervalle tra  $t_0$  e  $t$ , e determinare, poi, l'equazione della Traiettoria.

e l'equazione del moto. Considerando, dunque l'arco  $s = \widehat{OP}$ , dividiamo in  $n$  piccoli intervalli, e congiungiamo con segmenti gli estremi di questi. Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , la somma dei lati della poligonale inscritta o circoscritta all'arco, coincide con l'arco stesso. Dato, quindi, un arco di una curva qualsiasi, avremo:



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

ed integrando da  $P_1$  a  $P_2$  per ottenere  $s$ :

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} dt$$

Più generalmente, siano le equazioni, che ci danno le coordinate del punto, funzioni di un parametro  $p$  qualsiasi:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \\ z = z(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \dot{x}(p) dp \\ dy = \dot{y}(p) dp \\ dz = \dot{z}(p) dp \end{cases}$$

da cui, per  $ds$ , avremo:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) + \dot{z}^2(p)} dp$$

ed integrando fra  $P_1$  e  $P_2$  ottengo:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) + \dot{z}^2(p)} dp \quad (\text{funzione nota della } p)$$

Riprendendo il primo caso, essendo le coordinate del punto date in funzione del tempo  $t$ , avremo:

$$ds = \int_{P_1}^{P_2} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

da cui, eseguendo la quadratura:  $s = s(t)$  (funzione nota del  $t$ ) che è l'equazione cercata.

Determinazione della posizione del punto, data l'equazione della traiettoria e quella del moto.

- Inversamente, conoscendo l'equazione della traiettoria e quella del moto, si pone il problema di determinare la posizione del punto. Si abbia dunque, una certa curva, riferita agli assi coordinati  $x, y, z$ , data mediante due funzioni di  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{o per: } \begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \\ z = z(p) \end{cases} \quad (2)$$

da cui ricavo:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) + \dot{z}^2(p)} dp = F(p)$$

funzione nota di  $p$ .

Ma siccome è data l'equazione del moto:  $s = s(t)$ , egualando le due espressioni di  $s$ , ottengo:

$$s(t) = F(p)$$

da cui, infine, posso esprimere  $p$  in funzione del Tempo:

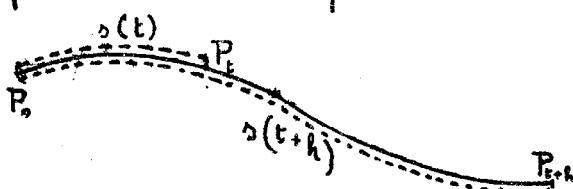
$$p = \Psi(t)$$

Sostituendo nelle (2), per  $p$ , questo valore, il problema è risolto.

Sia la posizione del punto  $P$  funzione del Tempo, e sia la equazione del moto:

$$s = s(t)$$

Considerando una traiettoria qualsiasi, e segnando su di essa un verso, resteranno evidentemente determinati gli spazi,  $s(t)$  ed  $s(t+h)$ , percorsi rispettivamente nel tempo  $t$  e nel tempo  $t+h$ .



Il rapporto  $\frac{\widehat{P_t P_{t+h}}}{h} = V_m$  si dice velocità media nell'intervalle di tempo  $h$ .

Quando sia data, dunque, la

equazione della Traiettoria e quella del moto, avremo rispettivamente per  $T \left\{ \begin{array}{l} = t \\ = t+h \end{array} \right.$ :

$$V_m = \frac{s(t+h) - s(t)}{h},$$

e, passando al limite per  $h \rightarrow 0$ , il precedente rapporto (incrementale di  $s(t)$ ), diventa la derivata prima della funzione  $s(t)$ . Cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \dot{s}(t) = v.$$

Questo limite si dice velocità istantanea nel punto  $P_t$ . Con notazione equivalente, sarà:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

In particolare, nel moto uniforme la velocità è costante. Dalla formula precedente, in questo caso, ricaviamo:

$$v dt = ds$$

e, integrando:

$$s = vt + C.$$

Nel moto vario, si presenta il problema di determinare lo spazio conoscendo il valore della funzione velocità per ogni valore del tempo. Sarà:

$$v = v(t), \quad \text{e siccome} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

sarà anche:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

da cui:

$$s = \int v(t) dt + C.$$

Se sappiamo che per  $t = t_0$  è  $s = s_0$ , si può subito determinare la costante  $C$ .

Determinazione del Tempo, data la velocità in funzione dello spazio.

Sia data la velocità come funzione dello spazio. Sarà:

$$v = v(s) \quad \text{e poiché} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

sarà ancora:  $v(s) = \frac{ds}{dt}$  da cui:

$$\frac{ds}{v(s)} = dt \quad \text{ed integrando: } t = \int \frac{ds}{v(s)} + C$$

Con ciò, conoscendo il valore della velocità per ogni valore della variabile spazio, possiamo determinare il tempo.

Passando a considerare il caso più generale in cui la velocità sia, insieme, funzione dello spazio e del tempo, avremo:

$$v = v(s, t) \quad \text{da cui:}$$

$$v(s, t) = \frac{ds}{dt} .$$

Questa equazione differenziale, del primo ordine, ammetterà generalmente, un integrale in cui figurerà una costante arbitraria; cioè, lo spazio ci sarà dato come funzione del tempo e di essa costante:

$$s = s(t, C) ;$$

e se, per  $t = t_0$ , è  $s = s_0$ , sostituendo nella precedente, otteniamo:

$$s_0 = s(t_0, C) ,$$

ove tutto è noto all'infuori della  $C$  che si può così determinare.

Velocità vettoriale.

La velocità, finora considerata, è uno scalare. Maggiore

importanza ha la velocità vettoriale. Scegliamo un arco qualsiasi della traiettoria, e fissiamo su di esso un verso e le posizioni assunte da un punto  $P$  ai tempi  $t$  e  $t+h$ , rispettivamente. Indicando con  $P_1$  e  $P_2$

queste due posizioni, uniamole con un segmento orientato da  $P_1$  a  $P_2$ ; questo segmento, che risulta un verso e proprio vettore, dicesi spostamento del punto relativo all'intervallo  $(t, t+h)$  di tempo considerato. Passiamo a considerare il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_2 - P_1}{h} = V,$$

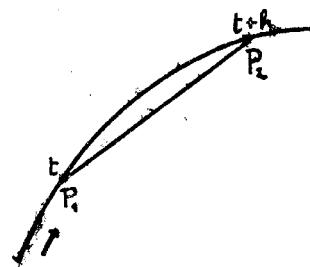
esso si dice velocità vettoriale. Osserviamo, anzitutto, che, col tendere di  $P_2$  a  $P_1$ , il vettore  $\frac{P_2 - P_1}{h}$  tende ad assumere la posizione della tangente, in  $P_1$ , alla traiettoria. Questo per la direzione, quanto poi, al senso, è sempre quello del moto. Supponiamo, infatti, p.es.,  $h < 0$ ; allora il verso  $P_1 P_2$  sarà opposto a quello del moto. Ma siccome  $h$  è negativo, il vettore  $\frac{P_2 - P_1}{h}$  avrà verso opposto al vettore  $P_2 - P_1$ , e quindi coincidente col verso del movimento; se, invece,  $h > 0$ , allora  $P_2 - P_1$  ha verso concordante col verso del moto, e  $\frac{P_2 - P_1}{h}$  anche, perché  $h$  è positivo.

Riguardo alla grandezza, si osservi che:

$$\left| \frac{P_2 - P_1}{h} \right| = \frac{|P_2 - P_1|}{\text{arc } P_1 P_2} \cdot \frac{\text{arc } P_1 P_2}{h},$$

e, passando al limite, per  $h \rightarrow 0$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|P_2 - P_1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|P_2 - P_1|}{\text{arc } P_1 P_2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{arc } P_1 P_2}{h}.$$



Il limite del primo fattore a secondo membro (essendo esso il quoziente tra la corda e l'arco da essa sotteso) col tendere di  $h$  (e, conseguentemente, dell'arco) a zero, tende all'unità; il secondo fattore, poi, ha per limite la velocità istantanea nel punto  $P_1$ , cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|P_2 - P_1|}{h} = v \quad \begin{array}{l} \text{(velocità istantanea} \\ \text{lungo la traiettoria)} \end{array}$$

### Determinazione delle componenti della velocità vettoriale.

- Per determinare le componenti della velocità vettoriale, osserviamo che le componenti del vettore  $P_2 - P_1$ , secondo i tre assi coordinati, sono date dalle differenze tra le analoghe coordinate dei due punti. Supponendo, cioè, che le coordinate di un punto generico  $P$ , sulla traiettoria, siano date da:

$$P = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases};$$

nel caso nostro avremo:

$$P_1 = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{cases} x = x(t+h) \\ y = y(t+h) \\ z = z(t+h) \end{cases};$$

eppero la componente secondo l'asse  $x$ , della velocità, sarà:

$$V_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt},$$

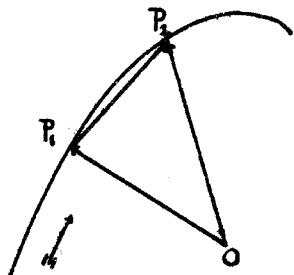
ed analogamente per  $V_y$  e  $V_z$ :

$$V_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Cioè: le componenti della velocità vettoriale, in un punto qualsiasi della traiettoria, sono date dalle derivate prime, rispetto al tempo, delle coordinate del punto.

In altro modo, scelta ancora la traiettoria, due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , su di essa e un'origine fissa, qualsiasi,  $O$ , avremo:

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = (\vec{P}_2 - \vec{O}) - (\vec{P}_1 - \vec{O}) ,$$



Osserviamo che il vettore generico,  $\vec{P}_i - \vec{O}$ , risulta funzione della posizione di  $P_i$ , ed essendo questa, a sua volta, funzione del tempo, tale risulta anche  $\vec{P}_i - \vec{O}$ .

Cioè, nel caso nostro:

$$\vec{S}(t) = \vec{P}_1 - \vec{O} ; \quad \vec{S}(t+h) = \vec{P}_2 - \vec{O} ,$$

e quindi, per la notazione adottata, avremo:

$$V = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{S}(t+h) - \vec{S}(t)}{h} = \dot{\vec{S}}(t) = \frac{d\vec{S}}{dt} .$$

Osserviamo, ora, che, se per  $O$  si prende l'origine delle coordinate, le componenti di  $\vec{S}$  sono  $x, y$  e  $z$ ; dalla precedente ricaviamo, dunque, subito le componenti di  $V$ :

$$V = \frac{d\vec{S}}{dt} = \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \frac{dy}{dt} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$


---

Dato la  $V$  mediante le sue componenti, determinare le coordinate del punto.

- Si presenta, ora, il problema inverso: nota, cioè,

la velocità vettoriale  $V$ , e, conseguentemente, le funzioni scalari  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$ , sue componenti, risalire al valore delle coordinate del punto in funzione del Tempo.

Sia dunque:

$$V = V(t) \equiv \begin{cases} V_x = V_x(t) \\ V_y = V_y(t) \\ V_z = V_z(t) \end{cases} .$$

Sapendo che:

$$V_x(t) = \frac{dx}{dt}, \quad V_y(t) = \frac{dy}{dt}, \quad V_z(t) = \frac{dz}{dt},$$

e, integrando, otteniamo immediatamente:

$$\begin{aligned} P &= \begin{cases} x = \int V_x(t) dt + C_1 \\ y = \int V_y(t) dt + C_2 \\ z = \int V_z(t) dt + C_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Se per  $t = t_0$  si conoscono i tre corrispondenti valori:  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ , delle coordinate, si possono determinare le tre costanti

Si abbia, ora, il caso più generale in cui  $V$  sia funzione del tempo e della posizione, cioè della  $t$  e delle tre coordinate  $(x, y, z)$  del punto. Sarà:

$$V = V(t, x, y, z),$$

e per le componenti:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_x(t, x, y, z)$$

$$V_y = \frac{dx}{dt} = V_y(t, x, y, z)$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = V_z(t, x, y, z)$$

Questo è un sistema di tre equazioni differenziali; integrandolo si troveranno, in generale,  $x, y$  e  $z$  espressi in funzione del tempo e di tre costanti arbitrarie:

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3)$$

$$y = y(t, C_1, C_2, C_3)$$

$$z = z(t, C_1, C_2, C_3)$$

in cui sono da determinarsi le tre costanti  $C_1, C_2$  e  $C_3$ .

Se sappiamo che, per  $t = t_0$ , è anche:  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ , gli integrali precedenti divengono, per  $t = t_0$ :

$$x_0 = x(t_0, C_1, C_2, C_3)$$

$$y_0 = y(t_0, C_1, C_2, C_3)$$

$$z_0 = z(t_0, C_1, C_2, C_3)$$

In queste espressioni, tutto è noto ad eccezione delle tre costanti che si possono così determinare.

Sia, p. es.:  $V = V(x, y, z, t) = \text{cost.}$ ,

avremo allora:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad x = V_x t + C_1$$

ed analogamente per la  $y$  e per la  $z$ .

Siccome, nell'espressione di ognuna delle coordinate, compare una costante, per determinarla supponiamo di sapere che per:

$$t = t_0 \quad \text{sia anche: } \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Inoltre, osserviamo che, conoscendo le tre componenti della  $V$ , ne conosciamo la grandezza:

$$|V| = v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

da cui possiamo ricavare i tre coseni direttori ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) della traiettoria:

$$\alpha = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}; \quad \beta = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}; \quad \gamma = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}.$$

Osserviamo che, date le componenti, la grandezza di  $V$  si può determinare anche in altro modo mediante la relazione:

$$V^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2, \quad \text{da cui:}$$

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2, \quad \text{e} \quad |V| = \frac{ds}{dt} = v.$$


---

Sia dato, ora, il moto di un punto  $P$  in un piano  $\pi_1$ , ( $xy$ ), e sia data la  $V$  mediante le sue componenti  $V_x$  e  $V_y$  (la  $V_z$  è nulla). Supponiamo che le componenti di  $V$  abbiano le seguenti espressioni:

$$V \equiv \begin{cases} V_x = -wy \\ V_y = wx \\ V_z = 0 \end{cases}$$

Sapendo che  $V_x = \frac{dx}{dt}$ , ed analogamente per  $y$  e  $z$ , ricaviamo immediatamente:

$$(1) \quad \begin{cases} -wy = \frac{dx}{dt} \\ (2) \quad wx = \frac{dy}{dt} \\ (3) \quad 0 = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

Osserviamo anzitutto che, essendo  $\frac{dz}{dt} = 0$ , sarà evidentemente  $z$  eguale ad una costante  $C_1$ .

Derivando, poi, la (1) rispetto a  $t$ , avremo:

$$-\omega \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

e sostituendo il valore di  $\frac{dy}{dt}$  dato dalla (2), portando tutto a primo membro e cambiando segno:

$$(4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Per integrare quest'equazione differenziale del secondo ordine, poniamo:

$$x = e^{\alpha t}$$

dove, poi, cercheremo di determinare il valore della costante incognita  $\alpha$ . - Derivando rispetto a  $t$  otteniamo:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t},$$

e derivando ancora:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Sostituendo nella (4):

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0,$$

e, dividendo per  $e^{\alpha t} \neq 0$ , avremo:

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{da cui} \quad \alpha = \pm i\omega,$$

percisō, dato il doppio segno, si avranno i due integrali particolari:

$$x_1 = e^{i\omega t}, \quad x_2 = e^{-i\omega t}.$$

Facendo una combinazione lineare di questi due integrali particolari, otterremo l'integrale generale:

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t},$$

dove  $A_1$  ed  $A_2$  sono costanti da determinarsi; per eliminare, poi, gli immaginari, applichiamo le formule di Eulero, si avrà:

$$\begin{aligned}x &= A_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2(\cos \omega t - i \sin \omega t) = \\&= (A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_1 - A_2) \sin \omega t = \\&= C_2 \cos \omega t + C_3 \sin \omega t,\end{aligned}$$

dove  $C_2$  e  $C_3$  sono delle nuove costanti. Per la  $y$ , sostituendo il precedente valore della  $x$  nella (1), avremo:

$$\begin{aligned}-\omega y &= -\omega C_2 \sin \omega t + \omega C_3 \cos \omega t \\ \omega y &= C_2 \omega \sin \omega t - C_3 \omega \cos \omega t\end{aligned}$$

e infine:

$$y = C_2 \sin \omega t - C_3 \cos \omega t.$$

Per determinare le 3 costanti,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , bisogna, al solito, conoscere, per un dato valore di  $t$ , i corrispondenti valori di  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Se, ad esempio, per  $t = 0$ , è  $x = a$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , risulta:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = a, \quad C_3 = 0.$$

Determinate, così, le costanti, i valori di  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = 0 \end{cases},$$

da cui, quadrandolo e sommando le prime due, per eliminare  $t$ , si perviene all'equazione della Traiettoria:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

che ci rappresenta un cerchio di raggio  $a$  nel piano  $xy$ .

## ~ Accelerazione.~

Se si considera la velocità vettoriale di un punto su di una traiettoria, avviene generalmente che il valore della  $V$ , varii e, trattandosi di un vettore, potrà evidentemente variare in grandezza ed orientazione. Se, dunque, la  $V$  è data in funzione del tempo,  $V = V(t)$ , si definisce accelerazione  $A$  nell'istante  $t$  il

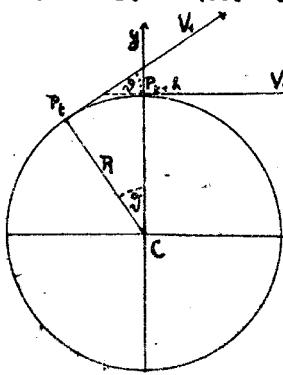
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = \frac{dV}{dt} = A,$$

cioè la derivata della velocità vettoriale rispetto al tempo. Si noti bene che l' $A$  è data dalla derivata prima della velocità vettoriale e non da quella della velocità lungo la traiettoria.

### Accelerazione centripeta.~

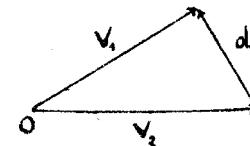
- Consideriamo, come esempio, il moto circolare uniforme, moto in cui la velocità ha, in ogni istante, grandezza costante, ma varia in direzione.

La nostra velocità sarà, dunque rappresentata da un vettore che ha la direzione della tangente nel punto, e



grandezza costante. Sia  $\vartheta$  l'angolo formato dalle direzioni della velocità ad un istante generico  $t$  ed a uno successivo  $t+h$ . Se noi riportiamo i due vettori  $V_t$  e  $V_{t+h}$  (valori della  $V$  al tempo  $t$  ed al tempo  $t+h$ ,

rispettivamente) a partire da una comune origine  $O$ ;



l'accelerazione media nell'intervallo di tempo da  $t$  a  $t + h$ , ci sarà data in grandezza e direzione da  $\frac{d}{h}$ , essendo  $d$  il vettore differenza dei vettori  $V_1$  e  $V_2$ . Osserviamo, ora, che per valori molto piccoli di  $h$  possiamo supporre  $V_1$  e  $V_2$  ortogonali a  $d$ ; e se, inoltre, indichiamo con  $v$  la grandezza comune di  $V_1$  e  $V_2$ , essendo

$$\vartheta = \frac{\vartheta}{R} = \frac{v h}{R} \quad (R = \text{raggio del cerchio}),$$

il rapporto incrementale della  $V$  ci sarà dato da:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{d}{h} = \frac{v \vartheta}{R} = \frac{v \frac{v h}{R}}{h} = \frac{v^2}{R}. \quad (1)$$

Si noti che, data la piccolezza di  $\vartheta$ , abbiamo posto approssimativamente:  $\vartheta = \sin \vartheta$ ,

e così abbiamo ricavato il valore di  $d$  dal triangolo (supposto, approssimativamente, rettangolo in  $V_1 d$  ed in  $V_2 d$ ) costituito sui due vettori  $V_1$  e  $V_2$ .

Passando al limite, nella (1), per  $\Delta t = h \rightarrow 0$ , otterremo infine:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v \vartheta}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R} = |A|.$$

Abbiamo, in generale, definita l'accelerazione  $A$  come derivata della velocità vettoriale  $V$ . Ora, le componenti di  $V$  sono:

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z};$$

le componenti di  $A$  si ottengono derivando queste componenti rispetto a  $t$ . Avremo:

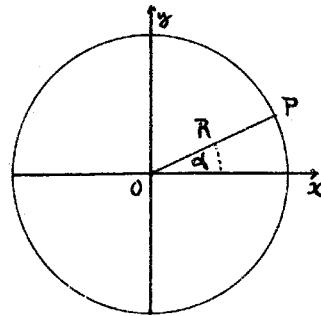
$$A = \begin{cases} A_x = \frac{d V_x}{dt} = \ddot{x} \\ A_y = \frac{d V_y}{dt} = \ddot{y} \\ A_z = \frac{d V_z}{dt} = \ddot{z} \end{cases}.$$

Tornando all'esempio precedente, supponiamo che sia data la circonferenza; scelti, per assi  $x$  ed  $y$ , due diametri ortogonali, detta  $v$  la velocità sulla traiettoria, e l'angolo compreso fra il raggio, corrispondente al punto generico  $P$ , e l'asse  $x$ , avremo:

$$\alpha = \frac{v t}{R},$$

e, per le coordinate del punto, i valori:

$$P = \begin{cases} x = R \cos \frac{vt}{R} \\ y = R \sin \frac{vt}{R} \end{cases}.$$



Per ottenere le componenti della  $V$ , deriviamo, rispetto a  $t$ , le precedenti:

$$V = \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = -R \frac{v}{R} \sin \frac{vt}{R} = -v \sin \frac{vt}{R} \\ V_y = \frac{dy}{dt} = R \frac{v}{R} \cos \frac{vt}{R} = v \cos \frac{vt}{R}, \end{cases}$$

e, per trovare  $A$ , derivando queste ultime, rispetto a  $t$ , abbiamo:

$$A = \begin{cases} A_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{R} \cos \frac{vt}{R} \\ A_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} \sin \frac{vt}{R} \end{cases},$$

da cui, quadrando e sommando:

$$A^2 = \frac{v^4}{R^2} \quad \text{e infine} \quad |A| = \frac{v^2}{R}.$$

Di qui si riconosce agevolmente come l' $A$  sia normale alla direzione della velocità, ovvero alla tangente alla traiettoria nel punto; coincida, quindi, in direzione, col raggio, ed abbia verso costantemente volto al centro.

Determinare le coordinate del punto, data l'accelerazione

zione ..

- Abbiamo risolto il problema di determinare l'accelerazione essendo noto il movimento; si presenta, ora, il problema inverso; determinare, cioè, le coordinate del punto conoscendo il valore di  $\mathbf{A}$ . Sia  $\mathbf{A} = A(t)$ , sono note, allora, le tre funzioni scalari:

$$\begin{cases} A_x = A_x(t) \\ A_y = A_y(t) \\ A_z = A_z(t) \end{cases}$$

$$\text{ma è } \begin{cases} A_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ A_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} \\ A_z(t) = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

sarà quindi anche, limitandosi a considerare la sola componente rispetto all'asse  $x$  (analogamente si procederebbe per le altre due):

$$A_x(t) dt = d \frac{dx}{dt} , \quad \text{da cui,}$$

integrandi:

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = \int A_x(t) dt + C_1 .$$

Siamo, così, riusciti dall'accelerazione alla velocità vettoriale; risaliamo, ora, da questa alle coordinate del punto.

Moltiplicando per  $dt$  ambo i membri della (2), si ottiene:

$$(3) \quad dx = \left[ \int A_x(t) dt + C_1 \right] dt ,$$

e integrando quest'ultima, e le due analoghe, si ha in fine:

$$(4) \quad \begin{cases} x = \int \left[ \int A_x(t) dt \right] + C_1 t + C_2 \\ y = \int \left[ \int A_y(t) dt \right] + C_3 t + C_4 \\ z = \int \left[ \int A_z(t) dt \right] + C_5 t + C_6 \end{cases}$$

Figurano, in questi integrali, sei costanti arbitrarie e, per

determinarle, occorreranno, quindi, sei condizioni. Se, p. es., ci sono noti, per  $t = t_0$ , la posizione e la velocità iniziale del punto, cioè i valori:  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ ; noi, dalle (2), potremo ottenere i valori di  $C_1, C_2$  e  $C_3$ , e, sostituendo questi valori nelle (4) (posto sempre  $t = t_0$ ) potremo ricavare anche  $C_4, C_5$  e  $C_6$ .

Consideriamo, ora, il caso più generale in cui sia  $A$  funzione del tempo, della posizione del punto e della velocità:

$$A = A(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Ovvero:

$$A \equiv \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = A_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = A_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = A_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni differenziali, ammetterà tre integrali generali della forma:

$$(5) \quad \begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases}$$

Se, al solito, conosco, per  $t = t_0$ , i sei valori:  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$  e  $\dot{z}_0$ , derivando le tre espressioni precedenti, ho:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases}$$

che, con le (5) prime, quando si ponga  $t = t_0$ , mi permettono di ricavare i valori delle sei incognite.

Le sei condizioni che diciamo esser necessarie per la determinazione delle costanti, possono anche esser date in modo diverso; cioè, invece di dare, per un determinato valore della  $t$ , le coordinate del punto e le corrispondenti derivate prime (componenti della velocità), si possono dare, per due diversi valori di  $t$ , le corrispondenti coordinate del punto. P. es., per i due valori del tempo:  $t_0$  e  $t_1$ , dovranno esser note:  $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ .

Esercizio = Siano le componenti della A costanti, e cioè:

$$A \equiv \begin{cases} A_x = \text{cost.} \\ A_y = \text{cost.} \\ A_z = \text{cost.} \end{cases} \quad \text{avrò:} \quad \begin{cases} A_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ A_y = \frac{d^2 y}{dt^2} \\ A_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \end{cases},$$

che posso, identicamente scrivere:

$$A \equiv \begin{cases} A_x = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \\ A_y = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \\ A_z = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

Integrando ottengo la velocità vettoriale:

$$(1) \quad V \equiv \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = A_x t + C_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = A_y t + C_2 \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = A_z t + C_3 \end{cases},$$

da cui, moltiplicando per  $dt$ :

$$\begin{cases} dt(A_x t + C_1) = dx \\ dt(A_y t + C_2) = dy \\ dt(A_z t + C_3) = dz \end{cases},$$

ed, infine, integrando ancora una volta:

$$(2) \quad P \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} A_x t^2 + C_1 t + C_4 \\ y = \frac{1}{2} A_y t^2 + C_2 t + C_5 \\ z = \frac{1}{2} A_z t^2 + C_3 t + C_6 \end{cases}$$

Se, ora, per  $t = t_0$ , è anche:

$$V \equiv \begin{cases} V_x = V_{ox} \\ V_y = V_{oy} \\ V_z = V_{oz} \end{cases} \quad e \quad P \equiv \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

ricavo i valori delle sei costanti ponendo, nelle (1),  $t = t_0$ , ed ho:

$$C_1 = V_{ox}, \quad C_2 = V_{oy}, \quad C_3 = V_{oz},$$

e ponendo, analogamente, nelle (2), per  $x, y, z$ , i valori che queste coordinate assumono, per  $t = t_0$ , ottengo:

$$C_4 = x_0, \quad C_5 = y_0, \quad C_6 = z_0.$$

Supponiamo, in particolare, che l'accelerazione abbia la direzione dell'asse delle  $x$ , ( $A_y = A_z = 0$ ), che la posizione iniziale sia l'origine delle coordinate ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ) e che la velocità iniziale sia contenuta nel piano  $xy$  ed abbia, quindi, componenti  $V_{ox}, V_{oy}, 0$ . Si trova allora:

$$C_4 = C_5 = C_6 = 0 \quad e :$$

$$C_1 = V_{ox}, \quad C_2 = V_{oy}, \quad C_3 = 0.$$

Sostituendo nelle (2) si trova allora:

$$P \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} A_x t^2 + V_{ox} t \\ y = V_{oy} t \\ z = 0 \end{cases}$$

Eliminando il tempo, si trova l'equazione della Traiettoria:

$$x = \frac{\frac{1}{2} A_x}{V_{oy}^2} y^2 + \frac{V_{ox}}{V_{oy}} y.$$

che è l'equazione di una parabola passante per l'origine.

Consideriamo il caso particolare dell'accelerazione di gravità, accelerazione di valore costante e diretta verso il basso.

Scelta la Terna di assi  $x, y, z$ , se immaginiamo l'asse  $z$  parallelo alla verticale, avremo per  $A$ :

$$A \equiv \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z = -g \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases},$$

da cui ricaviamo immediatamente:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = C_1 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = C_2, \quad ,$$

mentre, per  $z$ , abbiamo:

$$-g = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dz}{dt},$$

da cui, moltiplicando per  $dt$  ed integrando:

$$z = -gt + C_3, \quad ,$$

e supponendo che, per  $t = 0$ , sia anche:

$$(2) \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad ,$$

e che la velocità del punto giaccia nel piano  $xy$ , dalle (1) precedenti ricaviamo (ricordando che, giacendo la  $V$  nel piano  $xy$ , sarà  $V_{oy} = 0$ ):

$$V_{ox} = C_1, \quad V_{oy} = 0, \quad V_{oz} = C_3$$

e:

$$x = \int V_{ox} dt + C_4 = V_{ox} t + C_4$$

$$z = \int V_{oz} dt + C_5 = - \int (gt + C_3) dt + C_5, \quad \text{cioè:}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_5.$$

Ma per la posizione (2) (per  $t = 0$ ) ottieniamo:

$$C_4 = 0, \quad C_5 = 0,$$

come si può facilmente verificare ponendo, nelle rispet-

Tive espressioni,  $t = 0$ ; e, conseguentemente, ponendo:

$$x = x_0 = 0 \quad , \quad y = y_0 = 0 \quad , \quad z = z_0 = 0 \quad ,$$

ottengo, per le coordinate del mobile:

$$P \equiv \begin{cases} x = V_{0x} t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{0z} t \end{cases}$$

Dalla prima delle precedenti ricaviamo, per  $t$ , il valore:

$$t = \frac{x}{V_{0x}}$$

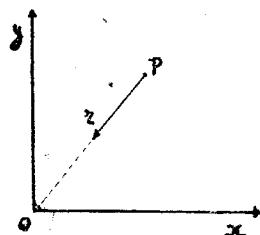
che, sostituito nella seconda, ci dà per  $z$ :

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_{0x}^2} + \frac{V_{0z}}{V_{0x}} x \quad ,$$

equazione, questa, che, palesemente, rappresenta una parabola nel piano  $xz$ .

Considerando sempre il moto su di un piano ( $xy$ ), si abbia una accelerazione, la cui grandezza  $|A|$  sia funzione della distanza del punto (a cui la  $A$  si riferisce) dall'origine, e sia diretta verso l'origine; supponiamo precisamente che sia:

$$|A| = kr \quad \text{dove } r = \bar{OP} \quad .$$



Se indichiamo con  $\alpha$  e  $\beta$  i coseni degli angoli che  $r$  fa con gli assi, avremo, per le coordinate di  $P$ :

$$P \equiv \begin{cases} x = r \alpha \\ y = r \beta \end{cases} \quad ,$$

da cui:

$$\alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad \beta = \frac{y}{r} \quad ,$$

quindi, per  $A_x$  ed  $A_y$ , avremo:

$A_x = -kx$ ,  $A_y = -ky$ ,  
essendo  $A$  diretta verso l'origine. Identicamente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

La prima delle equazioni precedenti si può scrivere:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad \text{e ponendo, poi, } x = e^{\alpha t}$$

derivando due volte, ottieniamo:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

che, sostituite nella (1), ci danno:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + k e^{\alpha t} = 0$$

e, divisa questa espressione per  $e^{\alpha t} (\neq 0)$ , otterremo:

$$\alpha^2 + k = 0$$

da cui:  $\alpha = \pm \sqrt{-k} = \pm i\sqrt{k}$ .

Abbiamo, dunque, i due integrali particolari:

$$x_1 = e^{i\sqrt{k}t}, \quad x_2 = e^{-i\sqrt{k}t}.$$

Facendo una combinazione lineare di essi, con costanti da determinarsi, ottieniamo l'integrale generale:

$$x = A_1 e^{i\sqrt{k}t} + A_2 e^{-i\sqrt{k}t}.$$

Applicando le formule di Eulero:

$$x = A_1 (\cos \sqrt{k}t + i \sin \sqrt{k}t) + A_2 (\cos \sqrt{k}t - i \sin \sqrt{k}t) = \\ = (A_1 + A_2) \cos \sqrt{k}t + i(A_1 - A_2) \sin \sqrt{k}t.$$

Posto:  $A_1 + A_2 = C_1$  ed:  $i(A_1 - A_2) = C_2$ ,

avremo, infine:

$$(2) \quad x = C_1 \cos \sqrt{k}t + C_2 \sin \sqrt{k}t.$$

In modo perfettamente analogo si ottiene:

$$(3) \quad y = C_3 \cos \sqrt{k}t + C_4 \sin \sqrt{k}t.$$

Al solito, per determinare le quattro costanti, se, per  $t=0$ , è:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = \dot{y}_0 \end{cases}$$

ponendo, nella (2) e nella (3), per  $x$  ed  $y$ , i valori  $x_0$  ed  $y_0$ . (e  $t=0$ ) ricaviamo:

$$C_1 = x_0, \quad C_3 = y_0.$$

Deriviamo, poi, la (2) e la (3):

$$\begin{cases} \dot{x} = -C_1 \sqrt{k} \sin \sqrt{k} t + C_2 \sqrt{k} \cos \sqrt{k} t \\ \dot{y} = -C_3 \sqrt{k} \sin \sqrt{k} t + C_4 \sqrt{k} \cos \sqrt{k} t \end{cases},$$

e ponendo, in quest'ultime,  $t=0$  e, perciò,  $x=x_0$ ,  $y=y_0$ , ricaviamo, infine:

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{k}}, \quad C_4 = \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{k}}.$$

Riprendendo la (2), osserviamo che essa può scriversi:

$$x = A \cos(\sqrt{k} t - \alpha)$$

dove  $A$  ed  $\alpha$  sono costanti da determinarsi. Infatti, sviluppando, avremo:

$$x = A (\cos \sqrt{k} t \cos \alpha + \sin \sqrt{k} t \sin \alpha).$$

Identificando quest'ultima con la (2), troviamo:

$$(*) \quad A \cos \alpha = C_1, \quad A \sin \alpha = C_2 \quad (**)$$

da cui:

$$A^2 = C_1^2 + C_2^2 \quad \text{e} \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

e dividendo la (\*\*) per la (\*):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_2}{C_1}.$$

Si procede analogamente per la  $y$ , soltanto che, invece delle costanti  $A$  ed  $\alpha$ , ne compariranno due nuove  $B$  e  $\beta$ . Riprendendo gli integrali generali sotto la forma:

$$(4) \quad \begin{cases} x = A \cos(\sqrt{k}t - \alpha) \\ y = B \cos(\sqrt{k}t - \beta) \end{cases}$$

poniamo:

$$\varphi = \sqrt{k}t - \alpha \quad (6)$$

e, aggiungendo e togliendo  $\alpha$  all'argomento che compare nel la (5) precedente, avremo:

$$y = B \cos(\sqrt{k}t - \alpha + \alpha - \beta)$$

e, per la (6):

$$y = B \cos(\varphi + \alpha - \beta)$$

di guisa che la (4) e la (5) divengono:

$$(7) \quad \begin{cases} x = A \cos \varphi \\ y = B \cos(\varphi + \alpha - \beta) \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} x = A \cos \varphi \\ y = B [\cos \varphi \cos(\alpha - \beta) - \sin \varphi \sin(\alpha - \beta)] \end{cases}$$

Ma, evidentemente, dalla (7), ricaviamo:

$$\cos \varphi = \frac{x}{A} \quad \text{e quindi:} \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

Sostituendo nella (8), per  $\sin \varphi$  e  $\cos \varphi$ , i precedenti valori:

$$\begin{aligned} y &= B \left( \frac{x}{A} \cos(\alpha - \beta) - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\alpha - \beta) \right) = \\ &= \frac{B}{A} x \cos(\alpha - \beta) - B \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Separiamo i termini nel modo seguente:

$$y - \frac{B}{A} x \cos(\alpha - \beta) = -B \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\alpha - \beta) ,$$

ed elevando al quadrato i due membri:

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{B^2}{A^2} x^2 \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \frac{B}{A} x y \cos(\alpha - \beta) &= \\ &= B^2 \left( 1 - \frac{x^2}{A^2} \right) \sin^2(\alpha - \beta) = \\ &= B^2 \sin^2(\alpha - \beta) - \frac{B^2}{A^2} x^2 \sin^2(\alpha - \beta) , \end{aligned}$$

e portando  $-\frac{B^2}{A^2} x^2 \sin^2(\alpha - \beta)$  al primo membro:

$$y^2 + \frac{B^2 x^2}{A^2} [\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) - 2 \frac{B}{A} xy \cos(\alpha - \beta)] = \\ = B^2 \sin^2(\alpha - \beta).$$

Semplificando e dividendo ambo i membri per  $B^2$ , avremo:

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2}{AB} xy \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta),$$

equazione, questa, che mi rappresenta un'ellisse col centro nell'origine. Moltiplicando per  $A^2 B^2$  ottieniamo ancora:

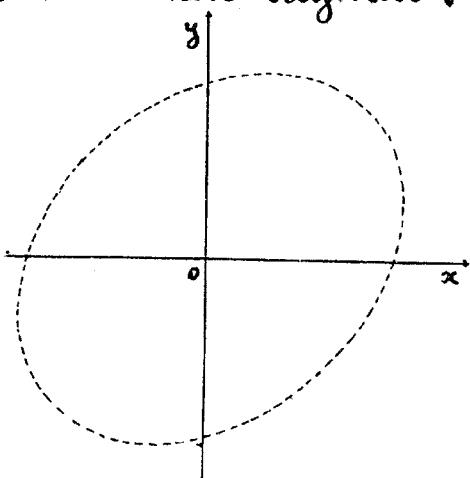
$$B^2 x^2 + A^2 y^2 - 2 AB xy \cos(\alpha - \beta) = A^2 B^2 \sin^2(\alpha - \beta).$$

Poniamo, in particolare, in quest'ultima relazione,  $A=0$ ; allora essa si riduce alla:

$$B^2 x^2 = 0$$

equazione che mi rappresenta l'asse delle  $y$  (essendo, per ipotesi, il moto nel piano  $xy$ ) contato due volte, poiché l'ellisse citata degenera in due rette sovrapposte.

Ritorniamo, ora, al caso generale in cui l'ellisse individuata non degeneri. Sia  $P$  un punto generico mobile sulla traiettoria; la sua ascissa e la sua ordinata sono date come funzioni del tempo dai due integrali, già precedentemente considerati:



$$\begin{cases} x = A \cos(\sqrt{k} t - \alpha) \\ y = B \cos(\sqrt{k} t - \beta) \end{cases}$$

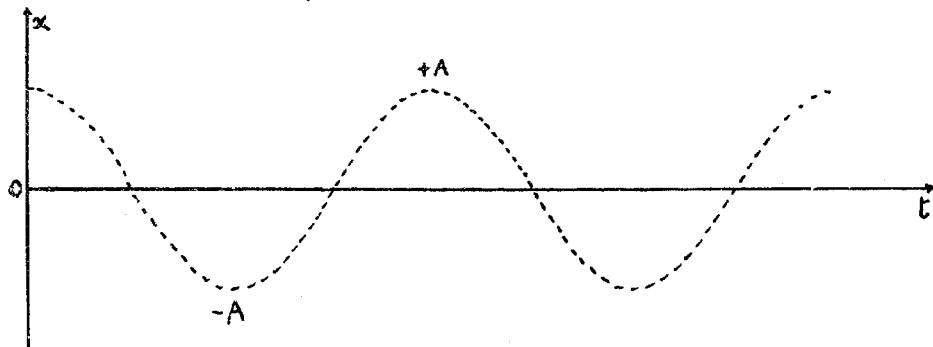
Osservo, anzitutto, che, essendo  $A$  una costante, la grandezza  $|x|$  dell'ascissa varierà al variare del coseno dell'argomento  $\sqrt{k} t - \alpha$ . Evidente-

mente, questo coseno sarà sempre compreso tra i valori +1 e -1, e ne possiamo, anzitutto dedurre che:

$$|x| \leq A.$$

Possiamo, ancora, dedurre per il segno a seconda che sia  $\cos(\sqrt{k}t - \alpha)$  maggiore o minore dello zero. Il valore di  $x$  varierà dunque da  $+A$  a  $-A$ , a seconda che il coseno vari da +1 a -1, passando per tutti i valori intermedi. -

Se noi consideriamo l'andamento della  $x$ , considerata come funzione del tempo  $t$  (essendo costanti:  $A$ ,  $\sqrt{k}$  ed  $\alpha$ ), portando in ascisse i valori di  $t$  ed in ordinate i corrispondenti valori di  $x$ , avremo che la curva che rappresen-



Ta la nostra funzione, sarà evidentemente una sinusoida; il valore massimo dell'ordinata sarà  $+A$ , il minimo  $-A$ . L'aumento che deve subire l'argomento, perché la funzione descriva un periodo, è dato da  $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ ; il periodo sarà perciò:  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ , e, conseguentemente, la frequenza sarà:  $v = \frac{\sqrt{k}}{2\pi}$ , essendosi definita, come frequenza, l'inverso del periodo. - Ricavo immediatamente:

$$2\pi v = \sqrt{k}.$$

Analogamente si può procedere, per la  $y$ , considerando l'integrale:

$$y = B \cos(\sqrt{k}t - \beta).$$

Anche qui si trova che il valore della funzione varia

Tra un minimo  $-B$  ed un massimo  $+B$ .

Scgliendo, dunque, i due assi cartesiani, e segnando sull'asse

delle  $x$  le distanze  $O+A$  ed  $O-A$ , e, analogamente, segnando, sull'asse  $y$ , le distanze  $O+B$  ed  $O-B$ , ne segue che la Traiettoria sarà compresa in un rettangolo che ha per lati le distanze  $-A+A$  e  $-B+B$ .

Essa è, nel caso più generale, una ellisse; in particolare, sarà un cerchio quando si abbia:  $A=B$ ,  $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ .

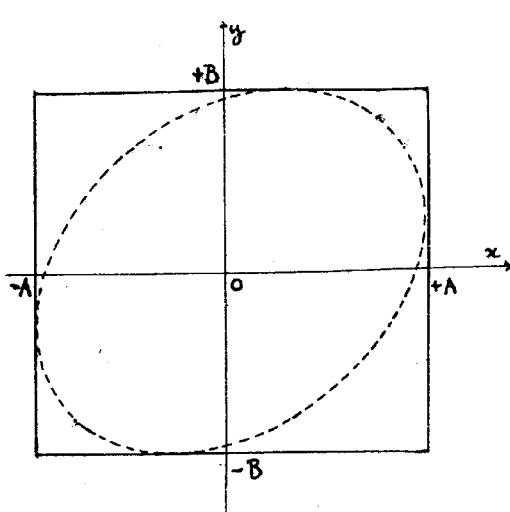
Venendo, poi, a considerare le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  che compaiono, rispettivamente, nell'integrale generale della  $x$  e nell'integrale generale della  $y$ , osserviamo che (essendo  $\sqrt{k}$  una costante), per un certo valore del tempo  $t$ , sarà massimo il valore della funzione quando  $\cos(\sqrt{k}t - \alpha)$ , oppure  $\cos(\sqrt{k}t - \beta)$ , sarà uguale a +1, cioè quando l'argomento sarà nullo od eguale a  $2k\pi$ . - Evidentemente, basta considerare il caso in cui l'argomento sia nullo. Sia:

$$\sqrt{k} t_1 - \alpha = 0$$

da cui ricaviamo:

$$t_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{k}},$$

dove  $t_1$  rappresenta il tempo trascorso, dall'origine dei tempi, all'istante in cui la funzione assume il suo massimo valore. Segue che, essendo  $\sqrt{k}$  una costante, il valore di  $t_1$  dipenderà dal valore di  $\alpha$  e, a seconda che sia  $\alpha \geq \beta$  (che compare nell'integrale generale della  $y$ ), la  $x$  raggiungerà il suo massimo valore dopo, contemporaneamente o prima della  $y$ . Si intende, perciò, che



la differenza tra  $\alpha$  e  $\beta$  definisce il ritardo di fase di un moto rispetto all'altro.

---

Se poi, nella (4) di pag. 39, è  $\alpha = \beta$ , essa si trasforma nella:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2}{AB} xy = 0$$

cioè:

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

il che significa che l'equazione dell'ellisse si trasforma in quella di una retta diagonale del rettangolo precedentemente considerato. - Ad un risultato analogo si perviene nel caso che sia:

$$\alpha - \beta = \pi$$

dai cui:

$$\sin(\alpha - \beta) = 0$$

con la differenza che la (4) di pag. 39 diventerà (essendo  $\cos(\alpha - \beta) = 1$ )

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2}{AB} xy = 0$$

e, quindi:

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

ed anche quest'ultima equazione mi rappresenta una retta doppia che è un'altra diagonale del rettangolo.

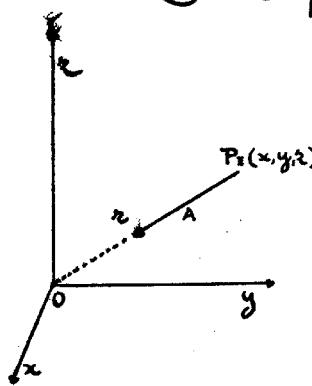
---

### Moti centrali:

Si dicono moti centrali quei moti in cui esiste una accelerazione, diretta verso un punto fisso O, e funzione della distanza del punto, di cui si considera l'accelerazione, da O. Data una Terna di assi cartesiani ortogonali, e data una accelerazione A, la cui grandezza sia espressa da:

$$|A| = f(r) \quad (\text{r variabile} = \vec{OP})$$

e la cui direzione è quella del raggio vettore  $r$  che unisce  $P$  con l'origine  $O$ , ed il cui senso positivo è diretto verso l'origine stessa. Indicando con  $x, y, z$ , le coordinate di  $P$ , avrò che i coseni direttori del vettore  $A$  saranno dati da:



$$-\frac{x}{r}, \quad -\frac{y}{r}, \quad -\frac{z}{r},$$

eppero:

$$A \equiv \begin{cases} A_x = -f(r) \frac{x}{r} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ A_y = -f(r) \frac{y}{r} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ A_z = -f(r) \frac{z}{r} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \quad (1), \quad (2), \quad (3)$$

e:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Vogliamo dimostrare che il moto si svolge in un piano. A Tale scopo moltiplichiamo la (2) precedente per  $-z$ , e la (3) per  $y$ . - Sommando membri la (2) e la (3), così moltiplicate, ottieniamo:

$$y \ddot{z} - z \ddot{y} = 0,$$

espressione, questa, che posso, identicamente, porre sotto la forma:

$$(4) \quad \frac{d}{dt} (y \dot{z} - z \dot{y}) = 0.$$

Dalla (4) precedente segue:

$$y \dot{z} - z \dot{y} = C_1.$$

Operando analogamente sulle (1) e (2) e sulle (1) e (3), abbiamo:

$$z \dot{x} - x \dot{z} = C_2$$

$$x \dot{y} - y \dot{x} = C_3.$$

I primi membri di queste 3 relazioni ci rappresentano

le componenti del prodotto vettoriale tra:

$\vec{r} = (x, y, z)$  e  $V = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ,  
risulterà cioè:

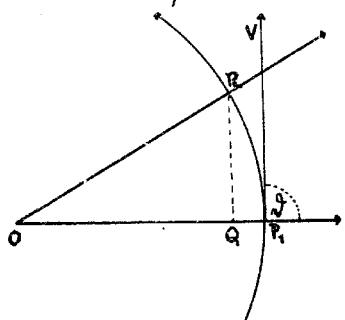
$$\vec{r} \wedge V = \vec{C}$$

Ma, siccome il vettore prodotto è sempre normale ad ambedue i vettori fattori, ne segue che questi saranno perpendicolari alla direzione invariabile di  $\vec{C}$ , e quindi, siccome  $\vec{r}$  passa per il punto fisso  $O$ , che la traiettoria è contenuta nel piano passante per  $O$  e perpendicolare a  $\vec{C}$ . - Per trovare la grandezza di  $\vec{C}$ , ricordiamo la formula che dà la grandezza del prodotto vettoriale.

Indicando con  $\vartheta$  l'angolo che  $V$  forma con  $\vec{r}$ , avremo:

$$|\vec{C}| = |\vec{r}| \cdot |V| \sin \vartheta. \quad (5)$$

Per dare un'interpretazione geometrica all'espressione (5) precedente, consideriamo due punti infinitamente vicini,  $P_1$  e  $P_2$ , della traiettoria; sia  $dt$  il tempo impiegato dal punto per andare da  $P_1$  a  $P_2$ . Si avrà:



$\vec{P}_1 \vec{P}_2 = ds = V dt$ .

L'area del triangolo curvilineo  $OP_1 P_2$  è data, evidentemente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, da:

$$dS = \frac{1}{2} \vec{O} \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 \vec{Q} = \frac{1}{2} r \cdot ds \cos \vartheta = \frac{1}{2} r V dt \cos \vartheta,$$

o, tenendo presente la (5):

$$(6) \quad dS = \frac{1}{2} C dt,$$

da cui si ricava, per  $C$ , l'espressione:

$$C = 2 \frac{dS}{dt}$$

Integrando la (6) tra due valori generici del tempo,  $t_1$  e  $t_2$ , otteniamo:

$$S_{1,2} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} C dt = \frac{1}{2} C (t_2 - t_1),$$

da cui si deduce il cosiddetto Teorema delle aree:

In un moto centrale, le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

## Teoria

### ~ delle curve nello spazio. ~

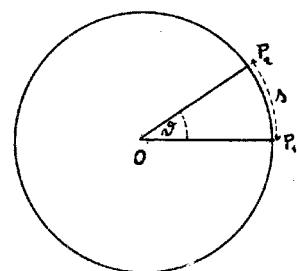
#### Raggio di curvatura.

Nel cerchio, detto  $R$  il raggio,  $s$  un arco generico e  $\vartheta$  l'angolo al centro corrispondente, dalla nota relazione:

$$s = R \vartheta,$$

si ricava per  $R$ :

$$R = \frac{s}{\vartheta}.$$

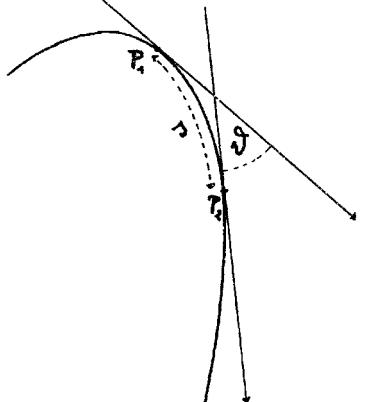


Estendendo queste considerazioni ad una curva gobba qualsiasi, consideriamo le tangenti in due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , indicando con  $\vartheta$  il loro angolo. Osserviamo che, evidentemente, l'angolo

sudetto varierà al variare dell'arco  $s$  compreso tra i due punti, ovvero, supponendo  $P_1$  fisso, al variare di  $P_2$ .

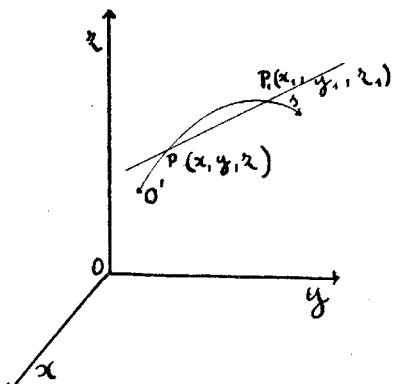
Definiamo il raggio di curvatura  $\rho$ , analogamente a quanto si è fatto nel caso del cerchio, con la formula:

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \vartheta}.$$



Sia data, ora, la solita terza di assi, una curva gobba.

qualsiasi, e la posizione del punto generico  $P$  in funzione dell'arco  $s$ ; siano, cioè, date:



$$P \equiv \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} .$$

Osserviamo, anzitutto, che le tre precedenti funzioni nella (5), non possono esser date arbitrariamente, ma dovranno soddisfare alla nota relazione:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

da cui, dividendo ambo i membri per  $ds^2$ :

$$1 = \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 .$$

Osserviamo, ora, che i coseni direttori della secante  $\bar{PP}_1$ , sono proporzionali alle differenze tra le coordinate di  $P_1$  e quelle di  $P$ . Indicando, per brevità, con  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , tali differenze, i coseni direttori di  $\bar{PP}_1$  risulteranno, dunque, proporzionali a  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$ .

D'altra parte, dalla relazione:

$$\bar{PP}_1^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 ,$$

si ricava per la grandezza di  $\bar{PP}_1$ :

$$\bar{PP}_1 = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2} .$$

Quindi, per la grandezza dei coseni direttori di  $\bar{PP}_1$ , avremo:

$$\alpha = \frac{\Delta_x}{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}}$$

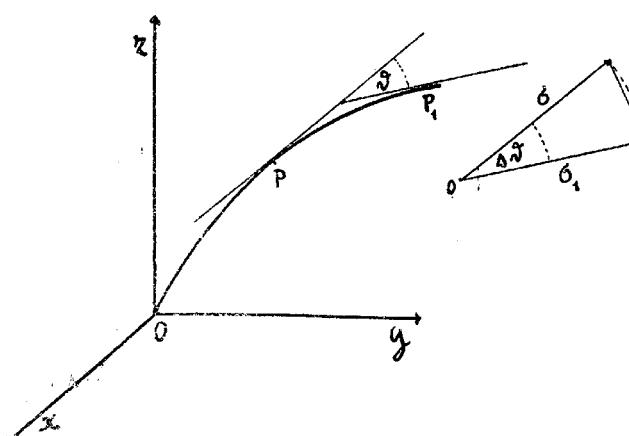
$$\beta = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

$$\gamma = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}.$$

Quando, poi,  $P_1$  tende a  $P$  e la secante  $\bar{P}P_1$  tende a diventare tangente in  $P$ , i coseni direttori di essa tangente ci saranno dati dal limite a cui tendono le tre precedenti espressioni per  $\Delta s$  tendente a zero. Osservando che  $\Delta s$  differisce da  $ds$  per infinitesimi di ordine superiore (e così si dica per  $\Delta x$  e  $dx$ , per  $\Delta y$  e  $dy$  e per  $\Delta z$  e  $dz$ ) potremo, al limite, porre:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{dx}{ds} \\ \beta = \frac{dy}{ds} \\ \gamma = \frac{dz}{ds} \end{array} \right.$$

Scegliendo, poi, a partire da un'origine qualsiasi, due vettori,  $\delta$  e  $\delta_1$ , paralleli, rispettivamente alla tangente in  $P$  ed a quella in  $P_1$ , e come esse tangenti, orientati; osserviamo che la differenza  $|\delta - \delta_1|$ , poiché



l'angolo  $\Delta\theta$  è infinitesimo, differisce dall'archetto  $\Delta\delta$ , per infinitesimi di ordine superiore. D'altra parte  $\Delta\delta$ , giacendo su di un cerchio di raggio unitario, è uguale all'angolo  $\Delta\theta$ ; risulterà perciò:

$$\varrho = \lim_{\Delta\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{|\delta_1 - \delta|}.$$

Invertendo i rapporti, ponendo in luogo di  $|\delta|$ ,  $d\delta$ , e, in luogo di  $\Delta s$ ,  $ds$ ; abbiamo l'espressione della curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{|\delta|}{ds} = \left| \frac{d\delta}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\delta}{ds} \right|}.$$

Riguardo alle componenti di  $\frac{d\delta}{ds}$ , osserviamo che i coseni direttori di una retta, tangente alla curva, sono dati dalle derivate prime, rispetto ad  $s$ , delle coordinate del punto di contatto (vedi (1)). Ora, le componenti di  $\delta$  e di  $\delta_1$ , trattandosi di vettori unitari, coincidono coi rispettivi coseni direttori. Per le componenti di  $\frac{d\delta}{ds}$ , dovremo, perciò, considerare il limite a cui tendono le differenze tra le componenti analoghe di  $\delta_1$  e  $\delta$ , col tendere a zero dell'arco  $s$ .

Sarà dunque:

$$\frac{d\delta}{ds} = \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} \\ \frac{d^2y}{ds^2} \\ \frac{d^2z}{ds^2} \end{cases}$$

Per la grandezza di  $\frac{d\delta}{ds}$ , quadrando le tre relazioni precedenti, sommandole ed estraendone la radice quadrata, avremo:

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{|\delta|} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Quanto alla direzione di  $\frac{d\delta}{ds}$ , essendo  $|\delta|=1$ , e quindi  $\delta^2=1$ , derivando quest'ultima, rispetto ad  $s$ , otteniamo:

$$2\delta \times \frac{d\delta}{ds} = 0$$

da cui si deduce che il vettore  $\frac{d\delta}{ds}$  è normale a  $\delta$ .  
(A tale conclusione si arriva facilmente ricordando che,

affinché il prodotto scalare di due vettori, ambedue diversi da zero, si annulli è necessario che il coseno, formato dalle direzioni di questi, sia nullo, che essi, quindi, siano tra loro perpendicolari). Inoltre, essendo  $\frac{d\delta}{ds}$  normale alla Tangente, sarà anche normale alla curva.

Considerando, ancora, il vettore  $\delta_1 - \delta$ , osserviamo che, poiché esso è la differenza tra i vettori Tangenti alla curva in  $P_1$  e  $P_2$ , rispettivamente, giacerà (e quindi anche il vettore  $\frac{\delta_1 - \delta}{\Delta s}$ ) nel piano individuato da  $\delta$  e  $\delta_1$ . Quando  $\Delta s$  tende a zero, cioè, quando  $\delta_1$  Tende a coincidere con  $\delta$ , il piano suddetto tenderà ad una certa posizione limite, diverrà, cioè, ciò che si definisce piano osculatore alla curva nel punto  $P$ . Il vettore  $\frac{\delta_1 - \delta}{\Delta s}$  (che al limite sarà diventato  $\frac{d\delta}{ds}$ ) giacerà nel piano osculatore suddetto, ma, d'altra parte, dovendo Tale vettore, non nullo, esistere anche nel piano normale alla curva in  $P$ , la sua direzione coinciderà con quella della retta intersezione dei due piani, retta che dicesi: normale principale della curva in  $P$ . Essa risulta parallela al vettore:  $\delta' = \frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{\kappa} =$  curvatura, ed ugualmente orientata. Indicando con  $\tau = \tau(s)$  il vettore che rappresenta la normale principale, assumendolo come versore (vettore unitario) di  $\delta'$ , avremo, per quest'ultimo l'espressione:

$$\delta' = \frac{1}{\kappa} \tau$$

Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono i coseni direttori della Tangente in un punto generico della curva,  $\lambda, \mu, \nu$  i coseni direttori della normale nello stesso punto, si hanno le formule del Serret:

$$\frac{da}{ds} = \frac{\lambda}{\kappa} \quad ; \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{\kappa} \quad ; \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\kappa}$$

che esprimono scalarmente la precedente equazione vettoriale.

Considerando, ora un qualsiasi moto di un punto, prefissato, al solito, il senso degli archi crescenti, essendo ancora l'arco  $s$  funzione del Tempo  $t$ , e notando la posizione di un punto generico  $P$  come funzione dell'ascissa curvilinea  $s$  (a partire da un'origine prefissata), avremo:

$$s = s(t) \quad e \quad P = P(s)$$

e, per le coordinate di  $P$ :

$$P \equiv \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

La velocità (scalare) sulla Traiettoria sarà:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

La velocità vettoriale  $V$ , indicando con  $\vec{\delta}$  il vettore unitario che ha la direzione della Tangente alla Traiettoria nel punto considerato, avrà la forma:

$$V = v \cdot \vec{\delta} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\delta}$$

Per l'accelerazione,  $A$ , avremo:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\delta} + v \cdot \frac{d\delta}{dt},$$

ma, avendosi evidentemente:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

(essendo  $\frac{ds}{dt} = v$ , e  $\frac{d\delta}{ds} = \frac{\tau}{\varphi}$ ) si ricava:

$$\vec{A} = \vec{\sigma} \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\tau} \frac{\vec{v}^2}{\varrho}$$

e ponendo  $A_\delta$  per il primo addendo del secondo membro, ed  $A_\tau$  per secondo, otteniamo:

$$A = A_\delta + A_\tau ,$$

cioè, l'accelerazione può scomporsi in due componenti, tangenziale l'una, normale l'altra, le cui grandezze rispettive sono:

$$|A_\delta| = \frac{d\vec{v}}{dt} , \quad |A_\tau| = \frac{\vec{v}^2}{\varrho} .$$

Discende di qui che l'accelerazione sarà solo tangenziale, cioè consisterà in una variazione della grandezza della velocità quando il moto sarà rettilineo: allora, infatti, sarà  $\varrho = \infty$ , quindi  $A_\tau$  sarà nulla: Sussisterà, invece, la sola accelerazione normale quando  $A_\delta$  sarà nulla, cioè quando la velocità sulla Traiettoria sarà costante, essendo allora  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ ; ad esempio, nel moto circolare uniforme.

## Cinematica dei Sistemi RigiSi.

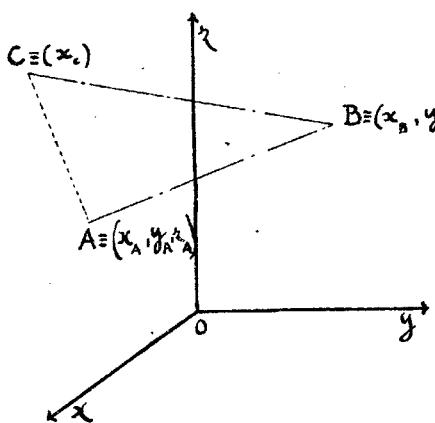
Un sistema di punti mobili si dice rigido quando le distanze tra i punti non variano durante il movimento.

Detti  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , gli  $n$  punti del sistema, affinchè simulaneamente sia, per ogni valore del tempo determinata la posizione di ciascuno di essi, dovremo dare, per ogni punto, (supponendo che la posizione di esso sia una certa funzione,  $P(t)$ , del tempo) le tre coordinate che risulteranno funzioni scalari della  $t$ . - Si dovranno dare, complessivamente, le

3n funzioni :

$$x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t).$$

Il problema si semplifica notevolmente osservando che, prefissate, in un dato istante, le posizioni di tre punti, non allineati, del sistema, la posizione di un quarto punto qualsiasi ne è univocamente determinata, perché, se, ad esempio, per  $t = t_0$ , le posizioni dei tre punti erano  $A_{t_0}, B_{t_0}, C_{t_0}$ , e, conseguentemente, quella di un quarto punto,  $D_{t_0}$ ; al tempo generico  $t$  le posizioni dei tre punti di riferimento, essendo diventate:  $A_t, B_t, C_t$ , la posizione,  $D_t$ , del quarto resta determinata dal dover essere il Tetraedro (o quadrangolo piano)  $A_{t_0}B_{t_0}C_{t_0}D_{t_0}$  eugale (o sovrapponibile) al Tetraedro (o quadrangolo piano)  $A_tB_tC_tD_t$ . In altre parole, il punto  $D$  resta determinato come intersezione tra le tre sfere di centri  $A, B, C$ , rispettivamente, e di raggi eguali alle tre distanze di  $D$  da  $A, B, C$ ; distanze che, per la ipotesi della rigidità, conservano, durante tutto il movimento, valore eguale a quello che avevano nella posizione iniziale del sistema. Dunque, per quanto sopra, possiamo concludere che la posizione di qualsiasi punto del sistema (e quindi quella dell'intero sistema) è determinata quando sono date le coordinate di ciascuno dei punti di riferimento.



Ma il numero delle funzioni da darsi può essere ancora ridotto. Infatti, considerando il punto A dato mediante le sue coordinate,  $x_A, y_A, z_A$ , la posizione di B sarà nota quando siano date solo due delle sue coordinate, potendosi

facilmente determinare, mediante la conoscenza della distanza  $\bar{AB}$  la terza coordinata di  $B$ . Per conoscere, poi, la posizione di  $C$ , basterà dare una sola coordinata, potendosi ricavare le altre due dai valori noti delle distanze  $\bar{AC}$  e  $\bar{BC}$ . Concludendo, infine, il numero delle funzioni, necessarie a determinare la posizione di un sistema rigido, si riduce a sei.

Ordinariamente, si individua la posizione di un sistema rigido, scegliendo una Terna di assi solidale col sistema e mobile con esso, e riferendo la posizione di questa Terna  $O(\xi, \eta, \zeta)$  alla Terna fissa  $O(x, y, z)$ . Detti:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , i coseni degli angoli tra  $\xi, \eta, \zeta$ , ed  $x$ ;  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , i coseni degli angoli tra la medesima Terna ed  $y$ ;  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$ , infine, i coseni degli angoli di essa con  $z$ , possiamo scrivere la seguente Tabella:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$y$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$z$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$

in cui i nove coseni (che, secondo le linee, sono i coseni direttori di  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ , rispetto ad  $x, y$  e  $z$ ; e, secondo le colonne, i coseni direttori di  $x, y, z$  rispetto a  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ ) sono legati fra loro dalle sei relazioni indipendenti:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \\ \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 = 0 \\ \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Per determinare la posizione di un punto del sistema, rispetto alla Terna  $x, y, z$ , sarà necessario conoscere, per ogni valore del tempo, la posizione (mediante le sue coordinate rispetto ad  $x, y, z$ ) dell'origine della Terna mobile, e la orientazione di  $\xi, \eta, \zeta$ . Per ciò che riguarda  $\Omega$ , bisognerà, evidentemente darne le coordinate  $x_0, y_0, z_0$ , per ogni valore del tempo; per quanto, poi, concerne le direzioni, bisognerà dare, sempre in funzione del tempo, i nove coseni di direzione. Tra questi, però, come si è visto, passano sei relazioni indipendenti, cosicché le funzioni, in sostanza, si riducono a tre. Servendosi dei cosiddetti angoli di Eulero, si possono esprimere esplicitamente tali coseni per mezzi di tre variabili soltanto. Immaginiamo di aver portato, mediante una traslazione,  $\Omega$  in  $O$ . - Indichiamo, poi, con  $\vartheta$ , l'angolo che l'asse  $\zeta$  fa con l'asse  $z$ , e consideriamo la retta, l'intersezione del piano  $\xi \eta$  col piano  $xy$ , e diciamo  $\varphi$  e  $\psi$  gli angoli che  $\lambda$  fa con  $\xi$  e con  $x$ , rispettivamente. Conoscendo  $\vartheta, \varphi$  e  $\psi$ , per le considerazioni che, immediatamente seguono, l'orientazione di  $\xi, \eta, \zeta$ , rispetto alla Terna  $x, y, z$ , resta determinata. - Conoscendo  $\varphi$ , possiamo collocare l'asse  $\lambda$ , poiché sappiamo che esso è situato nel piano  $xy$  e forma con  $x$  l'angolo  $\psi$ .

Fatto ciò, possiamo situare anche l'asse  $\xi$ , poiché esso è perpendicolare a  $\lambda$  e forma con  $z$  l'angolo  $\vartheta$ . Da ultimo, si possono situare gli assi  $\xi$  ed  $\eta$  che sono perpendi-

colori a  $\xi$ , e formano con  $\lambda$  gli angoli  $\varphi$  e  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . - Dette  $x_0, y_0, z_0$ , le coordinate di  $\Omega$  rispetto ad  $O$ , per le note formule di geometria analitica, le coordinate cartesiane ortogonali di un punto generico  $P_i$  del sistema, riferite ad  $x, y, z$ , (terna fissa), essendo  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ , le coordinate rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$ , (terna mobile), saranno date dalle formule:

$$P_i = \begin{cases} x_i = x_0 + \xi_i \alpha_1 + \eta_i \alpha_2 + \zeta_i \alpha_3 \\ y_i = y_0 + \xi_i \beta_1 + \eta_i \beta_2 + \zeta_i \beta_3 \\ z_i = z_0 + \xi_i \gamma_1 + \eta_i \gamma_2 + \zeta_i \gamma_3 \end{cases} .$$

In queste formule,  $x_0, y_0$  e  $z_0$  saranno funzioni del tempo, e così pure i nove coseni; invece  $\xi_i, \eta_i$  e  $\zeta_i$  resteranno costanti al variare del tempo.

---

### ~ Moti rigidi piani ~

Consideriamo, nel piano  $xy$ , p. es., un sistema rigido piano, mobile nel suo piano; le coordinate dell'origine,  $\Omega$ , della coppia mobile, siano:

$$\Omega \equiv (x_0, y_0)$$

Sempre rispetto agli assi fissi, le coordinate di un punto generico  $P_i$  del sistema, saranno:

$$P_i = \begin{cases} x_i = x_0 + \xi_i \cos \vartheta - \eta_i \sin \vartheta \\ y_i = y_0 + \xi_i \sin \vartheta + \eta_i \cos \vartheta \end{cases} ,$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra  $\xi$  ed  $x$ .

Analogamente al caso precedente,  $\vartheta, x_0$  ed  $y_0$  sono funzioni del Tempo, mentre  $\xi_i$  ed  $\eta_i$  sono costanti.

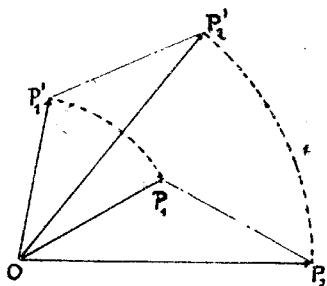
---

## ~ Moti traslatori ~

Dato un corpo rigido, si dice che il suo moto è traslatorio quando le velocità di tutti i suoi punti sono uguali e parallele.

## ~ Moti rotatori piani ~

Considerando un sistema rigido che abbia fisso un punto O (centro del moto), gli altri punti potranno, evidentemente, descrivere soltanto dei cerchi di centro O e di raggio pari alla distanza da O dei punti stessi. - Detti  $P_1$  e  $P_2$  due qualsiasi



punti del sistema, e  $P_1'$  e  $P_2'$  le posizioni in cui si troveranno, dopo un certo tempo,  $P_1$  e  $P_2$  rispettivamente; vogliamo dimostrare l'uguaglianza degli angoli:

$$\widehat{P_1OP_1'} = \widehat{P_2OP_2'} \quad . \quad (1)$$

Vediamo subito che le distanze  $\bar{OP}_1'$  ed  $\bar{OP}_2'$  sono, rispettivamente, uguali ad  $\bar{OP}_1$  e  $\bar{OP}_2$ . D'altra parte, essendo il sistema rigido, abbiamo:

$$\bar{P}_2\bar{P}_1 = \bar{P}_2'\bar{P}_1'$$

Concludiamo che i due triangoli,  $OP_1P_2$  ed  $OP_1'P_2'$ , sono uguali. Come conseguenza, sono uguali anche i due angoli (1)

- Considerando la posizione di un punto generico P al tempo t ed al tempo  $t + \Delta t$ , il raggio  $\bar{OP}$  avrà ruotato di un angolo  $\Delta\vartheta$ . Il rapporto  $\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$  si chiama velocità angolare media nell'intervalle di tempo  $\Delta t$ . Il suo limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega ,$$

si dice velocità angolare all'istante  $t$ .

Particolarmenete, nel caso di un moto circolare uniforme, la velocità angolare è costante; avremo perciò:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega = \text{cost.},$$

da cui, integrando, otteniamo:

$$\vartheta = \omega t + \vartheta_0$$

La velocità assoluta, sulla traiettoria, ci sarà data da:

$$v = R\omega \quad (R = \text{raggio})$$

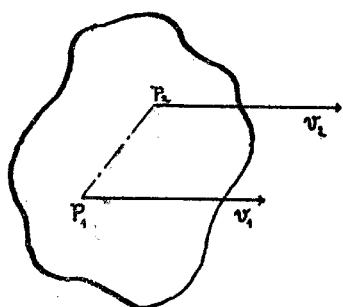
Si trova, dunque, che la velocità di ogni punto è proporzionale ad  $R$ .

Consideriamo due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , del sistema, e supponiamo che le loro velocità siano parallele e che la retta  $\overline{P_1P_2}$  non sia perpendicolare alla direzione delle velocità nei due punti medesimi. Vogliamo dimostrare che, in questo caso, il moto è traslatorio. Per questo cominceremo col dimostrare (essendo, per ipotesi, le due velocità parallele) che le due velocità hanno eguale grandezza. Essendo il sistema, rigido (se l'angolo  $\alpha$ , che la congiungente i punti  $P_1$  e  $P_2$  fa con la direzione della velocità, è diverso da  $90^\circ$ ), avremo:

$$(P_2 - P_1)^2 = \text{cost.}$$

Derrivando, rispetto a  $t$ , otteniamo:

$$2(P_2 - P_1) \times \frac{d(P_2 - P_1)}{dt} = 0$$



Osservo, ora, che il vettore, differenza di due vettori paralleli, è parallelo

ai due vettori in questione, perciò, dividendo per due ambo i membri, otteniamo:

$$(1) \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times \frac{d(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}{dt} = 0$$

epposì ne segue, che, supposti i due fattori del prodotto precedente ambedue diversi da zero, condizione necessaria e sufficiente perchè sussista, è che  $\frac{d(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}{dt}$  sia perpendicolare a  $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$ . Ma è evidentemente:

$$\frac{d(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}{dt} = \frac{d\mathbf{P}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{P}_1}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

Cioè, il vettore suddetto, differenza tra la velocità di  $\mathbf{P}_2$  e quella di  $\mathbf{P}_1$ , risultando perpendicolare a  $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$ , ne seguirebbe la condizione di perpendicolarità tra  $(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$  e le due velocità, il che è contrario all'ipotesi.

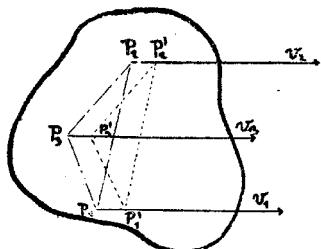
Necessariamente, dunque, perchè sia valida la (1) dovrà essere:

$$\frac{d\mathbf{P}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{P}_1}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = 0$$

Resta, dunque, dimostrato che  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  hanno velocità eguali anche in grandezza.

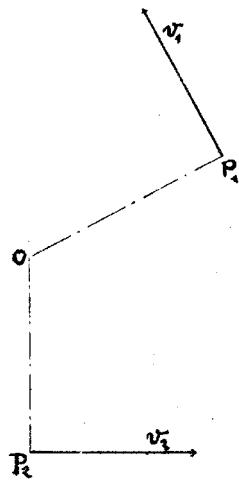
Vogliamo, ora, dimostrare che tutti, indistintamente, i punti del sistema hanno eguale velocità.

Consideriamo, perciò, un terzo punto,  $\mathbf{P}_3$ , qualsiasi, all'istante,  $t + \Delta t$ , immediatamente successivo a quello,  $t$ , inizialmente considerato, le posizioni dei punti saranno  $\mathbf{P}'_1$ ,  $\mathbf{P}'_2$  e  $\mathbf{P}'_3$ . - Per il nostro asserto (essendo, evidentemente, i due triangoli,  $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3$  e  $\mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2 \mathbf{P}'_3$ ,



eguale) basterà dimostrare che nel tempo scalo  $\Delta t$  i tre punti hanno percorso spazi eguali poiché potremo dedurne che essi possiedono eguale velocità. I lati  $P_1 P_2$  e  $P'_1 P'_2$  sono paralleli tra loro perché si è dimostrato che  $P_1$  e  $P_2$  hanno la stessa velocità; ne segue che tutti i lati corrispondenti dei due triangoli eguali sono paralleli tra loro e, quindi,  $P_2 P_3 P'_3 P'_2$  è un parallelogramma, perciò i suoi lati opposti  $P_2 P'_2$  e  $P_3 P'_3$  sono eguali e paralleli.

Consideriamo, ora, un moto rigido piano, in cui le velocità di due punti qualsiasi non siano parallele.



Vogliamo dimostrare che la velocità del punto  $O$  (centro del moto), punto che si costruisce come intersezione delle normali alle velocità,  $v_1$  e  $v_2$ , in  $P_1$  e  $P_2$ , rispettivamente, è nulla.

Al solito, essendo costante la distanza fra due punti, al variare del

tempo, avremo:

$$(P_1 - O)^2 = \text{cost.}$$

da cui, derivando rispetto a  $t$ :

$$2(P_1 - O) \times \frac{d(P_1 - O)}{dt} = 0$$

da cui:

$$(P_1 - O) \perp \frac{d P_1}{dt} - \frac{d O}{dt}, \text{ ovvero (essendo } \frac{d O}{dt} = v_0 \text{):}$$

$$(P_1 - O) \perp v_1 - v_0.$$

Ma, per costruzione,  $(P_i - O)$  è normale a  $v_i$ ; dalla relazione precedente si conclude che  $\omega \circ$  è parallelo a  $v_i$  o è nullo. Parimente si dimostra che  $v_o$  è o nullo o parallelo a  $v_2$ ; siccome, però,  $v_i$  e  $v_2$  non sono paralleli tra loro,  $v_o$  dovrà necessariamente essere nullo.

Ad ogni istante il movimento del corpo si può riguardare come rotatorio.

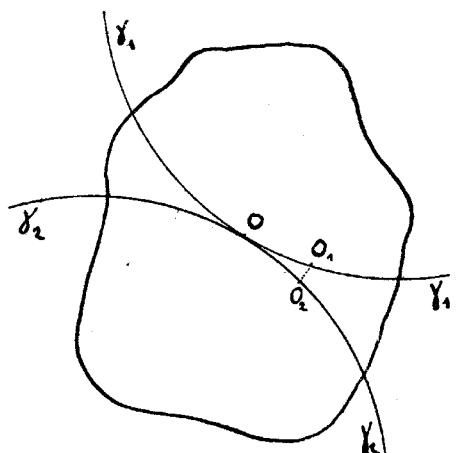
Considerando il moto di un sistema rigido piano su di un piano fisso, avverrà generalmente che il centro di rotazione del corpo assuma, al variare del tempo, posizioni diverse sul corpo stesso e, contemporaneamente, sul piano di riferimento.

Il luogo geometrico dei centri sul corpo sarà una curva  $\gamma_1$ , e, analogamente, sul piano fisso, un'altra curva  $\gamma_2$ . Vogliamo dimostrare che, in ogni istante, le due curve si toccano in un punto che è il centro di rota-

zione in quell'istante; per il che basterà far vedere che la distanza tra i punti  $O_1$  e  $O_2$ , solidali, rispettivamente, col corpo e col piano fisso, e che diventano centri istantanei di rotazione al tempo  $t + \Delta t$  (per il quale tempo essi verranno a coincidere) è infinitesima di ordine superiore. Osserviamo,

pertanto, che si ha:

$$(1) \quad \overline{O_1 O_2} = \Delta t \cdot V_o \quad (V_o = \text{veloc. di } O_1)$$

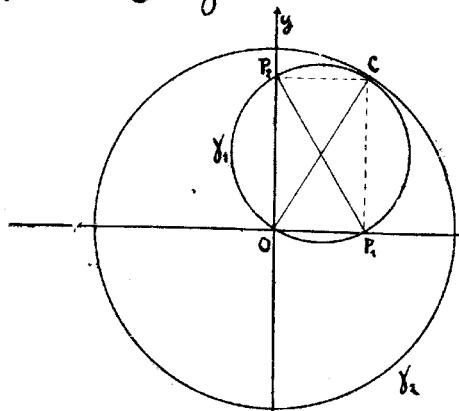


Ora, essendo  $O_1$  infinitamente prossimo al centro di rotazione  $O$ , la sua velocità,  $V_{O_1}$ , è infinitesima. Dalla (1) si ricava dunque che  $O_1 O_2$  è il prodotto di un infinitesimo di primo ordine per un altro infinitesimo; esso è, dunque, infinitesimo di ordine superiore.

La dimostrazione, poi, che le due curve non strisciano l'una sull'altra è data dalla considerazione che, nell'istante considerato, il punto  $O$  di contatto fra esse è centro di rotazione: esso sarà, perciò, fermo, quindi le due curve non strisceranno l'una sull'altra.

In conclusione, siccome  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si toccano, in ogni istante, in un punto che è centro di rotazione nell'istante considerato, il moto del sistema si può guardare come prodotto, senza strisciare, dal rotolamento della curva  $\gamma_1$ , solidale col sistema e mobile con esso, sulla  $\gamma_2$ , fissa sul piano di riferimento.

Esempio. - Si consideri il moto di un'asticella rigida che scorra su due altre, tra loro ortogonali, che sceglieremo come assi coordinati  $x$  ed  $y$ . Indichiamo con  $P_1$  e  $P_2$  gli estremi dell'asticella. - Il centro del



moto sul piano  $x$ - $y$  è il punto che ha per ascissa  $OP_1$ , e per ordinata  $OP_2$ .

Il luogo geometrico descritto dal centro  $C$  sarà un cerchio di centro  $O$  e di raggio  $OC$ , perché, essendo  $OP_1CP_2$  un rettangolo, al variare di  $P_1$

e  $P_2$ , la distanza fra questi due punti deve rimanere invariata. Ma, rimanendo immutata la distanza  $\bar{P}_1\bar{P}_2$ , che è una diagonale del rettangolo, rimarrà invariata anche l'altra diagonale  $\bar{O}\bar{C}$ ; di qui è dimostrato il nostro asserto. D'altra parte, il centro del moto, considerato in un piano solidale coll'astuccinola mobile, varierà, essendo soggetto alla condizione che l'angolo  $P_1CP_2$  sia retto.

Perciò esso descriverà un cerchio di diametro  $\bar{P}_1\bar{P}_2$ ; ed essendo:

$$\bar{P}_1\bar{P}_2 = \bar{O}\bar{C},$$

detto cerchio passerà per l'origine. Il punto di contatto tra i due cerchi sarà il centro istantaneo di rotazione.

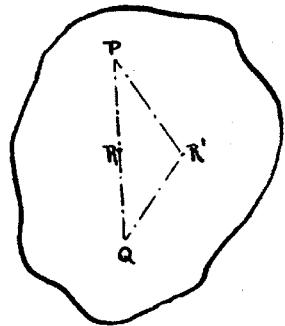
## Moti rigidi in generale

Per i moti Traslatori si ripetono le stesse considerazioni fatte per i moti piani. - Per i moti rotatori, invece, bisogna osservare che, se ad un certo istante generico  $t$  vi sono due punti,  $P$  e  $Q$ , che stanno fermi, vi è anche una retta, e precisamente la  $\bar{P}\bar{Q}$ , che sta ferma.

Fissiamo, infatti, sulla  $\bar{P}\bar{Q}$ , un punto generico  $R$ : questo punto, all'istante  $t$ , è, per costruzione, allineato con  $P$  e  $Q$ . Supponiamo, ora, per un mo-

mento, che in un certo tempo,  $t + \Delta t$ , la posizione di R sia diventata  $R'$ , fuori della retta  $PQ$ . Allora, siccome deve essere, per la rigidità:

$$R'Q = RQ, \text{ e } R'P = RP,$$



bisogna, evidentemente, che il triangolo  $PR'Q$  si schiacci sul lato  $PQ$ , ed il punto  $R$  resti, quindi, sempre allineato con  $P$  e  $Q$ . D'altra parte, trattandosi

di un sistema rigido, dovranno rimanere inalterate le distanze  $RP$  ed  $RQ$ : ne consegue che  $R$  non può scorrere, neppure, sulla retta  $PQ$ . Lo stesso ragionamento è valido per tutti gli altri punti della linea, e basta a dimostrare come essa rimanga fissa per intero.

Tale retta dicesi asse di rotazione.

Un moto di questo tipo si dice rotatorio.

Passando, ora, a considerare il moto rotatorio di un sistema rigido, il cui asse sia assegnato mediante due dei suoi punti,  $P$  e  $Q$ , si vede immediatamente come il moto di un punto,  $R$ , qualsiasi del corpo, si svolga su di un cerchio che ha, per raggio, la distanza di  $R$  da  $PQ$ , e che giace nel piano condotto per  $R$ , normalmente all'asse.

Infatti, le distanze  $PR$  e  $QR$  debbono rimanere co-

Tanti, e quindi  $R$  deve restare sull'intersezione delle due sfere di centro  $P$  e  $Q$ , rispettivamente, e di raggio  $\bar{P}R$  e  $\bar{Q}R$ , intersezione che, per l'appunto è il cerchio medesimo.

Proiettando il moto di tutti i punti su di un piano normale all'asse, otteniamo una serie di cerchi concentrici su cui i rispettivi punti si muovono.

Vale, anche qui, l'osservazione fatta, per i moti piani, che tutti i punti del sistema hanno eguale velocità angolare. -

### Velocità angolare nei moti rigidi, in genere.

Sappiamo che la velocità angolare  $\omega$  ci è data dal

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d \vartheta}{dt} = \omega,$$

ove  $\vartheta$  è l'angolo di cui è rotato, in un certo tempo, un qualsiasi punto del sistema.

Generalizzando il concetto di velocità angolare, la rappresenteremo con un vettore perpendicolare al piano in cui si svolge il moto del punto, orientato in modo che un osservatore collo sguardo diretto verso il senso positivo di esso, vegga avvenire il moto da destra a sinistra.

Quanto alla velocità  $\vec{V}$ , sulla traiettoria, osserviamo, anzitutto, che proiettando il moto su di un piano normale all'asse, la direzione di  $\vec{\omega}$  coincide con la direzione dell'asse. Ci proponiamo di dimostrare che è:

$$V = \omega \wedge (R-O) \quad (1)$$

dove  $R$  è un punto generico del sistema (a cui si riferiscono  $V$  ed  $\omega$ ) e dove  $O$  è un punto, dell'asse, determinato come intersezione del piano condotto, per  $R$ , normalmente all'asse, con l'asse stesso.

Per la grandezza di  $V$ , avremo:

$$|V| = |\omega| \cdot |R-O| \cdot \sin \delta,$$

ma, siccome, qualunque sia  $\delta$ , è:

$$|R-O| \sin \delta = r = \text{dist. di } R \text{ dall'asse},$$

avremo:

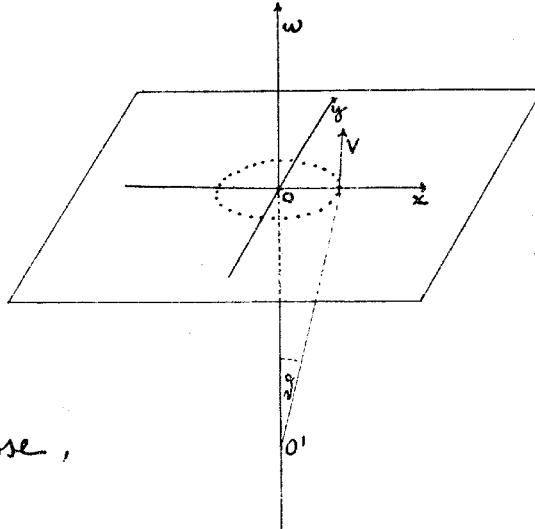
$$|V| = |\omega| r .$$

Per la direzione, poi, osserviamo che il vettore  $\omega \wedge (R-O)$  deve essere normale al piano dei vettori  $\omega$  ed  $(R-O)$ , e siccome a detto piano appartiene anche il raggio,  $r$ , relativo al punto considerato, risulta che la direzione di  $V$  coincide con quella della tangente alla traiettoria in  $R$ .

Il senso, infine, si può dedurre agevolmente dal dover essere la terza  $V, \omega, (R-O)$ , destrorsa.

Passiamo, ora, a dimostrare come la relazione precedentemente stabilita per  $V$ , seguiti a valere anche quando, invece che ad  $O$ , ci si riferisca ad un punto  $O'$ , qualsiasi, dell'asse. Avremo, infatti, in quest'ultimo caso, per la velocità sulla traiettoria:

$$(2) \quad V' = \omega \wedge (R-O')$$



Sottraendo, poi, membro a membro la (2) dalla (1), otteniamo:

$$V - V' = \omega \wedge (O' - O)$$

Osservando che le direzioni di  $\omega$  ed  $(O' - O)$  coincidono, e che, perciò, il loro prodotto vettoriale è nullo, risulterà:

$$V - V' = 0$$

da cui infine:

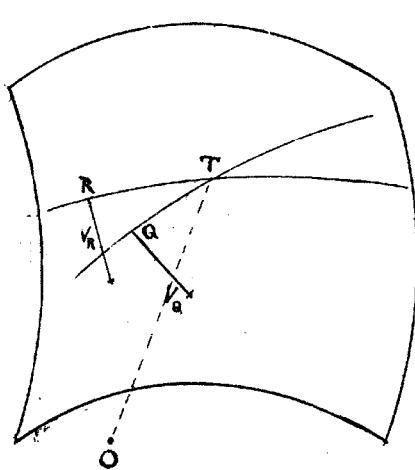
$$V' = V$$

### Aisse istantaneo di rotazione.

- Vogliamo ora dimostrare che, se durante il moto c'è un punto del sistema che sta fermo, c'è necessariamente, tutta una retta, passante per esso, la cui velocità è nulla.

Infatti, detto  $O$  il punto fisso, un punto generico  $P$ , del sistema, potrà muoversi solo su di una sfera di raggio  $OP$ . Considerando una porzione della sfera e due punti qualsiasi  $R$  e  $Q$ , indichiamo con  $V_R$  e  $V_Q$  le loro velocità che risulteranno tangenti alla sfera in  $R$  e  $Q$ , rispettivamente.

Conduciamo, ora, per  $R$  il cerchio massimo normale a  $V_R$ , e per  $Q$  quello normale a  $V_Q$ . Osserviamo che questi due cerchi massimi avranno due punti in comune e, considerando uno di questi,  $T$ , poiché esso appartiene al sistema, avremo:



$$(T-Q)^2 = \text{cost.} ,$$

da cui :

$$2(T-Q) \times \frac{d(T-Q)}{dt} = 0 ,$$

e, poiché è, identicamente :

$$\frac{d(T-Q)}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{dQ}{dt} = V_T - V_a ,$$

sarà :

$$(T-Q) \perp V_T - V_a .$$

Siccome, poi, il vettore  $(T-Q)$  è normale a  $V_a$ ,  $V_T$  dovrà essere parallela a  $V_a$ , o nulla. Analogamente, se ripetiamo le medesime considerazioni, riferendoci, però, al punto R, risulta essere  $V_T$  parallela anche a  $V_R$ , o nulla. Concludiamo, quindi, che  $V_T$ , dovendo contemporaneamente esser parallela a due direzioni diverse, è nulla.

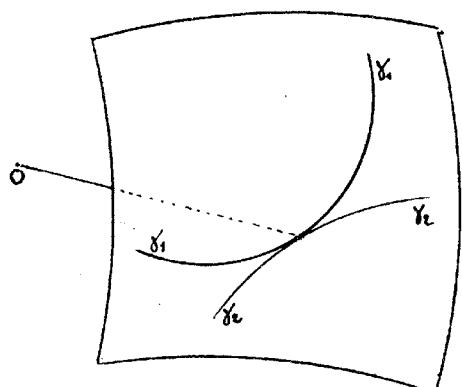
La retta  $\bar{OT}$ , dunque, durante il moto, all'istante che si considera, ha velocità nulla.

Rimanendo sempre fissa O, la retta di velocità nulla varierà da istante a istante, essa si chiama, perciò, asse istantaneo di rotazione.

Immaginiamo, ora, in modo analogo a quanto si è fatto nel caso dei moti piani di segnare sul corpo tutte le rette che sono state assi istantanei di rotazione.

Ripetendo la medesima operazione rispetto alla terza fissa di riferimento, avremo due coni (nel senso più generale della parola) e il moto si potrà riguardare come prodotto dal rotolamento del cono soli-

dale col sistema e mobile con esso, sul cono fisso. Ad ogni istante questi due coni si toccheranno lungo una generatrice che è l'asse istantaneo di rotazione. Per dimostrare analiticamente che i due coni si toccano lungo quest'asse, scelto un punto,  $P$ , del sistema, consideriamo la sfera che ha il centro nel punto fisso  $O$ , e raggio  $\bar{OP}$ , e le due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  di intersezione del cono solistale col corpo e del cono fisso, rispettivamente, con essa.



Ad un istante generico  $t$  esisterà su queste due curve un punto fisso (di contatto), e, precisamente, quello che, unito con  $O$ , mi dà l'asse istantaneo di rotazione.

La dimostrazione che le due curve si toccano è perfettamente analoga a quella fatta per i moti piani. Così si dica per la dimostrazione che i due coni non striscianno.

Calcolare la velocità di un punto, espressa mediante le sue componenti secondo la Terna  $\xi, \eta, \zeta$ .

Consideriamo le due Terne  $x, y, z$ , e  $\xi, \eta, \zeta$ , con origine coincidenti nel punto,  $O$ , fisso del sistema. Se  $\xi, \eta$  e  $\zeta$  sono le coordinate, rispetto alla Terna solistale col sistema, di un punto mobile di esso,  $P$ , le coordinate, rispetto alla Terna fisso, sono date da :

$$P = \begin{cases} x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta \\ y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta \\ z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta \end{cases} .$$

Proponiamoci, ora, il problema di calcolare la velocità del punto, espressa mediante le sue componenti rispetto alla Terna  $\xi, \eta, \zeta$ . - Osserviamo, anzitutto, che sarebbe assurdo voler fare le derivate di  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ , perché sono delle costanti. Dovremo, perciò, calcolare le componenti della velocità rispetto ad  $x, y, z$ , e quindi proiettare le componenti, così derivate, su  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ .

Derivando, rispetto al tempo, le espressioni della pagina precedente, avremo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\alpha}_1 \xi + \dot{\alpha}_2 \eta + \dot{\alpha}_3 \zeta \\ \dot{y} = \dot{\beta}_1 \xi + \dot{\beta}_2 \eta + \dot{\beta}_3 \zeta \\ \dot{z} = \dot{\gamma}_1 \xi + \dot{\gamma}_2 \eta + \dot{\gamma}_3 \zeta \end{cases}$$

Osserviamo, ora, che, se uguagliassimo le precedenti relazioni a zero, avremmo le condizioni cui debbono sottostare le coordinate dell'asse di rotazione; occorrerebbe, in questo caso che fosse nullo il determinante formato con i coefficienti del sistema, ed avremmo allora  $\infty^*$  soluzioni le quali ci converrebbero tutte essendo proporzionali e rappresentando l'asse cercato. Per ottenere le componenti secondo  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ , della  $V$ , converrà proiettarla su questi assi e, per far ciò, possiamo proiettare le tre componenti  $\dot{x}, \dot{y}$  e  $\dot{z}$ , su ciascuno degli assi  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ . (La  $V$  è la somma vettoriale delle tre componenti secondo  $x, y, z$ ; per ottenerne, dunque, le tre componenti secondo gli assi della Terna mobile, invece di proiettare direttamente la  $V$  su questi assi, si possono proiettare le sue componenti secondo  $x, y, z$ , e poi sommare tali proiezioni.). Avremo per la  $V_\xi$ :

$$V_\xi = \alpha_1 \dot{x} + \beta_1 \dot{y} + \gamma_1 \dot{z} ,$$

cioè :

$$V_\xi = \xi(\alpha_1\dot{\alpha}_1 + \beta_1\dot{\beta}_1 + \gamma_1\dot{\gamma}_1) + \eta(\alpha_2\dot{\alpha}_2 + \beta_2\dot{\beta}_2 + \gamma_2\dot{\gamma}_2) + \zeta(\alpha_3\dot{\alpha}_3 + \beta_3\dot{\beta}_3 + \gamma_3\dot{\gamma}_3),$$

da cui , indicando con :

$$S(\alpha_1\dot{\alpha}_1), S(\alpha_2\dot{\alpha}_2), S(\alpha_3\dot{\alpha}_3),$$

rispettivamente , le espressioni racchiusse nella prima , seconda e terza parentesi ; avremo :

$$V_\xi = \xi S(\alpha_1\dot{\alpha}_1) + \eta S(\alpha_2\dot{\alpha}_2) + \zeta S(\alpha_3\dot{\alpha}_3).$$

Vogliamo dimostrare che è :

$$S(\alpha_1\dot{\alpha}_1) = 0.$$

Infatti , partendo dalla relazione :

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,$$

e derivando , si ha :

$$(1) \quad 2(\alpha_1\dot{\alpha}_1 + \beta_1\dot{\beta}_1 + \gamma_1\dot{\gamma}_1) = 2S(\alpha_1\dot{\alpha}_1) = 0.$$

Per la  $V_\eta$  e la  $V_\zeta$  , si procede analogamente , osservando che i coseni direttori di  $x, y, z$  , rispetto ad  $\eta$  , sono :  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  ; e rispetto a  $\zeta$  :  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  .

Ovvero perciò :

$$V_\eta = \xi S(\alpha_2\dot{\alpha}_2) + \eta S(\alpha_3\dot{\alpha}_3) + \zeta S(\alpha_1\dot{\alpha}_1)$$

$$V_\zeta = \xi S(\alpha_3\dot{\alpha}_3) + \eta S(\alpha_1\dot{\alpha}_1) + \zeta S(\alpha_2\dot{\alpha}_2).$$

Analogamente alla (1) sopra scritta , sarà :

$$S(\alpha_2\dot{\alpha}_2) = S(\alpha_3\dot{\alpha}_3) = 0$$

e pertanto ,  $V_\xi, V_\eta, V_\zeta$  , assumeranno la forma :

$$\begin{cases} V_\xi = \eta S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) + \xi S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) \\ V_\eta = \xi S(\alpha_2 \dot{\alpha}_1) + \zeta S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) \\ V_\zeta = \zeta S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) + \eta S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) \end{cases} .$$

Consideriamo, ora, la relazione:

$$\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0 ,$$

e, derivandola, assieme alle due analoghe, rispetto al tempo  $t$ , troviamo:

$$S(\dot{\alpha}_2 \alpha_3) + S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) = 0$$

$$S(\dot{\alpha}_3 \alpha_1) + S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) = 0$$

$$S(\dot{\alpha}_1 \alpha_2) + S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) = 0 ,$$

e ponendo:

$$S(\dot{\alpha}_2 \alpha_3) = -S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) = p$$

$$S(\dot{\alpha}_3 \alpha_1) = -S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) = q$$

$$S(\dot{\alpha}_1 \alpha_2) = -S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) = r$$

avremo infine, per le componenti della velocità lungo gli assi mobili:

$$V \equiv \begin{cases} V_\xi = q\xi - r\eta \\ V_\eta = r\xi - p\zeta \\ V_\zeta = p\eta - q\zeta \end{cases} \quad (2)$$

Osservando che queste tre relazioni non sono altro che le componenti secondo  $\xi, \eta, \zeta$ , del prodotto vettoriale tra il vettore  $(P-O)$  ed il

vettore di componenti  $p, q$  ed  $r$ , notiamo che la precedente relazione è del tutto analoga a quella ( $w \wedge (P_0)$ ) relativa all'espressione della  $V$  mediante la velocità angolare e la distanza di un punto mobile da un punto qualsiasi dell'asse.

I parametri  $p, q$  ed  $r$ , sono proporzionali ai coseni direttori dell'asse. A questo scopo, basta far vedere che tutti i punti della retta, i cui coseni direttori sono proporzionali a  $p, q, r$ , hanno velocità nulla. Ora, questi punti hanno coordinate del tipo:

$$\xi = kp, \quad \eta = kq, \quad \zeta = kr.$$

Sostituendo tali valori nelle (2):

$$\begin{cases} V_\xi = Kqr - kqr = 0 \\ V_\eta = Krp - Krp = 0 \\ V_\zeta = Kpq - Kpq = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$V = 0$$

La nostra retta è, dunque, l'asse istantaneo di rotazione. Il vettore velocità angolare avrà per componenti:  $p, q$  ed  $r$ ; la sua grandezza ci sarà data da:

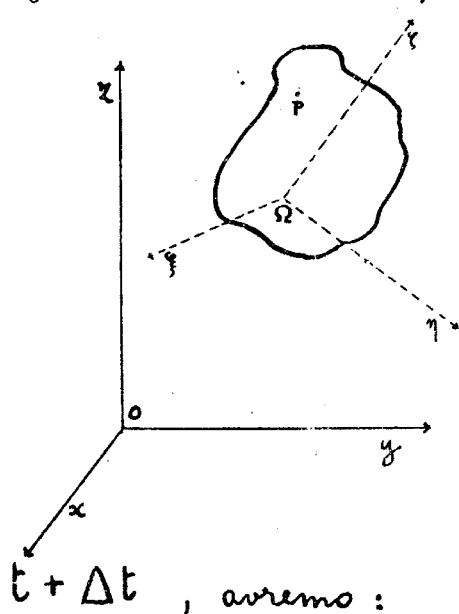
$$|w| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

ed i coseni direttori dell'asse ci saranno forniti dalle espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_a = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \beta_a = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \gamma_a = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \end{array} \right.$$

## ~ Moti rigidi qualsiasi ~

- Riferito il moto di un sistema rigido alla Terna assoluta di riferimento ( $x, y, z$ ) (essendosi, al solito, prefissata anche una Terna mobile,  $\xi, \eta, \zeta$ , solidale col sistema), vediamo come si possa determinare il moto di un punto  $P$ , del suaccennato sistema, per ogni valore del tempo. - Evidentemente, il moto del punto si può guardare come risultato del moto dell'origine  $\Omega$  della Terna mobile rispetto ad  $x, y, z$ , e della variazione di orientamento della Terna mobile rispetto alla fissa.



Indicate, perciò, con  $P$  e  $P'$ , le rispettive posizioni del punto all'istante  $t$ , e all'istante

$t + \Delta t$ , avremo:

$$(P' - P) = (\Omega' - \Omega) + \Delta_{R,P}$$

dove si è indicata con  $\Omega'$  la posizione dell'origine  $\Omega$  all'istante  $t + \Delta t$ , e con  $\Delta_{R,P}$  lo spostamento

subito da  $P$  per la rotazione degli assi. Dividendo ambo i membri per  $\Delta t$ , avremo:

$$\frac{(P' - P)}{\Delta t} = \frac{(\Omega' - \Omega)}{\Delta t} + \frac{\Delta_{R,P}}{\Delta t},$$

cioè:

$$V_p = V_\Omega + \omega \wedge (P - \Omega) \quad (1)$$

dove  $\omega$  ha il solito significato di velocità angolare del sistema, all'istante considerato. - Dimostriamo, ora, che il valore:

$$\omega \wedge (P - \Omega)$$

stabilito per la velocità di  $P$  rispetto ad  $\Omega$ , non varii quando si prenda, come origine della Terna mobile, un altro punto qualsiasi del sistema.

Indicato infatti con  $\Omega_1$  un nuovo punto di riferimento, avremo per la velocità, calcolata rispetto ad  $\Omega_1$ , l'espressione (1), e, rispetto ad  $\Omega_1$ , l'espressione:

$$V_p = V_{\Omega_1} + \omega_1 \wedge (P - \Omega_1) \quad (2)$$

Osserviamo, ora, che la (1) si può identicamente scrivere:

$$V_p = V_\Omega + \omega \wedge (P - \Omega_1 + \Omega_1 - \Omega) = V_\Omega + \omega \wedge (\Omega_1 - \Omega) + \omega \wedge (P - \Omega_1)$$

e notando che  $V_\Omega + \omega \wedge (\Omega_1 - \Omega)$  rappresenta la velocità di  $\Omega_1$  (rispetto ad  $\Omega$ ), risulta:

$$V_p = V_{\Omega_1} + \omega \wedge (P - \Omega_1)$$

e dovrà, necessariamente, essere:

$$\omega = \omega_1$$

Dato, ora, il solito sistema rigido, vogliamo dimostrare che tutti i punti situati su rette parallele alla direzione di  $\omega$ , hanno eguale velocità. Siano, infatti,  $P$  e  $Q$ , due di tali punti; avremo:

$$V_p = V_0 + \omega \wedge (P - O)$$

$$V_q = V_0 + \omega \wedge (Q - O) .$$

Sottraendo la seconda dalla prima delle precedenti, otteniamo:

$$V_p - V_q = \omega \wedge (P - Q) .$$

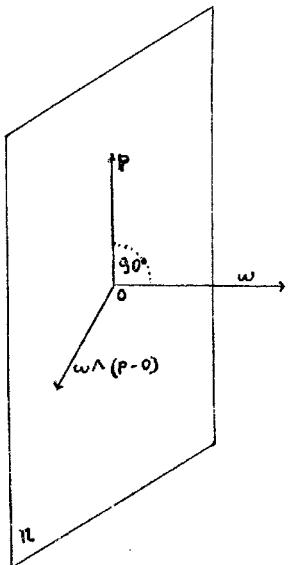
Ma quest'ultimo prodotto vettoriale è nullo, dato il parallelismo dei vettori fattori; si conclude, perciò:

$$V_p - V_q = 0 \quad \text{e} \quad V_p = V_q$$

Da quanto sopra segue che, per conoscere la velocità di tutti i punti situati su di una parallela ad  $\omega$ , basta conoscere la velocità di un solo di quei punti, per esempio, del punto d'incontro di un piano normale ad  $\omega$  con la parallela in questione. Osserviamo che, per questo punto d'incontro  $P$ , si ha:

$$|\omega \wedge (P - O)| = |\omega| \cdot |\vec{OP}|$$

essendo l'angolo  $\hat{\omega} \vec{OP}$  retto, e quindi, essendo:  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ . - Immaginiamoci, per un momento, che  $\pi$  sia rappresentato dal piano del foglio e perciò, sul foglio stesso,  $\omega$  si proietta in  $O$ . - La velocità di  $O$ ,  $V_0$ , sarà comunque diretta nello spazio, ma la potremo sempre decomporre in due componenti: l'una giacente



sul piano della figura, l'altra normale a questo piano; siano  $V_{0,T}$  e  $V_{0,N}$ , tali componenti.

La velocità di  $P$ , si ottiene aggiungendo, alla  $V_0$ , il vettore:  $w \wedge (P-O)$ . Ora, questo vettore giace evidentemente sul piano della figura. Si deduce, quindi, che tutti i punti hanno la componente normale della velocità eguale a  $V_{0,N}$ .

Vogliamo, ora, vedere se esiste un punto la cui velocità si riduca alla sola componente normale, essendo nulla la componente tangenziale.

Osservando che la componente tangenziale,  $V_{0,T}$ , della velocità di un punto generico, ci è data da:

$$V_{0,T} = V_{0,T} + w \wedge (P-O);$$

vediamo che, affinché essa si annulli, occorre, anzitutto, che i due vettori addendi,  $V_{0,T}$  ed  $[w \wedge (P-O)]$ , abbiano equal direzione e senso opposto; dovrà, perciò, risultare  $(P-O)$  normale, in  $O$ , alla direzione comune dei due vettori  $V_{0,T}$  e  $w \wedge (P-O)$ . Quanto alla grandezza, dovrà essere:

$$|w \wedge (P-O)| = |w| \cdot |(P-O)| = |V_{0,T}|,$$

essendo:  $\sin \vartheta = 1$ , perché  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

Da quanto sopra, risulta che il punto  $P_0$ , la cui velocità ha componente tangenziale nulla, dovrà avere, dal punto  $O$ , una distanza tale da soddis-

fare alla condizione:

$$\bar{OP}_o = \frac{|V_{ot}|}{\tau w} . ;$$

esiste, quindi, tutta una retta, passante per  $P_o$  e parallela ad  $w$ , i cui punti posseggono sola velocità normale al piano della figura. Questa retta, al variazione del tempo, scorre su se stessa, ed il moto del sistema può riguardarsi come elicoidale istantaneo, nel quale la retta in parola funge da asse.

---

### Moti relativi.

Accade spesso di considerare un movimento rispetto ad un sistema di riferimento che, a sua volta, si muove; p.es.; i viaggiatori, in un Treno, si riferiscono alle pareti di esso; o, anche, quando si riferisce, come si fa di solito, il moto dei corpi alla Terra, il sistema di riferimento è sempre mobile. Ci si presenta, perciò, il problema del cosiddetto moto relativo. Si abbia, dunque, un punto,  $P$ , riferito ad una Terna mobile,  $\xi, \eta, \zeta$ , la quale, a sua volta, sia riferita ad una Terna fissa,  $x, y, z$ . Mentre, nel caso dei moti rigidi, le coordinate del punto erano costanti rispetto al tempo, nei moti relativi, invece, poichè il punto è mobile sia rispetto ad  $x, y, z$ , che rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$ , anche le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$ , saranno funzioni del tempo.

Scelte dunque le due Terne (la mobile e la fissa), dette:

$$x_2, y_2, z_2,$$

le coordinate dell'origine  $O_2$  della Terna mobile, per le coordinate di  $P$ , rispetto ad  $x, y, z$ , avremo:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta \\ y = y_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta \\ z = z_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta \end{cases}$$

Per ricavare l'espressione della velocità rispetto alla Terna fissa, occorrerà derivare, rispetto al tempo, le tre precedenti relazioni:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{\alpha}_1 \xi + \dot{\alpha}_2 \eta + \dot{\alpha}_3 \zeta + \dot{\alpha}_1 \xi + \dot{\alpha}_2 \eta + \dot{\alpha}_3 \zeta \\ (2) \quad & \dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{\beta}_1 \xi + \dot{\beta}_2 \eta + \dot{\beta}_3 \zeta + \dot{\beta}_1 \xi + \dot{\beta}_2 \eta + \dot{\beta}_3 \zeta \\ (3) \quad & \dot{z} = \dot{z}_0 + \dot{\gamma}_1 \xi + \dot{\gamma}_2 \eta + \dot{\gamma}_3 \zeta + \dot{\gamma}_1 \xi + \dot{\gamma}_2 \eta + \dot{\gamma}_3 \zeta \end{aligned}$$

Osserviamo, ora, che ciascuna delle espressioni precedenti (le quali ci danno, rispettivamente,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ) si può scomporre in due addendi, il primo dei quali, per  $V_x$ , ad esempio, è:

$$(4) \quad \dot{x}_0 + \dot{\alpha}_1 \xi + \dot{\alpha}_2 \eta + \dot{\alpha}_3 \zeta .$$

L'est'espressione, con le sue due analoghe, ci dà le componenti di un vettore che chiameremo velocità di trascinamento  $V_p$ , il cui significato cinematico si chiarisce subito osservando che, se supponiamo (come nel caso dei moti rigidi) P rigidamente fissato alla Terna mobile,  $\xi, \eta$  e  $\zeta$  risulteranno costanti e, conseguentemente, le loro derivate nulle. In questo caso la  $V_x$  si ridurrebbe alla (4) precedente, che ci rappresenta, dunque, la velocità del punto quando esso sia rigidamente unito alla Terna mobile. Analogamente per  $V_y$  e  $V_z$ .

Osserviamo, ora, che, se supponiamo la Terna  $\xi, \eta, \zeta$ ,

irrigidita nella posizione occupata in un certo istante, le coordinate di  $\Omega$ , rispetto alla Terna fissa, ed i nove coseni direttori dei tre assi della Terna mobile, rispetto ad  $x, y, z$ , rimarranno costanti e, quindi, saranno nulle le loro derivate. L'espressione di  $V_x$ , si riduce allora a:

$$(5) \quad V_x = \alpha_1 \dot{\xi} + \alpha_2 \dot{\eta} + \alpha_3 \dot{\zeta},$$

espressione, questa, che, con le altre analoghe, ci dà le componenti di un vettore detto velocità relativa,  $V_R$ , di  $P$ , rispetto alla Terna  $\xi, \eta, \zeta$ .

Nel caso generico in cui  $P$  è mobile, sia rispetto ad  $x, y, z$ , sia rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$ , e quest'ultima Terna è mobile rispetto alla prima, l'espressione del vettore  $V$  (che ha per componenti, secondo la Terna fissa, le (1), (2) e (3) precedenti) assume la forma:

$$V = V_p + V_R.$$

Quanto sopra costituisce il Teorema dell'addizione delle velocità.

Per le componenti di  $V_R$ , rispetto ad  $x, y, z$ , avremo:

$$V_R = \begin{cases} V_{R,x} = \alpha_1 \dot{\xi} + \alpha_2 \dot{\eta} + \alpha_3 \dot{\zeta} \\ V_{R,y} = \beta_1 \dot{\xi} + \beta_2 \dot{\eta} + \beta_3 \dot{\zeta} \\ V_{R,z} = \gamma_1 \dot{\xi} + \gamma_2 \dot{\eta} + \gamma_3 \dot{\zeta} \end{cases}.$$

Volendosene le componenti secondo  $\xi, \eta, \zeta$ , occorrerà moltiplicare le tre precedenti relazioni per  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , rispettivamente, e sommare: si avrà così  $V_{R,\xi}$ , e, in modo perfettamente analogo, mutando, però, i coseni,

Sarà ricavarebbero  $V_{R,\xi}$  e  $V_{R,\eta}$ . Tenendo, poi, conto delle note relazioni:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i \alpha_n + \beta_i \beta_n + \gamma_i \gamma_n = 0,$$

risulta infine:

$$V_{R,\xi} = \dot{\xi}, \quad V_{R,\eta} = \dot{\eta}, \quad V_{R,\zeta} = \dot{\zeta}.$$


---

### Accelerazione

nei moti relativi.

Riprendendo le (1), (2) e (3) di pag. 79, e derivandole rispetto al tempo, otteniamo le componenti dell'accelerazione del punto, secondo la terna fissa:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_\Omega + \ddot{\alpha}_1 \xi + \ddot{\alpha}_2 \eta + \ddot{\alpha}_3 \zeta + 2(\dot{\alpha}_1 \dot{\xi} + \dot{\alpha}_2 \dot{\eta} + \dot{\alpha}_3 \dot{\zeta}) + \alpha_1 \ddot{\xi} + \alpha_2 \ddot{\eta} + \alpha_3 \ddot{\zeta} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}_\Omega + \ddot{\beta}_1 \xi + \ddot{\beta}_2 \eta + \ddot{\beta}_3 \zeta + 2(\dot{\beta}_1 \dot{\xi} + \dot{\beta}_2 \dot{\eta} + \dot{\beta}_3 \dot{\zeta}) + \beta_1 \ddot{\xi} + \beta_2 \ddot{\eta} + \beta_3 \ddot{\zeta} \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}_\Omega + \ddot{\gamma}_1 \xi + \ddot{\gamma}_2 \eta + \ddot{\gamma}_3 \zeta + 2(\dot{\gamma}_1 \dot{\xi} + \dot{\gamma}_2 \dot{\eta} + \dot{\gamma}_3 \dot{\zeta}) + \gamma_1 \ddot{\xi} + \gamma_2 \ddot{\eta} + \gamma_3 \ddot{\zeta} \quad (3)$$

Riguardando, ora, ciascuna delle precedenti espressioni come somma di tre addendi, che, per  $\ddot{x}$ , ad esempio, sono:

$$\ddot{x}_\Omega + \ddot{\alpha}_1 \xi + \ddot{\alpha}_2 \eta + \ddot{\alpha}_3 \zeta; \quad ; \quad 2(\dot{\alpha}_1 \dot{\xi} + \dot{\alpha}_2 \dot{\eta} + \dot{\alpha}_3 \dot{\zeta}); \\ \alpha_1 \ddot{\xi} + \alpha_2 \ddot{\eta} + \alpha_3 \ddot{\zeta},$$

il vettore A, le cui componenti sono date dalle (1), (2) e (3) precedenti, potrà porsi sotto la forma:

$$A = A_r + A_\theta + A_c, \quad (4)$$

cioè, si potrà riguardare l'accelerazione, calcolata  
Mecc. Pag. Disp. 21.

rispetto alla Terna fissa, come somma di tre vettori che chiamiamo, rispettivamente, accelerazione di Trascinamento, complementare e relativa. Per l'accelerazione di trascinamento e per l'accelerazione relativa valgono considerazioni perfettamente analoghe a quelle fatte per la  $V_r$  e la  $V_h$ ; il significato, invece, dell'accelerazione complementare è meno evidente. Per chiarirlo osserviamo che è:

$$\frac{1}{2} A_c = \begin{cases} \frac{1}{2} A_{c,x} = \dot{\alpha}_1 \dot{\xi} + \dot{\alpha}_2 \dot{\eta} + \dot{\alpha}_3 \dot{\zeta} \\ \frac{1}{2} A_{c,y} = \dot{\beta}_1 \dot{\xi} + \dot{\beta}_2 \dot{\eta} + \dot{\beta}_3 \dot{\zeta} \\ \frac{1}{2} A_{c,z} = \dot{\gamma}_1 \dot{\xi} + \dot{\gamma}_2 \dot{\eta} + \dot{\gamma}_3 \dot{\zeta} \end{cases}$$

e proponiamoci di calcolare le componenti di  $A_c$  rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$ . A tal scopo, per  $A_{c,\xi}$ , ad esempio, dovranno moltiplicare le tre relazioni precedenti per  $\alpha_1, \beta_1$  e  $\gamma_1$ , rispettivamente, e sommare. Analogamente, moltiplicando, però, per  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  e  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ , si ottorubbero, rispettivamente,  $A_{c,\eta}$  ed  $A_{c,\zeta}$ .  
Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$\frac{1}{2} A_c = \begin{cases} \frac{1}{2} A_{c,\xi} = S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) \dot{\xi} + S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) \dot{\eta} \\ \frac{1}{2} A_{c,\eta} = S(\alpha_2 \dot{\alpha}_1) \dot{\xi} + S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) \dot{\zeta} \\ \frac{1}{2} A_{c,\zeta} = S(\alpha_3 \dot{\alpha}_2) \dot{\eta} + S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) \dot{\zeta} \end{cases}$$

da cui, avendo posto, come a pag. 72,:

$$S(\alpha_3 \dot{\alpha}_2) = - S(\alpha_2 \dot{\alpha}_3) = p$$

$$S(\alpha_1 \dot{\alpha}_3) = - S(\alpha_3 \dot{\alpha}_1) = q$$

$$S(\alpha_2 \dot{\alpha}_1) = - S(\alpha_1 \dot{\alpha}_2) = r$$

otteniamo:

$$\frac{1}{2} A_c = \begin{cases} \frac{1}{2} A_{c,\xi} = q \dot{\xi} - r \dot{\eta} \\ \frac{1}{2} A_{c,\eta} = r \dot{\xi} - p \dot{\zeta} \\ \frac{1}{2} A_{c,\zeta} = p \dot{\eta} - q \dot{\xi} \end{cases}$$

Si riconosce immediatamente come le precedenti espressioni altro non siano che le componenti del prodotto vettoriale tra il vettore di componenti  $p, q$  ed  $r$ , ed il vettore di componenti  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$  e  $\dot{\zeta}$ . Il primo di questi due fattori è la velocità angolare  $w$ , il secondo è la velocità relativa  $V_R$ ; possiamo, quindi, infine, porre:

$$A_c = 2w \wedge V_R$$

La formula (4) di pag. 81, esprime il Teorema di Coriolis.

Determinazione del significato di  $A_c$  mediante considerazioni vettoriali.

- Al Teorema di Coriolis si può giungere anche, più brevemente, mediante considerazioni vettoriali.  
Essendo date le due forme, fissa e mobile, di riferimento, ed il punto P, mobile rispetto ad entrambe, sappiamo che è:

$$V = V_T + V_R$$

ma, d'altra parte, per le considerazioni svolte a pag. 75 e segg., si ha:

$$V_T = V_a + w \wedge (P - S)$$

e risulta quindi:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} + \omega \wedge (\mathbf{P} - \Omega) + \mathbf{V}_R$$

Questa espressione, derivata rispetto a  $t$ , ci dà :

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \Omega) + \omega \wedge \frac{d(\mathbf{P} - \Omega)}{dt} + \dot{\mathbf{V}}_R = \\ = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \Omega) + \omega \wedge (\dot{\mathbf{P}} - \dot{\Omega}) + \dot{\mathbf{V}}_R .$$

Osservando, poi, che è :

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{V} = \mathbf{V}_T + \mathbf{V}_R \quad ; \quad \dot{\Omega} = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} ,$$

e sostituendo nella (1), risulta, per  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \Omega) + \omega \wedge (\mathbf{V}_T + \mathbf{V}_R - \mathbf{V}_{\Omega}) + \dot{\mathbf{V}}_R = \\ = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \Omega) + \omega \wedge (\mathbf{V}_T - \mathbf{V}_{\Omega}) + \omega \wedge \mathbf{V}_R + \dot{\mathbf{V}}_R . \quad (2)$$

Dimostriamo che è :  $\dot{\mathbf{V}}_R = \mathbf{A}_R + \omega \wedge \mathbf{V}_R$  (3)

Infatti  $\mathbf{V}_R$  varia col tempo per due ragioni : 1.) perché variano le sue componenti rispetto alla Terra mobile ; p. es. la componente  $\xi$  ha per derivata  $\ddot{\xi}$  che è la componente  $\xi$  di  $\mathbf{A}_R$ , dunque quest'ultima compare nella derivata di  $\mathbf{V}_R$ . - 2.)  $\mathbf{V}_R$  varia anche perché è trascinato dal moto della Terra mobile, e siccome questa ruota con velocità angolare  $\omega$ , il contributo a  $\dot{\mathbf{V}}_R$  dovuto a questa causa si calcola analogamente a quanto si fa per la velocità di un punto in un moto rotatorio, ottenendo così :  $\omega \wedge \mathbf{V}_R$ .

Sostituendo nella (2), per  $\dot{\mathbf{V}}_R$ , il valore fornito dalla (3) :

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} + \dot{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \Omega) + \omega \wedge (\mathbf{V}_T - \mathbf{V}_{\Omega}) + 2\omega \wedge \mathbf{V}_R + \mathbf{A}_R ,$$

in cui compaiono, esplicitamente la  $\mathbf{A}_R$  e la  $\mathbf{A}_C$ ; mentre  $\mathbf{A}_T$  ci è dato dalla somma dei primi tre addendi, il che si verifica immediatamente osservando che esso è la derivata di  $\mathbf{V}_T$  che ha l'espressione :

$$\mathbf{V}_T = \dot{\mathbf{V}}_{\Omega} + \omega \wedge (\mathbf{P} - \Omega) .$$

# ~~ DINAMICA ~~~~~

## DEL

## ~~~~~ PUNTO ~~~

Finora ci siamo occupati del movimento di un punto astaendo dalle cause che lo producono, cause che dicon si forze, e che possono essere di tipo molto vario.

Gli esempi più noti sono: il peso, le forze muscolari, elettriche, magnetiche, elastiche, etc.. Per fissare le idee, noi supporremo di realizzare una forza mediante una molla tesa che uniremo, mediante una funicella, al corpo che essa deve muovere. Alla forza resteranno quindi, attribuiti una direzione (quella della funicella) ed un verso (quello che porta dal corpo alla molla); inoltre resterà attribuita anche una grandezza determinata dallo stato di tensione della molla, e la cui misura precisa verrà definita in seguito. A noi basta, per ora, avere un criterio per stabilire quando due forze siano eguali. Diremo, precisamente che due forze sono eguali quando esse sono esercitate dalla stessa molla tesa alla stessa lunghezza. Supponiamo, dunque, di applicare una certa forza ad un punto materiale C, cioè ad un corpo di dimensioni molto piccole rispetto alle altre che intervengono nel problema. L'esperienza insegnna che, sotto l'azione della forza, il punto si muove di moto accelerato e che la sua accelerazione ha la direzione

ed il verso della forza, e grandezza dipendente, unicamente, dal corpo e dalla grandezza della forza (e non dalla velocità del punto materiale).

In particolare, se la forza è nulla, è nulla anche la accelerazione. Si ha, dunque, la legge d'inerzia:

Un corpo, non soggetto a forze, si muove di moto rettilineo uniforme.

L'esperienza ci dice, poi, che, applicando la medesima forza a corpi differenti, essi acquistano differenti accelerazioni. Per fissare le idee, si abbiano  $n$  corpi:

$$C_1, C_2, \dots, C_n,$$

e si faccia agire su di essi la forza  $F$ , essi acquisiranno  $n$  accelerazioni:

$$(1) \quad A_1, A_2, \dots, A_n,$$

in generale, differenti fra loro.

Si applichi ora, agli stessi corpi, una seconda forza,  $F'$ , ed una terza,  $F''$ , ambedue differenti da  $F$ , e tra loro; avremo, per le corrispondenti accelerazioni:

$$A'_1, A'_2, \dots, A'_n \quad (2)$$

$$A''_1, A''_2, \dots, A''_n. \quad (3)$$

Si osserva che le accelerazioni impresse da due qualsiasi forze, p. es.  $F$  ed  $F'$ , agli  $n$  corpi considerati, sono proporzionali tra loro, e cioè:

$$\frac{A_1}{A'_1} = \frac{A_2}{A'_2} = \dots = \frac{A_n}{A'_n}.$$

Parimenti, se facciamo agire varie forze, ad esempio le tre considerate più sopra, su due corpi, p. es.  $C_1$  e  $C_2$ , abbiamo che i rapporti tra le accelerazioni impresse ad

essi da ciascuna delle forze, sono eguali tra loro:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A'_1}{A'_2} = \frac{A''_1}{A''_2} .$$

Abbiamo visto che le successioni di grandezze (1), (2), (3), sono proporzionali tra loro; questo vuol dire che, mentre i valori delle accelerazioni dipendono dalle forze  $F$ ,  $F'$  ed  $F''$ , i loro rapporti, invece, no. Cioè:

$$A_1 : A_2 : A_3 : \dots : A_n = A'_1 : A'_2 : \dots : A'_n = A''_1 : A''_2 : \dots : A''_n .$$

Tali rapporti dipenderanno, dunque, soltanto dai corpi  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ; potremo, perciò, introdurre certe grandezze  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , caratteristiche per i vari corpi, tali che si abbia:

$$A_1 : A_2 : \dots : A_n = A'_1 : A'_2 : \dots : A'_n = A''_1 : A''_2 : \dots : A''_n = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \dots : \frac{1}{m_n} .$$

Le grandezze  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , risultano, dunque, inversamente proporzionali alle accelerazioni che assumono i corpi  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , sotto l'azione di una stessa forza. Queste grandezze si chiamano masse.

Le considerazioni precedenti non definiscono i valori assoluti delle masse, ma, salamente, i loro rapporti; per definirne anche i valori assoluti, bisogna fissare un'unità di massa. Scegliamo, perciò, come eguale all'unità, la massa  $m_0$  di un corpo campione  $C_0$  (ordinariamente si sceglie, come corpo campione, il grammo). Per misurare la massa di un corpo qualsiasi  $C$ , si dovrà procedere nel modo seguente: si applichi una stessa forza  $F$ , a  $C_0$  ed a  $C$ ; dette  $A_0$  ed  $A$ , le accelerazioni corrispondenti, avremo:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{m_0}{m} ,$$

e poiché è :

$$m_0 = 1$$

risulta :

$$m = \frac{A_0}{A}$$

Nella pratica, naturalmente, si ricorre ad altri mezzi.

Tadi.

Resta ancora da definire la misura di una forza  $F$  ; perciò, supponiamo di applicarla ai soliti  $n$  corpi :

$$C_1, C_2, \dots, C_n,$$

di masse :

$$m_1, m_2, \dots, m_n,$$

ed essendo :

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

le accelerazioni che essi acquistano, avremo :

$$\frac{A_1}{1/m_1} = \frac{A_2}{1/m_2} = \dots = \frac{A_n}{1/m_n}. \quad (4)$$

Analogamente, applicando ai medesimi corpi la forza  $F'$ :

$$\frac{A'_1}{1/m_1} = \frac{A'_2}{1/m_2} = \dots = \frac{A'_n}{1/m_n}. \quad (5)$$

cioè, tanto nel caso in cui si applichi la forza  $F$ , quanto nel caso che si applichi la forza  $F'$ , risulta l'egualanza dei rapporti tra l'accelerazione di ciascun corpo e l'inverso della sua massa.

Osservando, poi, che i rapporti (4) e (5) si possono scrivere identicamente:

$$m_1 A_1 = m_2 A_2 = \dots = m_n A_n,$$

$$m_1 A'_1 = m_2 A'_2 = \dots = m_n A'_n,$$

si vede come il prodotto della massa di un corpo per la sua accelerazione non dipenda dal corpo, ma, soltanto dalla forza ad esso applicata; potremo, quindi, scegliere questo prodotto come misura della forza e porre, cioè:

$$F = m A .$$

Siccome abbiamo visto che l'A ha la stessa direzione e lo stesso verso della forza, potremo dare all'espressione precedente il significato vettoriale:

$$\vec{F} = m \vec{A} ,$$

che costituisce l'equazione fondamentale della dinamica del punto.

---

### Parallelogramma delle forze.

- L'esperienza dimostra che, dato un corpo sottoposto simultaneamente all'azione di n forze qualsiasi, l'accelerazione risultante che esso assume è eguale alla somma vettoriale delle singole accelerazioni che ciascuna forza gli imprimerrebbe da sola. Nel caso particolare di due sole forze,  $F_1$  ed  $F_2$ , applicate ad un corpo di massa m, dette  $A_1$  ed  $A_2$  le corrispondenti accelerazioni, avremo:

$$F_1 = m A_1 , \quad F_2 = m A_2 ;$$

ma siccome l'accelerazione, A, impressa dall'azione simultanea di  $F_1$  ed  $F_2$ , ci è data da:

$$A = A_1 + A_2 ,$$

ne segue:

$$F_1 + F_2 = m (A_1 + A_2) = m A ,$$

cioè, l'azione di  $F_1$  ed  $F_2$  è equivalente all'azione di un'unica forza:

$$F = F_1 + F_2 ,$$

ordinaria somma vettoriale.

Analogamente, nel caso di un numero qualsiasi di forze, si trova:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n .$$

Determinazione del moto di un corpo conoscendone la massa e le forze agenti su di esso. -

- Si presenta, ora, il problema di determinare il movimento di un corpo essendo data la massa e le forze agenti su di esso. Sia, dunque, nel caso generale, la forza  $F$ , data in funzione del Tempo, della posizione e della velocità del punto. Avremo, per le componenti di essa:

$$F \equiv \begin{cases} F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases},$$

e, poichè  $m$  è nota, potremo porre:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}.$$

Questo sistema di equazioni differenziali ci dà i valori di  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mediante tre integrali in cui figurano sei costanti arbitrarie. Sarà, dunque:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases}$$

Al solito, per la determinazione delle 6 costanti, occorre dare altrettante condizioni.

### ~Moto Sei gravi ~

Sappiamo che tutti i corpi che cadono liberamente nel vuoto si muovono con la stessa accelerazione,  $g = 980$  cm/sec. circa. Tale accelerazione è dovuta ad una

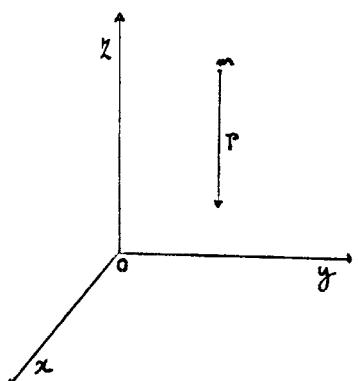
forza,  $P$ , che dicesi peso. Per l'equazione fondamentale della dinamica, sarà:

$$P = mg.$$

Scegliendo l'asse  $z$  verticale e diretto verso l'alto, le componenti di  $P$  saranno:

$$P = \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \\ P_z = -mg \end{cases}.$$

Applicando, alle relazioni precedenti, l'equazione fondamentale della dinamica, otteniamo



$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases},$$

da cui, dividendo per  $m$ :

$$(1) \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g,$$

relazioni, queste, in cui non figura

$m$ , il che era da prevedersi sapendo che, nel moto, i corpi cadono tutti allo stesso modo, qualunque sia la loro massa. Integrando le (1), otteniamo:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = C_1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = C_2 \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -gt + C_3 \end{cases},$$

da cui, moltiplicando per  $dt$  e integrando nuovamente:

$$(3) \quad \begin{cases} x = C_1 t + C_4 \\ y = C_2 t + C_5 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_6 \end{cases}$$

Per determinare le sei costanti, se, per  $t=0$ , è:

$$(4) \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad e \quad (5) \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = \dot{y}_0 \\ \dot{z} = \dot{z}_0 \end{cases} \quad (5)$$

Ponendo, dapprima, nella (2) i valori dati dalle (4) otteniamo:

$$\dot{x}_0 = C_1, \quad \dot{y}_0 = C_2, \quad \dot{z}_0 = C_3$$

ed operando analogamente sulla (3), ponendovi  $t=0$ , e sostituendovi, quindi, i valori forniti dalle (5), ricaviamo:

$$x_0 = C_4, \quad y_0 = C_5, \quad z_0 = C_6.$$

Con ciò resta pienamente determinato il moto del punto. Troviamo, ora, l'equazione della Traiettoria. A tal scopo, sostituendo nelle (3) i valori più sopra trovati per le costanti:

$$(6) \quad \begin{cases} x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_0 t + z_0 \end{cases}$$

Scegliendo, poi, come origine della Terna d'assi, la posizione iniziale del mobile, sarà:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Mantenendo l'asse  $z$  verticale, poniamo l'asse  $x$  in modo che la velocità del punto giaccia nel piano  $xz$ . Avremo allora:

$$\dot{y}_0 = 0$$

e, perciò, le (6) divengono:

$$x = \dot{x}_0 t$$

$$y = 0$$

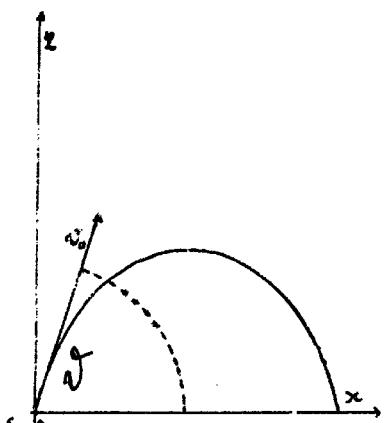
$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{z}_0 t$$

Da quest'ultime relazioni si vede, anzitutto, come la traiettoria si svolga, per intero, in un piano verticale. Procediamo, ora, all'eliminazione di  $t$ . Dalla prima delle precedenti espressioni, ricaviamo:

$$t = \frac{x}{\dot{x}_0},$$

e sostituendo questo valore nella Terza:

$$(7) \quad z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{\dot{x}_0^2} + \dot{z}_0 \frac{x}{\dot{x}_0}$$



Vediamo, ora, di dare, all'equazione precedente, che rappresenta una parabola nel piano  $x-z$ , una forma appropriata.

Detta  $v_0$  la velocità iniziale, e  $\vartheta$  l'angolo di essa con l'asse delle  $x$ , avremo:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \cos \vartheta \\ \dot{z}_0 = v_0 \sin \vartheta \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nella (7):

$$z = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} + x \operatorname{tg} \vartheta.$$

Uguagliando a zero la precedente, avremo un'equazione le cui radici rappresenteranno le intersezioni della traiettoria con l'asse delle  $x$ :

$$-\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} + x \operatorname{tg} \vartheta = 0.$$

Una soluzione evidente è:  $x = 0$ , che corrisponde al punto di partenza; per trovare l'altra, dividiamo ambo i membri per  $x$  e, con semplici passaggi,

Ottieniamo :

$$\frac{g}{2} \cdot \frac{x}{v_0^2 \cos^2 \theta} = \tan \theta,$$

e, infine :

$$x = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos^2 \theta \tan \theta = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \theta \sin \theta = \\ = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \theta.$$

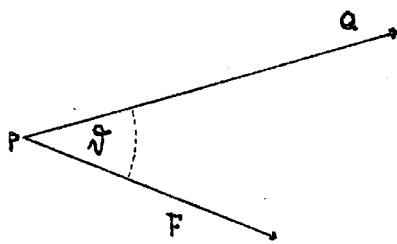
Osserviamo, in particolare, che essendo:  $v_0 = \text{cost.}$ , la  $x$  avrà il suo massimo valore per:  $\sin 2\theta = 1$ , cioè per:  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Nella pratica della balistica, tale angolo è un poco minore per la resistenza opposta dall'aria.

### ~ Lavoro . ~

Sia  $F$  una forza costante applicata ad un punto  $P$ , e sia  $(Q-P)$  lo spostamento del punto in un certo tempo; definiscasi lavoro l'espressione scalare:

$$|(Q-P)| \cdot |F| \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra  $(Q-P)$  ed  $F$ .



Il segno del lavoro coincide con quello di  $\cos \theta$ , ed è, quindi, positivo o negativo secondo che il senso dello spostamento è concorde o discorde con quello della forza.

Vettorialmente, sarà:

$$L = (Q-P) \times F,$$

espressione, questa, valida soltanto nel caso che

$F$  sia costante.

Se, invece  $F$  varia in funzione dello spostamento, consideriamo un spostamento infinitesimo  $ds$ , tale da potersi ritenere lungherro:  $F = \text{cost.}$  - Avremo allora, per il lavoro elementare  $dL$ :

$$dL = \bar{P}_1 \bar{P}_2 \cdot |F| \cos \vartheta = ds |F| \cos \vartheta = F \times ds ,$$

ove  $P_1$  e  $P_2$  sono gli estremi di  $ds$ .

Il lavoro Totale ci è dato, allora, dalla somma di infiniti termini del tipo precedente, sarà:

$$L = \int dL = \int F \cos \vartheta ds = \int F \times ds .$$

Scrivendo esplicitamente il prodotto scalare, l'espressione precedente assume la forma:

$$L = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) .$$


---

### ~Forza viva.~

Si definisce forza viva (o energia cinetica) di un punto materiale di massa  $m$ , l'espressione:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

dove  $v$  rappresenta la velocità del punto.

Teorema della forza viva.-

Dalla relazione vettoriale:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{A} ,$$

moltiplicando scalarmente ambo i membri per  $V$ , si avrà:

$$m A \times V = F \times V ,$$

ovvero, valendo per il prodotto scalare la proprietà commutativa:

$$m V \times \frac{dV}{dt} = F \times V ,$$

e, identicamente, essendo:

$$m V \times \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{dV^2}{dt}$$

avremo infine (essendo  $\frac{1}{2} m = \text{cost.}$ ) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} V^2 \right) = F \times V ,$$

relazione, questa, che vale per ogni valore del tempo.

Moltiplicando ambo i membri della precedente per  $dt$ , e integrando tra due tempi,  $t_1$  e  $t_2$ , otterremo:

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} F \times V dt . \quad (1)$$

Notiamo, ora, che, essendo identicamente:

$$L_{P,Q} = \int_a^b F(s) \times V ds$$

(perchè è:  $ds = V dt$ ), il secondo membro della precedente espressione rappresenta, dunque, il lavoro compiuto dalla forza mentre il punto passa da P in Q.

Tenendo conto di ciò, la (1) diventa:

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = L_{t_1, t_2} .$$

Cioè: l'aumento della forza viva di un punto dal momento iniziale al momento finale del moto, è uguale al lavoro eseguito dalla forza agente sul punto,

durante l'intervallo di tempo considerato.

Scalamente, per le componenti dell'equazione fondamentale,  $F = m\ddot{A}$ , avremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{array} \right. \quad (4)$$

Moltiplicando le precedenti per  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , rispettivamente, e sommandole membri a membri:

$$m(\ddot{x}dx + \ddot{y}dy + \ddot{z}dz) = F_xdx + F_ydy + F_zdz. \quad (5)$$

Osserviamo, ora, che è:

$$\ddot{x}dx = \frac{d\dot{x}}{dt}dx = \frac{d\dot{x}}{dt}\dot{x}dt = d\dot{x} \cdot \dot{x} = \frac{1}{2}d\dot{x}^2,$$

e, analogamente, per  $\ddot{y}dy$  e per  $\ddot{z}dz$ .

Senz'altro, sostituendo nella (5), si ottiene:

$$\frac{m}{2}(d\dot{x}^2 + d\dot{y}^2 + d\dot{z}^2) = F_xdx + F_ydy + F_zdz,$$

o anche, evidentemente:

$$d\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right) = F_xdx + F_ydy + F_zdz. \quad (6)$$

Notando, poi, che è:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2$$

e sostituendo nella (6), si ha infine:

$$d\left(\frac{m}{2}V^2\right) = F_xdx + F_ydy + F_zdz.$$

Integrando quest'ultima tra i due valori,  $t_1$  e  $t_2$ , del tempo, avremo:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = L_{t_1, t_2}.$$

In particolare, se è  $V_1 = 0$ , risulta:

$$\frac{1}{2} m V^2 = L_{t_1, t_2},$$

e, in generale, :

$$\frac{1}{2} m V^2 = L + \frac{1}{2} m V_0^2,$$

cioè, mediante quest'ultima relazione, data la velocità iniziale,  $V_0$ , si può, conoscendo  $L$ , determinare la velocità in un istante qualsiasi.

La determinazione di  $L$  si presenta particolarmente semplice nel caso delle forze che ammettono potenziale.

## ~ Potenziale. ~

Per definire il concetto di potenziale, supponiamo data una forza  $F$ , funzione della posizione del punto, :

$$F = F(x, y, z),$$

in modo che, per ogni posizione di questo, essa sia definita in grandezza, direzione e verso. - Quella parte dello spazio entro cui si conosce  $F$  in funzione di  $x, y, z$ , dicesi campo della forza.

Se  $P$  e  $Q$  sono due punti del campo, ed avviene che il lavoro eseguito, per portare il punto da  $P$  in  $Q$ , varii al variare del cammino percorso, il campo non ammette potenziale.

Se, invece, il lavoro è indipendente dalla traiettoria seguita per trasportare il punto da  $P$  in  $Q$ , il campo ammette potenziale. Il campo della forza peso, ad esempio, ammette potenziale.

Infatti, dati due piani orizzontali alla distanza  $\Delta h$ , per i due lavori eseguiti, mentre il punto passa da un piano all'altro, seguendo due diverse traiettorie,

risulteranno le espressioni:

$$L_{\Delta s_1} = P \Delta s_1 \cos \vartheta_1$$

$$L_{\Delta s_2} = P \Delta s_2 \cos \vartheta_2,$$

essendo  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  gli angoli che la direzione della forza (perpendicolare ai due piani orizzontali) fa con gli elementi di Traiettoria  $\Delta s_1$  e  $\Delta s_2$ , rispettivamente; ma, essendo sempre, indipendentemente dai valori di  $\Delta s$  e di  $\vartheta$ :

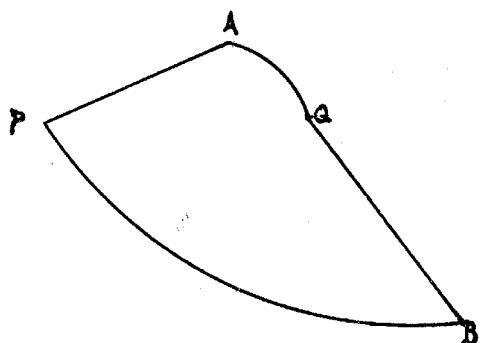
$$\Delta s \cos \vartheta = \Delta h,$$

risulta:

$$L = P h.$$

In quest'ultima espressione non compare più la Traiettoria; resta così dimostrato che il campo della forza peso ammette potenziale.

In un campo che ammette potenziale, se il punto si muove su di una Traiettoria chiusa qualsiasi (un cerchio, p. es.,) il lavoro è nullo.



Infatti, scelti due punti qualsiasi,  $P$  e  $Q$ , il lavoro compiuto nel passare da  $P$  a  $Q$ , sarà  $L$ , e, poiché il campo ammette potenziale, il lavoro compiuto per andare da  $Q$  a  $P$ , (dipendendo esso, unicamente, dalle posizioni, iniziale e finale,) sarà  $-L$ . Risulta, perciò, il lavoro totale:

$$L - L = 0.$$

Questa proprietà è caratteristica dei campi che ammettono potenziale. Possiamo, infatti, dimostrare che, se il lavoro compiuto per far percorrere ad un punto il cammino chiuso  $PAQBP$ , è nullo, il campo ammette potenziale.

Se  $L_1$  è il lavoro fatto nell'andare da  $P$  a  $Q$ , passando per  $A$ , ed  $L_2$  il lavoro eseguito nell'andare da  $Q$  a  $P$ , passando per  $B$ , è, per ipotesi, :

$$L_1 + L_2 = 0,$$

ovvero :

$$L_1 = -L_2,$$

il che dimostra come il lavoro fatto, per andare da  $P$  a  $Q$ , seguendo due percorsi qualunque  $PAQ$  e  $PBQ$ , sia eguale.

Per dare un campo di forza, come già si è visto, occorre dare la forza in funzione della posizione del punto.

Supponiamo dato un punto che assuma, successivamente, le posizioni  $P$  e  $Q$ , e calcoliamo il lavoro eseguito da una forza,  $F$ , per portarlo da  $P$  in  $Q$ . Questo lavoro,  $L$ , varierà, in generale, al variare della traiettoria.

Detti :  $L_1$  ed  $L_2$ , i lavori eseguiti da  $F$  per trasportare il punto da  $P$  in  $Q$ , seguendo due differenti traiettorie; nei campi che ammettono potenziale risulterà, invece :

$$L_1 = L_2$$

Considerando, ora, un punto fisso,  $O$ , ed uno mo-

-bile,  $P$ , definiscasi potenziale il lavoro che le forze del campo fanno per spostare il punto dalla posizione  $O$  alla posizione  $P$ ; il potenziale ci è dato, dunque, soltanto dalle posizioni,  $O$  e  $P$ , del punto senza che in essa compaia affatto la traiettoria. Siccome, poi, supponiamo il punto  $O$  fisso, il lavoro predetto sarà funzione solo della posizione  $P$ , e, cioè:

$$L(O, P) = U(P).$$

Questa funzione dicei potenziale.

Dato, ora, un altro punto,  $Q$ , calcoliamo il lavoro che si compie per portare il punto da  $P$  a  $Q$ . Siccome tale lavoro non dipende dalla traiettoria seguita, potremo andare da  $P$  a  $Q$  passando per  $O$ . Si avrà, dunque:

$$L_{P,Q} = L_{P,O} + L_{O,Q} = -L_{O,P} + L_{O,Q} = U(Q) - U(P),$$

eppero, il lavoro eseguito per andare da  $P$  a  $Q$ , è eguale alla differenza tra il potenziale di  $Q$  ed il potenziale di  $P$ .

Segue, in particolare, che, se come punto di riferimento, si fosse preso un altro punto,  $O'$ , invece di  $O$ , il potenziale, riferito ad  $O'$ , sarebbe differente, da quello relativo ad  $O$ , per una costante.

Determinazione delle forze di un campo, essendo noto il potenziale. -

Si presenta, ora, il problema di determinare le forze di un campo, essendo dato il potenziale. - Prefissata la solita Terna di riferimento ed un punto P, di coordinate  $x, y, z$ , sia dato il potenziale,  $U(P)$ , nel punto. Possiamo a determinare le componenti della forza agente sul punto. Per determinare, ad esempio,  $F_x$ , spostiamo il punto di un tratto infinitesimo  $dx$  nella direzione parallela all'asse  $x$ , e sia Q la nuova posizione assunta da esso. Le coordinate di Q saranno:

$$x + dx, y, z.$$

Per quanto si è visto, il lavoro compiuto sarà:

$$L = U(Q) - U(P) = U(x+dx, y, z) - U(x, y, z).$$

Ma, per  $dx$  infinitesimo, è (a meno di infinitesimi di ordine superiore):

$$U(x+dx, y, z) - U(x, y, z) = \frac{dU}{dx} dx.$$

D'altra parte, possiamo calcolare direttamente il lavoro, L, come prodotto dello spostamento elementare,  $dx$ , per la componente  $F_x$  della forza. Avremo, dunque:

$$\frac{dU}{dx} dx = F_x dx,$$

e dividendo per  $dx$ :

$$\frac{dU}{dx} = F_x.$$

Analogamente, si ottiene:

$$\frac{dU}{dy} = F_y \quad \text{e} \quad \frac{dU}{dz} = F_z.$$

Le componenti della forza, sono dunque date dalle derivate parziali del potenziale.

Determinare se un dato campo di forze, ammette, o no, potenziale. -

- Cerchiamo, ora, di riconoscere come si possa determinare se un campo ammette, o no, potenziale. Siano le forze date in funzione della posizione:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{cases} F_x = F_x(x, y, z) \\ F_y = F_y(x, y, z) \\ F_z = F_z(x, y, z) \end{cases} .$$

Se il campo ammette potenziale, evidentemente, dovrà aversi egualianza fra le suddette componenti della forza e le derivate parziali del potenziale rispetto ad  $x, y, z$ , rispettivamente. Dovrà essere, dunque:

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) = \frac{d U}{d x} \\ F_y(x, y, z) = \frac{d U}{d y} \\ F_z(x, y, z) = \frac{d U}{d z} \end{cases} .$$

Osserviamo, ora, che, se deriviamo la seconda delle precedenti espressioni rispetto a  $z$  e la terza rispetto ad  $y$ , sottraendo la terza dalla seconda si ottiene:

$$\frac{d F_y}{d z} - \frac{d F_z}{d y} = \frac{d U}{d y d z} - \frac{d U}{d z d y} = 0 .$$

(per il Teorema delle derivate parziali:  $\frac{d U}{d y d z} = \frac{d U}{d z d y}$ ).

Dovrà, dunque, essere necessariamente:

$$\frac{d F_y}{d z} = \frac{d F_z}{d y} ,$$

ed analogamente:  $\frac{d F_z}{d x} = \frac{d F_x}{d z}$  e:

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{dF_x}{dy}$$

Condizione, questa, necessaria (e che si potrebbe dimostrare anche sufficiente) per l'esistenza del potenziale nel campo dato.

In genere, i campi di forza uniformi ammettono potenziale. Ne è un esempio il peso. In questo caso, infatti, supponendo la forza diretta secondo il verso negativo dell'asse  $z$ , avremo:

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$$

e quindi:

$$F_x = \frac{dU}{dx} = 0, F_y = \frac{dU}{dy} = 0, F_z = \frac{dU}{dz} = -mg.$$

La  $U$  risulta, dunque, data come funzione della sola  $z$ . - Integrando le tre precedenti relazioni, avremo:

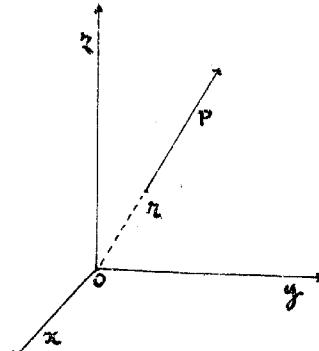
$$U = -mgz$$

(le tre costanti che comparirebbero, sono superflue, poiché considerandosi generalmente differenze di potenziale, esse si eliminano.).

Passiamo, ora, a dimostrare come anche i campi di forze centrali ammettano potenziale.

Sappiamo essere  $|F| = f(r)$ , quindi piuttosto, anzitutto, che la forza sarà costante sulla sfera di raggio  $r$ .

Riguardo ai coseni direttori di  $F$ , essendo  $x, y, z$ , le coordinate di  $P$ , essi



ci risulteranno dati, rispettivamente, da :

$$\frac{x}{r}, \quad , \quad \frac{y}{r}, \quad , \quad \frac{z}{r}, \quad ,$$

e, quindi, per le componenti di  $\vec{F}$  avremo :

$$\begin{cases} F_x = F \frac{x}{r} = f(r) \frac{x}{r} \\ F_y = F \frac{y}{r} = f(r) \frac{y}{r} \\ F_z = F \frac{z}{r} = f(r) \frac{z}{r} \end{cases} .$$

Se il campo ammette potenziale sappiamo che deve essere :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{y}{r} f(r) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{z}{r} f(r) \right] . \quad (1)$$

Per ciò che riguarda il primo membro, osserviamo che esso si può, identicamente, scrivere :

$$y \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{f(r)}{r} . \quad (2)$$

Ma, essendo :  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  
derivando, rispetto a  $z$ , si avrà :

$$2z \frac{\partial r}{\partial z} = 2z ,$$

ossia :

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

E, sostituendo nella (2) :

$$(3) \quad y \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{f(r)}{r} = \frac{yz}{r} \frac{d}{dz} \frac{f(r)}{r} .$$

Ponendo a primo membro, nella (1), il secondo membro di quest'ultima, otteniamo :

$$\frac{y \cdot z}{r} \frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} = r \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(r)}{r} .$$

E d'essendo, analogamente :

$$z \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(r)}{r} = z \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} = z \frac{y}{r} \frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} ,$$

risulterà infine :

$$\frac{y \cdot z}{r} \frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} = \frac{z \cdot y}{r} \frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} , \text{ che è l'identità cercata.}$$

In modo analogo avremo ancora altre due relazioni simili alla precedente ; potremo, in conclusione, porre :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{y}{r} f(r) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{z}{r} f(r) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{y}{r} f(r) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{x}{r} f(r) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{x}{r} f(r) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{z}{r} f(r) \right] ,$$

relazioni che dimostrano come i campi di forze centrali ammettano potenziale.

Di ciò possiamo dare, anche, una dimostrazione geometrica. Consideriamo, infatti, una sfera di raggio  $r$  qualsiasi, col centro nel punto  $O$  (centro delle forze centrali), tale che il punto  $P$ , su cui agiscono le forze del campo, sia racchiuso in essa. Consideriamo, inoltre, una sfera concentrica alla precedente e sia  $r+dr$  il suo raggio.

Proponiamoci di calcolare il lavoro infinitesimo,  $dL$ , che le forze del campo compiono mentre il punto passa dalla sfera di raggio  $r$  a quella di raggio  $r+dr$ ,

supponendo che il punto passi dalla posizione P, interna alle due sfere, alla posizione Q esterna ad esse, seguendo una Traiettoria generica, la quale attraverserà le due sfere, ed una parte di essa rimarrà racchiusa fra queste. Per la definizione di lavoro, essendo  $F$  la forza :

$$dL = |F| ds \cdot \cos \vartheta ,$$

dove  $ds$  è l'elemento di traiettoria compreso fra le due sfere, e  $\vartheta$  è l'angolo compreso tra  $ds$  ed il raggio condotto per uno dei suoi estremi. Ma, a meno di infinitesimi di ordine superiore, si può porre :

$$dr = ds \cos \vartheta$$

ed avremo, quindi, per  $dL$  :

$$dL = f(r) dr ,$$

essendo la forza considerata, funzione della distanza,  $r$ , dal centro O.

Per il lavoro eseguito tra i valori,  $r_1$  ed  $r_2$ , di  $r$ , avremo :

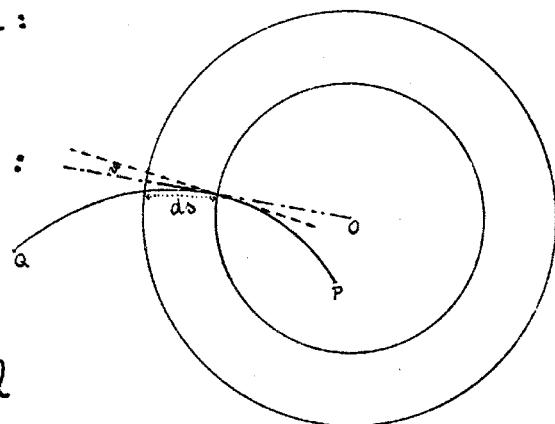
$$L_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr ,$$

espressione in cui, come era da prevedersi, non compare la traiettoria.

Supponendo che il punto si trovi, inizialmente, in O, abbiamo :

$$L_{0,2} = \int_0^{r_2} f(r) dr ,$$

ed anche in questo caso il lavoro dipende unicamente dalle posizioni, iniziale e finale del punto.



Per calcolare, ora, il potenziale, fissiamo il punto di riferimento in  $O$ , e, se  $P$  è il punto variabile, di cui si vuole il potenziale, avremo:

$$U(P) = L_{O,P} = \int_0^r f(r) dr ,$$

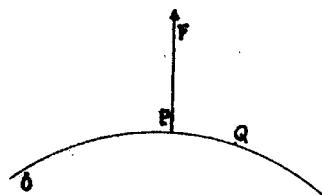
e, per il potenziale del punto  $P$ , si avrà, senz'altro:

$$U(P) = \int f(r) dr ,$$

dato che si può considerare il solo integrale indefinito, poichè i potenziali corrispondenti alle varie posizioni di  $P$  differiscono tra loro unicamente per una costante additiva.

### Superfici equipotenziali .-

Diconsi superfici equipotenziali quelle su cui il potenziale è costante; per ogni punto di un campo di forza passa una, ed una sola, di tali superfici. Per la relazione tra lavoro e potenziale, risulta dunque, che, mentre il punto si muove su di una superficie equipotenziale, le forze del campo non compiono lavoro. Se il punto si sposta da  $P$  ad una posizione infinitamente vicina,  $Q$ , posta sopra la superficie equipotenziale  $\sigma$ , passante per  $P$ , il lavoro effettuato, per quanto più sopra si è detto, risulta nullo; dovrà, quindi, la forza essere perpendicolare allo spostamento, cioè perpendicolare alla superficie equipotenziale considerata.



## Princípio della conservazione dell'energia nella dinamica del punto.

Si può, ora, stabilire una relazione che lega potenziale e forza viva. Sappiamo, dal Teorema della forza viva, che sussiste l'identità:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = L_{1,2},$$

dove  $V_1$  e  $V_2$  sono le velocità del punto di massa  $m$ , nelle posizioni  $P_1$  e  $P_2$ , rispettivamente ed  $L_{1,2}$  è il lavoro compiuto per portare il punto da  $P_1$  a  $P_2$ .

Se il punto si muove in un campo che ammette potenziale, risulterà:

$$L_{1,2} = U(P_2) - U(P_1),$$

e, quindi:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = U(P_2) - U(P_1).$$

Se  $P_1$  è fisso la precedente espressione diventa:

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - U(P_1) = \frac{1}{2}mV_1^2 - U(P_1),$$

il che, chiaramente, ci dice che, nel passare da  $P_1$  a  $P_2$ , la differenza tra l'energia cinetica (forza viva) e il potenziale in  $P_2$ , è rimasta costante.

Se chiamiamo energia potenziale il potenziale cambiato di segno, e lo indichiamo col simbolo  $W(P)$ , le relazioni precedenti divengono:

$$\frac{1}{2}mV^2 + W(P) = \text{cost.}$$

Si conclude, perciò, che in un campo che ammette potenziale, la somma dell'energia cinetica e del-

l'energia potenziale , rimane costante . Questa somma dicesi energia Totale del punto .

Se consideriamo , ad esempio , l'energia totale di un punto materiale di massa  $m$  , posto ad una certa altezza dal suolo , e soggetto alla forza di gravità ; vediamo che , mentre il punto è fermo , essendo la sua velocità ,  $V$  , nulla , l'energia totale è uguale alla sola energia potenziale che il punto possiede in quella posizione . Mentre , però , esso scende verso il suolo , cresce  $V$  e , conseguentemente , cresce  $\frac{1}{2} m V^2$  , mentre diminuisce  $W(P)$  , finché , quando il punto giunge al suolo , è :

$$W(P) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} m V^2 = \text{energia tot.} ;$$

l'energia potenziale iniziale si sarà , dunque , trasformata in energia cinetica .

Le energie , cinetica e potenziale , non sono le uniche forme di energia che si considerano nella fisica .

P.es. , nel caso precedente , quando il corpo urta contro il suolo , la sua energia cinetica si trasformerà in energia d'altro genere , in particolare in calore .

## Quantità di moto o e impulso.

Dato un punto , di massa  $m$  e di velocità  $V$  , definiscasi quantità di moto il vettore :

$$\vec{q} = m \vec{V}$$

Dicesi impulso di una forza,  $F$ , il prodotto di questa per il tempo durante il quale essa agisce.

Per una forza costante (in grandezza, direzione e senso), l'impulso,  $I$ , che è, dunque, un vettore, ci è dato, per una forza agente durante il tempo  $t$ , dalla relazione:

$$I = F t .$$

Se la forza è variabile e, se, ad esempio, essa è funzione del tempo, potremo scomporre l'intervallo di tempo durante il quale essa agisce, in tempi scolti infinitesimi, tali che, per la durata di uno qualsiasi di essi, la forza possa considerarsi come costante. L'impulso, tra due valori generici del tempo,  $t_1$  e  $t_2$ , ci sarà, allora, espresso da:

$$I_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt .$$

Si noti che il precedente è un integrale vettoriale; per calcolarlo bisognerà, perciò, calcolare i tre integrali scalari:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{x,1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt \\ I_{y,1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt \\ I_{z,1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t) dt \end{array} \right.$$

Analogamente a quanto si è fatto per l'energia cinetica e per il lavoro, vediamo di stabilire una rela-

zione che leggi i vettori, quantità di moto ed impulso.  
Dall'equazione fondamentale, ricaviamo identicamente:

$$m \frac{dV}{dt} = F$$

e, moltiplicando ambo i membri della precedente per dt:

$$m dV = F dt .$$

Questa espressione, integrata tra  $t_1$  e  $t_2$ , ci dà:

$$m V_2 - m V_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt = I_{1,2} .$$

Cioè: la variazione della quantità di moto è uguale all'impulso.

Scalaramente, si giunge allo stesso risultato. Infatti, proiettando l'equazione fondamentale della dinamica sugli assi, avremo:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = F_x \\ m \ddot{y} = F_y \\ m \ddot{z} = F_z \end{cases} ,$$

e, limitandoci, per semplicità, a considerare solo la prima delle precedenti, osserviamo che essa può scriversi identicamente:

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = F_x ,$$

ovvero:  $m d\dot{x} = F_x dt$ ,

espressione, questa, che, integrata fra  $t_1$  e  $t_2$ , ci dà:

$$m \dot{x}_2 - m \dot{x}_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$$

che è la componente, secondo l'asse  $x$ , dell'equazione vettoriale già considerata:

$$q_2 - q_1 = I_{1,2} .$$

# ~ Moto dell'oscillatore isocrono. ~

Consideriamo un punto materiale,  $P$ , di massa  $m$ , soggetto ad una forza diretta verso un punto  $O$ , e proporzionale alla distanza  $\bar{OP}$ . - Se, ad un istante generico, il punto si trova in una certa posizione  $P_x$ , e la sua velocità è parallela alla retta  $OP_x$ , esso si muoverà su questa retta (infatti, per il principio di ragion sufficiente, non vi sarebbe ragione alcuna, perché, essendo soggetto ad una forza diretta verso  $O$ , uscisse dalla Traiettoria rettilinea  $OP_x$ ).

Scegliendo, come asse delle ascisse, la retta in parola, orientata da  $O$  verso  $P_x$ , l'equazione del moto sarà:

$$m \ddot{x} = F = -Kx$$

ovvero, identicamente:

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0 .$$

Sappiamo (vedi pag. 38 e segg.) che l'equazione precedente ammette un integrale generale della forma:

$$(1) \quad x = x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{K}{m}} t - \alpha \right)$$

dove  $x_0$  ed  $\alpha$  sono delle costanti, per determinare le quali basta conoscere la posizione e la velocità iniziali del punto. Se, per  $t=0$ , è, p.es.:

$$x = a \quad \text{e, quindi,} \quad \dot{x} = 0 ,$$

derivando la (1), e ponendovi  $t=0$ , ottieniamo:

$$\dot{x} = -x_0 \sqrt{\frac{K}{m}} \sin \alpha = 0 ,$$

da cui:

$$\alpha = 0 \quad .$$

Ponendo, poi, nella (1),  $t=0$  e  $x=a$ , e tenendo presente il valore ora ricavato per  $\alpha$ , abbiamo:

$$a = x_0 \cos 0 = x_0 \quad .$$

Riassumendo, è, dunque:

$$x_0 = a \quad ; \quad \alpha = 0 \quad .$$

Per il periodo,  $T$ , risulterà:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad ;$$

Per la frequenza,  $v$ , infine:

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad .$$


---

## Moto dell'oscillatore smorzato.

Diconsi moti oscillatori smorzati quelli in cui, oltre ad una forza proporzionale allo spostamento, agisce sul punto materiale un'altra forza che ha direzione eguale, senso opposto e grandezza proporzionale alla velocità.

Indicando con  $h$  la costante di proporzionalità relativa a questa nuova forza, l'equazione del moto sarà:

$$m\ddot{x} = -Kx - h\dot{x} \quad ,$$

Oppure, identicamente:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + Kx = 0 \quad . \quad (1)$$

Per risolvere quest'equazione differenziale, poniamo:  
 $x = e^{\alpha t}$

con  $\alpha$  = costante da determinarsi.

Derivando due volte:

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t} ; \quad \ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t} .$$

Sostituendo nella (1) tali valori, otteniamo:

$$m\alpha^2 e^{\alpha t} + h\alpha e^{\alpha t} + K e^{\alpha t} = 0 ,$$

e dividendo per  $e^{\alpha t}$  (che è sempre diverso da 0):

$$m\alpha^2 + h\alpha + K = 0 . \quad (2)$$

Così la risoluzione dell'equazione differenziale (1) è ricondotta a quella di un'ordinaria equazione di secondo grado, che è l'equazione caratteristica della (1). Il discriminante  $\Delta$  della (2) è:

$$\Delta = \sqrt{h^2 - 4mK} ,$$

e, quindi, le radici,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , di essa hanno la forma:

$$\alpha_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4mK}}{2m} , \quad \alpha_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - 4mK}}{2m} .$$

Ovvero, dunque, i due integrali particolari:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t} , \quad x_2 = e^{\alpha_2 t} ,$$

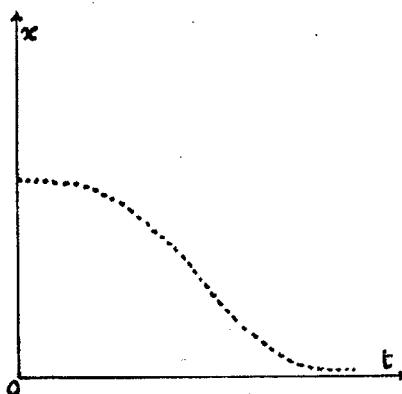
da cui si ricava l'integrale generale:

$$(3) \quad x = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} ,$$

con  $A$  e  $B$  costanti.

Esaminiamo, ora, separatamente, il caso in cui sia  $\Delta > 0$  e quello in cui sia  $\Delta < 0$ .

Nel primo caso le due radici sono entrambe negative, il che si deduce immediatamente dal fatto che l'equazione (2) presenta due permanenze di segno e, quindi, la regola di Cartesio ci dice essere le sue radici negative. La (3) ci dice, quindi, che, essendo  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  negative, mentre t cresce indefinitamente, x tende a zero.



Il grafico del movimento è quello della figura.  
Questo tipo di moto si dice aperiodico.

Esaminiamo, ora, il caso in cui  $\Delta$  è minore di zero; le radici,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , immaginarie coniate hanno la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{h}{2m} + i \frac{\sqrt{4mK-h^2}}{2m} \\ \alpha_2 = -\frac{h}{2m} - i \frac{\sqrt{4mK-h^2}}{2m} \end{array} \right.$$

dov'è:  $4mK - h^2 > 0$ .

Ponendo, per brevità, :

$$\frac{h}{2m} = \beta \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{4mK-h^2}}{2m} = \gamma ,$$

avranno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\beta + i\gamma \\ \alpha_2 = -\beta - i\gamma \end{array} \right. ,$$

e quindi, i due integrali particolari,  $x_1$  ed  $x_2$ , divengono:

$$\begin{cases} x_1 = e^{(-\beta+iy)t} \\ x_2 = e^{(-\beta-iy)t} \end{cases},$$

ossia:

$$\begin{cases} x_1 = e^{-\beta t + iy t} \\ x_2 = e^{-\beta t - iy t} \end{cases}.$$

È chiaro che, invece di fare una combinazione lineare dei due integrali precedenti, si può, identicamente, fare una combinazione lineare della loro somma o della loro differenza. La somma è:

$$x_1 + x_2 = e^{-\beta t + iy t} + e^{-\beta t - iy t} = e^{-\beta t} \cdot e^{iy t} + e^{-\beta t} \cdot e^{-iy t} = e^{-\beta t} (e^{iy t} + e^{-iy t}),$$

e la differenza:

$$x_1 - x_2 = e^{-\beta t + iy t} - e^{-\beta t - iy t} = e^{-\beta t} (e^{iy t} - e^{-iy t}).$$

Introducendo le formule di Eulero:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

la somma e la differenza precedenti divengono:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = e^{-\beta t} \cos yt \\ x_1 - x_2 = e^{-\beta t} \sin yt \end{cases},$$

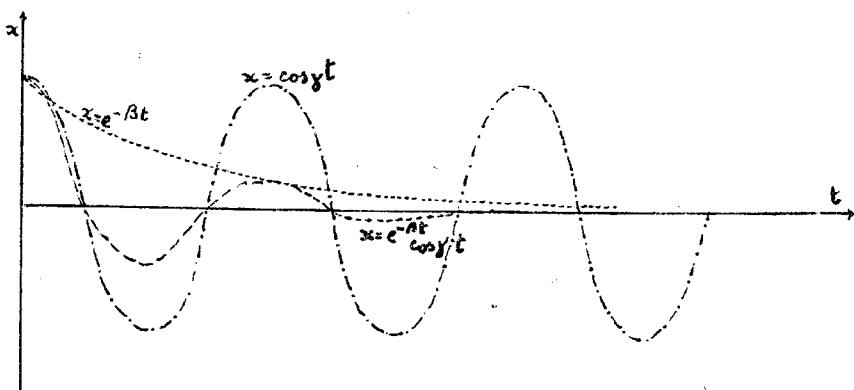
avendo trascurato, nei primi membri, i fattori 2 e  $2i$ , che si possono assimilare alle costanti di integrazione. In definitiva, l'integrale generale

dell'equazione (1) assume la forma:

$$x = A e^{-\beta t} \cos \gamma t + B e^{-\beta t} \sin \gamma t .$$

Il primo termine a secondo membro, a prescindere dalla costante  $A$ , è il prodotto di un esponenziale che (essendo  $-\beta < 0$ ) tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ , e di un coseno, il cui argomento è funzione lineare del tempo.

Quanto alla rappresentazione grafica: la funzione esponenziale è rappresentata dalla solita curva che tende asintoticamente all'asse delle  $x$ ; la funzione trigonometrica da una sinusoida:



La funzione prodotto assume il massimo valore,  $e^{-\beta t}$ , per  $\cos \gamma t = 1$ , il minimo,  $-e^{-\beta t}$ , per  $\cos \gamma t = -1$ . Perciò la funzione prodotto sarà graficamente rappresentata, ancora, da una curva sinusoidale, che ha i punti di massimo sulla curva esponenziale. Eppero, al crescere di  $t$ , l'ampiezza della curva sinusoidale (che è, per l'appunto, la curva caratteristica dei moti oscillatori smorzati) va diminuendo. L'altra funzione:  $e^{-\beta t} \sin \gamma t$ , è perfettamente simile a quella ora considerata, astroendo da uno spostamento di fase di  $90^\circ$ . - È facile

vedere che la rapidità dello smorzamento dipende sensibilmente da  $\beta$ ; infatti, quanto più grande è  $\beta$ , tanto più rapidamente la curva esponenziale tende all'asse delle ascisse, e, di conseguenza, tanto più rapidi sono i decrementi di ampiezza della curva sinusoidale. In particolare, se:  $\beta = 0$ , risulta:  $h = 0$ , ed il moto si riduce ad un ordinario moto oscillatorio non smorzato. Ciò si può, anche, dedurre agevolmente dalla rappresentazione grafica, osservando che, se è:  $\beta = 0$ , per qualsiasi valore di  $t$  è:  $e^{-\beta t} = 1$ ; la curva esponenziale si riduce, quindi, ad una retta parallela all'asse  $x$ , alla distanza 1 dall'asse medesimo, mentre la curva sinusoidale diventa un'ordinaria sinusoide che ha i suoi massimi valori, +1, sulla retta medesima.

Per il periodo, poiché esso è, come già altrove si è visto, quel valore del tempo di cui bisogna aumentare l'argomento affinché la funzione riassuma uno stesso valore, dovrà essere (essendo il coseno una funzione periodica di periodo  $2\pi$ ):

$$\gamma T = 2\pi$$

da cui:  $T = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mK-h^2}}$ .

In particolare, se fosse:  $h=0$ , risulterebbe:

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mK}} = \frac{4\pi m}{2\sqrt{mK}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}},$$

che è l'espressione del periodo di un oscillatore

non smorzato.

Supponiamo, ora, che agisca sull'oscillatore, oltre la forza centrale e la resistenza più sopra considerate, anche una forza esterna sinusoidale (o periodica, che dir si voglia), di frequenza  $\nu$ .

L'equazione del moto sarà allora:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = A \cos 2\pi\nu t . \quad (1)$$

Questa equazione differenziale del secondo ordine non è omogenea; sappiamo, perciò, dal calcolo infinitesimale, che l'integrale generale di tale equazione, è dato dalla somma di un integrale particolare dell'equazione considerata e dell'integrale generale della stessa, resa omogenea.

Cerchiamo se esiste un integrale particolare della forma:

$$x = M \cos 2\pi\nu t + N \sin 2\pi\nu t . \quad (2)$$

Dobbiamo, ora, determinare le costanti  $M$  ed  $N$  in modo da soddisfare alla (1) da cui siamo partiti. In altre parole, sostituendo nella (1), per  $\dot{x}$  e per  $\ddot{x}$ , i seguenti valori, ottenuti, con due successive derivazioni, dalla (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -2\pi\nu M \sin 2\pi\nu t + 2\pi\nu N \cos 2\pi\nu t \\ \ddot{x} = -4\pi^2\nu^2 M \cos 2\pi\nu t - 4\pi^2\nu^2 N \sin 2\pi\nu t , \end{array} \right.$$

e ponendo per  $x$  la (2) stessa, ottieniamo:

$$(3) m(-4\pi^2\nu^2 M \cos 2\pi\nu t - 4\pi^2\nu^2 N \sin 2\pi\nu t) + h(-2\pi\nu M \cdot \sin 2\pi\nu t + 2\pi\nu N \cos 2\pi\nu t) + k(M \cos 2\pi\nu t + N \sin 2\pi\nu t) = A \cos 2\pi\nu t .$$

Eguagliando, nella (3), i coefficienti di  $\cos 2\pi v t$  e di  $\sin 2\pi v t$ , otteniamo:

$$\begin{cases} -4\pi^2 v^2 m M + 2\pi v h N + K M = A \\ -4\pi^2 v^2 m N - 2\pi v h M + K N = 0 \end{cases},$$

ed, anche:

$$\begin{cases} M(K - 4\pi^2 v^2 m) + 2\pi v h N = A \\ N(K - 4\pi^2 v^2 m) - 2\pi v h M = 0 \end{cases}.$$

Abbiamo, così, un sistema di due equazioni nelle due incognite  $M$  ed  $N$ , delle quali, mediante la regola di Cramer, potremo determinare i valori.

Risulta:

$$M = \frac{\begin{vmatrix} A & 2\pi v h \\ 0 & K - 4\pi^2 v^2 m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K - 4\pi^2 v^2 m & 2\pi v h \\ -2\pi v h & K - 4\pi^2 v^2 m \end{vmatrix}},$$

$$N = \frac{\begin{vmatrix} K - 4\pi^2 v^2 m & A \\ -2\pi v h & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K - 4\pi^2 v^2 m & 2\pi v h \\ -2\pi v h & K - 4\pi^2 v^2 m \end{vmatrix}}$$

da cui, sviluppando:

$$M = \frac{A(K - 4\pi^2 v^2 m)}{(K - 4\pi^2 v^2 m)^2 + 4\pi^2 v^2 h^2}$$

$$N = \frac{A 2\pi v h}{(K - 4\pi^2 v^2 m)^2 + 4\pi^2 v^2 h^2}.$$

Infine, per ottenere l'integrale generale della (1), dovremo aggiungere, come già si è detto, all'integrale particolare (3), l'integrale generale dell'equazione resa omogenea che ci è dato (vedi pag. 116 e segg.) dall'una o dall'altra delle espressioni:

$$\begin{cases} x = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} \\ x = A e^{-\beta t} \cos \gamma t + B e^{-\beta t} \sin \gamma t, \end{cases}$$

secondo che  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  sono reali od immaginarie. In conclusione il moto del punto materiale risulta dato dalla somma di un moto periodico colla frequenza della forza sinusoidale, e di un moto oscillatorio smorzato. Dopo un certo tempo (in pratica, finito) il moto oscillatorio smorzato ceserà, ed il punto resterà animato dal solo moto periodico.

Riprendendo l'integrale particolare dell'equazione non omogenea:

$$(2) \quad x = M \cos 2\pi v t + N \sin 2\pi v t,$$

sappiamo che lo si può porre anche sotto la forma:

$$(4) \quad x = P \cos(2\pi v t - \alpha).$$

Oobbiamo, però, determinare, convenientemente, i valori delle costanti  $P$  ed  $\alpha$ . Sviluppando la (4), abbiamo:

$$x = P(\cos 2\pi v t \cos \alpha + \sin 2\pi v t \sin \alpha)$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (2), risulta :

$$(5) \quad \begin{cases} M = P \cos \alpha \\ N = P \sin \alpha \end{cases},$$

da cui, dividendo la seconda delle precedenti per la prima, otteniamo :

$$\frac{N}{M} = \operatorname{tg} \alpha,$$

che ci determina  $\alpha$ .

Inadrando le (5) e sommandole membri a membri, si ha:

$$P^2 = M^2 + N^2 \quad \text{da cui: (6)} \quad P = \sqrt{M^2 + N^2},$$

espressione, quest'ultima, che ci determina  $P$  (ampiezza del moto). Sostituendo nella (6), per  $M^2$  ed  $N^2$ , i valori che si ricavano dalle formule di pag. 121-122, avremo infine :

$$(7) \quad P = \frac{A}{\sqrt{(K - 4\pi^2 v^2 m)^2 + 4\pi^2 v^2 h^2}}$$


---

Supponiamo che sia :  $h = 0$ , cioè l'oscillatore non sia smorzato. La (7), in questo caso, diventa :

$$P = \frac{A}{K - 4\pi^2 v^2 m}.$$

Di qui si deduce che quando  $v$  assume un valore tale da annullare il denominatore dell'espressione precedente, l'ampiezza delle oscillazioni forzate diventa infinita. In tal caso sarà, dunque :

$$K - 4\pi^2 v^2 m = 0 \quad \text{da cui: } v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

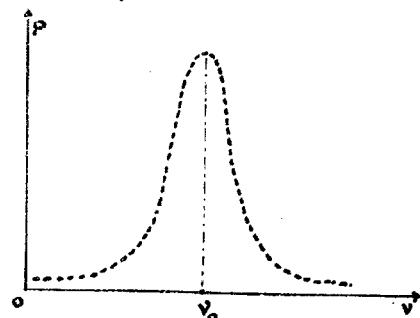
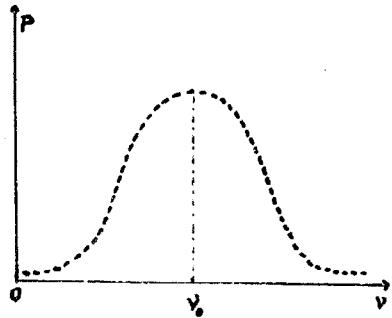
Osserviamo, ora, che il valore di  $v$ , così trovato coin-

cide con quello della frequenza di un oscillatore non smorzato; possiamo, cioè, concludere che se ad un oscillatore è applicata una forza di periodo eguale a quello dell'oscillatore in questione, le oscillazioni forzate del punto materiale assumerebbero, se non ci fosse smorzamento, ampiezza infinita.

Questo fenomeno è detto: risonanza.

Se, dunque, nella pratica si ha un oscillatore con smorzamento non nullo, ma minimo, e si fa agire su di esso una forza periodica sinusoidale di periodo (e, quindi, di frequenza) eguale a quello proprio dell'oscillatore, l'ampiezza delle oscillazioni del punto va sempre più crescendo, e raggiunge valori grandissimi, benché finiti (perchè lo smorzamento, seppur minimo, non è nullo).

Graficamente, riportando in ascisse i valori della frequenza della forza esterna, ed in ordinate le ampiezze corrispondenti delle oscillazioni forzate del punto; detto  $v_0$  il punto che corrisponde sull'asse delle ascisse alla frequenza propria dell'oscillatore, si vede che la curva, in corrispondenza di Tale valore di  $v$ , presenta un massimo. In pratica, in ogni



moto oscillatorio vi sarà sempre uno smorzamento apprezzabile, per quanto piccolo, quindi, anche nei punti di massimo, l'ampiezza delle oscillazioni avrà un valore finito. I grafici precedenti rappresentano le ampiezze delle oscillazioni forzate nel caso che sia  $\hbar$  (smorzamento) grande o piccolo, rispettivamente.

---

## ~~~GRAVITAZIONE~~~

## ~~~UNIVERSALE~~~

### Legge di Newton.

La legge di Newton che dà la forza esercitantesi tra due corpi di massa  $M$  ed  $m$ , rispettivamente, è espressa dalla relazione:

$$F = f \frac{m M}{r^2} \quad (1)$$

dove  $r$  è la distanza tra i due corpi ed  $f$  la cosiddetta costante di attrazione universale.

Nell'applicare questa legge all'astronomia, data la grandissima distanza tra due corpi celesti, questi possono, in prima approssimazione, esser considerati come punti.

Si nota, anzitutto, che la forza  $F$ , espressa dalla (1), è diretta secondo la congiungente i centri dei due corpi; quanto alla sua grandezza, osserviamo che essa forse può considerarsi tanto come quella che attrae  $m$  verso  $M$ , quanto come quella che attrae  $M$  verso  $m$ ;

per quel che riguarda il senso, infine,  $F$  agisce sui due corpi in sensi opposti, in guisa, cioè, da muoverli l'uno verso l'altro. In genere, supponendo:  $m \neq M$ , i due corpi, per effetto della forza suddetta, assumeranno accelerazioni inversamente proporzionali alle rispettive masse. Nel caso particolare, poi, del sole e di un pianeta (la Terra, p. es.), detta  $M$  la massa del sole, che risulterà grandissima in confronto della massa  $m$  della Terra, l'accelerazione assunta dal sole sarà così piccola in confronto di quella assunta dalla Terra, da potersi senz'altro considerare il sole come fermo:

Considerando il moto di un pianeta come dovuto soltanto alla attrazione solare, ed ammettendo il sole fermo, il moto del pianeta è un moto centrale ed, in particolare, esso è, perciò, piano.

Consideriamo, ora, un moto centrale, in genere.

Detto  $r$  il vettore variabile che unisce il punto  $P$  al centro  $O$  del moto, la forza  $F$ , agente su  $P$ , risulterà funzione di  $r$ , ed indicando con  $\varphi$  tale funzione, avremo:

$$F = \varphi(r).$$

Se supponiamo il sole,  $S$ , in  $O$  (centro di una terna di riferimento), il moto si svolgerà in un piano che sceglieremo per piano  $xy$ . Dette  $x$  ed  $y$  le coordinate di  $P$ , per i coseni direttori di  $F$  risulteranno le espressioni:

$$-\frac{x}{r}, \quad , \quad -\frac{y}{r}$$

e quindi, per le componenti:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{cases} F_x = -\varphi(r) \frac{x}{r} \\ F_y = -\varphi(r) \frac{y}{r} \end{cases}$$

In definitiva, le equazioni del moto saranno:

$$(1) \quad m \ddot{x} = -\varphi(r) \frac{x}{r},$$

$$(2) \quad m \ddot{y} = -\varphi(r) \frac{y}{r},$$

da cui dedurremo il noto Teorema delle aree.

A tal scopo, moltiplichiamo la (1) per  $y$ , la (2) per  $-x$ , e sommiamo membro a membro. Ovvero:

$$m(y \ddot{x} - x \ddot{y}) = 0$$

ovvero, identicamente dividendo per  $m$ :

$$\frac{d}{dt}(y \dot{x} - x \dot{y}) = 0,$$

ed integrando:

$$y \dot{x} - x \dot{y} = \text{cost.};$$

infine, cambiando segno:

$$(3) \quad x \dot{y} - y \dot{x} = \text{cost.}.$$

A questo punto, osserviamo che il raggio vettore  $r$ , ha le componenti:

$$x, y, 0,$$

e la velocità  $V$  del punto:

$$\dot{x}, \dot{y}, 0.$$

Moltiplicando vettorialmente  $r$  per  $V$ , la sola componente non nulla del vettore prodotto è quel la secondo l'asse  $x$ , che ci è data, per l'appun-

to, dal primo membro della (3). Per la grandezza di detto prodotto, avremo:

$$(4) \quad |r \wedge V| = |r| \cdot |V| \cdot \sin \vartheta$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo che  $r$  fa con  $V$ . Notando, poi, che è:

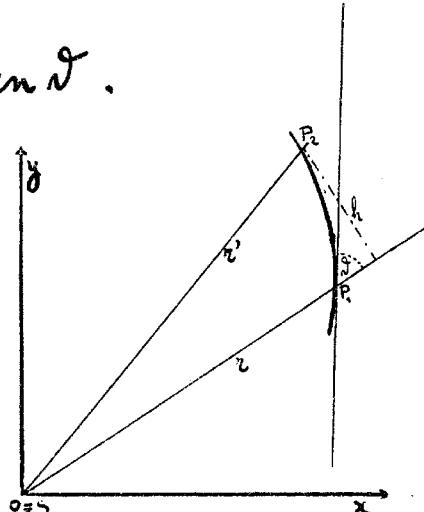
$$|V| = \frac{ds}{dt} ,$$

la (4) diventa:

$$|r \wedge V| = |r| \frac{ds}{dt} \sin \vartheta .$$

Siano, ora,  $P_1$  e  $P_2$ , le posizioni del punto ai tempi  $t$  e  $t + dt$ , rispettivamente. L'area  $dS$  del triangolo infinitesimo  $OP_1 P_2$ , è data da:

$$dS = \frac{1}{2} r h$$



essendo  $h$  la normale condotta da  $P_2$  alla  $\overline{OP}_1$ . Ma, evidentemente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è:

$$h = ds \sin \vartheta ,$$

e quindi:

$$dS = \frac{1}{2} r ds \sin \vartheta .$$

Di qui:

$$2 \frac{dS}{dt} = \frac{r ds \sin \vartheta}{dt} = |r \wedge V| = C, \quad (5)$$

da cui, infine:  $2 dS = C dt$

e, integrando tra  $t_1$  e  $t_2$ :

$$2 S_{1,2} = C (t_2 - t_1) \quad (6)$$

### 1<sup>a</sup> Legge di Keplero.

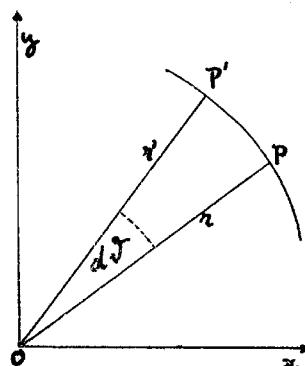
La formula (6) esprime la prima legge di Keplero: Le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

La (5) precedente, che si può anche scrivere:

$$dS = \frac{1}{2} C dt ,$$

esprime non una proprietà speciale del moto dei pianeti, bensì una proprietà generale dei moti centrali. Scriviamola in coordinate polari. Evidentemente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è:

$$h = r d\vartheta$$



ove  $d\vartheta$  è l'angolo formato da due posizioni infinitamente vicine di  $r$ . Sarà, perciò:

$$2dS = rh = r^2 d\vartheta = C dt ,$$

da cui:  $\frac{r^2 d\vartheta}{dt} = C . \quad (7)$

Questo vale per tutti i moti centrali. Nel caso particolare dei pianeti, si ha, poi:

$$\varphi(r) = f \frac{mM}{r^2} ,$$

e quindi l'equazioni (1) e (2) di pag. 127, divengono:

$$m\ddot{x} = -f \frac{mM}{r^3} x \quad \text{e} \quad m\ddot{y} = -f \frac{mM}{r^3} y . \quad (8)$$

Eseguiamo, ora, la trasformazione in coordinate polari. Essendo:  $x = r \cos \vartheta$  ed  $y = r \sin \vartheta$ , (9)

Ovremo:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} ;$$

ma la (7) ci dà:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

sarà quindi:

$$\dot{x} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dx}{d\vartheta} .$$

Tenendo presente quest'ultima relazione, deriviamo la prima delle (9):

$$\dot{x} = \frac{C}{r^2} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \right) = C \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \sin \vartheta \right),$$

e infine:

$$\ddot{x} = -C \left( \frac{1}{r} \sin \vartheta - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta \right) . \quad (10)$$

Osserviamo ora che è:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta},$$

e, sostituendo questo valore nella (10), abbiamo:

$$\ddot{x} = -C \left( \frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta} \cos \vartheta + \frac{1}{r} \sin \vartheta \right) .$$

Passiamo ora a calcolare la derivata seconda della  $x$ . A tal scopo notiamo che è:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt},$$

e, poiché abbiamo visto essere:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

ottenremo:

$$\ddot{x} = \frac{C}{r^2} \frac{d\dot{x}}{d\vartheta} = -\frac{C}{r^2} \cos \vartheta \left( \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} \right) .$$

Sostituendo nelle (8), per  $\ddot{x}$ , questo valore, e ricordando che:  $x = r \cos \vartheta$ , troviamo:

$$-\frac{C^2}{r^2} m \cos \vartheta \left( \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} \right) = -f \frac{m M}{r^3} r \cos \vartheta.$$

Cambiando segno e semplificando:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = f \frac{M}{C^2}.$$

L'equazione, ove si riguardi  $\frac{1}{r}$  come incognita, è un'equazione differenziale del secondo ordine non omogenea. Un integrale particolare di essa è, evidentemente:

$$\frac{1}{r} = f \frac{M}{C^2}.$$

Quanto all'integrale generale, esso si trova aggiungendo a questo integrale particolare, l'integrale generale dell'equazione resa omogenea che, ponendo per brevità:  $\frac{1}{r} = z$ , ci è data da:

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + z = 0 \quad (11)$$

Due integrali particolari di questa equazione, sono:  $\sin \vartheta$  e  $\cos \vartheta$ . Infatti, per il primo, ad esempio, derivando due volte, abbiamo:  $-\sin \vartheta$ , e sostituendo nella (11):

$$-\sin \vartheta + \sin \vartheta = 0.$$

Analogamente per  $\cos \vartheta$ .

Per ottenere l'integrale generale della (11), dovremo fare una combinazione lineare dei due integrali particolari sopra scritti:

$$z = A \cos \vartheta + B \sin \vartheta,$$

espressione che, come già sappiamo, si può porre sotto la forma:

$$r = D \cos(\vartheta - \alpha)$$

L'integrale generale dell'equazione non omogenea sarà dunque:

$$\frac{1}{r} = f \frac{M}{C^2} + D \cos(\vartheta - \alpha) = f \frac{M}{C^2} (1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)), \quad (12)$$

dove  $\varepsilon$  è una costante dataci da:

$$\varepsilon = \frac{D}{f \frac{M}{C^2}}$$

Risolvendo l'equazione (12) rispetto ad  $r$ , otteniamo:

$$r = \frac{C^2}{f M} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)},$$

espressione, quest'ultima che rappresenta, in coordinate polari, l'equazione di una conica riferita ad uno dei fuochi come polo; Tale conica sarà una ellisse, una parabola od un'iperbole a seconda che sia:

$$\varepsilon < 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \varepsilon > 1,$$

rispettivamente (orbite ellittiche dei pianeti, paraboliche ed iperboliche delle comete).

Osserviamo, ora, che si può sempre porre:  $\alpha = 0$ , spostando opportunamente l'asse polare, e quindi l'espressione di  $r$  assume la forma:

$$r = \frac{C^2}{f M} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \vartheta},$$

da cui, immediatamente, si riconosce che, se  $\varepsilon$  è:

$$\varepsilon < 1,$$

$r$  risulta massimo per:  $\cos \vartheta = -1$ , cioè per:  $\vartheta = \pi$ . La posizione occupata, rispetto al sole, da un pianeta, quando  $r$  è massimo, dicesi afelio. Il valore

$r_1$  di  $r$  è allora:

$$r_1 = \frac{C^2}{f \cdot M} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon};$$

$r$  assumerà, invece, il suo minimo valore,  $r_2$ , per:  $\cos \theta = 1$ , cioè, per:  $\theta = 0$ . In tal caso si dice che il pianeta è in perielio, ed è:

$$r_2 = \frac{C^2}{f \cdot M} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Sempre nel caso che sia:  $\varepsilon < 1$ , cioè che l'orbita sia ellittica, si vede immediatamente come la somma dei valori massimo e minimo di  $r$ , ci dia la lunghezza  $2a$  dell'asse maggiore dell'ellisse. Sarà dunque:

$$r_1 + r_2 = 2a = \frac{C^2}{f \cdot M} \left( \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} \right)$$

da cui:

$$a = \frac{C^2}{f \cdot M} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^2}. \quad (13)$$

Ottiamo così la 2<sup>a</sup> legge di Keplero: I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei fuochi.

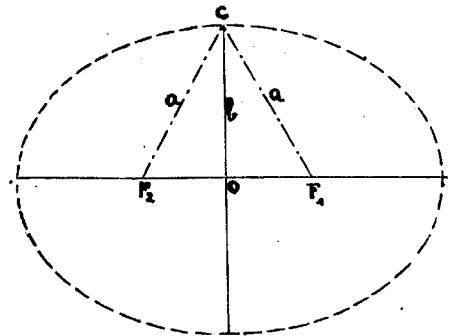
Si è visto che è:

$$dS = \frac{C}{2} dt,$$

dove  $dS$  è l'area del triangolo infinitesimo che ha per lati due successive posizioni di  $r$ , e l'archet.

to infinitesimo,  $ds$ , di traiettoria. Integrando la precedente espressione da 0 a  $T$  (tempo impiegato a descrivere l'intera orbita) otteniamo:

$$\frac{C}{2}T = S \text{ (area dell'ellisse)} = \pi a b . \quad (14)$$



Cerchiamo ora di determinare il semiasse minore  $b$ . Data un'ellisse di centro  $O$ , detta  $\varepsilon$  l'eccentricità,  $F_1$  ed  $F_2$  i fuochi, risulta:

$$OF_1 = \varepsilon a$$

$$F_1 C = F_2 C = a .$$

Oggi triangolo rettangolo  $OF_1 C$ , ci dà:

$$b^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 ,$$

da cui:

$$b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} .$$

Sostituendo nella (14) il valore così ricavato per  $b$ , otteniamo:

$$S = \frac{C}{2}T = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} .$$

Ma la (13) della pag. prec. ci dà:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{C^2}{f M a}$$

quindi avremo:

$$\frac{C}{2}T = \pi a^2 \frac{C}{\sqrt{f M a}} = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}} C}{\sqrt{f M}} ,$$

da cui si ricava:

$$T = \frac{2 \pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f M}} ,$$

ed elevando al quadrato ambo i membri:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{f M} ,$$

da cui, infine:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f M} . \quad (15)$$

L'onest' espressione, poichè il secondo membro è costante, ci dice che i quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le loro orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori; in ciò consiste, per l'appunto, la Terza legge di Keplero.

---

La (15) può servire, p. es., a determinare la massa del sole; infatti a, f, T, si possono ricavare da misure dirette, e la formula suddetta ci dà allora il valore di M. Questo valore risulta, però, approssimato per la difficoltà di determinare f con precisione.

---

Dalla formula:

$$g = f \frac{m \cdot 1}{R^2}$$

che ci dà la forza esercitata dalla Terra di massa m, sopra l'unità di massa, essendo: R = 6600 Km. circa, il raggio del nostro pianeta; e g = 980 cm/sec.<sup>2</sup> ≈; si può dedurre m con un errore del 2 o 3 % ≈.

---

Moto

~ Si un punto vincolato. ~

Finora abbiamo considerato il moto di un punto libero di muoversi comunque nello spazio. Passiamo, ora, a studiare il moto di un punto vincolato, e, come primo esempio, consideriamo il moto di un punto costretto a seguire una Traiettoria prefissata (p. es. il moto di una pallina dentro un tubo).

Se, ora, il punto mobile, per effetto delle forze ad esso direttamente applicate, tendesse ad abbandonare la Traiettoria prefissata, verrebbe ad esercitarsi su di esso una forza tale da impedirglielo.

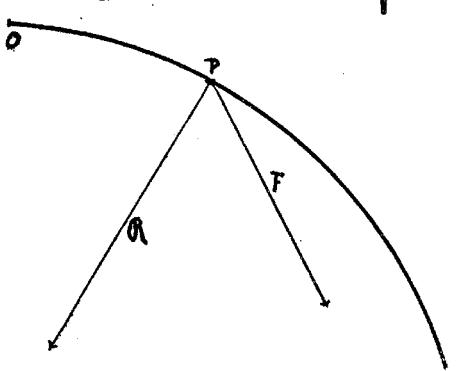
Potremo, dunque, considerare il punto come libero, pur chè oltre alla forza direttamente applicata, lo si consideri soggetto anche ad un'altra forza che dicesi reazione del vincolo.

Noi ammetteremo che questa reazione sia perpendicolare alla curva (o alla superficie) su cui avviene il moto. Il punto si muoverà, dunque, sotto l'azione della forza  $F$  direttamente applicata e

della reazione  $R$  (normale alla Traiettoria).

L'equazione del moto assumerà, quindi, la forma:

$$m A = F + R, \quad (1)$$



equazione vettoriale che ne rappresenta. Tre scalari che serviranno a determini

nare l'ascissa curvilinea  $s$  e la reazione  $R$ .

Noto  $s$ , il moto del punto resterà determinato. Quanto, poi, ad  $R$ , basterà determinarne solo due elementi (poiché essa è normale alla Tangente alla traiettoria nel punto). Proiettando la (1) sulla Tangente, avremo (essendo:  $A = A_t + A_n$ ):

$$mA_t = F_t = F(s, \dot{s}), \quad (2)$$

poiché è:

$$R_t = 0.$$

Dalla (2) si può ricavare  $s$  in funzione del tempo. Infatti, essendo:  $A_t = \frac{d v}{dt}$ , e sostituendo nella (2):

$$m \frac{dv}{dt} = F_t,$$

oppure, notando che è:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (3)$$

avremo infine:

$$s = s(t, C_1, C_2) \quad (4)$$

che è l'integrale generale dell'equazione differenziale (3).

Per determinare le costanti,  $C_1$  e  $C_2$ , bisogna, al solito, conoscere i valori di  $s$  e di  $v$  corrispondenti ad un dato valore del tempo. Se, ad esempio, per  $t = t_0$ , è:

$$s = s_0 \quad \text{e} \quad v = v_0$$

sostituendo questo valore di  $s$  nella (4), abbiamo:

$$s_0 = s(t_0, C_1, C_2), \quad (5)$$

e derivando la (4) stessa e ponendovi  $t=t_0$  e  $v=v_0$ :

$$(6) \quad v_0 = \dot{s}(t_0, C_1, C_2).$$

Le (5) e (6) ci permettono di determinare  $C_1$  e  $C_2$ .

Per determinare  $R$  proiettiamo la (1) sul piano normale in  $P$  alla traiettoria, si ha:

$$m A_n = F_n + R$$

$$\text{da cui: } R = m A_n - F_n \quad . \quad (7)$$

Nel caso particolare in cui  $F$  è tangente alla traiettoria, o nulla, risulta:

$$F_n = 0 \quad \text{e quindi:} \quad R = m A_n.$$

Osserviamo che nella (7) tutto è noto all'infuori di  $R$ ; infatti, la massa  $m$  è data, ed  $A_n$  è conosciuta essendo nota  $s$ .

Più particolarmente, sia:  $F=0$ ; risulterà allora:

$$F_n = 0 \quad \text{e} \quad F_t = 0,$$

$$\text{e sarà perciò:} \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = 0,$$

da cui, integrando:

$$m \frac{ds}{dt} = C$$

ed infine, moltiplicando per  $dt$  ambo i membri, ed integrando ancora una volta:

$$m s = Ct + \text{cost.} \quad ; \quad (8)$$

risulta, cioè, s funzione lineare del tempo e, quindi, la velocità è costante ed uguale a  $C$ . - La costante additiva che compare nell'integrale (8) dipende dalla lunghezza dell'arco che porta, dall'origine degli archi, alla posizione del punto all'origine dei tempi. Per  $R$ , in questo caso, si trova il valore:

$$R = m A_n ,$$

ed essendo  $|A_n| = \frac{v^2}{g}$  (vedi pag. 52), risulta:

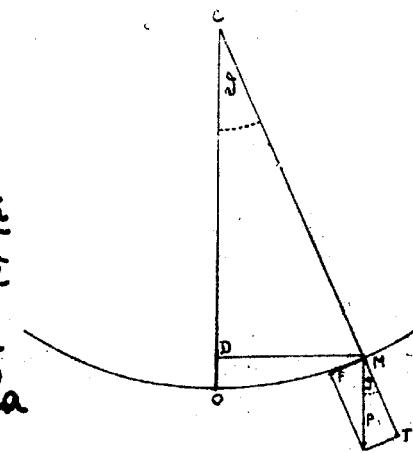
$$R = m \frac{v^2}{g} .$$

In questo caso la reazione vincolare prende il nome di forza centripeta.

### Pendolo semplice. -

Si chiama pendolo qualunque corpo soggetto alla sola azione del suo peso e girevole attorno ad un punto o ad un asse orizzontale superiore al suo centro di gravità; ci limitiamo, per ora, a considerare il pendolo semplice, che, in una schematica idealizzazione, può riguardarsi costituito da un punto materiale  $O$ , attaccato ad un filo,  $CO$ , inestensibile e senza peso.

La posizione di  $O$  (di cui indichiamo con  $m$  la massa) è determinata quando si conosca l'arco  $s$ , contato a partire dalla



posizione più bassa. Detta  $l$  la lunghezza del pendolo, l'angolo  $\alpha$  di cui esso è spostato rispetto alla posizione d'equilibrio, avremo:

$$\alpha = -\frac{s}{l}$$

dove  $s$  è l'arco di traiettoria corrispondente all'angolo  $\alpha$ . Scegliamo, inoltre, come verso positivo degli archi quello che va da sinistra a destra. Proiettiamo, poi, la forza,  $P = mg$ , agente sul punto, sulla tangente alla traiettoria in  $O$ ; otterremo, notando che l'angolo, formato dalle direzioni positive della forza e della tangente, è il complemento di  $\alpha$ :

$$P_t = -mg \sin \alpha = -mg \sin \frac{s}{l} ,$$

e dovranno essere:

$$P_t = m \ddot{s} ,$$

risulterà:

$$-mg \sin \frac{s}{l} = m \ddot{s} ;$$

oppure, dividendo per  $m$  e portando tutto a primo membro:

$$\ddot{s} + g \sin \frac{s}{l} = 0 \quad (1)$$

Questa equazione differenziale si integra con le funzioni ellittiche; se, però, le oscillazioni sono di ampiezza così piccola, da poter sostituire, senza apprezzabile errore, al seno di  $\alpha$  l'arco corrispondente, la (1) diventa:

$$\ddot{s} + g \frac{s}{l} = 0 .$$

Questa equazione ammette un integrale generale del tipo:

$$s = A \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha)$$

con  $\alpha$  costante di fase. Se il punto si trova, per  $t=0$ , all'estremo della sua oscillazione, risulta:

$$\alpha = 0 .$$

Per il periodo si avrà:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\pi$$

onde:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Per la frequenza  $v$ , infine:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

Osserviamo come, in queste espressioni del periodo e della frequenza, non figuri l'ampiezza delle oscillazioni, il che è vero in prima approssimazione; però, nel caso di oscillazioni assai grandi, il periodo e, conseguentemente, la frequenza, dipendono dall'ampiezza dell'oscillazioni medesime.

Dalla (2), elevando al quadrato:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

da cui ottieniamo:

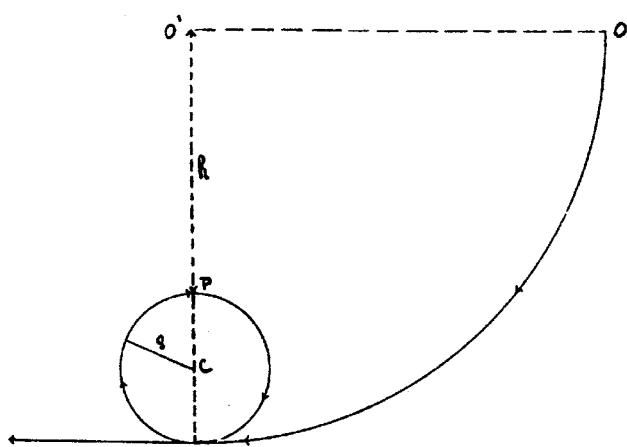
$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} ,$$

formula, questa, di cui ci si serve, nella pratica per determinare l'accelerazione di gravità  $g$ .

## Vincoli unilaterali.-

Sono vincoli unilaterali quelli che esercitano una reazione diretta in un solo senso; l'esempio più semplice è quello che si presenta nel considerare il moto di un punto obbligato a muoversi da una sola banda di una superficie senza poterla attraversare.

Esempio.- A titolo di esempio immaginiamo una pista del tipo più sotto riprodotto, su cui, da una certa altezza si faccia scorrere un punto di massa  $m$ .



La variazione di energia cinetica, subita dal punto nel passare dalla posizione iniziale  $O$ , alla posizione  $P$ , ci è data (essendo la velocità

iniziale nulla) da :

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1)$$

essendo  $v$  la velocità del mobile, ed  $h$  la differenza fra le altezze di  $O$  e di  $P$ . -

Per la  $R$ , reazione del vincolo, abbiamo :

$$(2) \quad R = m A_n - F_n = m \frac{v^2}{R} - mg.$$

La (1) ci dà :

$$m v^2 = 2 m g h,$$

e sostituendo nella (2), avremo :

$$R = 2 \frac{mg h}{g} - mg .$$

Osserviamo, ora, che la pista può esercitare sul corpo una reazione diretta solo verso di esso;  $R$  deve, dunque, essere positiva se non si vuole che il mobile abbandoni la pista. Dovrà, dunque, essere:

$$2 \frac{mg h}{g} - mg > 0 ,$$

ovvero, dividendo per  $mg$ :

$$\frac{2h}{g} - 1 > 0 ,$$

da cui, infine:

$$\frac{2h}{g} > 1 ;$$

eppero dovrà essere:  $h > \frac{g}{2}$ .

Concludendo, affinché il mobile percorra la pista senza abbandonarla, bisognerà che sia  $\overline{OP}$  maggiore di  $\frac{g}{2}$ .

---

Moto di un punto vincolato a muoversi su di una superficie. -

- Consideriamo, ora, il moto di un punto vincolato a muoversi su di una superficie. Supponiamo l'equazione di questa risolta rispetto a  $z$ ; sarà allora:

$$z = z(x, y) ,$$

e, quindi, per determinare il moto basterà conoscere due sole coordinate del punto.

Anche qui supporremo  $R$  normale alla super-

ficie. Al solito, l'equazione del moto assumerà la forma :

$$m A = F + R , \quad (1)$$

equazione vettoriale che servirà a determinare la  $x$  e la  $y$ , nonché la grandezza di  $R$  (essendone già nota la direzione). Anzitutto, per eliminare  $R$ , proiettiamo la (1) sul piano tangente nel punto alla superficie, ottenendo così :

$$m A_t = F_t .$$

Questa è un'equazione vettoriale; dalle due scalari che essa rappresenta, potremo ricavare  $x$  ed  $y$  in funzione del Tempo. Proiettando, poi, la (1) stessa sulla normale alla superficie, si ha :

$$m A_n = F_n + R ,$$

da cui, per  $R$ , si ottiene :

$$R = m A_n - F_n .$$

Notiamo, ora, che, essendo  $R$  normale alla superficie (o alla linea) nel punto, e quindi normale alla direzione della velocità, il lavoro compiuto dalla  $R$  medesima sul mobile è nullo; quindi, anche nel caso di un punto vincolato, varrà la relazione :

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{1}{2} m v_e^2 = L.$$

dove  $L$  è il lavoro della forza direttamente applicata. Se poi è :  $F = 0$ , risulta :

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 ,$$

cioè: l'energia cinetica del mobile, e quindi la grandezza della sua velocità, rimane costante.

Nel caso che sia  $F = 0$ , il punto si muove soltanto sotto l'azione di  $R$ . Si ha dunque:

$$m A = R .$$

Ora si sa, dalla cinematica, che A è contenuto nel piano osculatore della traiettoria; siccome R è normale alla superficie, si trova, dunque, per la traiettoria la proprietà geometrica che il suo piano osculatore è normale alla superficie.

Questa proprietà è caratteristica delle cosiddette linee geodetiche della superficie, e si può dimostrare che le geodetiche segnano le linee di minimo percorso tra due punti della superficie medesima.

# ~~~~~ STATICA ~~~~~

DEL

# ~~ P U N T O ~~

Cerchiamo la condizione perché un punto libero sia in equilibrio.

Diciamo che una certa posizione è posizione di equilibrio, quando il punto, posto fermo in essa non si muove. La velocità del punto sarà

nulla e nulla, quindi l'accelerazione. L'equazione fondamentale della dinamica ci dà allora:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0},$$

che ci rappresenta la condizione di equilibrio cercata: per l'equilibrio deve annullarsi la forza totale agente sul punto.

Supponiamo, ora, che sia data la forza,  $\mathbf{F}$ , agente sul punto, e che essa sia funzione delle coordinate di esso:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{cases} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{cases}.$$

Per trovare la posizione (o le posizioni) d'equilibrio del punto, dobbiamo eguagliare a zero  $\mathbf{F}$ . Avremo così:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{cases} F_x(x, y, z) = 0 \\ F_y(x, y, z) = 0 \\ F_z(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

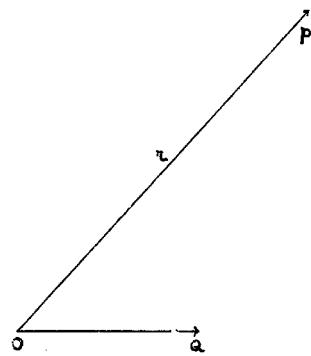
Questo sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $x, y, z$ , ci darà, se esistono, le posizioni di equilibrio che possono essere in numero finito od, anche, infinito.

### Equilibrio stabile e instabile.

- Se  $P_0$  è una posizione di equilibrio, supponendo di porre il punto materiale non esattamente in  $P_0$ , ma in una posizione infinitamente vicina

na, e non con velocità nulla, bensì infinitesima, diciamo che  $P_0$  è posizione di equilibrio stabile se il mobile si muove sempre in un intorno sufficientemente piccolo di  $P_0$ ; se, invece, il punto si allontana sempre più, diciamo che  $P_0$  è posizione di equilibrio instabile.

Consideriamo, ad esempio, un punto materiale soggetto all'azione di una forza centrale: sappiamo che la grandezza di detta forza è funzione della distanza,  $\bar{OP}$ , del punto dal centro,  $O$ , del moto. Scelto come verso positivo quello che va da  $O$  verso  $P$ , e detta  $k$  una conveniente costante, a seconda che la forza,  $F$ , sia attrattiva o repulsiva, avremo, rispettivamente:



$$F = -kr \quad \text{e} \quad F = kr$$

dove è:  $r = \bar{OP}$ .

Immaginiamo, ora, di porre il punto materiale in una posizione  $Q$ , infinitamente vicina ad  $O$ , con velocità infinitesima  $V_a$ . Se la forza è attrattiva, cioè data da:  $F = -kr$ , sappiamo che il punto descrive un ellisse (in questo caso infinitesima anch'essa) col centro in  $O$ . Se, invece, posto il punto, come precedentemente, in  $Q$  colla medesima velocità  $V_a$ , e la forza agente è la:  $F = kr$ , cioè repulsiva, il punto materiale si allontana sempre più da  $O$ . Nel primo caso l'equi-

ilibrio è stabile, nel secondo instabile. In O, il punto materiale è sempre in posizione di equilibrio stabile, anche se la forza è repulsiva, perché, essendo in questo caso:  $F = kr$ , il secondo membro si annulla con  $r$ .

Se la forza agente sul punto ammette potenziale, rappresentato, quest'ultimo, dalla funzione:

$$U = U(x, y, z),$$

sappiamo che le componenti della forza sono:

$$\begin{cases} F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Se il punto si trova in posizione di equilibrio, essendo allora:  $F = 0$ , sarà:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Queste equazioni coincidono formalmente con quelle per la ricerca dei massimi e dei minimi della funzione  $U$ .

Ora, si può dimostrare che un punto materiale posto in una posizione in cui il potenziale è massimo, si trova in equilibrio stabile.

Facciamo, dunque, l'ipotesi che in un punto, O, il

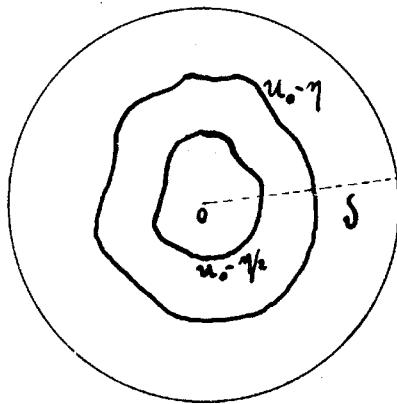
potenziale, abbia un massimo; vogliamo dimostrare che, in quella posizione, il punto materiale si trova in equilibrio stabile. Per dimostrarlo bisogna far vedere che, preso  $S$  piccolo a piacere, si può determinare un intorno di  $O$  e una velocità  $V_0$ , tali che, lasciando il mobile in un punto del detto intorno, con velocità iniziale minore di  $V_0$ , esso non si allontani da  $O$  di una distanza maggiore di  $S$ . Osserviamo ora che, siccome  $U$  ha un massimo in  $O$ , le superfici equipotenziali su cui  $U$  ha un valore minore di  $U_0$  circondano il punto  $O$  e si vanno restringendo fino a riunirsi nel punto stesso, quando il potenziale diventa eguale ad  $U_0$ .

Scegliamo, ora, una superficie equipotenziale tale che su di essa  $U$  abbia il valore:  $U_0 - \eta$ , essendosi preso per  $\eta$  un valore tale che la superficie suddetta risulti interna alla sfera di raggio  $S$ . Consideriamo, poi, la superficie equipotenziale su cui è:  $U = U_0 - \frac{\eta}{2}$ ; evidentemente essa risulterà interna alla superficie precedentemente considerata, e, quindi, interna alla sfera di raggio  $S$ .

Passiamo, ora, a determinare  $V_0$  (limite superiore delle velocità da imprimersi al mobile) in modo che sia:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{\eta}{2},$$

e poniamo, inizialmente, il punto materiale



in una posizione  $P_i$ , interna alla superficie  $U_0 - \frac{1}{2}\eta$ , con velocità iniziale:  $V_i < V_0$ , Tale che sia:

$$\frac{1}{2}mV_i^2 < \frac{1}{2}\eta. \quad (1)$$

In questa posizione il potenziale,  $U_i$ , risulterà tale da essere:

$$U_i > U_0 - \frac{1}{2}\eta. \quad (2)$$

Cambiando segno alla (2) e sommandola membro a membro con la (1), otteniamo:

$$\frac{1}{2}mV_i^2 - U_i < -U_0 + \eta. \quad (3)$$

Ma sappiamo che la somma delle energie cinetica e potenziale deve rimanere costante; in un tempo qualsiasi sarà dunque:

$$\frac{1}{2}mV^2 - U = \frac{1}{2}mV_i^2 - U_i. \quad (4)$$

Tenendo conto della (3), la (4) precedente diventa:

$$\frac{1}{2}mV^2 - U < -U_0 + \eta,$$

e, a fortiori, sopprimendo nel primo termine del la diseguaglianza precedente:  $\frac{1}{2}mV^2$ , che è positivo, risulterà

$$-U < -U_0 + \eta,$$

e, infine, cambiando segno:

$$U > U_0 - \eta. \quad (5)$$

La diseguaglianza (5) deve valere per qualsiasi posizione del mobile; ammettendo, quindi, che questo possa uscire dalla superficie equipotenziale

ziale  $U_0 - \eta$ , nell'istante in cui esso la attraversa, risulterebbe:

$$U = U_0 - \eta ,$$

ed essendo impossibile la coesistenza di quest'ultima e della (5), concludiamo essere assurda l'ipotesi che il mobile possa uscire dalla superficie  $U_0 - \eta$ , e, a maggior ragione, dalla sfera di raggio  $s$  prefissato.

Resta quindi dimostrato che la posizione  $O$ , in cui  $U$  è massimo (e, quindi, è minima l'energia potenziale) è posizione di equilibrio stabile.

## Equilibrio

di un punto vincolato.

Analogamente a quanto si è fatto per un punto libero, studiamo, ora, le condizioni d'equilibrio di un punto vincolato.

In questo caso, sul mobile, oltre alla forza  $F$  data in funzione della posizione di esso, agisce la reazione vincolare  $R$  che, come già sappiamo, è normale alla traiettoria.

Per l'equilibrio dovrà, dunque, essere:

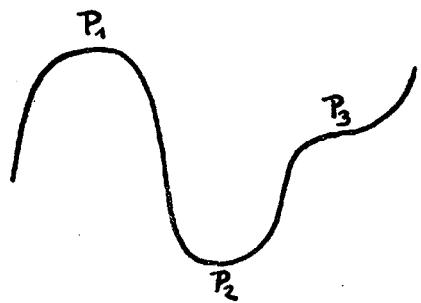
$$F + R = 0 , \quad (1)$$

cioè,  $F$  ed  $R$  debbono avere eguali la grandezza e la direzione, e opposto il senso. Dovrà, quindi, anche  $F$  essere normale alla traiettoria.

Se si verifica l'equilibrio, noto  $F$ , dalla (1) si può determinare  $R$ , e viceversa.

Analoghe considerazioni valgono per un punto vincolato a muoversi su di una superficie.

Nel caso di un punto materiale soggetto alla forza peso, e vincolato a muoversi su di una traiettoria, esso si trova in equilibrio in quei punti della superficie, o linea, in cui il piano tangente, o la tangente, è orizzontale.



In tali punti, infatti, la

forza peso, che è diretta verticalmente, risulta normale alla traiettoria. Nei punti di massimo della traiettoria ( $P_1$ , p. es.) l'equilibrio è instabile, nei punti di minimo ( $P_2$ ) stabile. Infatti, nel primo caso, spostando, pur minimamente, il mobile dalla posizione di equilibrio, esso, cadendo, se ne allontana definitivamente; nel secondo, invece, spostando il punto materiale, entro un conveniente intorno, dalla posizione di equilibrio, con velocità sufficientemente piccola, esso descrive, attorno a detta, posizione, oscillazioni di grandezza finita.

Nei punti di flesso ( $P_3$ , p. es.), ove il piano Tangente, o la tangente, è orizzontale, si hanno posizioni di equilibrio instabile. -

## ~Sosizioni S'equilibrio indifferente.~

Se avviene che tutti i punti, nell'intorno di una posizione di equilibrio, siano ancor essi posizioni d'equilibrio, si dice che questi punti sono posizioni di equilibrio indifferente.

Per la forza peso, ad esempio, sono posizioni di equilibrio indifferente tutti i punti di un piano orizzontale.

## ~~DINAMICA~~ DEI SISTEMI

In modo analogo allo studio della dinamica del punto, consideriamo, ora, la dinamica dei sistemi. Nel caso più generale, supponiamo che il sistema dato sia costituito da  $n$  punti,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , e limitandoci, per brevità, a considerare solo uno di essi,  $P_1$ , p. es., proponiamoci di determinare le forze agenti su di esso. Queste forze si possono dividere in due gruppi: forze esterne e forze interne. Le prime sono quelle esercitate da cause esterne su tutti i punti del sistema; le seconde, invece, sono quelle che gli altri punti del sistema esercitano sul punto considerato. Ad esempio, nel caso di due punti materiali carichi di elettricità, la forza esterna è rappresen-

Tata dal peso che agisce su di essi ; la forza interna è , invece , la forza Coulombiana , attrattiva o repulsiva , che i punti esercitano tra loro .

In conclusione , potremo supporre applicate , ad ogni punto ,  $P_h$  , del sistema , due forze :  $F_{h,i}$  ed  $F_{h,e}$  , rispettivamente , risultante delle forze interne e risultante delle forze esterne che agiscono sul punto .

Per ciò che riguarda la prima di queste forze , per ciascuno degli  $n$  punti del sistema , essa ci sarà data , rispettivamente dalle somme :

$$F_{1,i} = F_{1,2} + F_{1,3} + \dots + F_{1,n}$$

$$F_{2,i} = F_{2,1} + F_{2,3} + \dots + F_{2,n}$$

.....

$$F_{n,i} = F_{n,1} + F_{n,2} + \dots + F_{n,n-1},$$

dove  $F_{h,h}$  indica la forza agente su  $P_h$  per effetto di  $P_h$  .

Facciamo l'ipotesi , che realmente si verifica in tutte le applicazioni della fisica , che le forze  $F_{h,h}$  ed  $F_{k,h}$  abbiano direzione comune secondo la congiungente i punti  $P_h$  e  $P_k$  , e quale la grandezza e , quanto al senso , poi ,  $F_{h,h}$  sia diretta da  $P_h$  verso  $P_h$  ed  $F_{k,h}$  da  $P_h$  a  $P_h$  .

Vediamo , ora , come si determina la posizione degli  $n$  punti : bisognerà dare le coordinate di ciascuno di essi in funzione del tempo . In Totale , dunque , occorrono  $3n$  condizioni . Notando poi che  $F_h$  , risultante di tutte le forze , interne ed

esterne, agenti su  $P_h$ , ci è dato da:

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{F}_{h,e} + \mathbf{F}_{h,i} = \mathbf{F}_{h,e} + \mathbf{F}_{h,1} + \mathbf{F}_{h,2} + \dots + \mathbf{F}_{h,n},$$

le equazioni del moto degli  $n$  punti (con evidente significato dei simboli) saranno:

$$(1) \quad \begin{aligned} m_1 \mathbf{A}_1 &= \mathbf{F}_{1,e} + \mathbf{F}_{1,i} \\ m_2 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{F}_{2,e} + \mathbf{F}_{2,i} \\ &\dots \\ m_n \mathbf{A}_n &= \mathbf{F}_{n,e} + \mathbf{F}_{n,i} \end{aligned}$$

Queste  $n$  equazioni vettoriali ne rappresentano 3n scalari. - Proiettando le (1) sull'asse  $x$  avremo:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_{1,e_x} + F_{1,i_x} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_{2,e_x} + F_{2,i_x} \\ &\dots \\ m_n \ddot{x}_n &= F_{n,e_x} + F_{n,i_x} \end{aligned}$$

ed avremo ancora altre 2n espressioni analoghe proiettando le (1) sull'asse  $y$  e sull'asse  $z$ .

In Totale, dunque, otterremo 3n equazioni differenziali costituenti un sistema, da cui si potranno ricavare le 3n coordinate in funzione del Tempo e di 6n costanti arbitrarie. Ovvero, dunque:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) \\ y_1 &= y_1(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) \\ z_1 &= z_1(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}) \\ &\dots \end{aligned}$$

(2)

$$x_n = x_n(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n})$$

$$y_n = y_n(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n})$$

$$z_n = z_n(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n})$$

Per determinare le  $6n$  costanti, debbono, al solito esser note  $6n$  condizioni iniziali. Se, ad esempio, per  $t = t_0$ , è:

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_{1,0}, \quad y_1 = y_{1,0}, \quad z_1 = z_{1,0} \\ x_2 &= x_{2,0}, \quad y_2 = y_{2,0}, \quad z_2 = z_{2,0} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= x_{n,0}, \quad y_n = y_{n,0}, \quad z_n = z_{n,0}, \end{aligned}$$

ed:

$$(4) \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_{1,0}, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_{1,0}, \quad \dot{z}_1 = \dot{z}_{1,0}, \dots, \dots, \dots, \dot{z}_n = \dot{z}_{n,0};$$

sostituendo nelle (2) i valori forniti dalle (3) e ponendo:  $t = t_0$ ; derivando le (2) medesime ponendovi ancora:  $t = t_0$ , e sostituendovi i valori dati dalle (4), si ottiene, infine, un sistema di  $6n$  equazioni nelle  $6n$  incognite  $C_1, C_2, \dots, C_{6n}$ , che possono così essere determinate.

Le  $6n$  condizioni iniziali possono essere date anche in altro modo, ad esempio, dando, per due distinti valori del tempo, le corrispondenti coordinate di ciascuno degli  $n$  punti del sistema.

### Risultante delle forze di un sistema.

- Il risultante delle forze di un sistema (somma vettoriale delle forze) ci è dato da:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n;$$

e, tenendo presente che è :

$$\vec{F}_k = \vec{F}_{k,e} + \vec{F}_{k,i}$$

avremo :

$$\vec{R} = \vec{F}_{1,e} + \vec{F}_{2,e} + \dots + \vec{F}_{n,e} + \vec{F}_{1,i} + \dots + \vec{F}_{n,i} = \vec{R}_e + \vec{R}_i$$

dove  $\vec{R}_e$  ed  $\vec{R}_i$  sono, rispettivamente, il risultante delle forze esterne e il risultante delle forze interne.  
Togliamo dimostrare che è :

$$\vec{R}_i = 0$$

Infatti è :

$$\vec{R}_i = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \dots + \vec{F}_{1,n} + \dots + \vec{F}_{2,1} + \dots + \vec{F}_{n,n-1},$$

e si può verificare immediatamente che tale somma è formata di termini che si elidono a due a due, poiché è :  $\vec{F}_{k,k} + \vec{F}_{k,k} = 0$ .

Concludiamo, quindi, che il risultante delle forze di un sistema, si identifica col solo risultante delle forze esterne.

### Quantità di moto e impulso nei sistemi.

- Riprendiamo le equazioni del moto degli  $n$  punti di un sistema:

$$m_1 \vec{A}_1 = \vec{F}_{1,e} + \vec{F}_{1,i}$$

$$m_2 \vec{A}_2 = \vec{F}_{2,e} + \vec{F}_{2,i}$$

.....

$$m_n \vec{A}_n = \vec{F}_{n,e} + \vec{F}_{n,i}$$

e sommiamole membro a membro; otterremo:

$$m_1 \vec{A}_1 + m_2 \vec{A}_2 + \dots + m_n \vec{A}_n = \vec{R}_e$$

ovvero, identicamente:

$$m_1 \frac{dV_1}{dt} + m_2 \frac{dV_2}{dt} + \dots + m_n \frac{dV_n}{dt} = R_e ;$$

e poiché le masse sono costanti, potremo scrivere la precedente:

$$\frac{d}{dt} (m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_n V_n) = R_e .$$

L'espressione tra parentesi rappresenta, evidentemente, la quantità di moto del sistema e, indicando questa con  $\vec{q}$ , avremo:

$$(5) \quad \frac{dq}{dt} = R_e ,$$

espressione, questa, che, integrata tra due valori,  $t_1$  e  $t_2$ , del tempo, ci dà:

$$q_2 - q_1 = \int_{t_1}^{t_2} R_e dt .$$

Questa ultima espressione è analoga a quella trovata nel caso di un sol punto materiale; potremo, quindi, anche per i sistemi, concludere che la variazione della quantità di moto è uguale all'impulso del risultante delle forze esterne.

Nel caso in cui tutte le forze esterne siano nulle, sarà:

$$R_e = 0 ,$$

e quindi:

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{da cui: } q = \text{cost.}$$

La variazione della quantità di moto di un sis.

- Terna rimane costante al variare del Tempo.

In ciò consiste il Teorema della conservazione delle quantità di moto.

## ~Centro di gravità.~

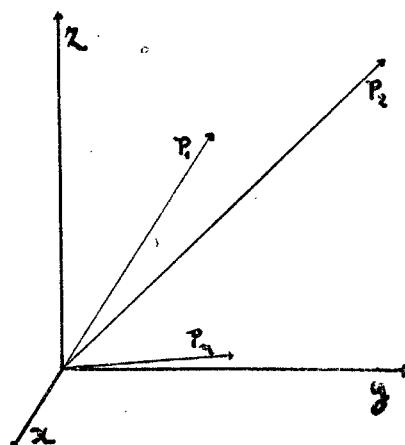
- Dato un sistema discreto costituito di  $n$  punti:  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , le cui coordinate sono:

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ , rispettivamente, e le cui masse sono:  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ; si definisce centro di gravità del sistema un punto,  $P_0$ , le cui coordinate,  $x_0, y_0, z_0$ , sono date dalle relazioni:

$$P_0 = \begin{cases} x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ z_0 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

Oltre alla precedente definizione scalare, se ne può dare anche una vettoriale.

A tal scopo, scelta la solita terna cartesiana di riferimento, considerando il vettore  $(P_0 - O)$ , che unisce il centro di gravità con l'origine degli assi, ed i vettori:  $(P_1 - O)$ ,  $(P_2 - O) \dots (P_n - O)$ , definiremo, in modo analogo a quanto si è fatto scalarmente, centro di



gravità quel punto,  $P_0$ , Tale che il suo raggio vettore,  $(P_0 - O)$ , sia dato dall'espressione:

$$(P_0 - O) = \frac{m_1(P_1 - O) + m_2(P_2 - O) + \dots + m_n(P_n - O)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (1),$$

che si può, più brevemente, scrivere:

$$(P_0 - O) = \frac{\sum m_i (P_i - O)}{\sum m_i}.$$

Vogliamo, ora, dimostrare come l'arbitrarietà della scelta del punto  $O$  di riferimento, non influisca affatto sulla determinazione del centro di gravità, il quale risulta, quindi, una proprietà geometrica del sistema considerato, indipendente dal riferimento.

Supponiamo, infatti, di riferirci ad un nuovo punto  $O'$ , e sia  $P_0$  la nuova posizione trovata per il centro di gravità. Avremo:

$$(P_0 - O') = \frac{m_1(P_1 - O') + m_2(P_2 - O') + \dots + m_n(P_n - O')}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (2)$$

Sottraendo, membro a membro, la (2) dalla (1), ottieniamo:

$$(P_0 - P_0') + (O' - O) = \frac{m_1(O' - O) + m_2(O' - O) + \dots + m_n(O' - O)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Raccogliendo, nel secondo membro,  $(O' - O)$  in fattor comune, si ha:

$$(P_0 - P_0') + (O' - O) = (O' - O) \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = (O' - O)$$

da cui, infine, sopprimendo nel primo e Terzo membro della precedente espressione il termine  $(O' - O)$ :

$$(P_0 - P_0') = 0 .$$

Concludiamo, quindi, che  $P_0$  e  $P_0'$  coincidono.

### Centro di gravità di un sistema continuo.

- Estendiamo, ora, il concetto di centro di gravità ad un sistema continuo, sistema che potrà essere esteso in volume, in superficie, o linearmente.

Vediamo, anzitutto, cosa s'intenda, in ciascuno di questi tre casi, per densità.

Per un sistema esteso in volume, consideriamo un elemento infinitesimo di volume,  $\tau$ , e detta  $m$  la massa in esso contenuta, facciamo il rapporto:  $\frac{m}{\tau}$ , e consideriamone il limite per  $\tau \rightarrow 0$ . Avremo:

$$(1) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m}{\tau} = \frac{dm}{d\tau} = \varrho \quad (\text{densità}) ;$$

cioè, definiscasi densità di volume il limite (determinato e finito) del rapporto tra la massa ed il corrispondente volume quando quest'ultimo tenda a zero.

Dalla (1) ricaviamo immediatamente:

$$dm = \varrho d\tau .$$

Se il sistema non è omogeneo, integreremo la precedente espressione, estendendo l'integrale al volume del sistema stesso, ed avremo così la sua massa totale. Se il sistema, invece, è omogeneo ed è, quindi;  $\varrho = \text{cost.}$ , la sua massa ci sarà data,

senz'altro , dal prodotto della densità per il volume.  
Per un sistema esteso in superficie consideremo un elemento infinitesimo ,  $\delta$  , di questa e , in modo analogo al caso precedente , avremo :

$$\frac{dm}{d\delta} = \rho \quad \text{e} \quad dm = \rho d\delta .$$

Per un sistema filiforme , infine :

$$\frac{dm}{dl} = \rho \quad \text{e} \quad dm = \rho dl$$

dove  $dl$  rappresenta un elemento infinitesimo della lunghezza.

Per la massa totale di un corpo esteso in volume, in superficie , o linearmente , avremo , rispettivamente , i tre integrali :

$$m_v = \int \rho dx \quad ; \quad m_s = \int \rho d\delta \quad ; \quad m_l = \int \rho dl .$$

Il primo di questi è un integrale triplo , ed è precisamente :

$$m_v = \iiint \rho dx dy dz ;$$

il secondo è un integrale doppio ed il terzo è un integrale semplice .

Tenendo conto delle formule ora stabilite , per le coordinate del centro di gravità di un sistema esteso in volume avremo :

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho x dx}{\int \rho dx}$$

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\int \rho y dx}{\int \rho dx}$$

$$z_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\int g z d\tau}{\int g d\tau}$$

Per le coordinate del centro di gravità di un sistema esteso in superficie:

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\int g x d\delta}{\int g d\delta}$$

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\int g y d\delta}{\int g d\delta}$$

Infine, nel caso di un sistema esteso linearmente:

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\int g x dl}{\int g dl}$$

Vettorialmente, per un sistema, ad esempio, esteso in volume, si avrà:

$$(P_0 - O) = \frac{\sum m_i (P_i - O)}{\sum m_i} = \frac{\int g (P - O) d\tau}{\int g d\tau}$$

Se il sistema è omogeneo,  $g$  è costante quindi la si potrà portar fuori del segno di integrale, risulterà cioè:

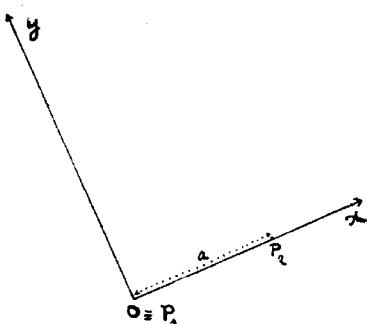
$$(P_0 - O) = \frac{g}{\sum m_i} \frac{\int (P - O) d\tau}{\int d\tau} = \frac{\int (P - O) d\tau}{\int d\tau};$$

si riconosce così come la posizione del centro di gravità dipenda unicamente dalle proprietà geometriche del sistema e non dalla sua densità. Analogamente per sistemi omogenei estesi in superficie o linee

-armente . .

### Determinazione del centro di gravità di alcuni speciali sistemi .-

Consideriamo, dapprima, il caso più semplice in cui i punti del sistema si riducono a due. Siccome la posizione del centro di gravità non dipende dalla scelta del sistema d'assi, adottiamo come origine di questo uno dei punti del sistema, e come asse delle ascisse la retta passante per l'altro punto. I due punti avranno le coordinate:



$$\begin{cases} P_1 \equiv (0, 0, 0) \\ P_2 \equiv (a, 0, 0) \end{cases} .$$

Applicando le formule che danno il centro di gravità, otteniamo:

$$G \equiv \begin{cases} x_0 = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dove  $m_1$  ed  $m_2$  rappresentano, rispettivamente, le masse di  $P_1$  e  $P_2$ . Il centro di gravità giace, quindi, sul la congiungente i due punti, e la sua distanza da  $P_1$  (quando si sia scelto tale punto come origine degli assi) ci è data dalla (1). La distanza da  $P_2$ , in questo caso, sarà dunque:

$$a - \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2} ,$$

e facendo il rapporto fra queste due distanze:

$$\frac{\overline{G P_1}}{\overline{G P_2}} = \frac{m_2}{m_1} .$$

La distanza, dunque, del centro di gravità dai due punti è in ragione inversa delle loro masse.

Consideriamo, ora, in generale, un sistema di punti in numero qualunque. Per determinare il centro di gravità,  $G$ , del sistema, divideremo questo in  $\alpha$  sistemi parziali di  $n_i$  punti ciascuno. Di ciascun sistema parziale troviamo il centro di gravità, e ad ognuno di questi centri attribuiamo una massa eguale alla somma delle masse proprie dei punti del sistema parziale.

Ovremo dunque un nuovo sistema formato dagli  $\alpha$  centri di gravità. Ci proponiamo di dimostrare che il centro di gravità di questo sistema coincide con quello del primitivo. Indichiamo un punto del sistema dato con due indici, il primo relativo al sistema parziale cui il punto appartiene, il secondo indicante il numero d'ordine del punto nel sistema parziale stesso; sia, poi,  $G_i$  il centro di gravità del sistema parziale  $i$ -esimo:

$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	.....	$P_{1,n_1}$	$G_1$
$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	.....	$P_{2,n_2}$	$G_2$
.....	.....	.....	.....	.....
$P_{\alpha,1}$	$P_{\alpha,2}$	.....	$P_{\alpha,n_\alpha}$	$G_\alpha$

Consideriamo ora, ad esempio il primo sistema parziale. Le masse degli  $n_1$  punti di esso sono:

$m_{1,1} \quad m_{1,2} \quad \dots \quad m_{1,n_1}$ ,  
dovremo quindi attribuire a  $G_1$  una massa  $m_1$  data dalla somma:

$$m_{1,1} + m_{1,2} + \dots + m_{1,n_1} = m_1.$$

Analoghe considerazioni valgono per gli altri sistemi parziali.

Poiché si vuol dimostrare che il centro di gravità,  $G$ , del sistema  $G_1, G_2, \dots, G_d$ , coincide con quello del sistema dato, osserviamo che le coordinate,  $x_{G_1}, x_{G_2}, \dots, x_{G_d}$ , dei centri di gravità parziali ci son date, rispettivamente dalle relazioni:

$$x_{G_1} = \frac{m_{1,1}x_{1,1} + m_{1,2}x_{1,2} + \dots + m_{1,n_1}x_{1,n_1}}{m_{1,1} + m_{1,2} + \dots + m_{1,n_1}}$$

$$(1) \quad x_{G_2} = \frac{m_{2,1}x_{2,1} + m_{2,2}x_{2,2} + \dots + m_{2,n_2}x_{2,n_2}}{m_{2,1} + m_{2,2} + \dots + m_{2,n_2}}$$

..... .....

$$x_{G_d} = \frac{m_{d,1}x_{d,1} + m_{d,2}x_{d,2} + \dots + m_{d,n_d}x_{d,n_d}}{m_{d,1} + m_{d,2} + \dots + m_{d,n_d}}$$

Il centro di gravità del sistema formato dai centri di gravità parziali avrà per coordinata secondo l'asse x:

$$x_G = \frac{m_1 x_{G_1} + m_2 x_{G_2} + \dots + m_d x_{G_d}}{M},$$

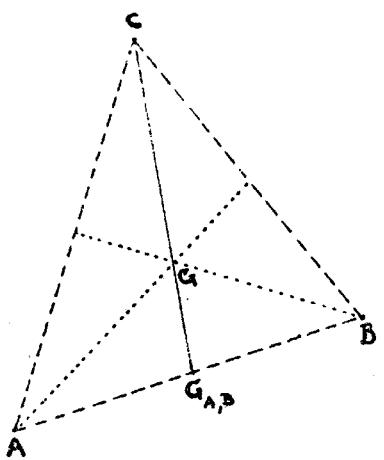
ove  $M$  è la massa totale del sistema dato. Ma per le (1) l'espressione precedente diviene:

$$x_G = \frac{m_{1,1}x_{1,1} + m_{1,2}x_{1,2} + \dots + m_{1,n_1}x_{1,n_1} + m_{2,1}x_{2,1} + m_{2,2}x_{2,2} + \dots + m_{2,n_2}x_{2,n_2} + \dots + m_{n_2}x_{n_2}}{M}$$

In questa espressione, assieme alle analoghe per  $y_G$  e  $z_G$ , coincide con quella che si ottiene quando si calcoli il centro di gravità del sistema primitivo, applicando la definizione di centro di gravità. Il nostro asserto è, così, dimostrato.

Vediamo, ora, di applicare quanto sopra ad alcuni casi concreti:

I) Sia da determinarsi il centro di gravità di un sistema costituito da tre punti, A, B, C, non allineati, supponendo (per semplicità) che sia:



$$m_A = m_B = m_C = 1$$

Scomponiamo il sistema dato in due sistemi parziali, dei quali il primo costituito, p. es., dai punti A e B, il secondo dal solo punto C.

Il centro di gravità del primo sistema parziale,  $G_{A,B}$ , come già si è visto si trova sulla congiungente i due punti e, in questo caso, ad eguale distanza da essi. La massa che dobbiamo attribuire a  $G_{A,B}$  ci è data dalla somma:

$$m_A + m_B = 2$$

Passiamo ora a determinare il centro di gravità del sistema costituito da  $G_{A,B}$  e C. Anche in questo

caso il centro di gravità si troverà sulla congiungente i due punti, ma, essendo differenti le loro masse, la sua distanza da essi sarà in ragione inversa di queste. Avremo quindi:

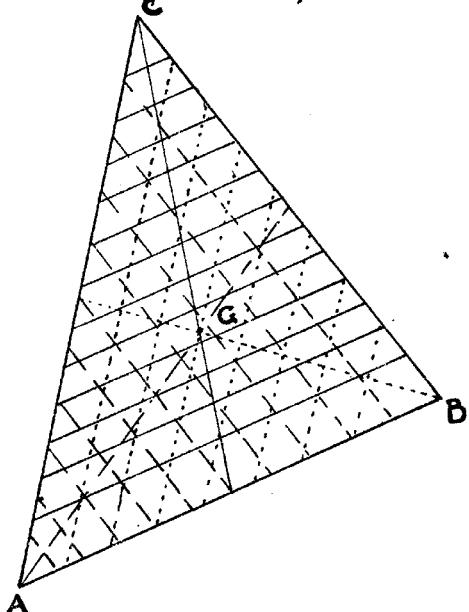
$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GC_{AB}}} = \frac{2}{1} = 2$$

La distanza, dunque, del centro di gravità  $G$  dal punto  $C$  è doppia di quella che divide  $G$  da  $C_{AB}$ . È facile riconoscere che  $G$  coincide col punto di incontro delle mediane del triangolo  $A B C$ .

## II) Centro di gravità di un triangolo omogeneo.

Vediamo come, anche in questo caso il centro di gravità si trovi nel punto di incontro delle mediane.

Dividiamo mediante rette parallele, ad esempio, al lato  $A B$ , il triangolo in tanti trapezi di altezza infinitesima, trapezi che potremo, perciò, assimilare a rettangoli della stessa altezza. Si vede come il centro di gravità di ognuno di questi rettangolini, coincida col loro centro di figura, e come tutti questi centri di gravità risultino allineati su di una medesima retta che si riconosce essere una delle mediane del triangolo. Essendo, dunque, tutti i



di gravità di ognuno di questi rettangolini, coincida col loro centro di figura, e come tutti questi centri di gravità risultino allineati su di una medesima retta che si riconosce essere una delle mediane del triangolo. Essendo, dunque, tutti i

punti del nuovo sistema, costituito dai centri di gravità dei rettangolini, allineati su di una mediana, il centro di gravità del sistema costituito da detti punti sarà situato sulla mediana medesima.

Se osserviamo che le medesime considerazioni avremmo potuto fare dividendo il Triangolo mediante rette parallele agli altri due lati, è chiaro che il centro di gravità del Triangolo si troverà nel punto d'incontro delle mediane, dovendo appartenere a ciascuna di esse.

**III)** Centro di gravità di un semicerchio omogeneo.  
Per un cerchio, evidentemente, si troverebbe come baricentro il centro stesso di figura. Per determinare, invece, il centro di gravità di un semicerchio omogeneo, procederemo come segue.

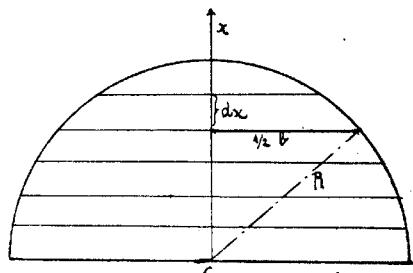
Dividiamo il semicerchio per mezzo di tante rette parallele al diametro, ponendo, per brevità, la densità eguale ad 1, ed indicando con  $dx$  l'altezza di uno dei rettangoli infinitesimi in cui il semicerchio è stato diviso.

La lunghezza della base,  $b$ , di un rettangolino generico, ci è data da:

$$b = 2 \sqrt{R^2 - x^2}$$

(dove  $R$  è il raggio del semicerchio); e, quindi, per l'area infinitesima  $dA$  di esso, avremo:

$$dA = 2 dx \sqrt{R^2 - x^2},$$



formula, questa, che, essendo unitaria la densità, ci dà anche la massa del rettangolino considerato. Osservando poi che (per la stessa ragione) la massa totale,  $M$ , del semicerchio ci è data da:

$$M = \frac{\pi}{2} R^2 ;$$

poiché, per evidenti ragioni di simmetria, il centro di gravità dovrà trovarsi sul raggio normale al diametro del semicerchio, se sceglieremo questo raggio come asse  $x$ , essendo da determinare la sola ascissa  $x_0$  (contata a partire dal centro del cerchio) del baricentro, avremo per essa:

$$x_0 = \frac{2 \int_0^R x dx \sqrt{R^2 - x^2}}{\frac{\pi}{2} R^2} .$$

Operando, nella precedente, la sostituzione:

$$R^2 - x^2 = 0 \quad \text{da cui:} \quad -2x dx = dz ,$$

essa diviene:

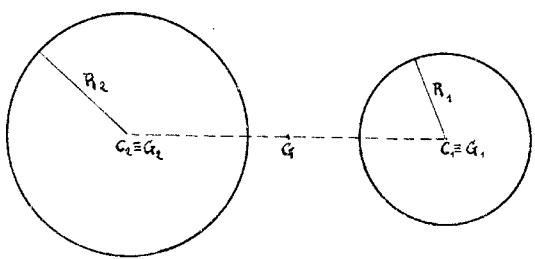
$$x_0 = -\frac{\int_0^R \sqrt{R^2 - z^2} dz}{\frac{\pi}{2} R^2} = -\frac{\left[ \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_0^R}{\frac{\pi}{2} R^2} = -\frac{\frac{2}{3} \left[ (\sqrt{R^2 - z^2})^{\frac{3}{2}} \right]_0^R}{\frac{\pi}{2} R^2} ,$$

da cui, infine:

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi}{2} R^2} = \frac{4}{3\pi} R .$$

**IV)** Sia da determinare il centro di gravità del

sistema costituito da due sfere omogenee, esterne l'una all'altra, di raggio  $R_1$  ed  $R_2$ , rispettivamente. Al solito, supponiamo che la densità sia unitaria. La massa della prima sfera sarà:



$$M_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3,$$

e quella della seconda:

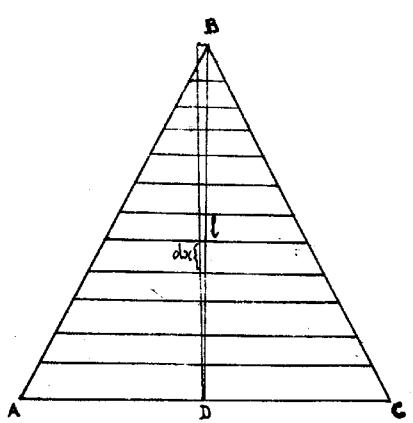
$$M_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3.$$

Scisso il sistema dato in due sistemi parziali, costituiti, ciascuno, da una delle sfere, il centro di gravità di questi sistemi coinciderà col centro della sfera, e la massa da attribuire a ciascuno dei due centri di gravità parziali sarà quella stessa della sfera corrispondente. Il centro di gravità del sistema primitivo si troverà sulla congiungente i centri di gravità parziali  $G_1$  e  $G_2$ , a distanza da essi inversamente proporzionale alle rispettive masse.

**I)** Proponiamoci di determinare il centro di gravità di un triangolo omogeneo, mediante la suddivisione in sistemi parziali.

Dividiamo il triangolo mediante rette parallele ad uno dei lati, p. es.,  $\bar{AC}$ , in tanti trapezi di altezza infinitesima e che si possono, per ciò, assimilare a dei rettangoli. Osserviamo, ora, che il centro di gravità dei rettangoli in parola

coincide col centro di figura, quindi, per evidenti proprietà geometriche, i centri di gravità risulteranno situati su di una medesima retta che è una media del triangolo. La massa, poi, da attribuire a ciascuno dei centri di gravità parziali, è data dal



prodotto della densità  $\gamma$  (costante) per l'area del rettangolino corrispondente. Indichiamo con  $x$  la distanza variabile della base di uno dei rettangoli dal vertice B, presa sulla mediana BD. L'altezza  $h$  di un rettangolino generico sarà data dal prodotto dell'incremento  $dx$  della variabile per il coseno dell'angolo che la BD forma con la normale ad AC. Essendo questo coseno eguale per tutti i rettangoli infinitesimi che si considerano, possiamo porre per l'area di uno di questi  $dA$ :

$$dA = h x dx .$$

La massa, poi, di ciascun rettangolino (supposta concentrata nel centro di gravità) è:

$$dM = \gamma dA .$$

Applicando quindi la prima delle formule che ci danno le coordinate del centro di gravità di un sistema esteso in superficie (v. pag. 163), abbiamo:

$$x_0 = \frac{\int_0^l x dA}{\int_0^l dA} = \frac{\int_0^l K x^2 dx}{\int_0^l K x dx} = \frac{\int_0^l x^2 dx}{\int_0^l x dx} = \frac{l^3/3}{l^2/2} = \frac{2}{3} l ,$$

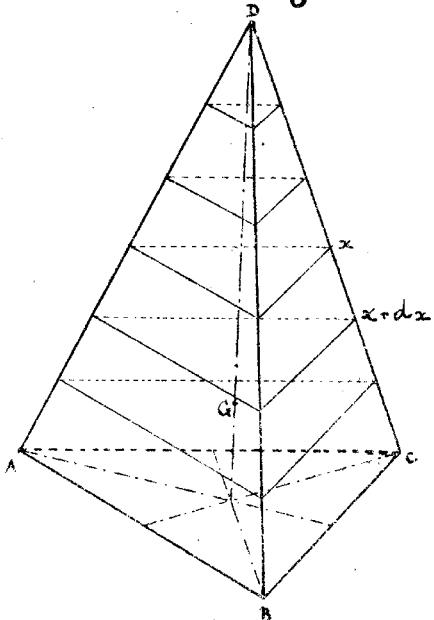
essendo indicata con  $l$  la lunghezza della mediana  $\overline{BII}$ .

Si conclude quindi che il centro di gravità di un triangolo omogeneo si trova su ogni mediana a  $\frac{2}{3}$  della sua lunghezza a partire dal vertice.

**VI)** Vediamo ora di determinare il centro di gravità di una piramide omogenea a base triangolare. Dividiamo la piramide, mediante piani paralleli alla base, in tanti solidi di altezza infinitesima. Questi piccoli prismi si potranno confondere (dato che l'altezza è infinitesima) con i triangoli base dei quali ultimi sappiamo determinare i centri di gravità che risulteranno tutti situati sulla retta che congiunge il vertice,  $D$ , della piramide col baricentro della base  $ABC$ .

La base di un prisma generico risulterà proporzionale al quadrato della sua distanza,  $x$ , dal vertice  $D$ ; l'altezza, a parte un fattore di proporzionalità, sarà proporzionale a  $dx$ . Il volume  $dV$  di un prisma sarà allora:

$$dV = K x^2 dx$$



Quindi per l'ascissa  $x_0$  del centro di gravità (v. pag. 162 e seg.) avremo:

$$x_0 = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x K x^2 dx}{\int K x^2 dx} = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx},$$

e infine, eseguendo la quadratura:

$$x_0 = \frac{[x^4/4]_0^l}{[x^3/3]_0^l} = \frac{l^4/4}{l^3/3} = \frac{3}{4} l$$

essendo  $l$  la lunghezza della congiungente il vertice  $D$  col baricentro della base  $A'B'C$ .

Concludendo, il centro di gravità di una piramide triangolare si trova sulla congiungente il vertice col baricentro della base, a  $\frac{3}{4}$  della lunghezza a partire dal vertice, o, ciò che è lo stesso, il baricentro della piramide coincide con quello della sezione parallela alla base praticata a  $\frac{1}{4}$  dell'altezza a partire dalla base stessa.

## Proprietà dinamiche del centro di gravità.

Consideriamo un sistema di  $n$  punti,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , di masse  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , rispettivamente, e agisca su ogni punto una forza esterna,  $F_e$ , ed una interna,  $F_i$ . Indichiamo con  $X, Y, Z$ , le componenti di una forza generica  $F$ . Limitandoci,

per brevità, a considerare solo le componenti  $x$  delle equazioni del moto degli  $n$  punti, avremo (con significato evidente degli indici):

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_{1,e} + X_{1,i}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = X_{2,e} + X_{2,i}$$

.....

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = X_{n,e} + X_{n,i}$$

Sommendo membri a membri le precedenti relazioni, e tenendo conto che il risultante delle forze interne è nullo, otteniamo:

$$(1) m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + \dots + m_n \ddot{x}_n = X_{1,e} + X_{2,e} + \dots + X_{n,e} = R_{e,x}.$$

Ma la (1) precedente può scriversi:

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + \dots + m_n \dot{x}_n) = R_{e,x}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per  $dt$  ed integrando, si perviene alla nota relazione che lega la quantità di moto all'impulso.

In altro modo, possiamo scrivere la (1) sotto la forma:

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) = R_{e,x};$$

moltiplicando e dividendo, poi, il primo membro di quest'ultima per la massa totale,  $M$ , del sistema, otterremo:

$$M \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = R_{e,x} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e, poiché è:

$$\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = x_0 \quad (\text{axissa del centro di gravità}),$$

concludiamo che è:

$$M \ddot{x}_0 = R_{e,x} .$$

ed analogamente:

$$M \ddot{y}_0 = R_{e,y} , \quad M \ddot{z}_0 = R_{e,z} .$$

Queste relazioni ci definiscono il moto del centro di gravità. Si vede come esse presentino perfetta analogia con le equazioni del moto di un punto dotato di massa eguale alla massa totale del sistema e soggetto ad una forza eguale al risultante delle forze esterne agenti sul sistema stesso. Nel caso poi in cui si annulli il risultante delle forze esterne, il centro di gravità avrà accelerazione nulla e si muoverà, quindi, di moto rettilineo uniforme.

---

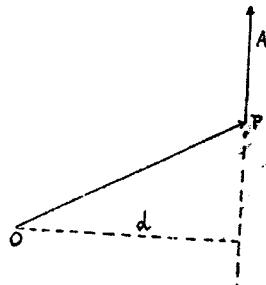
### ~ Momento di vettori applicati. ~

Introduciamo, a questo punto, il concetto di vettore applicato. Mentre sinora abbiamo considerato i vettori avendo riguardo solo alla loro grandezza, direzione e senso, a prescindere dalla loro ubicazione nello spazio, diremo vettore applicato un vettore determinato mediante i suoi tre elementi caratteristici e che abbia l'origine in un

punto prefissato dello spazio.

Scelto un punto,  $O$ , qualsiasi, dicesi momento,  $\mu$ , di un vettore  $A$  applicato in un punto  $P$ , rispetto ad  $O$ , il prodotto vettoriale:

$$(P-O) \wedge A = \mu$$



Si vede immediatamente che  $\mu$  è un vettore normale al piano di  $(P-O)$  e di  $A$ , la cui grandezza ci è data dall'area del parallelogramma costruito sui due vettori  $\sigma$ , cioè che è lo stesso, dall'area del rettangolo avente per base la normale  $d$ , abbassata da  $O$  sulla retta di applicazione di  $A$ , e per altezza la grandezza del vettore;  $d$  si chiama braccio del vettore.

Il momento di un sistema di vettori applicati, rispetto ad un punto, è uguale alla somma dei momenti dei singoli vettori rispetto al punto stesso.

### Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta.

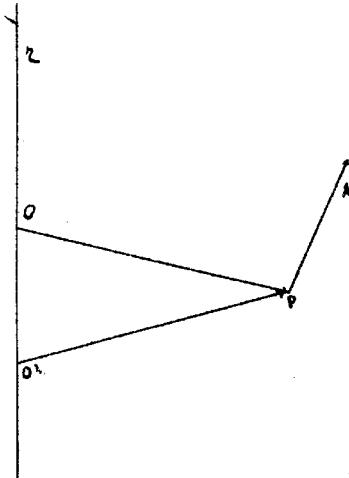
Definiscasi momento di un vettore  $A$ , applicato in un punto  $P$ , rispetto ad una retta  $r$ , la proiezione, sulla retta stessa, del momento di  $A$  rispetto ad un punto generico della retta.

Dimostriamo, ora, che il momento del vettore applicato, rispetto ad una retta, è indipendente dal pun-

to della retta cui ci si riferisce.  
Osserviamo che i momenti calcolati rispetto a due punti,  $O$  ed  $O'$ , della retta ci sono dati, rispettivamente da:

$$(P-O) \wedge A = \mu$$

$$(P-O') \wedge A = \mu'$$



Sottraendo membro a membro la seconda di queste relazioni dalla prima, otteniamo:

$$\mu - \mu' = (O'-O) \wedge A$$

Di qui si vede come il vettore  $(\mu - \mu')$  sia normale ad  $(O'-O)$  e quindi alla retta  $r$ . La proiezione della differenza  $\mu - \mu'$  su  $r$  sarà, quindi, nulla, e siccome la proiezione di una differenza è uguale alla differenza delle proiezioni, se ne conclude che queste proiezioni sono uguali e, quindi, sono uguali i momenti del vettore  $A$  rispetto ad  $r$ , calcolati riferendosi ad  $O$  e ad  $O'$ , rispettivamente.

Momento di un sistema di vettori applicati, rispetto ad una retta..-

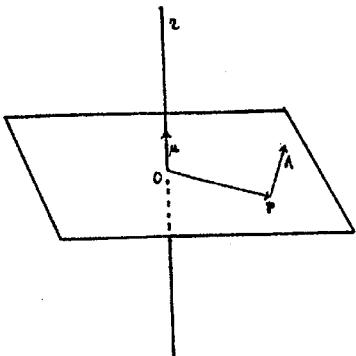
Per ottenere il momento di un sistema di vettori applicati, rispetto ad una retta, si può fare la somma algebrica dei momenti dei singoli vettori, rispetto alla retta, oppure calcolare il momento del sistema rispetto ad un punto qualunque della retta,

e proiettarlo sopra la retta.

Significato geometrico del momento di un vettore rispetto ad una retta.

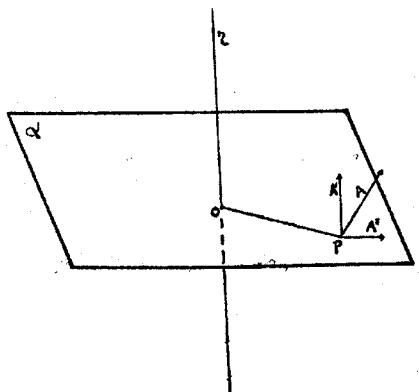
- Supponiamo, in un primo tempo, che il vettore giaccia in un piano normale alla retta.

In questo caso, evidentemente, il momento del vettore rispetto alla retta coincide in grandezza col momento calcolato rispetto al punto d'incontro del piano con la retta stessa.



- Se, invece, poniamo che la direzione del vettore A sia sghemba con la retta r rispetto alla quale si debba calcolare il momento, ma non giaccia nel piano  $\alpha$  normale ad r. Potremo allora scomporre questo vettore in due componenti, l'una parallela ad r, e l'altra normale e giacente, quindi

di, nel piano  $\alpha$ . È intuitivo che il momento della prima componente,  $A'$ , è nullo, poiché la proiezione del momento di  $A'$ , calcolato rispetto al punto O d'intersezione di  $\alpha$  con r, su r coincide col punto O stesso. Ci si riduce, dunque a considerare la sola componente  $A''$  che giace nel piano  $\alpha$ ; così ci siamo ricondotti al caso pre-



cedentemente studiato.

---

### Rappresentazione analitica del momento di un vettore applicato ..

- Vediamo di studiare il momento di un vettore  $A$  rispetto ad un punto  $O$ , dal punto di vista analitico.  
Prendiamo, a questo scopo, una terna cartesiana di riferimento, scegliendola in modo che il punto  $O$  coincida con l'origine degli assi. Il vettore,  $A$ , sia dato mediante le sue componenti,  $A_x, A_y, A_z$ , e siano  $x, y, z$ , le coordinate del punto  $P$  cui  $A$  è applicato. Le tre componenti del momento,  $\mu$ , di  $A$  rispetto ad  $O$ , ci saranno date da:

$$\mu_x = y A_z - z A_y$$

$$\mu_y = z A_x - x A_z$$

$$\mu_z = x A_y - y A_x ,$$

essendo queste espressioni le tre componenti, secondo  $x, y, z$ , del prodotto vettoriale:

$$(P-O) \wedge A$$

Il momento del vettore rispetto ad un punto di coordinate:  $x_1, y_1, z_1$ , non coincidente con l'origine degli assi, ha per componenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{1,x} = (y - y_1) A_z - (z - z_1) A_y \\ \mu_{1,y} = (z - z_1) A_x - (x - x_1) A_z \\ \mu_{1,z} = (x - x_1) A_y - (y - y_1) A_x \end{array} \right.$$


---

## Momento delle forze interne di un sistema.

Vogliamo ora dimostrare che il momento delle forze interne di un sistema è nullo.

Consideriamo dapprima due soli punti : P e Q . Della  $F_{P,Q}$  la forza che agisce su P per effetto di Q , ed  $F_{Q,P}$  quella che agisce su Q per effetto di P , abbiamo fatta l'ipotesi che queste due forze abbiano direzione comune coincidente con la congiungente PQ , grandezza eguale e senso opposto ; risultò quindi :

$$F_{P,Q} = - F_{Q,P}$$

Calcoliamo il momento di queste due forze rispetto ad un punto O generico . Il momento di  $F_{P,Q}$  ci è dato dall'espressione :

$$\mu = (P-O) \wedge F_{P,Q}$$

e quello di  $F_{Q,P}$  da :

$$\mu' = (Q-O) \wedge F_{Q,P}$$

Sommendo le due precedenti espressioni otteniamo il momento totale :

$$\begin{aligned} M &= (P-O) \wedge F_{P,Q} + (Q-O) \wedge F_{Q,P} = (P-O) \wedge F_{P,Q} - (Q-O) \wedge F_{P,Q} = \\ &= (P-Q) \wedge F_{P,Q} . \end{aligned}$$

Ma i due fattori del precedente prodotto vettoriale sono paralleli fra loro , e quindi il loro prodotto vettoriale è nullo . Si conclude che il momento delle forze interne dei due punti , rispetto ad un punto generico , è

nulllo.

Questo risultato si estende ad un sistema costituito da un numero qualsiasi di punti, osservando che l'espressione del momento totale delle forze interne di un sistema è costituita da una somma i cui addendi si elidono a due a due. È implicito che questo momento è nullo anche rispetto ad una qualsiasi retta; infatti, il momento rispetto ad una retta non è altro che la proiezione su di essa del momento rispetto ad un suo punto.

### Teorema del momento delle quantità di moto.

- Consideriamo un sistema di  $n$  punti,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , di massa:  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , e velocità:  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , rispettivamente. Possiamo considerare le quantità di moto di questi punti:

$$m_1 V_1, m_2 V_2, \dots, m_n V_n.$$

Queste quantità di moto sono dei vettori applicati nei punti di egual indice; potremo quindi considerarne il momento. Fissiamo, per semplicità la nostra attenzione sul solo punto  $P_1$ , ed osserviamo che il momento della sua quantità di moto ( $q_1 = m_1 V_1$ ) rispetto ad un punto generico, o ad una retta, coincide col prodotto della massa  $m_1$  (che è uno scalare) per il momento della velocità  $V_1$  rispetto al punto o alla retta.

Vogliamo ora calcolare le componenti del momento

della quantità di moto di  $P_i$ . A tal scopo, per quanto si è detto, dovremo calcolare il momento di  $V_i$ . Le componenti di questo momento, calcolato rispetto ad  $O$ , ci sono date da:

$$\begin{cases} m_{0,x} = y_i V_{z,i} - z_i V_{y,i} \\ m_{0,y} = z_i V_{x,i} - x_i V_{z,i} \\ m_{0,z} = x_i V_{y,i} - y_i V_{x,i} \end{cases},$$

e moltiplicando per  $m_i$  avremo le componenti del momento della quantità di moto.

Il momento della quantità di moto si dice anche quantità di moto areale perchè, nel caso di un moto piano centrale, la sua espressione coincide con quella della costante del Teorema delle aree.

Relazioni tra il momento delle forze agenti su di un sistema ed il momento della quantità di moto del sistema stesso..

Le equazioni del moto degli  $n$  punti di un sistema, sono:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dV_1}{dt} &= F_{1,e} + F_{1,i} \\ m_2 \frac{dV_2}{dt} &= F_{2,e} + F_{2,i} \\ &\dots \\ m_n \frac{dV_n}{dt} &= F_{n,e} + F_{n,i} \end{aligned} \quad (1)$$

Limitandoci, al solito, a considerare soltanto la

prima delle precedenti espressioni, moltiplichiamone vettorialmente ambo i membri per  $(P_i - O)$ , essendo  $O$  un punto fisso:

$$(P_i - O) \wedge m_i \frac{d V_i}{dt} = (P_i - O) \wedge (F_{i,e} + F_{i,i}).$$

Osserviamo, a questo punto, che il primo membro della precedente si può identicamente scrivere:

$$\frac{d}{dt} [(P_i - O) \wedge m_i V_i] ;$$

infatti, derivando otteniamo:

$$(2) \quad (P_i - O) \wedge m_i \frac{d V_i}{dt} + \frac{d}{dt} (P_i - O) \wedge m_i V_i.$$

Vediamo ora come il secondo addendo della precedente sia nullo: notando che è:

$$\frac{d(P_i - O)}{dt} = \frac{d P_i}{dt} - \frac{d O}{dt} = V_i - V_0 = V_i$$

perché, essendo  $O$  un punto fisso, la sua velocità  $V_0$  è nulla; il secondo addendo della (2) diventa:

$$V_i \wedge m_i V_i ,$$

ma questo prodotto è nullo per il parallelismo dei due vettori  $V_i$  ed  $m_i V_i$ . Operando analogamente sulle rimanenti delle (1), e sommando membro a membro, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \sum_i [m_i (P_i - O) \wedge m_i V_i] = M_e$$

dove con  $M_e$  si indica il momento delle forze esterne (quello delle forze interne abbiamo già visto che è nullo). Indicando con  $Q$  il momento della quantità di moto del sistema, avremo dunque:

$$\frac{d Q}{dt} = M_e .$$

Possiamo, quindi, concludere che la derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema, rispetto ad un punto fisso, è uguale al momento delle sole forze esterne agenti sul sistema, rispetto al punto stesso. Quanto sopra costituisce il Teorema delle quantità di moto areali.

Identiche considerazioni valgono anche per il momento rispetto ad una retta: infatti, per ottenere il momento rispetto ad una retta, bisognerà prima trovare il momento rispetto ad un punto di essa, e quindi proiettare questo momento sulla direzione della retta medesima.

Se, poi, il momento delle forze esterne si annulla, avremo:

$$M_e = 0, \text{ e quindi: } \frac{dQ}{dt} = 0,$$

espressione, quest'ultima, che ci dice essere, in tal caso, costante il momento della quantità di moto. - Abbiamo, dunque il Teorema della conservazione del momento della quantità di moto che dice che il momento delle forze esterne, rispetto ad un punto o ad una retta, è nullo, resta costante la quantità di moto areale rispetto al punto o alla retta.

Vediamo, ora, come il Teorema del momento delle quantità di moto continui a valere anche quando si calcoli il momento, invece che rispetto ad un punto fisso O, rispetto a quel particolare

punto mobile che è il centro di gravità,  $G$ , del sistema.  
Infatti, moltiplicando la prima delle (1) di pag. 183 vettorialmente per  $(P_i - G)$ , abbiamo:

$$(P_i - G) \wedge m_i \frac{dV_i}{dt} = (P_i - G) \wedge (F_{i,e} + F_{i,i}).$$

Considerando, poi, l'espressione:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} [(P_i - G) \wedge m_i V_i] = (P_i - G) \wedge m_i \frac{dV_i}{dt} + \frac{d(P_i - G)}{dt} \wedge m_i V_i$$

notiamo che è:

$$\frac{d(P_i - G)}{dt} = \frac{dP_i}{dt} - \frac{dG}{dt} = V_i - V_G; \quad ;$$

e quindi la (1) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(P_i - G) \wedge m_i V_i] &= (P_i - G) \wedge m_i \frac{dV_i}{dt} + (V_i - V_G) \wedge m_i V_i = \\ &= (P_i - G) \wedge m_i \frac{dV_i}{dt} - V_G \wedge m_i V_i, \end{aligned}$$

da cui, per  $(P_i - G) \wedge m_i \frac{dV_i}{dt}$ , ricaviamo:

$$(P_i - G) \wedge m_i \frac{dV_i}{dt} = \frac{d}{dt} [(P_i - G) \wedge m_i V_i] + V_G \wedge m_i V_i.$$

Operando analogamente sulle rimanenti delle (1) di pag. 183, e sommando membri a membri, infine ottieniamo:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \sum_i^n (P_i - G) \wedge m_i V_i = \frac{dQ_G}{dt} + V_G \wedge \sum_i^n m_i V_i = M_{e,G}.$$

A questo punto osserviamo che  $V_G \wedge \sum_i^n m_i V_i$  si annulla. Infatti, detto O un punto fisso qualsiasi, abbiamo:

$$(G-O) = \frac{\sum_i (P_i - O) m_i}{\sum_i m_i} ,$$

e derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d(G-O)}{dt} = V_G - V_o = V_G = \frac{\sum_i m_i V_i}{\sum_i m_i} ,$$

ed essendo:  $\sum_i m_i$ , uno scalare,  $V_G$  e  $\sum_i m_i V_i$  risultano paralleli, quindi è:

$$V_G \wedge \sum_i m_i V_i = 0 .$$

L'equazione (2) ci dà allora:

$$\frac{d Q_a}{dt} = M_{e,a} .$$

Si conclude, dunque, che la derivata del momento della quantità di moto del sistema, calcolato rispetto ad un punto fisso  $O$  o al centro di gravità,  $G$ , del sistema, è uguale al momento delle forze esterne calcolato riferendoci ad  $O$  o a  $G$ , rispettivamente. -

## SISTEMI RIGIDI.

Vedemmo già nella cinematica che, per fissare la posizione di un sistema rigido, sono necessarie e sufficienti sei grandezze scalari; per determinarne il movimento, basteranno quindi sei equazioni pur esse scalari. Ora, noi abbiamo le due equazioni vettoriali:

$$(1) \quad \frac{d q}{dt} = R_e \quad \text{e} \quad (2) \quad \frac{d Q}{dt} = M_e$$

che legano la quantità di moto al risultante delle forze esterne , e la quantità di moto areale al momento delle forze esterne stesse , ci danno, per l'appunto le sei equazioni scalari che ci occorrono . Importa osservare come , nelle due equazioni vettoriali suddette , sia scomparso ogni elemento inerente alle forze interne del sistema , e ciò perchè la quantità di moto di un sistema ed il momento di essa sono indipendenti dall'azione delle forze interne stesse . Le (1) e (2) sono , dunque , le equazioni fondamentali del moto di un corpo rigido .

### ~ Statica Sei corpi rigidi . ~

Si presenta il problema di trovare le relazioni che devono passare tra le forze agenti su di un corpo rigido perchè esso sia in equilibrio .

Risulta evidente , per la definizione stessa di equilibrio , che questo si verifica quando è nulla la velocità del corpo , e quindi nulli è la sua quantità di moto  $\mathbf{q}$  , e il momento di essa  $\mathbf{Q}$  . Ponendo , dunque , nelle (1) e (2) di pag. 187 ,  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  , avremo :

$$(1) \quad \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad \text{ed} \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (2)$$

(non essendoci tema d'ambiguità , tralascieremo d'ora innanzi l'indice  $\underline{\mathbf{e}}$  ).

Da (1) e la (2) precedenti ci danno , dunque , le condizioni per l'equilibrio .

Si potrebbe supporre che le due equazioni vettoria-

li, or ora stabilito, desserò luogo ad un numero infinito di relazioni scalari a seconda del punto rispetto a cui si calcola il momento. Vogliamo dimostrare che questo non è, e, precisamente, che, se son verificate la (1) e (2), è nullo il momento  $M_0$  rispetto ad un qualsiasi punto  $O'$ . Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} R = F_1 + F_2 + \dots + F_n &= \sum_i^n F_i = 0 & , \\ \text{e: } M_0 &= \sum_i^n [(P_i - O) \wedge F_i] = 0 & . \end{aligned}$$

Ora, il momento rispetto ad  $O'$  è:

$$M_{O'} = \sum_i^n [(P_i - O') \wedge F_i] \quad , \quad (3)$$

ed essendo:  $(P_i - O') = (P_i - O) + (O - O')$ ,

la (3) si può scrivere:

$$M_{O'} = \sum_i^n [(P_i - O) \wedge F_i] + (O - O') \wedge \sum_i^n F_i \quad ,$$

cioè, in definitiva:

$$M_{O'} = M_0 + (O - O') \wedge R \quad . \quad (4)$$

Si deduce dalla (4) che, se valgono la (1) e la (2), si ha anche:

$$M_{O'} = 0$$

Considerato, in tal guisa, il problema, dal lato vettoriale, vediamo, ora, di studiarlo dal punto di vista analitico.

Data, a tal scopo, una Terna d'assi cartesiani,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , consideriamo un punto generico del sistema.

-ma,  $P_i$ , di coordinate  $x_i, y_i, z_i$ ; a questo punto sia applicata una forza,  $F_i$ , di componenti  $X_i, Y_i, Z_i$ . Per l'equilibrio sappiamo che deve annullarsi il risultante delle forze, ed il loro momento.

La prima condizione si esprime scalarmente annullando le componenti, secondo i tre assi, del risultante:

$$\sum_i^n X_i = 0, \quad \sum_i^n Y_i = 0, \quad \sum_i^n Z_i = 0.$$

La condizione dell'annullarsi del momento delle forze, si scriverà, invece:

$$\begin{cases} \sum_i^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \\ \sum_i^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0 \\ \sum_i^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \end{cases}$$

Considerando, ora, un corpo rigido cui siano applicati due sistemi di forze (che distingueremo con uno e con due apici, rispettivamente), il totale delle forze applicate ad un generico punto  $P_i$ , è dato dalla somma:  $F_i' + F_i''$ , e, così, anche il momento è dato dalla somma dei momenti. Per l'equilibrio dovrà essere:

$$R = R' + R'' = 0 \quad \text{e} \quad M = M' + M'' = 0.$$

Poiché, nelle espressioni precedenti, da due sistemi di forze non compare che il risultante ed il momento, le condizioni d'equilibrio non verranno alterate se ad uno dei due sistemi se ne sostituisce

Tuisca un altro con risultante e momento eguali.

Due sistemi di forze che abbiano lo stesso risultante e lo stesso momento, si dicono equivalenti agli effetti dell'equilibrio.

A questo proposito, vediamo le operazioni elementari, che ci consentono di mutare un sistema di forze in uno equivalente.

Prendiamo a considerare il caso di un sistema formato da una sola forza  $F$ . Vediamo come si ottenga un sistema equivalente spostando il punto, cui  $F$  è applicata, lungo la linea di applicazione. Infatti,

Trattandosi di due sistemi formati da una sola forza di eguale grandezza ed ugualmente orientata, è evidente che avranno eguale risultante. Quanto al momento, che calcoleremo rispetto ad un arbitrario punto  $O$ , per  $F$  applicata in  $P$ , avremo:

$$(P-O) \wedge F = M_{P,O}$$

e, per  $F$  applicata in  $Q$ :

$$(Q-O) \wedge F = M_{Q,O}$$

Questi due momenti sono ugualmente orientati essendo ambedue normali al piano di  $O$  e di  $F$  ed hanno eguale grandezza, poiché sono eguali le aree dei parallelogrammi costruiti su  $OP$  ed  $F$  e su  $OQ$  ed  $F$ , rispettivamente.

Un'altra operazione, ancora più evidente, per trasformare un sistema di forze in un altro equivalente.

è quella di applicare, ad uno stesso punto, due forze uguali e contrarie. Sarà evidentemente per esse:

$$R=0 \quad \text{ed} \quad M=0$$

Una terza operazione è quella mediante la quale ad una forza si sostituiscono due, o più, sue componenti.

### Coppia di forze.

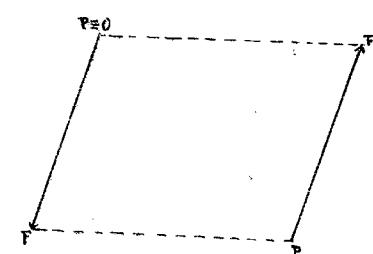
Dicesi coppia un sistema costituito da due forze uguali e contrarie. Evidentemente, il risultante di una coppia è nullo, mentre il momento è indipendente dal punto rispetto al quale lo si calcoli. Infatti, sappiamo (vedi (4) pag. 189) che è:

$$M_o = M_o + (O-O') \wedge R,$$

ma il secondo addendo del secondo membro è nullo essendo:  $R=0$ . Risulta dunque:

$$M_o = M_o .$$

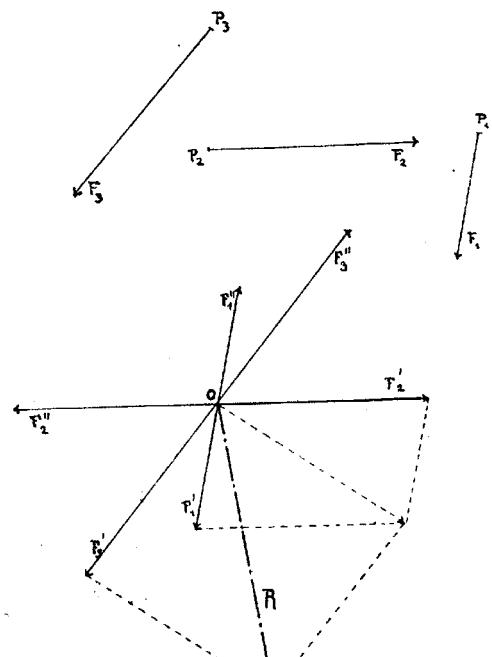
Questa proprietà è generale per tutti i sistemi di forze a risultante nullo. Il momento di una coppia ha grandezza uguale all'area del parallelogramma costruito coi due vettori della coppia e con le distanze dall'origine dell'uno dall'estremo dell'altro. Infatti, possiamo scegliere, come punto rispetto a cui si calcola il momento, il punto d'applicazione di una delle forze.



re, allora il momento di questa sarà nullo essendo nullo il braccio; resterà, quindi, da calcolarsi solo il momento dell'altra forza. Tale momento avrà grandezza eguale all'area del parallelogramma costruito sulla forza e sulla distanza di O da un punto qualsiasi della sua linea di applicazione. È evidente che il momento di una coppia ha direzione normale al suo piano.

Un qualsiasi sistema di forze è sempre equivalente ad un altro formato da una forza più una coppia.

Supponiamo, p. es., di avere un sistema formato da tre forze,  $F_1, F_2, F_3$ , applicate in  $P_1, P_2, P_3$ , rispettivamente. In un punto qualsiasi, O, applichiamo tre forze,  $F'_1, F'_2, F'_3$ , uguali ad  $F_1, F_2$ , ed  $F_3$ , rispettivamente, e tre forze uguali e contrarie alle precedenti. È chiaro che si ha, così, un sistema equivalente al dato, poiché non si è fatto altro



che aggiungere e togliere forze uguali. Osserviamo, ora, che alle  $F'_1, F'_2$  ed  $F'_3$ , possiamo sostituire il loro risultante  $R$ . Avremo, così, un sistema, equivalente al dato, costituito da una forza,  $R$ , e da tre coppie:  $F'_1$  ed  $F'_1$ ,  $F'_2$  ed  $F'_2$ ,  $F'_3$  ed  $F'_3$ ; coppie, queste,

che avranno, ciascuna, un proprio momento. Agli effetti dell'equilibrio, potremo sostituire, a queste tre, una unica coppia che abbia momento uguale alla somma dei loro momenti.

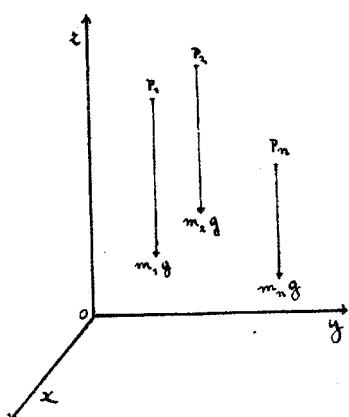
Averemo, così, sostituito, al sistema primitivo, un nuovo sistema equivalente, formato di una forza  $R$  e di una coppia.

---

### ~ Momento Sel peso. ~

Detti:  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , i punti di un sistema rigido, soggetto alla forza peso, a ciascuno di questi  $n$  punti sarà applicata una forza data dal prodotto:  $m_i g$ , ove  $m_i$  è la massa di un punto generico. Tutte queste  $n$  forze risulteranno parallele ed orientate verso il basso. Ci proponiamo, ora, di dimostrare come sia possibile sostituire, a questo sistema di forze, un altro sistema formato da un'unica forza orientata come le  $m_i g$ , applicata nel baricentro, e di grandezza:  $\sum m_i g$ .

A tal scopo, basterà provare l'egualanza del risultante e del momento nei due sistemi di forze in parola. Per il risultante, l'egualanza è evidente; quanto, poi, al momento, osserviamo che, scegliendo gli assi coordinati con l'asse  $z$  verticale ed orientato verso l'alto, le componenti della forza  $m_i g$ , applicata ad



un punto generico,  $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ , ci sono date da:

$$0, 0, -m_i g$$

e quelle del momento della forza suddetta, calcolato rispetto all'origine O degli assi:

$$(M)_{i,x} = -m_i y_i g ; (M)_{i,y} = m_i x_i g ; (M)_{i,z} = 0.$$

Eseguendo le sommatorie, estese a tutti i punti del sistema, delle prime due espressioni precedenti, otteniamo le componenti, secondo gli assi x ed y, rispettivamente, del momento totale del sistema:

$$(M)_x = \sum_i^n -m_i y_i g \quad (1), \quad (M)_y = \sum_i^n m_i x_i g.$$

Passando ora a calcolare, rispetto ad O, il momento dell'unica forza,  $F = \sum_i^n m_i g$ , sostituita alle n date, applicata nel centro di gravità G, osserviamo che le coordinate di G sono:

$$x_G = \frac{\sum_i^n m_i x_i}{\sum_i^n m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i^n m_i y_i}{\sum_i^n m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i^n m_i z_i}{\sum_i^n m_i};$$

le componenti di F:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -\sum_i^n m_i g;$$

e, quindi, le componenti del momento (M) sono:

$$(M)_x = -\frac{\sum_i^n m_i y_i}{\sum_i^n m_i} \sum_i^n m_i g; \quad (M)_y = \frac{\sum_i^n m_i x_i}{\sum_i^n m_i} \sum_i^n m_i g,$$

e, semplificando:

$$(M)_x = -\sum_i^n m_i y_i g, \quad (M)_y = \sum_i^n m_i x_i g,$$

espressioni, queste, identiche alle (1). Il nostro asserto è, così, dimostrato.

Generalizzando, dato un sistema rigido cui siano applicate  $n$  forze parallele sulla cui particolare natura non facciamo alcuna ipotesi; detta  $F_i$  la forza applicata al punto generico  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ; potremo, analogamente a quanto si è fatto nel caso della forza peso, sostituire, al sistema delle  $n$  forze considerate, un'unica forza, egualmente diretta, la cui grandezza è data dalla somma algebrica delle grandezze, applicata in un punto  $P_0$  del corpo; Tale che le sue coordinate,  $x_0, y_0, z_0$ , soddisfino alle relazioni:

$$x_0 = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}, \quad z_0 = \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i}$$

## Equilibrio di un corpo rigido ~ vincolato. ~

Noi considereremo tre tipi di vincoli di un sistema rigido.

I) Debb'essere rimaner fiso uno, ed un solo, punto del corpo;

II) Debbano restar fissi due punti (e, di conseguenza, la retta che li congiunge).

III) Il corpo sia appoggiato ad un piano.

In tutti questi casi il sistema si potrà considera-

re come libero, purchè, oltre alle forze direttamente applicate, lo si assoggetti anche all'azione di altre forze, le reazioni vincolari.

Nel primo caso, detto O il punto fisso, date le n forze  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , agenti sul corpo, noi sappiamo costruire il risultante R, e se inoltre indichiamo con R la reazione del vincolo, che è una forza applicata nel punto O, per l'equilibrio, dovendo annullarsi la forza totale agente sul sistema, avremo:

$$(1) \quad R + R = 0 \quad \text{e quindi: } R = -R ;$$

$$\text{e ancora:} \quad (2) \quad M = 0 ,$$

dove M è il momento totale delle forze agenti sul sistema, calcolato rispetto ad O.

Osserviamo come nella (2) non compaiano affatto elementi inerenti alla R (infatti, essendosi calcolato il momento rispetto ad O, il momento di R rispetto a questo punto è nullo.), quest'equazione ci servirà, dunque, a determinare le condizioni di equilibrio. Dalla (1), poi, mediante la conoscenza delle n forze direttamente applicate, e quindi di R, si può ricavare il valore di R.

Nel secondo caso, detti O<sub>1</sub> ed O<sub>2</sub> i punti fissi, ed R<sub>1</sub> ed R<sub>2</sub>, rispettivamente, le reazioni vincolari ad essi applicate, in modo analogo al primo caso avremo la condizione di equilibrio:

$$(1) \quad R + R_1 + R_2 = 0 .$$

Dovrà, inoltre, per l'equilibrio, annullarsi il momento totale delle forze agenti sul sistema, momento che calcoleremo rispetto ad uno qualsiasi dei due punti fissi, ad esempio, rispetto ad  $O_1$ . Indicando con  $(M)$  ed  $M_2$ , rispettivamente, i momenti del risultante  $R$  e della reazione  $R_2$ ; avremo:

$$(2). \quad (M) + M_2 = 0 ,$$

essendo, al solito, il momento di  $R_1$ , rispetto ad  $O_1$  (suo punto d'applicazione) nullo.

L'equazione vettoriale (2), ne rappresenta tre scalari, per determinare le quali scegiamo una opportuna terna d'assi avente l'origine in  $O_1$ , e l'asse  $z$  coincidente con la retta  $O_1O_2$ . Per le componenti della (2) si avrà allora:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M)_x + M_{2,x} = 0 \\ (M)_y + M_{2,y} = 0 \\ (M)_z + M_{2,z} = 0 \end{array} \right. ,$$

e, poichè è  $M_{2,z} = 0$  (perchè il momento di  $R_2$  rispetto ad  $O_1$  è normale alla  $O_1O_2$ , ossia all'asse  $z$ , e quindi la sua proiezione su tale asse è nulla), la Terza delle (3) precedenti ci dà:

$$(M)_z = 0 .$$

Quest'equazione ci dà la condizione di equilibrio: il momento delle forze applicate, rispetto alla retta fissa, deve esser nullo.

Le prime due delle (3), assieme alla (1) (in totale 5 equazioni scalari) servono per la determinazione

delle reazioni  $R_1$  ed  $R_2$ ; siccome, però, le incognite sono sei (le sei componenti di  $R_1$  ed  $R_2$ ), e le equazioni sono cinque, il problema della determinazione completa, di queste reazioni, risulta staticamente indeterminato.

Nel Terzo caso, infine, per studiare l'equilibrio di un corpo appoggiato su di un piano, facciamo l'ipotesi essenziale che non vi sia attrito. Dette:  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , le forze applicate al corpo, ed  $R$  il loro risultante, e dette ancora:  $R_1, R_2, \dots, R_m$ , le reazioni esercitate dal vincolo sui punti di contatto del corpo col piano, per l'equilibrio dovremo avere:

$$R + R_1 + R_2 + \dots + R_m = 0$$

ed:

$$(M) + M_1 + M_2 + \dots + M_m = 0,$$

dove  $(M)$  è, al solito, il momento di  $R$ , ed  $M_1, \dots, M_m$  quelli delle reazioni vincolari di indice omonimo. Le relazioni vettoriali precedenti ne rappresentano sei scalari; dovremo scegliere gli assi in modo da ottenere delle relazioni scalari in cui non compaiano elementi inerenti alle reazioni dei vincoli. A tal scopo disponiamo la Terna cartesiana in guisa che gli assi  $x$  ed  $y$  giacciono nel piano che costituisce il vincolo. Avremo, allora per le componenti del risultante:

$$(1) \quad \begin{aligned} R_x + R_{1,x} + R_{2,x} + \dots + R_{m,x} &= 0 \\ R_y + R_{1,y} + R_{2,y} + \dots + R_{m,y} &= 0 \end{aligned}$$

$$R_2 + R_{1,2} + R_{2,2} + \dots + R_{m,2} = 0 ;$$

ma, essendo le reazioni normali al piano del vince-  
lo, sarà:

$$R_{1,x} + R_{2,x} + \dots + R_{m,x} = 0$$

e:  $R_{1,y} + R_{2,y} + \dots + R_{m,y} = 0 ;$

dovrà, quindi, essere:

$$R_x = 0, \text{ ed } R_y = 0 .$$

Essendo poi positive le  $R$ , e, quindi, positiva la loro somma:

$$R_1 + R_2 + \dots + R_m = R_{1,2} + R_{2,2} + \dots + R_{m,2} ,$$

dalla terza delle (1) si deduce:

$$R = R_2 < 0$$

Queste condizioni sono necessarie, ma non ancora sufficienti per l'equilibrio.

Consideriamo, perciò, il poligono convesso ottenuto unendo tra loro i più esterni dei punti di contatto del corpo col piano, in modo che tutti i punti di contatto, indistintamente, siano in esso contenuti (poligono d'appoggio) e calcoliamo il momento totale delle forze applicate al sistema, successivamente, rispetto a ciascun lato di detto poligono. Se tutti questi momenti hanno direzione tale da far ruotare il corpo attorno al lato considerato, dall'esterno verso l'interno del poligono d'appoggio, si ha l'equilibrio; in caso contrario il corpo non si trova in posizione d'equilibrio. Nel caso della forza peso, l'equilibrio si verifica quando la proiezione del centro di gravità,

nel piano orizzontale, cade entro il poligono d'appoggio.

### L'equilibrio in alcune macchine semplici.

#### Bilancia.

La bilancia si può considerare come un particolare tipo di leva di primo genere, avente uguali i bracci della potenza e della resistenza. Tale leva, che costituisce il giogo, è girevole attorno ad un asse orizzontale fisso, detto coltello. Agli estremi del giogo sono sospesi due piatti, destinati ad accogliere i pesi che dovranno esser confrontati. Questo sistema sarà sol-

lecitato dalla forza peso,  $p$ , forza che potremo supporre applicata nel centro di gravità  $G$ .

Perchè la bilancia stia in equilibrio, basterà che sia nullo il momento delle forze agenti sul sis-

tema, rispetto all'asse fisso. Evidentemente, tale momento è nullo quando  $G$  giace nel piano verticale passante per l'asse, perchè, in tal caso, è nullo il braccio del peso. L'equilibrio è stabile quando il centro di gravità si trova al disotto dell'asse, instabile in caso contrario. Supponiamo, per semplicità, di operare una sezione della bilancia, mediante un piano verticale passante per i punti di sospensione dei piatti. Detti  $P_1$  e  $P_2$  i due pesi da confrontare,

supponiamo che  $P_1$ , p. es., diventi maggiore di  $P_2$ , allora il giogo, traboccardo dalla parte di  $P_1$ , ruoterà intorno all'asse di un angolo  $\vartheta$ , e del medesimo angolo ruoterà la congiungente l'asse medesimo col centro di gravità  $G$ . Il sistema raggiungerà una nuova posizione d'equilibrio, quando il momento di  $P_1$  sarà eguale alla somma dei momenti di  $P_2$  e di  $p$ .

Sia  $b$  la distanza comune di  $P_1$  e  $P_2$  dall'asse,  $A$ , di sospensione, e sia  $h$  la distanza di  $G$  dall'asse stesso; si avrà per i momenti di  $p$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , rispettivamente:

$$\begin{cases} \mu = p h \operatorname{sen} \vartheta \\ \mu_1 = P_1 b \cos \vartheta \\ \mu_2 = P_2 b \cos \vartheta \end{cases};$$

e, siccome per l'equilibrio deve essere:

$$\mu + \mu_1 + \mu_2 = 0,$$

$$\text{ossia: } \mu + \mu_2 = -\mu_1,$$

avremo:

$$p h \operatorname{sen} \vartheta + P_2 b \cos \vartheta = P_1 b \cos \vartheta,$$

e dividendo ambo i membri per  $\cos \vartheta$ :

$$p h \operatorname{tg} \vartheta + P_2 b = P_1 b,$$

da cui ottieniamo, infine, per  $\operatorname{tg} \vartheta$ :

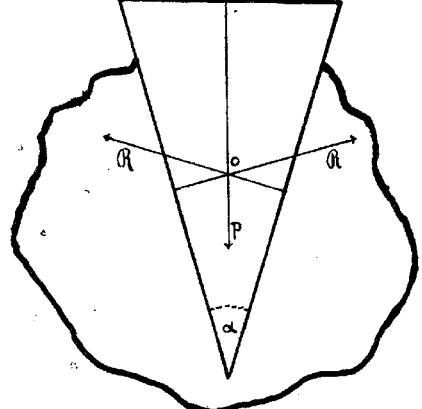
$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b(P_1 - P_2)}{p h}.$$

La tangente dell'angolo di cui ruota la bilancia, quando su uno dei piatti si carichi un peso, ci dà la sensibilità della bilancia stessa. Si vede subito come, restando costante la differenza  $P_1 - P_2$  tra i pesi applicati agli estremi del giogo, la  $\operatorname{tg} \vartheta$  aumenti col-

crescere del valore di  $b$  (ossia col crescere della lunghezza del giogo) e diminuisca col crescere del peso  $p$  e della distanza  $h$  del centro di gravità,  $G$ , dall'asse,  $A$ , di sospensione. —

### — Cuneso. —

Il cuneso è costituito da un prisma triangolare, generalmente isoscele; nelle considerazioni che seguono faremo l'ipotesi che la potenza  $P$  si eserciti normalmente alla base del cuneso, e che il corpo in cui esso penetra sia omogeneo. Vediamo di stabilire le condizioni dell'equilibrio. A tal scopo, osservando che la sezione del cuneso con un piano normale alle facce laterali è un triangolo isoscele, scelto un punto  $O$ , qualsiasi dell'altezza  $h$  di quest'ultimo, si vede immediatamente come in  $O$  si incontrino due delle reazioni che il corpo esercita sul cuneso normalmente alle facce laterali; ma, d'altra parte, la potenza  $P$  si esercita anch'essa nella direzione di  $h$ ,



quindi, se sceglieremo come punto rispetto al quale si calcolano i momenti, il punto  $O$ , i momenti della potenza e delle due reazioni si annullano, perché le direzioni di queste tre forze passano tutte per il punto suddetto.

Quanto poi alla condizione dell'annullarsi del risultante delle forze, osserviamo che, indicando con  $R$  il valore comune alle due reazioni (eguali per la supposta

omogeneità del corpo) che il corpo esercita perpendicolarmente alle facce laterali del cuneo, siccome la potenza si esercita nella direzione di  $h$ , per l'equilibrio dovrà annullarsi la somma di essa e delle due componenti delle due reazioni secondo la direzione suddetta; quindi, detto a l'angolo opposto alla base del cuneo, avremo:

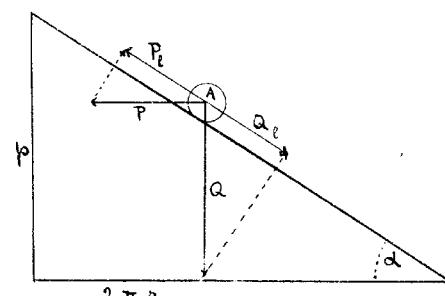
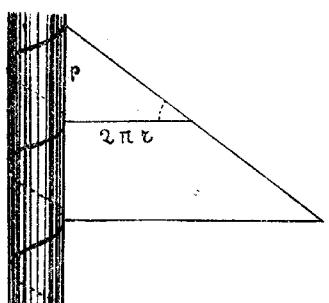
$$P - 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

che è la condizione d'equilibrio cercata.

### - Vite:

- Per stabilire le condizioni d'equilibrio della vite, supponiamo questa, per semplicità, cilindrica e mobile entro la sua madre-vite fissa. Se immaginiamo di sviluppare una spira di quest'ultima su di un piano, vediamo come questa spira si disponga in un piano inclinato la cui lunghezza è quella della spira stessa, la cui altezza è data dal passo della vite, e la cui base è eguale alla circonferenza della vite medesima.

Il  
nostro problema  
si riduce, quindi,  
alla determina-  
zione delle condi-  
zioni d'equilibrio



per un punto, A, della vite che poggia sul detto piano inclinato. Evidentemente, l'equilibrio si verificherà quando le componenti della potenza P e della resistenza Q, secondo la lunghezza del piano inclinato, avranno eguale grandezza e segno contra-

ris. A tal nopo, osservand: che la potenza  $P$  si esercita tangenzialmente alla testa della vite, mentre la resistenza  $Q$  si esercita normalmente alla testa medesima, nella direzione dell'asse, nello sviluppo della spira su di un piano, la potenza  $P$  risulterà parallela alla base e la resistenza  $Q$  all'altezza del piano inclinato. Detto  $\alpha$  l'angolo d'inclinazione di quest'ultimo, per la componente di  $P$  secondo la lunghezza  $l$ , avremo:

$$P_e = P \cos \alpha ,$$

e, per la componente di  $Q$  secondo la stessa direzione:

$$Q_e = Q \sin \alpha .$$

Per l'equilibrio dovrà essere:

$$P \cos \alpha = Q \sin \alpha ,$$

da cui, infine:

$$\frac{P}{Q} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Notando ora che  $\operatorname{tg} \alpha$  è uguale al rapporto tra l'altezza e la base del piano inclinato, sicome queste ci sono date, rispettivamente, da  $p$  (passo della vite) e da  $2\pi r$  (circonferenza della medesima), la relazione precedente diviene:

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{2\pi r} ,$$

che è la condizione d'equilibrio cercata.

Da quest'ultima relazione si deduce come, pur disponendo di una potenza limitata, rendendo  $r$  sufficientemente grande, si possa far equilibrio ad una resistenza molto maggiore.

## ~ Momento d'inerzia ~

Le equazioni fondamentali del moto di un corpo rigido:

$$(1) \quad \frac{dq}{dt} = R, \quad (2) \quad \frac{dQ}{dt} = M,$$

rappresentano sei relazioni scalari, le quali, poiché un sistema rigido ha sei gradi di libertà, possono servire a determinarne il movimento.

Per il moto di un corpo rigido vincolato ad avere due punti fissi (ossia a ruotare attorno ad un asse), dette  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , le forze agenti su di esso, ed  $R$  il loro risultante, dette  $R_1$  ed  $R_2$  le reazioni esercitate dai due punti fissi  $O_1$  e  $O_2$ , la (1) e la (2) precedenti divengono:

$$(3) \quad \frac{dq}{dt} = R + R_1 + R_2, \quad (4) \quad \frac{dQ}{dt} = M + M_2,$$

ove, nella (4),  $M_2$  ed  $M$  rappresentano, rispettivamente il momento di  $R_2$  ed il momento totale delle forze direttamente applicate, calcolati entrambi rispetto ad  $O_1$ . Le equazioni (3) e (4) non si prestano a determinare il moto del sistema perché compaiono in esse le reazioni  $R_1$  ed  $R_2$ . Nel caso nostro, poiché il sistema ha un sol grado di libertà, è sufficiente una sola equazione scalare, in cui non compaiano elementi inerenti alle reazioni dei vincoli, a determinarne il moto. Scelta una terna cartesiana avente l'origine in  $O_1$  e l'asse  $x$  coincidente con la retta  $O_1O_2$ , per le componenti della (4) secondo detta terna, avremo:

$$\frac{dQ_x}{dt} = M_x + M_{2,x}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = M_y + M_{2,y}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = M_z + M_{2,z}.$$

Dall'ultima delle precedenti, essendo:  $M_{z,z} = 0$  (perchè  $M_z$  è normale in  $O_1$  alla  $O_1O_2$ , e quindi all'asse  $z$ ), si ricava:

$$\frac{dQ_z}{dt} = M_z ,$$

equazione, questa, in cui non compaiono le reazioni vincolari, e che, perciò, può servirci a determinare il movimento del corpo.

Per determinare, istante per istante, la posizione del sistema che ruota attorno alla  $O_1O_2$ , basterà conoscere, in funzione del tempo, l'angolo  $\vartheta$  (azimut) che un piano fisso, passante per l'asse, forma con un piano, passante anch'esso per l'asse, ma solidale, durante il moto, col sistema. La velocità angolare  $\omega$  ci è data da:  $\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}$ , e quindi, per la velocità,  $V_i$ , lungo la traiettoria, di un punto generico  $P_i$  (di massa  $m_i$ ), avremo:

$$|V_i| = \omega r_i = r_i \dot{\vartheta} ,$$

ove  $r_i$  è la distanza del punto dall'asse di rotazione. Per la quantità di moto  $q_i$ , si avrà:

$$|q_i| = m_i r_i \dot{\vartheta} ,$$

ed, infine, per il momento di questa:

$$m_i r_i^2 \dot{\vartheta} ,$$

(poichè  $V_i$  giace in un piano normale all'asse, ed  $r_i$  è il suo braccio.). Se  $n$  sono i punti del sistema (supposto discreto), per la quantità di moto areale di esso, calcolata rispetto all'asse, avremo l'espressione:

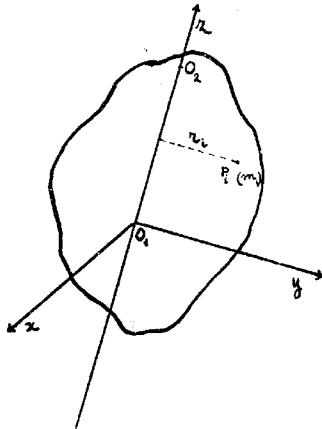
$$Q_z = \sum_1^n m_i r_i^2 \dot{\vartheta} ,$$

che si può identicamente scrivere:

$$Q_2 = \mathcal{J} \sum m_i r_i^2 ,$$

potendosi portare fuori del sommatorio il fattore  $\mathcal{J}$  che non varia col' indice  $i$ . Invece il secondo fattore,  $\sum m_i r_i^2$ , dipende esclusivamente dalla posizione che l'asse di rotazione occupa nel sistema e dalla configurazione geometrica del corpo e non varia quindi col tempo. Esso definiscesi: momento di inerzia,  $J$ , del corpo, si pone, cioè:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$



Ovremo allora:  $Q_2 = J \dot{\vartheta}$ , da cui:

$$(M)_2 = \frac{dQ_2}{dt} = J \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} = J \ddot{\vartheta} ,$$

che è l'equazione del moto di un sistema rigido attorno ad un asse, e che presenta analogia formale con l'equazione fondamentale della dinamica:

$$F = m A .$$

In particolare se è:  $(M)_2 = 0$ , cioè se il corpo non è soggetto ad alcuna forza, oppure se le direzioni delle forze passano tutte per l'asse, risulta:

$$(M)_2 = J \ddot{\vartheta} = 0 ,$$

da cui:  $\ddot{\vartheta} = 0$ , e quindi:  $\dot{\vartheta} = C_1$ , ed, integrando ancora:

$$\vartheta = C_1 t + C_2 \quad (\text{funzione lineare nel tempo che caratterizza i moti uniformi.})$$

In questo caso, dunque, il moto sarebbe una rotazione uni-

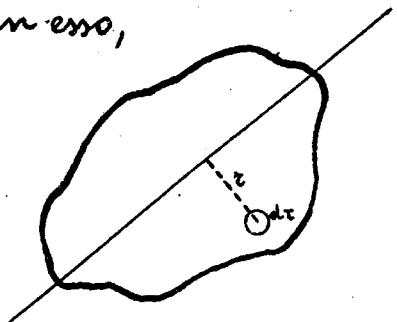
forme. Se il sistema è continuo ed esteso in volume ed è  $\rho_v$  la sua densità, considerando attorno ad un punto generico, di distanza  $r$  dall'asse, l'elemento di volume  $d\tau$ , per la massa  $dm$ , racchiusa in esso, avremo l'espressione:

$$dm = \rho_v d\tau,$$

e, per il momento d'inerzia:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho_v d\tau \quad (\text{integrale triplo}).$$

Se il sistema è esteso in superficie, ponendo in luogo della densità di volume,  $\rho_v$ , la densità superficiale,  $\rho_s$ , ed, in luogo di  $d\tau$ ,  $d\sigma$ , si ottiene un integrale doppio. Se, in fine, il sistema è esteso linearmente con densità lineare  $\rho_l$ , si ha un integrale semplice.

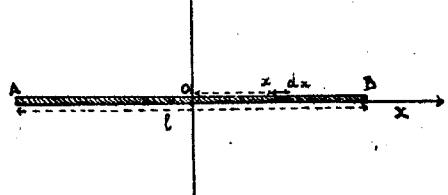


### Esempi.

1) - Momento d'inerzia di una sbarra omogenea:  
1° calcolato rispetto ad un asse normale alla sbarra e passante per il punto di mezzo (baricentro) di essa;  
2° calcolato rispetto ad un asse normale alla sbarra in uno degli estremi.

1°: detta  $l$  la lunghezza della sbarra e  $\rho$  la densità, scegliamo l'asse delle  $x$  coincidente con la direzione della sbarra medesima, ponendo l'origine,  $O$ , nel punto mediano di questa. Le formule precedentemente stabilite ci danno allora, per  $I$ , il valore:

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho x^2 dx = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx,$$

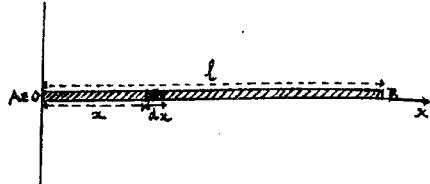


ed eseguendo la quadratura:

$$J = g \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{l/2} = g \left[ \frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right] = g \frac{l^3}{12} .$$

2°: se l'asse passa, ad esempio, per l'estremo A della sbarra, collocando ivi l'origine delle ascisse

avremo:  $J = \int_0^l g x^2 dx = g \frac{l^3}{3} ,$



oppure, ponendo in evidenza  $gl = M$  (massa della sbarra):

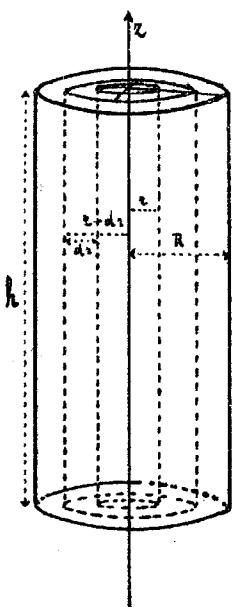
$$J = M \frac{l^2}{3} .$$

## II) Momento d'inerzia di un cilindro omogeneo rispetto al suo asse. -

Della h l'altezza ed R il raggio del cilindro, scegliamo come asse  $\tau$  l'asse del cilindro medesimo. Dobbiamo sce-

gliere un elemento di volume tale da poter si, per esso, considerare costante la distanza dall'asse, quindi, detti  $r$  ed  $r+dr$  i raggi di due cilindri coassiali conte-

nuti nel dato, assumeremo come elemento di volume quello infinitesimo compreso fra i cilindri suddetti; onde avremo:



$$d\tau = 2\pi r h dr ,$$

e, per l'elemento di massa:

$$dm = 2\pi g h r dr .$$

Il contributo dato al momento d'inerzia dall'elemento di massa  $dm$ , è, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$2\pi g h r dr \cdot r^2 .$$

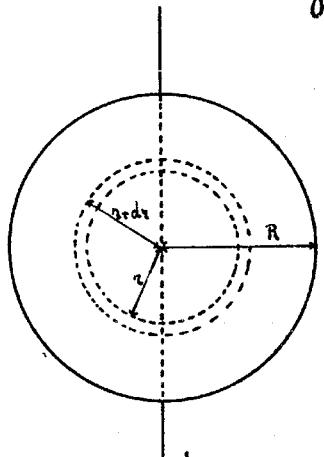
Quindi, per momento d'inerzia,  $J$ , si avrà:

$$J = 2\pi h g \int_0^R r^3 dr = 2\pi h g \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi h g \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} h g R^4 ,$$

ovvero, ponendo in evidenza la massa totale,  $M = \pi s R^2 h$ , del cilindro:  $\mathcal{I} = \frac{M R^2}{2}$ .

III) Momento d'inerzia di una sfera omogenea rispetto ad un suo diametro. -

Sia  $R$  il raggio della sfera; scegliamo una terna cartesiana ortogonale,  $x, y, z$ , coll'origine nel centro.



Osserviamo, anzitutto, che il momento d'inerzia di una sfera è lo stesso rispetto a qualsiasi suo diametro. Per calcolarlo, ad esempio, rispetto all'asse  $x$ , notiamo che  $y^2 + z^2$  è il quadrato della distanza  $r_x$  di un punto generico della sfera dall'asse  $x$ , quindi avremo:

$$\mathcal{I}_x = \int (y^2 + z^2) dm, \text{ ed analogamente: } \mathcal{I}_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$\text{e } \mathcal{I}_z = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Queste tre espressioni, come si è visto, sono fra loro eguali, e perciò, indicandone con  $\mathcal{I}$  il valore comune e sommandole membro a membro, ottieniamo:

$$(1) \quad 3\mathcal{I} = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int r^2 dm.$$

Per calcolare l'elemento di massa  $dm$ , consideriamo due sfere concentriche, interne alla data, i cui raggi siano, rispettivamente:  $r$  ed  $r + dr$ ; scegliendo come elemento di massa quella infinitesima racchiusa tra esse, detta  $s$  la densità costante della sfera, avremo, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$dm = 4\pi s dr \cdot r^2,$$

valore, questo, che, sostituito nella (1), ci dà:

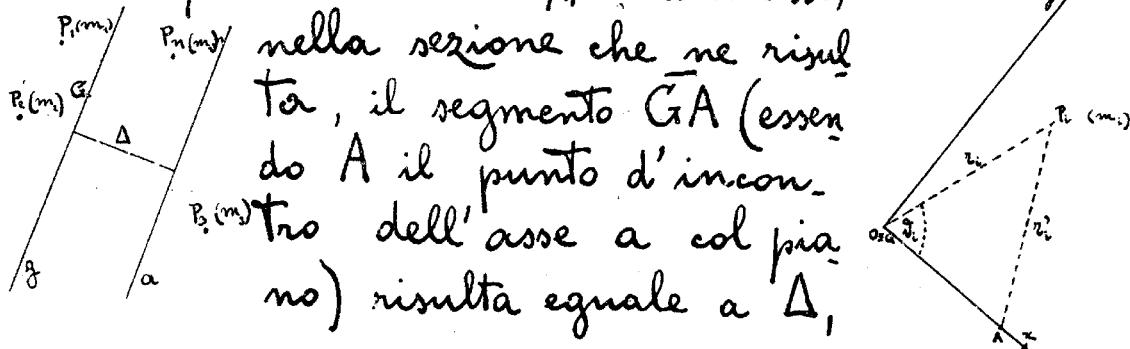
$$J = 8\pi s \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{5} \pi s R^5,$$

da cui, infine:  $J = \frac{8}{5} \pi s R^5$ , ovvero, ponendo in evidenza la massa,  $M = \frac{4}{3} \pi s R^3$ , della sfera:  
 $J = \frac{2}{5} M R^2$ .

- Vediamo come varii il momento d'inerzia di un corpo rigido al variare dell'asse, e limitiamoci, per ora, a considerare il caso in cui l'asse si sposti parallelamente a sé stesso. Si abbia, dunque, un sistema discreto, costituito dagli  $n$  punti:  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , di masse:  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , rispettivamente, e sia  $a$  l'asse dato. Tra gli infiniti assi paralleli ad  $a$ , ve ne sarà uno, ed uno solo, passante per il centro di gravità,  $G$ , del sistema. Chiamando  $J_a$ , il momento di inerzia rispetto ad  $a$ , con  $J_g$ , quello rispetto all'asse  $g$ , ci proponiamo di dimostrare che è:

$$J_a = J_g + M \Delta^2,$$

ove  $M$  è la massa totale del sistema, e  $\Delta$  è la distanza fra i due assi  $a$  e  $g$ . Infatti, conducendo per  $G$  un piano normale a  $a$ , ai due assi,



e proiettando sul piano  $\alpha$  le distanze  $r_i$  ed  $r'_i$  di un punto,  $P_i$ , del sistema dagli assi  $g$  ed  $a$ , rispettivamente, queste si proiettano in vera grandezza. Dato ciò, potremo svolgere le nostre considerazioni rispetto alla sezione suddetta. Per la definizione stessa di momento d'inerzia, abbiamo:

$$J_g = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{ed} \quad J_a = \sum_i m_i r_i'^2 .$$

Dal Triangolo  $\widehat{GAP}_i$  si ricava, applicando il Teorema di Carnot:

$$r_i'^2 = \Delta^2 + r_i^2 - 2 \Delta r_i \cos \vartheta_i ,$$

ove  $\vartheta_i$  è l'angolo compreso fra i lati  $\overline{GA}$  e  $\overline{GP}_i$ . Sostituendo, nell'espressione di  $J_a$ , per  $r_i'^2$ , questo valore, ottieniamo:

$$J_a = \sum_i m_i \Delta^2 + \sum_i m_i r_i^2 - 2 \sum_i m_i \Delta r_i \cos \vartheta_i ,$$

ovvero:  $J_a = M \Delta^2 + J_g - 2 \Delta \sum_i m_i r_i \cos \vartheta_i .$

Il nostro asserto sarà dimostrato se proveremo che è:

$$(1) \quad 2 \Delta \sum_i m_i r_i \cos \vartheta_i = 0 .$$

A tal scopo scegliamo una terna d'assi con l'origine in  $G$ , prendendo  $\overline{GA} = \Delta$  come asse delle  $x_1$ ; poiché  $x_i$ , ascissa di  $P_i$ , ci è data da:

$$x_i = r_i \cos \vartheta_i ,$$

e quindi, il primo membro della (1) diventa:

$$2 \Delta \sum_i m_i x_i ,$$

espressione, questa, che, a parte il fattore costante  $2\Delta$ , rappresenta il numeratore della frazione che dà il valore della coordinata  $x_0$  del centro di gravità  $G$ . Ma, per la scelta fatta degli assi, tutte le

coordinate di G sono nulle, e quindi è:  $x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = 0$ ,  
da cui:  $\sum m_i x_i = 0$ , e, infine:

$$2\Delta \sum m_i x_i = 0,$$

come, appunto, si voleva dimostrare.

A titolo d'esempio, applichiamo la formula testé stabilita al calcolo del momento d'inerzia di una sbarra omogenea di lunghezza  $l$  e densità  $\rho$ , rispetto ad un asse normale ad essa in uno degli estremi, conoscendo il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo al dato. Avremo:

$$I_a = I_g + M\Delta^2 = \rho \frac{l^3}{12} + M \frac{l^2}{4} = \rho \frac{l^3}{12} + \rho \frac{l^3}{4} = \rho \frac{l^3}{3},$$

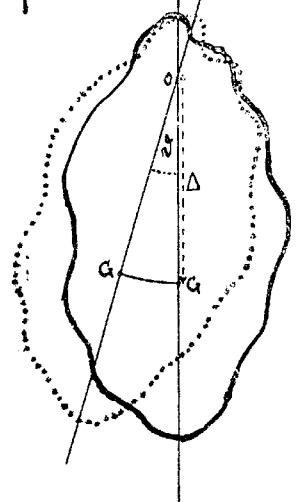
valore, questo, coincidente con quello trovato più addietro per altra via (v. pag. 209 e seg.).

Si osservi infine che dalla formula:  $I_a = I_g + M\Delta^2$ , discende che, poichè il prodotto  $M\Delta^2$  è una quantità essenzialmente positiva, il valore del momento d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi, espresso mediante il valore del momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo, cresce al crescere della distanza  $\Delta$  e diminuisce al diminuire di questa. Quindi detto momento d'inerzia sarà minimo per:  $\Delta = 0$ , cioè calcolato rispetto all'asse baricentrico stesso.

### Pendolo composto.

- Il pendolo composto è costituito da un corpo rigido sospeso per un asse orizzontale e soggetto soltanto all'azione del suo peso. Detta O la Traccia dell'asse, G il bari-

centro del corpo, la posizione del sistema è individuata quando sia dato l'angolo  $\vartheta$  che la verticale fa con  $\overline{OC_1}$ .



La posizione d'equilibrio corrisponderà, evidentemente a  $\vartheta = 0$ . La formula:

$\frac{dQ}{dt} = M$ , valida per il moto di un sistema rigido attorno ad un asse, assume, nel caso del pendolo composto, la forma:

$$I\ddot{\vartheta} = -Mg b = -Mg \Delta \sin \vartheta, \quad (1)$$

ove è:  $\Delta = \overline{OC_1}$ .

La (1) precedente, dividendo ambo i membri per  $I$ , diviene:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{Mg \Delta}{I} \sin \vartheta, \quad (2)$$

in cui il fattore  $\frac{Mg \Delta}{I}$  è costante per un determinato pendolo composto.

Consideriamo ora l'equazione del moto di un pendolo semplice, di lunghezza  $l$  e di massa  $m$ . Essa è (v. pag. ) :  $\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta, \quad (3)$

Confrontando la (2) e la (3), vediamo come esse, matematicamente, sieno identiche, dato che, tanto  $\frac{Mg \Delta}{I}$  quanto  $\frac{g}{l}$ , sono costanti; se noi vogliamo che esse rappresentino due moti oscillatori di egual periodo, dovremo eguagliare le costanti, ponendo dunque:

$$\frac{g}{l} = \frac{Mg \Delta}{I}, \quad \text{da cui:} \quad l = \frac{I}{M \Delta} \quad (4).$$

Si conclude, quindi, che il pendolo composto oscilla come un pendolo semplice di lunghezza data dalla (4) (lunghezza ridotta del pendolo composto). In particolare, per oscillazioni di piccola ampiezza,  $\vartheta$  varierà

sinusoidalmente, e le oscillazioni saranno isocrone con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mg\Delta}}$$


---

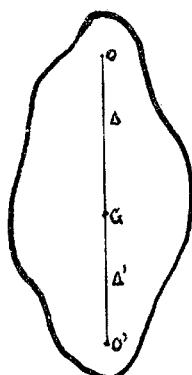
### Teorema d'inversione del pendolo composto.

- Detto  $O$  il centro di sospensione del pendolo composto e scelto, sulla retta  $\overline{OG}$ , un punto  $O'$  tale che sia:

$$\overline{OO'} = \frac{J_o}{M\Delta} \quad (1)$$

(ove  $J_o$  è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse passante per  $O$ ), punto che dicesi centro di oscillazione; vogliamo dimostrare che, senza alterare la lunghezza ridotta del pendolo, si possono scambiare tra loro  $O$  ed  $O'$ . In altre parole, sospendendo il pendolo composto per un asse passante per  $O'$ , il nuovo centro di oscillazione coincide con  $O$ . Infatti

essendo:  $J_g = J_o + M\Delta^2$



( $J_g$  = momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico), se sostituiamo, per  $J_o$ , questo valore nella (1), otteniamo:

$$\overline{OO'} = \frac{J_g}{M\Delta} + \Delta$$

Ma abbiamo anche:

$$\overline{OO'} = \Delta + \overline{GO'} = \Delta + \Delta'$$

( $\Delta'$  = distanza fra  $G$  ed  $O'$ ), e quindi:

$$\frac{J_g}{M\Delta} + \Delta = \Delta + \Delta'$$

e infine:

$$\Delta' = \frac{J_g}{M\Delta}, \text{ e identicamente}$$

te:  $\Delta \Delta' = \frac{J_a}{M}$ , relazione, questa, simmetrica in  $\Delta$  e  $\Delta'$ . Si conclude perciò che  $\Delta$  e  $\Delta'$ , e quindi  $O$  ed  $O'$ , sono permutabili tra loro.

Studiamo ora il moto di un corpo rigido con un solo punto fisso, sistema che ha tre gradi di libertà. La posizione del corpo può, quindi, essere determinata dando tre parametri, ad esempio i nove coseni direttori di una Terna solidale con esso, coseni che sono legati tra loro da sei relazioni indipendenti. Le equazioni del moto sono, al solito:

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}}, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = (\mathbf{M}) + \dot{\mathbf{M}}. \quad (2)$$

In particolare, calcolando i momenti rispetto al punto fisso  $O$ , la (2) diviene, più semplicemente:

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = (\mathbf{M}), \quad \text{ed essendo da}$$

essa scomparsa la  $\mathbf{R}$ , questa relazione servirà a determinare il movimento del sistema. La (1), ove occorra, ci servirà alla determinazione di  $\mathbf{R}$ . Procediamo anzitutto a trasformare opportunamente la (3); conviene, a tal scopo, premettere uno studio geometrico sui momenti d'inerzia.

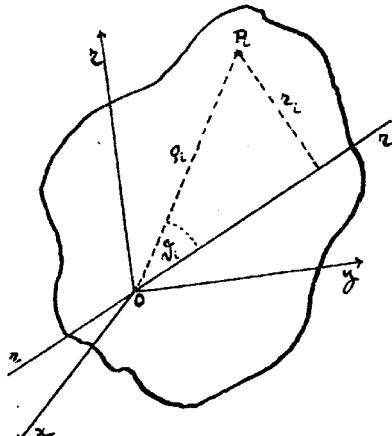
Scegliersi una Terna cartesiana d'assi con l'origine in  $O$ , e proponiamoci di calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto ad una retta  $r$ , passante per  $O$ , di coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$ . Detto  $P$  un punto generico, ed  $r_i$  la sua distanza dalla retta in questione, avremo, per il momento d'iner-

zia.  $\mathfrak{I}$ , l'espressione:

$$\mathfrak{I} = \sum_i m_i r_i^2$$

e, ponendo:  $\bar{OP}_i = s_i$  e l'angolo:  $\widehat{s_i r} = \vartheta_i$ , per  $r_i^2$   
otteniamo:

$$r_i^2 = s_i^2 - \bar{OP}'_i^2 = s_i^2 - s_i^2 \cos^2 \vartheta_i \quad (4)$$



ove  $P'_i$  è la proiezione di  $P_i$  sulla retta  $r$ . Essendo poi:

$$\cos \vartheta_i = \frac{1}{s_i} (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i) \quad ,$$

la (4) diviene:

$$r_i^2 = s_i^2 - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2, \quad \text{da cui}$$

sostituendo, per  $s_i^2$ , il suo valore:

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad \text{e sviluppando i quadrati:}$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \alpha^2 x_i^2 - \beta^2 y_i^2 - \gamma^2 z_i^2 - 2\beta y_i z_i - 2\alpha y_i z_i - 2\alpha \beta x_i z_i \quad ,$$

ovvero, identicamente:

$$r_i^2 = x_i^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + y_i^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + z_i^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) -$$

$$- \alpha^2 x_i^2 - \beta^2 y_i^2 - \gamma^2 z_i^2 - 2\beta y_i z_i - 2\alpha y_i z_i - 2\alpha \beta x_i z_i \quad ,$$

perchè è:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad .$$

In fine, semplificando:

$$r_i^2 = x_i^2 (\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2 (\alpha^2 + \gamma^2) + z_i^2 (\alpha^2 + \beta^2) - 2\beta y_i z_i - 2\alpha y_i z_i - 2\alpha \beta x_i z_i \quad ,$$

Questo valore, sostituito nell'espressione di  $\mathfrak{I}$ , ci dà:

$$\mathfrak{I} = (\beta^2 + \gamma^2) \sum_i m_i x_i^2 + (\alpha^2 + \gamma^2) \sum_i m_i y_i^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \sum_i m_i z_i^2 -$$

$$- 2\beta y \sum_i m_i y_i z_i - 2\alpha y \sum_i m_i x_i z_i - 2\alpha \beta \sum_i m_i x_i y_i \quad ,$$

od anche, ponendo in evidenza nei primi tre termini  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  e  $\gamma^2$ , otteniamo:

$$(5) \quad \mathfrak{I} = \alpha^2 \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) -$$

$$- 2\beta y \sum_i m_i y_i z_i - 2\alpha y \sum_i m_i x_i z_i - 2\alpha \beta \sum_i m_i x_i y_i \quad .$$

Così il calcolo del momento d'inerzia rispetto alla retta  $r$  è ridotto al calcolo delle sei costanti:  
 $\sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$ ;  $\sum m_i (x_i^2 + z_i^2)$ ;  $\sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$ ;  
 $\sum m_i y_i z_i$ ;  $\sum m_i x_i z_i$ ;  $\sum m_i x_i y_i$ .

Quindi, calcolate queste costanti, potremo conoscere il momento d'inerzia del nostro sistema, rispetto ad una qualsiasi retta, passante per  $O$ , quando ne siano dati i coseni direttori. Notando poi che:  $x_i^2 + y_i^2$ ,  $x_i^2 + z_i^2$ ,  $y_i^2 + z_i^2$ , rappresentano i quadrati delle distanze di  $P_i$  dall'asse  $x$ ,  $y$  ed  $x$ , rispettivamente, vediamo che i primi tre dei sei precedenti coefficienti, rappresentano i momenti di inerzia  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ , del sistema rispetto ai tre assi coordinati. La (5) diviene allora:

$$J = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\beta\gamma \sum m_i y_i z_i - 2\alpha\gamma \sum m_i x_i z_i - 2\alpha\beta \sum m_i x_i y_i.$$

Ellissoide d'inerzia. Per ottenere una rappresentazione geometrica del modo di variare di  $J$  al variare della retta, consideriamo la stella di rette col vertice in  $O$ , e sopra ogni suo raggio, a partire da  $O$ , riportiamo un segmento di lunghezza  $s$ , inversamente proporzionale alla radice quadrata di  $J$ , momento d'inerzia relativo al considerato raggio della stella, cioè tale che sia:  $s = \frac{1}{\sqrt{J}}$ . (1)

Gli estremi di tutti gli infiniti segmenti che così si ottengono, costituiscono una superficie che ci proponiamo dimostrare essere un ellissoide. Infatti, detto  $P = (x, y, z)$  l'estremo di uno dei segmenti

suddetti, avremo:

$$x = \frac{y}{\alpha} \quad , \quad y = \frac{z}{\beta} \quad , \quad z = \frac{x}{\gamma} \quad ,$$

ove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono i coseni direttori della retta cui il segmento in parola appartiene. Per  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  otterremo quindi i valori:

$$\alpha = \frac{x}{y}, \quad \beta = \frac{y}{z}, \quad \gamma = \frac{z}{x}$$

che, sostituiti nell'ultima espressione trovata per  $\gamma^2$  (v. pag. prec.), ci danno:

$$\gamma^2 = \frac{1}{J^2} \left[ J_x^2 x^2 + J_y^2 y^2 + J_z^2 z^2 - 2yz \sum m_i y_i z_i - 2xz \sum m_i x_i z_i - 2xy \sum m_i x_i y_i \right].$$

Ma dalla (1) si ricava:  $\frac{1}{J^2} = \frac{1}{\gamma^2}$ ; e sostituendo nella espressione precedente questo valore, e dividendo ambo i membri per esso, si ottiene:

$$J_x^2 x^2 + J_y^2 y^2 + J_z^2 z^2 - 2yz \sum m_i y_i z_i - 2xz \sum m_i x_i z_i - 2xy \sum m_i x_i y_i = 1$$

Questa equazione, a coefficienti costanti, rappresenta una quadrica col centro nell'origine; se sceglieremo come assi coordinati gli assi della quadrica, scompaiono i termini misti nell'equazione suddetta che assumerà, in tal caso, la forma:

$$J_x^2 x^2 + J_y^2 y^2 + J_z^2 z^2 = 1,$$

che ci rappresenta, manifestamente, un ellissoide reale perchè i coefficienti  $J_x^2, J_y^2$  ed  $J_z^2$  sono positivi per la loro stessa qualità di momenti d'inerzia. Gli assi dell'ellissoide suddetti diconsi assi principali d'inerzia. Notiamo che, riferendo si agli assi principali d'inerzia, si ha:

$$\sum_i m_i y_i z_i = 0, \quad \sum_i m_i x_i z_i = 0, \quad \sum_i m_i x_i y_i = 0.$$

Quando sia dato l'ellissoide d'inerzia, dovendosi calcolare l' $I$  rispetto ad una retta qualsiasi passante per il centro, basterà misurare, sulla direzione della retta la distanza  $\rho$  compresa fra il centro dell'ellissoide e l'intersezione della retta in parola con la superficie. Notò, così,  $\rho$ , dalla relazione:  $\rho = \frac{1}{\sqrt{I}}$ , si ricava immediatamente:

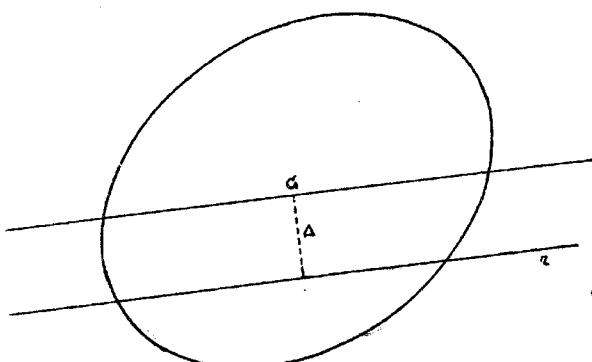
$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Ora qui discende come ai massimi valori di  $\rho$  corrispondano i minimi valori di  $I$ , e viceversa. Quindi il momento d'inerzia sarà massimo quando la retta rispetto a cui lo si calcola coincida con l'asse minore dell'ellissoide, minimo quando essa coincida con l'asse maggiore.

Vediamo, ora, come quando si sia costruito l'ellissoide d'inerzia rispetto al centro di gravità,  $G$ , del corpo, sia possibile calcolare l' $I$  rispetto ad una

retta qualsiasi. Infatti, condotta per  $G$  una retta parallela alla data, calcoliamo, col metodo descritto, l' $I$  rispetto ad essa; detta quindi,  $\Delta$  la distanza fra le due rette, per la nota formula che dà il

momento d'inerzia, rispetto ad un asse qualsiasi, espresso in funzione di quello relativo all'asse baricentrico parallelo, avremo:



$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_a + M\Delta^2,$$

ove  $M$  è la massa totale del corpo.

Comiamo a considerare il moto di un sistema rigido vincolato ad avere un punto fisso ed avente, quindi, tre gradi di libertà. Scegliamo, come terna solidale col corpo, quella formata dagli assi principali d'inerzia. Sappiamo dalla cinematica che il moto può riguardarsi come rotatorio attorno ad un asse variabile da istante a istante. Detta  $\omega$  la velocità angolare in un istante generico, per la velocità  $V_i$  di un punto qualsiasi  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  del sistema avremo l'espressione:

$$V_i = \omega \wedge (P_i - O), \quad (1)$$

e per le componenti di essa (rispetto agli assi mobili  $x, y, z$ ):

$$V_x = qz_i - r y_i, \quad V_y = rx_i - pz_i, \quad V_z = py_i - qx_i,$$

essendo, al solito,  $p, q$  ed  $r$ , le componenti di  $\omega$ .

Si noti che mentre  $x_i, y_i$  e  $z_i$  sono costanti rispetto al tempo, variano, invece,  $p, q$  ed  $r$ .

Per determinare il moto del sistema, occorrono tre equazioni scalari che ci vengono fornite dalla nota equazione vettoriale:

$$\frac{dQ}{dt} = M$$

Proponiamoci quindi di calcolare  $Q$ , cioè le sue componenti:  $Q_x, Q_y, Q_z$ . Dovremo moltiplicare vettorialmente la (1) per  $m_i(P_i - O)$ , ed eseguendo il sommatorio esteso agli  $n$  punti del

sistema, ottenendo così:

$$Q = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i V_i ,$$

e per la componente secondo l'asse  $x$

$$Q_x = \sum_i m_i [y_i(p y_i - q x_i) - z_i(r x_i - p z_i)] = \sum_i^n m_i [p(y_i^2 + z_i^2) - q y_i x_i - r z_i x_i] = p \sum_i^n m_i (y_i^2 + z_i^2) - q \sum_i^n m_i y_i x_i - r \sum_i^n m_i z_i x_i ,$$

ed infine, notando che  $y_i^2 + z_i^2$  ci rappresenta la distanza di  $P_i$  dall'asse  $x$ , e che, essendosi scelti per assi coordinati gli assi principali d'inerzia, è:

$$\sum_i^n m_i x_i y_i = \sum_i^n m_i x_i z_i = \sum_i^n m_i y_i z_i = 0 ,$$

si ottiene: (1)  $Q_x = p \sum_i^n m_i (y_i^2 + z_i^2) = p J_x ,$

ed operando in modo analogo:

$$(2) Q_y = q \sum_i^n m_i (x_i^2 + z_i^2) = q J_y ; \quad Q_z = r \sum_i^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = r J_z .$$

Se l'asse di rotazione coincide con uno degli assi principali d'inerzia, ad esempio con l'asse  $x$ , si ha:

$$q = r = 0 , \quad \text{cioè} : \quad Q_y = Q_z = 0 ,$$

e quindi:  $Q = Q_x = p J_x ,$  cioè, in questo caso, la direzione di  $Q$  coincide con quella dell'asse di rotazione. Dalle (2) si conclude, perciò: i vettori  $Q$  ed  $w$ , rispettivamente, quantità di moto areale e velocità angolare del sistema, risultano paralleli allora, ed allora soltanto, che l'asse di rotazione coincide con uno degli assi principali d'inerzia.

Nel caso di un asse generico (sempre passante per

O) vediamo come si possa costruire il vettore  $Q$ . Considerando l'equazione dell'ellissoide:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

sappiamo che i coseni direttori della normale ad esso, sono proporzionali alle derivate parziali dell'equazione precedente, cioè, trascurando il fattore 2, a:

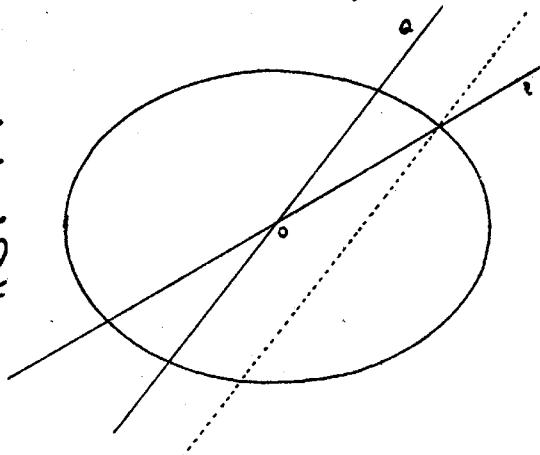
$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

Se costruiamo la normale alla superficie nel punto d'incontro con l'asse di rotazione (istantaneo), si vede immediatamente come

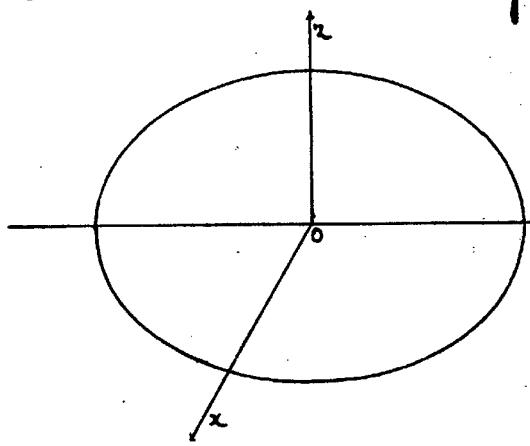
$$p \frac{\partial}{\partial x}, q \frac{\partial}{\partial y}, r \frac{\partial}{\partial z},$$

componenti della  $Q$ , siano proporzionali ad  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ , che, come si è visto, sono alla loro volta proporzionali ai coseni direttori (e quindi alle componenti) della normale nel punto d'incontro dell'ellissoide con l'asse;  $Q$  risulta, quindi, parallelo a detta normale. Concludendo: quando l'asse di rotazione non coincide con alcuno degli assi principali d'inerzia, per ottenere la direzione di  $Q$  si costruirà la normale all'ellissoide nel punto d'incontro col dato asse, e conducendo per il centro dell'ellissoide la parallela alla normale suddetta si ottenerà la direzione di  $Q$ .

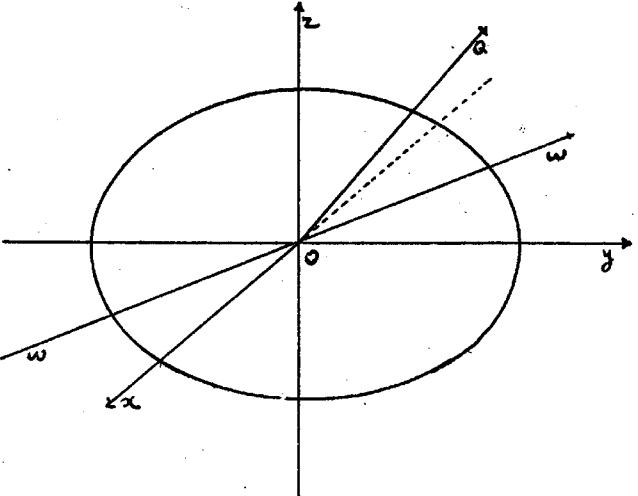
Se le forze agenti sul corpo si annullano, oppure se è, identicamente,  $(M)=0$ , risulta al-



Allora:  $\frac{dQ}{dt} = 0$ , cioè:  $Q = Q_0 = \text{cost.}$ . E d'esso allora conoscere le condizioni iniziali del moto, cioè la velocità angolare iniziale  $\omega$ ; se la direzione di  $\omega$  coincide con quella di uno degli assi principali d'inerzia, il moto del corpo continua ad essere rotatorio, poiché resta soddisfatta la condizione precedente che esige la costanza del vettore  $Q$ ; infatti, per quanto più addietro è stato detto, la direzione di  $Q$  coincide allora con quella dell'asse di rotazione e  $Q$  rimane quindi invariato. Nel caso più generale in cui  $\omega$  non coincida con nessuno degli assi principali d'inerzia,  $Q$  avrà direzione diversa da esso; se quindi il moto fosse rotatorio,  $Q$  non resterebbe costante



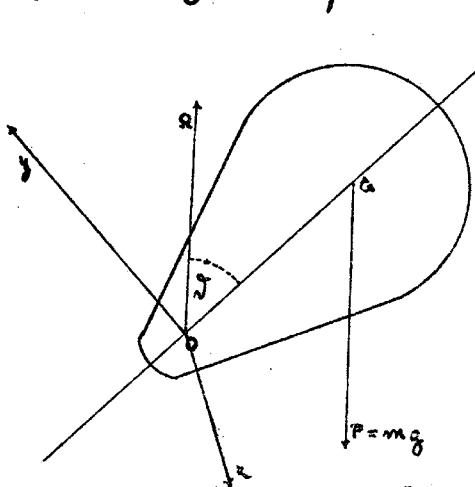
perchè varierebbe la sua direzione, descrivendo esso nello spazio un cono col vertice in  $O$ ; il moto non può, dunque, essere rotatorio, ma è, invece, di carattere più complesso.



### - Giroscopio.

- Il giroscopio è costituito da un corpo di rota.

-zione, con un punto,  $O$ , del suo asse, fisso. L'ellissoide d'inerzia del giroscopio, è, dunque, un ellissoide di rotazione attorno all'asse del corpo, col centro in  $O$ . Scegliamo come origine delle coordinate il punto  $O$ , come asse  $x$  l'asse  $p$  di rotazione dell'ellissoide, come assi  $y$  e  $z$ , infine, due qualsiasi diametri ortogonali del cerchio sezione equatoriale dell'ellissoide stesso. Imprimiamo al giroscopio una velocità di rotazione  $\rho$  attorno al suo asse ( $\rho$ , coincidente con l'asse  $x$ ) ed appoggiamolo su di un sostegno per il punto fisso  $O$ ; sapendo, inoltre, che il corpo è soggetto all'azione del suo peso,  $P = mg$ , applicato nel baricentro, proponiamoci di determinare il suo movimento. Si potrebbe far ciò mediante la conoscenza delle forze agenti sul giroscopio, ma non è questa la via più agevole; invece, siccome l'esperienza ci dice



che il moto del giroscopio risulta di due distinti moti di rotazione, l'uno attorno all'asse  $p$ , (con velocità angolare  $\rho$ ) e l'altro attorno ad un asse  $\Omega$  (con velocità angolare  $\Omega$ ) verticale e

passante per  $O$ , e, siccome questo punto è fisso, l'asse  $p$  descrive una superficie conica col vertice nel punto medesimo, risaliremo dalla conoscenza del moto alla determinazione delle forze.

Per dare un'opportuna disposizione agli assi coordinati, scegiamo ancora per asse  $x$  l'asse di rotazione  $p$ , per asse  $y$  la normale a quest'ultimo in  $O$ , nel piano  $\Omega p$ , ed, infine, per asse  $z$  la normale ai due precedenti. Detto  $\vartheta$  l'angolo che  $\Omega$  fa con l'asse  $x$ , per le componenti della rotazione  $\omega$ , risultante delle rotazioni  $\Omega$  e  $p$ , avremo:

$$(1) \quad \omega_x = p + \Omega \cos \vartheta, \quad \omega_y = \Omega \sin \vartheta, \quad \omega_z = 0.$$

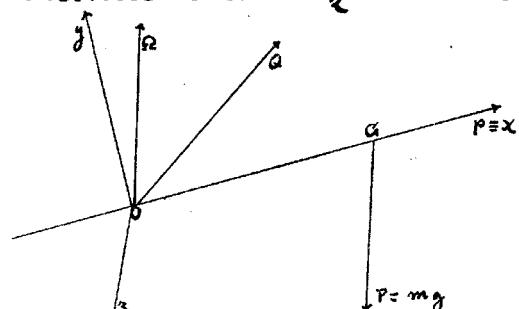
Passiamo ora a calcolare la quantità di moto angolare,  $Q$ , del sistema. Osserviamo anzitutto che, trattandosi di un corpo con un punto fisso, dotato di moto rotatorio, poiché si sono scelti per assi coordinati gli assi principali d'inerzia (il che si riconosce immediatamente notando che l'asse  $p$ , scelto come asse  $x$ , coincide con l'asse di rotazione dell'ellissoide d'inerzia, e che gli assi  $y$  e  $z$  sono due diametri ortogonali dell'ellissoide nel piano equatoriale), le componenti  $Q_x$ ,  $Q_y$  e  $Q_z$ , ci sono fornite, rispettivamente dalle espressioni:

$$\omega_x J_x, \quad \omega_y J_y, \quad \omega_z J_z.$$

Notando che  $\omega_z$  è nulla, e sostituendo nelle precedenti, per  $\omega_x$  ed  $\omega_y$ , i valori forniti dalle (1), ottieniamo:

$$Q_x = J_x (p + \Omega \cos \vartheta), \\ Q_y = J_y \Omega \sin \vartheta.$$

Il vettore  $Q$  giace, dunque, nel piano  $xy$  ( $\equiv p\Omega$ ); conoscendone le componenti potremo costruirlo, e, dovendo rimanere complanare con  $\Omega$  e con  $p$ , esso si muo-



verà assieme al giroscopio ruotando attorno all'asse  $\Omega$ . Ci resta ancora da determinare  $\Omega$  in modo che sia soddisfatta l'equazione:  $\frac{dQ}{dt} = (M)$ . Nel caso nostro  $(M)$  è dato dal momento rispetto ad  $O$  del peso  $P$  del giroscopio. Quanto poi alla derivata del vettore  $Q$ , siccome esso ha un estremo fisso, questa coincide con la velocità dell'altro estremo, velocità che, evidentemente, risulta normale al piano  $xy$ ; si riconosce, d'altra parte, immediatamente, che anche  $(M)$  è normale al piano sudetto. Infatti  $(M)$ , come prodotto vettoriale di  $(G-O)$  e  $P$ , risulta perpendicolare al piano di questi due vettori, cioè al piano della figura che è verticale.  $(M)$  e  $\frac{dQ}{dt}$ , coincidono dunque in direzione. Quanto, poi, alla grandezza, abbiamo:

$$(2) \quad \left| \frac{dQ}{dt} \right| = |V_s| = |\Omega| \cdot d,$$

ove  $d$  è la distanza di  $S$  dall'asse  $\Omega$ . Ma osservando che è:

$$d = Q_x \sin \vartheta - Q_y \cos \vartheta;$$

sostituendo nella (2), troviamo:

$$(3) \quad \left| \frac{dQ}{dt} \right| = |\Omega| (Q_x \sin \vartheta - Q_y \cos \vartheta).$$

Per la grandezza di  $(M)$  (momento di  $P$ ), abbiamo:

$$|(M)| = Pa \sin \vartheta = mg a \sin \vartheta, \quad (a=OG).$$

Equagliando quest'ultima con la (3) si ha:

$$|\Omega| (Q_x \sin \vartheta - Q_y \cos \vartheta) = mg a \sin \vartheta,$$

e sostituendo a primo membro, per  $Q_x$  e  $Q_y$ , i

rispettivi valori trovati a pag. 227, otteniamo:

$$|\Omega| \cdot [J_x(p + |\Omega| \cos \vartheta) \sin \vartheta - J_y |\Omega| \sin \vartheta \cos \vartheta] = m g a \sin \vartheta,$$

e dividendo ambo i membri per  $\sin \vartheta$ :

$$|\Omega| \cdot [J_x(p + |\Omega| \cos \vartheta) - J_y |\Omega| \cos \vartheta] = m g a.$$

Sviluppando quest'espressione, si otterrebbe un'equazione di secondo grado in  $\Omega$ , di cui si potrebbe, perciò, determinare il valore. Ma un valore di  $\Omega$  sufficientemente approssimato si ottiene osservando che, siccome nella pratica la rotazione  $\Omega$  è molto più piccola della rotazione  $p$ , nella precedente equazione si possono, senza errore apprezzabile, trascurare i termini contenenti  $\Omega^2$ ; essa diviene allora:

$$|\Omega| J_x p = m g a ,$$

da cui, infine:

$$|\Omega| = \frac{m g a}{J_x p} .$$

Vediamo, quindi, che  $|\Omega|$  cresce sia al diminuire della velocità angolare  $p$  (rimanendo costanti gli altri fattori), sia al diminuire di  $J_x$ .

In generale, supponiamo d'imprimere al giroscopio una forte velocità angolare attorno al suo asse  $p$ , ed ammettiamo che gli altri eventuali movimenti del giroscopio abbiano velocità trascurabile in confronto a questa. Potremo allora, in prima approssimazione, ammettere che la quantità di moto areale sia dovuta soltanto al moto di rotazione attorno a  $p$ , e quindi coincida in direzione con questo asse ed abbia grandezza data da:

$$J_x p$$

Tenendo conto di ciò, ci si spiega perché, facendo agire sul giroscopio una forza qualsiasi, esso si sposti in direzione normale al piano della forza e dell'asse, infatti il momento ( $M$ ) della forza è eguale alla derivata della quantità di moto areale,  $\frac{dL}{dt}$ , che, come si è visto, è normale all'asse di rotazione.

---

## Moto di un sistema rigido o libero.

Consideriamo ora, il moto di un sistema rigido libero di muoversi comunque, sistema che ha, dunque, sei gradi di libertà. Mentre in cinematica si potevano scegliere indifferentemente gli assi della terna solidale col sistema, in dinamica è più conveniente scegliere per origine il centro di gravità,  $C$ , e per assi, gli assi principali d'inerzia. La velocità di ogni punto del sistema, si può considerare come risultante della velocità  $V_g$  del centro di gravità, e della velocità del punto nel moto relativo a  $C$ , moto che, ad ogni istante, può considerarsi rotatorio. Ora, per determinare il moto del centro di gravità, osserviamo che è:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{A}_g = \mathbf{R}, \quad (1)$$

ove  $A_g$  è l'accelerazione del centro di gravità; il punto  $C$  si muove dunque come un punto materiale di massa eguale alla massa totale,  $M$ , del sistema, al quale sia applicata la forza  $R$ , cioè

il risultante delle forze applicate al sistema. Alla (1) si può dare anche la forma scalare:

$$M\ddot{x}_o = R_x, \quad M\ddot{y}_o = R_y, \quad M\ddot{z}_o = R_z.$$

Resta da considerare dunque il moto del sistema relativo al centro di gravità. Diciamo che questo moto è uguale a quello che avrebbe il sistema se, restando inalterate le forze applicate, il centro di gravità venisse fissato. Infatti il moto relativo a  $G_i$  viene determinato dall'equazione delle quantità di moto areali (presa rispetto a  $G_i$ ):

$$(2) \quad \frac{dQ}{dt} = (M) .$$

Se  $G_i$  fosse un punto fisso, l'equazione del moto attorno ad esso sarebbe:

$$(3) \quad \frac{dQ'}{dt} = (M) .$$

$Q$  e  $Q'$  sono, rispettivamente, i momenti, rispetto a  $G_i$ , delle quantità di moto nel moto effettivo (somma del moto traslatorio e del moto relativo) e nel solo moto relativo. Per dimostrare che esse coincidono, basterà far vedere che è nulla la quantità di moto areale della parte traslatoria del moto del sistema (la parte, cioè, in cui la velocità di ogni punto è uguale alla velocità  $V_a$  di  $G_i$ ). A tale scopo osserviamo che questa quantità di moto areale,  $Q(V_a)$ , ci è data da:

$$Q(V_a) = \sum (P_i - G_i) \wedge m_i V_a ,$$

ovvero:  $Q(V_a) = [\sum m_i (R - G_i)] \wedge V_a . \quad (4)$

Per dimostrare che quest'ultima espressione è nulla, basterà provare che è:

$$\sum m_i (P_i - G) = 0 ;$$

ora, riferendoci ad assi qualsiasi, proiettiamo il vettore  $\sum m_i (P_i - G)$ ; p.es., sull'asse  $x$ . Troviamo:  
(5)  $\sum m_i (x_i - x_0) = \sum m_i x_i - \sum m_i x_0 = \sum m_i x_i - x_0 \sum m_i$ ,  
ove, al solito,  $x_0$  è l'ascissa di  $G$ . Ma sappiamo che è:  

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$
,

e quindi si riconosce che l'espressione (5) si annulla; analogamente si dimostrerebbe che si annullano le altre componenti di  $\sum m_i (P_i - G)$ . Resta con ciò dimostrato che:  $Q(V_a) = 0$ , e quindi:

$$Q = Q'$$

Cioè posto, si vede che le due equazioni, (2) e (3), coincidono, ora, completamente tra loro, e da ciò si deduce che il moto del sistema, relativo a  $G$ , avviene come se  $G$  fosse un punto fisso, ed il corpo ruotasse attorno ad esso.

Teorema della forza viva per i sistemi rigidi.-  
- La forza viva,  $T$ , di un sistema rigido è, evidentemente data dalla somma delle forze vive dei singoli punti, e cioè, indicando con  $m_i$  la massa, e con  $V_i$  la velocità di uno qualsiasi degli  $n$  punti del sistema, avremo:

$$T = \sum_i^n \frac{1}{2} m_i V_i^2 . \quad (1)$$

Ma, come abbiamo visto precedentemente, la velo-

città di un punto di un sistema rigido libero, ci è data da:

$$V_i = V_G + \omega \wedge (P_i - G) ;$$

elevando al quadrato:

$$V_i^2 = V_G^2 + [\omega \wedge (P_i - G)]^2 + 2 V_G \times [\omega \wedge (P_i - G)] ,$$

e sostituendo nella (1), per  $V_i^2$ , questo valore, ottieniamo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2 + V_G \times [\omega \wedge \sum_i m_i (P_i - G)] .$$

Osservando poi che è:  $\sum_i m_i = M$  (massa totale del sistema), e che è:  $\sum m_i (P_i - G) = 0$  (v. pag. prec.), l'espressione di  $T$  assume la forma:

$$T = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2 .$$

Si vede, dunque, come la forza viva del sistema considerato sia costituita di una somma di due termini, uno dei quali ci rappresenta la forza viva dovuta al moto traslatorio del centro di gravità,  $G$ , cui è attribuita una massa eguale alla massa totale,  $M$ , del sistema, e l'altro che ci rappresenta la forza viva dovuta al moto rotatorio del sistema attorno ad un asse (istantaneo) passante per  $G$ .

Ottenuta così l'espressione della forza viva del sistema, passiamo ora a considerare il lavoro effettuato dalle forze agenti su di esso, durante il suo movimento, e proponiamoci, anzitutto, di dimostrare come il lavoro eseguito dalle forze interne sia nullo. Limitandoci, infatti, per semplicità, a considerare due soli punti del sistema, p.es., A e B, sappiamo

che essi esercitano tra loro, reciprocamente, due forze,  $F$  e  $-F$ , uguali in grandezza, di verso opposto, e con la direzione di  $\overline{AB}$ . Se, in un tempo scalo elementare,  $dt$ , i due punti si spostano degli spazi infinitesimi  $dA$  e  $dB$ , rispettivamente, per il lavoro totale compiuto dalle forze  $F$  e  $-F$  sui due punti, avremo:

$$L_{A,B} = F \times dA - F \times dB = F \times (dA - dB) = F \times d(A-B).$$

Ma, per la rigidità del sistema, è:

$$(A-B)^2 = \text{cost.},$$

da cui, differenziando e dividendo per 2, otteniamo la relazione:

$$(A-B) \times d(A-B) = 0.$$

Da quest'ultima relazione si vede che è:

$$(A-B) \perp d(A-B),$$

e, siccome  $F$  è parallela ad  $(A-B)$ , è ancora:

$$d(A-B) \perp F.$$

Tenendo conto di ciò, possiamo scrivere:

$$L_{A,B} = F \times (dA - dB) = F \times d(A-B) = 0,$$

che ci dice che i lavori delle forze interne si annullano a due a due, come appunto volevamo dimostrare.

È evidente, poi, che se un sistema si muove, restando fissi uno o due dei suoi punti, il lavoro delle reazioni esercitate da questi vincoli è nullo. Infatti, poiché le reazioni sono applicate a punti fissi, manca nell'espressione del lavoro da esse compiuto il fattore spostamento; detto lavoro è, quindi, nullo.

Ovendo così provato che è nullo il lavoro delle forze interne e quello delle reazioni vincolari, ci propon-

niamo di dimostrare come la variazione della forza viva,  $T$ , del sistema sia eguale al lavoro delle forze esterne. Infatti, il lavoro elementare,  $dL_i$ , compiuto dalle forze esterne su di un punto generico,  $P_i$ , del sistema, ove con  $F_i$  si indichi la forza totale (esterna) agente sul punto; e con  $ds_i$  lo spostamento di esso, ci è dato da:

$$dL_i = F_i \times ds_i = F_i \times [V_a + \omega \wedge (P_i - G)] dt, \quad (1)$$

essendo, al solito:

$$V_i = V_a + \omega \wedge (P_i - G).$$

Facendo la sommatoria, estesa a tutti gli  $n$  punti del sistema, della (1), avremo per il lavoro elementare compiuto dalle forze esterne sul sistema:

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i dL_i = \sum_i F_i \times [V_a + \omega \wedge (P_i - G)] dt = \\ &= \left[ \sum_i F_i \times V_a + \sum_i F_i \times [\omega \wedge (P_i - G)] \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Il termine:  $\sum_i F_i \times V_a$ , essendo:  $\sum_i F_i = R$  (risultante delle forze esterne), diventa:

$$R \times V_a; \quad (3)$$

il termine:  $\sum_i F_i \times [\omega \wedge (P_i - G)]$  che è il prodotto misto di tre vettori, non si altera circolando su di essi; quindi esso è eguale a:  $\sum_i \omega \times [(P_i - G) \wedge F_i]$ ,

ed, infine, a:  $\omega \times \sum_i [(P_i - G) \wedge F_i]$ . Notando poi che è:  $\sum_i [(P_i - G) \wedge F_i] = (M)_a$ , momento totale delle forze esterne, calcolato rispetto al centro di gravità, risulta in definitiva:

$$\sum_i F_i \times [\omega \wedge (P_i - G)] = \omega \times (M)_a,$$

ed allora, tenendo conto di quest'ultima e della (3), la (2) diviene:  $dL = [R \times V_a + \omega \times (M)_a] dt$ ,

e, dividendo ambo i membri per  $dt$ , abbiamo infine:

$$\frac{dL}{dt} = R \times V_a + \omega \times (M)_a .$$

Il nostro Teorema sarà stabilito se dimostreremo che questa derivata del lavoro eseguito dalle forze esterne, è uguale alla derivata di  $T$  rispetto al tempo, cioè alla derivata dell'espressione:

$$\frac{1}{2} M V_a^2 + \frac{1}{2} \sum m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2 .$$

Prima di derivare quest'ultima, procediamo a trasformare in essa, opportunamente, il termine:

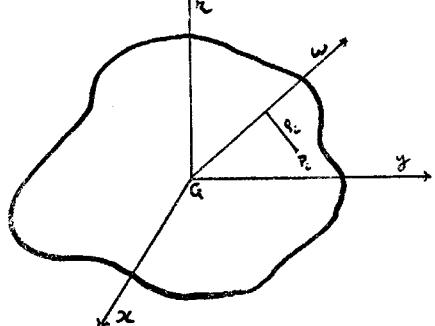
$$\frac{1}{2} \sum m_i [\omega \wedge (P_i - G)]^2 .$$

Scogliamo per Terna  $x, y, z$ , di riferimento, quella degli assi principali d'inerzia (e che, quindi, ha l'origine in  $G$ ), ed osserviamo che il vettore:

$$[\omega \wedge (P_i - G)]^2 .$$

che compare nella precedente espressione, è il quadrato della velocità sulla Traiettoria di un punto generico del sistema, velocità che ricaveremo ora

in altro modo. A tal scopo, detti  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , i coseni direttori, rispetto ad  $x, y, z$ , dell'asse istantaneo di rotazione, e si la distanza da esso di un punto



generico  $P_i$  del corpo, per la velocità,  $V_i$ , di questo, abbiamo:

$$V_i = \omega g_i ;$$

levando al quadrato:  $V_i^2 = \omega^2 g_i^2$ ,

e quindi, per la forza viva di  $P_i$  dovuta al solo moto di rotazione (forza viva che indichiamo con  $T_{i,\text{rot.}}$ ) abbiamo l'espressione:

$$T_{i,\text{rot.}} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 ,$$

e per la forza viva dell'intero sistema:

$$T_{\text{rot.}} = \sum_i^n T_{i,\text{rot.}} = \sum_i^n m_i \omega^2 \rho_i^2 = \omega^2 \sum_i^n m_i \rho_i^2$$

ed infine, notando che  $\sum_i^n m_i \rho_i^2$ , è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse  $\omega$ , risulta:

$$T_{\text{rot.}} = \omega^2 J . \quad (4)$$

Siccome poi il momento d'inerzia,  $J$ , rispetto ad un asse passante pel centro di gravità, di coseni direttori  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , rispetto alla Terna  $x, y, z$ , degli assi principali d'inerzia, ci è dato da:

$$J = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z ,$$

sostituendo nella (4), otteniamo:

$$T_{\text{rot.}} = \omega^2 \alpha^2 J_x + \omega^2 \beta^2 J_y + \omega^2 \gamma^2 J_z ,$$

e poiché:  $\alpha^2 \omega^2$ ,  $\beta^2 \omega^2$  e  $\gamma^2 \omega^2$ , non sono altro che i quadrati delle componenti, secondo la Terna  $x, y, z$ , della rotazione  $\omega$ , componenti che, al solito, indichiamo con  $p, q$  ed  $r$ , abbiamo:

$$T_{\text{rot.}} = J_x p^2 + J_y q^2 + J_z r^2 ;$$

ed, infine, sostituendo nell'espressione di  $T$ , per la forza viva dovuta al moto rotatorio, quest'ultimo valere, si ha:  $T = \frac{1}{2} M V_a^2 + \frac{1}{2} (J_x p^2 + J_y q^2 + J_z r^2)$ .

Passiamo, ora, a derivare quest'espressione rispetto al tempo:  $\frac{dT}{dt} = M V_a \times A_a + p J_x \dot{p} + q J_y \dot{q} + r J_z \dot{r}$ . (5)

Ricordando che è:

$$Q_x = \mathcal{J}_x p, \quad Q_y = \mathcal{J}_y q, \quad Q_z = \mathcal{J}_z r, \quad \text{e quindi:}$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \mathcal{J}_x \dot{p}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \mathcal{J}_y \dot{q}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \mathcal{J}_z \dot{r},$$

la (5) precedente diviene:

$$\frac{dT}{dt} = MA_g \times V_g + p \frac{dQ_x}{dt} + q \frac{dQ_y}{dt} + r \frac{dQ_z}{dt},$$

ovvero:

$$\frac{dT}{dt} = MA_g \times V_g + \omega \times \frac{dQ}{dt},$$

ed infine, poiché è:  $MA_g = R$ , e:  $\frac{dQ}{dt} = M$ , ottieniamo:

$$\frac{dT}{dt} = R \times V_g + \omega \times M,$$

formula questa, che coincide con la:

$$\frac{dL}{dt} = V_g \times R + \omega \times M.$$

Possiamo, quindi, concludere che la derivata della forza viva del sistema, è uguale alla derivata del lavoro compiuto su di esso dalle forze esterne, e porre, quindi, più brevemente:  $dL = dT$ ,

ed integrando quest'ultima tra due valori,  $t_1$  e  $t_2$ , del tempo, otteniamo:

$$L_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} dT = T_2 - T_1.$$

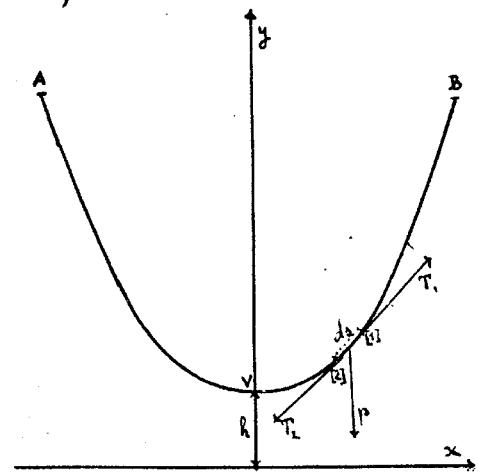
Questa relazione esprime il principio della conservazione dell'energia nel caso dei sistemi rigidi.

# ~ ~ S T A T I C A ~ ~ ~ ~ ~

## ~ ~ ~ ~ ~ G E N E R A L E . ~ ~

### - Catenaria .

Come primo esempio, proponiamoci di determinare l'equazione della curva secondo la quale si dispone un filo pesante, omogeneo, flessibile ed inestensibile, sospeso per i suoi due estremi, A e B. Questo sistema continuo ha, evidentemente, infiniti gradi di libertà, per conoscere, infatti, la posizione di esso, bisogna conoscere le coordinate degli infiniti suoi punti. Ci proponiamo di vedere come si possa giungere a stabilire l'equazione della curva secondo la quale il filo si dispone; è evidente, anzitutto, che questa sarà piana e, precisamente, contenuta nel piano verticale passante per AB. Scegliamo per asse y la verticale passante per il punto più basso, V, della curva, orientato dal basso verso l'alto, per asse x



una qualsiasi retta normale all'asse y nel piano della curva; l'origine sarà scelta opportunamente più tardi. Considerando, anque, un elemento,  $ds$ , di filo, si riconosce che esso è soggetto ai suoi due estremi, [1] e [2],

a due tensioni,  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$ , di eguale grandezza e segno contrario, aventi, rispettivamente, la direzione della tangente alla curva in [1] ed in [2], ed, infine,

al proprio peso,  $\vec{p}$ , applicato nel centro di gravità; detta  $\gamma$  la densità costante del filo, per la grandezza di  $\vec{p}$ , avremo:

$$|\vec{p}| = \gamma s ds .$$

Per ipotesi, l'elemento di filo  $ds$  non è rigido, eppure, per stabilirne le condizioni di equilibrio, non potremo, senz'altro, applicare l'equazioni trovate per l'equilibrio di un sistema rigido; se, però, per un istante, supponiamo che  $ds$  si irrigidisca, è evidente che l'equilibrio non verrebbe turbato e, per conseguenza, le condizioni d'equilibrio, per l'elemento pensato come rigido:

$$R = 0 , \quad M = 0 , \quad \text{saranno necessarie per l'equilibrio}$$

(a priori non si può affermare che esse siano sufficienti). Dovrà, dunque, annullarsi il risultante,  $R$ , delle forze agenti sull'elemento  $ds$ ; dovrà cioè essere:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{p} = 0 ,$$

equazione vettoriale, questa che ne rappresenta due scalari. Per le componenti di  $\vec{T}_1$  secondo gli assi  $x$  ed  $y$ , rispettivamente, indicando con  $T$  la grandezza della tensione del filo, avremo:

$$-T \frac{dx}{ds} ; \quad -T \frac{dy}{ds} .$$

Per le componenti di  $T_2$ , poi, se osserviamo che per passare da [1] in [2], bisogna spostarsi di  $ds$  lungo la curva, e, quindi, la tensione in [2], salvo il verso, differirà dalla tensione in [1] per il differenziale di quest'ultima, potremo dunque porre:

$$T \frac{dx}{ds} + d(T \frac{dx}{ds}); \quad T \frac{dy}{ds} + d(T \frac{dy}{ds}) ,$$

ove  $d(T \frac{dx}{ds})$  e  $d(T \frac{dy}{ds})$  rappresentano i differenziali delle componenti della tensione in [1]. Infine, il peso  $\vec{p}$  dell'elemento  $ds$  ha, per la scelta fatta degli assi, nulla la componente  $x$ , e la componente  $y$  dataci da:

$$-g \cdot s \cdot ds$$

Dovendo annullarsi il risultante,  $R$  (e quindi, le sue componenti  $R_x$  ed  $R_y$ ), delle tre forze agenti su  $ds$ , sommando le componenti omonime di queste, otteniamo le due equazioni:

$$(1) \quad R_x = d(T \frac{dx}{ds}) = 0 \quad ; \quad (2) \quad R_y = d(T \frac{dy}{ds}) - g s ds = 0$$

che, unite alla nota relazione  $(3) dx^2 + dy^2 = ds^2$ , costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali da cui possiamo ricavare  $x$ ,  $y$  e  $T$ , in funzione di  $s$ . Integrando la (1), otteniamo:

$$(4) \quad \int d(T \frac{dx}{ds}) = T \frac{dx}{ds} = T_0 = \text{cost.}$$

Per determinare il valore della costante  $T_0$ , osserviamo che nel punto più basso della curva,  $V$ , la tangente è parallela all'asse  $x$ ; risulta perciò:

$$\frac{dx}{ds} = 1, \text{ e quindi dalla (4) si ricava:}$$

$$T = T_0,$$

cioè,  $T_0$  rappresenta la tensione nel punto  $V$ .

Passando ad integrare la (2), abbiamo:

$$\int d(T \frac{dy}{ds}) = \int g s ds,$$

ed eseguendo la quadratura:

$$(5) \quad T \frac{dy}{ds} = g s s + \text{cost.};$$

per determinare il valore della costante additiva

Se ci riferiamo ancora al punto V, vediamo che in esso la tangente è normale all'asse y, e quindi è:

$$\frac{dy}{ds} = 0 ,$$

e siccome, poi, gli archi si contano a partire da V, in esso punto è anche:

$$s = 0$$

ed allora si annulla la costante nella (5). Dividendo poi membri a membro la (5) per la (4), otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g \cdot s}{T_0} ; \quad (6)$$

ed introducendo una costante h, tale che sia:

$$h = \frac{T_0}{g s} ,$$

la (6) precedente diviene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{h} . \quad (7)$$

Si noti che la costante h rappresenta la lunghezza di filo il cui peso è uguale alla Tensione nel punto V. La (7) e la (3) sono due relazioni in cui non compare più la Tensione T; esse potranno, perciò, servire a determinare l'equazione della curva. Derivando la (7), e sostituendo nell'espressione derivata, per ds, il valore:  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , dato dalle (3), abbiamo:

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{ds}{h} = \frac{1}{h} \sqrt{dx^2 + dy^2} ,$$

ovvero, identicamente:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{h} \sqrt{1+y'^2} , \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{h} ,$$

equazione differenziale a variabili separabili, che si integra immediatamente. Avremo:

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x}{h} + \text{cost.},$$

e poiché è:

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{arc. Sh. } y',$$

risulterà:

$$\text{arc. Sh. } y' = \frac{x}{h} + \text{cost.} \quad (8)$$

In questa espressione, la costante additiva si annulla (rifendoci al solo punto V). La (8) precedente può anche scriversi:

$$\frac{dy}{dx} = \text{Sh} \frac{x}{h},$$

e moltiplicando ambo i membri per  $dx$ :

$$dy = \text{Sh} \frac{x}{h} dx,$$

da cui, infine, integrando:

$$y = \text{Ch} \frac{x}{h} + \text{cost.} \quad (9)$$

Quest'ultima è l'equazione della catenaria. Affinchè anche l'ultima costante additiva si annulli, basta scegliere l'asse  $x$  a distanza  $h$  dal vertice V, della curva; in tal caso la (9) diviene, più semplicemente:

$$\underline{\underline{y = \text{Ch} \frac{x}{h}}}.$$

### Catenaria dei ponti sospesi.

Se immaginiamo di sospendere ad un filo (fisato per i suoi estremi) su tutta la lunghezza di esso un sistema rettilineo (per es. un ponte sospeso) così pesante da potersi trascurare rispetto ad esso il peso del filo. Quest'ultimo si dispone

secondo una curva che vien detta catenaria dei ponti sospesi. Mentre, nel caso della catenaria precedentemente considerata, la forza agente su ciascun elemento di filo era proporzionale al peso dello stesso, nel caso della catenaria dei ponti sospesi, ogni elemento di filo è soggetto ad una forza proporzionale al tratto, p. es., di ponte che esso deve sorreggere, ossia alla sua proiezione sulla direzione orizzontale. Scegliendo, appunto, per asse  $x$  quest'ultima, e per asse  $y$  la normale ad essa pel punto più basso,  $V$ , della curva, ci proponiamo di dimostrare che la catenaria dei ponti sospesi è una parabola. Siccome, in una schematica idealizzazione, il ponte sospeso può riguardarsi come un sistema lineare

omogeneo, detta  $\varsigma$  la sua densità, il peso che un elemento di filo ci è dato da:  $g \varsigma dx$ . Sostituendo quindi, nelle equazioni di equilibrio (1) e (2) della catenaria semplice,  $g \varsigma dx$  in luogo di  $g \varsigma ds$ , ottieniamo:

$$(1) \quad d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \text{e:} \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = g \varsigma dx \quad (2),$$

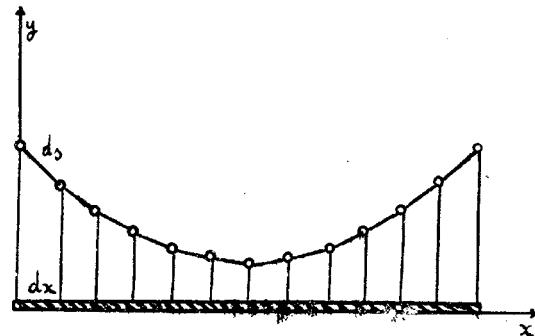
ed integrando: (3)  $T \frac{dx}{ds} = T_0$     e: (4)  $T \frac{dy}{ds} = g \varsigma x$ .

Dividendo poi, membro a membro, la (4) per la (3), si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g \varsigma x}{T_0};$$

espressione, questa, che, integrata, ci dà infine:

$$y = \frac{g \varsigma x^2}{2 T_0} + \text{cost.},$$



che è, palesemente, l'equazione di una parabola il cui asse coincide con l'asse delle  $y$ .

### Principio dei lavori virtuali

- Consideriamo un sistema di punti, discreto o continuo. Su ciascun punto del sistema, agiranno delle forze, in parte direttamente applicate, ed in parte reazioni di eventuali vincoli cui il sistema è soggetto, vincoli che, come già altre volte si è visto, possono essere del più svariato tipo (vincolo della rigidità, punto fisso, retta fissa, punto mobile su di una superficie, etc.). Questi vincoli che, per ora, supponiamo indipendenti dal tempo, si dividono in reversibili ed irreversibili. Diconsi reversibili quei vincoli che, se si oppongono ad uno spostamento in un senso, si oppongono anche allo spostamento opposto, irreversibili quelli che possono opporsi allo spostamento in un senso ma non al contrario. Un punto fisso, una retta fissa, sono esempi di vincoli reversibili; un punto appoggiato ad una superficie è soggetto ad un vincolo irreversibile.

Si dice spostamento virtuale di un sistema, un qualsiasi suo spostamento infinitesimo compatibile coi vincoli cui è soggetto.

Vogliamo ora vedere come il lavoro compiuto dalle reazioni dei vincoli sopra uno spostamento virtuale è sempre nullo nel caso che i vincoli in questione siano reversibili. Infatti, quando si consideri il caso di un punto fisso, la reazione del vincolo è una forza applicata al punto, e quindi, mancando il fattore spostamento,

essa non può far lavoro. Considerazioni perfettamente analoghe valgono nel caso di una retta fissa e dei vincoli della rigidità. Così si dica pure se si considera il vincolo di un punto costretto a restare su di una superficie. In quest'ultimo caso, infatti, la reazione del vincolo è una forza applicata al punto, e normale alla superficie. Siccome, poi, lo spostamento virtuale è parallelo alla superficie, si ha che la forza e lo spostamento sono perpendicolari fra loro, e, quindi, il lavoro virtuale è ancora nullo.

Possiamo, invece, far vedere che, nel caso di vincoli irreversibili, il lavoro virtuale è sempre positivo o nullo. Consideriamo, perciò, ad esempio, un punto appoggiato ad un piano, e vincolato a non attraversarlo. Sappiamo che la reazione del vincolo è normale al piano, e diretta verso il punto; siccome, d'altra parte, questo può muoversi da una sola banda del piano, l'angolo formato dalla direzione della reazione e degli spostamenti virtuali del punto è minore o, al più, eguale a  $\frac{\pi}{2}$ , e quindi il lavoro virtuale risulta sempre o positivo o nullo; quest'ultimo caso si verifica quando il punto si muove sul piano.

Importa però notare che se, invece di uno spostamento virtuale, si considera uno spostamento del sistema nel suo moto reale, il lavoro delle reazioni vincolari è sempre nullo, anche nel caso di vincoli irreversibili. Infatti, riferendoci ancora all'esempio di un punto appoggiato su di un piano, osserviamo che nel suo moto reale, non appena il punto abbandona il piano, la reazione vincolare cessa e, con essa, il lavoro. Di qui si vede come l'affe-

mazione che le reazioni dei vincoli irreversibili compiono lavoro positivo, vale solo per lo spostamento virtuale.  
Riassumendo, possiamo dire che lungo ogni spostamento virtuale le reazioni dei vincoli reversibili compiono lavoro nullo, quelle dei vincoli irreversibili, lavoro positivo o nullo, mentre sopra un qualsiasi spostamento reale il lavoro delle reazioni vincolari è sempre nullo. Chiamando, ora, spostamenti virtuali reversibili gli spostamenti virtuali di un sistema soggetto a vincoli reversibili, e spostamenti virtuali irreversibili quelli di un sistema soggetto a vincoli irreversibili, possiamo enunciare il cosiddetto principio dei lavori virtuali:

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema materiale a vincoli privi di attrito (e indipendenti dal tempo), si è che le forze direttamente applicate al sistema compiano un lavoro totale nullo per ogni spostamento virtuale reversibile, negativo o nullo per ogni spostamento virtuale irreversibile.

---

Dimostriamo dapprima detto principio nel caso degli spostamenti virtuali reversibili.-

Consideriamo, dunque, un sistema soggetto a vincoli reversibili. Il moto e l'equilibrio di esso, si possono considerare alla stregua del moto e dell'equilibrio di un sistema libero; se, oltre alle forze direttamente applicate, si suppone applicata al punto la reazione vincolare. Se  $P_1, P_2, \dots P_n$ , sono gli  $n$  punti del sistema (supposto, per semplicità, dis-

gusto), ad ognuno di essi sarà applicata una forza  $F$  (dovuta sia a cause esterne che interne) ed una reazione vincolare  $R$ . Il sistema sarà in equilibrio quando si annulli la forza totale agente su ogni punto, quando sia, cioè:

$$(1) \quad F_1 + R_1 = 0, \quad F_2 + R_2 = 0, \dots \quad F_n + R_n = 0, \quad \text{da cui:}$$

$$(2) \quad R_1 = -F_1, \quad R_2 = -F_2, \dots \quad R_n = -F_n.$$

Facciamo, ora, subire al sistema uno spostamento virtuale; un punto generico,  $P_i$ , di esso si sarà spostato di un tratto infinitesimo  $\delta P_i$ , e trattando si di uno spostamento virtuale reversibile, sarà nullo il lavoro totale compiuto lungoesso dalle reazioni vincolari sugli  $n$  punti del sistema, si avrà cioè:

$$R_1 \times \delta P_1 + R_2 \times \delta P_2 + \dots + R_n \times \delta P_n = 0,$$

e sostituendo in questa espressione per  $R_1, R_2, \dots, R_n$  i valori forniti dalle (2), otteniamo identicamente:

$$(3) \quad F_1 \times \delta P_1 + F_2 \times \delta P_2 + \dots + F_n \times \delta P_n = 0.$$

Resta così dimostrato che, nel caso degli spostamenti reversibili, la condizione espressa dal principio dei lavori virtuali è necessaria per l'equilibrio del sistema. Dimostriamo, ora, che la condizione suddetta è anche sufficiente; che, cioè, se per tutti gli spostamenti virtuali reversibili del sistema si verifica la (3), il sistema è in equilibrio. Ricordiamo, anzitutto, che una certa posizione è d'equilibrio per il sistema, quando questo, posto in

essa con velocità iniziale nulla, vi rimane definitivamente. Supponiamo infatti, per un momento che il sistema possa abbandonare la posizione in cui si trovava; dopo un certo tempo infinitesimo  $\epsilon$  esso si troverà in una posizione infinitamente prossima alla iniziale, ed avrà acquistata una certa velocità, e quindi, anche una certa forza viva  $T$ . E, però, necessario che le forze su di esso agenti abbiano fatto un lavoro positivo. Ora sappiamo che le reazioni vincolari non fanno alcun lavoro sullo spostamento reale. D'altra parte, siccome lo spostamento infinitesimo reale è, certamente, compatibile coi vincoli, la (3) ci dice che neanche le forze applicate possono aver fatto lavoro. Concludiamo che il sistema non può essersi mosso, e che, quindi, la posizione era una posizione d'equilibrio.

Dimostriamo, ora, il principio nel caso degli spostamenti virtuali irreversibili.

In modo analogo al precedente, dovendo, per l'equilibrio del sistema, annullarsi la forza totale agente su ciascun punto, avremo:

$$F_1 + R_1 = 0, \quad F_2 + R_2 = 0, \dots, \quad F_n + R_n = 0 \quad (1)$$

da cui:

$$F_1 = -R_1, \quad F_2 = -R_2, \dots, \quad F_n = -R_n. \quad (2)$$

Considerando, ora, uno spostamento virtuale (in questo caso, irreversibile) del sistema, il lavoro compiuto sui suoi punti lungo detto spostamento dalle reazioni vincolari è positivo o nullo; avremo, quindi:

$$R_1 \times SP_1 + R_2 \times SP_2 + \dots + R_n \times SP_n \geq 0,$$

e, sostituendo i valori forniti dalle (2) e cambiando segno:

$$(3) \quad F_1 \times SP_1 + F_2 \times SP_2 + \dots + F_n \times SP_n \leq 0,$$

espressione, questa, che ci esprime, nel caso di spostamenti virtuali irreversibili, la condizione necessaria per l'equilibrio del sistema. Dimostriamo, ora, che essa è anche sufficiente. Supponiamo, infatti, che il sistema possa abbandonare questa posizione, allora esso, avendo inizialmente velocità, e quindi forza viva, nulla, dovrà aver acquistato una certa forza viva a spese del lavoro compiuto dalle forze che gli sono applicate, lavoro, questo che le forze attive non possono aver compiuto perché tali forze, per la (3), compiono soltanto un lavoro negativo o nullo e non mai positivo qual è, invece, quello necessario ad imprimere una forza viva, e che neppure le reazioni vincolari possono aver compiuto perché esse, durante un qualsiasi spostamento reale del sistema compiono lavoro nullo. Resta, dunque, provato che il sistema non si muove e che, quindi, si trova in una posizione d'equilibrio.

### Equilibrio di un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie.

- Come prima applicazione di quanto abbiamo dimostrato, applichiamo il principio dei lavori virtuali alla determinazione delle condizioni d'equilibrio per un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie. In questo caso il vincolo è reversibile, quindi, per il lavoro compiuto dalla forza,  $F$ , applicata al punto, du-

rante uno spostamento virtuale reversibile,  $\delta P$ , di questo, avremo:

$$F \times \delta P = 0 ,$$

relazione questa che, essendo per ipotesi  $F \neq 0$  ed essendosi scelto anche  $\delta P \neq 0$ , ci dice dover essere  $F$  normale a  $\delta P$ ; e poiché gli spostamenti virtuali di  $P$  avvengono nel piano tangente alla superficie, dovrà, per l'equilibrio, risultare  $F$  normale al piano tangente cioè alla superficie in questione.

---

### - Equilibrio di un punto appoggiato ad un piano..

- Applichiamo, ora, il principio dei lavori virtuali alla ricerca delle condizioni d'equilibrio per un punto appoggiato ad un piano. Poiché, in questo caso, il vincolo cui è soggetto il punto è irreversibile, sarà tale anche ogni spostamento virtuale,  $\delta P$ , di quest'ultimo, e quindi, per il lavoro compiuto dalla forza  $F$ , applicata al punto, lungo tale spostamento, avremo:

$$F \times \delta P \geq 0 .$$

Siccome poi gli spostamenti possibili del punto sono quelli sul piano tangente alla superficie ad al disopra di questo, la relazione precedente ci dice dover essere  $F$  normale al piano tangente e diretta verso la superficie. Infatti, in tal caso, l'angolo formato dalle direzioni orientate della forza e dello spostamento è sempre eguale o maggiore di  $\pi/2$ , e quindi il lavoro virtuale risulta sempre negativo o nullo.

---

### - Equilibrio di un corpo rigido libero ..

- Vediamo ora come mediante il principio dei lavori virtuali sia possibile stabilire le condizioni d'equilibrio per un corpo rigido libero. A tal scopo, scelta una terna cartesiana  $x, y, z$ , di riferimento, detti:  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , gli  $n$  punti del sistema, indichiamo con  $F_i \equiv (X_i, Y_i, Z_i)$  la forza direttamente applicata ad un punto generico  $P_i$ . Trattandosi di un sistema rigido libero soggetto, quindi, al solo vincolo della rigidità che è un vincolo reversibile, sappiamo che il lavoro compiuto dalle forze lungo ogni spostamento virtuale del sistema deve esser nullo. Consideriamo, dunque, uno spostamento traslatorio virtuale  $\delta$ , del sistema, parallelamente all'asse  $x$ ; avremo per il lavoro virtuale:

$$X_1 \delta_1 + X_2 \delta_2 + \dots + X_n \delta_n = 0$$

ma per la supposta rigidità del sistema è:

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n,$$

e quindi la (1) diviene:

$$S(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = S R_x = 0,$$

ed essendosi scelto:  $S \neq 0$ , dovrà essere, necessariamente per l'equilibrio:  $R_x = 0$ .

( $R_x$  = comp. x del risultante delle forze).

Analogamente, considerando altri due spostamenti virtuali paralleli, rispettivamente, all'asse  $y$  ed all'asse  $z$ , otterremo:

$$R_y = 0 \quad \text{ed} \quad R_z = 0$$

e quindi, infine:  $R = 0$

che è una delle condizioni d'equilibrio già in altro

modo stabilità. Se ora facciamo subire al sistema una rotazione infinitesima  $\omega$  attorno all'asse  $x$ , lo spostamento virtuale di un punto generico,  $P_i$ , ci è dato da:  $s_i = \omega \Delta (P_i - O)$  dove si è scelto come punto fisso di riferimento l'origine  $O$  delle coordinate. Essendo:

$$\omega, 0, 0,$$

le componenti, secondo i tre assi, della rotazione considerata, ed essendo:

$$x_i, y_i, z_i,$$

le componenti, secondo i medesimi tre assi, del vettore  $(P_i - O)$ ; per le componenti di  $s_i$ , avremo:

$$s_{i,x} = 0, \quad s_{i,y} = -\omega z_i, \quad s_{i,z} = \omega y_i.$$

Per il lavoro compiuto, durante lo spostamento considerato, dalla forza  $F_i$  agente sul punto, risulterà quindi l'espressione:  $L = -\omega z_i y_i + \omega y_i z_i = \omega (y_i z_i - z_i y_i)$ .

Facendo il sommatorio, da 1 ad  $n$ , dell'espressione precedente otterremo l'espressione del lavoro compiuto dalle forze del sistema, durante la rotazione di questo attorno all'asse  $x$ :

$$L = \omega \sum_i^n (y_i z_i - z_i y_i) .$$

Se il sistema è in equilibrio, il principio dei lavori virtuali ci dice che la precedente espressione deve annullarsi; deve, cioè, essere:

$$\omega [(y_1 z_1 - z_1 y_1) + (y_2 z_2 - z_2 y_2) + \dots + (y_n z_n - z_n y_n)] = 0 ,$$

ed essendosi scelto:  $\omega \neq 0$ , deve necessariamente risultare:  $(y_1 z_1 - z_1 y_1) + (y_2 z_2 - z_2 y_2) + \dots + (y_n z_n - z_n y_n) = 0$ .

Si riconosce immediatamente come quest'ultima espressione non sia altro che la componente secondo  $x$  del

momento Totale ( $M$ ) delle forze agenti sul sistema, calcolato rispetto ad  $O$ . Sarà, cioè, nel caso dell'equilibrio:

$$(M)_x = 0.$$

Analogamente, considerando altre due rotazioni del sistema, l'una attorno all'asse  $y$  e l'altra attorno all'asse  $z$ , avremo:

$$(M)_y = 0, \quad (M)_z = 0,$$

cioè, infine:

$$(M) = 0.$$

Anche questa condizione era stata, per altra via, già stabilita.

Più brevemente, sempre applicando il principio dei lavori virtuali, si arrivano a stabilire le condizioni dell'equilibrio di un corpo rigido libero, quando si riguardi il moto di esso come risultato di due moti, uno traslatorio del centro,  $G$ , di gravità, l'altro rotatorio del corpo attorno ad un asse istantaneo passante per  $G$ . In tal caso, infatti, l'espressione del lavoro,  $dL$ , compiuto dalle forze applicate al sistema durante uno spostamento infinitesimo di durata  $dt$ , è:

$$dL = [(V_a \times R) + (\omega \times M)] dt; \quad (1)$$

scogliendo quindi due spostamenti virtuali, uno  $\delta G$  del centro di gravità, l'altro  $\delta w$  rotatorio del sistema attorno ad un asse istantaneo passante per  $G$ , la (1) diventa (essendo:  $\delta G = V_a dt$ , e:  $\delta w = \omega dt$ ):

$$dL = (\delta G \times R) + (\delta w \times M),$$

e dovendo, per l'equilibrio, essere:  $dL = 0$ , per qualsiasi spostamento virtuale reversibile del

sistema; essendo  $\mathbf{S}_G$  e  $\mathbf{S}_W$  arbitrarii, risulta necessariamente:

$$\underline{\underline{R=0}} \quad \text{ed} \quad \underline{\underline{M=0}} .$$

- Equilibrio di un corpo rigido vincolato ad avere un punto fisso.

- Come caso particolare di quello ora considerato, si possono stabilire le condizioni di equilibrio per un corpo rigido vincolato ad avere un punto fisso. In questo caso, evidentemente, i soli spostamenti possibili del sistema, sono quelli di rotazione attorno ad un asse instantaneo passante per il punto fisso. Considerando, dunque, uno spostamento rotatorio  $\Delta\omega$  del sistema, per l'equilibrio risulterà:

$$M_o = 0 ,$$

cioè dovrà annullarsi il momento totale delle forze agenti sul sistema, calcolato rispetto al punto fisso. Nel caso, infine, di un corpo rigido con una retta fissa, considerando uno spostamento virtuale rotatorio del sistema attorno a questo, si troverebbe, come condizione per l'equilibrio, l'annullarsi del momento totale delle forze applicate al corpo, calcolato rispetto alla retta fissa.

- Equilibrio della vite.

- A titolo d'esempio, applichiamo il principio dei lavori virtuali allo studio dell'equilibrio della vite. Notiamo, anzitutto, che, essendo la vite un sistema a vincoli reversibili, per l'equilibrio dovrà annullarsi il lavoro compiuto dalle forze agenti su di

essa lungo qualsiasi spostamento virtuale. Indichiamo con  $P$  la potenza applicata tangenzialmente alla Testa della vite, con  $b$  la distanza del suo punto di applicazione (braccio) dall'asse, con  $Q$ , infine, la resistenza che si esercita nella direzione dell'asse medesimo. Facciamo, ora, ruotare la vite di un angolo infinitesimo  $\vartheta$  (spostamento virtuale); il lavoro compiuto dalla  $P$  sarà allora:

$$L_p = \mathcal{I} b P$$

Il lavoro negativo della  $Q$  ci sarà dato dal prodotto di essa per lo spostamento traslatorio  $x$  subito dalla vite, per effetto della rotazione  $\vartheta$ , spostamento che, noto il passo  $p$ , si ricava immediatamente dalla relazione:

$$2\pi : \vartheta = p : x , \quad \text{da cui:}$$

$$x = \frac{p\vartheta}{2\pi} ,$$

e quindi:

$$L_Q = -Qx = -\frac{Qpx\vartheta}{2\pi} ;$$

ed, infine, per il lavoro totale compiuto dalle forze applicate al sistema durante la rotazione  $\vartheta$ , avremo:

$$L = L_p + L_Q = \mathcal{I} b P - \frac{Qpx\vartheta}{2\pi} .$$

Per l'equilibrio deve essere:

$$\mathcal{I} b P - \frac{Qpx\vartheta}{2\pi} = 0 ,$$

da cui, dividendo per  $\vartheta$ , che si è scelto diverso da zero:

$$bP - \frac{Qp}{2\pi} = 0 , \quad \text{ossia: } bP = \frac{Qp}{2\pi} ,$$

da cui, infine:

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{2\pi b} ,$$

che è la relazione già altrove stabilita per l'equilibrio della vite.

Un'osservazione d'insolte generale riguardante il lavoro delle macchine semplici è che lo spostamento subito dal punto di applicazione della potenza nella direzione della forza, è tanto maggiore di quello del punto di applicazione della resistenza, quanto più grande è il vantaggio della macchina; il chè si potrebbe dedurre anche dalle equazioni di equilibrio delle varie macchine semplici, ma più semplicemente e generalmente si spiega applicando il principio dei lavori virtuali. Infatti, detti  $S_p$  e  $S_q$ , rispettivamente, gli spostamenti del punto di applicazione della potenza P e quello del punto d'applicazione della resistenza Q, il principio dei lavori virtuali ci dice che, per l'equilibrio, deve essere:

$$P S_p - Q S_q = 0 \quad , \text{ da cui: } \frac{P}{Q} = \frac{S_q}{S_p}$$

ed infine:

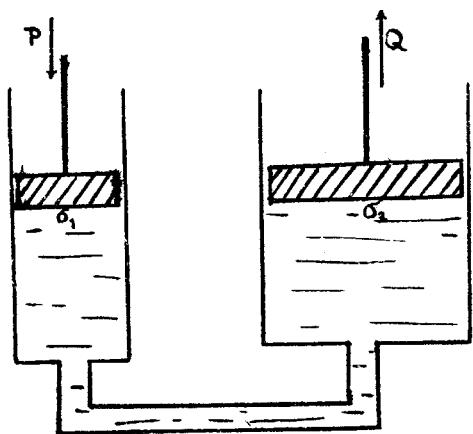
$$\frac{P}{Q} = \frac{S_q}{S_p}$$

---

### Equilibrio del Torchio idraulico.

- Applichiamo, ora, il principio dei lavori virtuali allo studio delle condizioni di equilibrio del Torchio idraulico, macchina che, come è noto, è costituita da due recipienti cilindrici di differente sezione, entro cui scorrono due pistoni a perfetta tenuta di liquido. I due recipienti cilindrici comuni-

cano tra loro mediante un tubo, e sono pieni di un liquido che, generalmente, è l'acqua. Sul pistone di più piccola sezione si esercita la potenza, su quello di sezione maggiore la resistenza. Dette  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , rispet-



Tivamente la sezione del piccolo e del grande pistone, consideriamo uno spostamento virtuale,  $S_1$ , del pistone piccolo, e lo spostamento virtuale corrispondente,  $S_2$ , del pistone maggiore. Per la sua incompressibilità durante questo

spostamento simultaneo dei due pistoni, il liquido riserverà volume costante, quindi sarà:

$$\sigma_1 S_1 = \sigma_2 S_2,$$

da cui, per lo spostamento virtuale  $S_2$  del pistone maggiore, ricaviamo:

$$S_2 = \frac{\sigma_1 S_1}{\sigma_2}.$$

Ma, essendo il sistema a vincoli reversibili, per l'equilibrio dovrà essere:

$$P S_1 - Q S_2 = 0,$$

e sostituendo, in quest'ultima espressione, il valore precedentemente ricavato per  $S_2$ , otteniamo:

$$P S_1 = Q \frac{\sigma_1 S_1}{\sigma_2},$$

e dividendo ambo i membri per  $S_1$ , che si è scelto diverso da zero,:

$$P = Q \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

da cui, infine: (1)  $\frac{P}{Q} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ , che è la condizione d'equilibrio cercata, e che conferma l'osservazione che abbiamo fatta relativamente agli spostamenti rispettivi del punto d'applicazione della potenza e del punto d'applicazione della resistenza, nelle macchine. Infatti, la relazione (1) ci dice che con un dato valore della potenza si fa equilibrio ad una resistenza tanto maggiore quanto è più piccolo  $\delta_1$  rispetto a  $\delta_2$ ; ma è evidente che, essendo il volume di liquido che esce dal pistone [1] eguale a quello che entra nel pistone [2], l'abbassamento del pistone [1] è tanto più grande dell'innalzamento del pistone [2] di quanto  $\delta_1$  è più piccola di  $\delta_2$ . Non è inutile notare che la condizione d'equilibrio del torchio idraulico si può stabilire anche applicando il principio di Pascal. Infatti, per esso, essendo eguale la pressione  $p$ , riferita all'unità d'area, che il liquido esercita su  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , avremo:

$$P = p\delta_1 \quad \text{e} \quad Q = p\delta_2,$$

da cui, dividendo:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\delta_1}{\delta_2}.$$


---

- Equilibrio di sistemi soggetti a forze che ammettono potenziale. -

+ Le condizioni d'equilibrio dedotte dal principio dei lavori virtuali, assumono forma più semplice se le forze agenti sul sistema ammettono potenziale. Se, dunque,  $V$  è il potenziale del sistema definito come

omma dei potenziali dei suoi punti; se è pertanto:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

considerando uno spostamento virtuale del sistema, il lavoro virtuale compiuto dalle forze, lungo detto spostamento, ci sarà dato, senz'altro, dalla variazione del potenziale, quindi, se il sistema si trova in equilibrio, nell'ipotesi, però, che i vincoli cui è soggetto il sistema siano reversibili, dovrà essere:

$$dU = 0. \quad (1)$$

L'equazione precedente coincide con quella per la ricerca dei massimi e minimi della funzione  $U$ , ed ancora, come altrove è stato fatto, si potrebbe dimostrare che, se in una certa posizione, il potenziale presenta un massimo, e quindi l'energia potenziale presenta un minimo, quella posizione è di equilibrio stabile.

In particolare, se la forza agente sul sistema è la forza peso, il potenziale è allora quello gravitazionale dato da:  $-mgh$ , dove  $h$  è l'altezza del centro di gravità del sistema, ed  $m$  ne è la massa. Quindi, per l'equilibrio di un sistema soggetto all'azione della gravità, la precedente funzione di  $h$  dovrà presentare un massimo od un minimo corrispondentemente ad un minimo o ad un massimo di  $h$ . Nel primo caso l'equilibrio sarà stabile, instabile nel secondo

A titolo d'esempio proponiamoci di determinare le condizioni d'equilibrio di una sbarra omogenea, di lunghezza  $l$ , ruotante, in un piano verticale, attorno ad un suo

estremo A, e soggetta all'altro estremo ad una forza realizzata mediante una fune che passa su di una puleggia fissa situata sulla verticale per A, a distanza l dall'estremo cui è applicata la fune al cui estremo libero è appesa una massa m. Indichiamo con a la lunghezza della fune, con M la massa della sbarra, con G il centro di gravità di essa (per la supposta omogeneità della sbarra, G coinciderà col suo centro di figura); sceglieremo, inoltre, l'asse z verticale e diretto verso l'alto, di guisa che l'altezza del centro di gravità di m e quella del centro di gravità della sbarra, ci saranno date, rispettivamente, dalle quote  $z_m$  e  $z_M$  di essi. Per l'altezza  $z_0$  del centro di gravità dell'intero sistema, applicando la formula che ci dà la coordinata z del centro di gravità, avremo:

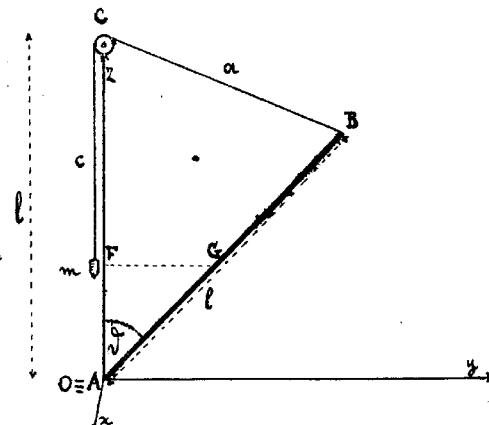
$$z_0 = \frac{z_M M + z_m m}{M + m}.$$

Il nostro problema si riduce, quindi, a determinare i minimi della precedente funzione che, trascurando  $M + m$  che è costante, diventa:

$$H = z_M M + z_m m. \quad (1)$$

Osservando, ora, che la posizione del sistema è determinata quando sia dato l'angolo  $\vartheta$  che la sbarra forma con la verticale per A, proponiamoci di esprimere  $z_M$  e  $z_m$  in funzione di quest'unico parametro  $\vartheta$ . Dal Triangolo rettangolo ACF, si ricava per  $z_m$  il valore:

$$z_m = \frac{l}{2} \cos \vartheta \quad (2)$$



Quanto, poi, a  $z_m$  osserviamo che, detto  $d$  il tratto di fune compreso fra l'estremo,  $B$ , della sbarra e la pulleggia, risulta:

$$d = 2l \sin \frac{\vartheta}{2},$$

ed allora, per la distanza  $c$  tra la pulleggia ed il centro di gravità di  $m$ , avremo:

$$c = a - 2l \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad (a = \bar{B}\bar{C} + \bar{C}\bar{D})$$

ed infine, per  $z_m$ :

$$z_m = l - a + 2l \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Ponendo, allora, nella (1), per  $z_m$  questo valore, e per  $z_m$  quello fornito dalla (2), risulta:

$$\begin{aligned} H &= M \frac{l}{2} \cos \vartheta + m \left( l - a + 2l \sin \frac{\vartheta}{2} \right) = \\ &= m(l-a) + 2lm \sin \frac{\vartheta}{2} + \frac{l}{2} M \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Derivando questa espressione rispetto a  $\vartheta$  ed equagliando a zero, ottieniamo:  $\frac{dH}{d\vartheta} = lm \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{l}{2} M \sin \vartheta = 0$ ,

ed esprimendo  $\sin \vartheta$  in funzione del seno e del coseno dell'arco metà, e dividendo per  $l$ , ottieniamo:

$$\frac{dH}{d\vartheta} = m \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{M}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} = 0.$$

Una soluzione evidente della precedente equazione, è:  $\cos \frac{\vartheta}{2} = 0$ , (che corrisponde a:  $\vartheta = 180^\circ$ ). Dividendo la relazione precedente per  $\cos \frac{\vartheta}{2}$ , ottieniamo:

$$\frac{m}{M} = \tan \frac{\vartheta}{2} \quad (3)$$

Questa ultima soluzione è reale soltanto nel caso che sia:

$$m \leq M.$$

Per decidere se l'equilibrio è stabile od instabile, bisogna esaminare se  $H$  è minimo o massimo: a tal scopo, derivando ancora la  $H$  rispetto a  $\vartheta$ , ottieniamo:

$$\frac{d^2 H}{d \vartheta^2} = -\frac{l m}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{l M}{2} \cos \frac{\vartheta}{2};$$

se sostituiamo, p. es., in questa espressione, per  $\vartheta$ , il valore  $180^\circ$ , abbiamo:

$$\frac{d^2 H}{d \vartheta^2} = -\frac{l m}{2} + \frac{l M}{2} = \frac{l (M-m)}{2}.$$

Questa espressione ha, evidentemente, il segno della differenza  $M-m$ . Si avrà, quindi, un minimo della funzione  $H$ , e, quindi, equilibrio stabile, per  $M-m > 0$ , cioè per  $M > m$ , un massimo, e quindi, posizione di equilibrio instabile, per  $M < m$ . Per altri valori dell'argomento  $\vartheta$ , si avranno altre posizioni di equilibrio, stabile o instabile a seconda dei casi.

---

## ~~~~~ ATTRITO ~~~~

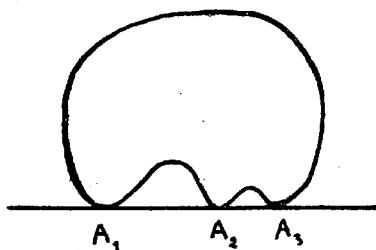
Se un corpo si muove su di una superficie, per il contatto tra il corpo e questa, si genera una forza, agente tra la superficie ed il corpo, che si oppone al moto di quest'ultimo e che viene detta: reazione d'attrito.

Per l'attrito vale una legge che, sebbene non rappresenti con esattezza il modo di svolgersi del fenomeno, dà un'idea sufficientemente approssimata di questo: la legge di Coulomb. Essa afferma che la reazione di attrito,  $R_a$ , è proporzionale alla pressione,  $P$ , che il corpo esercita sulla superficie, secondo un coefficiente d'attrito,  $f$ , dipendente dalla natura dei corpi in contatto. Traducendo in simboli la legge suaccennata, avremo:

$$R_a = f P,$$

dove  $f$  dovrebbe essere una costante, cosa che, in realtà non avviene, perché le più svariate condizioni vengono a

complicare il fenomeno che, quindi, molto difficilmente si può rendere con esattezza. Dalla legge di Coulomb segue, inoltre, che la reazione d'attrito è indipendente dalla superficie d'appoggio del corpo. Consideriamo, infatti, ad esempio, un corpo che poggia per tre punti,  $A_1, A_2, A_3$ , su di una superficie. Orette:



$P_1, P_2$  e  $P_3$  le corrispondenti pressioni, e dette:  $R_{a,1}, R_{a,2}$  ed  $R_{a,3}$ , le reazioni d'attrito esercitate sui tre punti dalla superficie, la pressione totale,  $P$ , con cui il corpo preme su di essa, ci è data da:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 ,$$

e, così, anche la reazione totale di attrito ci è data dalla somma:

$$R_a = R_{a,1} + R_{a,2} + R_{a,3} ;$$

ma essendo, per la legge di Coulomb:

$$R_{a,1} = f P_1 , \quad R_{a,2} = f P_2 , \quad R_{a,3} = f P_3 ,$$

si ottiene:

$$R_a = R_{a,1} + R_{a,2} + R_{a,3} = f P_1 + f P_2 + f P_3 = f (P_1 + P_2 + P_3) = f P .$$

Si conclude, dunque, che la reazione d'attrito dipende unicamente dalla pressione totale con cui il corpo preme sulla superficie, e non dal numero dei punti d'appoggio.

### - Equilibrio di un sistema soggetto alla reazione d'attrito.-

- Anche allo studio dell'equilibrio di un sistema soggetto all'attrito, si può applicare il principio dei lavori virtuali. Per l'equilibrio dovrà risultare negativo o nullo il lavoro compiuto, lungo ogni spostamento virtuale, dalle forze applicate al sistema, forze d'attrito comprese.

Proponiamoci, a titolo d'esempio, di stabilire le condizioni d'equilibrio per una scala appoggiata ad un muro; sistema, questo, che potremo riguardare come costituito, idealmente, di un'unica sbarra omogenea che poggi, rispettivamente, coi suoi due estremi su di un piano verticale e su di un piano orizzontale. Scelgiamo come assi  $x$  ed  $y$  le intersezioni dei due piani suaccennati col piano verticale passante per la sbarra. Indichiamo con  $P_1$  e  $P_2$  le pressioni che la sbarra esercita sui piani d'appoggio; con  $R_1$  ed  $R_2$  le corrispondenti reazioni d'attrito; con  $l$  la lunghezza della sbarra, con  $G$  il suo centro di gravità, ed, infine, indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo compreso fra l'asse  $y$  e la sbarra. Consideriamo uno spostamento virtuale della sbarra, tale che l'angolo  $\vartheta$ , che essa forma con l'asse  $y$ , subisca l'incremento infinitesimo positivo  $d\vartheta$ . Il lavoro compiuto dal peso della sbarra ci è dato dal peso stesso moltiplicato per l'abbassamento del centro di gravità  $G$ . L'abbassamento di  $G$ , essendo l'altezza di esso (coincidente con l'ordinata, per la scelta fatta degli assi) data da:

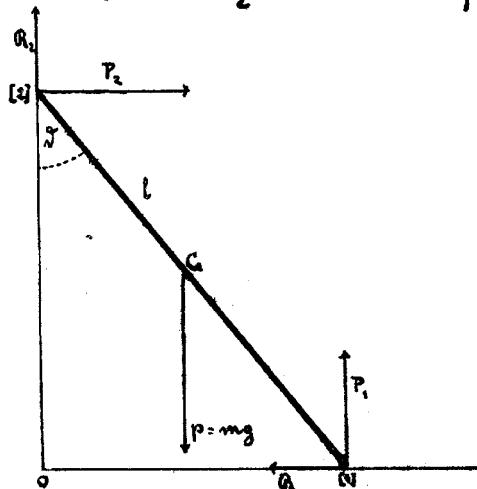
$$y_G = \frac{l}{2} \cos \vartheta , \quad \text{si ottiene}$$

differenziando questa espressione, risulta cioè:

$$dy_G = -\frac{l}{2} \sin \vartheta d\vartheta ,$$

quindi il lavoro compiuto dal centro di gravità nell'abbassarsi è dato da:

$$L_G = \frac{l}{2} p \sin \vartheta d\vartheta ,$$



lavoro che abbiam preso col segno + perchè, evidentemente, il peso  $p$ , abbassandosi, compie lavoro positivo. Osservando, ora, che le distanze,  $OA$  ed  $OB$ , tra l'origine ed i punti d'applicazione delle reazioni d'attrito,  $R_1$  ed  $R_2$ , ci sono date, rispettivamente, da:

$$OA = l \sin \vartheta \quad OB = l \cos \vartheta,$$

notiamo che, mentre la scala' ruota di  $d\vartheta$ , le distanze suddette subiranno gli incrementi rispettivi:

$$l \cos \vartheta d\vartheta \quad e \quad -l \sin \vartheta d\vartheta,$$

ed allora, per il lavoro di  $R_1$  ed  $R_2$ , si avranno le espressioni:

$$L_{R_1} = -R_1 l \cos \vartheta d\vartheta, \quad L_{R_2} = -R_2 l \sin \vartheta d\vartheta,$$

prese ambedue col segno - perchè le reazioni di attrito compiono, evidentemente, lavoro negativo. È superfluo notare, infine, che le pressioni  $P_1$  e  $P_2$  non compiono lavoro essendo esse normali, nei rispettivi punti di applicazione, alle direzioni degli spostamenti di questi. Il lavoro virtuale deve risultare negativo o nullo, deve cioè essere:

$$\frac{1}{2} p \sin \vartheta d\vartheta - R_1 l \cos \vartheta d\vartheta - R_2 l \sin \vartheta d\vartheta \leq 0.$$

Vediamo, ora, di determinare  $R_1$  ed  $R_2$ . Per l'equilibrio dovrà annullarsi il risultante  $R$  (e quindi le sue due componenti  $R_x$  ed  $R_y$ ) delle cinque forze:  $p$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , che agiscono sul sistema; troviamo, allora, le due condizioni:

$$(1) \quad R_x = P_2 - R_1 = 0, \quad R_y = P_1 + R_2 - p = 0, \quad (2)$$

cui potremo aggiungere altre due relazioni, forniteci dalla legge di Coulomb:

$$(3) \quad R_1 = f P_1, \quad R_2 = f P_2 \quad (4).$$

Abbiamo così, in tutto, quattro equazioni nelle quattro incognite,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $R_1$  ed  $R_2$ , per le quali troviamo i valori:

$$P_1 = \frac{p}{1+f^2}, \quad P_2 = \frac{fp}{1+f^2}, \quad R_1 = \frac{fp}{1+f^2}, \quad R_2 = \frac{f^2 p}{1+f^2}.$$

Sostituendo, ora, nell'espressione del lavoro virtuale, per  $R_1$  ed  $R_2$  i valori ora stabiliti, si ha:

$$\frac{l}{2} p \sin \vartheta d\vartheta - \frac{fp}{1+f^2} l \cos \vartheta d\vartheta - \frac{f^2 p}{1+f^2} l \sin \vartheta d\vartheta \leq 0$$

e dividendo per  $lp d\vartheta$  che è una quantità positiva (perchè è:  $l > 0$ ,  $p > 0$ , e si è scelto  $d\vartheta$  positivo):

$$\frac{1}{2} \sin \vartheta - \frac{f}{1+f^2} \cos \vartheta - \frac{f^2}{1+f^2} \sin \vartheta \leq 0.$$

Risolviamo questa diseguaglianza rispetto a  $\vartheta$ , e, per far ciò, moltiplichiamo per  $1+f^2$ ; avremo così:

$$\frac{1+f^2}{2} \sin \vartheta - f \cos \vartheta - f^2 \sin \vartheta \leq 0,$$

ovvero:

$$(1-f^2) \sin \vartheta - 2f \cos \vartheta \leq 0,$$

ed infine:

$$(1-f^2) \sin \vartheta \leq 2f \cos \vartheta,$$

e dividendo ambo i membri per  $\cos \vartheta$ :

$$(1-f^2) \operatorname{tg} \vartheta \leq 2f, \quad \text{da cui, in}$$

fine, si ottiene:

$$\operatorname{tg} \vartheta \leq \frac{2f}{1-f^2}. \quad \text{che è la condi-}$$

zione cui deve soddisfare  $\vartheta$  perchè la scala stia in equilibrio. -

---

### - Angolo d'attrito. -

- Consideriamo un punto materiale poggiato su di un piano. A questo punto sia applicata una forza  $F$ . Vediamo a quali condizioni questa forza deve soddisfare perchè il punto, soggetto ad essa ed alla reazione d'attrito, non scorra sul piano su cui è poggiato. Detto  $\vartheta$

l'angolo che la normale al piano forma con  $F$ , la componente tangenziale, efficace per il moto del punto, ci è data da:  $F \sin \vartheta$ ; la componente normale, che ci rappresenta la pressione che il punto esercita sul piano, da:  $F \cos \vartheta$ , e quindi per la reazione d'attrito:

$$R = f F \cos \vartheta$$

Se il punto deve rimaner fermo, dovrà essere:

$$f F \cos \vartheta \geq F \sin \vartheta$$

e dividendo ambo i membri per  $F \cos \vartheta$ , ottieniamo infine:

$$f \geq \operatorname{tg} \vartheta$$

Occorre, cioè, affinchè il punto non si muova sul piano, che l'angolo formato dalla direzione della forza con la normale al piano medesimo, sia tale che il valore della sua tangente risulti minore o, al più eguale al coefficiente d'attrito. Se, dunque, scegliersi un angolo  $\phi$  tale che sia:

$$\operatorname{tg} \phi = f$$

è costruissimo un cono col vertice nel punto, avente per asse la normale al piano e per apertura l'angolo  $\phi$ , per tutte le direzioni della forza comprese entro questo cono, il punto non si muove. Un cono siffatto dicesi cono d'attrito. - All'angolo d'attrito si può dare anche un altro significato. Se consideriamo un punto materiale appoggiato su di un piano inclinato, e soggetto all'azione del suo peso e della reazione d'attrito, vediamo come l'angolo  $\vartheta$  sia il massimo, compatibile con l'equilibrio del punto sul piano, che la direzione della forza peso (ossia la verticale) può formare con la normale alla lunghezza del piano inclinato. In altre parole, siccome l'angolo su-

detto è uguale a quello d'inclinazione del piano, l'angolo di attrito ci rappresenta l'angolo di cui si deve inclinare un piano orizzontale, affinché un grave, poggiato su di esso, cominci a muoversi.

# COORDINATE GENERALI

Per determinare la posizione di un sistema discreto costituito di  $n$  punti,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , occorrono, in generale, se i punti non sono soggetti ad alcun vincolo,  $3n$  variabili, cioè le coordinate di tutti i punti del sistema. Se, invece, i punti considerati sono soggetti a vincoli che ammettiamo reversibili ed indipendenti dal tempo, le  $3n$  coordinate suddette non sono allora tutte indipendenti, ma potranno esser legate tra loro da  $K$  relazioni del tipo:

Ad esempio, nel caso di un sistema costituito da un solo punto vincolato a muoversi su di una linea, per conoscere la posizione del punto, occorrerebbe darne le tre coordinate, ma queste non sono tra loro indipendenti, ma bensì legate dalle due relazioni (indipendenti):

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

che sono le equazioni delle due superfici che, con la loro intersezione, determinano la linea cui il punto è vincolato; quindi, in questo caso, la posizione del punto è individuata quando sia

data una sola coordinata. Essendo, in generale, le  $3n$  coordinate dei punti del sistema, legate tra loro da  $K$  relazioni indipendenti, sappiamo allora che le variabili indipendenti sono  $3n-K$ , note le quali, mediante le  $K$  relazioni in parola, potranno esser determinate le rimanenti  $K$  variabili. Il numero  $3n-K$ , rappresenta, per un sistema di  $n$  punti, mobile nello spazio, il grado di libertà,  $f$ , del sistema, si pone, cioè:

$$3n-K = f$$

In generale, non è, però, necessario scegliere come variabili le  $f$  coordinate indipendenti, ma si possono scegliere  $f$  variabili qualsiasi (scelte opportunamente volta per volta) legate, a mezzo di relazioni invertibili, con le  $f$  coordinate che sono necessarie per individuare la posizione del sistema. Ad esempio, nel caso sopra considerato del punto mobile su di una linea, si può scegliere, come variabile, l'arco  $s$  di curve. Nel caso, poi, di un sistema rigido costituito, ad esempio, da due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , sapendo che deve essere:  $\overline{P_1 P_2} = r = \text{cost.}$ , espressione questa, che, esplicitamente, ha la forma:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = r^2, \quad (1)$$

poichè le sei coordinate sono legate tra loro da una relazione indipendente, per determinare la posizione dei due punti bastano sole cinque coordinate. Ad esempio, si potrebbero scegliere:  $x_1, y_1, z_1$ , ed  $x_2, y_2$ , potendo si ricavare  $z_2$  dalla (1). Ma siccome la soluzione della nostra equazione, rispetto alla coordinata incognita è un po' complicata, è più opportuno introdurre dei nuovi parametri. Ad esempio, scegliamo come parametri le tre coordinate  $x_1, y_1, z_1$  di  $P_1$ , l'angolo  $\vartheta$  che la retta  $\overline{P_1 P_2}$  forma con l'asse  $z$ , e l'angolo  $\varphi$  che un piano parallelo

l'asse  $z$  ed a  $\bar{P}_1 \bar{P}_2$  forma col piano  $z_2$ . Indicando genericamente con  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$ , questi cinque parametri,  $x_1, y_1, z_1, \vartheta, \varphi$ , che vengono detti coordinate generali del sistema, le coordinate di  $P_2$  ci sono, allora date dalle relazioni:

$$\begin{aligned} P_2 & \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 + r \sin \vartheta \cos \varphi = q_1 + r \sin q_4 \cos q_5 \\ y_2 = y_1 + r \sin \vartheta \sin \varphi = q_2 + r \sin q_4 \sin q_5 \\ z_2 = r \cos \vartheta = r \cos q_4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

In generale, dunque, chiamando coordinate generali gli  $f$  parametri indipendenti, in funzione dei quali vengono date le  $3n$  coordinate del sistema, avremo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_f) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \dots, q_f) \\ \dots & \dots \\ z_n &= z_n(q_1, q_2, \dots, q_f) \end{aligned}$$

Se si conoscono le forze agenti sul sistema, date in funzione della posizione dei punti e, quindi, delle coordinate di questi, queste forze risulteranno, anch'esse, funzione delle  $f$  coordinate generali; avremo, perciò, per le loro componenti:

$$X_1 = X_1(q_1, \dots, q_f)$$

$$Y_1 = Y_1(q_1, \dots, q_f)$$

$$Z_n = Z_n(q_1, \dots, q_f)$$

Operata così l'introduzione delle coordinate generali, vediamo, ora, quale forma assuma il principio dei lavori virtuali. Consideriamo, dunque, una posizione del sistema in cui le coordinate generali abbiano i valori:  $q_1, q_2, \dots, q_f$

e facciamo subire al sistema uno spostamento virtuale, dopo il quale le coordinate generali avranno assunto dei nuovi valori:  $q + \delta q$ ,  $q + \delta q$ , ...,  $q + \delta q$ .

$$\text{si valori: } q_1 + \delta q_1^0, q_2 + \delta q_2^0, \dots, q_f + \delta q_f^0,$$

dove le  $\delta q$  rappresentano le variazioni infinitesime delle coordinate generali, variazioni indipendenti tra loro. Calcoliamo, ora, il lavoro virtuale compiuto dalle forze agenti sul sistema, lungo lo spostamento considerato, e limitiamo le nostre considerazioni al solo punto  $P$ . Per la componente  $x$  dello spostamento virtuale del nostro punto, avremo:

$$\delta x_i = x_i(q_1 + \delta q_1, \dots, q_f + \delta q_f) - x_i(q_1, \dots, q_f),$$

ma , a meno di infinitesimi di ordine superiore , l'incremento della funzione è uguale al differenziale totale della stessa ; avremo perciò :

$$S_{x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} S_{q_1} + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial q_f} S_{q_f}$$

ed analogamente:

$$f_{x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} f_{q_1} + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial q_f} f_{q_f} \quad \{ \quad (1)$$

$$S_{x_n} = \frac{\partial x_n}{\partial q_1} S_{q_1} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial q_f} S_{q_f} \quad .$$

Espressioni analoghe si avranno quando si considerino le componenti  $y$  e  $z$  dello spostamento virtuale.

Per il lavoro virtuale compiuto dalla forza  $F_i$  sul punto  $P_i$ , lungo lo spostamento virtuale di questo, avremo:

$$dL_i = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i ,$$

e sostituendo, per  $Sx_i$ ,  $Sy_i$  e  $Sz_i$ , i valori forniti dalle (1),

$$dL_i = Sg_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \dots$$

$$\dots + \int_{q_1}^{q_f} \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) ,$$

ed infine, eseguendo il sommatorio esteso agli  $n$  punti del sistema, per il lavoro virtuale compiuto dalle forze agenti sul sistema, avremo:

$$(2) \quad dL = \int_{q_1}^{q_f} \sum_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) + \dots$$

$$\dots + \int_{q_1}^{q_f} \sum_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) .$$

Nel caso dell'equilibrio, questo lavoro virtuale deve annullarsi, deve, cioè, essere:

$$\int_{q_1}^{q_f} \sum_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) + \dots + \int_{q_1}^{q_f} \sum_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = 0.$$

Ma, essendo le variazioni delle  $f$  coordinate generali tra loro indipendenti, affinché si annulli l'espressione del lavoro virtuale dovranno, necessariamente, esser nulli i coefficienti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) = 0 \\ \sum_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right) = 0 \\ \dots \\ \sum_i \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_f} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_f} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Queste espressioni sono, tutte, funzioni delle  $q$ , e ci determinano, con le rispettive soluzioni, i valori delle coordinate generali corrispondenti alle posizioni d'equilibrio del sistema.

In particolare, se le forze ammettono potenziale, detto potenziale risulterà funzione della posizione dei punti del sistema e, quindi, delle coordinate generali  $q$ ; sarà dunque:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_f)$$

Ma, allora, il lavoro virtuale, compiuto dalle forze applicate al sistema, è uguale alla variazione infinitesima,  $\delta U$ , del potenziale, e quindi, nel caso dell'equilibrio, annullandosi il lavoro virtuale, si annullerà anche  $\delta U$ , ed avremo:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_f} \delta q_f = 0,$$

e, ricordando che le  $\delta q$  sono tra loro indipendenti, dovrà essere:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial q_f} = 0.$$

Queste f equazioni coincidono con quelle per la ricerca dei massimi e dei minimi di  $U$ ; in particolare, si potrebbe dimostrare che, se  $U$  è massimo, l'equilibrio è stabile.

Se il sistema è mobile, possono darsi due casi: i vincoli, cui esso è soggetto, possono essere, o no, dipendenti dal Tempo. Ad esempio, nel caso di un punto materiale vincolato a restare su di una superficie fissa, il vincolo è indipendente dal Tempo; se, invece, la superficie è mobile, il vincolo dipende dal Tempo. Osserviamo che, mentre, nel caso della superficie fissa, l'equazione di essa ha la forma:  $\varphi(x, y, z) = 0$ , nel caso, invece, della superficie mobile, l'equazione di essa diventa:

$$\varphi(t, x, y, z) = 0.$$

È evidente, poi, che un punto mobile su di una superficie ha due gradi di libertà. Per determinare la posizione di esso occorrono, quindi, due coordinate, x ed y p. es., ed allora si potrà risolvere l'equazione della superficie rispetto alla terza coordinata z, ottenendo questa in

funzione di  $x, y$  e  $t$ ; si avrà cioè:

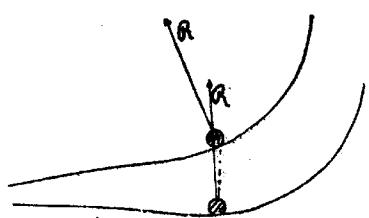
$$z = z(x, y, t).$$

In questo caso le coordinate generali,  $q$ , sono le due coordinate cartesiane  $x$  ed  $y$ , e le coordinate del punto vengono, dunque, espresse, oltre che in funzione delle  $q$ , anche in funzione del tempo. Se dunque le  $3n$  coordinate di un sistema sono legate, tra loro, da  $K$  relazioni indipendenti, in queste relazioni, se i vincoli dipendono dal tempo, figurerà anche la  $t$ ; avremo, cioè:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots, z_n, t) \\ \Phi_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots, z_n, t) \\ \dots \\ \Phi_K(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots, z_n, t) \end{array} \right.$$

Il sistema avrà, quindi,  $3n - K$  gradi di libertà; si potranno così ottenere le  $3n$  coordinate dei suoi punti, in funzione del tempo e delle  $f$  coordinate generali; si avrà cioè:  $x_1 = x_1(q, t)$ ,  $y_1 = y_1(q, t)$ , ...,  $z_n = z_n(q, t)$ .

Osserviamo che, mentre nel caso dei vincoli reversibili ed indipendenti dal tempo, il lavoro compiuto dalle reazioni vincolari sugli spostamenti reali, e quindi virtuali, del sistema era nullo, ciò non è più vero nel caso dei vincoli reversibili dipendenti dal tempo.



Infatti, ad esempio, nel caso di un punto vincolato a muoversi su di una superficie anch'essa mobile, lo spostamento reale del punto è la somma di due sposta-

menti: uno del punto stesso sulla superficie pensata come ferma, l'altro generato dal trascinamento del punto nel moto della superficie. Come è facile riconoscere, il lavoro compiuto dalle reazioni dei vincoli reversibili sul punto, risulterà generalmente diverso da zero. Infatti (vedi fig. della pag. prec.), dato il moto del vincolo, generalmente la reazione vincolare non sarà normale agli spostamenti.

Riprendendo l'espressione del lavoro virtuale compiuto dalle forze direttamente applicate lungo uno spostamento virtuale del sistema, per semplicità di scrittura, indichiamo con  $x_i$ , genericamente, una delle  $3n$  coordinate dei punti del sistema; con l'avvertenza che per:  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i$  ci rappresenta le  $n$  coordinate  $x$  dei punti del sistema, per  $n+1 \leq i \leq 2n$ , le  $n$  coordinate  $y$ , e che per:  $2n+1 \leq i \leq 3n$ , infine,  $x_i$  ci rappresenta le  $n$  coordinate  $z$ ; facciamo, inoltre, un'analogia convenzione per le componenti delle forze. Tendendo conto di ciò, l'espressione (2) del lavoro virtuale (v. pag. 273) diviene, più semplicemente:

$$dL = \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i = \sum_{q_1} \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \dots + \sum_{q_f} \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} .$$

Al solito, nel caso dell'equilibrio questa espressione deve annullarsi, e poiché le variazioni  $\delta q$  sono indipendenti fra loro, dovranno annullarsi i coefficienti:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = 0 , \dots , \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} = 0 .$$

Le (3) sono le equazioni generali dell'equilibrio di un sistema a vincoli reversibili. -

## Princípio di D'Alembert.

Vediamo, ora, come si possa ricondurre qualsiasi problema di dinamica ad un problema di statica. Considerando un punto materiale di massa  $m$ , soggetto ad una forza  $F$ , sappiamo che l'equazione del moto di un tal punto è:

$$F = m A,$$

equazione che, identicamente, si può scrivere:

$$F - m A = 0, \text{ e: } F + (-m A) = 0. \quad (1)$$

Quest'ultima relazione ci dice che è nulla la somma (risultante) della forza  $F$  direttamente applicata, e di un vettore dato dal prodotto negativo della massa per l'accelerazione del punto. Se, ora, confrontiamo la (1) con l'equazione dell'equilibrio di un punto:  $F = 0$ , vediamo come un punto in moto si possa considerare alla stregua di un punto in equilibrio, quando si supponga applicata ad esso, oltre alla forza attiva  $F$ , un'altra forza, rappresentata dal vettore  $-m A$ , che D'Alembert chiama forza perduta o forza d'inerzia. Analoghe considerazioni si possono fare nel caso di un sistema di punti. Se, infatti, indichiamo con  $F_i$  la risultante di tutte le forze (comprese le reazioni vincolari) agenti su di un punto generico  $P_i$  del sistema, il punto  $P_i$  potrà considerarsi come libero, e si avrà dunque:

$$F_i = m_i A_i, \text{ oppure: } F_i + (-m_i A_i) = 0.$$

Vediamo, dunque, che, anche in questo caso, se ai punti del sistema, oltre alle forze che su di essi effettivamente agiscono, fossero anche applicate le forze perdute, il sistema sarebbe in equilibrio. Ciò costituisce il principio di D'Alembert. -

Per Trovare, dunque, le equazioni del moto di un sistema, basterà sostituire, nelle equazioni generali dell'equilibrio, in luogo delle forze direttamente applicate, la somma di tali forze e delle forze perdute; esse divengono (tenendo ancora conto delle semplificazioni di scrittura adottate):

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = 0, \dots, \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_f} = 0,$$

ovvero, in forma equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \\ \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} = \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} = \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f} \end{array} \right.$$

Le equazioni soprascrritte son dette: equazioni di O'Alembert. Abbiamo così  $f$  equazioni differenziali, del secondo ordine rispetto alle  $q$ , che ci forniranno i valori delle coordinate dei punti del sistema. Questi valori ci verranno dati in funzione delle  $q$  e di  $2f$  costanti arbitrarie, costanti che potranno esser determinate quando, al solito, siano date  $2f$  condizioni.

A Titolo d'esempio, consideriamo il moto piano di una sbarra rigida di lunghezza  $l$ . Supponiamo la massa della sbarra concentrata nei due estremi,  $P_1$  e  $P_2$ , di essa. Cominciamo a stabilire le coordinate generali. Possiamo, p. es., scegliere come coordinate generali  $(q_1, q_2, q_3)$  le due coordinate cartesiane,  $x_1$  ed  $y_1$ , di  $P_1$ , e l'angolo  $\vartheta$

che la sbarra suddetta fa con l'asse  $x$ . Le coordinate  $x_2$  ed  $y_2$  di  $P_2$ , ci son date dalle espressioni:

$x_2 = x_1 + l \cos \vartheta = q_1 + l \cos q_3 ; \quad y_2 = y_1 + l \sin \vartheta = q_2 + l \sin q_3$ ,  
e quindi, per le componenti  $x$  ed  $y$  dell'accelerazione di  $P_2$ , derivando due volte le precedenti, otteniamo:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = \ddot{q}_1 - l \cos q_3^2 - l \sin q_3 \ddot{q}_3 \\ \ddot{y}_2 = \ddot{q}_2 - l \sin q_3^2 + l \cos q_3 \ddot{q}_3 \end{cases}$$

Sostituendo, quindi, nei secondi membri delle equazioni di O'D'Alembert (in questo caso 2), per  $\ddot{x}$  ed  $\ddot{y}$ , i precedenti valori, ed esprimendo in funzione delle coordinate generali le forze che compaiono a primo membro, si ottengono le equazioni del moto piano di una sbarra rigida.

## ~ Equazioni di Lagrangia. ~

Il procedimento sopra indicato per ricavare le equazioni del moto di un sistema, è talora, assai complicato ad usarsi; si preferisce, perciò, servirsi di altre equazioni, che si ricavano da quelle di O'D'Alembert, le equazioni di Lagrangia.

Riprendendo l'espressione del lavoro virtuale compiuto dalle forze sul sistema:

$$dL = \sum_{i=1}^{m+1} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + \dots + \sum_{i=1}^{m+1} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} ,$$

se consideriamo un particolare spostamento virtuale che faccia variare la sola coordinata generale  $q_1$ , lasciando invariate le altre, detta  $\delta q_1$  la variazione da essa subita, poichè, dopo lo spostamento virtuale suddetto, risulta:

$$q_1 = q_1 + \delta q_1, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_m = 0 ,$$

l'espressione precedente del lavoro virtuale si riduce a:

$$dL = \sum_{i=1}^{m+1} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} . \quad (1)$$

Analogamente, considerando degli altri spostamenti virtuali tali da far variare, ad una ad una, le altre  $f-1$  coordinate generali, ottieniamo:

$$dL_2 = \int q_2 \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2}, \dots, dL_f = \int q_f \sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_f}. \quad (1)$$

Si riconosce, ora, immediatamente, che le soprascrritte espressioni non sono altro che i primi membri delle equazioni di D'Alembert. Indicando, per brevità, con  $Q_n$  la quantità:

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_n}, \quad \text{le (1) precedenti divengono:}$$

$$(2) \quad dL_1 = \int q_1 Q_1, \dots, dL_f = \int q_f Q_f.$$

Il vettore  $Q_n$  dicesi forza Lagrangiana. La forza Lagrangiana  $Q_n$  risulta, in generale, dall'espressione:

$$Q_n = \frac{dL_n}{dq_n}.$$

Supponiamo, nuovamente, che lo spostamento virtuale del sistema sia tale da far variare contemporaneamente tutte le  $f$  coordinate generali; l'espressione del lavoro virtuale assume, allora, la forma:

$$dL = \int q_1 Q_1 + \int q_2 Q_2 + \dots + \int q_f Q_f.$$

Ma se il campo di forze considerato ammette potenziale, il tutto si semplifica notevolmente. Infatti, in tal caso il lavoro virtuale,  $dL$ , è uguale alla variazione infinitesima,  $\delta U$ , del potenziale, e, poiché  $U$  è funzione della posizione del sistema e, quindi, delle  $f$  coordinate generali, l'incremento di esso è, salvo infinitesimi di ordine superiore, uguale al differenziale totale della funzione che lo rappresenta; quindi potremo porre:

$$dL = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \int q_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_f} \int q_f.$$

Confrontando quest'espressione con la (2), poiché entrambe debbono rappresentare lo stesso lavoro virtuale, risulta:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} ; Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} ; \dots ; Q_f = \frac{\partial U}{\partial q_f} .$$

Passiamo, ora, a trasformare i secondi membri delle equazioni di O'Alembert. Indicando con  $T$  la forza viva del sistema, ci proponiamo di dimostrare che è:

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1} .$$

Stabiliamo dapprima, due formule che ci permetteranno di provare il nostro asserto. A tal scopo, poiché sappiamo che è:

$$x_i = x_i(t, q_1, q_2, \dots, q_f) ,$$

derivando rispetto al tempo, troviamo:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_f} \dot{q}_f ,$$

$\dot{x}_i$  ci è data, cioè, in funzione di  $t$ , delle  $q$  e delle  $\dot{q}$ .

Di qui si riconosce che anche la forza viva sarà funzione del tempo, delle coordinate generali e delle loro derivate prime rispetto al tempo. Derivando, poi,  $\dot{x}_i$  rispetto a  $q_1$ , troviamo l'identità: (3)  $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} ;$

e derivando  $\dot{x}_i$  rispetto a  $q_1$ , abbiamo ancora:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_f \partial q_1} \dot{q}_f .$$

Se, ora, deriviamo  $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}$ , totalmente, rispetto al tempo, troviamo:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_f \partial q_1} \dot{q}_f ,$

e confrontando questa equazione con la precedente, si

Trova:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i}. \quad (4)$$

Tenendo conto delle formule (3) e (4), possiamo ora provare il nostro asserto. Notando che è:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

e sostituendo per  $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_i}$ , il valore fornito dalla (4), ottieniamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i},$$

e, infine, sostituendo per  $\frac{\partial x_i}{\partial q_i}$ , il valore fornito dalla (3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{3n} m_i \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{3n} m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

il che, per l'appunto, volevamo dimostrare.

Perciò le equazioni di D'Alembert, per il moto di un sistema avente  $f$  gradi di libertà, si trasformano nelle cosiddette equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{\partial T}{\partial q_f} = Q_f.$$

Per ottenere le equazioni di Lagrange bisogna esprimere, anzitutto, la forza viva,  $T$ , del sistema in funzione del tempo, delle coordinate generali e delle loro derivate prime rispetto al tempo. Si osservi, a tal scopo, che, essendo  $T$  funzione lineare delle  $q$  e delle  $\dot{q}$ , la forza viva risulterà funzione quadratica delle stesse; se nella funzione che rappresenta  $T$  compare anche il tempo, allora la  $T$  è una forma quadratica completa nelle  $q$  e  $\dot{q}$ ; se, invece, il tempo non compare, scompaiono evidentemente i termini contenenti le  $\dot{q}$  al grado primo ed a quello zero, e la forza viva diventa una forma quadratica omogenea delle  $\dot{q}$ , i cui coefficienti sono, in generale delle funzioni qualunque delle  $q$ . Si noti in fine che, se le forze del campo ammettono potenziale, i secondi membri,  $Q_1, Q_2, \dots, Q_f$ , delle equazioni di Lagrange divengono, rispettivamente:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_f}, \quad (\text{vedi pag 28})$$

ed allora le suddette equazioni assumono la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{\partial T}{\partial q_f} = \frac{\partial U}{\partial q_f}.$$


---

Esempi. 1). Proponiamoci di stabilire le equazioni di Lagrange nel caso particolare del moto di una sbarra rigida lanciata in un piano verticale ( $x, y$ ). Sia la sbarra omogenea, e coincida, quindi, il centro,  $C$ , di gravità col centro di figura. Scelgiamo, come coordinate generali, le coordinate  $x$  ed  $y$ , di  $C$ , e l'angolo  $\theta$  che la sbar-

ra fa con l'asse  $x$ , orizzontale. Essendo la sbarra soggetta alla forza peso, per il potenziale di quest'ultima, avremo:

$$\mathcal{U} = -g m h = -g m y_0,$$

dove  $m$  è la massa della sbarra. Oltre tutto le forze Lagrangiane ci sono date dalle derivate parziali, rispetto alle coordinate generali, di  $\mathcal{H}$ , derivate parziali che, in questo caso, si riducono ad una sola, quella rispetto ad  $y_0$  che è:

$$-g m.$$

Passiamo, ora, a calcolare la forza viva,  $T$ , del sistema. Osservando che si tratta del moto di un sistema rigido, e che, quindi il moto di esso è il risultato di un moto traslatorio con la velocità del centro di gravità, e di un moto rotatorio attorno ad un asse passante per  $G$ , avremo:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra, e passante per  $G$ . Poiché il nostro sistema ha tre gradi di libertà, le equazioni di Lagrange saranno tre, e precisamente:

$$m \ddot{x} = 0 \quad (1)$$

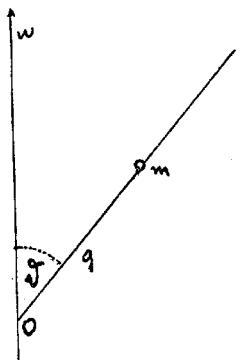
$$m \ddot{y} = -g m \quad (2)$$

$$I \ddot{\varphi} = 0 \quad (3)$$

La (3) ci dice che la sbarra ruota uniformemente attorno al centro di gravità, mentre la (1) e la (2) ci dicono che il centro di gravità descrive una parabola nel piano  $x, y$ .

II). Applichiamo, ora, le equazioni Lagrangiane allo studio del moto di un punto materiale, vincolato a scorrere su di una retta che, a sua volta, ruoti con velocità angolare costante attorno ad un asse verticale ad essa incidente, descriva, cioè, nello spazio, un cono circolare. Il vincolo è, quindi, indipendente dal Tempo. È evidente, inoltre,

che il sistema ha un sol grado di libertà. Indichiamo con  $\omega$  la velocità angolare della retta, con  $m$  la massa del punto, con  $\vartheta$  l'angolo costante che la retta forma con l'asse, con  $q$ , infine, la distanza variabile del punto materiale dal punto d'incidenza,  $O$ , della retta con l'asse. Essendo il punto soggetto alla forza peso, il potenziale  $U$  è dato da:  $U = -mg \cos \vartheta$ ,



contandosi le alterze da un piano orizzontale passante per  $O$ . Quanto, poi, alla forza viva del punto, osserviamo che la velocità,  $V$ , di esso, è la somma di due velocità, una di traslazione sulla retta, l'altra di rotazione attorno all'asse  $w$ , e siccome queste due velocità sono tra loro perpendicolari, il quadrato di  $V$  sarà dato, senz'altro, dalla somma dei quadrati delle componenti; quindi, siccome la velocità traslatoria del punto sulla retta è data da  $\dot{q}$ , quella rotatoria da  $\omega q \sin \vartheta$ , avremo:  $V^2 = \dot{q}^2 + \omega^2 q^2 \sin^2 \vartheta$ ,

e quindi, per la forza viva  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2 \sin^2 \vartheta) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \sin^2 \vartheta.$$

Avremo una sola equazione di Lagrangia, perchè il sistema ha un sol grado di libertà, e precisamente:

$$m \ddot{q} - m \omega^2 q \sin^2 \vartheta = -m g \cos \vartheta,$$

e dividendo per  $m$ :  $\ddot{q} - \omega^2 q \sin^2 \vartheta = -g \cos \vartheta$ .

Abbiamo, così, un'equazione differenziale del secondo ordine, non omogenea. Al solito, per integrarla, dovremo aggiungere ad un integrale particolare dell'equazione suddetta l'integrale generale dell'equazione resa omogenea. Un integrale particolare dell'equazione non omogenea è, evidentemente:

$$q^* = \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}$$

Per ricavare l'integrale generale dell'equazione resa omogenea:

$$\ddot{q} - \omega^2 q \sin^2 \vartheta = 0 \quad , \quad (1)$$

ponendo:  $q = e^{at}$ , ricaviamo:  $\dot{q} = a e^{at}$ ,  $\ddot{q} = a^2 e^{at}$ , e sostituendo nella (1) questi valori:

$$a^2 e^{at} - \omega^2 \sin^2 \vartheta e^{at} = 0$$

e dividendo per  $e^{at}$ :  $a^2 - \omega^2 \sin^2 \vartheta = 0$ , cioè:

$$a^2 = \omega^2 \sin^2 \vartheta \quad ,$$

ed infine:  $a = \pm \omega \sin \vartheta$ .

Ora integrali particolari,  $q_1$  e  $q_2$ , dell'equazione resa omogenea, sono allora:

$$q_1 = e^{t \omega \sin \vartheta}, \quad q_2 = e^{-t \omega \sin \vartheta}.$$

Facendo una combinazione lineare di questi, ottieniamo l'integrale generale dell'equazione:

$$q = A e^{t \omega \sin \vartheta} + B e^{-t \omega \sin \vartheta},$$

e, finalmente, aggiungendo a questo integrale generale l'integrale particolare,  $q^*$ , dell'equazione non omogenea, ottieniamo l'integrale generale di quest'ultima:

$$q = \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + A e^{t \omega \sin \vartheta} + B e^{-t \omega \sin \vartheta}.$$

Poiché  $A$  e  $B$  sono delle costanti arbitrarie, se è:  $A=B=0$ , si ricava dalla precedente espressione:

$$q = \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Se si pone, cioè, il punto ad una distanza, da 0, data dalla precedente espressione, esso vi rimane e si trova in una posizione d'equilibrio relativo. Se, invece, le due costanti non si annullano insieme, ma è, p. es.,  $A=0$  e  $B \neq 0$ , allora l'integrale generale della nostra equazione diviene:

$$q = \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + B e^{-t \omega \sin \vartheta},$$

relazione, questa, che ci dice come il punto materiale, al crescere indefinitivamente di  $t$ , tenda asintoticamente alla posizione d'equilibrio relativo sopra considerata; se è, invece:  $A \neq 0$  e  $B=0$ , la distanza del punto da 0 cresce infinitamente al crescere del tempo.

III) - Applichiamo ancora le equazioni di Lagrangia allo studio del moto di un punto vincolato a muoversi su di una parabola rotante attorno al suo asse, posto verticalmente, che scegliamo per asse delle ordinate, con velocità angolare costante  $\omega$ . Questo sistema ha, evidentemente, un solo grado di libertà. Indicando con  $q$  la distanza del punto materiale dall'asse  $\omega$ , per l'ordinata del punto avremo:

$$y = a q^2$$

dove  $a$  è una costante (l'equazione della nostra curva che è una parabola è, per l'appunto:  $y = a q^2$ ). Il potenziale della forza peso, agente sul mobile, è dato da:

$$U = -m g a q^2,$$

contandosi le altezze a partire da un piano orizzontale passante per il vertice della parabola. Quanto all'espressione della forza viva, essa si può scomporre in due termini, l'uno dovuto alla velocità di trascinamento  $\omega q$  del punto, l'altro alla velocità relativa dello stesso, la quale ultima si scinde nelle componenti  $\dot{q}$  e  $2 a q \dot{q}$ ; si avrà, quindi:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 + 4 a^2 q^2 \dot{q}^2 + \omega^2 q^2).$$

L'equazione Lagrangiana, quando, per semplicità, si ponga:  $m=1$ , ci è data da:

$$\ddot{q} + 4 a^2 q^2 \ddot{q} + 4 a^2 q^2 \dot{q}^2 + (2 g a - \omega^2) q = 0.$$

Questa equazione è di integrazione assai complicata. Senza tut-

Torna, bisogna d'integrarla, possiamo ricercare se esistono posizioni d'equilibrio relativo. Poniamo, a tal nops, nella precedente:  $q = \text{cost.}$ , e quindi:  $\dot{q} = \ddot{q} = 0$ ; essa diventa:

$$(2g_a - w^2)q = 0.$$

Da questa si ricava:  $q = 0$  (nel qual caso il punto si trova nel vertice), oppure:  $2g_a - w^2 = 0$ , da cui  $w = \sqrt{2g_a}$ .

Per un valore di  $w$  che soddisfi a quest'ultima relazione, Tutti i punti della parabola sono posizioni di equilibrio relativo.

Teorema delle forze vive, dedotto dalle equazioni di Lagrangia. =

= Riprendendo le equazioni di Lagrangia per un sistema a  $f$  gradi di libertà a vincoli indipendenti dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \dots, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{\partial T}{\partial q_f} = Q_f,$$

moltiplichiamole, rispettivamente, per  $dq_1, dq_2, \dots, dq_f$ , e sommiamole membro a membro. Otterremo:

$$dq_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + dq_f \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - dq_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - dq_f \frac{\partial T}{\partial q_f} = dq_1 Q_1 + \dots + dq_f Q_f$$

Si riconosce immediatamente come il secondo membro della precedente coincida coll'espressione del lavoro,  $dL$ , compiuto dalle forze agenti sul sistema; sarà quindi:

$$dq_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + dq_f \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - dq_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - dq_f \frac{\partial T}{\partial q_f} = dL$$

ed ancora, dividendo ambo i membri per  $dt$ :

$$\frac{dq_1}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + \frac{dq_f}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \frac{dq_1}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - \frac{dq_f}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_f} = \frac{dL}{dt}$$

ovvero:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + \dot{q}_f \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial q_f}$$

e identicamente :

$$(1) \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} \right) - \ddot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \dots - \ddot{q}_f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} - \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial q_f}.$$

Osserviamo ora che, per l'ipotesi fatta che i vincoli siano indipendenti dal tempo, la forza viva è una forma quadratica omogenea delle  $\dot{q}$ , e quindi, per il Teorema di Euler sulle funzioni omogenee, abbiamo :

$$2T = \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dots + \dot{q}_f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f}.$$

L'altra parte,  $T$  è una funzione delle  $q$  e delle  $\dot{q}$ , in cui il tempo non figura esplicitamente; avremo dunque :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_f} \dot{q}_f + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} \ddot{q}_f.$$

Per mezzo di queste due relazioni, la (1) diventa :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

cioè :

$$dL = dT, \quad \text{ed integrando}$$

Tra due tempi,  $t_1$  e  $t_2$ , ottieniamo :

$$L_{t_1 t_2} = T_2 - T_1.$$

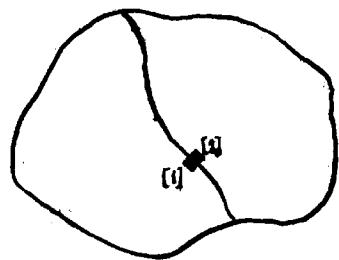
Questa ultima relazione esprime appunto il Teorema delle forme vive. -

---

# ~~~ [ DROMEOCCONICO ] ~~~

- Premettiamo, anzitutto, alcune brevi considerazioni sulla pressione, valide sia nel caso dei solidi che nel caso dei liquidi. Se supponiamo di dividere, mediante una superficie ideale, un corpo qualsiasi in due parti, [1] e [2], queste eserciteranno reciprocamente delle forze:

procamente, tra loro, delle forze, ad esempio attrattive (Newtoniane) etc.; ma, oltre a queste, agiranno anche delle particolari forze che han luogo soltanto tra due elementi vicinissimi: queste forze danno origine alla pressione che ci proponiamo, ora, di studiare.



A Tal scopo, consideriamo un elemento,  $d\sigma$ , della superficie di separazione. Vediamo che sull'elemento di [2], immediatamente a contatto con  $d\sigma$ , si esercita, per effetto del corrispondente elemento di [1], una forza infinitesima  $dF$ .

Si definisce pressione,  $p$ , il rapporto:  $\frac{dF}{d\sigma}$  (1). Evidentemente, salvo il segno, il precedente rapporto ci dà anche la pressione che l'elemento di [2] esercita sull'elemento di [1]. Si noti, però, che  $dF$  non rappresenta soltanto la forza esercitata da un elemento di [1] sull'elemento di [2] in immediato contatto, bensì la risultante delle azioni di tutte le forze esercitate dagli elementi contigui a quello, sempre dalla stessa parte della superficie di separazione. È importante notare che la pressione non è una forza, bensì un rapporto tra una forza ed una superficie. Dalla (1) si ricava:

$$dF = p \cdot d\sigma .$$

La pressione che si esercita su di un elemento del corpo si può scomporre in due componenti, l'una normale alla superficie di separazione (questa componente è quella che, volgarmente, dicesi pressione),  $p_n$ , l'altra parallela alla superficie medesima,  $p_t$ , che viene detta pressione di scorrimento o sforzo di taglio, appunto perché tende a dividere [1] e [2] facendoli scorrere l'uno sull'altra secondo la superficie di separazione. Quanto, poi, al segno di  $p_n$ , attribuiremo

ad essa il segno positivo quando Tende ad allontanare tra loro i due elementi cui si riferisce , negativo quando , invece , Tende ad avvicinarli . In quest'ultimo caso vien detta pressione negativa o Tensione .

In generale , su di un elemento di superficie interno al corpo , si eserciterà uno sforzo di Taglio ed una pressione normale . Si potrebbe dimostrare che per un punto qualsiasi del corpo passano Tre giaciture (tra loro normali) Tali che su di esse non si esercita sforzo di Taglio , ma soltanto pressione normale , positiva o negativa . Le direzioni normali a queste Tre giaciture diconsi : assi principali di pressione .

Scegliendo Tali assi principali di pressione come assi coordinati , consideriamo un elemento di superficie , d $\sigma$  , di coseni direttori  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  (la cui normale ha coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$ ) . Esso ed i Tre triangoli rettangoli determinati sui Tre piani coordinati , costituiranno un Tetraedro che ha per base l'elemento d $\sigma$  stesso . Sulle Tre facce di questo Tetraedro si eserciteranno delle pressioni positive o negative , ed inoltre , su tutto il Tetraedro si eserciteranno delle forze proporzionali al volume (e , quindi , alla massa ) , ma siccome il volume del Tetraedro è un infinitesimo del Terz'ordine , mentre l'area d $\sigma$  su cui agisce la pressione è infinitesima del secondo , si potranno trascurare le summentovate forze di massa e tener soltanto conto delle pressioni . Per l'equilibrio del Tetraedro occorrerà , evidentemente che si annullino le Tre componenti , R<sub>x</sub> , R<sub>y</sub> , R<sub>z</sub> , del risultante delle forze agenti su di esso . Per ipotetesi , le Tre pressioni principali , p<sub>1</sub> , p<sub>2</sub> , p<sub>3</sub> , sono , rispettivamente , normali al piano coordinato yz , al coordinato xz .

e al coordinate  $x, y$ ; invece, la pressione che agisce su di  
ha, generalmente, tutte le tre componenti,  $p_x, p_y, p_z$ . Per  
l'equilibrio dovrà, dunque, essere:

$$p \cdot d\sigma_1 = p_x \cdot d\sigma \quad , \quad p \cdot d\sigma_2 = p_y \cdot d\sigma \quad , \quad p \cdot d\sigma_3 = p_z \cdot d\sigma \quad ,$$

ma, essendo:

$$d\sigma_1 = \alpha \cdot d\sigma \quad , \quad d\sigma_2 = \beta \cdot d\sigma \quad , \quad d\sigma_3 = \gamma \cdot d\sigma \quad ,$$

avremo:

$$p \cdot \alpha \cdot d\sigma = p_x \cdot d\sigma \quad , \quad p \cdot \beta \cdot d\sigma = p_y \cdot d\sigma \quad , \quad p \cdot \gamma \cdot d\sigma = p_z \cdot d\sigma$$

cioè, infine:

$$p \alpha = p_x \quad , \quad p \beta = p_y \quad , \quad p \gamma = p_z \quad .$$

Queste ultime formule, quando siano note le tre pressioni principali,  $p_1, p_2, p_3$ , ci permettono di calcolare la pressione su di un elemento di superficie d'orientazione qualsiasi; per ottenere, poi, la pressione normale all'elemento di superficie considerato, moltiplicando ambo i membri delle formule precedenti, rispettivamente, per  $\alpha, \beta, \gamma$  (coseni di rettori della normale all'elemento di superficie) e sommando membri a membri, ottieniamo:

$$(2) \quad p_n = \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z = \alpha^2 p_1 + \beta^2 p_2 + \gamma^2 p_3 \quad .$$

---

Passando, ora, all'esame dei fluidi, notiamo, anzitutto, che la proprietà caratteristica di essi è di non presentare alcuna resistenza allo sforzo di Taglio; in essi non si ha, dunque, pressione di scorrimento, e la pressione si riduce alla sola componente normale. Mentre, in generale, scelto un punto qualsiasi di un corpo, per esso passano tre, e tre sole, giaciture sulle quali agisce solo la pressione normale, nel caso dei fluidi, invece, tutte le giaciture sono, come si può dire, principali, cioè soggette, sulla loro superficie, unicamente a pressione normale. Scelto, allora, un elemento

di superficie qualsiasi, nell'interno di un fluido, di coseni di rettori,  $\alpha, \beta, \gamma$ , dette:  $p_x, p_y, p_z$ , le tre componenti della pressione  $p$  agente su di esso, se questa deve essergli perpendicolare, dovrà aversi:  $p_x : p_y : p_z = \alpha : \beta : \gamma$ . (3)

Ma le formule stabilite precedentemente, ci danno in generale:

$$p_x = \alpha p_1, \quad p_y = \beta p_2, \quad p_z = \gamma p_3;$$

ed allora, dalla (3), si deduce:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p, \quad \text{e quindi:}$$

$$p_x = \alpha p, \quad p_y = \beta p, \quad p_z = \gamma p,$$

ed infine, per la (2):

$$p_n = p (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = p.$$

E' questa l'espressione del principio di Pascal: la pressione in un fluido è indipendente dall'orientazione.

Nel caso dei fluidi, poiché la pressione, qualunque sia la giacitura considerata, è sempre normale a questa ed ha valore costante, essa potrà darsi mediante una sola grandezza scalare. Considerando, dunque, un punto qualsiasi di un fluido, in esso la pressione sarà funzione della posizione, quindi potremo riguardare la pressione  $p$  come funzione delle coordinate del punto, cioè porre:

$$p = p(x, y, z).$$

Questo in quanto si considera lo stato di quiete dei fluidi, mentre, se se ne considerasse il moto, nella espressione precedente interverrebbe anche il tempo, si avrebbe cioè:

$$p = p(x, y, z, t).$$

## ~ Idrostatica ~

Per stabilire le equazioni fondamentali dell'idrostatica, scelta una terna cartesiana d'assi,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , consideriamo un parallelepipedo elementare di liquido di massa  $d_m$ , avente gli spigoli  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , paralleli, rispettivamente ai tre assi omologhi. Osserviamo, anzitutto, che in questo caso non si possono

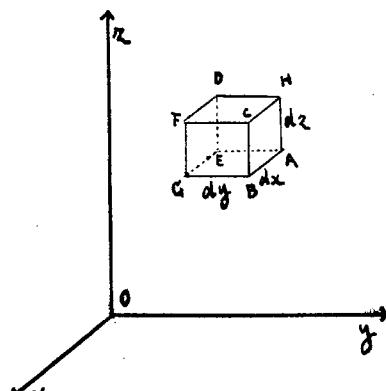
trascuare le forze di massa, perché se è ben vero che esse sono infinitesime del terzo ordine, mentre le pressioni lo sono del secondo, esse non sono più trascurabili in confronto alle pressioni cui è soggetto il parallelepipedo, perché le due pressioni che

si esercitano su due facce opposte del parallelepipedo, differiscono tra loro per infinitesimi (perchè ci si sposta di un tratto infinitesimo in senso al liquido) ed hanno segno contrario; perciò si neutralizzano in parte, a vicenda, nelle loro parti principali. La pressione  $p$  è una funzione,  $p(x, y, z)$ , delle coordinate del punto cui ci si riferisce. Indichiamo con  $X, Y, Z$ , le tre componenti del risultante delle forze esterne agente sopra l'unità di massa del fluido, con  $\rho$ , infine, la densità del liquido.

Per l'equilibrio dell'elemento di liquido considerato, dovrà annullarsi il risultante di tutte le forze agenti su di esso, ossia le componenti del risultante medesimo secondo i tre assi. Le tre componenti del risultante delle forze di massa, ricordando che è:  $d_m = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ , ci sono date, rispettivamente, da:

$$X\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad Y\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad Z\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Parallelamente all'asse  $x$ , il parallelepipedo è soggetto alla componente:  $X\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ , del risultante



Te delle forze di massa, alla spinta che la pressione,  $p$ , esercita sulla faccia AD, di grandezza:

$$p \cdot dy \cdot dz,$$

a quella che la pressione esercita sulla faccia BF, data da:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz.$$

In conclusione, la componente  $x$  di tutte le forze agenti sul parallelepipedo, ci è data dalla somma:

$$X \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz + p \cdot dy \cdot dz + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz,$$

che, nel caso dell'equilibrio, deve annullarsi:

$$X \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz + p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz = 0,$$

ovvero:  $X \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = 0$ , da cui, di  
videndo per  $dx \cdot dy \cdot dz$ , si ottiene:

$$gX - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

cioè, infine:

$$(1) \quad gX = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad gY = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad gZ = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Queste sono le equazioni fondamentali dell'idrostatica.

Nelle considerazioni che seguono, ammetteremo che la densità,  $\rho$ , sia una funzione,  $\rho(p)$ , della pressione; vediamo allora quale particolare forma assumono le equazioni fondamentali dell'idrostatica. Introduciamo, perciò, una funzione:  $\Psi(p) = \Psi$ , della pressione, definita al modo seguente:

$$\Psi = \int \frac{dp}{\rho} = \Psi(p). \quad (2)$$

Questa funzione, nel caso dei liquidi, essendo la densità,  $\rho$ , indipendente dalla pressione, assume la forma:

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}.$$

Nel caso dei gas che obbediscono alla legge di Boyle e Mariotte, essendo  $\rho \propto k_p$ :

$$\Psi = \int \frac{dp}{Kp} = \frac{1}{K} \log p.$$

Siccome  $\Psi$  è funzione della  $p$ , derivandola parzialmente, rispetto ad  $x$ , otteniamo:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

ma dalla (2) si ricava:

$$\frac{d\Psi}{dp} = \frac{1}{q}, \quad \text{e quindi: } \frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{q} \frac{dp}{dx}.$$

Ma dalla prima delle (1) si ricava:

$$\frac{1}{q} \frac{dp}{dx} = X, \quad \text{ed allora si}\newline \text{sulta:}$$

$$(3) \quad X = \frac{d\Psi}{dx}, \quad \text{ed analogamente:}$$

$$Y = \frac{d\Psi}{dy}, \quad Z = \frac{d\Psi}{dz}$$

Concludendo: nel caso dell'equilibrio, le componenti del risultante delle forze di massa, devono essere uguali, rispettivamente alle tre derivate parziali della funzione  $\Psi$ , rispetto ad  $x$ , ad  $y$  ed a  $z$ .

Di qui può dedursi che, per l'equilibrio è necessario che le forze di massa abbiano potenziale; sappiamo, infatti, che, solo in questo caso, le loro componenti si possono rappresentare come derivate parziali di una funzione delle coordinate.

Infatti, ad esempio, nel caso della forza peso, immaginiamo che, p. es., in un recipiente contenente del liquido, solo una parte di quest'ultimo sia soggetto all'azione del peso: allora questa parte di liquido, cadendo in basso, costringerebbe la rimanente parte di liquido a salire verso l'alto, ed, evidentemente, in queste condizioni, non si potrebbe avere l'equilibrio. Se, dunque, il campo di forze ammette potenziale espresso in funzione

ne,  $\varphi(x, y, z) = \varphi$ , delle coordinate del punto cui ci si riferisce, sappiamo allora che le componenti,  $X, Y, Z$ , del risultante delle forze esterne, riferito all'unità di massa, ci sono date rispettivamente dalle tre derivate parziali del potenziale; sarà cioè:  $X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ,

e quindi, per le (3):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

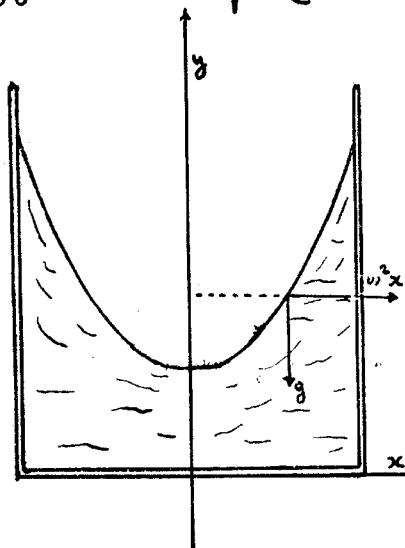
le quali ultime relazioni ci dicono come le due funzioni,  $\varphi$  e  $\Psi$ , differiscano solo per una costante; sia cioè:

$$\Psi = \varphi + \text{cost.}, \quad \text{ovvero, poiché è: } \Psi = \int \frac{dp}{\varphi} : \\ \int \frac{dp}{\varphi} = \varphi + \text{cost.}$$

Se ne conclude che, se  $\varphi$  è una costante, è costante anche  $\Psi$ , e, quindi, le superfici su cui  $\varphi$  ha un medesimo valore (equipotenziali), sono tali che anche  $\Psi$  ha su di esse uno stesso valore, ha, cioè, uno stesso valore la pressione. In altre parole, le superfici equipotenziali coincidono con le superfici isobariche. In particolare, nel caso del peso, siccome le superfici equipotenziali sono costituite da piani orizzontali, anche le superfici isobariche saranno tali; e siccome sappiamo che le superfici equipotenziali sono normali alla forza, possiamo concludere che la superficie libera di un liquido, che, evidentemente, è una superficie isobaria, è normale alla direzione della forza che agisce sul liquido in questione.

Esempio. - Come applicazione, proponiamoci di stabilire l'equazione della superficie libera di un liquido contenuto in un recipiente cilindrico che ruoti, con velocità costante  $w$ , attorno al proprio

asse verticale, che scegiamo come asse delle ordinate, scegliendo, inoltre, come asse  $x$ , il raggio del cilindro medesimo. Un elemento qualsiasi di liquido, di massa unitaria, può considerarsi come in equilibrio relativo perché lo si riguardi come soggetto alla forza centrifuga,  $\omega^2 x$ , diretta secondo la



normale all'asse di rotazione, passante per l'elemento in parola, ed alla forza peso data da:  $-g$ . Siccome la forza centrifuga si esercita nella direzione dell'asse  $x$ , e la forza peso nella direzione dell'asse  $y$ , la forza totale, agente sull'elemento considerato, ha le componenti:

$$X = \omega^2 x \quad , \quad Y = -g \quad ,$$

ed il potenziale risulta quindi:

$\varphi = \frac{\omega^2 x^2}{2} - gy$  (infatti, derivando i due termini a secondo membro, rispettivamente, rispetto ad  $x$  ed ad  $y$ , si ritrovrebbero le espressioni delle forze di partenza). La superficie libera del liquido, deve essere una superficie equipotenziale, deve, cioè, su di essa, essere:  $\varphi = \text{cost.}$ , ossia:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} - gy = \text{cost.} \quad ,$$

equazione, questa, che rappresenta, manifestamente, una parabola nel piano  $xy$ . Abbiamo fatto queste considerazioni, riferendoci ad una sezione verticale qualsiasi passante per l'asse del recipiente. Possiamo, perciò, concludere che la superficie libera del liquido, assume la forma di un paraboloidè di rotazione.

# ~ Idrodinamica ~

---

Applicando, alle equazioni fondamentali dell'idrostatica, il principio di D'Alembert, si ottengono le equazioni fondamentali dell'idrodinamica. A tal scopo, sostituendo al risultante delle forze di massa agenti sul liquido (espresso mediante le sue componenti,  $X, Y, Z$ ) riferito, al solito all'unità di massa, la somma della forza direttamente applicata ( $X, Y, Z$ ) e della forza perduta ( $A_x, A_y, A_z$ ), avremo:

$$(1) \quad X - A_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y - A_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad Z - A_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Se il campo ammette potenziale, avremo allora:

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

e, quindi, le (1) divengono:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - A_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - A_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - A_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

da cui:

$$(3) \quad A_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\text{e poiché è: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

le (3) precedenti divengono:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \Psi) \\ A_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi - \Psi) \\ A_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi - \Psi) \end{array} \right.$$


---

### Moti permanenti.

È importantissima, in idrodinamica, la nozione di moto permanente. In generale, nel moto di un liquido, la velocità delle particelle che passano per un punto fisso, varia al variare del tempo, ma vi sono dei moti particolari in cui tale velocità rimane costante, e così pure rimangono costanti al variare del tempo, le altre grandezze che determinano il moto, moto che, in tal caso, dicesi permanente. Si noti bene, però, che la velocità, nei moti permanenti, è costante per tutti gli elementi di liquido, riferendoci al loro passaggio per un determinato punto fisso, mentre, in generale, la velocità di ogni elemento di liquido varia seguendo l'elemento stesso nel suo moto. Moltiplicando ambo i membri delle (4), rispettivamente, per  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  (ove,  $V_x$ ,  $V_y$  e  $V_z$  sono le componenti della velocità,  $V$ , dell'elemento considerato), e sommando membro a membro, otteniamo:

$$(5) \quad V_x \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \psi) + V_y \frac{\partial}{\partial y} (\varphi - \psi) + V_z \frac{\partial}{\partial z} (\varphi - \psi) = V_x A_x + V_y A_y + V_z A_z.$$

Se si considera il passaggio degli elementi di liquido per un determinato punto fisso, avverrà che, mentre ciascuno di essi passa per detto punto, la differenza  $\varphi - \psi$  rimane costante, se, invece, si segue un elemento del liquido nel suo moto, la differenza suddetta varierà, e con essa, per le (4), varierà l'accelerazione dell'elemento in parola. Per vedere come varii la differenza  $\varphi - \psi$ , che è una funzione delle sole coordinate,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dell'elemento, derivandola rispetto al tempo, ottieniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi - \psi) &= \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial x} V_x + \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial y} V_y + \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial z} V_z. \end{aligned}$$

Ma, allora, per la (5) precedente, è anche:

$$\frac{d}{dt}(\varphi - \Psi) = V_x A_x + V_y A_y + V_z A_z = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{d}{dt} \frac{V^2}{2},$$

dove le derivate rispetto al tempo s'intende che debban esser prese seguendo il moto di una particella. Infine, abbiamo:

$$d(\varphi - \Psi) = d \frac{V^2}{2}, \quad \text{cioè: } (\varphi - \Psi) - \frac{V^2}{2} = \text{cost.} \quad (6),$$

relazione, questa, che vale quando si segua una particella liquida nel suo moto, ossia, quando si segua un filetto di corrente. La formula (6) esprime il: Teorema di Bernoulli.

### Teorema di Torricelli.

Il Teorema di Torricelli si può dedurre immediatamente da quello di Bernoulli. Infatti, considerando un recipiente qualsiasi munito, inferiormente, di un foro, detta  $h$  l'altezza della superficie libera dal foro, seguiamo, nel suo moto, una particella liquida che, dalla superficie, discenda fino al foro di uscita. Se all'inizio del moto, le funzioni  $\varphi$  e  $\Psi$  hanno, per la particella in questione, i valori:  $\varphi_0$  e  $\Psi_0$ , e con anche la velocità  $V$ , abbia valore  $V_0$ , quando la particella sarà giunta al foro d'efflusso, le due dette funzioni e la velocità, avranno assunto i valori:  $\varphi_1$ ,  $\Psi_1$  e  $V_1$ . Ma, per il Teorema di Bernoulli, sappiamo che è:

$$(\varphi_1 - \Psi_1) - \frac{V_1^2}{2} = (\varphi_0 - \Psi_0) - \frac{V_0^2}{2}, \quad (1)$$

e poichè la pressione ha alla superficie libera del liquido, ed al foro d'uscita, lo stesso valore (quello della pressione atmosferica), sarà anche:  $\Psi_1 = \Psi_0$ , e siccome la particella, inizialmente, aveva velocità trascurabile, possiamo porre:  $V_0 = 0$ . La (1) diviene allora:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{V_1^2}{2}, \quad \text{e poichè } \varphi_1 - \varphi_0$$

rappresenta la variazione,  $gh$ , subita dal potenziale della particella, mentre questa passa dalla superficie libera del liquido al foro d'efflusso, avremo:

$$\frac{V_1^2}{2} = gh, \quad \text{da cui, infine,}$$

si ricava la ben nota formula:

$$V_i = \sqrt{2gh}$$

che ci dice come la velocità di efflusso sia eguale alla velocità che acquisterebbe un grave cadendo dall'altezza  $h$ .

## F I N E

Litografia L. Tassini & Via Cavour 29, Firenze

## I ~ D I C E

	Pag.		
Elementi della Teoria dei vettori.	1	Velocità in funzione dello spazio.-	19
Prodotto di uno scalare per un vettore.	4	Velocità vettoriale.-	19
Somma di due vettori.	5	Determinazione delle componenti della velocità vettoriale.-	21
Somma di più vettori.-	5	Determinazione delle coordinate del punto, data la velocità vettoriale.-	22
Differenza di due vettori.-	6	Accelerazione.-	28
Prodotto scalare di due vettori.-	6	Accelerazione centripeta.-	28
Prodotto vettoriale di due vettori.-	7	Determinazione delle coordinate del punto quando ne sia nota l'acceler.-	30
Derivata di un vettore :-	10	Moti centrali.-	43
Elementi della Teoria delle curve: 11-15		Teoria delle curve nello spazio.-	46
<u>~ Cinematica del punto ~</u>			
Calcolo della traiettoria di un punto mobile .-	15	<u>~ Cinematica dei sistemi rigidi ~</u>	
Determinazione della posizione del punto, data l'equaz. della traiettoria e quella del moto.-	17	Moti rigidi piani.-	56
Determinazione del tempo data la ve		Moti traslatorii.-	57
		Moti rotatori piani.-	57

<i>Moti rigidi in genere.</i>	63	<i>Moto dell'oscillatore smorzato.</i>	114
<i>Velocità angolare nei moti rigidi in genere.</i>	65		
<i>Asse istantaneo di rotazione.</i>	67	<i>~ Gravitazione universale.~</i>	125
<i>Determinazione della velocità di un punto, espressa mediante le sue componenti secondo la Terna mobile.~</i>	69	<i>~ Moti vincolati ~</i>	
<i>Moti rigidi qualsiasi.</i>	74	<i>Moto di un punto vincolato.</i>	136
<i>Moti relativi.</i>	78	<i>Tendolo semplice.</i>	139
<i>Accelerazione nei moti relativi.</i>	81	<i>Vincoli unilaterali</i>	142
<i>Determinazione del significato di <math>A_c</math>, mediante considerazioni vettoriali.</i>	83	<i>Moto di un punto vincolato a muoversi su di una superficie..</i>	143
<i>~ Dinamica del punto.~</i>			
<i>Parallelogramma delle forze.</i>	89	<i>Condizioni d'equilibrio d'un punto libero..</i>	145
<i>Determinazione del moto di un corpo di cui si conosca la massa e le forze agenti.</i>	90	<i>Equilibrio stabile ed instabile..</i>	146
<i>Moto dei gravi.</i>	90	<i>Equilibrio di un punto vincolato..</i>	151
<i>Lavoro..</i>	94	<i>Posizioni d'equilibrio indifferente..</i>	153
<i>Forza viva..</i>	95	<i>~ Dinamica dei sistemi.~</i>	
<i>Potenziale..</i>	98	<i>Risultante delle forze di un sistema..</i>	156
<i>Determinazione delle forze di un campo essendo noto il potenziale.</i>	101	<i>Quantità di moto e impulso nei sistemi..</i>	157
<i>Determinazione se un campo ammette, o no, potenziale..</i>	103	<i>Centro di gravità..</i>	159
<i>Superficie equipotenziale..</i>	108	<i>Centro di gravità di un sistema continuo..</i>	161
<i>Princípio della conservazione dell'energia nella dinamica del punto..</i>	109	<i>Determinazione del centro di gravità di alcuni particolari sistemi..</i>	164
<i>Quantità di moto e impulso..</i>	110	<i>Proprietà dinamiche del centro di gravità..</i>	174
<i>Moto dell'oscillatore isocrono..</i>	113	<i>Momento di vettori applicati..</i>	176
		<i>Momento delle forze interne di un sistema..</i>	181
		<i>Eorema del momento delle quantità di moto..</i>	182
		<i>Relazioni tra il momento delle forze agenti su</i>	

di un sistema, e quello della sua quantità di moto.

183

~ Statica dei sistemi rigidi. ~

Coppia di forze..	192
Momento del peso..	194
Equilibrio di un corpo rigido vincolato..	196
L'equilibrio in alcune macchine semplici..	201
Momento d'inerzia..	206
Pendolo composto..	214
Teorema d'inversione del pendolo composto.	216
Ellissoide d'inerzia..	219
Giroscopio..	225
Moto di un sistema rigido libero..	230
Teorema della forza viva per i sistemi rigidi..	232

~ Statica in generale. ~

Catenaria..	239
Catenaria dei ponti sospesi..	243
Principio dei lavori virtuali..	245
Equilibrio di un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie..	250
Equilibrio di un punto appoggiato ad un piano..	251
Equilibrio di un corpo rigido avente un punto fisso..	255
Equilibrio della vite..	255
Equilibrio del torchio idraulico..	257
Equilibrio di sistemi soggetti a forze che ammettono potenziale..	259

~ Ottica ~

Equilibrio di un sistema soggetto alla rezione d'attrito..	264
Angolo d'attrito..	267

~ Coordinate generali. ~

Principio di D'Alembert..	277
Equazioni di Lagrangia..	279
Teorema delle forze vive dedotto dallequazioni di Lagrangia..	288

~ Idromeccanica ~

Idrostatica..	294
Idrodinamica..	299
Moti permanenti..	300
Teorema di Torricelli..	301

# Ringraziamenti

I curatori desiderano ringraziare:

Archivio di Stato di Firenze

Archivio Storico del Politecnico di Torino

Albis Gianfranco – Politecnico di Torino

Brogioni Luca – Archivio Storico del Comune di Firenze

Agastra Elson – Politecnico di Tirana, Albania

Agio Mario – Istituto Nazionale di Ottica, Firenze

Associazione culturale ‘Franco Rasetti’ – Pozzuolo Umbro (Perugia)

Blasi Paolo – Professore emerito di Fisica dell’Università di Firenze

Braccini Saverio – Università di Berna, Svizzera

Carrara Eugenio – Antella (Firenze)

Collezione Giannini – Roma

Desideri Laura – Gabinetto Scientifico-Letterario G.P. Vieusseux

Fanciulli Monica – Archivio Storico del Comune di Firenze

Fermi Olivia – Vancouver, British Columbia, Canada

Galtarossa Andrea – Università di Padova

Guatelli Fulvio – Firenze University Press

Massidda Susanna – Università di Firenze

Moretti Mauro – Università per Stranieri di Siena

Nuovo Archivio dei Macchiaioli, Roma

Pera Patrizia – Università di Firenze

Pierno Alessandro – Firenze University Press

Rotary Club Firenze

Unione Matematica Italiana

Richard M. Englert – President of Temple University, Chancellor of Temple University

Carol Lang – Dean of University Library Temple University

Margery N. Sly – Director SCRC University Library Temple University



## Gli autori

Di seguito è riportata la lista degli autori dei vari contributi al libro con i loro recapiti. Tutti gli autori afferiscono a strutture dell’Università di Firenze.

Fioranna Salvadori  
Archivio Storico dell’Università di Firenze  
piazza S. Marco, 4  
50121 Firenze  
*fioranna.salvadori@unifi.it*

Roberto Casalbuoni, Daniele Dominici  
Dipartimento di Fisica e di Astronomia – Università di Firenze  
via G. Sansone, 1  
50019 Sesto Fiorentino (Firenze)  
*casalbuoni@infn.fi.it, daniele.dominici@unifi.it*

Giovanni Frosali, Carlo Franchetti  
Dipartimento di Matematica e Informatica ‘U. Dini’ – Università di Firenze  
via di Santa Marta, 3  
50139 Firenze  
*[giovanni.frosali, carlo.franchetti]@unifi.it*

Franco Angotti, Paolo Maria Mariano  
Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale – Università di Firenze  
via di Santa Marta, 3  
50139 Firenze  
*[franco.angotti, paolo.mariano]@unifi.it*

Leonardo Lucci, Giuseppe Pelosi, Massimiliano Pieraccini, Stefano Selleri  
Dipartimento di Ingegneria dell’Informazione – Università di Firenze  
via di Santa Marta, 3  
50139 Firenze  
*[leonardo.lucci, giuseppe.pelosi, massimiliano.pieraccini, stefano.selleri]@unifi.it*



## TITOLI PUBBLICATI

1. Casalbuoni R., Frosali G., Pelosi G. (a cura di), *Enrico Fermi a Firenze. Le «Lezioni di Meccanica Razionale» al biennio propedeutico agli studi di Ingegneria: 1924-1926*





