ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

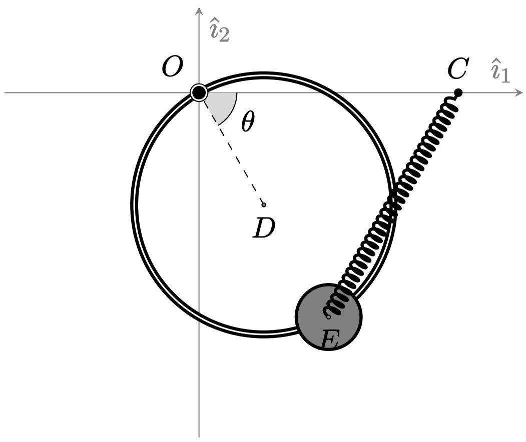
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA E BIOCHIMICA
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

26 Gennaio 2026

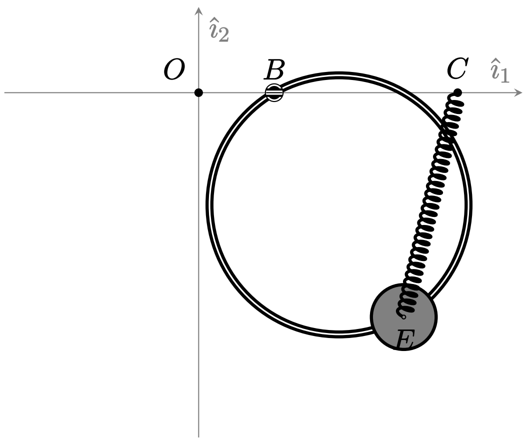
ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. Sul foglio di risoluzione va indicato corso di laurea e numero di matricola.

In un piano verticale giace un anello di raggio r e massa m, vincolato per mezzo di una cerniera ideale in un suo punto O in modo che l'anello stesso possa ruotare attorno ad O nel piano. Nel punto diametralmente opposto ad O è saldato sull'anello un disco omogeneo di densità $\hat{\rho}$ e raggio $\frac{r}{4}$, in modo che il centro E del disco giaccia sull'anello. Infine, il centro E del disco è collegato tramite una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k ad un punto C che giace a distanza $2r$ da O sulla stessa retta orizzontale, come in figura.

Domande A—D



Domanda E



Adottando l'angolo θ in figura (sinistra) come variabile lagrangiana, si risponda alle seguenti domande.

- **A** Si calcoli il centro di massa del sistema: per quale valore di $\hat{\rho}$ esso si trova a distanza $\frac{4}{3}r$ da O?
- **B** Si assuma ora che $\hat{\rho}$ sia tale che la massa del disco sia $m/2$. Si esprima il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse normale al piano e passante per O, e si scriva l'espressione dell'energia cinetica in funzione della variabile lagrangiana θ.

Si assuma ora che $\hat{\rho}$ sia tale che la massa dell'anello e quella del disco siano uguali

- **C** Si studino le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità.
- **D** Si calcoli il momento totale di tutte le forze esterne agenti sul sistema rispetto ad O.
- **E** Si supponga ora che l'anello sia vincolato all'asse delle ascisse non tramite un giunto ma tramite un *carrello ideale* (come in figura sopra, destra, ove è indicato con B). Il carrello è libero di scorrere lungo l'intero asse orizzontale contente O e C e permette all'anello di ruotare attorno a B. Quante variabili lagrangiane sono necessarie per la parametrizzazione del sistema? Si scriva l'espressione dell'energia potenziale del sistema in termini delle nuove variabili lagrangiane.

Soluzione

Abbiamo che $\overrightarrow{OE} = 2r\sin\theta\hat{\imath}_1 - 2r\cos\theta\hat{\imath}_2$, mentre $\overrightarrow{OD} = r\sin\theta\hat{\imath}_1 - r\cos\theta\hat{\imath}_2$ e $\overrightarrow{OC} = 2r\hat{\imath}_1$. Infine, $\|\overrightarrow{EC}\|^2 = 8r^2 - 8r^2\cos(\pi/2 - \theta) = 8r^2 - 8r^2\sin(\theta)$.

A Il centro di massa si trova facilmente come

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OD} + \hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2\overrightarrow{OE}}{m + \hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2} = \frac{m + 2\hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2}{m + \hat{\rho}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2}\left(r\sin\theta\hat{\imath}_1 - r\cos\theta\hat{\imath}_2\right).$$

Imponiamo che la distanza quadra dall'origine sia $\frac{16}{9}r^2$,

$$\|\overrightarrow{OG}\|^2 = r^2\left(\frac{1 + \hat{\rho}\pi\frac{r^2}{8m}}{1 + \hat{\rho}\pi\frac{r^2}{16m}}\right)^2 = \frac{16}{9}r^2 \Rightarrow \hat{\rho} = \frac{8m}{\pi r^2}.$$

B Il momento di un anello di massa m e raggio r rispetto ad un asse ortogonale ad esso e passante per il suo centro è $I_D = mr^2$, mentre quello di un disco di massa $\frac{m}{2}$ e raggio $\frac{r}{4}$ rispetto ad un asse passante per il suo centro è $I_E = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\left(\frac{r}{4}\right)^2$. Applichiamo a disco e anello il teorema di Huygens–Steiner per individuare il momento del sistema $I_{\mathfrak{z}}$ rispetto all'asse passante per l'origine e ortogonale al piano:

$$I_{\mathfrak{z}} = I_D + mr^2 + I_E + \frac{m}{2}(2r)^2 = \frac{257}{64}mr^2.$$

Essendo O un centro istantaneo di rotazione fisso, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}I_{\mathfrak{z}}\dot{\theta}^2 = \frac{257}{128}mr^2\dot{\theta}^2.$$

C Se la massa del disco e dell'anello sono uguali, allora

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OD} + m\overrightarrow{OE}}{2m} = \frac{3}{2}\left(r\sin\theta\hat{\imath}_1 - r\cos\theta\hat{\imath}_2\right).$$

Il potenziale associato al sistema è la somma del contributo gravitazionale ed elastico, ovvero

$$V(\theta) = -3mgr\cos\theta + 4kr^2(1 - \sin\theta).$$

I punti di equilibrio possono essere trovati ponendo, dopo aver osservato che $\cos\theta = 0$ non può essere soluzione,

$$V'(\theta) = 3mgr\sin\theta + 4kr^2\cos\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = -\frac{4kr}{3mg} \Rightarrow \theta_1 = -\arctan\frac{4kr}{3mg}, \qquad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Per lo studio della stabilità calcoliamo

$$V''(\theta) = 3mgr\cos\theta - 4kr^2\sin\theta.$$

Avendo θ_1 coseno positivo e seno negativo, $V''(\theta_1) > 0$ per cui la soluzione corrisponde ad un equilibrio stabile. Viceversa, avendo θ_2 seno negativo e coseno positivo, $V''(\theta_2) < 0$ per cui la soluzione corrisponde ad un equilibrio instabile.

D Abbiamo che la forza peso $\vec{F}_g = -2mg\hat{\imath}_2$ mentre la forza elastica $\vec{F}_{\text{el}} = k\overrightarrow{EC} = 2rk(1 - \sin\theta)\hat{\imath}_1 - 2kr\cos\theta\hat{\imath}_2$. La terza forza esterna agente sul sistema è la reazione vincolare applicata in O che non ha quindi momento rispetto a questo punto. Abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_O &= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_g + \overrightarrow{OE} \wedge \vec{F}_{\text{el}} = \\ &= \frac{3}{2}\left(r\sin\theta\hat{\imath}_1 - r\cos\theta\hat{\imath}_2\right) \wedge (-2mg\hat{\imath}_2) + (2r\sin\theta\hat{\imath}_1 - 2r\cos\theta\hat{\imath}_2) \wedge (2rk(1 - \sin\theta)\hat{\imath}_1 - 2kr\cos\theta\hat{\imath}_2) \\ &= -3mgr\sin\theta\hat{\imath}_3 + 4kr^2\sin\theta\cos\theta\hat{\imath}_3 + 4r^2k\cos\theta(1 - \sin\theta)\hat{\imath}_2 = \left(-3mgr\sin\theta + 4r^2k\cos\theta\right)\hat{\imath}_3.\end{aligned}$$

E Sono necessari due parametri lagrangiani, ovvero l'ascissa x del carrello, che denominiamo B, e l'angolo θ che $\overrightarrow{BE}$ forma con la verticale. Il potenziale viene modificato nel fatto che $\|\overrightarrow{EC}\|^2 = (2r - x)^2 + 4r^2 - 4r|2r - x|\cos\theta$, per cui

$$V(x, \theta) = -3mgr\cos\theta + \frac{k}{2}\left((2r - x)^2 + 4r^2 - 4r|2r - x|\cos\theta\right).$$