

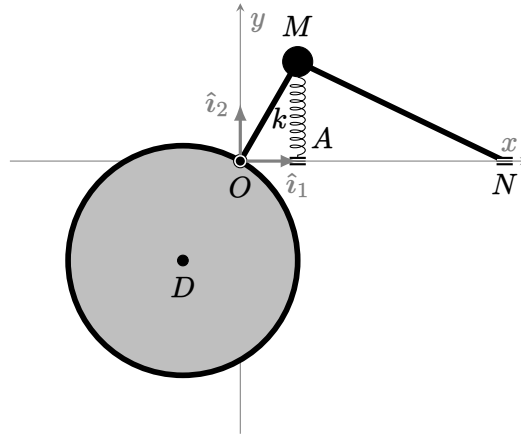
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Simulazione di prova d'esame

ISTRUZIONI. Questa simulazione comprende, a titolo esemplificativo, una collezione di domande per un punteggio massimo maggiore di quello solitamente richiesto in una prova d'esame.

Un disco omogeneo di massa m e raggio ℓ è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un suo punto O , centro di un riferimento inerziale $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ come in figura, mantendosi nel piano generato da \hat{i}_1 e \hat{i}_2 . Sul punto O è altresì incastrata un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza ℓ , alla cui estremità opposta M si trova una massa $2m$, come mostrato in figura. Detta massa è collegata all'asse del riferimento \mathcal{X} , corrispondente alla direzione \hat{i}_1 , da una molla ideale di costante elastica k : l'estremo opposto della molla A scorre sull'asse senza attrito per mezzo di un carrello. Infine, la massa M è collegata, tramite un'asta rigida \overline{MN} di lunghezza 2ℓ , all'asse delle ascisse: l'asta è vincolata a scorrere lungo l'asse per mezzo di un carrello ideale nel suo estremo N .



Dopo aver individuato un insieme adeguato di variabili lagrangiane, si risolvano i seguenti quesiti.

- A Si determini la posizione del centro di massa del sistema in funzione di opportune variabili lagrangiane. [5 pt]
- B Si calcoli la risultante $\mathbf{R}^{(a)}$ e il trinomio invariante del sistema di forze attive. [5 pt]
- C Si calcoli il momento d'inerzia $I_{\mathcal{Z}}$ del sistema rispetto all'asse \mathcal{Z} passante per O e ortogonale al piano. [5 pt]
- D Si esprima l'energia cinetica in funzione dell'evoluzione temporale delle variabili lagrangiane del sistema. [7 pt]
- E Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità. [8 pt]
- F Usando il fatto che \hat{i}_3 è un asse principale di \mathbf{I}_D , tensore d'inerzia del disco rispetto al suo centro, calcoli il momento angolare del sistema rispetto all'origine in funzione delle variabili lagrangiane scelte. [7 pt]
- G Si calcoli la traiettoria della base dell'asta \overline{MN} . [7 pt]

SOLUZIONE

Chiamiamo θ l'angolo \widehat{MON} formato dal vettore p_M che individua il punto M con l'asse \mathcal{X} , di modo che

$$p_M = \ell \cos \theta \hat{i}_1 + \ell \sin \theta \hat{i}_2.$$

- A** Essendo il disco \mathcal{D} omogeneo, il suo centro di massa G coincide con il suo centro geometrico D , che si trova in

$$x_D = -\ell \cos \theta \hat{i}_1 - \ell \sin \theta \hat{i}_2 \equiv -p_M.$$

L'unico altro contributo in massa è dovuto alla presenza del punto M . Il centro di massa del sistema è quindi in

$$x_G = \frac{mp_{\mathcal{D}} + 2mp_M}{3m} = \frac{1}{3}p_M.$$

- B** Sul sistema agiscono la forza peso e la forza elastica. La prima può considerarsi applicata nel centro di massa G e vale $F_g = -3mg\hat{i}_2$. La seconda è applicata in M e vale $F_e = -k\ell \sin \theta \hat{i}_3$. La risultante è quindi

$$R^{(a)} = -(3mg + k\ell \sin \theta)\hat{i}_3.$$

Essendo il sistema piano, il trinomio invariante è nullo, dato che il momento τ_O delle forze è perpendicolare al piano.

- C** Il momento d'inerzia del disco rispetto alla retta \mathcal{R} parallela a \mathcal{Z} ma passante per il suo centro è $I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\ell^2$. Il centro D è anche il centro di massa del disco, per cui il contributo del disco al momento $I_{\mathcal{Z}}$ si può ottenere grazie al teorema di Huygens–Steiner, ovvero

$$I_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{D}} = I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + m\ell^2 = \frac{1}{2}m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{3}{2}m\ell^2.$$

Il momento d'inerzia totale si ottiene aggiungendo il contributo della massa puntiforme:

$$I_{\mathcal{Z}} = \frac{3}{2}m\ell^2 + 2m\ell^2 = \frac{7}{2}m\ell^2.$$

- D** Il contributo all'energia cinetica del punto M si può scrivere semplicemente come

$$T_M = \frac{1}{2}(2m)\|\dot{p}_M\|^2 = m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Il contributo del disco si può scrivere usando il Secondo teorema di König, ovvero, indicando con $I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\ell^2$ il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa,

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\dot{x}_D\|^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2$$

dove abbiamo usato il fatto che deve essere $\omega = \omega\hat{i}_3$ (il moto è piano e il disco può solo ruotare con velocità angolare perpendicolare al piano stesso). Basta osservare che $\omega = \dot{\theta}$: infatti un riferimento solidale con il disco si può ottenere ruotando di θ il riferimento fisso. Per cui

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\dot{x}_D\|^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

per cui l'energia cinetica totale è

$$T = T_{\mathcal{D}} + T_M = \frac{7}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

- E** È utile prima di tutto scrivere il potenziale del sistema, dovuto alla forza gravitazionale e alla presenza della molla

$$U = -3mg\langle x_G, \hat{i}_2 \rangle - \frac{1}{2}k\langle p_M, \hat{i}_2 \rangle^2 + \text{costante} = -mg\ell \sin \theta - \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2 \theta + \text{costante}.$$

Indicando con $\eta = \frac{mg}{k\ell}$, le configurazioni di equilibrio si possono trovare da

$$\partial_{\theta}U = -mg\ell \cos \theta - k\ell^2 \sin \theta \cos \theta = -k\ell^2 \cos \theta (\eta + \sin \theta) = 0.$$

Restringendoci per semplicità all'intervallo $[-\pi, \pi]$ (tutti i risultati varranno a meno di multipli interi di 2π), tale equazione ha come soluzioni $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, e le due soluzioni corrispondenti a $\sin \theta = -\eta$, ovvero

$$\theta = -\arcsin \eta, \quad \theta = -\pi + \arcsin \eta \quad \text{solo se } \eta \leq 1.$$

Per studiare la stabilità, calcoliamo la derivata seconda:

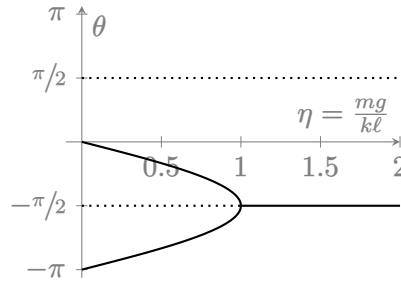
$$\partial_\theta^2 U = -k\ell^2 (-\eta \sin \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta)).$$

Abbiamo che

$\theta = \frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial_\theta^2 U = k\ell^2(1 + \eta) > 0$, ovvero questa configurazione di equilibrio è sempre instabile.

$\theta = -\frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial_\theta^2 U = k\ell^2(1 - \eta)$, ovvero questa configurazione di equilibrio è stabile solo se $\eta > 1$.

$\sin \theta = \eta$: In questo caso $\partial_\theta^2 U = -k\ell^2(1 - \eta^2) > 0$, ovvero queste configurazioni di equilibrio sono sempre stabili, quando esistono.



F Il momento angolare L_O si può calcolare come somma del contributo della massa in M e del disco. Essendo $v_M = \dot{p}_M = \ell\dot{\theta}(-\sin \theta \hat{i}_1 + \cos \theta \hat{i}_2)$, la sua velocità angolare rispetto all'origine è $L_O^M = p_M \wedge (2mv_M) = 2m\ell^2\dot{\theta}\hat{i}_3$. Il contributo del disco invece può essere scritto utilizzando il Primo teorema di König come

$$L_O^D = L^D + x_D \wedge Q_D = I_D^D \omega + x_D \wedge Q_D.$$

Qui $Q_D = m\dot{x}_D$, in modo che $x_D \wedge (m\dot{x}_D) = m\ell^2\dot{\theta}\hat{i}_3$. Essendo $\omega = \dot{\theta}\hat{i}_3$, $I_D \omega = \dot{\theta}I_{\mathcal{R}}\hat{i}_3 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}\hat{i}_3$. Concludendo

$$L_O = L_O^D + L_O^M = \left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta} + 3m\ell^2\dot{\theta}\right)\hat{i}_3 = \frac{7}{2}m\ell^2\dot{\theta}\hat{i}_3$$

G Il centro istantaneo di rotazione si troverà, per il teorema di Chasles, nell'intersezione tra le perpendicolari delle velocità del punto M e del punto N , ovvero all'intersezione della retta passante per M e orientata come p_M con la retta passante per N e orientata come \hat{i}_2 . In altre parole, il centro istantaneo di rotazione c è tale che $c = tp_M = p_N + t'\hat{i}_2$, dove p_N è il vettore che identifica la posizione di N . Essendo l'asta \overline{MN} di lunghezza 2ℓ , l'angolo $\phi = \widehat{MNO}$ è tale che

$$\ell \sin \theta = 2\ell \sin \phi \Rightarrow \phi = \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{2} \right),$$

che permette di scrivere $p_N = (\ell \cos \theta + 2\ell \cos \phi)\hat{i}_1$ da intendersi come funzione di θ . Possiamo scrivere ora due equazioni per t e t' ,

$$t\ell \cos \theta = \ell \cos \theta + 2\ell \cos \phi, \quad t\ell \sin \theta = t'.$$

Dalla prima ricaviamo

$$t = 1 + \frac{2 \cos \phi}{\cos \theta}$$

che permette di scrivere già l'equazione

$$c = tp_M = \left(1 + \frac{2 \cos \phi}{\cos \theta}\right) (\ell \cos \theta \hat{i}_1 + \ell \sin \theta \hat{i}_2).$$