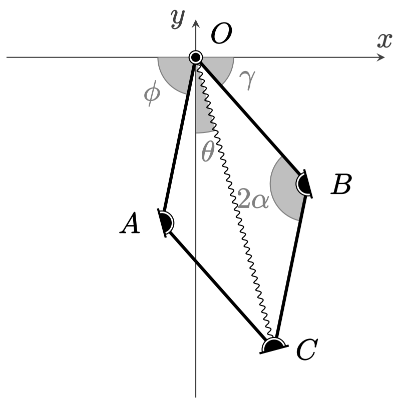
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

7 Febbraio 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Il voto minimo per l'accesso all'orale è `15/30`.

In figura è rappresentato un sistema mobile su un piano dove è dato un riferimento cartesiano Oxy. Il sistema è costituito da quattro aste di massa trascurabile e di uguale lunghezza ℓ, imperniate con quattro giunti mobili in modo da formare un rombo di vertici A, B, C e O. I giunti in A, B e C sono tali da permettere alle aste incidenti di avere un angolo reciproco compreso tra l'angolo nullo e l'angolo piatto. Il restante vertice O è fissato nell'origine del riferimento cartesiano, dove un perno permette una rotazione libera senza attrito. Sono inoltre presenti una massa m in A, una massa m in B e una massa m in C. Tutte le masse sono da assumersi puntiformi. Infine, lungo la diagonale $\overline{OC}$ è collocata una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.



A Utilizzando come parametri lagrangiani gli angoli θ e α indicati in figura, scrivere le coordinate dei tre punti A, B e C. Si individuino possibili configurazioni di confine, le forze *attive* agenti sul sistema e il tipo di vincoli a cui esso è soggetto. `[7 pt]`

B Individuare la posizione del centro di massa in funzione dei parametri lagrangiani scelti. Calcolare inoltre il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare al piano e passante per l'origine. `[8 pt]`

C Calcolare le configurazioni di equilibrio *non di confine* del sistema, e dire se esse sono di equilibrio stabile, instabile o indifferente. `[15 pt]`

Suggerimento. Per risolvere l'esercizio, si osservi che, con riferimento alla figura, gli angoli ϕ e γ si possono scrivere in termini di α e θ come

$$\phi = \alpha + \theta \qquad \gamma = \alpha - \theta.$$

Soluzione

A Il sistema ha due gradi di libertà, descritti dai parametri lagrangiani $\theta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, \pi/2]$: le configurazioni aventi $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$ sono di confine. Indicando con $\boldsymbol{g}$ vettore di accelerazione di gravità diretto verso il basso, le forze attive agenti sono la forza peso sulla massa in A, $\boldsymbol{P}_A = -mg\hat{\imath}_2$, la forza peso sulla massa in B, $\boldsymbol{P}_B = -mg\hat{\imath}_2$, e la forza peso sulla massa in C, $\boldsymbol{P}_C = -mg\hat{\imath}_2$. Infine, in C agisce la forza elastica $\boldsymbol{F}_C = k\overrightarrow{CO}$ dove CO ha lunghezza $2\ell\sin\alpha$. L'unico vincolo attivo è il perno in O che è olonomo e ideale e permette la rotazione del sistema. Le coordinate dei punti A, B e C sono

$$\boldsymbol{x}_A = -\ell\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\ \sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_B = \ell\begin{pmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\theta)\\ -\sin(\alpha-\theta)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_C = 2\ell\sin\alpha\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

B La posizione del centro di massa è

$$\boldsymbol{x}_G = \frac{m\boldsymbol{x}_A + m\boldsymbol{x}_B + m\boldsymbol{x}_C}{3m} = \frac{\ell}{3}\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\theta)-\cos(\alpha+\theta)+2\sin\alpha\sin\theta\\ -\sin(\alpha-\theta)-\sin(\alpha+\theta)-2\sin\alpha\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{4\ell\sin\alpha}{3}\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usate le formule di addizione $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ e $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$.

Il momento d'inderzia si trova ora facilmente essendo pari a

$$I = m\|\boldsymbol{x}_A\|^2 + m\|\boldsymbol{x}_B\|^2 + m\|\boldsymbol{x}_C\|^2 = 2m\ell^2(1+2\sin^2\alpha).$$

C Osservando che $d^2(C,O) = 4\ell^2\sin^2\alpha$, possiamo scrivere l'energia potenziale come combinazione di un contributo gravitazionale V_g e un contributo elastico V_k. Avendo a disposizione le coordinate del centro di massa, possiamo scrivere

$$V_g = -4m\ell g\cos\theta\sin\alpha, \qquad V_k = 2k\ell^2\sin^2\alpha$$

così che l'energia potenziale globale possa scriversi

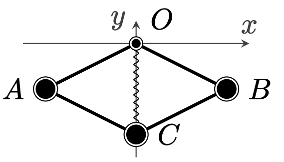
$$V = V_g + V_k = -4m\ell g\cos\theta\sin\alpha + 2k\ell^2\sin^2\alpha.$$

I punti stazionari si ottengono risolvendo la coppia di equazioni

$$\partial_\theta V = 0 \Leftrightarrow -\sin\alpha\sin\theta = 0, \qquad \partial_\alpha V = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha(-mg\cos\theta + k\ell\sin\alpha) = 0.$$

Dato che stiamo escludendo le configurazioni di confine, possiamo assumere $\cos\alpha \neq 0$ e $\sin\alpha \neq 0$. Deve essere quindi $\sin\theta = 0$, abbiamo $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Se n è pari, la seconda equazione fornisce $mg - k\ell\sin\alpha = 0$, ovvero, se $\frac{mg}{k\ell} < 1$, $\alpha = \arcsin\frac{mg}{k\ell}$: diversamente non esiste una soluzione *che non sia di confine*. Se n è dispari, si ottiene $-mg - k\ell\sin\alpha = 0$ che non ha soluzione per $\alpha \in (0, \pi/2)$. L'unico possibile punto stazionario è quindi

$$(\alpha,\theta) = \left(\arcsin\frac{mg}{k\ell}, 0\right), \qquad \text{se } \frac{mg}{k\ell} < 1. \tag{1}$$



La stabilità può essere studiata valutando la matrice Hessiana in questo punto di equilibrio. La matrice è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= 4\ell\begin{pmatrix}k\ell(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + mg\sin\alpha\cos\theta & mg\sin\theta\cos\alpha\\ mg\sin\theta\cos\alpha & mg\cos\theta\sin\alpha\end{pmatrix}\\ &= 4\ell\begin{pmatrix}k\ell(1-2\sin^2\alpha) + mg\sin\alpha\cos\theta & mg\sin\theta\cos\alpha\\ mg\sin\theta\cos\alpha & mg\cos\theta\sin\alpha\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Calcolando sul punto dato dall'Eq. (1), si ha che $\sin\theta = 0$ e $\sin\alpha = \frac{mg}{k\ell}$, per cui

$$\boldsymbol{H} = 4k\ell^2\begin{pmatrix}1 - \frac{m^2g^2}{k^2\ell^2} & 0\\ 0 & \frac{m^2g^2}{k^2\ell^2}\end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \frac{mg}{k\ell} < 1.$$

Nell'intervallo di validità della soluzione, $4k\ell^2\left(\frac{m^2g^2}{k^2\ell^2}-1\right)<0$, per cui tale punto di equilibrio, quando esiste, è stabile.

Lo studio delle configurazioni di confine non era richiesto ma lo riportiamo per completezza come esempio. Le configurazioni di confine sono associate a $\alpha=0$ e $\alpha={}^{\pi}/_{2}$. L'analisi può essere svolta utilizzando il principio dei lavori virtuali, ovvero calcolando δV e imponendo che tale variazione virtuale sia sempre negativa. Non avendo θ vincoli di variazione, la prima condizione da imporre è $\partial_\theta V=0$, ovvero $\sin\alpha\sin\theta=0$.

Per $\alpha=0$, $\partial_\theta v|_{\alpha=0}=0$ sempre; dovendo essere $\delta\alpha>0$, $\partial_\alpha V|_{\alpha=0}\geq 0$, ovvero $\partial_\alpha V|_{\alpha=0}=-4\ell mg\cos\theta\geq 0$, che è vera se e solo se $\frac{\pi}{2}+2n\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$: in questo intervallo di angoli θ, $\alpha=0$ è una configurazione di confine stabile.

Per $\alpha={}^{\pi}/_{2}$, la situazione è più delicata. Infatti, $\partial_\theta V|_{\alpha={}^{\pi}/_{2}}=4\ell mg\sin\theta=0$ è soddisfatto per $\theta=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. In $\alpha={}^{\pi}/_{2}$, abbiamo che $\partial_\alpha V|_{\alpha={}^{\pi}/_{2}}=0$ identicamente. Questo ci permette di dire che i punti $(\alpha,\theta)=({}^{\pi}/_{2},n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$, sono di equilibrio. Per capire se essi sono stabili o instabili, però, occorre considerare derivate di ordine superiore. La matrice hessiana è

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}4mg\ell\cos\theta-4\ell^2 & 0\\ 0 & 4mg\ell\cos\theta\end{pmatrix}$$

che per $\theta=n\pi$ con n pari ha entrambi autovalori non positivi per $\frac{mg}{kl}\geq 1$, mentre per n dispari ha entrambi autovalori positivi ed è quindi instabile. Di conseguenza $(\alpha,\theta)=({}^{\pi}/_{2},n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$ pari, è stabile se $\frac{g}{kl}\geq 1$, diversamente è instabile. È possibile eseguire un plot del valore di α associato ad una configurazione stabile al variare del parametro di controllo $\frac{mg}{k\ell}$ per $\theta=0$.

α stabile per $\theta=0$