

## ESAME DI FISICA MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica  
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 180 minuti e il punteggio massimo della prova è pari a **33 punti**. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. L'uso di calcolatrici grafiche, tablet, smartphones o apparecchiature in grado di comunicare con l'esterno non è consentito. È possibile utilizzare una calcolatrice scientifica standard.

### ESERCIZIO A

#### *Moto in campo centrale*

Si consideri un punto materiale di massa unitaria, in moto in un campo centrale prodotto dal potenziale

$$V(\mathbf{x}) = 2\|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|^2} - \alpha \ln \|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \alpha \geq 0.$$

- A1 [4 pt]** Supponendo che nell'istante  $t = 0$  si abbia  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  e  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ , con  $\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ , si mostri che il moto del punto materiale avviene in un piano.
- A2 [6 pt]** Si assuma  $\alpha = 1$ . Si studi qualitativamente, al variare dell'energia meccanica, il moto radiale del punto materiale supponendo il modulo  $L$  del suo momento angolare rispetto all'origine del riferimento valga  $L = 1$ . Si specifichi il periodo delle orbite circolari.
- A3 [5 pt]** Si assuma ora  $\alpha = 0$ . Si calcoli il tempo necessario ad un punto materiale con  $L = 1$  ed energia meccanica  $E > 1/2$  per collidere con il centro del potenziale partendo dal suo apocentro.

### ESERCIZIO B

#### *Formalismo lagrangiano*

Si consideri un sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q}), \quad V(\mathbf{q}) := \frac{\|\mathbf{q}\|^2(\|\mathbf{q}\|^2 - 1)}{2} + \frac{\alpha q_1^2}{2},$$

data in termini delle coordinate generalizzate  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T \in \mathbb{R}^2$  e dipendente dal parametro  $\alpha \geq 1$ .

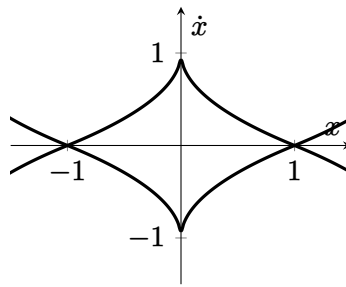
- B1 [3 pt]** Si scrivano le equazioni di Lagrange associate.
- B2 [6 pt]** Si assuma  $\alpha = 0$ . Si verifichi che il sistema lagrangiano ammette come simmetria il gruppo ad un parametro

$$(\mathbf{q}, t) \mapsto \mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{R}(s)\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{R}(s) = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \in \text{SO}(2),$$

e si scriva l'integrale primo associato.

- B3 [6 pt]** Si assuma  $\alpha > 1$ . Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

**QUESITO [3 pt]** — Durante lo scorso appello, uno studente di matematica, durante una prova orale, ha disegnato la seguente separatrice in un diagramma delle fasi per un moto unidimensionale parametrizzato dalla variabile  $x$  e indotto esclusivamente dall'azione di un potenziale  $V(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ :



Si spieghi perché questo diagramma non può essere corretto.

## SCHEMA DI RISOLUZIONE

**Esercizio A.**

**A1** Si vedano gli appunti delle lezioni sui moti in campo centrale.

**A2** Sia  $L$  il modulo del momento angolare. Detto  $r := \|\mathbf{x}\|$ , il moto radiale avviene in un potenziale effettivo

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^2} + 2r^2 - \frac{1}{2r^2} - \ln r.$$

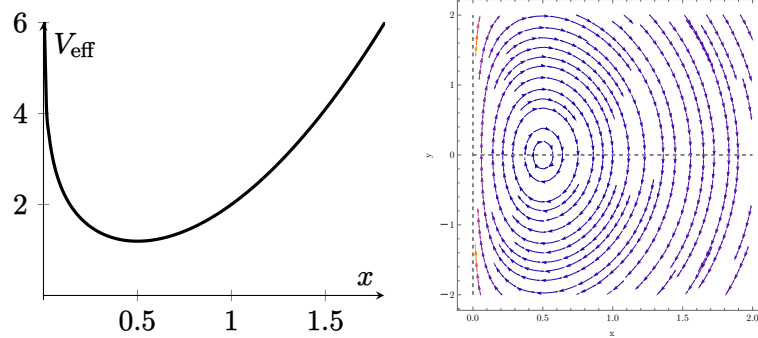
Per  $L = 1$  questo potenziale è quindi

$$V_{\text{eff}}(r) = 2r^2 - \ln r.$$

Si tratta di un potenziale  $C^\infty((0, +\infty))$  i cui punti stazionari sono individuati da

$$V'_{\text{eff}}(r) = 4r - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \equiv r_0.$$

Questo è un punto di minimo essendo  $V'_{\text{eff}}(r) < 0$  per  $r \in (0, 1/2)$  e viceversa  $V'_{\text{eff}}(r) > 0$  per  $r > 1/2$ . In tale punto  $V_{\text{eff}}(1/2) = 1/2 + \ln 2 \equiv V_0$ . Abbiamo così che il moto è proibito per  $E < V_0$ , corrisponde ad un'orbita circolare di raggio  $r_0$  per  $E = V_0$ , mentre è limitato radialmente tra un pericentro ed un apocentro per ogni  $E > V_0$ . Non ci sono separatrici nel diagramma di fase per il moto radiale, rappresentato nella figura seguente.



L'unica orbita circolare ha periodo

$$\tau = \frac{2\pi r_0^2}{L} = \frac{\pi}{2}.$$

**A3** Per  $\alpha = 0$  ed  $L = 1$ , il potenziale efficace radiale è  $V_{\text{eff}}(r) = 2r^2$ . Data l'energia meccanica  $E > V_0 = 1/2$ , l'apocentro è a distanza  $r_+$  dal centro tale che  $E = V_{\text{eff}}(r_+) \Rightarrow r_+ = \sqrt{\frac{E}{2}}$ , per cui il tempo necessario per raggiungere l'origine è

$$t = - \int_{r_+}^0 \frac{1}{\sqrt{2(E - 2r^2)}} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

dove abbiamo eseguito la sostituzione  $x = \frac{r}{r_+}$  e il segno negativo a fronte nella prima espressione tiene conto del fatto che in questo moto la velocità radiale è negativa (la distanza radiale decresce).

**Esercizio B.**

**B1** Esplicitiamo le equazioni di Eulero–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \ddot{q}_1 - q_1(2\|\mathbf{q}\|^2 - 1 + \alpha) = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \ddot{q}_2 - q_2(2\|\mathbf{q}\|^2 - 1) = 0.$$

**B2** La simmetria proposta lascia invariante la Lagrangiana, e in particolare l'azione. Basta infatti osservare che la Lagrangiana dipende solo da  $\|\mathbf{q}\|^2$  e  $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ , quantità

*Segue*

entrambe invarianti sotto l'azione gruppale,  $\mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}_s, t_s) \equiv (\mathbf{R}(s)\mathbf{q}, t)$ , essendo  $\|\mathbf{q}_s\|^2 = \langle \mathbf{R}(s)\mathbf{q}, \mathbf{R}(s)\mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{R}(s)^\top \mathbf{R}(s)\mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{q}\|^2$  e similmente per  $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$ . Abbiamo che

$$\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) := \left. \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \right|_{s=0} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}, \quad \tau(t, \mathbf{q}) := \left. \frac{dt_s}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

Per via del teorema di Noether, l'invariante è

$$I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1.$$

**B3** Le condizioni di stazionarietà del potenziale  $V$  per  $\alpha = 1$  si scrivono

$$q_1(2\|\mathbf{q}\|^2 - 1 + \alpha) = 0, \quad q_2(2\|\mathbf{q}\|^2 - 1) = 0.$$

Dalla seconda equazione, otteniamo che  $q_2 = 0$  oppure  $\|\mathbf{q}\|^2 = 1/2$ . Il primo caso comporta, nella prima equazione,  $q_1(2q_1^2 + \alpha - 1) = 0$ , ovvero  $q_1 = 0$ , per cui questo caso corrisponde alla soluzione

$$\mathbf{q}_0 = (0, 0).$$

Il secondo caso comporta, nella prima equazione,  $q_1 = 0$ , per cui  $q_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , ovvero abbiamo la coppia di soluzioni

$$\mathbf{q}_{\pm} = (0, \pm 1/\sqrt{2}).$$

La stabilità di questi punti stazionari può essere studiata studiando la matrice hessiana

$$\text{Hess}[V](\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 6q_1^2 + 2q_2^2 + \alpha - 1 & 4q_1 q_2 \\ 4q_1 q_2 & 6q_2^2 + 2q_1^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

In  $\mathbf{q}_0$  abbiamo

$$\text{Hess}[V](\mathbf{q}_0) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha un autovalore negativo ed è perciò instabile. In  $\mathbf{q}_{\pm}$  abbiamo

$$\text{Hess}[V](\mathbf{q}_{\pm}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva e perciò corrisponde a due punti di equilibrio stabile.