

2. Moto unidimensionale

Consideriamo una *guida liscia* nello spazio tridimensionale, individuata da una curva regolare non degenera $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo sempre assumere che la parametrizzazione della curva sia tale che $\|\gamma'(s)\| = 1$ per ogni $s \in I$ e che I contenga $s = 0$, di modo che $\gamma(0)$ sia un punto del sostegno della curva⁷. Una curva così parametrizzata è dotata di una orientazione naturale in ogni suo punto $\gamma(s)$, fornita dal versore tangente $\mathbf{t}(s) := \gamma'(s) \neq \mathbf{0}$. È analogamente possibile introdurre $\hat{\mathbf{n}}(s) := \frac{1}{\kappa(s)}\gamma''(s)$, con $\kappa(s) := \|\gamma''(s)\|$ curvatura, e $\hat{\mathbf{b}}(s) := \hat{\mathbf{t}}(s) \wedge \hat{\mathbf{n}}(s)$. Si tratta cioè di una parametrizzazione completamente analoga a quella intrinseca già vista per le curve definite su intervalli $[a, b] \subset \mathbb{R}$, in cui però ammettiamo che il parametro s possa avere anche segno negativo, potendo essere l'“origine” del riferimento $\gamma(0)$ diverso da un estremo della curva. Anche in questo contesto si dice che s è l'*ascissa curvilinea* (con segno) della curva, in analogia con quanto visto con la parametrizzazione intrinseca già introdotta.

Sia dato un punto materiale (P, m) vincolato a muoversi su $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$, curva che assumiamo parametrizzata intrinsecamente e che rappresenta una *guida liscia* che vincola il suo moto. La traiettoria di P , sia essa $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sarà quindi specificata da una *legge oraria*, ovvero una funzione, che assumeremo di classe almeno \mathcal{C}^2 , che fornisce l'ascissa curvilinea del punto materiale lungo γ a dato istante, ovvero $s: \mathbb{R} \rightarrow I$, di modo che $\mathbf{x} = \gamma \circ s$. Si noti che *non* richiediamo che $\dot{s} \neq 0$ per ogni istante t in questo contesto (ovvero ammettiamo che il punto possa avere velocità nulla). Alla luce di questa parametrizzazione, è utile scomporre la forza agente sul punto materiale in ciascuna posizione di ascissa curvilinea s separando il contributo vincolare da quello attivo, ovvero $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{(a)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, \mathbf{x})$, ed esprimere l'equazione nella base fornita dalla terna di Frenet della curva per sfruttare la natura intrinsecamente unidimensionale del moto. Sappiamo infatti che

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{s}\hat{\mathbf{t}}(s) + \dot{s}^2\kappa(s)\hat{\mathbf{n}}(s)$$

per cui nel punto di ascissa curvilinea s devono valere tre equazioni⁸

$$(1.3) \quad m\ddot{s} = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle,$$

$$(1.4) \quad m\kappa(s)\dot{s}^2 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, s), \hat{\mathbf{n}}(s) \rangle,$$

$$(1.5) \quad 0 = \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}) + \mathbf{F}^{(v)}(t, s), \hat{\mathbf{b}}(s) \rangle.$$

Abbiamo qui usato il fatto che la guida è *liscia*, per cui $\mathbf{F}^{(v)}$ è ortogonale per ipotesi a $\hat{\mathbf{t}}$. L'obiettivo dell'indagine è tipicamente ottenere la legge oraria $s(t)$ disponendo di opportune condizioni iniziali: per esempio, avendo scelto $t = 0$ come tempo iniziale, sia $s(0) = s_0$ (posizione iniziale lungo la curva, corrispondente a $\mathbf{x}(0) = \gamma(s(0))$) e $\dot{s}(0) = v_0$ (ovvero, velocità iniziale $\dot{\mathbf{x}}(0) = v_0\hat{\mathbf{t}}(s_0)$). Assumiamo anche di *conoscere* la curva γ e le sue proprietà geometriche, e la forma funzionale di $\mathbf{F}^{(a)}$. Chiamando

$$f(t, s, \dot{s}) := \langle \mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s}), \hat{\mathbf{t}}(s) \rangle$$

la prima equazione assume la forma più semplice

$$m\ddot{s} = f(t, s, \dot{s}).$$

⁷Data una generica curva $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ regolare non degenera, possiamo infatti scegliere un punto $u_0 \in J$ come punto di “origine” e introdurre la parametrizzazione $s(u) = \int_{u_0}^u \|\psi'(v)\| dv$ di modo che $\gamma = \psi \circ s^{-1}$ sia parametrizzata come richiesto con $s(u_0) = 0$ e $s'(u) > 0 \forall u \in J$.

⁸Nelle equazioni seguenti faremo un lieve abuso di notazione. La forza attiva è in generale una funzione del tipo $\mathbf{F}^{(a)}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ che quindi si può esprimere come $\mathbf{F}^{(a)}(t, \gamma(s), \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s))$ esplicitando la dipendenza dalla legge oraria s . Scrivendo $\mathbf{F}^{(a)}(t, s, \dot{s})$ al posto di $\mathbf{F}^{(a)}(t, \gamma(s), \dot{s}\hat{\mathbf{t}}(s))$ intendiamo mettere in evidenza la dipendenza da s e dalle sue derivate, essendo γ e $\hat{\mathbf{t}}$ supposte note. Ragionamento analogo si applica alla notazione adottata per $\mathbf{F}^{(v)}$.

Questa equazione può essere integrata più o meno facilmente a seconda della forma funzionale di f . Una classe particolarmente importante è quella dei sistemi *autonomi*, in cui f non dipende esplicitamente dal tempo. Tali sistemi sono particolarmente importanti dato che, nei problemi fisici, f solitamente non manifesta una dipendenza esplicita dal tempo per via dell'invarianza galileiana.

Se $f \equiv f(\dot{s})$, per esempio, si può scrivere l'equazione del primo ordine $\dot{v} = f(v)$ per la variabile $v = \dot{s}$. Questa equazione ammette un'unica soluzione se f è lipschitziana. Assumendo che in un intorno di v_0 si abbia $f(v) \neq 0$, in tale soluzione la soluzione soddisfa una equazione nella forma implicita

$$m\dot{s} = f(\dot{s}) \Rightarrow G(v) := m \int_{v_0}^v \frac{1}{f(u)} du = t.$$

Questo riduce il problema dell'integrazione delle equazioni del moto ad una equazione differenziale del primo ordine nella forma $G(\dot{s}) - t = 0$, la cui successiva integrazione permette, in linea di principio, di ottenere s tramite un'ulteriore quadratura.

Il caso $f \equiv f(s)$ invece merita una analisi più approfondita. Nel seguito, senza perdere in generalità, assumiamo, come sopra, come istante iniziale $t = 0$ e indichiamo con $s_0 := s(0)$ e $v_0 := \dot{s}(0)$ le condizioni iniziali del moto del nostro punto materiale su una guida liscia.

2.1. Forza posizionale $f \equiv f(s)$. Se la forza attiva è posizionale, ovvero $\mathbf{F}^{(a)} \equiv \mathbf{F}^{(a)}(\mathbf{x})$, allora $f \equiv f(s)$, di modo che il moto equivale a quello di un punto materiale soggetto ad una forza conservativa in una dimensione. Detta s la generica ascissa curvilinea toccata dal punto materiale durante il moto, è infatti possibile introdurre il potenziale

$$V(s) := - \int_{s_0}^s f(x) dx,$$

nell'ipotesi che f sia integrabile sull'intervallo considerato. L'utilità dell'aver introdotto V sta nel fatto che la quantità

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s)$$

risulta conservata durante il moto, come si vede derivando rispetto al tempo, e dunque essa rimane uguale al valore $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(s_0)$ dell'istante iniziale $t = 0$. Inoltre, il fatto che il contributo cinetico debba essere sempre positivo fa sì che il moto possa avvenire solo in regioni in cui

$$E - V(s) \geq 0.$$

Assumiamo ora che $v_0 \neq 0$. Se $E - V(s) > 0$ in un intorno di s_0 . Per s in tale intorno, l'espressione dell'energia meccanica implica

$$1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(s)}} \frac{ds}{dt} \Rightarrow t(s) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{E - V(x)}} dx \equiv \int_{s_0}^s \frac{\text{sign}(v_0)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx,$$

che è la soluzione implicita del problema. La funzione

$$\Phi(s) := 2 \frac{E - V(s)}{m}$$

contiene in particolare tutte le informazioni sulle traiettorie ammesse. Il moto può infatti verificarsi solo nelle regioni in cui $\Phi(s) > 0$, mentre gli (eventuali) zeri della funzione separano la curva γ in porzioni mutualmente inaccessibili.

Per meglio fissare le idee, supponiamo di avere, nella notazione precedente, $v_0 > 0$: se $\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in [s_0, s]$, allora

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

è una funzione con derivata strettamente positiva e quindi invertibile: essa quantifica il tempo (finito) necessario al punto materiale per raggiungere s a partire da s_0 .

Se esiste $\hat{s} > s_0$ tale che $\Phi(\hat{s}) = 0$ e $\Phi(x) > 0$ per $x \in [s_0, \hat{s})$, il tempo necessario per raggiungere tale punto a partire da s_0

$$t(\hat{s}) = \int_{s_0}^{\hat{s}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

può essere finito o infinito. Assumendo in particolare che Φ sia analitica in \hat{s} , questo dipenderà dal fatto che \hat{s} sia uno zero semplice o multiplo di $\Phi(s)$, rispettivamente.

Se \hat{s} è uno zero multiplo di $\Phi(s)$, l'integrale diverge: questo fatto è coerente con il teorema di Cauchy sull'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali. Osservando infatti che le equazioni del moto si scrivono come $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$, nel caso in cui \hat{s} sia uno zero multiplo, la quantità $\sqrt{\Phi(s)}$ è lipschitziana in un intorno di \hat{s} , fatto che garantisce l'unicità della soluzione. D'altra parte, $s(t) = \hat{s}$ risolve l'equazione e pertanto è l'unica soluzione ammessa passante per \hat{s} : ogni traiettoria ottenuta con diversa condizione iniziale può solo avvicinarsi al punto \hat{s} senza mai toccarlo (diversamente, vi sarebbero *due* possibili soluzioni passanti per \hat{s}). Si noti inoltre che, coerentemente con questo fatto, la forza applicata al punto materiale in uno zero multiplo \hat{s} è nulla, $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) = 0$, per cui in effetti un punto materiale in \hat{s} non accelera.

Discorso diverso vale per gli zeri semplici. Se \hat{s} è uno zero semplice, la formula precedente predice che esso verrà toccato in un tempo finito $t(\hat{s})$. Questo peraltro mostra che esistono almeno due soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)}$ passanti per \hat{s} (ovvero, la soluzione dell'equazione con condizione iniziale $s(0) = s_0$ e quella con condizione iniziale $s(0) = \hat{s}$). La ragione, nuovamente, è che in questo caso $\sqrt{\Phi(s)}$ non è lipschitziana in un intorno di \hat{s} : pur fissando la condizione iniziale $s(0) = \hat{s}$ (automaticamente associata a $\dot{s}(0) = 0$) l'unicità non è garantita e sono ammesse più soluzioni. D'altra parte, se il punto materiale si trova in uno zero semplice di Φ con velocità nulla, l'evoluzione fisica del suo moto (ovvero *quale* delle possibili soluzioni si realizzerà) sarà determinata dal segno della forza $\Phi'(\hat{s}) = \frac{2}{m}f(\hat{s}) \neq 0$ che non permette alla velocità di rimanere nulla.

Anche se accessibili di per sé, gli zeri semplici di $\Phi(s)$ costituiscono comunque la frontiera di regioni di accessibilità sulla curva, come si vede dai seguenti risultati.

DEFINIZIONE 2.1. Gli zeri semplici di $\Phi(s)$ sono detti punti di inversione.

TEOREMA 2.1. Il moto tra due punti di inversione consecutivi \hat{s}_- ed $\hat{s}_+ > \hat{s}_-$ è periodico di periodo

$$\tau = \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{2}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano \hat{s}_- ed \hat{s}_+ due zeri semplici consecutivi di $\Phi(s)$. Per ipotesi, nell'intervallo $[\hat{s}_-, \hat{s}_+]$ possiamo scrivere $\Phi(s) = (s - \hat{s}_-)(\hat{s}_+ - s)\phi(s)$ con $\phi(s) > 0$ per $s \in [\hat{s}_-, \hat{s}_+]$. La velocità del punto materiale si annulla in \hat{s}_\pm mentre la forza ha in questi punti segno opposto:

$$f(\hat{s}_+) = \Phi'(\hat{s}_+) = -(\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_+) < 0, \quad f(\hat{s}_-) = \Phi'(\hat{s}_-) = (\hat{s}_+ - \hat{s}_-)\phi(\hat{s}_-) > 0,$$

il che fa sì che il moto si inverta in questi punti estremali. Partendo da $s_0 \in (\hat{s}_-, \hat{s}_+)$ con $v_0 > 0$ al tempo $t = 0$, il moto prosegue quindi fino a \hat{s}_+ dove la velocità si annulla e, per effetto di una forza negativa, il punto materiale subisce una accelerazione verso \hat{s}_- che lo fa ripassare da s_0 con velocità opposta in segno, fino ad arrivare in \hat{s}_- , dove nuovamente il moto si inverte e il punto torna infine in s_0 con stessa velocità v_0 dopo un tempo τ : da qui in poi il moto si riproduce *identico* essendosi verificate nuovamente, al tempo τ , le stesse condizioni cinematiche osservate al tempo $t = 0$. Il periodo quindi è

$$\tau = \int_{s_0}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx - \int_{\hat{s}_+}^{\hat{s}_-} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx + \int_{\hat{s}_-}^{s_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = 2 \int_{\hat{s}_-}^{\hat{s}_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx. \quad \square$$

Esercizio 1.1 — Un punto materiale di massa m si muove lungo una guida liscia fissa γ ed è soggetto ad un potenziale lungo la guida nella forma $V(s) = s^{2n}$. Supponendo che il punto inizi a muoversi per $t = 0$ da $s(0) = 0$ con energia meccanica $E > 0$, si dimostri che il periodo non dipende da E se e solo se $n = 1$: si calcoli l'espressione del periodo in questo caso speciale. [$\tau = \sqrt{2m\pi}$]

2.2. Piano delle fasi. Nella forma $m\ddot{s} = f(t, s, \dot{s})$, l'equazione del moto equivale ad una coppia di equazioni del primo ordine in uno spazio bidimensionale; ovvero, rinominando x la variabile s ed indicando con $y = \dot{s}$, possiamo scrivere

$$\dot{y} = \frac{1}{m} f(t, x, y), \quad \dot{x} = y.$$

DEFINIZIONE 2.2. Il piano \mathbb{R}^2 in cui varia la coppia $\mathbf{z} := (x, y)$ prende il nome di *piano delle fasi*. Su di esso, è definito il campo vettoriale $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $(t, \mathbf{z}) \mapsto (y, \frac{1}{m}f(t, x, y))$, le cui curve integrali, ovvero le curve $\mathbf{z}(t)$ soluzioni dell'equazione $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z})$, sono dette *curve di fase del sistema*. L'operatore \mathbf{g}^t che associa ad un certo punto del piano delle fasi $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ il punto $\mathbf{z}(t)$ ottenuto per mezzo dell'evoluzione indotta da \mathbf{f} è detto *flusso di fase* del sistema ed agisce come

$$\mathbf{g}^t: \mathbf{z}_0 \mapsto \mathbf{z}(t) = \mathbf{g}^t \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0.$$

Un *punto* nel piano delle fasi $\mathbf{z} = (x, y)$ corrisponde quindi ad uno stato cinematico del punto materiale, ovvero alla sua posizione e alla sua velocità.

DEFINIZIONE 2.3. Un punto $(x_0, 0)$ si dice *di equilibrio* se il flusso di fase associato si riduce al punto stesso, ovvero $\mathbf{g}^t(x_0, 0) = (x_0, 0) \forall t > 0$.

Se $f \equiv f(s)$ le equazioni del moto implicano, come abbiamo visto, la conservazione dell'energia $E(s, \dot{s}) := \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s)$, dove come sopra $-V'(s) = f(s)$, pertanto le curve di fase sono *isoenergetiche*, ovvero $E(x, y)$ non cambia lungo una curva di fase: fissato $e \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello

$$\mathcal{M}(e) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) := \frac{1}{2}my^2 + V(x) = e \right\}$$

contiene le curve di fase di energia e . L'insieme $\mathcal{M}(e)$ è in generale costituito da diverse componenti connesse, la cui regolarità è garantita se $\nabla E(x, y) = (V'(x), my) \neq \mathbf{0}$ in ogni loro punto.

Esercizio 1.2 — Dimostrare che la condizione $E(x, y) := \frac{1}{2}my^2 + V(x) = e$ individua una curva regolare in un intorno di $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{M}(e)$ se $\nabla E(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$.

Soluzione. — Assumiamo per esempio che $\partial_x E(x_0, y_0) = V'(x_0) \neq 0$. Il teorema della funzione implicita garantisce che esiste un intorno I di x_0 in cui si può trovare una funzione f di modo che $E(x, f(x)) = e$ in tale intorno. Similmente se $\partial_y E(x_0, y_0) = y_0 \neq 0$ esiste una funzione g in un intorno J di y_0 tale

che $E(g(y), y) = e$ in tale intorno. Ciò significa che, a seconda delle circostanze, possiamo localmente parametrizzare $\mathcal{M}(e)$ come una curva $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $t \in I$ o $\gamma(t) = (g(t), t)$, con $t \in J$. In entrambi i casi il vettore tangente non è mai nullo, avendo sempre una componente uguale ad 1.

La condizione di punto di equilibrio nel caso di forze posizionali *equivale* a richiedere che $V'(x_0) = 0$, ovvero che x_0 sia un punto stazionario del potenziale: in virtù del teorema di Cauchy, infatti, la condizione iniziale $(x_0, 0)$ non può che evolvere in se stessa se $V'(x_0) = 0$. I punti di equilibrio quindi sono proprio i punti *critici*, ovvero i punti in cui $\nabla E(x, y) = \mathbf{0}$ e la regolarità di $\mathcal{M}(e)$ viene meno.

2.2.1. *Stabilità.* Per classificare i punti critici, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4. Un punto del piano delle fasi $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$ si dice *di equilibrio stabile secondo Lyapunov* se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ per cui, denotato $\mathbf{z} = (x, y)$ si ha che

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{g}^t \mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

Il punto si dice *asintoticamente stabile* se esiste $\delta > 0$ tale per cui

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0.$$

L'insieme $\mathcal{B}(\mathbf{z}_0) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}^t \mathbf{z} = \mathbf{z}_0\}$ è detto *bacino di attrazione* di \mathbf{z}_0 . Un punto non stabile si dice infine *instabile*.

In altre parole, un punto è stabile secondo Lyapunov se, avviando il moto in prossimità di tale punto nel piano delle fasi, non ce ne si allontana mai.

Se la forza in gioco è *posizionale* allora vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.2. Si assuma V funzione di classe almeno \mathcal{C}^2 in un intorno di x_0 , punto di minimo relativo isolato di V ; allora x_0 è un punto di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un qualunque intorno I di $\mathbf{z}_0 := (x_0, 0)$, e osservando che $E(x_0, 0) = V(x_0)$ valore del potenziale nel punto di minimo relativo isolato, sia

$$J_\delta(\mathbf{z}_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) < V(x_0) + \delta\}.$$

Ovviamente $\mathbf{z}_0 \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$. L'insieme $J_\delta(\mathbf{z}_0)$ ha come caratteristica il fatto che, per via della conservazione dell'energia meccanica, se $\mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0)$ allora $\mathbf{g}^t \mathbf{z} \in J_\delta(\mathbf{z}_0) \forall t > 0$. In questo insieme potremo isolare la componente connessa contenente \mathbf{z}_0 , sia essa $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$. Esso è limitata: nella direzione y , dovrà essere $y^2 < \frac{2}{m}(V(x_0) - V(x) + \delta) \leq \frac{2}{m}\delta$; analogamente $V(x) < V(x_0) + \delta$ implica che per un $\mathbf{z} = (x, y) \in \hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$ e δ sufficientemente piccolo, si ha $\frac{1}{2}V''(\xi)(x - x_0)^2 < \delta$ per un qualche $\xi \in (x_0, x)$ e con $V''(\xi) > 0$, ovvero $(x - x_0)^2 < \frac{2\delta}{V''(\xi)}$. È possibile quindi trovare δ tale che $\hat{J}_\delta(\mathbf{z}_0)$ è in I : essendo \hat{J}_δ invariante sotto \mathbf{g}^t per via della conservazione dell'energia — ovvero tutte le traiettorie che iniziano in essa non ne usciranno mai — la definizione di punto stabile secondo Lyapunov è soddisfatta. \square

Esempio 1.3 — Si noti che se un punto è di equilibrio stabile secondo Lyapunov non è necessariamente un punto di minimo relativo dell'energia potenziale: questo si vede facilmente ammettendo che $V(x)$ sia non analitica in un qualche suo punto. Supponiamo, per esempio, di avere un punto materiale di massa unitaria in moto nel potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

L'energia potenziale considerata non ammette una espansione in serie in un intorno di $x_0 = 0$, e tale punto non è di minimo relativo per $V(x)$, dato che per ogni $\delta > 0$ esiste un $x \neq 0$ con $|x| < \delta$ e tale che $V(x) < 0$. Tuttavia, x_0 è di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Supponiamo infatti che il sistema

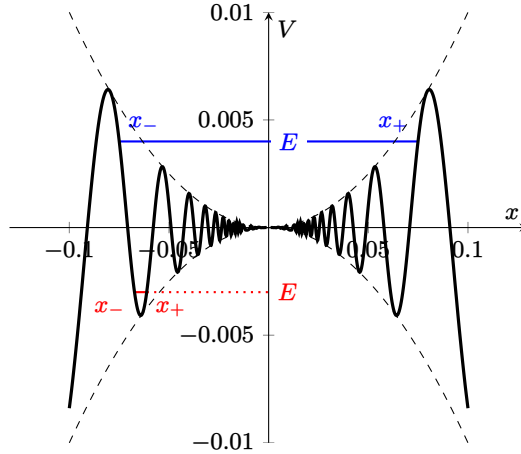


FIGURA 1. Potenziale nell'Esempio 1.3 e due intervalli ammessi per il moto per diversi valori di E .

abbia energia positiva, $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E > 0$. Possiamo individuare due punti di inversione $x_{\pm}(E)$, di modo che il moto avvenga sempre nell'intervallo $[x_-(E), x_+(E)]$ (vedasi Fig. 1) con $|x_{\pm}(E)| \rightarrow 0$ per $E \rightarrow 0^+$. Inoltre, in tale intervallo, $V(x) > -E$ e quindi $E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) > \frac{1}{2}y^2 - E \Rightarrow |y| < \sqrt{2E}$. La misura dell'intorno nel piano delle fasi in cui avviene il moto, $[x_-(E), x_+(E)] \times [-\sqrt{2E}, \sqrt{2E}]$, può quindi essere resa piccola a piacere. Un ragionamento analogo può essere fatto per $E < 0$, dove un intervallo arbitrariamente vicino all'origine può essere scelto di modo che il suo corrispondente intervallo nel piano delle fasi sia arbitrariamente piccolo per $E \rightarrow 0^-$. Di conseguenza, $x = 0$ è una posizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov.

DEFINIZIONE 2.5. Nel caso di moto unidimensionale soggetto a forza posizionale, un insieme $\mathcal{M}(e)$ contenente un punto critico instabile si dice *curva separatrice*.

Una separatrice è per costruzione data dall'unione dei punti di equilibrio instabili e da curve connesse che esprimono traiettorie di moto che tendono asintoticamente ai detti punti di equilibrio instabile, senza mai raggiungerli. Un punto critico $(x_0, 0)$ è infatti in corrispondenza con uno zero multiplo di $\Phi(x)$, essendo $\Phi(x_0) = 0$ per via della condizione $y = 0$, e dovendo essere $V'(x_0) = -\frac{m}{2}\Phi'(x_0) = 0$.

Esempio 1.4 — Consideriamo il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ nella forma $\ddot{s} = -s$, corrispondente all'equazione fondamentale delle oscillazioni. Si tratta di una legge associata all'energia meccanica

$$E(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2,$$

che si conserva essendo la forza posizionale e associabile al potenziale $V(s) = \frac{1}{2}s^2$. Gli insiemi di livello del problema sono semplici circonferenze nel piano delle fasi, dove è definito il vettore $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$ nella notazione già introdotta, vedasi Fig. 2. Esiste un unico punto di equilibrio stabile, corrispondente a $(x, y) = (0, 0)$, senza alcuna separatrice.

Esempio 1.5 — A titolo esemplificativo, consideriamo un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto al potenziale $V(s) = s^2(s^2 - 1)$ in moto su una curva con $s \in \mathbb{R}$. In Fig. 3 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale E .

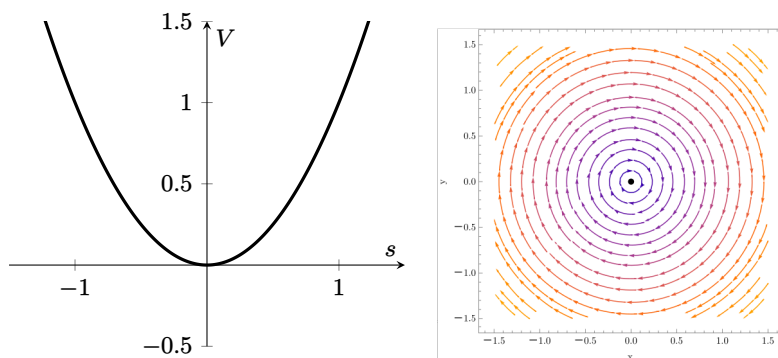


FIGURA 2. Potenziale e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase relativo all'esempio 1.4.

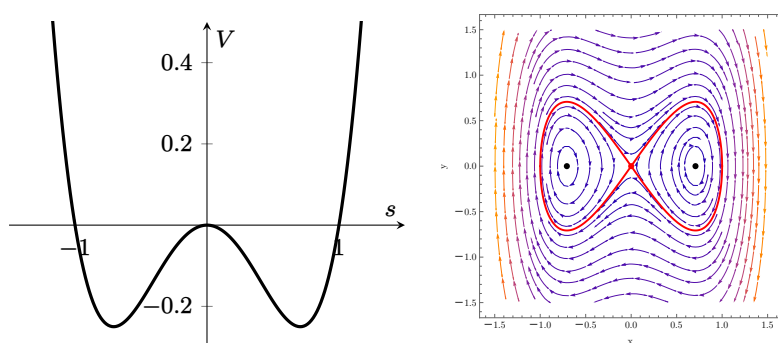


FIGURA 3. Potenziale nell'Esempio 1.5 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa $m = 1$.

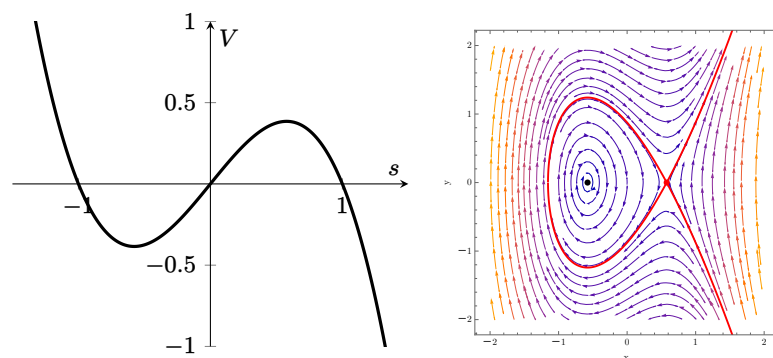


FIGURA 4. Potenziale nell'Esempio 1.6 e piano delle fasi associato con rappresentazione del flusso di fase. Sono indicati i punti critici e le separatrici (in rosso) per un punto materiale di massa $m = 1$.

Esempio 1.6 — Consideriamo un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto al potenziale $V(s) = s(1 - s^2)$. In Fig. 4 è possibile osservare il piano delle fasi e alcune curve di fase per diversi valori dell'energia meccanica totale E .

Esercizio 1.3 — Sia $A(E)$ l'area di una curva di fase chiusa in un sistema conservativo corrispondente ad un valore E dell'energia meccanica. Si dimostri che il periodo τ del moto corrispondente è $\tau = A'(E)$.

2.3. Pendolo. Il *pendolo semplice* è un dispositivo meccanico che consiste di un punto materiale di massa m vincolato, tramite vincolo olonomo liscio e fisso, a muoversi su una circonferenza di raggio ℓ in un piano verticale. Il moto è soggetto alla forza di gravità di modo che, indicando con $\theta \in (-\pi, \pi]$ *a meno di periodicità* la deviazione dalla verticale del dispositivo, il potenziale a cui è soggetto il punto materiale è $V(\theta) = -mg\ell \cos \theta$, con g accelerazione di gravità, e l'energia meccanica, conservata, abbia l'espressione

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

a meno di una costante additiva arbitraria. L'equazione del moto è così

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Si noti che, invece di utilizzare $s = \ell\theta$, ascissa curvilinea lungo la circonferenza, stiamo qui utilizzando direttamente come variabile fondamentale l'angolo θ : in questa parametrizzazione il moto corrisponde a quello di un punto materiale di massa unitaria che si muove sotto l'azione di un potenziale $\hat{V}(\theta) = \frac{1}{m\ell^2}V(\theta) = -\frac{g}{\ell} \cos \theta$. Si tratta di un sistema autonomo che sviluppa il suo moto su una curva, e può quindi essere analizzato con le tecniche discusse sopra. Indicando con

$$e := \frac{E}{mg\ell}, \quad \tau^2 := \frac{\ell}{g}$$

possiamo anzitutto scrivere, dall'equazione per l'energia,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + e) \equiv \Phi(\theta),$$

che richiede $e \geq -1$ per aver senso. Al variare di e possono distinguersi diversi tipi di moto. È utile visualizzare queste traiettorie nel piano delle fasi $(x, y) = (\theta, \dot{\theta})$ da intendersi con condizioni periodiche in θ , che quindi in questo caso è $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, ovvero un *cilindro* infinito.

Se $e > 1$, allora $\Phi(\theta)$ non ammette zeri e il moto consiste di *rotazioni* lungo l'intera circonferenza ammessa: in questo regime, le traiettorie nel piano delle fasi si avvolgono infatti attorno al cilindro.

Se invece $|e| < 1$, $\Phi(e)$ ammette degli zeri: in questo caso il moto è periodico e il moto consiste di *oscillazioni*. Le traiettorie non si avvolgono attorno al cilindro e (a differenza del caso $e > 1$) possono essere deformate con continuità in un punto, corrispondente all'unica soluzione di equilibrio *stabile* $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$, corrispondente ad un punto di minimo relativo isolato del potenziale.

Il caso $e = 1$ è marginale: l'equazione

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{\tau^2}(\cos \theta + 1)$$

identifica la *separatrice* nel piano delle fasi che delimitano i due diversi regimi: essa passa infatti per l'unica soluzione di equilibrio *instabile*, $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$. Il caso $e = -1$ invece ammette come uniche possibili soluzioni le soluzioni di equilibrio stabile e instabile.

Esercizio 1.4 — Si integri l'equazione del moto lungo la separatrice, ovvero per $e = 1$.

Soluzione. — Dal fatto che $2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$, l'equazione del moto si può riscrivere

$$\dot{\theta}^2 = 4 \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\tau^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\dot{\theta}}{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 = \frac{4}{\tau^2},$$

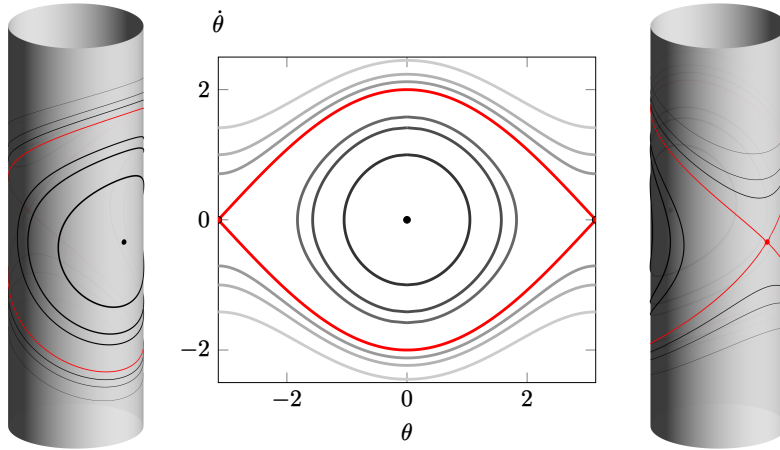


FIGURA 5. Piano delle fasi del pendolo con $\tau = 1$. Sono visualizzate le traiettorie per diversi valori di e , inclusa la separatrice ($e = 1$, linea rossa) e i due punti critici stabile (nero) e instabile (rosso).

dove abbiamo introdotto $u = \sin \frac{\theta}{2}$ assumendo $u \neq 1$. L'equazione si integra direttamente su $u \in (-1, 1)$: assumendo come istante di tempo iniziale $t = 0$ e che in tale istante $u(0) = 0$ (ovvero $\theta = 0$) e $\dot{u}(0) > 0$, avremo

$$\frac{t}{\tau} = \int_0^u \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{atanh} u \Rightarrow u(t) = \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Si noti che non abbiamo imposto il modulo della *velocità* iniziale: questo è dovuto al fatto che abbiamo risolto le equazioni ad energia fissa, per cui la velocità iniziale è automaticamente fissata *in modulo*, una volta dato $u(0)$, dalla condizione $e = 1$. Si noti inoltre che il valore $u = 1$, corrispondente alla configurazione di equilibrio instabile, viene raggiunto solo asintoticamente per $t \rightarrow +\infty$.

2.4. Piccole oscillazioni. Il caso del pendolo semplice mostra che anche i sistemi più elementari possono presentare complesse equazioni differenziali da risolvere. Lo studio di un sistema unidimensionale autonomo in prossimità di un punto $\mathbf{z}_0 = (x_0, 0)$ di equilibrio nel piano delle fasi può essere però effettuato in una certa generalità in approssimazione di *piccole oscillazioni*. Assumiamo che il potenziale a cui il sistema è soggetto sia analitico in un suo punto di equilibrio isolato x_0 e che $V''(x_0) \neq 0$. Introduciamo la variabile $\xi := x - x_0$, di modo che il sistema di equazioni da studiare possa scriversi come

$$\dot{\xi} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{m} V'(x_0 + \xi).$$

Essendo x_0 di equilibrio, espandendo in serie di potenze la seconda equazione si ha

$$\dot{y} = -\frac{1}{m} V''(x_0) \xi + o(\xi).$$

Trascurando gli ordini superiori al primo e introducendo

$$\omega^2 := \frac{1}{m} |V''(x_0)|, \quad \sigma := \operatorname{sign}(V''(x_0)) \in \{-1, 1\}$$

l'equazione assume la formula molto semplice

$$\ddot{\xi} + \sigma \omega^2 \xi = 0,$$

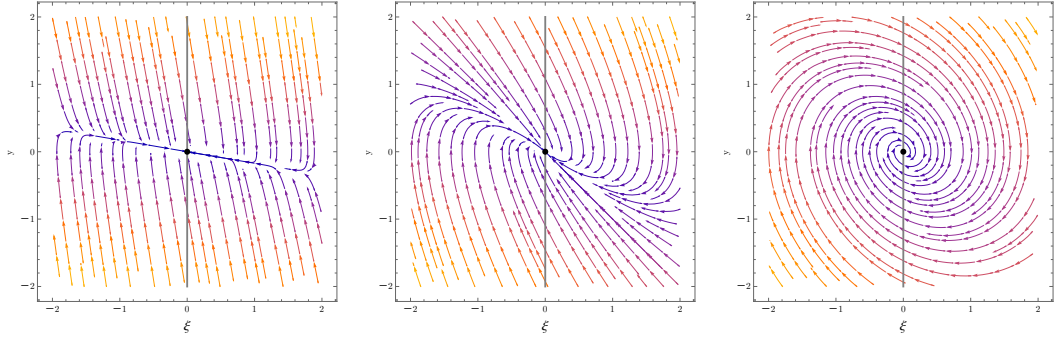


FIGURA 6. Diagramma di fase dell'oscillatore smorzato nei casi $\beta > \omega$ (sinistra), $\beta = \omega$ (centro), $\beta < \omega$ (destra) in assenza di forzante.

che descrive un cosiddetto *oscillatore armonico* se il punto è di equilibrio *stabile*, ovvero $\sigma > 0$. Essa ha soluzioni

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi(0) \cos(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sin(\omega t) & \text{se } V''(x_0) > 0 \\ \xi(0) \cosh(\omega t) + \frac{y(0)}{\omega} \sinh(\omega t) & \text{se } V''(x_0) < 0. \end{cases}$$

In altre parole, le traiettorie corrispondenti nel piano delle fasi sono ellissi o iperboli a seconda che il punto sia di equilibrio stabile o instabile rispettivamente. Nel caso di oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile, ovvero tale per cui $V''(x_0) > 0$, la soluzione è *periodica* di periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

In un pendolo, ad esempio, essendo il punto di equilibrio stabile $\theta = 0$ e $\hat{V}''(0) = \frac{g}{\ell}$, si ritrova la cosiddetta *legge dell'isocronia del pendolo*

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

indipendente dalla massa del punto materiale.

È importante osservare che l'analisi delle piccole oscillazioni è stata fatta nell'ipotesi di *piccole deviazioni* dalla posizione di equilibrio, ed è quindi una soluzione approssimata potenzialmente molto lontana dalla soluzione corretta quando ξ assume valori troppo grandi.

Esempio 1.7 (Moto armonico smorzato e forzato) — In molte applicazioni occorre considerare, nello studio di un moto armonico attorno ad un punto di equilibrio stabile, la presenza di una forza aggiuntiva che agisce sul punto materiale P di traiettoria \mathbf{x} tentando di frenarne il moto: tale forza esprime la *resistenza del mezzo* ed è tipicamente nella forma $\mathbf{F}_v = -\eta \dot{\mathbf{x}}$, con $\eta > 0$, di modo che la forza frenante è tanto più intensa quanto più grande è la velocità del corpo. In aggiunta alla forza di richiamo e alla forza dissipativa, è possibile anche includere la presenza di una certa *forzante* esterna $\mathbf{F}(t)$ nella direzione del moto. Assumeremo in particolare che, detto $\hat{\mathbf{t}}$ il versore tangente alla traiettoria di P , $\mathbf{F}(t) = F \cos(\omega_* t + \phi_0) \hat{\mathbf{t}}$, per una certa terna di valori reali $F, \omega_*, \phi_0 \in \mathbb{R}$.

Dati i nuovi contributi, l'equazione per ξ assume la forma

$$(1.6) \quad \ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{F}{m} \cos(\omega_* t + \phi_0),$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\dot{\mathbf{x}} = \dot{s} \hat{\mathbf{t}} = \dot{\xi} \hat{\mathbf{t}}$, e si è ridefinito $\beta := \frac{\eta}{2m}$. Data la natura periodica della forzante, possiamo convertire il problema in una equazione differenziale per la funzione complessa z , che

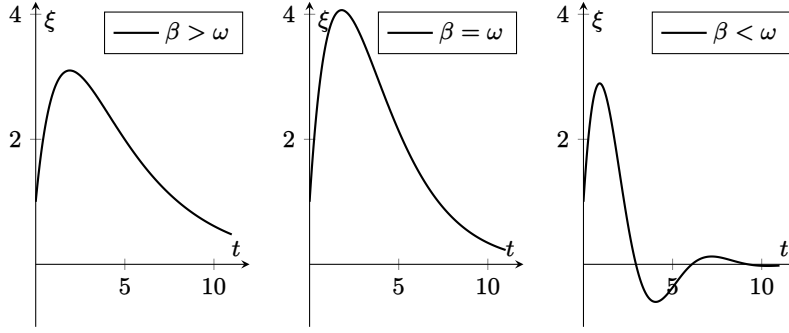


FIGURA 7. Evoluzione di ξ in un generico moto armonico smorzato (senza forzante) con stesse condizioni iniziali ma diversi parametri β e ω .

soddisfa l'equazione

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega^2 z = \frac{F}{m} e^{i(\omega_* t + \phi)}$$

di cui prenderemo la parte reale come soluzione. La procedura da applicare è standard: si cerca anzitutto una soluzione generica dell'equazione omogenea, nella forma $z_0(t) = e^{\lambda t}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale, otteniamo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \hat{\omega}, \quad \text{dove} \quad \hat{\omega} := \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Si ha così che la soluzione dell'equazione omogenea ha la forma

$$z_0(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \hat{\omega} = 0. \end{cases}$$

Nella formula precedente compaiono le due costanti α_{\pm} , che andranno fissate imponendo le condizioni iniziali. Dobbiamo ora cercare una soluzione particolare z_p al problema. Un *ansatz* possibile è $z_p(t) = b e^{i\omega_* t}$ per un qualche $b \in \mathbb{C}$. Inserendo questo *ansatz* nell'equazione si trova che in effetti essa è soddisfatta scegliendo

$$b = \frac{F}{m} \frac{e^{i\phi_0}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2}.$$

La nostra soluzione generale è quindi

$$z(t) = \frac{F}{m} \frac{e^{i(\omega_* t + \phi_0)}}{\omega^2 + 2i\beta\omega_* - \omega_*^2} + \begin{cases} e^{-\beta t} (\alpha_+ e^{\hat{\omega} t} + \alpha_- e^{-\hat{\omega} t}) & \text{se } \hat{\omega} \neq 0 \\ e^{-\beta t} (\alpha_+ + \alpha_- t) & \text{se } \hat{\omega} = 0, \end{cases}$$

Per semplificare i nostri calcoli e la nostra analisi, consideriamo anzitutto il caso $F = 0$, ovvero rimuoviamo la forzante e assumiamo ci sia solo dissipazione. Analizziamo i diversi casi separatamente, con generiche condizioni iniziali $\xi(0) =: \xi_0$ e $\dot{\xi}(0) =: v_0$ *non entrambi nulli* (diversamente, il punto rimane in quiete nel suo punto di equilibrio stabile), avendo assunto come istante iniziale $t = 0$.

$\beta > \omega$: Supponiamo inizialmente $\hat{\omega} > 0$ reale. In questo caso, essendo $\hat{\omega} < \beta$, il moto è tale che $\xi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ monotonicamente, ovvero la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile. Imponendo le condizioni iniziali, si trova che

$$\alpha_+ + \alpha_- = \xi_0, \quad \alpha_+ (\hat{\omega} - \beta) - \alpha_- (\hat{\omega} + \beta) = v_0 \Rightarrow \xi(t) = e^{-\beta t} \left(\xi_0 \cosh \hat{\omega} t + \frac{v_0 + \beta \xi_0}{\hat{\omega}} \sinh \hat{\omega} t \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio $\xi = 0$ per tempi $t > 0$ che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega} \xi_0 \cosh \hat{\omega} t + (v_0 + \beta \xi_0) \sinh \hat{\omega} t = 0$$

Se $v_0 \neq -\beta \xi_0$, questa equazione ammette un'unica soluzione

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}} \operatorname{arctanh} \frac{\hat{\omega} \xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \quad \text{se e solo se} \quad -1 < \frac{\xi_0}{v_0 + \beta \xi_0} \leq 0.$$

In tutti gli altri casi, non esiste soluzione all'equazione e il sistema non passa mai dal punto di equilibrio.

$\boxed{\beta = \omega}$: Se $\beta = \omega$, il moto è detto *criticamente smorzato* e la soluzione generale del problema, una volta imposte le condizioni iniziali, ha la forma

$$\xi(t) = e^{-\beta t}(\xi_0 + (v_0 + \beta\xi_0)t).$$

Se $\xi_0 > 0$ (rispettivamente, $\xi_0 < 0$) il sistema passa per il punto di equilibrio una sola volta se $v_0 < -\beta\xi_0$ (rispettivamente, $v_0 > -\beta\xi_0$), diversamente ciò non avviene mai.

$\boxed{\beta < \omega}$: Se $\hat{\omega} = i\hat{\omega}_0 \equiv i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ è immaginario puro non nullo, $\xi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, ma eseguendo un certo numero di oscillazioni. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\xi(t) = e^{-\beta t} \left(\xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + \frac{v_0 + \beta\xi_0}{\hat{\omega}_0} \sin(\hat{\omega}_0 t) \right).$$

Il sistema passerà dalla posizione di equilibrio $\xi = 0$ per tempi t che soddisfano l'equazione

$$\hat{\omega}_0 \xi_0 \cos(\hat{\omega}_0 t) + (v_0 + \beta\xi_0) \sin(\hat{\omega}_0 t) = 0.$$

Se $v_0 = -\beta\xi_0 \neq 0$, il sistema passerà dal punto di equilibrio per

$$t = \frac{\pi}{2\hat{\omega}_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}_0}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diversamente, il sistema passa dalla posizione di equilibrio negli infiniti istanti di tempo tali che

$$t = -\frac{1}{\hat{\omega}} \arctan \frac{\hat{\omega}_0 \xi_0}{v_0 + \beta\xi_0} + \frac{n\pi}{\hat{\omega}_0} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}_0 & \text{se } \frac{\xi_0}{v_0 + \beta\xi_0} \leq 0, \\ n \in \mathbb{N} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il caso dell'oscillatore armonico puro si recupera per $\beta = 0$: in tal caso $\hat{\omega}_0 = \omega$.

Nel caso in cui sia presente una forzante, il contributo della soluzione omogenea al variare del campo in cui vive $\hat{\omega}$ rimane *smorzato* fin tanto che $\beta \neq 0$ e diventa trascurabile rispetto al contributo forzante per $t \gg 0$, che invece non decade e rimane oscillante. Per $t \gg 0$ si trova perciò che la soluzione ha la forma

$$\xi(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_*^2)^2 + 4\beta^2 \omega_*^2}} \cos\left(\omega_* t + \phi_0 + \arctan \frac{2\beta\omega_*}{\omega_*^2 - \omega^2}\right) + \text{termini esponenzialmente soppressi}.$$

Il termine forzante, dominante per $t \gg 0$, è indipendente dalle precise condizioni iniziali ma mantiene una dipendenza dalla frequenza propria ω del sistema. L'ampiezza del termine forzante è massima quando

$$\omega_* = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \quad \text{purché} \quad \omega^2 > 2\beta^2.$$

Questo valore è detto *frequenza di risonanza*.

Esempio 1.8 (Battimenti) — Il fenomeno dei *battimenti* si verifica quando il moto emerge da una sovrapposizione di due moti oscillatori con frequenze molto vicine, nella forma

$$\xi(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

Se $a = a_1 = a_2$, possiamo applicare l'identità $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

$$\xi(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

e osservare che, se $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega$, il primo termine produce una oscillazione di frequenza simile a quella delle due componenti originarie, mentre il secondo fattore manifesta una frequenza molto più bassa, e apparirà come un termine che “modula” il primo contributo su scale temporali più lunghe. Questa circostanza può avvenire quando, per esempio, non si ha contributo smorzante nell'esempio precedente: il contributo della soluzione omogenea è quindi oscillante come quello della soluzione particolare, ma con diverse frequenze che possono però essere molto vicine tra loro.