

# CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Lógica RPN e HP - Revisão de Álgebra	1
1.2 CONCEITOS BÁSICOS	4
1.2.1 MATEMÁTICA FINANCEIRA	4
1.2.2 DIAGRAMA DE FLUXO DE CAIXA	4
1.2.3 JUROS	4
1.2.4 TAXA DE JUROS	5
1.2.5 MONTANTE, CAPITAL E JUROS	5
1.2.6 SISTEMAS DE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS	7
2 O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES	9
2.1 MONTANTE E CAPITAL	9
2.2 TAXAS EQUIVALENTES EM CAPITALIZAÇÃO SIMPLES	12
3 O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA	14
3.1 MONTANTE E CAPITAL	14
3.2 TAXAS EQUIVALENTES EM CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA	17
4 SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS	20
4.1 MONTANTE, CAPITAL E PARCELAS	20
4.2 EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA EM SÉRIES UNIFORMES	22
5 DESCONTOS E PRECIFICAÇÃO	24
MATEMÁTICA FINANCEIRA E ENG. ECONÔMICA Prof. Alceu Salles Camargo Júnio	or



5.1 DESCONTO RACIONAL OU "POR DENTRO"	24
5.2 DESCONTO COMERCIAL OU "POR FORA"	24
5.3 CUSTO EFETIVO NA OPERAÇÃO DE DESCONTO COMERCIAL	25
6 FLUXOS DE CAIXA IRREGULARES	27
7 MÉTODOS DE ANÁLISE FINANCEIRA	28
7.1 MÉTODO DO VALOR PRESENTE LÍQUIDO	28
7.2 MÉTODO DA TAXA INTERNA DE RETORNO	31
BIBLIOGRAFIA	. 37



## 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Lógica RPN e HP - Revisão de Álgebra

- 1) Calcule o valor das seguintes expressões:
- a) 12 + 3 =
- b) 58,33 22,95 13,70 10,14 1,053 =
- c) (3x4)+(5x6)=

d) 
$$\frac{(27-14)}{(14+38)}$$
=

e) 
$$\frac{5}{3+16+21}$$
 =

f) 
$$\frac{(3x4)+(5x6)}{7}$$
 =

- 2) Encontre:
  - a) 14% de \$300
  - b) 300 + 14% de \$300



c) 
$$[\$13.250 - 8\$] + 6\$$$

3) Determine o valor de :

a) 
$$\frac{1}{3}$$
=

b) 
$$2^3 =$$

c) 
$$16^{\frac{1}{2}} =$$

d) 
$$(8)^{\frac{1}{3}} =$$



e) 
$$(1+0.05)^{12}$$
 =

f) 
$$(1+0.05)^{\frac{45}{30}} =$$

g) 
$$\frac{0.85x30}{2.6 + 0.45x \, 8^{(30/28)}} =$$

h) 
$$100 * \left[ \frac{0.05(1+0.05)^{12}}{(1+0.05)^{12}-1} \right] =$$



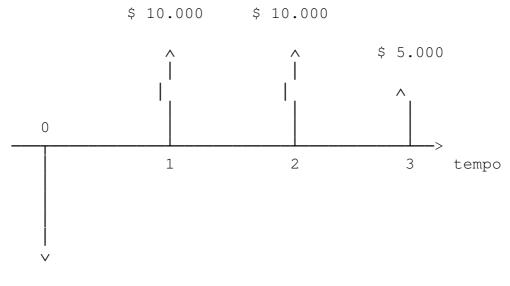
#### 1.2 CONCEITOS BÁSICOS

#### 1.2.1 MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática financeira fornece metodologias para a avaliação dos rendimentos ou custos de operações financeiras, auxiliando na tomada de decisão da administração dos recursos financeiros.

#### 1.2.2 DIAGRAMA DE FLUXO DE CAIXA

Diagrama onde um eixo horizontal representa o tempo; setas para cima (+) representam entradas de capitais financeiros e setas para baixo (-) representam saídas em determinados instantes.



\$ 15.000



#### 1.2.3 JUROS

É a remuneração do capital financeiro.

#### 1.2.4 TAXAS DE JUROS

Determinam os valores dos juros (remuneração do capital utilizado por um certo tempo) proporcionalmente ao capital aplicado.

Taxa de Juros-lucro, risco, inflação, etc;

- mercado de capitais (oferta/demanda);
- mercado perfeito (taxas estáveis).

$$i = \frac{J}{C}$$

onde:

i : Taxa de Juros num dado período de tempo;

J : Juros auferidos num dado período de tempo;

C : Capital investido.

#### 1.2.5 MONTANTE, CAPITAL E JUROS

O Montante é a soma (agregado) do Capital com os Juros.



M = C + J

3) Calcular os juros pagos pela aplicação de \$1.800,00 por um período de 1 mês à taxa de 15% ao mês.

4) Um comerciante vende um produto por \$2500,00 a vista ou, então, a prazo para que o cliente pague \$2850,00 depois de um mês. Qual é, então, a taxa de juros cobrada pelo comerciante?



#### 1.2.6 SISTEMAS DE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS

#### Critérios de Capitalização:

Juros Simples x Juros Compostos

#### Capitalização Simples

- a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial (juros constantes), os valores futuros compõe uma progressão aritmética;
- pouquíssimas aplicações juros de mora (curto prazo);
- quando se aplica, a rentabilidade (ou custo) real é avaliada por Juros Compostos.

#### Capitalização Composta

- a taxa de juros é aplicada ao valor do início de cada período, os valores futuros compõe uma progressão geométrica (P.G.). A sua aplicação é padrão no mercado financeiro.



5) Tomemos um capital inicial de \$100.000,00 aplicado a 10% ao mês em ambos regimes de capitalização.

Período	Montante							
	Cap Simples	Cap Composta						
0	100.000,00	100.000,00						
1	110.000,00	110.000,00						
2								
3								
4								
5								
10								



### 2 O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

#### 2.1 MONTANTE E CAPITAL

Montante - é o valor acumulado por um capital aplicado a uma taxa de juros por um determinado tempo.

Sabemos que :

M = C + J

1) Uma pessoa investe \$100,00 numa conta que paga uma taxa de juros simples de 10% a.m.. De quanto será o seu montante ao final de 4 meses?



Sejam:

C - capital (\$);

i - taxa de juros por período;

j - juros auferidos num período;

n - número de períodos;

J - juros totais auferidos na transação (\$);

M - montante (\$).

Os juros num período são : j=i.C

Os Juros totais, de n períodos serão :

J = n.j

ou

J = n.i.C

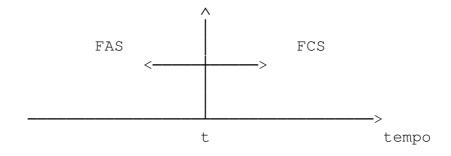
O Montante ao final de n períodos será:

$$M = C.(1 + n.i)$$

Capital Inicial:

$$C = \frac{M}{(1+n.i)}$$

Fator de capitalização por juros simples - FCS = (1+ni); Fator de atualização por juros simples - FAS = 1/(1+ni).





2) Um capital de \$30.000,00 é aplicado à taxa de 3,5% ao mês durante um trimestre. Calcule os juros totais auferidos e o montante resgatável ao final deste período.

3) Um empresário fez uma aplicação de \$3.200,00 à taxa de 1,08% ao mês durante 6 meses. Determine o montante resgatável ao final deste período.

4) Um cliente atrasou o pagamento de uma prestação de R\$ 685,70 que deveria ser paga no dia 10 e vai pagar no dia 26. Calcule, então, o valor a ser pago com a mora, sabendo-se que a taxa é de 9% ao mês.





#### 2.2 TAXAS EQUIVALENTES EM CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Taxas Equivalentes -aplicadas ao mesmo capital, pelo mesmo prazo, produzem montantes iguais.

$$\frac{i_Q}{n_Q} = \frac{i_T}{n_T}$$

- 5) Calcule a taxa mensal equivalente a 160% ao ano.
- 6) Encontre a taxa anual equivalente a:
  - a) 2% ao mês;
  - b) 4.3% ao trimestre;
  - c) 200% em 18 meses.

- 7) Encontre a taxa semestral equivalente a:
  - a) 96% ao ano;
  - b) 4.5% à quinzena;
  - c) 0,65% ao dia.



## 3 O SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

1) Uma pessoa aplica um capital de \$100,00 numa conta que paga uma taxa de juros de 10% a.m. pelo sistema de capitalização composta. Qual será o montante (Valor Futuro) resgatável após 4 meses?



#### 3.1 MONTANTE E CAPITAL

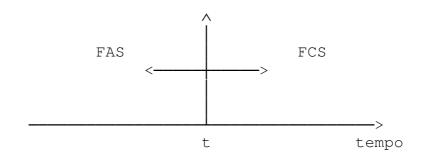
O Montante (Valor Futuro) será:

$$FV = PV.(1+i)^n$$

O Capital Inicial (Valor Presente) é:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

Fator de capitalização-  $FCC(i,n) = (1 + i)^n$ ; Fator de atualização-  $FAC(i,n) = 1/(1 + i)^n$ .



Os Juros dos n períodos podem ser, facilmente, obtidos através de:

$$J = M - C = FV - PV$$

ou

$$J = PV.[(1+i)^n - 1]$$

onde:

i - taxa de juros por período;

n - número de períodos da transação.



2)	Qual	0	val	or	do	mo	ntan	te	res	gatá	vel	após	8	me	ses	da	ap	lica	ção	de
um	capi	tal	de	\$5	50,	00	num	ba	nco	que	paga	a tax	a	de	jur	os (	de	3,5%	a.1	m.?
Ε	os ju:	ros	s tot	tai	s a	ufe	erido	os?												

3) Como José precisa de \$2.500.000,00 dentro de oito meses, quanto deverá ele depositar hoje, numa conta de que rende 4% a.m.?

4) Um empresário aplicou o capital de \$1.000.000,00 e, ao final de 1 ano resgatou um montante de \$2.518.170,12. Qual foi a taxa de juros anual ou mensal paga?



5) Um credor trocou um Título no valor de \$ 25.000, vencível em 2 meses por outro vencível em 6 meses com valor \$ 40.000. Qual foi a taxa mensal cobrada?

#### 3.3 A EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA NA CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Dois capitais são equivalente se e somente se produzem um mesmo capital quando levados para uma data qualquer com a mesma taxa de juros.

6) Um varejista recebeu uma proposta de um cliente que quer pagar R\$ 4.300,00 depois de quatro meses da venda de um produto que, a vista, custa R\$ 4.000,00. É uma boa proposta para o varejista sabendo-se que ele tem possibilidade de investir à taxa de juros de 2,2% ao mês?

7) José emprestou a Antonio \$3.000 hoje e deverá emprestar mais \$6.500 daqui a 6 meses. Em contrapartida, Antonio emitiu três



duplicatas. Encontre o valor da terceira duplicata, vencível em 1 ano, sabendo-se que:

- a) a 1ª duplicata apresenta valor de \$1.800, vencível em 4 meses;
- b) a 2ª duplicata apresenta valor de \$4.200, vencível em 9 meses;
- c) a taxa cobrada é de 5% ao mês.



- 8) Uma pessoa deseja viajar no final do ano e fará 2 depósitos numa conta que paga juros de 4% ao mês, nos seguintes valores e datas:
- a) \$2.000 no final de janeiro;
- b) \$1.250 no final de março.

Assim, quanto terá acumulado ao final de dezembro, quando precisará de \$8.500? Se as 2 parcelas depositadas não forem suficientes, qual a quantia que ela deverá depositar no final de julho para que consiga o montante desejado, ao final do ano?

- 9) Uma empresa deve a outra os seguintes compromissos:
- a) \$1.350.000 dagui a 2 meses;
- b) \$800.000 dagui a 6 meses.

A empresa devedora pede rolagem da dívida da seguinte forma:

- a) pagamento de \$250.000 hoje;
- b) pagamento de \$300.000 dagui a 3 meses;
- c) o restante para daqui a 12 meses.

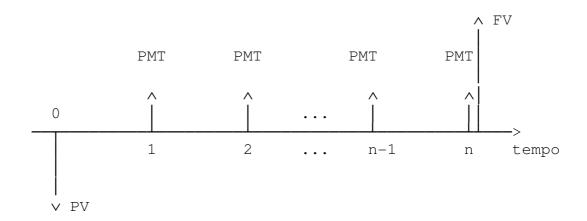
Qual será, então, o valor pago após este período para a liquidação da dívida se a taxa utilizada for de 3,5% a.m.?



### 4 SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS

#### 4.1 MONTANTE, CAPITAL E PARCELAS

Pagamentos de Valores Iguais em Períodos de Tempo Iguais



Capital (Valor Presente)
$$PV = PMT \left[ \frac{(l+i)^n - l}{i.(l+i)^n} \right]$$

Parcelas (Pagamentos)  

$$PMT = PV \left[ \frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

1) Um televisor está a venda por \$1.200,00 ou em doze prestações mensais, iguais e consecutivos. Sendo de 8% a.m. a taxa cobrada, calcule o valor das prestações para cada forma de financiamento conforme abaixo:

- a) a primeira vence depois de um mês da compra;
- b) a primeira é paga no ato da compra;
- c) a primeira vence após quatro meses da compra.



2) Qual a taxa de juros cobrada no financiamento de um eletrodoméstico no valor de \$1.500,00 para pagamento em 6 prestações mensais, iguais e consecutivas de \$370,02.

3) Qual a taxa de juros cobrada na venda de um sapato no valor de \$65,00 financiado com três prestações de \$25,00, sendo a 1ª no ato da compra?



#### 4.2 A EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA EM SÉRIES UNIFORMES

4) Um trabalhador planeja sua própria aposentadoria. Ele deseja receber mensalmente \$3.000,00 por, pelo menos, vinte anos, a partir dos seus 55 anos. Hoje ele tem 40 anos e uma poupança no valor de \$15.000,00. Quanto deverá depositar, então, mensalmente até lá para que possa realizar o seu projeto, sabendo-se que a taxa do contrato é de 1% a.m..



5) Uma pessoa tem ainda 60 prestações de \$ 1.500,00 do financiamento de seu imóvel pela frente. No entanto, ele vai utilizar \$ 16.195,40 de seu fundo de garantia para amortizar uma parte da dívida e quer que o valor das prestações diminua, sem alterar o número de prestações (60) que ainda faltam. Sendo assim, qual o valor destas novas prestações, se a taxa de juros for de 1 ao mês?

- 6) Calcule o valor das novas prestações para o caso acima se a pessoa quiser diminuir o número de prestações de 60 para 30 meses.
- 7) Calcule o número de meses para que a pessoa (do exercício acima) liquide sua dívida (depois da amortização dos \$ 16.195,40) considerando que ele gostaria de continuar pagando os mesmo \$ 1.500,00 de prestações mensais.
- 8) Um veículo de valor \$65.000,00, está sendo vendido nas seguintes condições: entrada de \$20.00000 e o restante em 24 prestações mensais, iguais e sucessivas, vencendo a primeira depois de 6 meses da compra. Calcule, então, o valor das prestações, se a taxa do financiamento for de 1,5% ao mês.



### 5 DESCONTOS E PRECIFICAÇÃO

#### 5.1 DESCONTO RACIONAL OU "POR DENTRO".

- 1) Encontre o desconto e o valor líquido recebido por um título de valor nominal (valor de face) \$ 1.000,00 que será descontado um mês antes de seu vencimento. A taxa de juros é de 8 % a.m..
- O Valor Recebido (Valor Atual) é:

$$PV = \frac{FV}{(I+i)^n}$$

#### 5.2 DESCONTO COMERCIAL OU "POR FORA".

$$D = M.n.d$$

onde :

- M valor nominal ou valor de face do título (FV);
- D valor do desconto;
- d taxa de desconto;
- n número de períodos referente a taxa de desconto.
- A Valor Recebido.
- 2) Encontre o desconto e o valor recebido por um título de valor nominal (valor de face) \$ 1.000,00 que será descontado em um Banco um mês antes de seu vencimento com taxa de desconto de 8 % a.m..



venda.

### MBA CONHECIMENTO, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO MBA EM GESTÃO ESTRATÉGICA DE PROJETO PÓS EM GESTÃO DA INOVAÇÃO PARA COMPETITIVIDADE

5.3 CUSTO EFETIVO NA OPERAÇÃO DE DESCONTO COMERCIAL.
3) Encontre o custo efetivo da operação de desconto anterior.
4) Encontre o desconto e o valor líquido recebido por um título de valor nominal (valor de face) \$ 1.000,00 que será descontado 90 dias antes de seu vencimento. A taxa de desconto é de 8 % a.m Calcule o custo efetivo mensal cobrado na operação.
5)Encontre o preço que se deveria colocar num produto cujo custo é de R\$ 100,00, de forma a se ter uma taxa de ganho (lucro) de 30% na venda.

6) Encontre o preço que se deveria colocar num produto cujo custo é de R\$ 100,00, de forma a se ter uma taxa de ganho (lucro) de 30% na venda e que há um imposto a ser recolhido de 20% sobre o valor da



7) Um produto está sendo vendido numa promoção do tipo "leve agora e pague em 30 dias". Sabe-se que o comerciante tem de financiar a compra do produto de R\$ 100,00 (valor de custo hoje) junto ao fornecedor e que, para isto, ele paga uma taxa de juro de 5% ao mês. Considerando que o comerciante quer um ganho de 30% livre na operação, calcule o preço sabendo-se que há o recolhimento de 20% de impostos sobre o valor de venda final. E se o cliente quisesse pagar a vista, qual seria o valor do desconto que se poderia conceder?

8) Um produto está sendo vendido no cartão de crédito. O cartão cobra 8% do faturamento e paga ao comerciante 30 dias depois da venda. Sabe-se que o comerciante tem de financiar a compra do produto de R\$ 100,00 (custo hoje) junto ao fornecedor e que, para isto, ele paga uma taxa de juro de 5% ao mês. Considerando que há o recolhimento de 18% de impostos sobre o valor de venda final e também uma comissão de 14%: a) Calcule, então, o preço que o comerciante deveria colocar no produto para que ele tenha um ganho líquido (lucro) de 30% na operação; b) Se o cliente quisesse pagar a vista, qual seria o valor do desconto que se poderia conceder?



#### 6 FLUXOS DE CAIXA IRREGULARES

Fluxos que apresentam irregularidades nos valores das prestações e/ou nas datas de vencimentos.

**Exemplo:** Qual é o valor a vista de um automóvel que está sendo financiado com taxa de 2% a.m. da seguinte maneira:

- a) \$ 3.000,00 de entrada;
- b) 5 mensais iguais e consecutivas de \$ 1.800, vencendo a primeira depois de 1 mês da compra;
- c) 4 mensais, iguais e consecutivas de \$ 3.500, vencendo a primeira depois de 10 meses da compra;
- d) última parcela no valor de \$ 5.000, depois de 24 meses da compra.



#### 7 MÉTODOS DE ANÁLISE FINANCEIRA.

#### 7.1 MÉTODO DO VALOR PRESENTE LÍQUIDO.

Método que consiste em descontar (racionalmente), com a Taxa de Juros de Mercado, para a data zero todos os valores em datas futuras de um fluxo de caixa e somá-los algebricamente. A esta soma final dá-se o nome de Valor Presente Líquido (VPL). E, assim, do ponto de vista FINANCEIRO, teremos:

CASO:

VPL>0: FLUXO (TRANSAÇÃO) VIÁVEL.

VPL<0: FLUXO (TRANSAÇÃO) INVIÁVEL.

1) Um corretor vendeu um lote de ações por \$364.000,00 um mês após a compra que lhe custara \$325.000,00. Ele fez bom negócio se sua Taxa Mínima de Atratividade (TMA) é de 5,0% a.m.?



#### 7.2 MÉTODO DA TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR).

Consiste em encontrar a taxa de juros que anula o VPL do fluxo de caixa em questão. A TIR representa:

- o rendimento efetivo de um investimento;
- custo efetivo de uma operação de financiamento.

GRÁFICO DO VPL EM FUNÇÃO DA TAXA DE MERCADO

Assim, do ponto de vista **FINANCEIRO**, sendo  $i_m$  a Taxa de Mercado:

i) se a transação for um INVESTIMENTO:

CASO

TIR > im: INVESTIMENTO VIÁVEL.

TIR < im: INVESTIMENTO INVIÁVEL.

ii) se a transação for um  ${f FINANCIAMENTO}$  (TIR = Custo Efetivo): CASO

 $TIR > i_m$ : FINANCIAMENTO EM GERAL.

MATEMÁTICA FINANCEIRA E ENG. ECONÔMICA Prof. Alceu Salles Camargo Júnior



TIR  $< i_m$ : FINANCIAMENTO SUBSIDIADO.



3) Encontre a TIR de um Título do Governo que gera um montante de \$ 171.666,80 a partir do capital de \$150.000,00 por um período de 3 meses. Deve-se ou não comprar o papel se a taxa de juros de mercado for de 3.8 % a.m.?

4) Um motorista está interessado em comprar um caminhão para trabalhar como autônomo. Ele estima em 10 anos a vida útil do veículo que apresentará o seguinte fluxo:

Ano	Despesas	Receitas	Lucro
0	320.000,00	_	
1	45.000,00	135.000,00	
2	45.000,00	135.000,00	
3	70.000,00	155.000,00	
4	70.000,00	155.000,00	
5	70.000,00	180.000,00	
6	70.000,00	180.000,00	
7	70.000,00	180.000,00	
8	90.000,00	180.000,00	
9	100.000,00	150.000,00	
10	100.000,00	150.000,00	

É um bom investimento levando-se em conta que sua Taxa Mínima de Atratividade é de 15 % a.a.?



5) Um projeto para a produção de alumínio está sendo estudado. As estimativas são:

Discriminação	Valores em \$
Investimento Inicial	60.000.000
Valor Residual	10.000.000
Lucros anuais	12.000.000
Vida útil	20 anos

A região onde está sendo instalada a fábrica oferece energia elétrica industrial na tensão de 69 kV. Contudo, encontra-se em instalação uma nova rede na tensão de 138 kV, que substituirá a existente, cerca de cinco anos após o início de operação da fábrica de alumínio. Tendo em vista que naquela época será necessário substituir a subestação rebaixadora de tensão original, foi estabelecido que a concessionária de energia abrirá um crédito para financiar os novos equipamentos, por um prazo de cinco anos (a vigorar do 6.0 ao 10.0 anos de operação da fábrica), cobrando taxa de 4% a.a. A nova subestação custará \$ 10.000.000; entretanto sua instalação proporcionará uma redução anual nos custos de \$ 1.500.000 devido ao fato de a energia distribuída em 138 kV ser mais barata que na de tensão de 69 kV. Sendo a taxa mínima de atratividade igual a 8% a.a., verifique a viabilidade do projeto.



- 7) O departamento de compras de uma empresa analisa as três opções de aquisição de um veículo de \$ 18.000,00 que apresenta desconto de 8 % para compra a vista ou em dois planos de financiamento:
- a) 24 mensais de \$ 950,00, sendo a 1.a no ato da compra;
- b) \$ 18 mensais de 1.550,00, após carência de 6 meses.

Como a empresa deve comprar o veículo se a taxa de juros de mercado for de 2,5 % a.m., caso a empresa tenha recursos para a compra a vista e caso não tenha.



#### **BIBLIOGRAFIA**

- CASAROTTO FILHO, N.; KOPITTKE, B. H. Análise de Investimentos. Editora Atlas. 1996. São Paulo.
- COPELAND, Thomas, WESTON, J. Fred. Financial theory and corporate policy. 3a. ed. Reading, Addison-Wesley, 1988.
- DUTRA VIEIRA SOBRINHO, J. Matemática Financeira com aplicações da calculadora HP/12-C. Editora Atlas.
- HESS, G; et alli; Engenharia Econômica. Disal -Distribuidora.
- HIRSCHFELD, H; Engenharia Econômica e Análise de Custos. Ed. Atlas. S.P.
- MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M.; Matemática Financeira. Ed. Atlas. SP. 1995.
- PUCCINI, A. L. Matemática Financeira Objetiva e Aplicada . Ed. Saraiva. 1998.
- ROSS, S. A., WESTERFIELD, R. W., JAFFE, J. F.. Administração Financeira. São Paulo: Atlas, 1995.
- SHINODA, C. Matemática Financeira com Excel. Ed. Atlas. 1.a edição. 1998.
- VIEIRA SOBRINHO, J. D. Matemática Financeira e aplicações na HP-12C. Ed. Atlas. 1997.