OML2 - Chapitre 3: Matrices

Gabriel Soranzo

1 Produit de matrices

Définition 1
Une **matrice** est un tableau de nombres.

Exemple 1.1
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$: c'est une matrice de taille $2 \times 3 = \boxed{\text{lignes} \times \text{colonnes}}$.

Définition 2
Un **vecteur ligne** est une matrice $1 \times c$: par exemple

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c'est un vecteur ligne de taille 3.

Définition 3
Un **vecteur colonne** est une matrice $l \times 1$: par exemple

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c'est un vecteur colonne de taille 3.

Définition 4
étant donnée une matrice M on note $M_{i,j}$ son coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne.

Définition 5
Définition des opérations avec des matrices:

1. On peut additionner des matrices de même dimension: par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

La formule est

$$\forall i, j, \boxed{(M+N)_{i,j} = M_{i,j} + N_{i,j}}$$

2. On peut multiplier une matrice par un nombre (**multiplication scalaire**): par exemple

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

La formule est

$$\forall i, j, \boxed{(\lambda M)_{i,j} = \lambda M_{i,j}}$$

3. On peut **tranposer** une matrice: par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Autre exemple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La formule est

$$\forall i, j, \boxed{(M^T)_{i,j} = M_{j,i}}$$

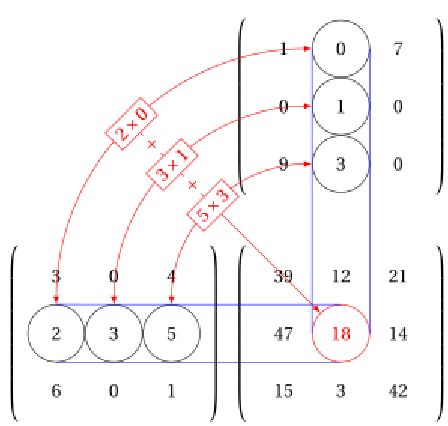
4. On peut multiplier deux matrices M et N si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N: par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

La formule est

$$\forall i, j, \boxed{(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{c} M_{i,k} N_{k,j}}$$

Il est important à ce niveau de voir concrêtement comment on fait cette mulitplication:



Exemple 1.2
Un autre exemple de multiplication matricielle:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.3
Un exemple important:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

La matrice $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice identité de taille 3.

Exemple 1.4
Produit d'une matrice par un vecteur colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix}$$

donc $M \times u$ redonne un vecteur colonne.

En particulier

Matrice carrée $\times$ Vecteur colonne $=$ Vecteur colonne de même dimension

par exemple,

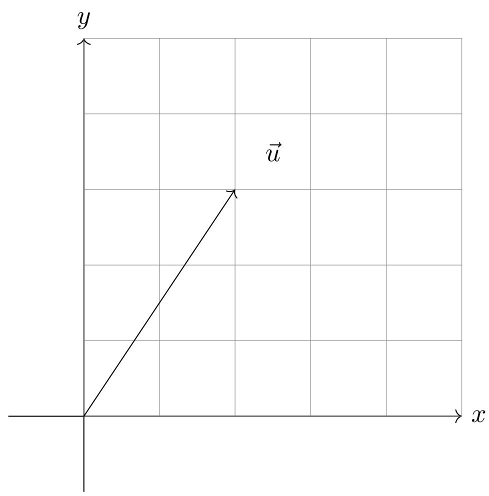
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$$

On dit que les matrices carrées agissent sur les vecteurs colonnes: on note souvent

$$M \cdot \vec{u} = \vec{v} \text{ ou } M\vec{u} = \vec{v}$$

2 Interprétation géométrique

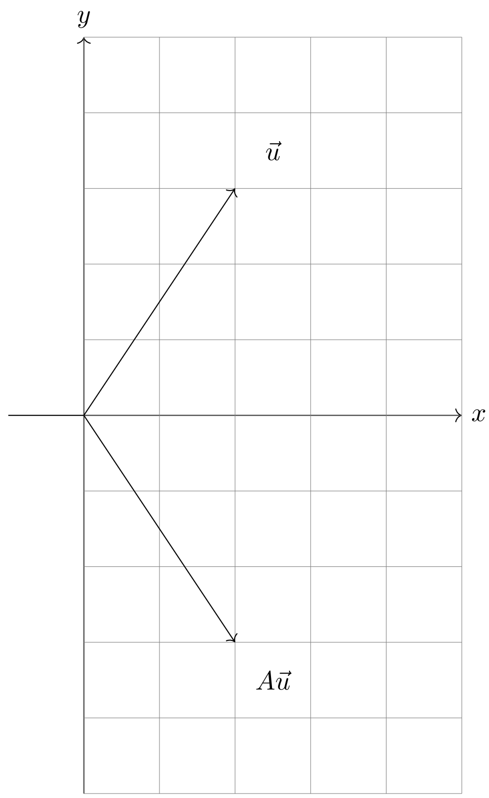
Les vecteurs colonnes de dimension 2 se voient dans le plan $\mathbb{R}^2$:



Nous venons de voir que les matrices carrées agissent sur les vecteurs colonnes: par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a

$$A \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donc



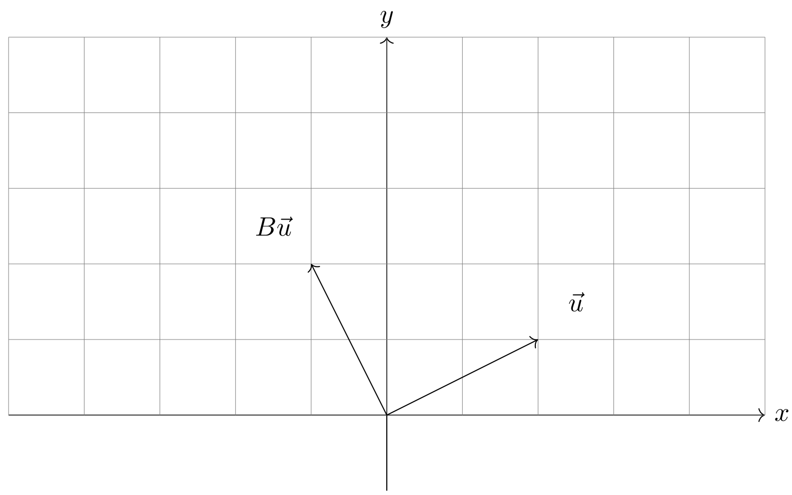
On voit que dans ce cas la matrice A agit par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Un autre exemple, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

par exemple

$$B \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



On observe donc que B est une matrice de rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Remarque 1
En général (pas seulement en dimension 2) les matrices traduisent des transformations de l'espace $\mathbb{R}^n$ qui sont appelée des transformations linéaires. Elles vérifient la relation

$$A \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

3 Inversion de matrices et systèmes

3.1 Matrices inversibles

Définition 6
une **matrice unité** est une matrice carrée avec que des 0 sauf sur la diagonale où il y a des 1.

Exemple 3.1
$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 7
Une matrice carrée M sera dite **inversible** si et seulement s'il existe une matrice N telle que $M \times N = I$. On notera M^{-1} cette matrice N.

Exemple 3.2
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible car

$$A \times \begin{pmatrix} 4/10 & -2/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Théorème 1. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son **déterminant** est différent de 0.*

Exemple 3.3
Considérons les matrices suivantes:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, son déterminant est égal à

$$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times (-3) = 10$$

Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible.

Comme pour le produit de matrice il est important de bien comprendre comment se calcule le déterminant:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - c * b$$

Remarque importante: ce théorème ne donne pas la formule de l'inverse d'une matrice. Il donne juste une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit inversible.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$, son déterminant est égal à

$$\det(B) = 1 \times (-8) - (-2) \times 4 = 0$$

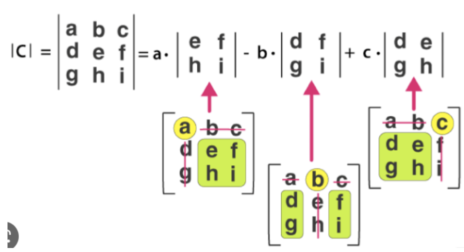
Comme $\det(B) = 0$, B n'est pas inversible.

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ son déterminant est

$$\begin{aligned} \det(M) &= \boxed{+} 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \boxed{-} 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \boxed{+} 3 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -6 - 2 \times 17 + 10 = -6 - 34 + 10 = -30 \neq 0 \end{aligned}$$

Comme $\det(M) \neq 0$, M est inversible.

Pour bien comprendre voir le schéma ci-dessous (identique que ci-dessus sauf qu'on a développer suivant la première ligne et non suivant la première colonne, les deux étant possible). Remarquer l'alternance des signes $\boxed{+}$ et $\boxed{-}$ pour ce calcul. N'hésitez pas à aller voir une vidéo explicative si vous êtes en distanciel.



Théorème 2 (Formule d'inversion des matrices 2×2)**.** *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est une matrice* 2×2 *inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démontration 1
Démontrons ce théorème:

$$\begin{aligned} A \times A^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

3.2 Systèmes

Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2y & = 3 \\ -3x + 4y & = 2 \end{cases}$$

Ce système peut se traduire par l'égalité de deux vecteurs colonnes:

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Or on se rend compte que le vecteur colonne de gauche est le résultat d'un produit matriciel:

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donc le système est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système il suffit alors de mulitplier cette équation à gauche et à droite par la matrice inverse de la matrice de gauche:

$$\begin{aligned} & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \iff & A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \iff & I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

or $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases} x = 8/10 \\ y = 11/10 \end{cases}$ est la solution du système.