Exercices sur les fonctions

IUT Sénart/Fontainebleau - Département GEII

Exercice 1 *Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :*

$$\sqrt{5x-3}, \ln(1-2x), \frac{2+3x}{2-4x}$$

— $\sqrt{5x-3}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{5x-3} \text{ est définie} &\iff 5x-3 \geq 0\\ &\iff 5x \geq 3\\ &\iff x \geq \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{Def = \left[\frac{3}{5}, +\infty\right[}$.

— $\ln(1-2x)$:

$$\begin{aligned}\ln(1-2x) \text{ est définie} &\iff 1-2x > 0\\ &\iff -2x > -1\\ &\iff x < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{Def = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[}$.

— $\dfrac{2+3x}{2-4x}$:

$$\begin{aligned}\frac{2+3x}{2-4x} \text{ est définie} &\iff 2-4x \neq 0\\ &\iff -4x \neq -2\\ &\iff x \neq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{Def = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}}$.

Exercice 2 *Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :*

$$\sqrt{x^2+4x+3}, \ln((2x+1)(2-5x)), \ln\left(\frac{3-2x}{1+x}\right), \sqrt{x^2+x+1}$$

— $\sqrt{x^2+4x+3}$: *Tableau de signes de* x^2+4x+3 :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Détails :

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \text{ donc } r_1 = \frac{-4-2}{2} = -3 \text{ et } r_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4x+3} \text{ est définie } &\iff x^2+4x+3 \geq 0 \\ &\iff x \leq -3 \text{ ou } x \geq -1\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{Def =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[}$.

— $\ln((2x+1)(2-5x))$ *: Tableau de signes de* $(2x+1)(2-5x)$ *:*

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+1)(2-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc

$$\begin{aligned}\ln((2x+1)(2-5x)) \text{ est définie } &\iff (2x+1)(2-5x) > 0 \\ &\iff -\frac{1}{2} < x < \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{Def = \left]-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right[}$.

— $\ln\left(\frac{3-2x}{1+x}\right)$ *: Tableau de signes de* $\frac{3-2x}{1+x}$ *:*

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3-2x}{1+x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

On a donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{3-2x}{1+x}\right) \text{ est définie } &\iff \frac{3-2x}{1+x} > 0 \\ &\iff -1 < x < \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{Def = \left]-1, \frac{3}{2}\right[}$.

— $\sqrt{x^2+x+1}$ *: Signe de* x^2+x+1 *: on a* $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ *donc* x^2+x+1 *est de signe constant du signe de* $a = 1 > 0$ *donc* x^2+x+1 *est toujours positif.*
On a donc

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1} \text{ est défini } &\iff x^2+x+1 \geq 0 \\ &\iff x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{Def = \mathbb{R}}$.

Exercice 3 *Etudier les variations des fonctions suivantes :*

$$f(x) = x^2 - 5x + 1, g(x) = t^3 + 6t^2 + 9t - 1, g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$$

— $f(x) = x^2 - 5x + 1$ *: Calcul de la dérivée :*

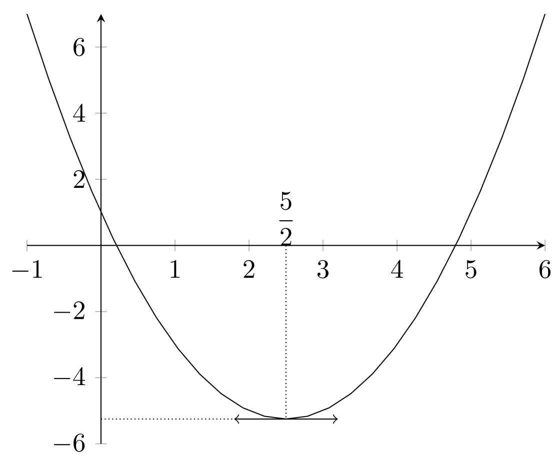
$$\left(x^2 - 5x + 1\right)' = 2x - 5$$

Tableau de signes/variations :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5.25	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Détails :</u>

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = ... = -\frac{21}{4} = -5,25$$
$$\lim_{-\infty} f = (-\infty)^2 = +\infty \text{ (le terme de plus haut degré l'emporte)}$$
$$\lim_{+\infty} f = (+\infty)^2 = +\infty \text{ (idem)}$$



<u>Détail à placer :</u> $f(0) = \times 0^2 - 5 \times 0 + 1 = 1$

— $g(t) = t^3 + 6t^2 + 9t - 1$ *: calcul de la dérivée :*

$$\left(t^3 + 6t^2 + 9t - 1\right)' = 3t^2 + 6 \times 2t + 9 = 3t^2 + 12t + 9$$

Calcul des racines de $3t^2 + 12t + 9$ *:*

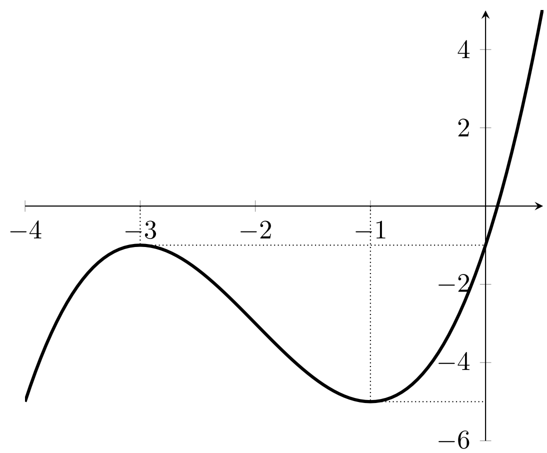
$$\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36 > 0 \text{ donc } \begin{cases} r_1 = \dfrac{-12 - 6}{2 \times 3} = -3 \\ r_2 = \dfrac{-12 + 6}{6} = -1 \end{cases}$$

Tableau de signes/variations :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	*-5*	$\nearrow$	$+\infty$

Détails :

$$g(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) - 1 = ... = -1$$
$$g(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) - 1 = -1 + 6 - 9 + 1 = -5$$
$$\lim_{-\infty} g = (-\infty)^3 = -\infty$$
$$\lim_{+\infty} g = (+\infty)^3 = +\infty$$



Détail à placer :

$$g(0) = \ldots = -1$$

— $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x + 6$ *: Calcul de la dérivée :*

$$\left(2x^3 + 3x^2 + 12x + 6\right)' = 6x^2 + 6x + 12$$

Calcul des racines de la dérivée :

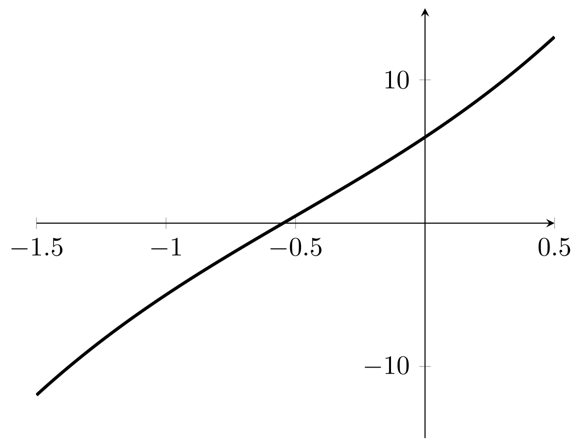
$$\Delta = 36 - 4 \times 6 \times 12 = -252 < 0 \textit{ donc il n'y a pas de racines}$$

Tableau de signe/variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Détails :

$$\lim_{-\infty} g = (-\infty)^3 = -\infty$$
$$\lim_{+\infty} g = (+\infty)^3 = +\infty$$



Détail à placer :

$$g(0) = \ldots = 6$$

Exercice 4 *Pour chaque fonction : déterminer son domaine de définition, étudier ses variations et ses limites puis tracer l'allure de sa courbe représentative.*

$$f(x) = \frac{5x+2}{2x-4}, g(x) = \frac{x^2+3}{3x-9}, h(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}, k(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

— $f(x) = \dfrac{5x+2}{2x-4}$:
Dommaine de définition :

$$\begin{aligned} \frac{5x+2}{2x-4} \text{ est défini } &\iff 2x-4 \neq 0 \\ &\iff x \neq 2 \end{aligned}$$

Calcul de la dérivée :

$$\begin{aligned} \left(\frac{5x+2}{2x-4}\right)' &= \frac{5(2x-4) - 2(5x+2)}{(2x-4)^2} \\ &= \frac{-24}{(2x-4)^2} \end{aligned}$$

Tableau de signes/variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{5}{2}$

— $g(x) = \dfrac{x^2+3}{3x-9}$:
— $h(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}$:
— $k(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x+1}$:

Exercice 5 *Procéder à l'étude des fonctions comme dans les exercices précédents.*

$$f(x) = \ln(2x+1) - x, g(x) = \ln(1-3x) + x^2$$

— $f(x) = \ln(2x+1) - x$:
— $g(x) = \ln(1-3x) + x^2$: