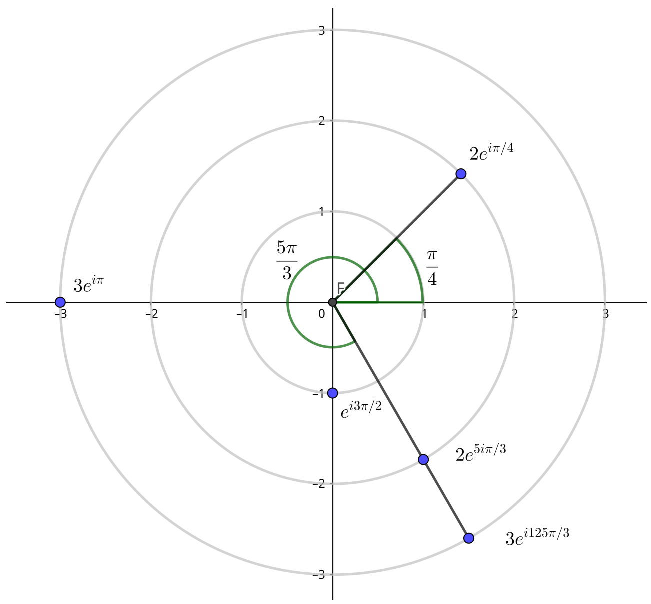
Exercices sur les nombres complexes - TD2

IUT Sénart/Fontainebleau - Département GEII

Exercice 1 *Placer approximativement sur le plan complexe les nombres complexes suivan :*

$$2e^{i\pi/4}, 3e^{i\pi}, 2e^{i5\pi/3}, e^{i3\pi/2}, 3e^{i125\pi/3}$$

Ces nombres complexes se placent comme ci-dessous :



Détail pour $3e^{i125\pi/3}$ *:*

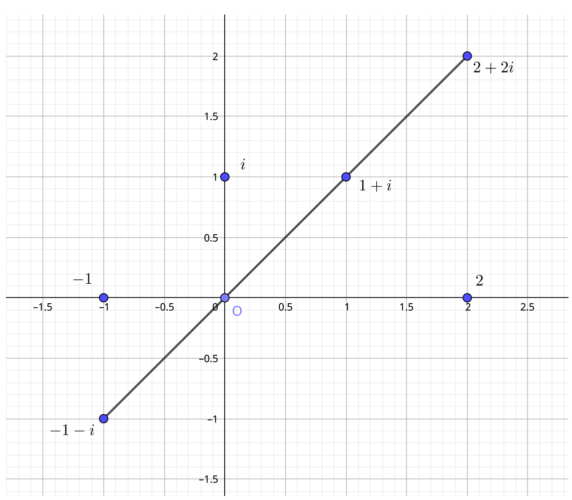
— *Nombre de tours :* $\dfrac{125\pi}{3} \div 2\pi = \dfrac{125}{6} \approx 20.$

— *Reste :* $\dfrac{125\pi}{3} - 20 \times 2\pi = \dfrac{125\pi}{3} - \dfrac{120\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}.$

Exercice 2 *Placer sur le plan complexe puis donner directement la forme exponentielle :*

$$1+i, -1-i, 2, i, -1, -i, 2+2i$$

Ces nombres complexes se placent su le plan complexes de la manière suivante :



On voit alors graphiquement que :

— *le nombre complexe* $1+i$ *a pour module* $\sqrt{2}$ *et pour argument* $\frac{\pi}{4}$ *donc sa F.E. est :*

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

— *le nombre complexe* $-1-i$ *a pour module* $\sqrt{2}$ *et pour argument* $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ *donc sa F.E. est*

$$-1-i=\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$$

— *le nombre complexe* 2 *a pour module* 2 *et pour argument* 0 *donc sa F.E. est*

$$2=2e^{i0}$$

— *le nombre complexe* i *a pour module* 1 *et pour argument* $\frac{\pi}{2}$ *donc sa F.E. est*

$$i=1e^{i\pi/2}$$

— *le nombre complexe* -1 *a pour module* 1 *et pour argument* π *donc sa F.E. est*

$$-1=1e^{i\pi}$$

— *le nombre complexe* $-i$ *a pour module* 1 *et pour argument* $\frac{3\pi}{2}$ *donc sa F.E. est*

$$-i=1e^{3i\pi/2}$$

— *le nombre complexe* $2+2i$ *a pour module* $2\sqrt{2}$ *et pour argument* $\frac{\pi}{4}$ *donc sa F.E. est*

$$2+2i=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Exercice 3 *Donner la forme exponentielle en justifiant par des calculs :*

$$2-2j\sqrt{3}, 2-2j, 3j, 2+3j$$

— *Pour le nombre complexe* $2-2j\sqrt{3}$. *Calcul du module :*

$$\left|2-2j\sqrt{3}\right|=\sqrt{4+4\times 3}=4$$

On a alors

$$\begin{aligned}2-2j\sqrt{3}&=4\left(\frac{2}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}j\right)\\&=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\\&=4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+j\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\\&=4e^{-j\pi/3}\end{aligned}$$

— *Pour le nombre complexe* $2-2j$ *Calcul du module :*

$$|2-2j|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

On a alors

$$\begin{aligned}2-2j&=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}j\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}j\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)j\right)\\&=2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}\end{aligned}$$

— *Pour le nombre complexe $3j$ Calcul du module :*

$$|3j| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

On a alors

$$\begin{aligned} 3j &= 3(0 + 1j) \\ &= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) j\right) \\ &= 3e^{j\pi/2} \end{aligned}$$

— *Pour le nombre complexe $2 + 3j$ Calcul du module*

$$|2 + 3j| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

On a alors

$$\begin{aligned} 2 + 3j &= \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}}j\right) \\ &= \sqrt{13}\left(\cos(0,98) + \sin(0,98)j\right) \\ &= \sqrt{13}e^{0,98j} \end{aligned}$$

Exercice 4 *Dans chaque cas calculer la FE du produit zz' et du quotient z/z' et placez les approximativement dans le plan complexe :*

1. $z = 2i = 2e^{i\pi/2}$ *et* $z' = e^{-i\pi/4}$ *: On a*

$$zz' = 2e^{i\pi/2} \times e^{-i\pi/4} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\pi/4}$$

et on a

$$\frac{z}{z'} = \frac{2e^{i\pi/2}}{e^{-i\pi/4}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{3i\pi/4}$$

2. $z = e^{i\pi/4}$ *et* $z' = 2e^{i\pi/4}$ *: On a*

$$zz' = e^{i\pi/4} \times 2e^{i\pi/4} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\pi/2}$$

et on a

$$\frac{z}{z'} = \frac{e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/4}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}e^{i0}$$

Exercice 5 *Dans chaque cas construire graphiquement l'inverse et le conjugué du nombre complexe donné et dire à quoi il est égal :*

$$2e^{j\pi/4}, e^{3j\pi/2}, j, 1 + j, 2, -3$$

Non traité

Exercice 6 *Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :*

$$\frac{1 - i}{1 + i}$$

— *FE du numérateur* $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ *donc*

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

— *FE du dénominateur : de même* $|1 + i| = \sqrt{2}$ *donc*

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

— *Par conséquent*

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-i\pi/2}$$

Exercice 7 *Dans chaque cas calculer le nombre complexe donné en passant par la forme exponentielle :*

$$(1-i)^4$$

— *FE de* $1-i$ *: d'après l'exercice précédent,*

$$1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

— *On a alors*

$$(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^4 = \sqrt{2}^4\left(e^{-i\pi/4}\right)^4 = 2^2e^{-i\frac{\pi}{4}\times 4} = 4e^{-i\pi}$$