- Document de travail -

REVUE DES SOURCES DE L'ARTICLE [ZAP04] DE ZAPPONI

RÉSUMÉ. On étudie les références présentes dans l'article "Spécialization of polynomial covers of prime degree" de Zapponi de 2004 ainsi que certaines références implicites. Le but est de tracer le concept de modèle semi-stable minimal de revêtement à travers les références données.

Dans l'article [Zap04], Zapponi fait référence au modèle semi-stable des revêtements ainsi qu'à leur bonne réduction. Il y est fait référence aux articles suivants : [Ray07], [Ray94], [Ray99], [Leh01], [Sai01], [Wew03b].

Nous donnerons un bref aperçu de ces articles, des liens qu'ils entretiennent avec [Zap04], de ce qui a motivé leur rédaction, et des principales références de ces articles.

Zapponi mentionne le cas prime-to-p sans citer de sources. Nous explicitons donc tout d'abord ce cas qui est pour l'essentiel traité dans [RG04] et [Ful69]. Bien que non mentionné dans l'article [Zap04] nous abordons ensuite l'article [Bec89]. Cet article reformule et redémontre dans un cadre plus simple le cas prime-to-p et fait un lien partiel avec la bonne réduction du corps des modules. Viennent ensuite les trois articles de Raynaud [Ray07], [Ray94] et [Ray99]. Nous présentons d'abord l'article [Ray94] dans le context de la conjecture d'Abyankar. Bien que posterieur à l'article [Ray07], son intérêt n'est pas focalisé sur les modèles de revêtement, contrairement aux deux autres.

Dans tout cet article, on se donne un anneau de valuation discrète R de corps de fraction K et de corps résiduel k de caractéristique p.

1. LE CAS "PRIME TO p"

Ce cas est le premier cas traité dans la littérature via [RG04] et [Ful69]. Cela n'est pas traité explicitement dans [RG04], qui étudie le morphisme de spécialisation du groupe fondamental (dans le but de démontrer la première conjecture d'Abhyankar, cf partie 3), mais nous allons voir que cela s'en déduit facilement. Soit un revêtement galoisien ramifié $X \to \mathbb{P}^1_K$, étale sur $\mathbb{P}^1_K \setminus S$ avec un groupe des automorphismes du revêtement G de cardinal premier à p. On démontre alors que ce revêtement a **bonne réduction** ie qu'il existe une extension du morphisme sur K en un morphisme $X \to \mathbb{P}^1_R$ fini et plat sur $\mathbb{P}^1_R \setminus S$ tel que sa fibre $X_k \to \mathbb{P}^1_k$ vérifie que X_k est régulière. Pour être précis, dans [RG04] (en 1961) Grothendick traite le cas non ramifié (étale et espace de base propre ie $S = \emptyset$) dans la section X, et c'est Michèle Raynaud qui traite le cas ramifié (toujours prime-to-p) dans la section XIII. En fait Fulton a traité le cas non propre avant SGA1 dans [Ful69] (en 1969), la partie de Michèle Raynaud ayant été rédigée 10 ans après celle de Grothendick. L'énoncé dans SGA est en fait plus général est traite les revêtements $X_K \to B_K$ étales avec B_K admettant un modèle B **lisse** et propre ou les revêtements $X_K \to B_K$ ramifiés au dessus de S_K avec (B_K, S_K) admettant un modèle (B, S) lisse et propre et S ayant bonne réduction (pas de coalescence).

SGA traite le cas général $X \to B$ ie l'espace de base n'est pas nécessairement $\mathbb{P}^1_K$

Pas de nécessité d'ajouter dans la définition que S et $\overline{S}$ ont même cardinal et que les indices de ramification restent les mêmes : ce sera une condition nécessaire pour la bonne réduction

Lisse : toute les fibres sont régulières. Contrêtement ici comme on part de B_K régulier alors cela revient à demander une réduction B_k régulière.

La référence [RG04] ne contient pas explicitement ces résultats mais ils s'en déduisent facilement : si le groupe d'automorphisme est premier à p le corollaire X.3.9 page 283 (p 217 dans la nouvelle numérotation) ou le corrollaire XIII.2.12 page 292/306 s'appliquent selon que S est vide ou non. Or comme on le voit dans les démonstration (voir par exemple page 281/231), la démonstration de l'isomorphie des $\pi_1^{(p)}$ des bases géométriques (ici $\mathbb{P}^1_K \setminus S$) et spécialisées (ici $\mathbb{P}^1_k \setminus \overline{S}$) revient à montrer l'existence d'un modèle $X \to \mathbb{P}^1_R$ du revêtement. La régularité de la fibre spéciale s'obtient en utilisant par exemple le lemme 4.2 de l'article de Fabrice Orgogozo et Isabelle Vidal dans [BLR00]. Cela fonctionne car dans notre cas le modèle de $\mathbb{P}^1_K$ est $\mathbb{P}^1_R$ dont la fibre spéciale $\mathbb{P}^1_k$ est régulière (cela ne marche plus pour les modèles semi-stables, dans lesquels l'espace de base n'a pas une fibre régulière).
On peut donc schématiser ce cas prime-to-p en disant que la réduction est toujours bonne lorsque le groupe d'automorphisme a un cardinal premier à p, que la base admet un modèle lisse et propre et que les points de branchements ne se rencontrent pas dans la fibre spéciale. C'est Fulton, dans [Ful69] qui le formule (quasiment) aussi clairement en page 12. Il faut remarquer premièrement que cela suppose que l'on considère déjà l'espace de base B ($\mathbb{P}^1_K$ dans notre cas) comme modélisé par un R-schéma $\mathscr{B}$ qui est lisse et propre. Deuxièment Fulton parle de réduction modulo p mais (il ne me semble pas) pas de "bonne réduction". Il mentionne simplement que les "branched coverings may *break up* when reduced modulo p" dans le sens (cf théorème 3.3) qu'un R-revêtement étale $Y \to X \setminus S$ peut avoir une fibre Y_K irréductible et une fibre Y_k non irréductible lorsque le lieu de branchement S n'est pas simple ce qui doit se traduire par une mauvaise réduction pour des points.

2. Article de Beckmann : lien avec le corps des modules

L'article [Ful69] isole déjà le sujet de la réduction modulo p des revêtements. C'est dans son cas une réduction "étant donné un modèle pour la base". Dans l'article [Bec89] il y a la notion de bonne réduction des revêtements. Ce n'est pas le sujet de départ mais la notion est utilisée pour l'étude de la ramification du **corps des modules** du revêtement. Mentionnons que cette réduction est étudiée via le modèle normal et non le modèle semi-stable.

Corps des modules : intersection des corps de définition possibles

- [Bec89] : étudie les modèles normaux de revêtements galoisiens dans le cadre de l'étude de l'arithmétique des revêtements. Beckmann fait suite aux travaux [CH85] dont une part est l'étude de l'arithmetique des revêments galoisiens de la sphère de Riemann (corps de définition et corps des modules). Dans son article est fait mention de la mauvaise réduction des revêtements (via le modèle normal) et du lien (partiel) entre son lieu de **mauvaise réduction** (sur Spec($\mathbb{Z}$)) et sa topologie. La motivation avancée par Beckmann à son étude est l'apport que cela peut apporter à la compréhension de Gal$\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$ via la **théorème d'irréductibilité de Hilbert** [1]. La justification me semble assez faible, et il me semble plutôt que son article est la continuation d'idées de Harbater, son maitre de thèse, qui a motivé la rédaction de son article. En fait pour ce qui est de la mauvaise réduction les résultats de Beckmann sont déjà connus via [Ful69] ainsi qu'elle le dit au début de sa section 5, la nouveauté étant le lien avec la ramification du corps des modules du revêtement. Il est en effet (plus ou moins) clair

Mauvaise réduction : quelque soit le modèle choisi $\mathscr{B}$ pour la base la cloture normale de $\mathscr{B}$ dans le revêtement X n'est pas lisse

HIT : étant donné $f(x,t) \in \mathbb{Q}(t)[X]$ irréductible, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x,a)$ reste irréductible.

1. Application du HIT à la théorie Galoisienne : Le revêtement galoisien donné a pour groupe d'automorphisme $Gal(K(\mathscr{C})/K(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}})) = Gal(K(\mathscr{C})/\mathbb{Q}(t))$ ce qui par le théorème de l'élément primitif est $Gal(\mathbb{Q}(t)[f]/\mathbb{Q}(t))$ avec $f \in \mathbb{Q}(t)[X]$ (ie $f = f(x,t)$) irréductible. Le théorème d'irréductibilité de Hilbert nous dit alors qu'il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x,a) = f_a(x)$ soit irréductible. On obtient alors une extension $Gal(\mathbb{Q}[f_a]/\mathbb{Q})$ qui est un groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$

dans [Ful69] et dans [RG04] que sur une base à modèle lisse, avec un lieu de ramification sans coalescence et un groupe d'isomorphisme de cardinal premier à p il y a un modèle à bonne réduction ie modèle lisse. C'est ce que dit pour l'essentiel Beckmann. Le principal apport de Beckmann pour ce qui concerne la réduction est donc peut-être la plus grande simplicité de la preuve, adapté à un lieu de ramification de dimension 0.

- [CH85] : article divisé en 2 parties. La première partie étudie les **espaces de Hurwitz** $\mathscr{H}_{n,r}$, plus particulièrement le problème de l'existence des espace de Hurwitz, étant fixé le nombre de points de branchement (voir l'article [RW06] pour une introduction sur les espaces de Hurwitz). Historiquement exhibés par Hurwitz cette notion est utilisée par Fulton, dans [Ful69], pour démontrer l'irréductibilité de l'espace des modules $\mathscr{M}_g$ pour $g < p-1$ via $\mathscr{H}_{n,r} \twoheadrightarrow \mathscr{M}_g$. Dans une deuxième partie (auquel Beckman fait suite) il étudie les corps de module et de définition des revêtements.

Espace de Hurwitz $\mathscr{H}_{n,r}$: espace de module des revêtements ramifiés $X \to \mathbb{P}^1$ de degré n et avec r points de branchement

- [Ful69] : Publié plus ou moins en même temps que [DM69], démontre comme ce dernier l'irréductibilité de $\mathscr{M}_g$ mais dans le cas particulier que $g < p-1$, en utilisant des espaces de Hurwitz. Par ailleurs cet article démontre les équivalents non propre des énoncés de [RG04] concernant la spécalisation des π_1 dans les surfaces arithmétiques. Mentionnons que ces résultats de spécialisation non propre apparaissent dans [RG04] dans la partie XIII écrite par Michèle Raynaud mais que cette partie de SGA1 n'est en fait pas contemporaine de SGA1. Les parties écrites par Grothendick l'ont été en 61 tandis que les parties de Michèle Raynaud l'ont été en 71. Les résultats de Fulton sont donc bien antérieurs à ceux contenus dans [RG04].

3. Article de Raynaud de 94 et conjecture d'Abyankar

Cet article est à replacer dans le contexte de la conjecture d'Abyankar. On peut grossièrement résumer les étapes de la résolution de cette conjecture comme suit :

- [Abh57] : énoncé d'une conjecture sur quels sont les groupes finis qui se réalisent comme **groupe fondamentale** de surfaces épointées. [Ser92] explique cette conjecture et les différentes pistes de résolution avant l'article [Ray94] : sur $\mathbb{C}$ la théorie des surfaces de Riemann montre que ce sont les groupes $\Gamma_{g,n}$ engendrés par $2g+n$ générateurs avec la relation connue[2]. En caractéristique 0 c'est la même chose. En caractéristique p, Abhyankar conjecture que c'est encore la même chose au niveau des p'-completion (limite projective des G/H d'ordre fini premiers à p, $G/p(G)$ pour les groupes finis avec $p(G)$ engendré par les p-sous groupes de Sylow) : $\pi_1^{(p')} = \Gamma_{g,n}^{(p')}$. La deuxième conjecture énonce une condition suffisante, étant donné $U = X \setminus S$, pour qu'un groupe G soit un **groupe de Galois d'un revêtement**[3]sur U : ce sera le cas lorsque $G^{(p')}$ est un quotient de $\pi_1^{(p')}$ (ie de $\Gamma_{g,n}^{(p')}$ d'après la première conjecture).[4]

La p'-completion de G se note $G^{(p')}$

Les p-sous groupe de Sylow sont les sous-groupe d'ordre une puissance de p maximale

En général G est un groupe de revêtement lorsqu'il est quotient du π_1.

- [RG04] (V, IX, X, XIII) : résoud la première conjecture d'Abhyankar dans XIII corollaire 2.12 page 306 (page 392 en ancienne notation) : il montre dans la preuve une généralisation du lemme de spécialisation du groupe fondamental $\pi_1^{(p')}(U) \simeq \pi_1^{(p')}(U_k)$ et le $\pi_1^{(p')}(U)$ est connu car $\overline{K}$ est de caractéristique 0.

U est le géométrisé d'un relêvement de U_k si on note U_k l'ouvert de base

2. g est le genre, n le nombre de points d'épointage, la relation est $\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\prod_{j=1}^{n}c_j = 1$.

3. Ne pas confondre le groupe de Galois d'un revêtement avec le groupe fondamental de l'espace de base (qui est le groupe de Galois du revêtement universel)

4. Si $n > 0$ ie $S \neq \emptyset$ ie U affine alors en posant $c_n = \prod_{i=0}^{g}[a_i,b_i]\prod_{j=0}^{n-1}c_j$ on voit que $\Gamma_{g,n}$ est libre de rang $2g+n-1$ donc (??) la condition $G^{(p')} = \Gamma_{g,n}^{(p')}$ signifit $G^{(p')}$ est engendré par $2g+n-1$ éléments.

Comme $\pi_1^{(p')}$ classifie (entre autres) les revêtements Galoisiens d'ordres premiers à p alors il s'en suit que ces revêtements sont les mêmes en caractéristique p et en caractéristique 0. Dans SGA1 est également défini π_1^t qui classifie les revêtements galoisien (ie principaux dans SGA1) modéréments ramifiés [5]. SGA1 démontre également en partie la seconde conjecture dans le cas où $|G|$ est premier à p : dans ce cas $G^{(p')} = G$ donc G lui-même est un quotient de $\pi^{(p')}(U)$ donc c'est un quotient de $\pi_1(U)$ donc G est le groupe de Galois d'un revêtement de U ie d'un revêtement ramifié de X (et c'est en fait un revêtement modérément ramifié par ce qui a été dit ci-dessus).

Revêtement modéré/tame cover : les indices de ramification sont premiers à p ie les sous-groupes d'inertie du groupe de Galois ont un cardinal premiers à p

- [Ray94] : démontre la (seconde) conjecture d'Abhyankar pour la droite affine. Dans ce cas on a $g = 0$ et $n = 1$ donc la condition est que $G^{(p')}$ est engendré par 0 éléments ie est le groupe trivial. Cela revient donc pour un groupe fini à $G = p(G)$. Dans cet article il est question de relèvement de revêtements étales de la droite affine en des revêtement formel avec SGA1 I.8.4. Par ailleurs c'est (peut-être ? à moins que ce soit un rappel, il faudrait éplucher les autres articles qu'il mentionne) dans cet article que Raynaud développe la notion de modèle en géométrie formelle et rigide, ainsi qu'expliqué dans le livre de Bosch consacré à la géométrie rigide et formelle. Cet article est sûrement le premier à étudier de manière assez étendue le **modèle semi-stable des revêtement galoisiens**. Il va impulser une nouvelle vague d'articles sur le sujet via les technique que Raynaud y développe. Il y démontre entre autres (mais était-ce déjà connu ? c'est une conséquence qu'il ne relève pas et qui est mentionnée sans source dans [Obu16]) qu'un indice de ramification sauvage implique une mauvaise réduction.
- [Har94] : démontre la (seconde) conjecture d'Abhyankar en toute généralité.

4. ARTICLES DE RAYNAUD DE 90 ET 99 : UTILISATION DE MODÈLES SEMI-STABLES

On résume ci-dessous les articles [Ray07] et [Ray99], bien que [Ray94] fasse également un grand usage des modèle semi-stable. Ces articles utilisent entre autre la notion de modèle semi-stable. La notion de modèle semi-stable de courbes est utilisée dans [DM69] pour établir l'irréductibilité du complété $\overline{\mathscr{M}_g}$ de l'espace des modules grossieris des courbes de genre g. Les (classes d'équivalences) de courbes semi-stables sont en fait les points limites de $\mathscr{M}_g$.

- [DM69] : Démontre l'irréductibilité du complété $\overline{\mathscr{M}_g}$ de l'espace des modules grossiers des courbes de genre g. Pour ce faire l'ingrédient principal et le théorème d'existence de **modèles semi-stable**. Via la définition d'espace de module grossier [6], l'existence d'un modèle de X sur R revient au prolongement d'un morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathscr{M}_g$ à un morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{\mathscr{M}_g}$. Cela est en fait

Une K-variété est un K-point de $\mathscr{M}_g$ et un modèle $\mathscr{X}$ sur R de X est en un schéma sur $\mathrm{Spec}(R)$ ie une famille indicée sur $\mathrm{Spec}(R)$ donc se traduit par un morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{\mathscr{M}_g}$ par définition d'un module grossier.

5. cf note page page 292 dans SGA1 : π_1^t est le quotient de π_1 qui classifie les revêtements finis étales modérément ramifiés et $\pi_1^{(p')}$ est le quotient de π_1^t qui classifie les revêtements Galoisiens de groupe de Galois d'ordre premier à p. A noter que $\pi_1^{(p')}$ est un quotient de π_1^t car un revêtement Galoisien de groupe de Galois G d'ordre premier à p est nécessairement modérément ramifié. En effet si $Y \to X$ est galoisien alors l'indice de ramification d'un point ramifié x quelconque est égale à $|G|/|Y_x|$ (on note $|Y_x|$ l'orbite de x sous l'action de G) donc est premier à p

6. Un **espace des modules** est une variété M qui paramétrise un certain ensemble de classes d'équivalences d'objets. Une espace des modules est **fin** s'il existe une famille univerelle $(U_m)_{m\in M}$ telle que toute famille $(F_b)_{b\in B}$ est un pushback de la famille U ie il existe un morphisme $\varphi : B \to M$ tel que $F_b = U_{\varphi(b)}$. Un espace des modules **grossier/coarse** est plus restreint : il paramétrise les objets et pour toute famille $(F_b)_{b\in B}$ l'application qui à b associe l'élément de M correspondant à F_b est en fait un morphisme.

le critère valuatif de propreté, ce qui démontre la propreté de $\overline{\mathcal{M}_g}$. C'est la difficulté principale pour l'établissement de l'irréductibilité de $\overline{\mathcal{M}_g}$. Tout ceci est expliqué plus facilement dans [Rom13]. Rappelons pour la culture que pour $g \geq 2$, $\mathcal{M}_g$ est une variété de dimension $3g-3$ (cela remonte à Riemann).

- [Knu83] : le deuxième article de Knudsen étudie l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,r}$ des courbes de genre g marquées avec r points. On a obtient facilement que $\mathcal{M}_{0,3}$ est un point (on peut toujours envoyer un triplet de points de $\mathbb{P}^1_K$ sur $0, 1, \infty$) et que $\mathcal{M}_{0,4}$ est un espace des module fin isomorphe à $\mathbb{P}^1_K \setminus \{0, 1, \infty\}$ via le birapport. Via l'invariant j des courbes elliptiques on a $\mathcal{M}_{1,1} \simeq \mathbb{P}^1_K$. Knudsen etablit la projectivité de $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}$ dans le cas **hyperbolique** ie $2g-2+n>0$.

La nécessité d'hyperbolicité souligné par Zapponi dans [Zap04] vient certainement d'ici : les modèles semi-stables de revêtements pointés n'existent (ou ne sont uniques ?) que dans les cas hyperboliques

- [Ray07] : écrit en 90, étend les résultats de [RG04] corollaire X.3.9 (cas étale). Dans [RG04] on voit (cf preuve du X.3.9) que lorsque le groupe d'isomorphisme d'un revêtement G a un cardinal premier à p, l'on peut étendre les K-revêtements $X_K \to B_K$ avec une base qui a un modèle B propre et lisse, en un R-revêtement $X \to B$. La variété X_K a donc un modèle lisse X (voir la partie 1). L'article étudie ce qui se passe dans le cas ou G est un p-groupe : dans ce cas le modèle semi-stable de X_K a une fibre spéciale qui est un arbre. A noter qu'un résultat souvent utilisé de cet article est le corollaire présent dans l'annexe : si Y est un R-courbe semi-stable (avec bonnes propriétés) et G est un groupe fini opérant dessus alors Y/G est également semi-stable.

p-groupe : tous les éléments ont un ordre une puissance de p

- [Ray99] : cet article étend les résultats de [RG04] partie XIII (ou [Ful69]), c'est-à-dire le cas ramifié. Il se restreint cependant aux revêtements de $\mathbb{P}^1_K$ avec 0, 1 et ∞ comme seuls points de branchement (context des dessins d'enfants). Sont ainsi évacués les considérations sur la coalescence des points de branchements et la mauvaise réduction de la base, le cardinal du groupe d'automorphisme restant le seul critère. Cet article étudie le cas où G a pour cardinal pa avec a premier à p et où le revêtement est tempéré[7]. Malgré le fait que le groupe G n'ait pas son cardinal premier à p, la réduction peut être quand même bonne et l'article donne une condition suffisante : si l'indice de ramification de la cloture de B dans X_K est assez petit.

Attention, on ne dit pas ici que tous ces revêtements ont bonne réduction : voir condition à la fin.

5. ARTICLES SUR LA RÉDUCTION

L'article [Ray99] va ensuite inspirer un certain nombre d'articles. Le premier est [BW00], qui concerne les revêtements de $\mathbb{P}^1$ privé de 4 points. Ensuite,

- [Leh01] : décrit la réduction semi-stable pour les revêtements galoisiens ramifiés $X \to \mathbb{P}^1_K$ cycliques d'ordres p avec X du type $y^p = f(x)$. La description est très précise, et dépend de la proximité p-adique entre $f(x)$ et la plus proche puissance p-ième (cf proposition 1 page 3). Notons que Lehr utilise les **polgygones de Newton** dans ses preuves (cf bas de la page 19). Enfin Lehr dit que ses méthodes sont inspirés de celles des articles de Green et Matignon ainsi que la Thèse de Henrio (voir section suivante). L'article utilise donc les idées de Raynaud sur les modèles semi-stables de revêtement ainsi que les idées de Green-Matignon sur les relèvements.

Cyclique signifie que le groupe de Galois est cyclique

- [Sai01] : dans son chapitre 2, étudie également les revêtement galoisiens cyclique d'ordre p, mais sans la restriction d'être du type $y^p = f(x)$. En général de tels revêtements sont décrit par les extensions d'**Artin-Scheier** et ont pour équation $y^y - y = f(x)$.

7. Un revêtement non tempéré (présence d'indices de ramification sauvage) se réduit en effet forcément mal : *explication à compléter, cela se déduit des articles de Raynaud (et peut-être est-ce en fait tout-à-fait évident)*

- [Wew03b] et [Wew03a] : le premier article étudie les revêtements de $\mathbb{P}^1_K$ avec un groupe de Galois du type $\mathbb{Z}/p \rtimes \mathbb{Z}/n$. Il repose sur la notion de revêtement auxiliaire utilisée par Raynaud dans [Ray99].
- [Obu10] : étudie le **groupe de monodromie sauvage** des revêtements galoisiens ramifiés c'est-à-dire le p-sous groupe de Sylow de $\mathrm{Gal}(L/K)$ où L est le corps de définition minimal du modèle semi-stable du revêtement. Dans le cas des revêtements de $\mathbb{P}^1_K$ il démontre que ce groupe a un cardinal divisant p^{n-1} si le p-sous groupe de Sylow de $\mathrm{Aut}(Y/X)$ a pour cardinal p^n.
- [Obu16] : l'article de Obus s'inspire de [Wew03a] et de Henrio [Hen99] et généralise les résultats de [Ray99] à des groupes qui ont des p-Sylow cyclique (et plus seulement des p-Sylow d'ordre p ie un groupe d'ordre pa avec a premier à p). Mentionnons que Obus dit dans son introduction que dès qu'un des indices de ramification est divisible par p alors il y a mauvaise ramification : cela se tire des articles de Raynaud (cf note en bas de page plus haut), mais cela semble parfaitement évident pour Obus (why?).

6. ARTICLES SUR LES RELÈVEMENTS

Green et Matignon cherchent dans leur premier article [GM98] à relever des revêtements sur k en des revêtements sur $R = \mathrm{Witt}(k)$.[8] Leur deuxième article [GM99], consacré aux automorphismes des disques p-adique est lié à ce problème. Dans ce dernier article les auteurs considèrent la réduction semi-stable du disque p-adique marqué aux points fixes d'un groupe d'automorphismes, avec séparation des points fixes dans la fibre spéciale. Il procède à la même construction que Zapponi, les points marqués étant alors exactement les feuilles de l'arbre. Henrio, dans sa thèse [Hen99], va pousser plus loin l'étude et caractérise les revêtement relevables ie les réductions semi-stables possibles. Il définit pour les besoins de l'exposé la notion d'**Arbre de Hurwitz**, qui formalise des conditions déterminées dans [GM99]. C'est cette branche du problème qui connait récemment le plus de développement. Voir par exemple l'article [Dan21] qui pousse plus loin l'étude de Henrio, ainsi que les références présentes dans son article. L'article de Dang étudie les arbres de Hurwitz relevables (à voir la différence avec Henrio...). C'est un article qui fait entre autre de la réduction de revêtement. En page 11 on peut voir la fibre spéciale d'un modèle semi-stable comme faite dans [Zap04]. Il fait ensuite des réductions de revêtements en utilisant les arbres de Hurwitz, qui sont les arbres de la fibre spéciale avec des informations ajoutées. Ces informations sont assez compliquées, avec entre autres au-moins l'épaisseur des éclatements.

RÉFÉRENCES

[Abh57] Shreeram ABHYANKAR. « Coverings of Algebraic Curves ». In : *American Journal of Mathematics* 79.4 (1957), p. 825-856. ISSN : 00029327, 10806377. URL : `http://www.jstor.org/stable/2372438` (visité le 12/08/2023).

[Bec89] Sybilla BECKMANN. « Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves ». In : *Journal of Algebra* 125.1 (1989), p. 236-255. ISSN : 0021-8693. DOI : `https://doi.org/10.1016/0021-8693(89)90303-7`. URL : `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021869389903037`.

[BLR00] BOST, LOESER et RAYNAUD, éd. *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique*. Birhäuser Basel, 2000.

8. Les **vecteurs de Witt** permettent de retrouver R à partir de son corps résiduel k, par exemple $\mathrm{Witt}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$ et avec $q = p^n$, $\mathrm{Witt}(\mathbb{F}_q) = \mathcal{O}_K$ les entiers de l'unique extension non ramififée de degré n de $\mathbb{Q}_p$. Ils donnent donc l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ dont k est le corps résiduel.

[BW00] Irene I. BOUW et Stefan WEWERS. *Reduction of covers and Hurwitz spaces.* 2000. arXiv : `math/0005120 [math.AG]`.

[CH85] Kevin COOMBES et David HARBATER. « Hurwitz families and arithmetic Galois groups ». In : *Duke Mathematical Journal* 52.4 (1985), p. 821-839. DOI : `10.1215/S0012-7094-85-05243-3`. URL : `https://doi.org/10.1215/S0012-7094-85-05243-3`.

[Dan21] Huy DANG. *Hurwitz trees and deformations of Artin-Schreier covers.* 2021. arXiv : `2002.03719 [math.AG]`.

[DM69] P. DELIGNE et D. MUMFORD. « The irreducibility of the space of curves of given genus ». In : *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 36.1 (jan. 1969), p. 75-109. ISSN : 1618-1913. DOI : `10.1007/BF02684599`. URL : `https://doi.org/10.1007/BF02684599`.

[Ful69] William FULTON. « Hurwitz Schemes and Irreducibility of Moduli of Algebraic Curves ». In : *Annals of Mathematics* 90.3 (1969), p. 542-575. ISSN : 0003486X. URL : `http://www.jstor.org/stable/1970748` (visité le 12/08/2023).

[GM98] Barry GREEN et Michel MATIGNON. « Liftings of Galois Covers of Smooth Curves ». In : *Compositio Mathematica* 113.3 (sept. 1998), p. 237-272. ISSN : 1570-5846. DOI : `10.1023/A:1000455506835`. URL : `https://doi.org/10.1023/A:1000455506835`.

[GM99] Barry GREEN et Michel MATIGNON. « Order p-Automorphisms of the Open Disc of A p-Adic Field ». In : *Journal of the American Mathematical Society* 12.1 (1999), p. 269-303. ISSN : 08940347, 10886834. URL : `http://www.jstor.org/stable/2646236` (visité le 18/08/2023).

[Har94] David HARBATER. « Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves ». In : *Inventiones mathematicae* 117.1 (déc. 1994), p. 1-25. ISSN : 1432-1297. DOI : `10.1007/BF01232232`. URL : `https://doi.org/10.1007/BF01232232`.

[Hen99] Yannick HENRIO. « Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels ». Theses. Université Bordeaux 1, déc. 1999. URL : `https://theses.hal.science/tel-03547236`.

[Knu83] Finn F. KNUDSEN. « THE PROJECTIVITY OF THE MODULI SPACE OF STABLE CURVES, II: THE STACKS M g,n ». In : *Mathematica Scandinavica* 52.2 (1983), p. 161-199. ISSN : 00255521, 19031807. URL : `http://www.jstor.org/stable/24491475` (visité le 12/08/2023).

[Leh01] Claus LEHR. « Reduction of p-cyclic covers of the projective line ». In : *manuscripta mathematica* 106.2 (oct. 2001), p. 151-175. ISSN : 1432-1785. DOI : `10.1007/s002290100190`. URL : `https://doi.org/10.1007/s002290100190`.

[Obu10] Andrew OBUS. *Vanishing Cycles and Wild Monodromy.* 2010. arXiv : `0910.0676 [math.AG]`.

[Obu16] Andrew OBUS. *Good reduction of three-point Galois covers.* 2016. arXiv : `1208.3909 [math.AG]`.

[Ray07] Michel RAYNAUD. « p-groupes et réduction semi-stable des courbes ». In : *The Grothendieck Festschrift: A Collection of Articles Written in Honor of the 60th Birthday of Alexander Grothendieck.* Sous la dir. de Pierre CARTIER et al. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 2007, p. 179-197. ISBN : 978-0-8176-4576-2. DOI : `10.1007/978-0-8176-4576-2_7`. URL : `https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4576-2_7`.

[Ray94] M. RAYNAUD. « Revêtements de la droite affine en caractéristique p>0 et conjecture d'Abhyankar. » In : *Inventiones mathematicae* 116.1-3 (1994), p. 425-462. URL : `http://eudml.org/doc/144195`.

[Ray99] Michel RAYNAUD. « Spécialisation des revêtements en caractéristique $p > 0$ ». fr. In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 4e série, 32.1

(1999), p. 87-126. DOI : `10.1016/s0012-9593(99)80010-x`. URL : `http://www.numdam.org/articles/10.1016/s0012-9593(99)80010-x/`.

[RG04] Michèle RAYNAUD et Alexandre GROTHENDIECK. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. 2004. arXiv : `math/0206203 [math.AG]`.

[Rom13] Matthieu ROMAGNY. « Models of Curves ». In : *Arithmetic and Geometry Around Galois Theory*. Sous la dir. de Pierre DÈBES et al. Basel : Springer Basel, 2013, p. 149-170. ISBN : 978-3-0348-0487-5.

[RW06] Matthieu ROMAGNY et Stefan WEWERS. *Espaces de Hurwitz*. 2006.

[Sai01] Mohamed SAIDI. *Galois covers of degree p: semi-stable reduction and Galois action*. 2001. arXiv : `math/0106249 [math.AG]`.

[Ser92] SERRE. « Revêtements de courbes algébriques ». fr. In : *Séminaire Bourbaki : volume 1991/92, exposés 745-759*. Astérisque 206. talk:749. Société mathématique de France, 1992. URL : `http://www.numdam.org/item/SB_1991-1992__34__167_0/`.

[Wew03a] Stefan WEWERS. « Reduction and lifting of special metacyclic covers ». en. In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* Ser. 4, 36.1 (2003), p. 113-138. DOI : `10.1016/S0012-9593(03)00004-1`. URL : `http://www.numdam.org/articles/10.1016/S0012-9593(03)00004-1/`.

[Wew03b] Stefan WEWERS. *Three point covers with bad reduction*. 2003. arXiv : `math/0205026 [math.AG]`.

[Zap04] Leonardo ZAPPONI. « Specialization of polynomial covers of prime degree ». In : *Pacific Journal of Mathematics* 214.1 (2004), p. 161-183.

Email address: `gabriel.soranzo@u-pec.fr`