Resums complets

Víctor Ballester

Juliol 2020

Contents

Part I
Mathematics

First year

1 Àlgebra lineal

1.1 | Matrius

Definition 1.1. Direm que una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és invertible si existeix una matriu $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que compleix $AB = BA = I_n$.

Lemma 1.2. El producte de matrius invertibles és invertible.

Theorem 1.3 (Teorema de Gauß). Donada una matriu qualsevol $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, existeix una matriu invertible $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tal que $A' = PA$ és esglaonada i reduïda. A més, A' està únicament determinada per A.

Theorem 1.4 (Teorema de la P-A-Q reducció). Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, existeixen matrius invertibles $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ i $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tals que

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

El nombre r és el rang de les matrius PAQ i A.

Proposition 1.5. $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tenim que $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^t$.

Theorem 1.6 (Teorema de Rouché). Donat un sistema d'equacions lineals $Ax = b$ amb n incògnites, el sistema és:

- Compatible determinat $\iff$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid b) = n$.
- Compatible indeterminat amb s variables lliures $\iff$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid b) = n - s$.
- Incompatible $\iff$ $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}(A \mid b)$.

Definition 1.7. Un determinant és una aplicació $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que compleixi:

1. L'aplicació ha de ser lineal en cada fila i columna. És a dir, si $a_1, \dots, a_n$ són les columnes d'una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i $a_j = \lambda u + \mu v$, aleshores:

$$\begin{aligned} \det A = \det([a_1|\cdots|a_j|\cdots|a_n]) &= \\ = \det([a_1|\cdots|\lambda u + \mu v|\cdots|a_n]) &= \\ = \lambda \det([a_1|\cdots|u|\cdots|a_n]) &+ \\ + \mu \det([a_1|\cdots|v|\cdots|a_n]) \end{aligned}$$

2. El determinant canvia de signe si s'intercanvien dues columnes.
3. $\det I_n = 1$.

Proposition 1.8. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A no és invertible $\iff$ $\operatorname{rang} A < n$ $\iff$ $\det A = 0$.

Theorem 1.9. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tenim que $\det(AB) = \det A \det B$.

Proposition 1.10. Denotem S_n el grup de permutacions de $\{1, \dots, n\}$ i sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Llavors:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

Proposition 1.11. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tenim que $\det A = \det A^t$.

Theorem 1.12. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es compleix $A(\text{adj } A)^t = (\det A) I_n$ i si $\det A \neq 0$ aleshores,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t$$

1.2 | Espais vectorials

Definition 1.13. Sigui E un K-espai vectorial i F un subconjunt de E, llavors $(F, +_E, \cdot_E)$ és un K-espai vectorial si es verifica $\lambda v_1 + \mu v_2 \in F$ $\forall v_1, v_2 \in F$ i $\forall \lambda, \mu \in K$.

Lemma 1.14. La intersecció de subespais vectorials és un subespai vectorial.

Definition 1.15. Donat un K-espai vectorial E, una base de E és un conjunt ordenat B de vectors de E que és:

1. Sistema de generadors de E.
2. Linealment independent.

Theorem 1.16 (Teorema de Steinitz). Donat un K-espai vectorial E, B una base de E i $(v_1, \dots, v_k)$ vectors linealment independents de E, aleshores podem substituir k vectors apropiats de B per $(v_1, \dots, v_k)$ i definir una nova base.

Definition 1.17. La suma de dos subespais F, G dins d'un K-espai vectorial E és: $F + G = \langle F \cup G \rangle = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$.

Proposition 1.18 (Fórmula de Graßmann). $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.

Definition 1.19. Sigui E un K-espai vectorial i siguin $F, G \subset E$ dos subespais vectorials. Llavors la suma $F + G$ és directe $(F \oplus G)$ $\iff$ $F \cap G = \{0\}$.

Definition 1.20. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un menor d'ordre r de A és una submatriu $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ obtinguda seleccionant r files i r columnes de A.

Definition 1.21. Sigui E un K-espai vectorial i $F \subset E$ un subespai vectorial. Anomenarem subespai complementari de F a tot subespai $G \subset E$ que compleixi $F \oplus G = E$.

Definition 1.22. Direm que dos vectors $u, v \in E$ són equivalents mòdul F (on $F \subset E$ un subespai vectorial) si $u - v \in F$ i escriurem $u \sim_F v$. $\sim_F$ és una relació d'equivalència.

Definition 1.23. L'espai quocient E/F és el conjunt de les classes d'equivalència $u + F = [u]$ amb les operacions:

$$[u] + [v] = [u + v] \qquad a[u] = [au]$$

E/F és un K-espai vectorial.

Proposition 1.24. Sigui E un K-espai vectorial de dimensió $n < \infty$ i $F \subset E$ un subespai vectorial, llavors $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$.

1.3 | Aplicacions lineals

Definition 1.25. Sigui E, F dos K-espais vectorials. Una aplicació $f : E \to F$ és lineal si es compleix $f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in E$ i $\forall \lambda, \mu \in K$.

Proposition 1.26. Si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, llavors la composició $g \circ f : E \to G$ és lineal.

Proposition 1.27. Si $f : E \to F$ és una aplicació lineal, llavors $f^{-1} : F \to E$ és lineal.

Proposition 1.28. Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal entre K-espais vectorials i siguin $G \subset E$ i $H \subset F$ subespais vectorials. Aleshores:

1. $f(G) = \{f(u) \mid u \in G\} \subset F$ és un subespai vectorial.
2. $f^{-1}(H) = \{u \in E \mid f(u) \in H\} \subset E$ és un subespai vectorial.

Si $G = E$ i $H = \{0\}$, aleshores:

1. $f(E)$ és la imatge de f i es denota Im f.
2. $f^{-1}(0)$ és el nucli de f i es denota Ker f.

Proposition 1.29. Si E, F són K-espais vectorials de dimensió finita i $f : E \to F$, aleshores f és injectiva $\iff \dim(\text{Ker } f) = 0$ i f és exhaustiva $\iff \dim(\text{Im } f) = \dim F$.

Definition 1.30.

1. Un monomorfisme és una aplicació lineal injectiva.
2. Un epimorfisme és una aplicació lineal exhaustiva.
3. Un isomorfisme és una aplicació lineal bijectiva.
4. Un endomorfisme és una aplicació lineal d'un espai vectorial en ell mateix.
5. Un automorfisme és un endomorfisme bijectiu.

Lemma 1.31. Donada $f : E \to F$ una aplicació lineal, on E, F són K-espais vectorials, i $u_1, \ldots, u_k \in E$ es compleix $\langle f(u_1), \ldots, f(u_k) \rangle = f(\langle u_1, \ldots, u_k \rangle)$.

Theorem 1.32 (Isomorfisme de coordenació). Sigui E un K-espai vectorial de dimensió n i $B = (u_1, \ldots, u_n)$ una base de E. Llavors l'aplicació $f : K^n \to E$, $f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 u_1 + \cdots a_n u_n$ és un isomorfisme.

Theorem 1.33 (Teorema de l'isomorfisme). Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Existeix un isomorfisme $\tilde{f} : E/\text{Ker } f \to \text{Im } f$ complint $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi$ on $\pi : E \to E/\text{Ker } f$ i $i : \text{Im } f \to F$.

Corollary 1.34. Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal i suposem que $\dim E = n < \infty$. Llavors $n = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$.

Corollary 1.35. Siguin E, F dos K-espais vectorials de dimensió $n < \infty$ i $f : E \to F$ una aplicació lineal. Llavors f és injectiva $\iff$ f és exhaustiva $\iff$ f és bijectiva.

Theorem 1.36 (Teoremes d'Emmy Noether). Sigui E un K-espai vectorial, $F, G \subset E$ dos subespais:

1. Existeix un isomorfisme $F/(F \cap G) \cong (F + G)/G$.
2. Si $G \subset F \subset E$, existeix un isomorfisme $(E/G)/(F/G) \cong E/F$.

Theorem 1.37. Siguin E, F dos K-espais vectorials i siguin $B = (u_1, \ldots, u_n)$ una base de E i $v_1, \ldots, v_n \in F$ vectors qualssevol. Llavors existeix una única aplicació lineal $f : E \to F$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Proposition 1.38. Siguin $f : E \to F$ i $g : F \to G$ dues aplicacions lineals entre K-espais vectorials i siguin B, B', B'' bases de E, F i G respectivament. Llavors $g \circ f : E \to G$ té matriu $[g \circ f]_{B,B''} = [g]_{B',B''}[f]_{B,B'}$ en les bases B, B''.

Corollary 1.39. Les matrius de canvi de base són invertibles i $[id]_{B,B'}^{-1} = [id]_{B',B}$.

Proposition 1.40. Donada $f : E \to F$ una aplicació lineal i bases B_1, B_2 de E i B'_1, B'_2 de F es compleix: $[f]_{B_2,B'_2} = [id]_{B'_1,B'_2}[f]_{B_1,B'_1}[id]_{B_2,B_1}$.

Theorem 1.41. Donada qualsevol aplicació lineal $f : E \to F$ on $\dim E = n, \dim F = m$. Existeixen bases B_0 de E i B'_0 de F en les quals $[f]_{B_0,B'_0} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ on $r = \dim \text{Im } f$ i $[f]_{B_0,B'_0} = [id]_{B',B'_0}[f]_{B,B'}[id]_{B_0,B}$ $\forall B, B'$ base de E i F respectivament.

Lemma 1.42. Donats dos K espais vectorials E, F el conjunt $\mathcal{L}(E, F) = \{f \mid f$ és una aplicació lineal de E a $F\}$ és un K-espai vectorial i es compleix que $(\lambda f + \mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v)$ $\forall f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ i $\lambda, \mu \in K$.

Proposition 1.43. Siguin E, F dos K-espais vectorials amb $\dim E = n < \infty$, $\dim F = m < \infty$. Per a tota base B de E i B' de F, l'aplicació $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ definida per $\varphi(f) = [f]_{B,B'}$ és un isomorfisme.

Corollary 1.44. Si $\dim E = n$ i $\dim F = m$ aleshores $\dim \mathcal{L}(E, F) = mn$.

Definition 1.45. L'espai dual d'un K-espai vectorial és $\mathcal{L}(E, K) = E^*$. En el cas $\dim E = n < \infty$, escollir una base B determina un isomorfisme $\varphi : E^* \to \mathcal{M}_{1 \times n}(K)$, definit per $\varphi(\omega) = [\omega]_{B,B'}$. Deduïm, doncs, que $\dim E^* = \dim E$.

Definition 1.46. Donats E un K-espai vectorial de dimensió finita i $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de E. La base dual de B és la base de E^* formada per $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ on $\eta_i(u_j) = \delta_{ij}$.

Lemma 1.47. Sigui E un K-espai vectorial de dimensió $n < \infty$ i sigui $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de E. $\forall u \in E$, $(u_1^*(u), \dots, u_n^*(u)) = [u]_B \in K^n$ on $(u_1^*, \dots, u_n^*)$ és la base dual de B.

Lemma 1.48. Sigui E un K-espai vectorial de dimensió $n < \infty$ i sigui $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de E. $\forall \omega \in E^*$, $(\omega(u_1), \dots, \omega(u)) = [\omega]_{B^*}$.

Definition 1.49. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ l'aplicació $f^* : F^* \to E^*$ definida per $f^*(\omega) = \omega \circ f$ s'anomena aplicació dual de f. Aquesta aplicació és lineal.

Theorem 1.50. Siguin E, F dos K-espais vectorials de dimensió finita i siguin B, B' bases de E, F respectivament. Llavors $[f^*]_{B'^*, B^*} = ([f]_{B,B'})^t$.

Definition 1.51. Donat un K-espai vectorial E, el bidual és el K-espai vectorial definit per $(E^*)^* = \mathcal{L}(E^*, K)$. A més, si $\dim E = n < \infty$, l'aplicació $f : E \to (E^*)^*$ definida per $f(v) = \phi_v$ ($\phi_v : E^* \to K$, $\phi_v(\omega) = \omega(v)$) és un isomorfisme natural.

Definition 1.52. Sigui E un K-espai vectorial i F un subespai vectorial de E^*. El subespai de E incident de F és $F^{inc} = \{v \in E \mid \omega(v) = 0 \ \forall \omega \in F\}$.

Theorem 1.53. Sigui E un K-espai vectorial de dimensió $n < \infty$ i $F \subset E^*$ un subespai amb $\dim F = m$. Llavors $\dim F^{inc} = n - m$.

Definition 1.54. Donat un subespai vectorial i $F \subset E$, el seu subespai incident és $F^{inc} = \{\omega \in E^* \mid \omega(v) = 0 \ \forall v \in F\}$.

Proposition 1.55. $(F^{inc})^{inc} = F$ tant si $F \subset E$ com si $F \subset E^*$.

1.4 | Classificació d'endomorfismes

Definition 1.56. Dues matrius $M, N \in \mathcal{M}_n(K)$ s'anomenen similars si existeix $P \in \mathcal{M}_n(K)$ invertible tal que $M = P^{-1}NP$.

Proposition 1.57. Donats $f, g \in \mathcal{L}(E)$ on E és un K espai vectorial de dimensió $n < \infty$:

1. f i g són similars $\iff$ $\forall B$ base de E les matrius $[f]_B$ i $[g]_B$ són similars.
2. f i g són similars $\iff$ $\exists h$ automorfisme tal que $g = h^{-1}fh$.

Definition 1.58. Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(K)$ és diagonalitzable si és similar a una matriu diagonal. Un endomorfisme és diagonalitzable si la seva matriu en alguna base és diagonalitzable.

Definition 1.59. Donat $f \in \mathcal{L}(E)$ diem que un vector $u \in E$, $u \neq 0$ és vector propi de f de valor propi λ si $f(u) = \lambda u$.

Lemma 1.60. Donats $f \in \mathcal{L}(E)$ i $\lambda \in K$, els vectors propis de f de valor propi λ són els vectors no nuls del subespai $Ker(f - \lambda id)$ (subespai propi de valor propi λ).

Definition 1.61. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_n(K)$, el polinomi $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ s'anomena polinomi característic de A.

Proposition 1.62. Donat $f \in \mathcal{L}(E)$, vectors propis de f de valors propis diferents són linealment independents.

Proposition 1.63. Sigui E un K-espai vectorial de dimensió $n < \infty$ i sigui λ una arrel del polinomi característic $p_f(x)$ de multiplicitat m. Llavors $1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda id)) \leq m$.

Theorem 1.64 (Teorema de diagonalització). Sigui $f \in \mathcal{L}(E)$, f és diagonalitzable si i només si:

1. $p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ amb $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ diferents.
2. $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda_i id)) = m_i$.

Corollary 1.65. Si $n = \dim E$ i f té n valors propis diferents, f és diagonalitzable.

Definition 1.66. El polinomi mínim de f és un polinomi $P \in K[x]$ tal que:

- $P(f) = 0$.
- P és mònic.
- P és de grau mínim.

Theorem 1.67 (Teorema de Cayley-Hamilton). Sigui K un cos, $n \geq 1$ i $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Llavors $m_A(x) \mid p_A(x) \mid m_A(x)^n$. Sigui K un cos i $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim_K E = n$. Llavors $m_f(x) \mid p_f(x) \mid m_f(x)^n$.

Definition 1.68. Un cos satisfent que tot polinomi de grau ≥ 1 factoritzi completament en factors lineals s'anomena algebraicament tancat.

Definition 1.69. Donat $f \in \mathcal{L}(E)$ diem que $W \subseteq E$ és un subespai invariant de E per f si $f(W) \subseteq W$.

Lemma 1.70. Donat $f \in \mathcal{L}(E)$ si $E = W_1 \oplus W_2$ amb W_1, W_2 subespais invariants, aleshores $p_f(x) = p_{f|W_1}(x)p_{f|W_2}(x)$ i $m_f(x) = \mathrm{mcm}(m_{f|W_1}(x), m_{f|W_2}(x))$.

Theorem 1.71. Sigui $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n < \infty$. Si $p_f(x) = q_1(x)^{n_1} \cdots q_r(x)^{n_r}$ i $m_f(x) = q_1(x)^{m_1} \cdots q_r(x)^{m_r}$ amb $q_i(x)$ factors irreductibles diferents. Aleshores $E = \mathrm{Ker}(q_1(f)^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(q_r(f)^{m_r})$. A més $\mathrm{Ker}(q_i(f)^{m_i}) = n_i \mathrm{deg}(q_i(x))$.

Theorem 1.72. Si $p_f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$ i g compleix:

1. $p_f(x) = p_g(x)$
2. $m_f(x) = m_g(x)$
3. $\dim(\mathrm{Ker}((f - \lambda id)^r)) = \dim(\mathrm{Ker}((g - \lambda id)^r)) \ \forall \lambda \in K$ $\forall r \geq 1$,

llavors $f \sim g$.

Proposition 1.73. Donats E un K-espai vectorial de dimensió $n < \infty$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $p_A(x) = \pm(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$, existeix una matriu invertible P complint:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_e \end{pmatrix}$$

on $J_1, \ldots, J_e$ són blocs de Jordan de valors propis $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ complint:

1. Per a cada λ_i la suma de les mides dels blocs de Jordan de valor propi λ_i és n_i.

2. Les mides dels blocs de Jordan estan determinades per $\dim(\mathrm{Ker}((f-\lambda id)^r))$.

1.5 | Formes bilineals simètriques

Definition 1.74. Siguin K un cos i E, F, G tres K-espais vectorials. Diem que una aplicació $\varphi : E \times F \to G$ és bilineal si:

1. $\varphi(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda\varphi(u_1, v) + \mu\varphi(u_2, v)$ $\forall u_1, u_2 \in E$, $\forall v \in F$ i $\forall \lambda, \mu \in K$.

2. $\varphi(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda\varphi(u, v_1) + \mu\varphi(u, v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in F$, $\forall u \in E$ i $\forall \lambda, \mu \in K$.

Definition 1.75. Una forma bilineal sobre el K-espai vectorial E és una aplicació lineal $\varphi : E \times E \to K$.

Definition 1.76. Una forma bilineal $\varphi : E \times E \to K$ és simètrica si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ $\forall u, v \in E$.

Definition 1.77. Sigui $\varphi : E \times E \to K$ una forma bilineal i sigui $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de E. La matriu de la forma bilineal φ respecte de la base B és la matriu:

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) & \varphi(v_1, v_2) & \cdots & \varphi(v_1, v_n) \\ \varphi(v_2, v_1) & \varphi(v_2, v_2) & \cdots & \varphi(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(v_n, v_1) & \varphi(v_n, v_2) & \cdots & \varphi(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.78. Sigui $B = (u_1, \ldots, u_n)$ una base de E. Una forma bilineal φ sobre E és simètrica si, i només si, $[\varphi]_B$ és una matriu simètrica.

Proposition 1.79. Sigui $\varphi : E \times E \to K$ una forma bilineal. Siguin B, B' bases de E. Aleshores es compleix $[\varphi]_{B'} = ([id]_{B',B})^t[\varphi]_B[id]_{B',B}$.

Definition 1.80. Sigui $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Es diu que $u, v \in E$ són ortogonals si $\varphi(u, v) = 0$. Un vector no nul $v \in E$ és isòtrop si és ortogonal a ell mateix, és a dir, si $\varphi(v, v) = 0$. Sigui $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de E. Es diu que B és una base ortogonal respecte de φ si $\varphi(v_i, v_j) = 0$ $\forall i \neq j$.

Theorem 1.81. Sigui $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Llavors E té una base ortogonal respecte de φ.

Definition 1.82. Sigui φ una forma bilineal simètrica sobre E. Sigui W un subespai vectorial de E. Definim l'ortogonal de W respecte de φ per

$$W^\perp = \{u \in E \mid \varphi(u, \omega) = 0\ \forall \omega \in W\}$$

Definim el radical de φ per

$$\mathrm{rad}\ \varphi = E^\perp$$

Direm que φ és no singular si $\mathrm{rad}(\varphi) = \{0\}$.

Definition 1.83. Sigui φ una forma bilineal simètrica no singular sobre E. Donat un $u \in E$ definim $\varphi_u : E \to \mathbb{R}$, $\varphi_u(v) = \varphi(u, v)$. Llavors l'aplicació

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to E^* \\ u &\mapsto \varphi_u \end{aligned}$$

és un isomorfisme.

Definition 1.84. Sigui φ una forma bilineal simètrica no singular sobre E. Sigui W un subespai vectorial de E. Llavors:

1. $\dim E = \dim W + \dim W^\perp$.
2. $(W^\perp)^\perp = W$.
3. Si la restricció de φ sobre W és no singular, llavors $E = W \oplus W^\perp$.

Definition 1.85. Sigui φ una forma bilineal simètrica sobre E. Direm que la suma $W_1 + W_2$ de dos subespais vectorials W_1 i W_2 de E és una suma ortogonal si és directa i $\varphi(u, v) = 0$ $\forall u \in W_1$ i $v \in W_2$. Escriurem $W_1 \perp W_2$ per denotar que la suma $W_1 + W_2$ és ortogonal.

Definition 1.86. Sigui φ una forma bilineal simètrica sobre E. Siguin W_1 i W_2 dos subespais vectorials de E tals que $E = W_1 \perp W_2$. Llavors per a cada vector $v \in E$ existeixen $v_1 \in W_1$ i $v_2 \in W_2$ únics tals que $v = v_1 + v_2$. L'aplicació $\pi : E \to W_i$ definida per $\pi(v) = v_i$ amb $v_i \in W_i$ es diu que és la projecció ortogonal de E sobre W_i segons la descomposició $E = W_1 \perp W_2$.

Definition 1.87. Una geometria ortogonal sobre $\mathbb{R}$ és un parell (E, φ), on E és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i φ és una forma bilineal simètrica sobre E.

Definition 1.88. Siguin (E_1, φ_1) i (E_2, φ_2) dues geometries ortogonals sobre $\mathbb{R}$. Una isometria de (E_1, φ_1) a (E_2, φ_2) és un isomorfisme $f : E_1 \to E_2$ tal que

$$\varphi_2(f(u), f(v)) = \varphi_1(u, v)$$

per a tot $u, v \in E_1$. Direm que (E_1, φ_1) i (E_2, φ_2) són isomètriques si existeix una isometria de (E_1, φ_1) a (E_2, φ_2).

Definition 1.89. Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Direm que dues formes bilineals simètriques φ_1, φ_2 sobre E són equivalents si, i només si, (E, φ_1) i (E, φ_2) són isomètriques.

Definition 1.90. Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Direm que A i B són congruents si existeix una matriu $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible tal que $A = P^tBP$.

Proposition 1.91. Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió $n < \infty$ i φ_1, φ_2 formes bilineals simètriques sobre E. Sigui B_1 una base de V. Llavors les condicions següents són equivalents:

1. Les geometries ortogonals (E, φ_1) i (E, φ_2) φ i ψ són isomètriques.
2. Existeix una bases B_2 de E tal que $[\varphi_1]_{B_1} = [\varphi_2]_{B_2}$.
3. Les matrius $[\varphi_1]_{B_1}$ i $[\varphi_2]_{B_2}$ són congruents.

Theorem 1.92 (Teorema de Sylvester o Llei d'inèrcia). Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió $n < \infty$. Sigui φ una forma bilineal simètrica sobre E. Llavors existeix una base B de E tal que

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & \text{\Large 0} & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & \text{\Large 0} & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

on a la diagonal hi ha r_0 $0's$, r_+ $1's$ i r_- $-1's$ i r, r_+, r_- no depenen de la base B.

Definition 1.93. Sigui φ una forma bilineal simètrica sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial E de dimensió $n < \infty$. Sigui B una base ortogonal de E respecte de φ. Definim el rang de φ com $\operatorname{rang}(\varphi) = \operatorname{rang}([\varphi]_B)$. Definim la signatura de φ com $\operatorname{sig}(\varphi) = (r_+, r_-)$, on r_+ és el nombre de reals positius que hi ha a la diagonal de $[\varphi]_B$ i r_- és el nombre de reals negatius que hi ha a la diagonal de $[\varphi]_B$.

Theorem 1.94. Siguin (E_1, φ_1), (E_2, φ_2) dues geometries ortogonals sobre $\mathbb{R}$ de dimensió finita. Llavors (E_1, φ_1) i (E_2, φ_2) són isomètriques si, i només si, $\dim E_1 = \dim E_2$ i $\operatorname{sig}(\varphi_1) = \operatorname{sig}(\varphi_2)$.

Definition 1.95. Sigui φ una forma bilineal simètrica sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial E. Es diu que φ és definida positiva si $\forall v \in E$, $v \neq 0$, tenim $\varphi(v, v) > 0$. Es diu que φ és definida negativa si $\forall v \in E$, $v \neq 0$, tenim $\varphi(v, v) < 0$.

Definition 1.96. Un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial E és una forma bilineal simètrica definida positiva sobre E. Un espai vectorial euclidià és un parell (E, φ), on E és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i φ és un producte escalar sobre E.

Theorem 1.97 (Desigualtat de Cauchy-Schwartz). Sigui φ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial E, llavors:

$$\varphi(u, v)^2 \leq \varphi(u, u)\varphi(v, v) \quad \forall u, v \in E$$

Definition 1.98. Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Una norma sobre E és una aplicació

$$\begin{aligned} \| \ \| : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\| \end{aligned}$$

tal que

1. $\|u\| = 0 \iff u = 0$.
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, $\forall u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in E$.

Proposition 1.99. Sigui (E, φ) un espai euclidià. Llavors l'aplicació

$$\begin{aligned} \| \ \|_\varphi : E &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\|_\varphi = \sqrt{\varphi(u, u)} \end{aligned}$$

és una norma, que es diu norma associada al producte escalar φ.

Definition 1.100. Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià de dimensió finita. Diem que una base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ és ortonormal respecte de φ si és ortogonal respecte de φ i $\|v_i\|_\varphi = 1$ per a $i = 1, \ldots, n$.

Corollary 1.101. Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià de dimensió finita. Llavors E té una base ortonormal respecte φ.

Definition 1.102. Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià. Siguin $u, v \in E \setminus \{0\}$. Definim l'angle respecte φ entre u i v com l'únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos \alpha = \frac{\varphi(u, v)}{\|u\|_\varphi \|v\|_\varphi}$$

Definition 1.103. Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià. Sigui $f \in \mathcal{L}(E)$. Definim l'adjunt de f respecte de φ com l'únic endomorfisme f' de E tal que $\varphi(f(u), v) = \varphi(u, f'(v))$ $\forall u, v \in E$. Si $f = f'$ diem que f és autoadjunt.

Lemma 1.104. Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià de dimensió $n < \infty$. Sigui f un endomorfisme autoadut de E. Llavors existeixen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que

$$p_f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

Definition 1.105. Sigui $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Aleshores A és ortogonal si, i només si, $PP^t = P^tP = I_n$.

Theorem 1.106 (Teorema espectral). Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià de dimensió $n < \infty$. Sigui $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjunt de E. Llavors E té una base ortonormal de vectors propis de f. En particular, l'endomorfisme f diagonalitza.

Corollary 1.107. Tota matriu simètrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és diagonalitzable.

Definition 1.108. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ denotem per $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ la conjugada de A. $\forall A_1, A_2, A, B$ matrius de mides adequades i $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ es satisfan les següents propietats:

1. $\overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1} + \overline{A_2}$
2. $\overline{AB} = \overline{AB}$
3. $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda A}$

Theorem 1.109 (Regla dels signes de Descartes). Donat un polinomi $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0$:

1. El nombre d'arrels positives de $P(x)$ és com a molt igual al nombre de canvis de signe en $[a_d, a_{d-1}, \ldots, a_1, a_0]$.
2. SI $P(x) = a_d(x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}$, aleshores el nombre d'arrels positives és igual al nombre de canvis de signe (comptant les arrels amb multiplicitat).

2 Fonaments de les matemàtiques

2.1 | Conjunts i aplicacions

Definition 2.1. Un conjunt és una col·lecció d'objectes units per una propietat comuna.

Definition 2.2. Sigui E un conjunt. Diem que un conjunt F és un subconjunt de E ($F \subseteq E$) si, i només si, tot element de F és element de E.

Definition 2.3 (Axioma d'extensionalitat). Siguin E, F dos conjunts. Diem que E i F són iguals si, i només si, $E \subseteq F$ i $F \subseteq E$.

Definition 2.4. Sigui E un conjunt. El subconjunt $\mathcal{P}(E)$ és el conjunt dels subconjunts de E (parts de E).

Definition 2.5. Siguin A, B dos conjunts. La intersecció de A i B ($A \cap B$) és el conjunt format pels elements comuns a A i B.

Definition 2.6. Siguin A, B dos conjunts. La unió de A i B ($A \cup B$) és el conjunt format pels elements de A i de B.

Definition 2.7. Sigui E un conjunt i $A \subseteq B$. El complementari de A en E és el conjunt $A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Proposition 2.8 (Lleis de Morgan). Sigui E un conjunt i siguin A, B dos subconjunts:

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Definition 2.9. Siguin A, B dos conjunts. El producte cartesià $A \times B$ és el conjunt $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ i } b \in B\}$.

Definition 2.10. Siguin E, F dos conjunts. Una aplicació de E en F és una regla que a cada element de E se li associa un únic element de F.

Definition 2.11. Sigui $f : E \to F$ una aplicació i $A \subseteq E$ un subconjunt. La imatge de A és el subconjunt de F definit per $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$. Si $A = E$, $f(E) = \mathrm{Im}(f)$ és la imatge de f.

Definition 2.12. Sigui $f : E \to F$ una aplicació i $b \in F$. Un antecedent de b és un element $a \in E$ tal que $f(a) = b$.

Definition 2.13. Sigui $f : E \to F$ una aplicació i $B \subseteq F$ un subconjunt. La preimatge de B és el subconjunt de E definit per $f^{-1}(B) = \{a \in E \mid f(a) = b, b \in B\}$.

Definition 2.14. Sigui $f : E \to F$ una aplicació. Les següents tres assercions són equivalents:

1. $\forall b \in F$, $f^{-1}(b)$ té com a màxim un element.
2. $\forall \alpha, \beta \in E$, si $\alpha \neq \beta$, llavors $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
3. $\forall \alpha, \beta \in E$, si $f(\alpha) = f(\beta)$, llavors $\alpha = \beta$.

Si f compleix una d'aquestes tres assercions, les compleix totes i diem que f és injectiva.

Proposition 2.15. Siguin $f : E \to F, g : F \to G$:

1. Si f i g són injectives, llavors $g \circ f$ també ho és.
2. Si $g \circ f$ és injectiva, llavors f també ho és.

Definition 2.16. Sigui $f : E \to F$ una aplicació. Les següents tres assercions són equivalents:

1. Tot element de F té almenys un antecedent de E per f.
2. $\forall y \in F$, $\exists \alpha \in E$ tal que $f(\alpha) = y$.
3. $\mathrm{Im}(f) = F$.

Si f compleix una d'aquestes tres assercions, les compleix totes i diem que f és exhaustiva.

Proposition 2.17. Siguin $f : E \to F, g : F \to G$:

1. Si f i g són exhaustives, llavors $g \circ f$ també ho és.
2. Si $g \circ f$ és exhaustiva, llavors g també ho és.

Definition 2.18. Sigui $f : E \to F$ una aplicació. Diem que f és bijectiva si és injectiva i exhaustiva. Les aplicacions bijectives tenen una aplicació inversa associada $f^{-1} : F \to E$.

2.2 | Grup simètric

Definition 2.19. Sigui $n \in \mathbb{N}$. Denotem per S_n el conjunt de les bijeccions de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en ell mateix. Un element de S_n és una permutació de $\{1, \ldots, n\}$.

Theorem 2.20. El cardinal de S_n és $n!$.

Definition 2.21. Sigui $f \in S_n$. El conjunt $E_f = \{m \in \mathbb{N}^* \mid f^m = \mathrm{id}\}$ té un element minimal $o(f)$. L'enter $o(f)$ és l'ordre de f.

Definition 2.22. Sigui $f \in S_n$. El suport de f és $\sup(f) = \{k \in \{1, \ldots, n\} \mid f(k) \neq k\}$.

Lemma 2.23. Sigui $f \in S_n$, llavors:

1. $p \in \sup(f) \implies f(p) \in \sup(f)$.
2. $\sup(f) = \sup(f^{-1})$.

Lemma 2.24. Siguin $f, g \in S_n$. Si $\sup(f) \cap \sup(g) = \emptyset$, llavors $f \circ g = g \circ f$.

Definition 2.25. Sigui $f \in S_n$ i $k \in \{1, \ldots, n\}$. L'òrbita de k és el conjunt finit $\{k, f(k), f^2(k), \ldots\}$.

Theorem 2.26 (Estructura de l'òrbita). Siguin $f \in S_n$ i $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ el conjunt de les òrbites de f. Llavors:

1. $\bigcup_{j=1}^{k} \omega_j = \{1, \ldots, n\}$.
2. Si $\omega_i, \omega_j \in \Omega$ i $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$, llavors $\omega_i = \omega_j$.
3. Cap òrbita és buida.

Theorem 2.27 (Estructura lineal de les òrbites). Sigui $f \in S_n$ i ω una de les seves òrbites. Sigui $a \in \{1, \dots, n\}$ un element de ω i sigui k el cardinal de ω. Llavors $\omega = \{a, f(a), \dots, f^{k-1}(a)\}$ i $f^k(a) = a$.

Definition 2.28. Si $f \in S_n$ té una única òrbita no reduïda a un element, llavors diem que f és un cicle de longitud el cardinal del cicle.

Theorem 2.29. Sigui $f \in S_n$, llavors f s'escriu de manera única, llevat de l'ordre, com a producte de cicles amb suports dos a dos disjunts.

Corollary 2.30. Sigui $f \in S_n$ i $f = \sigma_1 \cdots \sigma_l$ la seva descomposició en producte de cicles disjunts. Aleshores $o(f) = \text{mcm}(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$.

Corollary 2.31. Sigui $f \in S_n$, llavors f és producte de transposicions.

Definition 2.32. Sigui $\sigma \in S_n$. El signe de σ és $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-r}$ on r és el nombre d'òrbites de σ (incloent les trivials).

Theorem 2.33. Sigui $f \in S_n$ arbitrària i $\tau \in S_n$ una transposició. Llavors $\varepsilon(f\tau) = \varepsilon(f)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(f)$.

Corollary 2.34. Sigui $f \in S_n$ i $f = \tau_1 \cdots \tau_l$ una escriptura de f com a producte de transposicions. Llavors $\varepsilon(f) = (-1)^l$.

Corollary 2.35. A les escriptures de f com a producte de transposicions, la paritat del nombre de transposicions no varia.

2.3 | Relacions d'equivalència i d'ordre

Definition 2.36. Sigui E un conjunt i $\sim_R$ una relació sobre E. Direm que $\sim_R$ és una relació d'equivalència si, i només si, es compleixen els següents axiomes:

1. La relació és reflexiva:
$$\forall a \in E,\ a \sim_R a.$$
2. La relació és simètrica:
$$\forall a, b \in E \text{ si } a \sim_R b, \text{ llavors } b \sim_R a.$$
3. La relació és transitiva:
$$\forall a, b, c \in E \text{ si } a \sim_R b \text{ i } b \sim_R c, \text{ llavors } a \sim_R c.$$

Definition 2.37. Sigui $(E, \sim_R)$ una relació d'equivalència i sigui $a \in E$. La classe d'equivalència de a és el subconjunt de E: $[a] = \{b \in E \mid a \sim_R b\}$.

Theorem 2.38. Sigui $(E, \sim_R)$ una relació d'equivalència. Les classes d'equivalència de E formen una partició de E. És a dir, siguin $\{\omega_i\}$ les classes d'equivalència, llavors:

1. $\bigcup_{i \in I} \omega_i = E$.
2. Si $i, j \in I$ i $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$, llavors $\omega_i = \omega_j$.
3. Si $i \in I \implies \omega_i \neq \emptyset$.

Definition 2.39. El conjunt de les classes d'equivalència de $(E, \sim_R)$ es denota $E/\sim_R$ i es diu conjunt quocient.

Definition 2.40. Sigui E un conjunt i $\leq$ una relació sobre E. Direm que $\leq$ és una relació d'ordre si, i només si, es compleixen els següents axiomes:

1. La relació és reflexiva:
$$\forall a \in E,\ a \leq a.$$
2. La relació és antisimètrica:
$$\forall a, b \in E \text{ si } a \leq b \text{ i } b \leq a, \text{ llavors } a = b.$$
3. La relació és transitiva:
$$\forall a, b, c \in E \text{ si } a \leq b \text{ i } b \leq c, \text{ llavors } a \leq c.$$

Definition 2.41. Sigui $(E, \leq)$ un conjunt ordenat. Direm que $a \in E$ és minimal (respectivament maximal) si, i només si, $\forall b \in E$ si $b \leq a$ (respectivament $b \geq a$), llavors $b = a$. Direm que $a \in E$ és un mínim (respectivament màxim) si, i només si, $\forall b \in E$, $a \leq b$ (respectivament $a \geq b$).

Lemma 2.42. Sigui $(E, \leq)$ un conjunt ordenat. Si $(E, \leq)$ admet un mínim, llavors aquest és únic.

Definition 2.43. Un conjunt està totalment ordenat si tot parell d'elements és comparable. Un conjunt ordenat està ben ordenat si tot subconjunt admet un element minimal.

Theorem 2.44. Tot conjunt pot ser ben ordenat.

2.4 | Cardinalitat i combinatòria

Definition 2.45. Siguin E, F dos conjunts. Direm que E i F tenen el mateix cardinal si, i només si, existeix una bijecció de $E \to F$.

Definition 2.46. Siguin E, F dos conjunts. Direm que $|E| \leq |F|$ si, i només si, existeix una aplicació injectiva $E \to F$.

Theorem 2.47 (Teorema de Cantor-Bernstein). Siguin E, F dos conjunts. Si existeix una injecció $E \to F$ i una injecció $F \to E$, llavors existeix una bijecció $E \to F$. La comparació de cardinals és una relació d'ordre.

Proposition 2.48. Càlcul de cardinals:
Siguin $A, B \subseteq E$ dos subconjunts finits.

1. Principi d'inclusió−exclusió: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. Producte cartesià: $|A \times B| = |A||B|$
3. $|A^c| + |A| = |E|$
4. $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Theorem 2.49 (Teorema de Cantor). Sigui E un conjunt, llavors $|\mathcal{P}(E)| > |E|$.

Proposition 2.50. Siguin E, F dos conjunts finits. El conjunt de les aplicacions $E \to F$ té cardinal $|F|^{|E|}$.

Definition 2.51. Sigui E un conjunt i $A \in \mathcal{P}(E)$. Definim la funció característica de A com:

$$\chi_A : E \to \{0,1\}$$
$$r \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r \in A \\ 0 & \text{si} \quad r \notin A \end{cases}$$

Proposition 2.52. Propietats del coeficient binomial:

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Proposition 2.53. Sigui $f : E \to F$ una aplicació entre conjunts del mateix cardinal finit. Les següents asserciones són equivalents:

1. f és injectiva.
2. f és exhaustiva.
3. f és bijectiva.

Corollary 2.54. Sigui $f : E \to F$ una aplicació entre conjunts finits. Aleshores:

1. f és injectiva $\implies |E| \leq |F|$.
2. f és exhaustiva $\implies |E| \geq |F|$.

Theorem 2.55 (Principi del colomar). Siguin E, F dos conjunts amb n i k elements, respectivament, i $f : E \to F$ una aplicació. Si $n > k$, llavors existeixen elements de E amb $f(a) = f(b)$ i $a \neq b$.

Proposition 2.56 (Variacions sense repetició). El nombre de variacions sense repetició de conjunts amb m elements agafats amb tuples de n elements sense repetir-los és $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Proposition 2.57 (Variacions amb repetició). El nombre de variacions amb repetició de conjunts amb n elements agafats amb tuples de k, els quals poden ser repetits, és n^k.

Proposition 2.58 (Combinacions sense repetició). El coeficient binomial $\binom{n}{k}$ és el nombre de subconjunts de k elements entre un conjunt amb n elements.

Proposition 2.59 (Combinacions amb repetició). El coeficient binomial $\binom{n+k-1}{k}$ és el nombre de combinacions amb repetició de k elements escollits entre un conjunt amb n elements.

2.5 | Nombres enters i congruències

Definition 2.60. Siguin $m, n \in \mathbb{Z}$. Diem que m és múltiple de n si existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = kn$.

Theorem 2.61. Siguin $D, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Llavors existeixen $q, r \in \mathbb{Z}$ únics tals que $D = qd + r$ i $0 \leq r \leq |d|$.

Definition 2.62. En un anell $(A, +, \cdot)$, un subconjunt $I \subseteq A$ és un ideal si, i només si:

1. $\forall a, b \in I$, $a + b \in I$.
2. $\forall a \in I$ i $\forall n \in A$, $na \in I$.

Lemma 2.63. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$ és un ideal de $\mathbb{Z}$. Diem que n és un generador de I.

Lemma 2.64. Siguin I, J dos ideals de A. Llavors el conjunt $I \cap J$ és un ideal.

Lemma 2.65. Siguin I, J dos ideals. L'ideal generat per I i J és l'ideal $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. A més, aquest ideal és el més petit que conté I i J.

Proposition 2.66. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$. $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z} \iff b \mid a$.

Corollary 2.67. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$. $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \iff a = \pm b$.

Proposition 2.68. Sigui A un anell i siguin $I = a\mathbb{Z}, J = b\mathbb{Z}$ dos ideals. Aleshores $\exists!\, m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Aquest enter m és el mínim comú múltiple de a i b.

Proposition 2.69. Sigui A un anell i siguin $I = a\mathbb{Z}$ $J = b\mathbb{Z}$ dos ideals. Aleshores $\exists!\, d \in \mathbb{N}^*$ tal que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. Aquest enter d és el màxim comú divisor de a i b.

Definition 2.70. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$. Diem que a i b són coprimers si, i només si, $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Definition 2.71. Diem que a és primer ($a \in \mathbb{P}$) si, i només si, $a\mathbb{Z}$ és maximal per a la inclusió d'ideals propis.

Theorem 2.72 (Teorema de Bézout). Sigui $a, b \in \mathbb{Z}$, llavors existeixen $u, v \in \mathbb{Z}$ tals que $au + bv = \text{mcd}(a, b)$. A més, $\text{mcd}(a, b) = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z}$ tals que $au + bv = 1$.

Theorem 2.73 (Teorema de Gauß). Sigui $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid bc$ i $\text{mcd}(a, b) = 1$ llavors $a \mid c$.

Corollary 2.74. Sigui $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ coprimers. Si $a_1 \mid b$ i $a_2 \mid b$, llavors $a_1 a_2 \mid b$.

Theorem 2.75 (Teorema de La Vallée Pousin-Hadamard). Sigui $x \in \mathbb{R}$, aleshores $\pi(x) \approx \frac{x}{\log(x)}$ on $\pi(x)$ és el nombre de nombres primers $\leq x$.

Theorem 2.76. Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$. Llavors

$$\text{mcd}(a, b)\text{mcm}(a, b) = |ab|.$$

Lemma 2.77. Sigui $p \in \mathbb{P}$ i $a \in \mathbb{Z}$. Llavors $p \mid a$ o $\text{mcd}(a, p) = 1$.

Theorem 2.78 (Teorema fonamental de l'aritmètica). Sigui $n \in \mathbb{N}^*$, llavors n s'escriu com a producte de nombres primers únics, llevat de l'ordre.

Theorem 2.79 (Teorema d'Euclides). Sigui $\mathbb{P}$ el conjunt dels nombres primers positius. $\mathbb{P}$ és infinit.

Theorem 2.80. L'equació $ax + by = c$ admet almenys una solució si, i només si, $\text{mcd}(a, b) \mid c$.

Definition 2.81. $x \equiv y \mod n \iff x - y \in n\mathbb{Z}$.

Lemma 2.82. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ té n elements.

Theorem 2.83. Com que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ és un anell commutatiu, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ és un anell commutatiu i, per construcció, la projecció canònica

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ a &\mapsto [a] \end{aligned}$$

és un morfisme d'anells.

Lemma 2.84. Sigui $n \in \mathbb{Z}$. Llavors $[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ és invertible per a la multiplicació si, i només si, $\operatorname{mcd}(a, n) = 1$.

Corollary 2.85. Un anell $(A, +, \cdot)$ en el qual tot element no nul és invertible és un cos. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ és un cos si, i només si, $n \in \mathbb{P}$.

Theorem 2.86 (Teorema xinès del residu). Siguin m, n coprimers, aleshores l'aplicació:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \overline{a}^{mn} &\mapsto (\overline{a}^{m}, \overline{a}^{n}) \end{aligned}$$

és un isomorfisme d'anells.

Definition 2.87 (Funció indicatriu d'Euler). Sigui $n \in \mathbb{N}^*$. $\varphi(n) = |\{\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \alpha \text{ és invertible}\}| = |\{0 \leq r \leq n \mid \operatorname{mcd}(r, n) = 1\}|$.

Theorem 2.88 (Teorema d'Euler). Sigui $a \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{mcd}(a, n) = 1$, llavors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$. En particular, $a^{-1} \equiv a^{\varphi(n)-1} \mod n$.

Theorem 2.89 (Petit teorema de Fermat). Si p és primer, $\varphi(p) = p - 1$. Aleshores $a^p \equiv a \mod p$ i, en particular, si $\operatorname{mcd}(a, p) = 1$, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

2.6 | Polinomis

Proposition 2.90. Sigui A un cos. Si $P, Q \in A[x]$ i $P, Q \neq 0$, llavors $PQ \neq 0$.

Theorem 2.91 (Teorema de divisió euclidiana). Sigui A un cos. Siguin $P, S \in A[x]$ amb $S \neq 0$. Llavors $\exists!\, Q, R \in A[x]$ tals que $P = QS + R$ i $0 \leq \deg(R) < \deg(S)$.

Theorem 2.92. Sigui A un cos. Llavors $A[x]$ és un anell principal, és a dir, si $I \subset A[x]$ és un ideal, llavors $\exists P \in A[x]$ tal que $I = PA[x]$.

Definition 2.93. Sigui $P, Q \in A[x]$. Aleshores $\operatorname{mcd}(P, Q)$ és un generador de $PA[x] + QA[x]$ i $\operatorname{mcm}(P, Q)$ és un generador de $PA[x] \cap QA[x]$.

Definition 2.94. Diem que un polinomi $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ és mònic si $a_n = 1$.

Theorem 2.95 (Teorema de Bézout). Siguin $P, Q \in K[x]$, llavors $\exists U, V \in K[x]$ tals que $PU + QV = \operatorname{mcd}(P, Q)$.

Definition 2.96. Dos polinomis P, Q són coprimers si, i només si, $\operatorname{mcd}(P, Q) = 1$.

Theorem 2.97 (Teorema de Gauß). Siguin $P, A, B \in K[x]$. Si $P \mid AB$ i $\operatorname{mcd}(A, P) = 1$, llavors $P \mid B$.

Definition 2.98. Un polinomi $P \in K[x]$ és primer si, i només si, el seu ideal $PK[x]$ és maximal per a la inclusió d'ideals de $K[x]$, és a dir, $\forall I$ ideal si $PK[x] \subsetneq I$, llavors $K[x] = I$.

Theorem 2.99 (Teorema de Ruffini). Sigui K un cos i sigui $P \in K[x]$ i $\lambda \in K$. Llavors $x - \lambda \mid P \iff P(\lambda) = 0$.

Definition 2.100. Sigui $P \in K[x]$, llavors P és irreductible si, i només si, $PK[x]$ és maximal.

Theorem 2.101. Sigui $P \in K[x]$, llavors P té com a màxim $\deg(P)$ arrels.

Theorem 2.102 (Teorema d'Alembert). Tot polinomi no constant $P \in \mathbb{C}[x]$ té exactament $\deg(P)$ arrels.

Corollary 2.103. Sigui $P \in \mathbb{C}[x]$ i $\deg(P) > 1$. Llavors existeixen $\alpha, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ únics, llevat de l'ordre, tal que $P = \alpha(x - r_1) \cdots (x - r_n)$ on r_i són les arrels de P i α el coeficient dominant.

Corollary 2.104. Les arrels a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es presenten en parells $(r_s, \overline{r_s})$.

Theorem 2.105. A $\mathbb{R}[x]$ els polinomis irreductibles són de grau 1 (arrels reals) o de grau 2 (arrels complexes no reals).

3 Funcions de variable real

3.1 | La recta real

Definition 3.1. Sigui $(K, +, \cdot)$ un cos. Diem que K amb una relació d'ordre total $(\leq)$ és un cos ordenat si es verifiquen les següents propietats:

1. Si $x, y, z \in K$ i $x \leq y$, aleshores $x + z \leq y + z$.

2. Si $x, y \in K$ i $x \geq 0$ i $y \geq 0$, aleshores $x \cdot y \geq 0$.

Definition 3.2. Sigui K un cos ordenat i $A \subset K$. Diem que A està acotat superiorment (respectivament inferiorment) si existeix $M \in K$, que anomenarem cota superior (respectivament cota inferior) de A, tal que $x \leq M$ (respectivament $x \geq M$) per a tot $x \in A$.

Definition 3.3. Sigui K un cos ordenat i $A \subset K$ acotat superiorment (respectivament inferiorment). Diem que α cota superior (respectivament inferior) de A és el suprem (respectivament ínfim) de A si qualsevol cota superior β (respectivament inferior) verifica $\beta \geq \alpha$ (respectivament $\beta \leq \alpha$). El suprem de A i l'ínfim de A, quan existeixin, els designem per $\sup A$ i $\inf A$ respectivament.

Theorem 3.4 (Axioma del suprem). Existeix un únic cos ordenat amb la propietat que tot conjunt acotat superiorment té suprem.

Lemma 3.5. Si $\alpha = \sup A$, aleshores per a tot $\varepsilon > 0$ l'interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha]$ conté punts de A.

Proposition 3.6. Els nombres naturals no estan acotats superiorment a $\mathbb{R}$.

Proposition 3.7. Entre dos nombres reals sempre n'hi ha un de racional i un d'irracional.

Definition 3.8. Sigui A un conjunt. Diem que A és numerable si existeix una aplicació bijectiva de A en $\mathbb{N}$.

Proposition 3.9. Tot subconjunt infinit de $\mathbb{N}$ és numerable.

Corollary 3.10. Tot subconjunt infinit d'un conjunt numerable és numerable.

Corollary 3.11. Sigui A un conjunt amb infinits elements. Perquè A sigui numerable, n'hi ha prou que existeixi una aplicació injectiva de A en $\mathbb{N}$.

Proposition 3.12. Si A i B són numerables, aleshores $A \times B$ també ho és.

Theorem 3.13. $\mathbb{Q}$ no és numerable.

Theorem 3.14. $\mathbb{R}$ no és numerable.

3.2 | Successions

Definition 3.15. Diem que la successió (a_n) està acotada superiorment (respectivament acotada inferiorment) si existeix un nombre real K de manera que $a_n \leq K$ (respectivament $a_n \geq K$) per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.16. Diem que $\lim a_n = l$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ $\forall n > n_0$.

Lemma 3.17. Siguin (a_n) i (b_n) successions convergents amb límits a i b respectivament. Aleshores els següents fets són certs:

1. Les successions $(a_n + b_n)$ i $(a_n b_n)$ són convergents i $\lim(a_n + b_n) = a + b$ i $\lim(a_n b_n) = ab$.

2. Si $a \neq 0$, aleshores $a_n \neq 0$ per a n prou gran la successió $(\frac{1}{a_n})$ és convergent i $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Theorem 3.18. Tota successió monòtona i acotada és convergent.

Lemma 3.19 (Teorema del sandvitx). Siguin (a_n), (b_n) i (c_n) tres successions verificant $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Suposem, a més, que $\lim a_n = \lim c_n = l$. Aleshores (b_n) és convergent i $\lim b_n = l$.

Lemma 3.20. $e = \lim S_n = \lim T_n$ on $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ i $T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Theorem 3.21. El nombre e és irracional.

Lemma 3.22. Si $\lim a_n = l$, llavors qualsevol successió parcial de (a_n) té també límit l.

Proposition 3.23. a és un punt d'acumulació de (a_n) si i només si existeix (a_{k_n}) parcial de (a_n) amb $\lim a_{k_n} = a$.

Proposition 3.24. Tota successió té una parcial monòtona.

Theorem 3.25 (Teorema de Bolzano-Weierstraß). Tota successió de punts d'un interval tancat té una parcial convergent a un punt de l'interval.

Lemma 3.26. Sigui (a_n) acotada. Llavors (a_n) és convergent si i només si $\liminf a_n$
$= \limsup a_n$. En aquest cas es té que $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$

Definition 3.27. Diem que la successió (a_n) és una successió de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per a qualsevol $n, m > n_0$.

Theorem 3.28. Una successió és convergent si i només si és de Cauchy.

Theorem 3.29 (Criteri de Stolz). Sigui (a_n) una successió estrictament monòtona i (b_n) una successió qualsevol. Suposem a més que $\lim \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Aleshores les següents afirmacions són certes:

1. Si $\lim a_n = \pm\infty$, llavors $\lim \frac{b_n}{a_n} = l$.

2. Si $\lim b_n = \lim a_n = 0$, llavors $\lim \frac{b_n}{a_n} = l$.

3.3 | Continuïtat

Definition 3.30. Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funció i $x_0 \in (a,b)$. Diem que l és el límit de la funció f en el punt x_0 i escrivim $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ de manera que $|f(x) - l| < \varepsilon$ sempre que $|x - x_0| < \delta$.

Lemma 3.31. Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a,b)$. Aleshores $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si i només si per a tota successió a_n de punts de $(a,b) \setminus \{x_0\}$ amb $\lim a_n = x_0$ es compleix que $\lim f(a_n) = l$.

Definition 3.32. Sigui I un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ una funció i $x_0 \in I$. Diem que f és contínua en x_0 si existeix el límit de f en x_0 i és igual a $f(x_0)$.

Lemma 3.33. f és contínua en $x_0 \in I$ si i només si per a tota successió $x_n \in I$ amb $\lim x_n = x_0$ es té que $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Proposition 3.34. Siguin $f, g : I \to \mathbb{R}$ contínues en $x_0 \in I$. Llavors:

1. $f + g$ i fg són contínues en x_0.
2. Si $f(x_0) > 0$ (respectivament $f(x_0) < 0$), aleshores $f(x) > 0$ (respectivament $f(x) < 0$) en un entorn de x_0. A més, en ambdós casos, $\frac{1}{f}$ és contínua en x_0.

Proposition 3.35. Siguin $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : J \to \mathbb{R}$. Sigui $x_0 \in I$ amb $f(x_0) \in J$ i suposem que f és contínua en x_0 i g també ho és en $f(x_0)$. Aleshores $g \circ f$ és contínua en x_0.

Theorem 3.36 (Teorema de Weierstraß). Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Aleshores f està acotada en $[a,b]$. A més, existeixen $y, z \in [a,b]$ tals que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ $\forall x \in [a,b]$.

Theorem 3.37 (Teorema de Bolzano). Sigui f contínua en $[a,b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, llavors existeix $c \in (a,b)$ amb $f(c) = 0$.

Theorem 3.38. Sigui $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ contínua. Si f és injectiva i contínua, aleshores f és monòtona. A més, f^{-1} és també contínua en $f((c,d))$.

3.4 | Derivació

Definition 3.39. Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Diem que f és derivable en $x_0 \in (a,b)$ si existeix el límit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Proposition 3.40. Siguin f, g definides en un entorn de a i derivables en a. Aleshores $f + g$ i fg són derivables en a i

$$(f + a)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si a més $f(a) \neq 0$, llavors $\frac{1}{f}$ està definida en un entorn de a, és derivable en a i

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

Proposition 3.41 (Regla de la cadena). Siguin $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ i $f : (c,d) \to \mathbb{R}$. Suposem que g és derivable en $x \in (a,b)$ i f és derivable en $g(x) \in (c,d)$. Aleshores $f \circ g$ és derivable en x i $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Proposition 3.42. Sigui $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ injectiva i contínua en (a,b) i derivable en $c \in (a,b)$ amb $f'(c) \neq 0$. Aleshores f^{-1} és derivable en $f(c)$ i

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

Proposition 3.43. Sigui $f : I \to \mathbb{R}$ i sigui $c \in I$ extrem local de f. Si f és derivable en c, $f'(c) = 0$.

Theorem 3.44 (Teorema de Rolle). Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua i derivable en (a,b). Suposem $f(a) = f(b)$. Aleshores existeix un punt $c \in (a,b)$ amb $f'(c) = 0$.

Theorem 3.45 (Teorema del valor mitjà). Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b). Aleshores existeix un punt $c \in (a,b)$ verificant

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollary 3.46. Sigui f derivable en (a,b) verificant $f'(x) > 0$ (respectivament $f'(x) < 0$) $\forall x \in (a,b)$. Aleshores f és creixent (respectivament decreixent) en (a,b).

Theorem 3.47 (Teorema de Cauchy). Siguin $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínues en $[a,b]$ i derivables en (a,b). Aleshores existeix un punt $c \in (a,b)$ verificant

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

Theorem 3.48 (Regla de l'Hôpital). Suposem que f, g són dues funcions definides en un entron de a i que o bé $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} g = 0$, o bé $\lim_{x\to a} g = \infty$. Suposem també que existeix el límit $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Aleshores també existeix el $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Theorem 3.49 (Teorema de Darboux). Sigui $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable i suposem que existeixen $x, y \in (a,b)$, $x < y$ amb $f'(x)f'(y) < 0$. Aleshores existeix $z \in (x,y)$ tal que $f'(z) = 0$.

3.5 | Convexitat i segona derivada

Definition 3.50. Diem que $f : I \to \mathbb{R}$ és convexa si donats dos punts qualssevol $a, b \in I$, $a < b$ el segment que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ queda per damunt de la gràfica en (a,b). Diem que $f : I \to \mathbb{R}$ és còncava si donats dos punts qualssevol $a, b \in I$, $a < b$ el segment que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ queda per sota de la gràfica en (a,b).

Lemma 3.51. f és convexa en I si i només si per a qualssevol $a, x, b \in I$ amb $a < x < b$ es té:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o, equivalentment,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Si f és còncava, les desigualtats s'inverteixen.

Theorem 3.52. Sigui f derivable en I. Llavors f és convexa (respectivament còncava) si i només si f' és creixent (respectivament decreixent).

Theorem 3.53. Sigui f derivable en I. Llavors f és convexa (respectivament còncava) si i només si qualsevol tangent a la gràfica queda per sota (respectivament sobre) de la gràfica excepte en el punt de contacte.

Theorem 3.54. Sigui f dues vegades derivable en I. Llavors les següents afirmacions són certes:

1. Si f és convexa (respectivament còncava) en I aleshores $f''(x) \geq 0$ (respectivament $f''(x) \leq 0$) $\forall x \in I$.
2. Si $f''(x) > 0$ (respectivament $f''(x) < 0$) $\forall x \in I$ aleshores f és convexa (respectivament còncava) en I.

Proposition 3.55. Sigui f dues vegades derivable en I. Aleshores les següents afirmacions són certes:

1. Si a és un punt d'inflexió aleshores $f''(a) = 0$.
2. Suposem a més que f'' és contínua en $a \in I$. Aleshores si $f''(a) > 0$ (respectivament $f''(a) < 0$) aleshores f és convexa (respectivament còncava) en a.

3.6 | Aproximació polinòmica

Definition 3.56. Diem que f i g tenen un contacte d'ordre $\geq n$ en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Definition 3.57. Diem que f és de classe $\mathcal{C}^n$ en a si f és n vegades derivable en un entorn de a i $f^{(n)}$ és contínua en aquest entorn. Diem que f és de classe $\mathcal{C}^\infty$ en a si f és de classe $\mathcal{C}^n$ en a per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 3.58. Sigui f n vegades derivable en a. Aleshores el polinomi

$$P_{n,f,a} = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \\ + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

té un contacte amb f d'ordre $\geq n$ en a.

Theorem 3.59. Sigui f derivable n vegades en a. Si $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0$ llavors:

1. Si n és senar a no és extrem relatiu.
2. Si n és parell i $f^{(n)} > 0$, aleshores a és un mínim relatiu.
3. Si n és parell i $f^{(n)} < 0$, aleshores a és un màxim relatiu.

Theorem 3.60. Sigui f derivable $n + 1$ vegades en I un entorn de a. Sigui $P = P_{n,f,a}$ i $R_n = f - P$. Sigui $x \in I$. Llavors,

1. Fórmula de Cauchy:
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - a),$$
per algun ξ entre a i x.
2. Fórmula de Lagrange:
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$
per algun η entre a i x.
3. Si, a més $f^{(n+1)}$, és integrable en $[a, x]$:
$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt$$

Definition 3.61. Diem que f és analítica en a si és de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un entorn de a i $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ per a tot x en aquest entorn.

3.7 | Integral de Riemann

Definition 3.62. Definim la suma inferior i superior de f, respectivament, associada a la partició P com:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \qquad U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

on $m_i = \inf\{f(x_i) : x_i \in [t_{i-1}, t_i]\}$ i $M_i = \sup\{f(x_i) : x_i \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

Definition 3.63. Sigui f acotada en $I = [a, b]$. Diem que f és integrable en I si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ on $\underline{\int_a^b} = \inf\{L(f, P) : P$ partició de $[a, b]\}$ i $\overline{\int_a^b} = \sup\{U(f, P) : P$ partició de $[a, b]\}$

Lemma 3.64. Sigui f acotada en $I = [a, b]$. Aleshores f és integrable en I si i només si $\forall \varepsilon > 0$ existeix una partició P de I amb $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Theorem 3.65. Sigui f monòtona i fitada a $I = [a, b]$. Llavors f és integrable en I.

Theorem 3.66. Sigui $I = [a, b]$ i f contínua en I. Aleshores f és uniformement contínua en I.

Theorem 3.67. Sigui f contínua en $I = [a, b]$. Aleshores f és integrable en I.

Proposition 3.68. Siguin f i g integrables en $I = [a, b]$ i $c \in \mathbb{R}$. Llavors $f + g$ i cf són integrables en I i

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \int_a^b cf = c\int_a^b f$$

Theorem 3.69. Sigui f integrable en $[a, b]$ amb $f([a, b]) \subset [c, d]$ i g contínua en $[c, d]$. Llavors $g \circ f$ és integrable en $[a, b]$.

Corollary 3.70. Siguin f i g integrables en $[a, b]$. Llavors fg és integrable en $[a, b]$.

Proposition 3.71. Siguin f, g integrables en $[a, b]$ amb $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Aleshores $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Corollary 3.72. Si f és integrable en $[a, b]$ amb $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$. Aleshores $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$. Si a més f és contínua, aleshores existeix $c \in [a, b]$ amb $\int_a^b f = f(c)(b - a)$.

Proposition 3.73. Si f és integrable en $[a, b]$, aleshores $|f|$ també ho és i

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Proposition 3.74. Sigui f una funció integrable en $[a, b]$ i g una funció definida en $[a, b]$ diferent de f en un nombre finit de punts. Aleshores g és integrable i

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

Proposition 3.75. Si $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ i $b \in (a, c)$ aleshores f integrable en $[a, c]$ si i només si f és integrable en $[a, b]$ i en $[b, c]$. A més,

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Theorem 3.76 (Teorema fonamental del càlcul). Si f és integrable en [a,b], aleshores

$$F(x) = \int_a^x f$$

és contínua en $[a, b]$. Si, a més, f és contínua en $c \in [a, b]$, aleshores F és derivable en c i $F'(c) = f(c)$.

Theorem 3.77. Sigui f integrable en $[a, b]$ i G una primitiva de f. Llavors $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Corollary 3.78 (Integració per parts). Siguin f, g integrables en $[a, b]$ amb primitives F i G respectivament. Aleshores es compleix:

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG$$

Corollary 3.79 (Canvi de variable). Sigui $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ i tal que $\varphi(c) = a$ i $\varphi(d) = b$. Sigui f contínua en $[a, b]$. Aleshores es compleix:

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'$$

Definition 3.80. Una suma de Riemann de f, $S(f, P)$, associada a una partició P, és qualsevol nombre obtingut de la següent manera:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

on $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Theorem 3.81. Sigui f contínua en $[a, b]$. Aleshores $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ és una partició de $[a, b]$ amb $t_i - t_{i-1} < \delta$, llavors

$$\left|\int_a^b f - S(f, P)\right| < \varepsilon$$

per a tota suma de Riemann associada a P.

Corollary 3.82. Sigui f contínua en $[a, b]$ i sigui P_n una successió de particions de $[a, b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < 1/n$ sempre que t_i i t_{i-1} siguin punts consecutius de P_n. Aleshores per a tota elecció $S(f, P_n)$ de sumes de Riemann associades a les particions P_n es té que

$$\int_a^b = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$$

Definition 3.83. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partició de $[a, b]$. Definim

$$l(f, P) := \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}$$

Si el conjunt $\mathcal{L} = \{l(f, P) : P \text{ partició de } [a, b]\}$ està acotat superiorment, diem que la gràfica és rectificable i definim la seva longitud $l(f, [a, b]) := \sup \mathcal{L}$.

Proposition 3.84. Sigui f de classe $\mathcal{C}^1$ a $[a, b]$. Aleshores f és rectificable a $[a, b]$ i

$$l(f, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$$

Proposition 3.85. Sigui $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ amb $\varphi(t) = (x(t), y(t))$. Suposem que les funcions $x(t)$, $y(t)$ són de classe $\mathcal{C}^1$ a $[a, b]$. Aleshores la corba φ és rectificable a $[a, b]$ i

$$l(f, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Proposition 3.86. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada i integrable. Aleshores el volum de revolució de f respecte l'eix horitzontal és

$$V_x = \pi \int_a^b f^2$$

Proposition 3.87. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Aleshores el volum de revolució de f respecte l'eix vertical és

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Proposition 3.88. Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$. Aleshores la superfície de revolució del gràfic de f al voltant de l'eix horitzontal és

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Proposition 3.89. Si $a > 0$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La superfície de revolució del gràfic de f al voltant de l'eix vertical és

$$S_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Proposition 3.90. El centre de masses (x_0, y_0) d'un sòlid molt prim de secció i densitat uniforme és:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}, y_0 = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx}$$

El moment d'inèrcia d'un sòlid és:

$$I_x = \rho\sigma \int_a^b x^2 f(x)dx \qquad I_y = \rho\sigma \int_a^b x^2\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

on ρ és la densitat del sòlid i σ el gruix, suposat constant, del sòlid.

Second year

4 Mathematical analysis

4.1 | Numeric series

4.1.1 Series convergence

Definition 4.1. Let (a_n) be a sequence of real numbers. A *numeric series* is an expression of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

We call a_n *general term of the series* and $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, for all $N \in \mathbb{N}$, *N-th partial sum of the series.*[1]

Definition 4.2. We say the series $\sum a_n$ is *convergent* if la sequence of partial sum is convergent, that is, if $S = \lim_{N\to\infty} S_N$ exist and it is finite. In that case, S is called the *sum of the series*. If the previous limit doesn't exists or it is infinite we say the series is *divergent.*[2]

Proposition 4.3. Let (a_n) be a sequence such that $\sum a_n < \infty$. Then $\forall\varepsilon$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$$

if $N \geq n_0$.

Theorem 4.4 (Cauchy's test). Let (a_n) be a sequence. $\sum a_n < \infty$ if and only if $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| < \varepsilon$$

if $M \geq N \geq n_0$.

Corollary 4.5. Changing a finite number of terms in a series has no effect on the convergence or divergence of that series.

Corollary 4.6. If $\sum a_n < \infty$, then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Theorem 4.7 (Linearity). Let $\sum a_n, \sum b_n$ be two convergent series with sums A and B respectively and let λ be a real number. The series

$$\sum (a_n + \lambda b_n)$$

is convergent and has sum $A + \lambda B$.

Theorem 4.8 (Associative property). Les $\sum a_n$ be a convergent series with sum A. Suppose (n_k) is a strictly increasing sequence of natural numbers. The series $\sum b_n$ with $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ for all $i \in \mathbb{N}$ is convergent and its sum is A.

4.1.2 Non-negative terms series

Theorem 4.9. Let $\sum a_n$ be a series of non-negative terms $a_n \geq 0$.[3] The series converges if and only if the sequence (S_N) of partial sums is bounded.

Theorem 4.10 (Comparison test). Let $(a_n), (b_n) \geq 0$ be two sequence of real numbers. Suppose that exists a constant $C > 0$ and a number $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $a_n \leq C b_n$ for all $n \geq n_0$. If $\sum b_n < \infty$, then $\sum a_n < \infty$ or equivalently if $\sum a_n = +\infty$, then $\sum b_n = +\infty$.

Theorem 4.11 (Limit comparison test). Let $(a_n), (b_n) \geq 0$ be two sequence of real numbers. Suppose that the limit $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ exists.

1. If $0 < \ell < \infty \implies \sum a_n < \infty \iff \sum b_n < \infty$.
2. If $\ell = 0$ and $\sum b_n < \infty \implies \sum a_n < \infty$.
3. If $\ell = \infty$ and $\sum a_n < \infty \implies \sum b_n < \infty$.

Theorem 4.12 (Root test). Let $(a_n) \geq 0$. Suppose that the limit $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ exists.

1. If $\ell < 1 \implies \sum a_n < \infty$.
2. If $\ell > 1 \implies \sum a_n = +\infty$.

Theorem 4.13 (Ratio test). Let $(a_n) \geq 0$. Suppose that the limit $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ exists.

1. If $\ell < 1 \implies \sum a_n < \infty$.
2. If $\ell > 1 \implies \sum a_n = +\infty$.

Theorem 4.14 (Raabe's test). Let $(a_n) \geq 0$. Suppose that the limit $\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ exists.

1. If $\ell > 1 \implies \sum a_n < \infty$.
2. If $\ell < 1 \implies \sum a_n = +\infty$.

Theorem 4.15 (Condensation test). Let $(a_n) \geq 0$ be a decreasing sequence. Then $\sum a_n < \infty \iff \sum 2^n a_{2^n} < \infty$.

Theorem 4.16 (Logarithmic test). Let $(a_n) \geq 0$. Suppose that the limit $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n}$ exists.

1. If $\ell > 1 \implies \sum a_n < \infty$.
2. If $\ell < 1 \implies \sum a_n = +\infty$.

Theorem 4.17 (Integral test). Let $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ be a decreasing function. Then, $\sum f(n) < \infty \iff \exists C > 0$ such that $\int_1^n f(x)dx \leq C \ \forall n$.[4]

[1] From now on we will write $\sum a_n$ to refer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[2] We will use the notation $\sum a_n < \infty$ or $\sum a_n = +\infty$ to express that the series converges or diverges, respectively.

[3] Obviously the results below are also valid if the series is of non-positive terms or has a finite number of negative terms.

[4] Later we will see that this is equivalent to say that if $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ is a locally integrable decreasing function, then $\sum f(n) < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x) < \infty$.

4.1.3 Alternating series

Definition 4.18. An *alternating series* is a series of the form $\sum(-1)^n a_n$, with $(a_n) \geq 0$.

Theorem 4.19 (Leibnitz's test). Let $(a_n) \geq 0$ be a decresing sequence such that $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Then, $\sum(-1)^n a_n$ is convergent.

Theorem 4.20 (Abel's summation formula). Let $(a_n), (b_n)$ be two sequence of real numbers. Then,

$$\sum_{n=N}^{M} a_n(b_{n+1} - b_n) = a_{M+1}b_{M+1} - a_N b_N - \sum_{n=N}^{M} b_{n+1}(a_{n+1} - a_n).$$

Theorem 4.21 (Dirichlet's test). Let $(a_n), (b_n)$ be two sequence of real numbers such that:

1. $\exists C > 0$ such that $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq C$ for all $N \in \mathbb{N}$.
2. (b_n) is monotone and $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Then, $\sum a_n b_n$ is convergent.

Theorem 4.22 (Abel's test). Let $(a_n), (b_n)$ be two sequence of real numbers such that:

1. The series $\sum a_n$ is convergent.
2. (b_n) is monotone and bounded.

Then, $\sum a_n b_n$ is convergent.

4.1.4 Absolute convergence and rearrangement of series

Definition 4.23. We say a series $\sum a_n$ is *absolutely convergent* if $\sum |a_n|$ is convergent.

Theorem 4.24. If a series converges absolutely, it converges.

Definition 4.25. We say the sequence (b_n) is a *rearrangement of the sequence* (a_n) if exists a bijective map $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $b_n = a_{\sigma(n)}$. A *rearrangement of the series* $\sum a_n$ is the series $\sum a_{\sigma(n)}$ for some bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Definition 4.26. If $x \in \mathbb{R}$, we define the *positive part of* x as

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Analogously we define the *negative part of* x as

$$x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Note that given $x \in \mathbb{R}$ we can write $x = x^+ - x^-$ and $|x| = x^+ + x^-$.

Theorem 4.27. A series $\sum a_n$ is absolutely convergent if and only if positive and negative terms series, $\sum a_n^+$ and $\sum a_n^-$, converge. In this case,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Theorem 4.28. Let $\sum a_n$ be an absolutely convergent series. Then, for all bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, the rearranged series $\sum a_{\sigma(n)}$ is absolutely convergent and $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$.

Theorem 4.29 (Riemann's theorem). Let $\sum a_n$ be a series that converges but not converges absolutely. Then, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, there exists a bijective map $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\sum a_{\sigma(n)}$ converges and $\sum a_{\sigma(n)} = \alpha$.

Theorem 4.30. A series $\sum a_n$ is absolutely convergent if and only if any rearranged series converges to the same value of $\sum a_n$.

4.2 | Sequences and series of functions

4.2.1 Sequences of functions

Definition 4.31. Let $D \subseteq \mathbb{R}$. A set

$$(f_n(x)) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}$$

is a *sequence of real functions* if $f_i : D \to \mathbb{R}$ is a real-valued function. In this case we say the sequence $(f_n(x))$, or simply (f_n), is well defined on D.

Definition 4.32. Let (f_n) be a sequence of functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$. Let $f : D \to \mathbb{R}$. We say (f_n) *converges pointwise* to f on D if $\forall x \in D$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Definition 4.33. We say a sequence of functions (f_n) defined on $D \subseteq \mathbb{R}$ *converges uniformly* to f on D if $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ and $\forall x \in D$.

Lemma 4.34. Let (f_n) be an uniform convergent sequence of functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$ and let f be such that (f_n) converges pointwise to f. Then, (f_n) converges uniformly f on D.

Lemma 4.35. Let (f_n) be a sequence of functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$. (f_n) converges uniformly a f en D if and only if $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} = 0$.

Corollary 4.36. A sequence of functions (f_n) converges uniformly to f on $D \subseteq \mathbb{R}$ if and only if there is a sequence (a_n), $a_n \geq 0$ and $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, and a number $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$.

Theorem 4.37 (Cauchy's test). A sequence of functions (f_n) converges uniformly to f on $D \subseteq \mathbb{R}$ if and only if $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 : \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in D\} < \varepsilon$ if $n, m \geq n_0$.

Theorem 4.38. Let (f_n) be a sequence of continuous functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$. If (f_n) converges uniformly to f on D, then f is continuous on D, that is, for any $x_0 \in D$, it satisfies:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Theorem 4.39. Let (f_n) be a sequence of functions defined on $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. If (f_n) are Riemann-integrable on I and (f_n) converges uniformly to f on I, then f is Riemann-integrable on I and

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Theorem 4.40. Let (f_n) be a sequence of functions defined on $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ with $a, b \in \mathbb{R}$. If (f_n) are derivable on I, $(f_n'(x))$ converges uniformly on I and $\exists x_0 \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$, then there is a function f such that (f_n) converges uniformly to f on I, f is derivable on I and $(f_n'(x))$ converges uniformly to f' on I.

4.2.2 Series of functions

Definition 4.41. Let (f_n) be a sequence of functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$. The expression

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

is the *series of functions* associated with (f_n).

Definition 4.42. A series of functions $\sum f_n(x)$, where functions $f_n(x)$ are defined on the same domain D, *converges pointwise* on D if the sequence of partials sums

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converges pointwise. If the pointwise limit of (F_N) is $F(x)$, we say F is the *sum of the series in a pointwise sense.*

Definition 4.43. A series of functions $\sum f_n(x)$, where functions $f_n(x)$ are defined on the same domain D, *converges uniformly* on D if the sequence of partials sums

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converges uniformly. If the uniform limit of (F_N) is $F(x)$, we say F is the *sum of the series in an uniform sense.*

Theorem 4.44 (Cauchy's test). A series of functions $\sum f_n(x)$ defined on D converges uniformly if and only if $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ such that

$$\sup\left\{\left|\sum_{n=N}^{M} f_n(x)\right| : x \in D\right\} < \varepsilon$$

if $N, M \geq n_0$.

Corollary 4.45. If $\sum f_n(x)$ is a series of continuous functions on $D \subseteq \mathbb{R}$, then (f_n) converges uniformly to zero on D.

Theorem 4.46. If $\sum f_n(x)$ is uniformly convergent series of functions on $D \subseteq \mathbb{R}$, then its sum function is continuous on D too.

Theorem 4.47. Let (f_n) be a sequence of functions defined on $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. If (f_n) are Riemann-integrable on I, and $\sum f_n(x)$ converges uniformly on I, then $\sum f_n(x)$ is Riemann-integrable on I and

$$\int_a^b \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx.$$

Theorem 4.48. Let (f_n) be a sequence of functions defined on $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ with $a, b \in \mathbb{R}$. If (f_n) are derivable on I, $\sum f_n'(x)$ converges uniformly on I and $\exists c \in I$: $\sum f_n(c) < \infty$, then $\sum f_n(x)$ converges uniformly on I, $\sum f_n(x)$ is derivable on I and $\left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x)$.

Theorem 4.49 (Weierstraß M-test). Let (f_n) be a sequence of functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$ such that $|f_n(x)| \leq M_n\ \forall x \in D$ and suppose that $\sum M_n$ is a convergent numeric series. Then, $\sum f_n(x)$ is uniformly convergent on D.

Theorem 4.50 (Dirichlet's test). Let $(f_n), (g_n)$ be two sequences of functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$. Suppose:

1. $\exists C > 0 : \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| : x \in D\right\} \leq C,\ \forall N.$
2. $(g_n(x))$ is a monotone sequence for all $x \in D$ and $\lim_{n\to\infty} \sup\{|g_n(x)| : x \in D\} = 0$.

Then, $\sum f_n(x)g_n(x)$ converges uniformly on D.

Theorem 4.51 (Abel's test). Let $(f_n), (g_n)$ be two sequences of functions defined on $D \subseteq \mathbb{R}$. Suppose:

1. The series $\sum f_n(x)$ converges uniformly on D.
2. $(g_n(x))$ is a monotone and bounded sequence for all $x \in D$.

Then, $\sum f_n(x)g_n(x)$ converges uniformly on D.

4.2.3 Power series

Definition 4.52. Given an $x_0 \in \mathbb{R}$, a *power series centred on* x_0 is a series of functions of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

being (a_n) a sequence of real numbers.

Proposition 4.53. Let $\sum a_n(x - x_0)^n$ be a power series. Suppose there exists an $x_1 \in \mathbb{R}$ such that $\sum a_n(x_1 - x_0)^n < \infty$. Then, $\sum a_n(x - x_0)^n$ converges uniformly on any closed interval $I \subset A = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$.

Theorem 4.54. Let $\sum a_n(x - x_0)^n$ be a power series and consider

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in [0, \infty].$$

Then:

1. If $|x - x_0| < R \implies \sum a_n(x - x_0)^n$ converges absolutely.
2. If $0 \leq r < R \implies \sum a_n(x - x_0)^n$ converges uniformly on $[x_0 - r, x_0 + r]$.

3. If $|x - x_0| > R \implies \sum a_n(x-x_0)^n$ diverges.

The number R is called *radius of convergence* of the power series.

Theorem 4.55 (Abel's theorem). Let $\sum a_n x^n$ be a power series[5] with radius of convergence R satisfying $\sum a_n R^n < \infty$. Then the series $\sum a_n x^n$ converges uniformly on $[0, R]$. In particular, if $f(x) = \sum a_n x^n$,

$$\lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Corollary 4.56. Let f be the sum function of a power series $\sum a_n x^n$. Then f is continuous on the domain of convergence of the series.

Corollary 4.57. If the series $\sum a_n x^n$ has radius of convergence $R \neq 0$ and f is its sum function, then f is Riemann-integrable on any closed sub-interval on the domain of convergence of the series. In particular, for $|x| < R$,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$[6]

Corollary 4.58. Let f be the sum function of the power series $\sum a_n x^n$. Then f is derivable within the domain of convergence of the series and

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Corollary 4.59. Any function f defined as a sum of a power series $\sum a_n x^n$ is indefinitely derivable within the domain of convergence of the series and

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

In particular $f^{(k)}(0) = k! a_k, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definition 4.60. A function is *analytic* if it can be expressed locally as a power series.

4.2.4 Weierstraßapproximation theorem

Definition 4.61. Let f be a real-valued function. We say f has *compact support*[7] if exists an $M > 0$ such that $f(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$.

Definition 4.62. Let f, g be real-valued functions with compact support. We define the convolution of f with g as

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$[8]

Definition 4.63. We sap a sequence of functions (ϕ_ε) with compact support is an *approximation of unity* if

1. $\phi_\varepsilon \geq 0$.
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon = 1$.
3. $\forall \delta > 0$ it is satisfied that $\phi_\varepsilon(t)$ converges uniformly to zero when $\varepsilon \to 0$, if $|t| > \delta$.

Lemma 4.64. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function with compact support. Let (ϕ_ε) be a unity approximation. Then $(f * \phi_\varepsilon)$ converges uniformly to f on $\mathbb{R}$ when $\varepsilon \to 0$.

Theorem 4.65 (Stone-Weierstraß theorem). Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then, there exists polynomials $p_n \in \mathbb{R}[x]$ such that the sequence (p_n) converge uniformly to f on $[a, b]$.

4.3 | Improper integrals

4.3.1 Locally integrable functions

Definition 4.66. Let $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, with $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. We say f is *locally integrable on* $[a, b)$ if f is Riemann-integrable on $[a, x]$ for all $a < x < b$.

Definition 4.67. Let $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ be a locally integrable function. If there exists

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f$$

and it is finite, we say that the *improper integral* of f on $[a, b)$, $\displaystyle\int_a^b f$, is *convergent*.

Theorem 4.68 (Cauchy's test). Let $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ be a locally integrable function. The improper integral $\displaystyle\int_a^b f$ is convergent if and only if $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_0$, $a < b_0 < b$, such that

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon$$

if $b_0 < x_1 < x_2 < b$.

4.3.2 Improper integrals of non-negative functions

Theorem 4.69. Let $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ be a locally integrable non-negative function. A necessary and sufficient condition for $\displaystyle\int_a^b f$ to be convergent is that the function

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

must be bounded for all $x < b$.

[5] From now on we will suppose, for simplicity, $x_0 = 0$.
[6] The formula is also valid for $|x| = R$ if the series $\sum a_n R^n$ (or $\sum a_n(-R)^n$) is convergent.
[7] In general, the support of a function is the adherence of the set of points which are not mapped to zero.
[8] Alternatively if f, g are Riemann-integrable functions on $[a, b]$ we can define the convolution of f and g as

$$(f * g)(x) = \int_a^b f(t)g(x-t)dt.$$

Theorem 4.70 (Comparison test). Let $f, g : [a, b) \to [0, +\infty)$ be two locally integrable non-negative functions. Then:

1. If $\exists C > 0$ such that $f(x) \le Cg(x)$ $\forall x$ on a neighborhood of b and $\int_a^b g < \infty \implies \int_a^b f < \infty$.
2. Let $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Then,
   a) If $\ell \in (0, \infty) \implies \sum f < \infty \iff \sum g < \infty$.
   b) If $\ell = 0$ and $\sum g < \infty \implies \sum f < \infty$.
   c) If $\ell = \infty$ and $\sum f < \infty \implies \sum g < \infty$.

4.3.3 Absolute convergence of improper integrals

Definition 4.71. Let $f : [a, b) \to (0, \infty)$ be a locally integrable function. We say $\int_a^b f$ *converges absolutely* if $\int_a^b |f|$ is convergent.

Theorem 4.72 (Dirichlet's test). Let $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ be two locally integrable functions Suppose:

1. $\exists C > 0 : \left| \int_a^x f(t)dt \right| \le C$ for all $x \in [a, b)$.
2. g is monotone and $\lim_{x \to b} g(x) = 0$.

Then, $\int_a^b fg$ is convergent.

Theorem 4.73 (Abel's test). Let $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ be two locally integrable functions Suppose:

1. $\int_a^b f$ is convergent.
2. g is monotone and bounded.

Then, $\int_a^b fg$ is convergent.

4.3.4 Differentiation under the integral sign

Theorem 4.74. Let $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on $[a, b] \times [c, d]$. Consider $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ defined on $[c, d]$. Then F is continuous, that is, if $c < y_0 < d$,

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \\ = \int_a^b f(x, y_0)dx = F(y_0).$$

Theorem 4.75. Let $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ be a Riemann-integrable function for any $y \in [a, b] \times [c, d]$ and let $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$. If f is differentiable with respect to y and $\frac{\partial f}{\partial y}$ is continuous on $[a, b] \times [c, d]$, then $F(y)$ is derivable on (c, d) and its derivative is

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx,$$

for all $y \in (c, d)$.

Theorem 4.76. Let $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on $\in [a, b] \times [c, d]$. Let $a, b : [c, d] \to \mathbb{R}$ be to differentiable functions satisfying $a \le a(y) \le b(y) \le b$ for $c \le y \le d$. We also suppose that $\frac{\partial f}{\partial y}$ is continuous on $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \le x \le b(y),\ c \le y \le d\}$. Then $F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$ is derivable on (c, d) and its derivative is

$$F'(y) = b'(y)f(b(y), y) - a'(y)f(a(y), y) + \\ + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx,$$

for all $y \in (c, d)$.

Theorem 4.77. Let $f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on $[a, b) \times [c, d]$. We consider $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$. Suppose that:

1. $\frac{\partial f}{\partial y}$ is continuous on $[a, b) \times [c, d]$.
2. Given a $y_0 \in [c, d]$, $\exists \delta > 0$ such that the integral
$$\int_a^b \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| : y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \right\} dx$$
exists and it is finite on $[a, b)$.

Then, $F(y)$ is derivable at y_0 and

$$F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx.$$

Theorem 4.78. Let $f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on $[a, b) \times [c, d]$. Let $a, b : [c, d] \to \mathbb{R}$ be two differentiable functions satisfying $a \le a(y) \le b(y) \le b$ for $c \le y \le d$. We consider $F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$. Suppose that:

1. $\frac{\partial f}{\partial y}$ is continuous on $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \le x \le b(y),\ c \le y \le d\}$.
2. Given a $y_0 \in [c, d]$, $\exists \delta > 0$ such that the integral
$$\int_{a(y)}^{b(y)} \sup \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| : y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \right\} dx$$
exists and it is finite on $[a, b)$.

The, $F(y)$ is derivable at y_0 and

$$F'(y_0) = b'(y_0)f(b(y_0), y_0) - a'(y_0)f(a(y_0), y_0) + \\ + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx.$$

4.3.5 Gamma function

Definition 4.79. For $x > 0$, *Gamma function* is defined as
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Theorem 4.80. Gamma function is a generalization of the factorial. In fact, for $x > 0$ we have
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
In particular, $\Gamma(n+1) = n!$ for $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 4.81. Gamma function satisfies:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x\sqrt{2\pi x}} = 1.$$

Corollary 4.82 (Stirling's formula).
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

4.4 | Fourier series

4.4.1 Periodic functions

Definition 4.83. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. We say that f is *T-periodic*, or is *periodic with period T*, being $T > 0$, if $f(x+T) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.84. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a T-periodic function. Then $f(x+T') = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$ if and only if $T' = kT$ for some $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.85. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a T-periodic function. Then
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$
where $a \in \mathbb{R}$. In particular,
$$\int_a^{a+kT} f(x)dx = k\int_0^T f(x)dx.$$

Lemma 4.86. Let f be a T-periodic continuous function on $\mathbb{R}$. Then, $|f|$ is bounded.

Proposition 4.87. Given a T-periodic function f, there are no power series $\sum a_n x^n$ uniformly convergent to f on $\mathbb{R}$.

4.4.2 Orthogonal systems

Definition 4.88. Let $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ be Riemann-integrable functions. We define the *inner product of f and g* as
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$
where $\overline{g}$ is the complex conjugate of g.

Definition 4.89. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ be a function. Then $f \in L^p(I)$, $p \geq 1$, if
$$\|f\|_p := \left(\int_I |f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty.$$

Definition 4.90. Let $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ be a Riemann-integrable function. We define the *norm of f* as
$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

Definition 4.91. Let $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ be Riemann-integrable functions. We define the *distance between f and g* as
$$d(f,g) = \|f-g\|.$$

Proposition 4.92. Let $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ be Riemann-integrable functions and let $\alpha \in \mathbb{C}$. Then we have:

1. $\langle f, f\rangle \geq 0$.
2. $\langle f+h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle$ and $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$.
3. $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$.
4. $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$ and $\langle f, \alpha g\rangle = \overline{\alpha}\langle f, g\rangle$.

Theorem 4.93 (Cauchy–Schwarz inequality). Let $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ be Riemann-integrable functions. Then,
$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Theorem 4.94 (Minkowski inequality). Let $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ be Riemann-integrable functions. Then,
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Definition 4.95. Let $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ be Riemann-integrable functions with $f \neq g$. We say f and g are *orthogonal* if $\langle f, g\rangle = 0$. We say f and g are *orthonormal* if they are orthogonal and $\|f\| = \|g\| = 1$.

Definition 4.96. Let $S = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ be a collection of Riemann-integrable functions on $[a,b]$. We say S is an *orthonormal system* if $\|\phi_n\| = 1$ $\forall n$ and $\langle \phi_n, \phi_m\rangle = 0$ $\forall n \neq m$.

Proposition 4.97. Let
$$S_1 = \left\{\frac{1}{T}e^{\frac{2\pi i n x}{T}}, n \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$S_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)}{\sqrt{T/2}}, n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$
Then S_1 and S_2 orthonormal systems on $[-T/2, T/2]$.

Definition 4.98. A collection of functions $S = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ is *linearly dependent* on $[a,b]$ if there exist $c_0, c_1, \ldots, c_n$ not all null, such that
$$c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0 \ \forall x \in [a,b].$$
Otherwise we say S is *linearly independent.* If the collection S has an infinity number of functions, we say S is linearly independent on $[a,b]$ if any finite subset of S is linearly independent on $[a,b]$.

Theorem 4.99. Let $S = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ be an orthonormal system on $[a,b]$. Suppose that $\sum c_n\phi_n(x)$ converges uniformly to f on $[a,b]$. Then, f is Riemann-integrable on $[a,b]$ and, moreover,
$$c_n = \langle f, \phi_n\rangle = \int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)}dx \quad n \geq 0.$$

4.4.3 Fourier coefficients and Fourier series

Definition 4.100. Let $S = \left\{ \frac{1}{T} e^{\frac{2\pi i n x}{T}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ be an orthonormal system on $[-T/2, T/2]$ and let $f \in L^1([-T/2, T/2])$ be a T-periodic function.[9] We define the *n-th Fourier coefficient* as

$$\widehat{f}(n) = \left\langle f, \frac{1}{T} e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx,$$

for all $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.101. Let $f, g \in L^1([-T/2, T/2])$. The following properties are satisfied:

1. For all $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
$$\widehat{\lambda f + \mu g}(n) = \lambda \widehat{f}(n) + \mu \widehat{g}(n).$$
2. Let $\tau \in \mathbb{R}$. We define $f_\tau(x) = f(x - \tau)$. Then,
$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-\frac{2\pi i n \tau}{T}} \widehat{f}(n).$$
3. If f is even, then $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
If f is odd, then $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
4. If $f \in \mathcal{C}^k$, then
$$\widehat{f^{(k)}}(n) = \left(\frac{2\pi i n}{T}\right)^k \widehat{f}(n).$$
5. $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.

Definition 4.102. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$. We define the *Fourier series of f* as

$$Sf(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{T}}.$$

Definition 4.103. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$ and Sf be the Fourier series of f. The *N-th partial sum of Sf* is

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{T}}.$$

Proposition 4.104. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$. Then

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right),$$

where

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx,$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx,$$

for $n \geq 0$.[10] In particular, if f is even we have

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right),$$

i if f is odd we have

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right).$$

Definition 4.105. Given a function f defined on $(0, L)$, we define the *even extension of f* as

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in (0, L) \\ f(-x) & \text{si} \quad x \in (-L, 0) \end{cases}$$

Analogously, we define the *odd extension of f* as

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in (0, L) \\ -f(-x) & \text{si} \quad x \in (-L, 0) \end{cases}$$

Proposition 4.106. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$. If we make the even extension of f, then

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right),$$

where $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx$ fore $n \geq 0$. If we make the odd extension of f, then

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right),$$

where $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx$ for $n \geq 1$.

4.4.4 Pointwise convergence

Definition 4.107 (Dirichlet kernel). We define the *Dirichlet kernel of order N* as

$$D_N(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = \frac{1}{T} \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)\pi t}{T}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}.$$

Proposition 4.108. The Dirichlet kernel has the following properties:

1. D_N is a T-periodic and even function.
2. $\displaystyle\int_0^T D_N(t) dt = 1$ for all N.

Proposition 4.109. Sigui $f \in L^1([-T/2, T/2])$. Then

$$S_N f(x) = (f * D_N)(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x - t) D_N(t) dt =$$
$$= \int_0^{T/2} [f(x + t) + f(x - t)] D_N(t) dt.$$

[9] From now on, we will work only with functions defined on $[-T/2, T/2]$ and extended periodically on $\mathbb{R}$.

[10] The relation between a_n, b_n and $\widehat{f}(n)$ is given by:

$$a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \quad \text{i} \quad b_n = i\left[\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)\right] \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Lemma 4.110 (Riemann-Lebesgue lemma). Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. Then:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\lambda t)dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\lambda t)dt = 0.$$

In particular, $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Theorem 4.111. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$ be a function having left and right-hand side derivatives at x_0, that is, there exists the following limits

$$f'(x_0^+) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t},$$
$$f'(x_0^-) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t},$$

(supposing left and right-hand side exists). Then,

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Theorem 4.112 (Dini's theorem). Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$, $x_0 \in (-T/2, T/2)$ and $\ell \in \mathbb{R}$ such that

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2\ell|}{t} dt < \infty$$

for some $\delta > 0$. Then $\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = \ell$.

Theorem 4.113 (Lipschitz's theorem). Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$ such that at a point $x_0 \in (-T/2, T/2)$ it satisfies $|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq L|t|$ for some constant L and for $|t| < \delta$. Then $\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = f(x_0)$.

4.4.5 Uniform convergence

Definition 4.114. Let $\sum a_n$ be a series with partial sums S_k. The series $\sum a_n$ is called *Cesàro summable* with sum S if

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_1 + \cdots + S_N}{N} = S.$$

Definition 4.115 (Fejer kernel). We define the *Fejer kernel of order* N as

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(t) = \frac{1}{T(N+1)} \frac{\sin^2\left(\frac{(N+1)\pi t}{T}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)},$$

being $D_k(t)$ the Dirichlet kernel of order k, $0 \leq k \leq N$.

Proposition 4.116. The Fejer kernel has the following properties:

1. K_N is a T-periodic, even and non-negative function.
2. $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} K_N(t)dt = 1$ for all N.
3. For all $\delta > 0$, $\lim_{N\to\infty} \sup\{|K_N(t)| : \delta \leq |t| \leq T/2\} = 0$.

Definition 4.117. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$. We define the *Fejér means* $\sigma_N f$, for all $N \in \mathbb{N}$, as

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x) + \cdots + S_N f(x)}{N+1}.$$

Proposition 4.118. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$. Then

$$\sigma_N f(x) = (f * K_N)(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)K_N(t)dt =$$
$$= \int_0^{T/2} [f(x+t) + f(x-t)]K_N(t)dt.$$

Theorem 4.119 (Fejér's theorem). Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$ be a function having left and right-hand side limits at point x_0. Then,

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

In particular, if f is continuous at x_0, $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x_0) = f(x_0)$.

Theorem 4.120 (Fejér's theorem). Let f be continuous on $[-T/2, T/2]$. Then $\sigma_N f$ converges uniformly to f on $[-T/2, T/2]$.

Corollary 4.121. Let f be continuous on $[-T/2, T/2]$. Then there exists a sequence of trigonometric polynomials that converge uniformly to f on $[-T/2, T/2]$. In fact,

$$\sigma_N f(x) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Corollary 4.122. Let f and g be continuous functions on $[-T/2, T/2]$ such that $Sf(x) = Sg(x)$. Then $f = g$.

4.4.6 Convergence in norm

Definition 4.123. We say a sequence (f_N) *converge to* f *in norm* $L^2([-T/2, T/2])$ if $\lim_{N\to\infty} \|f_N - f\| = 0$.

Theorem 4.124. Let $f \in L^2([-T/2, T/2])$. Then, $\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\| = 0$.

Corollary 4.125. Let $f \in L^1([-T/2, T/2])$. Then $\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_1 = 0$.

Corollary 4.126. Let $f, g \in L^1([-T/2, T/2])$ be functions such that $Sf(x) = Sg(x)$. Then $\lim_{N\to\infty} \|g - f\|_1 = 0$.

Theorem 4.127 (Bessel's inequality). Let $f \in L^2(I)$, where I is any interval on the real line. Then:

$$T \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2,$$
$$\frac{T}{2}\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N |a_n|^2 + |b_n|^2\right) \leq \|f\|^2,$$

for all $N \in \mathbb{N}$.

Theorem 4.128. $S_N f$ is the trigonometric polynomial of degree N that best approximates f in norm L^2.

Corollary 4.129. Let $f \in L^2([-T/2, T/2])$. Then, $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\| = 0$.

Theorem 4.130 (Parseval's identity). Let $f, g \in L^2([-T/2, T/2])$ be bounded functions. Then

$$\langle f, g \rangle = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}.$$

In particular, if $f = g$, then:

$$\|f\|^2 = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2,$$

$$\|f\|^2 = \frac{T}{2}\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

4.4.7 Applications of Fourier series

Theorem 4.131 (Wirtinger's inequality). Let f be a function such that $f(0) = f(T)$, $f' \in L^2([0, T])$ and $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Then,

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx,$$

with equality if and only if $f(x) = A\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$.

Theorem 4.132 (Wirtinger's inequality). Let $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ with $f(a) = f(b) = 0$. Then,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Theorem 4.133 (Isoperimetric inequality). Let c be a simple and closed curve of class $\mathcal{C}^1$ whose length is L. If A_c is the area enclosed by c, then

$$A_c \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

with equality if and only if c is a circle.

5 Functions of several variables

5.1 | Topology of $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.1. Let M be a set. A *distance* in M is an function $d : M \times M \to \mathbb{R}$ such that $\forall x, y, x \in M$ the following properties are satisfied:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(triangular inequality).*

We define a *metric space* as a pair (M, d) that satisfy the previous properties.

Definition 5.2. Let E be a real vector space. A *norm* on E is a function $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ such that $\forall u, v \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ the following properties are satisfied:

1. $\|u\| \geq 0$.
2. $\|u\| = 0 \iff u = 0$.
3. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(triangular inequality).*

We define a *normed vector space* as a pair $(E, \|\cdot\|)$ that satisfy the previous properties.

Proposition 5.3. Let $(E, \|\cdot\|)$ be a normed vector space. Then (E, d) is a metric space with associated distance $d(u, v) := \|u - v\|$.

Definition 5.4. Let E be a real vector space. A *dot product* on E is a function $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ such that $\forall u, v, w \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ the following properties are satisfied:

1. $\langle \alpha u + \beta w, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, v\rangle$,
   $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle$.
2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$.
4. $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$.

We define an *euclidean space* as a pair $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ that satisfy the previous properties.

Proposition 5.5. Let $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be an euclidean space. Then $(E, \|\cdot\|)$ is a normed space with associated norm $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Proposition 5.6. Let $\langle\cdot,\cdot\rangle_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a map defined by

$$\langle u, v\rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, being $u = (u_1, \ldots, u_n)$ and $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Then the pair $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ is an euclidean space.

Corollary 5.7. Consider the norm $\|\cdot\|_2$ and distance d_2 in $\mathbb{R}^n$ defined as follows:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2},$$

$$d_2(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}.$$

Then, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ is a normed space and $(\mathbb{R}^n, d_2)$ is a metric space.

Proposition 5.8. Let $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be an euclidean space with the norm defined as $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Then for all $u, v \in E$ the following properties are satisfied:

1. $\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|$ *(Cauchy-Schwarz inequality).*
2. $\|u - v\| \geq \|u\| - \|v\|$.
3. $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$ *(Parallelogram law).*
4. $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$.
5. On $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, if $u = (u_1, \ldots, u_n)$, then:

$$|u_i| \leq \|u\| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

Definition 5.9. Let $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a linear map. We define the *norm of* L as

$$\|L\| = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Lemma 5.10. Let $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ be a map defined as $\Phi(L) = \|L\|$. Then Φ is a norm on the vector space $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Proposition 5.11. Let $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Then we have that

$$\|L\| = \inf\{C : \|L(x)\| \leq C\|x\|\}.$$

Corollary 5.12. Let $L, M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ be linear maps with associated matrices $L = (a_{ij}), M = (b_{ij})$ respectively. Then the following properties are satisfied:

1. $\|L(x)\| \leq \|L\|\|x\|$.
2. $\|L\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$.
3. $|a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon, \forall i, j \iff \|L - M\| < \varepsilon'$.

For the following definitions let (M, d) be a metric space and A a subset of M.

Definition 5.13. A *sphere* with center p and radius $r \in \mathbb{R}^+$ is the set $S(p, r) = \{x \in M : d(x, p) = r\}$.

Definition 5.14. An *open ball* with center p and radius $r \in \mathbb{R}^+$ is el conjunt $B(p, r) = \{x \in M : d(x, p) < r\}$.

Definition 5.15. A *closed ball* with center p and radius $r \in \mathbb{R}^+$ is the set $\overline{B}(p, r) = \{x \in M : d(x, p) \leq r\}$.

Definition 5.16. A is a *bounded set* if exists a ball that contains it.

Definition 5.17. A *neighborhood* of p is a bounded set $E(p) \subset M$ such that $\exists r \in \mathbb{R}^+$ with $B(p,r) \subset E(p)$.

Definition 5.18. p is an *interior point of* A if $\exists r \in \mathbb{R}^+$ such that $B(p,r) \subset A$. The *interior of* A is the set $\mathring{A}$ containing all interior points of A.

Definition 5.19. p is an *exterior point of* A if $\exists r \in \mathbb{R}^+$ such that $B(p,r) \cap A = \emptyset$. The *exterior of* A is the set $\mathring{A}$ containing all exterior points of A.

Definition 5.20. p is an *adherent point* of A if $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$. The *adherence* of A is the set $\overline{A}$ containing all adherent points of A.

Definition 5.21. p is a *limit point* of A if $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $B(p,r) \setminus \{p\} \cap A \neq \emptyset$. The *limit set* of A is the set A' containing all limit points of A.

Definition 5.22. p is an *isolated point* of A if it is an adherent but not limit point, that is, if $p \in A$ and $\exists r \in \mathbb{R}^+$ such that $B(p,r) \setminus \{p\} \cap A = \emptyset$.

Definition 5.23. p is a *boundary point* of A if $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$ and $B(p,r) \cap A^c \neq \emptyset$. The *boundary* of A is the set ∂A containing all boundary points of A.

Proposition 5.24. If p is a limit point of A, then $B(p,r)$ has infinity many point of A, $\forall r \in \mathbb{R}^+$.

Theorem 5.25 (Bolzano-Weierstraßtheorem). Let $B \subset \mathbb{R}^n$ be a set. If B has infinity many point and it is bounded, then it has at least a limit point.

Definition 5.26. A is *open* if $\forall p \in A$, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ such that $B(p,r) \subset A$.

Definition 5.27. A is *closed* if its complementary A^c is open.

Proposition 5.28. A is closed $\iff A = \overline{A} \iff \partial A \subset A \iff A' \subset A$.

Proposition 5.29. A is open $\iff A = \mathring{A}$.

Proposition 5.30.

- $\mathring{A}$ is the biggest open set contained in A, that is, if $B \subset A$ is open, $B \subset \text{Int } A$.
- $\overline{A}$ is the smallest set contained in A, that is, if $B \supset A$ is closed, $\overline{A} \supset B$.

Proposition 5.31.

- Union of open sets is open.
- Intersection of a finite number of open sets is open.
- Union of a finite number of closed sets is closed.
- Intersection of closed sets is closed.

Definition 5.32. We say A is *connected* if non exists open sets $U, V \neq \emptyset$ such that:

$$A \subseteq U \cup V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset, \quad A \cap U \neq \emptyset, \quad A \cap V \neq \emptyset.$$

Definition 5.33. A *sequence* in M is a map

$$\mathbb{N} \to M$$
$$n \mapsto x_n$$

Definition 5.34. We say $(x_n) \subset M$ is *convergent* to $p \in M$ if

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, p) < \varepsilon \text{ if } n > n_0.$$

Definition 5.35. A subset $K \subset \mathbb{R}^n$ is *compact* if it is closed and bounded.

Theorem 5.36. Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be an arbitrary set and $(x_m) \in K$ a sequence. Then K is compact if and only if exists a partial sequence (x_{m_k}) and $x \in K$ such that $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$.

5.2 | Continuity

Definition 5.37 (Graph of a function). Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. We define the *graph of* $\boldsymbol{f}$ as the following subset of $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\text{graph } \boldsymbol{f} = \{(x, \boldsymbol{f}(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U\}.$$

Definition 5.38. Given a function $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, we define the *level set* $C_k(\boldsymbol{f})$ as $C_k(\boldsymbol{f}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{f}(x) = k\}$.

Definition 5.39. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $p \in U'$. We say $\lim\limits_{x\to p} modulusofcontinuity(x) = L$ if $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ such that $\|\boldsymbol{f}(x) - L\| < \varepsilon$ if $\|x - p\| < \delta$.

Proposition 5.40. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, and $p \in U'$.

1. The limit of $\boldsymbol{f}$ at point p, if exists, is unique.
2. $\lim\limits_{x\to p} \boldsymbol{f}(x) = L \iff \lim\limits_{x\to p} f_j(x) = L_j \quad \forall j = 1, \ldots, m.$

Lemma 5.41. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $x_0 \in U'$. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(x) = L \iff \forall (x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ and $x_n \neq x_0$ for all n we have $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(x_n) = L$.

Definition 5.42. We say that $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is *continuous* at $p \in U'$ if exists $\exists \lim\limits_{x\to p} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(p)$. We say that $\boldsymbol{f}$ is continuous on U, if it is at each point $p \in U$.

Definition 5.43. We say that $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is *uniformly continuous* on U if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(y)\| < \varepsilon\ \forall x, y \in U : \|x - y\| < \delta$.

Corollary 5.44. A uniformly continuous function is continuous.

Theorem 5.45 (Heine's theorem). Let $\boldsymbol{f} : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be continuous function and K a compact set. Then $\boldsymbol{f}$ is uniformly continuous on K.

Theorem 5.46. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be an uniformly continuous function and $(x_n) \in U$ a Cauchy sequence. Then $(\boldsymbol{f}(x_n)) \in \mathbb{R}^m$ is a Cauchy sequence.

Theorem 5.47. Let $\boldsymbol{f} : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a continuous function and K a compact set. Then $\boldsymbol{f}(K)$ is a compact set.

Theorem 5.48 (Weierstraß' theorem). Let $\boldsymbol{f} : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuous function and K a compact set. Then $\boldsymbol{f}$ attains a maxima and a minima on K.

Theorem 5.49 (Intermediate value theorem). Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuous function and U a connected set. Then $\forall x, y \in U$ and $\forall c \in [\boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{f}(y)]$, $\exists z \in U : \boldsymbol{f}(z) = c$.

Definition 5.50. A function $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is called *Lipschitz continuous* if $\exists k > 0$ such that

$$\|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(y)\| \leq k\|x - y\|$$

$\forall x, y \in U$. If $0 \leq k < 1$ we say that $\boldsymbol{f}$ is a *contraction*.

Proposition 5.51. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a locally Lipschitz continuous function at $p \in U$. Then $\boldsymbol{f}$ is continuous at p.

Definition 5.52. Let (M, d) be a metric space and $\boldsymbol{f} : M \to \mathbb{R}$ a function. We define the *modulus of continuity of $\boldsymbol{f}$* as the function $\omega_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ defined by:

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(y)| : d(x, y) < \delta, x, y \in M\}.$$

5.3 | Differential calculus

5.3.1 Differential of a function

Definition 5.53. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $a \in U$. The function $\boldsymbol{f}$ is *differentiable* at a if there exists a linear map $D\boldsymbol{f}(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ such that

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{\|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(a) - D\boldsymbol{f}(a)(x - a)\|}{\|x - a\|} &= \\ = \lim_{h \to 0} \frac{\|\boldsymbol{f}(a + h) - \boldsymbol{f}(a) - D\boldsymbol{f}(a)h\|}{\|h\|} &= 0.\end{aligned}$$

$D\boldsymbol{f}(a)$ is called the *differential of $\boldsymbol{f}$ at point a*. Furthermore, we say $\boldsymbol{f}$ is differentiable on $B \subset U$ if is differentiable at each point of B.

Proposition 5.54. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $a \in U$. $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ is differentiable at a if and only if every component function $f_j : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is differentiable at a.

Definition 5.55. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in U$ and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\| = 1$. The *directional derivative of $\boldsymbol{f}$ at a* in the direction of $\mathbf{v}$ is

$$D_{\mathbf{v}}\boldsymbol{f}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(a + t\mathbf{v}) - \boldsymbol{f}(a)}{t}.$$

Definition 5.56. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set, $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}$ and $a \in U$. If the following limit exists, we define the *partial derivative with respect to x_j of $\boldsymbol{f}$ at a* as

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(a + h\mathbf{e}_j) - \boldsymbol{f}(a)}{h}.$$ [11]

Definition 5.57. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $a \in U$. If all partial derivative of $\boldsymbol{f}$ at a exists, we call *Jacobian matrix of $\boldsymbol{f}$ at a* at the matrix associated with $D\boldsymbol{f}(a)$ (with respect to the canonical basis of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$):

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

If $n = m$, we define the *Jacobian determinant* as $J\boldsymbol{f}(a) = \det D\boldsymbol{f}(a)$.

Definition 5.58. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set, $f : U \to \mathbb{R}$ and $a \in U$ such that f is differentiable at $a \in U$. The *gradient of f at a* is

$$\nabla f(a) := Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Proposition 5.59. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set and $f : U \to \mathbb{R}$ a differentiable function at $a \in U$. Then there exists the tangent hyperplane to the graph of f at a and has the equation

$$x_{n+1} = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a).$$ [12]

Theorem 5.60. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$ and $v \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\| = 1$. If f is differentiable at a, then $D_{\mathbf{v}}f(a)$ exists and

$$D_{\mathbf{v}}f(a) = \nabla f(a) \cdot \mathbf{v}.$$

Proposition 5.61. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set, $f : U \to \mathbb{R}$ a differentiable function on U and C_k be the level set of value $k \in \mathbb{R}$. Then $\nabla f(a) \perp C_k$ at $a \in C_k$.

Proposition 5.62. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set and $f : U \to \mathbb{R}$ a differentiable function at $a \in U$ and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Then:

- $\max\{D_{\mathbf{v}}f(a) : \|\mathbf{v}\| = 1\} = \|\nabla f(a)\|$ and it is reached when $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.
- $\min\{D_{\mathbf{v}}f(a) : \|\mathbf{v}\| = 1\} = -\|\nabla f(a)\|$ and it is reached when $\mathbf{v} = -\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Theorem 5.63. Let $\boldsymbol{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a differentiable function at $a \in U$. Then $\boldsymbol{f}$ is locally Lipschitz continuous at a.

Theorem 5.64. Let $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be two differentiable functions at a point $a \in U$ and let $c \in \mathbb{R}$. Then:

[11] Aquí $\mathbf{e}_j$ is el j-èssim vector de la base canònica de $\mathbb{R}^n$, is a dir, $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots, 0)$.

[12] In general (not only the case of the graph of a function) the tangent hyperplane to function f at a point a is given by the equation

$$\nabla f(a) \cdot (x - a) = 0.$$

1. $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ is differentiable at a and
$$D(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(a) = D\boldsymbol{f}(a) + D\boldsymbol{g}(a).$$

2. $c\boldsymbol{f}$ is differentiable at a i
$$D(c\boldsymbol{f})(a) = cD\boldsymbol{f}(a).$$

3. If $m=1$, then $(fg)(x) = f(x)g(x)$ is differentiable at a and
$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

4. If $m=1$ and $g(a)\neq 0$, then $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ is differentiable at a and
$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{[g(a)]^2}.$$

Theorem 5.65 (Chain rule). Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ and $V\subseteq\mathbb{R}^m$ open sets. Let $\boldsymbol{f}: U\to\mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{g}: V\to\mathbb{R}^p$. Suppose that $\boldsymbol{f}(U)\subset V$, $\boldsymbol{f}$ is differentiable at $a\in U$ and $\boldsymbol{g}$ is differentiable at $\boldsymbol{f}(a)$. Then $g\circ\boldsymbol{f}$ is differentiable at a and
$$D(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(a) = D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(a))\circ Df(a).$$

Definition 5.66. Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ be an open set and $\boldsymbol{f}: U\to\mathbb{R}^m$. We say that $\boldsymbol{f}$ is of class $\mathcal{C}^k(U)$, $k\in\mathbb{N}$, if all partial derivatives of order k exists and are continuous U. We say that $\boldsymbol{f}$ is of class $\mathcal{C}^\infty(U)$ if it is of class $\mathcal{C}^k(U)$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Theorem 5.67 (Differentiability criterion). Let $\boldsymbol{f}: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. If all partial derivatives $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ exists in a neighborhood of $a\in U$ and are continuous at a, then $\boldsymbol{f}$ is differentiable at $a\in U$.

Proposition 5.68. Let $\boldsymbol{f}: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ and $A\subseteq U$. If all partial derivatives of $\boldsymbol{f}$ exist on A and are bounded functions on A, then $\boldsymbol{f}$ is uniformly continuous on A.

Theorem 5.69 (Mean value theorem). Let $f: B\to\mathbb{R}$ be a function of class $\mathcal{C}^1$ in an open connected set B. Let $x,y\in B$. Then,
$$f(x)-f(y) = \nabla f(z)\cdot(x-y)$$
for some $z\in[x,y]$.

Theorem 5.70 (Mean value theorem for vector-valued functions). Let $\boldsymbol{f}: B\to\mathbb{R}^m$ be a function of class $\mathcal{C}^1$ in an open connected set B. Let $x,y\in B$. Then,
$$\|\boldsymbol{f}(x)-\boldsymbol{f}(y)\| \leq \|Df(z)\|\|x-y\|$$
for some $z\in[x,y]$.

5.3.2 Higher order derivatives

Definition 5.71. Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ be an open set and $f: U\to\mathbb{R}$. We denote the *partial derivative of f of order k with respect to the variables $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$* as
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}.$$

Definition 5.72. Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ be an open set. If $f: U\to\mathbb{R}$ has second order partial derivatives at $a\in U$, we define the *hessian matrix of f at a point a* as
$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Theorem 5.73 (Schwarz's theorem). Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ be an open set and $f: U\to\mathbb{R}$. If f has mixed partial derivatives of order k and are continuous functions on $A\subset U$, then for any permutation $\sigma\in S_k$ we have
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_k)}\cdots\partial x_{\sigma(i_1)}}(a) \quad \forall a\in A.$$

5.3.3 Inverse and implicit function theorems

Lemma 5.74. Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ be an open set and $\boldsymbol{f}: U\to\mathbb{R}^m$ with $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}^1(U)$. Given an $a\in U$ and $\varepsilon>0$, $\exists B(a,r)\subset U$ such that
$$\|\boldsymbol{f}(x)-\boldsymbol{f}(y)\| \leq (\|D\boldsymbol{f}(a)\|+\varepsilon)\|x-y\|$$
$\forall x,y\in B(a,r)$.

Lemma 5.75. Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ be an open set and $\boldsymbol{f}: U\to\mathbb{R}^n$ with $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}^1(U)$. Suppose that for some $a\in U$, $J\boldsymbol{f}(a)\neq 0$. Then $\exists B(a,r)\subset U$ and $c>0$ such that
$$\|\boldsymbol{f}(y)-\boldsymbol{f}(x)\| \geq c\|y-x\|$$
$\forall x,y\in B(a,r)$. In particular, $\boldsymbol{f}$ is one-to-one on $B(a,r)$.

Theorem 5.76 (Inverse function theorem). Let $U\subseteq\mathbb{R}^n$ be an open set, $\boldsymbol{f}: U\to\mathbb{R}^n$ with $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}^1(U)$ and $a\in U$ such that $J\boldsymbol{f}(a)\neq 0$. Then $\exists B = B(a,r)\subset U$ such that:

1. $\boldsymbol{f}$ is one-to-one a B.
2. $\boldsymbol{f}(B) = V$ is an open set of $\mathbb{R}^n$.
3. $\boldsymbol{f}^{-1}: V\to B$ is of class $\mathcal{C}^1$ on V.

Moreover, is is satisfied that $D\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(a)) = D\boldsymbol{f}(a)^{-1}$

Definition 5.77. A function $\boldsymbol{f}: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ is a *diffeomorphism of class $\mathcal{C}^k$* if it is bijective and both $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{f}^{-1}$ are of class $\mathcal{C}^k$.

Theorem 5.78 (Implicit function theorem). Let $U\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ be an open set, $\boldsymbol{f}: U\to\mathbb{R}^m$ with $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}^1(U)$ and $(a,b) = (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m)\in U$ such that $\boldsymbol{f}(a,b) = 0$. If $D\boldsymbol{f}(x) = (Df_1(x)\mid Df_2(x))$ with $Df_1(x)\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $Df_2(x)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ and $\det Df_2(x)\neq 0$ (i.e. rang $D\boldsymbol{f}(a,b) = m$), then exists an open set $W\subset\mathbb{R}^n$ such that $a\in W$ and a function $\boldsymbol{g}: W\to\mathbb{R}^m$ with $\boldsymbol{g}\in\mathcal{C}^1(W)$, such that
$$\boldsymbol{g}(a) = b \quad \text{i} \quad \boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{g}(x)) = 0 \quad \forall x\in W.$$

Moreover, is is satisfied that
$$D\boldsymbol{g}(a) = -Df_2(a,\boldsymbol{g}(a))^{-1}\circ Df_1(a,\boldsymbol{g}(a)).$$

5.3.4 Taylor's polynomial and maxima and minima

Theorem 5.79 (Taylor's theorem). Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$ and $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$. Then:

$$f(x) = f(a) + \\ + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \left(\sum_{i_m,\ldots,i_1=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}(a) \prod_{j=1}^{m} (x_{i_j} - a_{i_j}) \right) + \\ + R_k(f, a),$$

where

$$R_k(f, a) = \\ = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_{k+1},\ldots,i_1=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\xi) \prod_{j=1}^{k+1} (x_{i_j} - a_{i_j}) = \\ = o(\|x - a\|^k)$$

for some $\xi \in [a, x]$. In particular, for $k = 2$ we have:

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + \frac{1}{2} Hf(a)(x - a, x - a) + \\ + R_2(f, a),$$

where $R_2(f, a) = o(\|x - a\|^2)$.

Definition 5.80. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set and $f : U \to \mathbb{R}$. We say that f has a *local maximum at* $a \in U$ if $\exists B(a, r) \subset U : f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in B(a, r)$. Analogously, we say that f has a *local minimum at* $a \in U$ if $\exists B(a, r) \subset U : f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in B(a, r)$. A *local extremum* is either a local maximum or a local minimum. Moreover, if $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in U$, we say that f has a *global maximum at* $a \in U$. Similarly if $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in U$, we say that f has a *global minimum at* $a \in U$.

Proposition 5.81. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set and $f : U \to \mathbb{R}$ be a differentiable function at $a \in U$. If f has a local extremum at a, then $\nabla f(a) = 0$.

Definition 5.82. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set and $f : U \to \mathbb{R}$. We say that $a \in U$ is a *critical point of* f if $\nabla f(a) = 0$. We say that $a \in U$ is a *saddle point* if a is a critical point but not a local extremum.

Theorem 5.83. Let Q be a quadratic form. Then for all $x \neq 0$ we have:

$$Q \text{ is defined positive} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : Q(x) \geq \lambda \|x\|^2.$$
$$Q \text{ is defined negative} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^- : Q(x) \leq \lambda \|x\|^2.$$

Proposition 5.84 (Sylvester's criterion). Let $A = (a_{ij})$ be a symmetric matrix. A is defined positive if and only if all its principal minors are positive, that is:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

A is defined negative if and only if its principal minor of order k have sign $(-1)^k$, that is:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Theorem 5.85. Let $U \subseteq \mathbb{R}^2$ be an open set, $f : U \to \mathbb{R}$ a function of class $\mathcal{C}^2(U)$ and $a \in U : \nabla f(a) = 0$. Let $Hf(a)$ be the hessian matrix of f at a and let $\mathcal{H}f(a)$ be its associated quadratic form. Then:

1. If $\mathcal{H}f(a)$ is defined positive $\implies$ f has a local minimum at a.
2. If $\mathcal{H}f(a)$ is defined negative $\implies$ f has a local maximum at a.
3. If $\mathcal{H}f(a)$ is undefined $\implies$ f has a saddle point at a.

Theorem 5.86 (Lagrange multipliers theorem). Let $f, g_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be function of class $\mathcal{C}^1(U)$ for $i = 1, \ldots, k$ and $1 \leq k < n$. Let $S = \{x \in U : g_i(x) = 0, \forall i\}$ and $a \in S$ such that $f_{|S}(a)$ is a local extremum. If the vectors $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_k(a)$ are linearly independents, then $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ such that:

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(a).$$

5.4 | Integral calculus

5.4.1 Integration over compact rectangles

Definition 5.87. A *rectangle* R of $\mathbb{R}^n$ is a product $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ where $I_j \in \mathbb{R}$ are bounded and non degenerate[13] intervals.

Definition 5.88. The *n-dimensional volum* (*surface* if $n = 2$ or *length* if $n = 1$) of a bounded rectangle $R = I_1 \times \cdots \times I_n$, $I_i = [a_i, b_i]$ is:

$$\mathrm{vol}(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Definition 5.89. Given a rectangle $R = I_1 \times \cdots \times I_n$, a *partition of* R is the product $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ where $\mathcal{P}_j$ is a partition of the interval I_j. A partition $\mathcal{P}$ is *regular* if for all j, $\mathcal{P}_j$ is regular, that is, all subintervals in $\mathcal{P}_j$ have the same size.

Definition 5.90. Given two partitions $\mathcal{P} = I_1 \times \cdots \times I_n$ and $\mathcal{P}' = I'_1 \times \cdots \times I'_n$ of a rectangle R, we say that $\mathcal{P}'$ is *finer than* $\mathcal{P}$ if cada $\mathcal{P}'_j$ is finer than $\mathcal{P}_j$.

Definition 5.91. Let $R \subset \mathbb{R}^n$ be a compact rectangle, $f : R \to \mathbb{R}$ a bounded function and $\mathcal{P}$ a partition of R. For each subrectangle R_j ($j = 1, \ldots, m$) determined by $\mathcal{P}$ let

$$m_j = \inf\{f(x) : x \in R_j\} \quad \text{i} \quad M_j = \sup\{f(x) : x \in R_j\}.$$

[13] That is, non-empty intervals with more than one point.

We define the *lower sum* and the *upper sum* of f with respect to $\mathcal{P}$ as:

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{j=1}^{m} m_j \mathrm{vol}(R), \qquad U(f,\mathcal{P})=\sum_{j=1}^{m} M_j \mathrm{vol}(R).$$[14]

Definition 5.92. Let $R\subset\mathbb{R}^n$ be a compact rectangle and $f:R\to\mathbb{R}$ a bounded function. We denote by $\mathbf{P}$ the set of all partitions of R. We define the *lower integral* and *upper integral* of f on R as

$$\underline{\int_R} f=\sup\{L(f,\mathcal{P}):\mathcal{P}\in\mathbf{P}\},$$
$$\overline{\int_R} f=\inf\{U(f,\mathcal{P}):\mathcal{P}\in\mathbf{P}\}.$$

We say that f is *Riemann-integrable* on R if $\underline{\int_R} f=\overline{\int_R} f$.

Proposition 5.93. Let $R\subset\mathbb{R}^n$ be a compact rectangle and $f:R\to\mathbb{R}$ a bounded function. f is Riemann-integrable if and only if $\forall\varepsilon$, there exists a partition $\mathcal{P}$ of R such that $U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})<\varepsilon$.

Definition 5.94. Let $R\subset\mathbb{R}^n$ be a compact rectangle, $f:R\to\mathbb{R}$ a bounded function, $\mathcal{P}$ a partition of R and ξ_j an arbitrary point of the subrectangle R_j, $j=1,\ldots,m$. Then we define the *Riemann sum of f associated to $\mathcal{P}$* as:

$$S(f,\mathcal{P})=\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\mathrm{vol}(R_j).$$

Theorem 5.95. Let $R\subset\mathbb{R}^n$ be a compact rectangle and $f:R\to\mathbb{R}$ a bounded function. f is Riemann-integrable over R if and only if $\forall\varepsilon>0$, there exists a partition $\exists\mathcal{P}_\varepsilon$ of R such that

$$\left|S(f,\mathcal{P})-\int_R f\right|=\left|\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\mathrm{vol}(R_j)-\int_R f\right|<\varepsilon,$$

for every $\mathcal{P}$ finer than $\mathcal{P}_\varepsilon$ and for any $\xi_j\in R_j$.

5.4.2 Fubini's theorem

Theorem 5.96 (Fubini's theorem). Let $R_1\subset\mathbb{R}^n$ and $R_2\subset\mathbb{R}^m$ be closed rectangles and $f:R_1\times R_2\to\mathbb{R}$ be an integrable[15] function. Suppose for every $x_0\in R_1$, $f(x_0,y)$ is integrable over R_2. Then the function $g(x)=\int_{R_2} f(x,y)dy$ is integrable over R_1 and

$$\int_{R_1\times R_2} f(x,y)=\int_{R_1} dx\int_{R_2} f(x,y)dy.$$

Similarly if for every $y_0\in R_2$, $f(x,y_0)$ is integrable over R_1, then the function $h(y)=\int_{R_1} f(x,y)dx$ is integrable over R_2 and

$$\int_{R_1\times R_2} f(x,y)=\int_{R_2} dy\int_{R_1} f(x,y)dx.$$

Corollary 5.97. Let $R_1\subset\mathbb{R}^n$ and $R_2\subset\mathbb{R}^m$ be closed rectangles and let $f:R_1\times R_2\to\mathbb{R}$ be a continuous function on $R_1\times R_2$. Then,

$$\int_{R_1\times R_2} f=\int_{R_1} dx\int_{R_2} f(x,y)dy=\int_{R_2} dy\int_{R_1} f(x,y)dx.$$

Corollary 5.98. Let $R=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$ be a rectangle. If $f:R\to\mathbb{R}$ is a continuous function, then

$$\int_R f=\int_{a_n}^{b_n} dx_n\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1}\cdots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1.$$

Definition 5.99. Let $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ be a compact set and $\varphi_1,\varphi_2:D\to\mathbb{R}$ be continuous functions such that $\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x)$ $\forall x\in D$. The set

$$S=\{(x,y)\subset\mathbb{R}^n:x\in D,\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}$$

is called an *elementary region in* $\mathbb{R}^n$. In particular, if $n=2$, we say S is *x-simple*. An elementary region in $V\subset\mathbb{R}^3$ is called *xy-simple* if is of the form

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in U,\phi_1(x,y)\leq z\leq\phi_2(x,y)\},$$

where U is an elementary region in $\mathbb{R}^2$ and ϕ_1,ϕ_2 are continuous functions on U.[16]

Theorem 5.100 (Fubini's theorem for elementary regions). Let $S=\{(x,y)\subset\mathbb{R}^n:x\in D,\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}$ be an elementary region in $\mathbb{R}^n$ and $f:S\to\mathbb{R}$. If f is integrable over S and for all $x_0\in D$ the function $f(x_0,y)$ is integrable over $[-M,M]$, $M\in\mathbb{R}$, then

$$\int_S f=\int_D dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Definition 5.101. Let $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ be a compact set and $S=\{(x,y)\subset\mathbb{R}^n:x\in D,\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}$ an elementary region. We define the *n-dimensional volume of Sde S* as

$$\mathrm{vol}(S):=\int_S dx=\int_D dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$[17]

Corollary 5.102 (Cavalieri's principle). Let $\Omega\subset R\times[a,b]$ be a set in $\mathbb{R}^n$ where $R\subset\mathbb{R}^{n-1}$ is a rectangle. For every $t\in[a,b]$ let

$$\Omega_t=\{(x,y)\in\Omega:y=t\}\subset\mathbb{R}^n$$

be the section of Ω corresponding to the hyperplane $y=t$. If $\nu(\Omega_t)$ is the $(n-1)$-dimensional volume (area if $n=3$ or length if $n=2$) of Ω_t, then

$$\mathrm{vol}(\Omega)=\int_a^b \nu(\Omega_t)dt.$$

[14] We will omit the results relating this definitions because. In fact they are a natural extension of results of single-variable functions course. Because of that here we only expose the most important ones.

[15] As we only have defined Riemann-integration, it goes without saying that an *integrable function* means a *Riemann-integrable function*.

[16] Analogously we define *y-simple* region in $\mathbb{R}^2$ and *yz-simple* or *xz-simple* regions in $\mathbb{R}^3$.

[17] In particular, we define the area of a region $S\subset\mathbb{R}^2$ as àrea$(S)=\iint_S dxdy$ and the volume of a region $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ as $\mathrm{vol}(\Omega)=\iiint_\Omega dxdydz$.

Definition 5.103 (Center of mass). The *center of mass* of an object with mass density $\rho(x,y,z)$, that occupies the region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, is the point $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in \mathbb{R}^3$ whose coordinates are:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz,$$

where $m = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz$ is the total mass of the object.

Definition 5.104 (Moment of inertia). Given a body with mass density $\rho(x,y,z)$ occupying the region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ and a line $L \subset \mathbb{R}^3$, the *moment of inertia* of the body about the line L is

$$I_L = \iiint_\Omega d(x,y,z)^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

where $d(x,y,z)$ denotes the distance from (x,y,z) to the line L. In particular, when L is the z-axis, then

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$

and similarly for I_x and I_y. The moment of inertia of the body about the xy-plane is definedy by

$$I_{xy} = \iiint_\Omega z^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

and similarly for I_{yz} and I_{zx}.

5.4.3 Change of variable

Theorem 5.105 (Change of variable theorem). Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set and let $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ a diffeomorphism. If $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ is integrable on $\varphi(U)$, then

$$\int_{\varphi(U)} f = \int_U (f\circ\varphi)|J\varphi|.$$

Corollary 5.106 (Integral in polar coordinates). Let $\varphi : [0,\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}$ such that

$$\varphi(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Then we have $|J\varphi| = r$ and, therefore,

$$\int_{\varphi(U)} f(x,y)dxdy = \int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Corollary 5.107 (Integral in cylindrical coordinates). Let $\varphi : [0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$\varphi(r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Then we have $|J\varphi| = r$ and, therefore,

$$\int_{\varphi(U)} f(x,y,z)dxdydz = \int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$$

Corollary 5.108 (Integral in spherical coordinates). Let $\varphi : [0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ such that

$$\varphi(\rho,\theta,\phi) \mapsto (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi).$$

Then we have $|J\varphi| = \rho^2\sin\phi$ and, therefore,

$$\int_{\varphi(U)} f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \int_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi.$$

5.5 | Vector calculus

5.5.1 Arc-length and Line integrals

Definition 5.109. Let $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ be a parametrization of a curve and $\mathcal{P} = \{t_0,\dots,t_n\}$ be a partition of $[a,b]$. Then, the *length of the polygonal* created from the vertices $\boldsymbol{\gamma}(t_i)$, is

$$L(\boldsymbol{\gamma},\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\gamma}(t_i) - \boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})\|.$$

Definition 5.110. Let $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ be a parametrization of a curve c. The *arc length of* c is

$$L(c) = \sup\{L(\boldsymbol{\gamma},\mathcal{P}) : \mathcal{P} \subset [a,b]\} \in [0,\infty].$$

Definition 5.111. We say that a curve c is *rectifiable* if it has a finite arc length, that is, if $L(c) < \infty$.

Proposition 5.112. Let $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ be a parametrization of class $\mathcal{C}^1$ of a curve c. Then c is rectifiable and

$$L(c) = \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|dt.$$ [18]

Definition 5.113. Let $\boldsymbol{F} : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ be a vector field. If all its component functions F_i are integrable, we define

$$\int_U \boldsymbol{F} = \left(\int_U F_1, \dots, \int_U F_n\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 5.114. Let c be a curve in $\mathbb{R}^2$ parametritzed by $\boldsymbol{\gamma} = (x(t), y(t))$. The unit tangent vector to the curve at time t is

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|}.$$

The normal vector to the curve is $\boldsymbol{N}(t) = (y'(t), -x'(t))$ and the unit normal vector to the curve is

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{N}(t)}{\|\boldsymbol{N}(t)\|}.$$ [19]

Definition 5.115. Let c be a curve parametritzed by $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ and $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ be a diffeomorphism. The composition $\boldsymbol{\gamma}\circ\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ is called a *reparametrization* of c.

[18] Observe that the arc length of a curve does not depend of its parametrization.

[19] Observe that $-N(t)$ is also a normal vector to the curve but, by agreement, we take the one pointing to the right of the curve or, if the curve is closed, the one pointing outwards of the curve.

Definition 5.116. Let c be a curve of class $\mathcal{C}^1$ parametritzed by $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ an L be its arc length. We define *arc length parameter* as

$$s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| dt.$$

We reparametrize c by $\rho(s) = \boldsymbol{\gamma}(t(s))$, $0 \le s \le L$. Then $\rho'(s)$ is a unit tangent vector to c and $\rho''(s)$ is perpendicular to c at the point $\rho(s)$.

Definition 5.117. Let c be a curve of class $\mathcal{C}^2$ and s its arc length parameter. We define the *curvature* of c at the point $\rho(s)$ as

$$\kappa(\rho(s)) = \|\rho''(s)\|.$$

Definition 5.118. Let $c = \{\boldsymbol{\gamma}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$ be a curve of class $\mathcal{C}^1$ and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be continuous function. We define the *line integral of f along c* as

$$\int_c f ds = \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t))\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| dt.$$[20]

Definition 5.119. Let $c = \{\boldsymbol{\gamma}(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$ be a curve of class $\mathcal{C}^1$ and $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a continuous vector field. We define the *line integral of $\boldsymbol{f}$ along c* as

$$\int_c \boldsymbol{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_c \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) dt,$$

where $\mathbf{T}$ is the unit tangent vector c.[21] If c is closed then this integral is called the *circulation of $\boldsymbol{f}$ around c*.

Definition 5.120. A *Jordan arc* is the image of an one-to-one continuous map $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. A *Jordan closed curve* is the image of an one-to-one continuous map $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ such that $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$.

5.5.2 Conservative vector fields

Definition 5.121. Let $U \subseteq \mathbb{R}^n$ be a domain and $f : U \to \mathbb{R}$ a function of class $\mathcal{C}^1$. We say that $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^n$ is a *conservative* or a *gradient vector field* if

$$\boldsymbol{f}(x) = \nabla f(x) \quad \forall x \in U.$$

The function f is called the *potential* of $\boldsymbol{f}$.

Theorem 5.122. Let $\boldsymbol{f} = \nabla f$ be a conservative vector field on $U \subseteq \mathbb{R}^n$ and c be a closed curve that admits a parametrization $\{\boldsymbol{\gamma}(t) : a \le t \le b\}$ of class $\mathcal{C}^1(U)$. Then

$$\int_c \boldsymbol{f} \cdot d\mathbf{s} = f(\boldsymbol{\gamma}(b)) - f(\boldsymbol{\gamma}(a)).$$

Corollary 5.123. Let $\boldsymbol{f}$ be a conservative vector field on U and c be a closed curve that admits a parametrization of class $\mathcal{C}^1(U)$. Then $\int_c \boldsymbol{f} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

5.5.3 Divergence, curl and Laplacian

Definition 5.124. Let $\boldsymbol{f} = (F_1, \ldots, F_n)$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. The *divergence of $\boldsymbol{f}$* is

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}.$$

Definition 5.125. Let $\boldsymbol{f} = (F_1, F_2, F_3)$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$. The *curl de $\boldsymbol{f}$* is

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Definition 5.126. Let $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a function of class $\mathcal{C}^2(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$. The *Laplacian of f* is

$$\nabla^2 f = \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

Proposition 5.127. Let U be an open set of $\mathbb{R}^3$ and $f : U \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^3$ be functions of class $\mathcal{C}^2(U)$. Then for all $x \in U$ we have:

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{div}(\nabla f) = \nabla^2 f.$$

5.5.4 Surface area and surface integrals

Proposition 5.128. Let S be the graph of a function $z = \Phi(x, y)$ of class $\mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$. Then

$$\operatorname{area}(S) = \iint_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Definition 5.129. A *parametritzed surface* $S \subset \mathbb{R}^3$ is the image of a map $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ of class $\mathcal{C}^1(U)$ defined by $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Proposition 5.130. Let $S = \Phi(U)$ be a surface in $\mathbb{R}^3$ of class $\mathcal{C}^1$ parametritzed by Φ. Then unit normal vector to S at the point $\Phi(u, v)$ is

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|}.$$

Proposition 5.131. Let $S = \Phi(U)$ be a surface in $\mathbb{R}^3$ of class $\mathcal{C}^1$ parametritzed by Φ. Then,

$$\operatorname{area}(S) = \iint_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du dv.$$

Definition 5.132. Let $S = \Phi(U)$ be a surface of class $\mathcal{C}^1$ parametritzed by Φ and $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ be a continuous function whose domain contain S. We define the *surface integral f over S* as

$$\iint_S f dS = \iint_U f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du dv.$$[22]

[20] Observem que aquesta integral is independent de la parametrization de c.

[21] Observe that the latter integral is independent of the parametrization of c except for a factor of -1 that depends on the orientation of the parametrization.

[22] Observe that this integral is independent of the parametrization of S.

Definition 5.133. Let $S = \Phi(U)$ be a surface of class $\mathcal{C}^1$ parametritzed by Φ and $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a continuous vector field whose domain contain S. We define the *surface integral* f *over* S or the *flux of* $\boldsymbol{f}$ *across* S as

$$\iint_S \boldsymbol{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{n} dS = \\ = \iint_U \boldsymbol{f}(\Phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dudv,$$

where $\mathbf{n}$ is the unit normal vector to S.[23]

5.5.5 Theorems of vector calculus on $\mathbb{R}^2$

Definition 5.134. Let $U \subset \mathbb{R}^3$ be an open set. A *differential 1-form on* U is an expression of the form

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

where F_1, F_2, F_3 are scalar functions defined on U.[24]

Theorem 5.135 (Green's theorem). Let $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ and $c = \partial U$ be the curve formed from the boundary of U.[25] Then

$$\int_{\partial U} \boldsymbol{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_U \operatorname{rot} \boldsymbol{f} dxdy.$$[26]

Corollary 5.136. Let U be a region in $\mathbb{R}^2$ and ∂U its boundary. Then,

$$\grave{\text{a}}\text{rea}(U) = \int_{\partial U} xdy = -\int_{\partial U} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial U} (xdy - ydx).$$

Theorem 5.137 (Divergence theorem on $\mathbb{R}^2$). Let $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ with boundary ∂U. Then,

$$\int_{\partial U} \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_U \operatorname{div} \boldsymbol{f} dxdy.$$[27]

5.5.6 Theorems of vector calculus on $\mathbb{R}^3$

Theorem 5.138 (Stokes' theorem). Let S be a parametritzed surface of class $\mathcal{C}^1$ and ∂S be its boundary. Let $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1$ in a domain containing $S \cup \partial S$. Then

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{f} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Corollary 5.139. Let $a \in \mathbb{R}^3$ and $\mathbf{n}$ be a unit vector. Suppose $D_r = D(a, r)$ is a disk of radius r centered at a and perpendicular to $\mathbf{n}$. Let $\boldsymbol{f}$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1(D_r)$. Then

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(a) \cdot \mathbf{n} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\grave{\text{a}}\text{rea}(D_r)} \int_{\partial D_r} \boldsymbol{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

Therefore, the $\mathbf{n}$-th component of $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(a)$ is is the circulation of $\boldsymbol{f}$ in a small circular surface perpendicular to $\mathbf{n}$, per unit of area.

Theorem 5.140 (Gauß' or divergence theorem on $\mathbb{R}^3$). Let $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1$ on a symmetric region[28] $V \subset \mathbb{R}^3$ with boundary ∂V. Then,

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{f} dxdydz$$

Corollary 5.141. Let $B_r = B(a, r)$ be a ball of radius r centered at $a \in \mathbb{R}^3$ and $\boldsymbol{f}$ be a vector field of class $\mathcal{C}^1(B_r)$. Then

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(a) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_r)} \iint_{\partial B_r} \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Therefore, $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(a)$ is the flux of $\boldsymbol{f}$ outward form a, in the normal direction across the surface of a small ball centered on a, per unit of volume.

[23] Observe that the latter integral is independent of the parametrization of S except for a factor of -1 that depends on the orientation of the normal vector $\mathbf{n}$.

[24] Extending this notion, we can define 2-forms and 3-forms as:

$$\begin{aligned} \omega &= F_1 dxdy + F_2 dydz + F_3 dzdy && \text{2-form,} \\ \omega &= F dxdydz && \text{3-form.} \end{aligned}$$

[25] It goes without saying that the orientation is chosen positive, that is counterclockwise.

[26] Alternatively, using differential forms, we get

$$\int_{\partial U} (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_U \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy.$$

[27] The first integral represents the flux of $\boldsymbol{f}$ across the curve ∂U.

[28] A region on $\mathbb{R}^3$ is *symmetric* if is xy-simple, yz-simple and xz-simple.

6 Linear geometry

6.1 | The foundations of geometry

In this section we will only study geometry in the plane.

6.1.1 Euclidean geometry

Axiom 6.1 (Euclid's axioms).

1. It is possible to draw, from any point to any point, a straight line.
2. It is possible to extend any segment by either of its two ends.
3. With center at any point it is possible to draw a circle that passes through any other point.
4. All right angles are equal.
5. If a line segment intersects two straight lines forming two interior angles on the same side that sum to less than two right angles, then the two lines, if extended indefinitely, meet on that side on which the angles sum to less than two right angles.

5′. *(Playfair's axiom)* Given a line and a point not on it, at most one line parallel to the given line can be drawn through the point.

6.1.2 Hilbert's axioms

Definition 6.2. In elementary plane geometry, there are two types of objects, *points* and *lines*, which can have three types of relationships between them:

- An *incidence relation.* We say, for example, that a point lies on a line or a line passes through a point.
- An *order relation.* We say, for example, that a point lies between two other points.
- A *congruence relation.* We say, for example, that a segment is congruent to another or an angle is congruent to another.[29]

Axiom 6.3 (Incidence axioms).

1. For every two points there exists no more than one line that contains them both.
2. There exist at least two points on a line.
3. There exist at least three points that do not lie on the same line.

Axiom 6.4 (Order axioms).

1. If a point B lies between A and C, then B is also between C and A and there exists a line containing the distinct points A, B, C.
2. If A and B are two points, there exists at least one point C such that B lies between A and C.
3. Given three point on a line, there is no more than one which lies between the other two.
4. *(Pasch's axiom)* Let A, B, C be three points not-lying in the same line and let r be a line not passing through any of the points A, B, C and passing through a point on the segment AB. Then it also passes through either a point of the segment BC or a point of the segment AC.

Definition 6.5. A *ray* or *half-line* is a point A, called vertex, all the points of a line passing through A lying on the same side with respect to A.

Definition 6.6. A *half-plane* is a straight line r and all the points lying on the same side with respect to r.

Definition 6.7. An *angle* is a non-ordered pair of rays with same vertices that belong to different straight lines.

Axiom 6.8 (Congruence axioms).

1. Congruence of angles and Congruence of rays are equivalence relations.
2. Siguin a and b dues rectes no necessàriament diferents, A and B punts sobre la recta a and A' un punt sobre la recta b. Fixem un costat de la recta b respecte de A'. Existeix un punt B' sobre aquest costat de b such that $AB \equiv A'B'$.
3. Let a, a' be two lines not necessarily different. Let AB, BC be segments on a that intersect only in one point and $A'B', B'C'$ be segments on a' that intersect only in one point too. If $AB \equiv A'B'$ and $BC \equiv B'C'$, then $AC \equiv A'C'$.
4. Let $\angle hk$ be an angle, k' be a ray and H be one of the two half-planes that k' defines. Then, there is one and only one angle $\angle h'k'$ such that $\angle hk \equiv \angle h'k'$ and h' belongs to H.
5. *(SAS criterion)* Consider two triangles[30] ABC and $A'B'C'$ (not necessarily different). If $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$ and $\alpha \equiv \alpha'$, then $\beta \equiv \beta'$.

Axiom 6.9 (Continuity axioms).

1. *(Axiom of Archimedes)* If AB and CD are any segments, then there exists a number n such that n segments CD constructed contiguously from A, along the ray from A through B, will pass beyond the point B.
2. *(Axiom of completeness)* An extension of a set of points on a line with its order and congruence relations that would preserve the relations existing among the original elements as well as the rest of the axioms is impossible.
3. *(RC)* If a straight line passes through a point inside a circle, it intersects the circle in two points.

[29] We will use the notation $\equiv$ to say that two angles or segments are congruent.

[30] We will use the following notation with respect to the angles of a triangle ABC: $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ and $\gamma = \angle BCA$.

4. *(CC)* If a circle passes through points inside and outside to another circle, the two circle intersect in two points.

Axiom 6.10 (Axiom of Parallels). Let a be any line and A a point not on it. Then there is at most one line that passes through A and does not intersect a.

Definition 6.11. Different types of geometry:

- A *Hilbert plane* is a geometry where axioms 6.3, 6.4 and 6.8 are satisfied.
- A *Pythagorean plane* is a Hilbert plane in which axiom of Parallels is satisfied.
- An *Euclidean plane* is a Pythagorean plane in which axioms RC and CC are satisfied.
- The *Cartesian geometry of* $\mathbb{R}^2$ is the unique geometry satisfying all the Hilbert's axioms.

6.1.3 Absolute geometry

Definition 6.12. *Absolute geometry* is the part of Euclidean geometry that only uses axioms 6.3, 6.4 and 6.8.

Theorem 6.13. In an isosceles triangles, the angles opposite the congruent sides are congruent.

Theorem 6.14 (SAS criterion). If two sides of a triangle and the angle between them are congruent to the corresponding sides and angle of a second triangle, then the two triangles are congruent.

Theorem 6.15. Adjacent angles of congruent angles are congruent.

Theorem 6.16. Opposite angles[31] are congruent.

Theorem 6.17. If A and B are each on one of the sides of an angle with vertex O, any ray with vertex O that passes through an interior point of the angle intersects the segment AB.

Theorem 6.18. There exist right angles.

Theorem 6.19. Let $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ be angles. If $\alpha \equiv \alpha'$ and $\beta \equiv \beta'$, then $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$.

Theorem 6.20 (SSS criterion). If two triangles have all its sides congruent, they have all its angles congruent.

Theorem 6.21. Right angles are congruent.

Theorem 6.22 (Exterior angle theorem). An exterior angle of a triangle is greater than any of the non-adjacent interior angles.

Theorem 6.23. If ℓ is a line and P a point not belonging to ℓ, there exists a line L passing through P and such that not intersects ℓ.

Theorem 6.24 (ASA criterion). If two triangles have a side and the two angles of this side congruent, the triangles are congruent.

Theorem 6.25 (SAA criterion). If two triangles have a side, an angle of this side and the angle opposite to this side, the triangles are congruent.

Theorem 6.26. In any triangle the greater side is opposite to the greater angle.

Theorem 6.27. If a triangle has two congruent angles, it is isosceles.

Theorem 6.28. Every segment has a midpoint.

Theorem 6.29. Every angle has an angle bisector.

Theorem 6.30. Every segment has a perpendicular bisector.

Theorem 6.31 (Saccheri–Legendre theorem). The sum of the angles of a triangle is at most two right angles.

6.1.4 Cartesian geometry

Definition 6.32. An *ordered field* k is a field together with a total order of its elements, satisfying:

- $x \leq y \implies x + z \leq y + z \ \forall z \in k$.
- $x, y \geq 0 \implies xy \geq 0$.

Definition 6.33. We say a field k is *Pythagorean* if $\forall a \in k$ then $1 + a^2 = b^2$ for some $b \in k$.

Theorem 6.34. k^2 is a Pythagorean plane if and only if k is an ordered Pythagorean field.

Definition 6.35. An ordered field k is *Archimedean* if axiom of Archimedes is valid in k.

Definition 6.36. An ordered field k is *Euclidean* if $\forall a \in k$, $a > 0$, there exists a $b \in k$ such that $b^2 = a$.

Theorem 6.37. k^2 is a Euclidean plane if and only if k is an ordered Euclidean field.

Definition 6.38. The smallest Pythagorean field is called *Hilbert field* (Ω) and it can be defined as the intersection of all Pythagorean fields of $\mathbb{R}$. Alternatively, it can be defined as the field whose elements are the real numbers obtained from rational numbers with the operations of addition, subtraction, multiplication, multiplicative inverse and the operation $a \mapsto \sqrt{1 + a^2}$.

Definition 6.39. The smallest Euclidean field is called *constructible field* ($\mathbb{K}$) and it can be defined as the intersection of all Euclidean fields of $\mathbb{R}$. Alternatively, it can be defined as the field whose elements are the real numbers obtained from rational numbers with the operations of addition, subtraction, multiplication, multiplicative inverse and the square root of positive numbers.

[31] Opposite angles are angles that are opposite each other when two lines intersect.

6.1.5 Non-Euclidean geometries

Definition 6.40 (Hyperbolic geometry). *Hyperbolic geometry* is the non-Euclidean geometry where axiom of Parallels fails.

Proposition 6.41. Properties of hyperbolic geometry:

- There are infinity lines parallel to a given line ℓ that pass through a point not lying on ℓ.
- There are lines inside an angle that not interect the sides of the angle.
- The sum of the angles of any triangle is less than two right angles.

Definition 6.42. Hyperbolic geometry models:

- Beltrami-Klein model:
  - Points: $\mathcal{K} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
  - Lines: Lines of $\mathbb{R}^2$ that intersect with $\mathcal{K}$.
  - Incidence and order relations are the same as in ordinary euclidean geometry of $\mathbb{R}^2$.
  - Two segments $AB, A'B' \in \mathcal{K}$ are congruent if and only if there exists an euclidean motion f such that $f(A) = A'$ and $f(B) = B'$. Two angles $hk, h'k' \in \mathcal{K}$ are congruent if and only if there exists an euclidean motion f such that $f(h) = h'$ and $f(k) = k'$.

- Poincaré disk model:
  - Punts: $\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
  - Lines:
    1. Lines of $\mathbb{R}^2$ that pass through the origin.
    2. Circles of $\mathbb{R}^2$ that intersect orthogonally the circle $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
  - Incidence and order relations are the same as in ordinary euclidean geometry of $\mathbb{R}^2$.
  - Is a conformal model: The hyperbolic measure of an angle coincides with the euclidean measure of it. Instead, the distance between two points $A, B \in \mathcal{D}$ is measured using the following formula:

    $$d_h(A,B) := -\log \frac{d(A,P)d(B,Q)}{d(A,Q)d(B,P)}.$$

    where $P, Q \in \mathcal{C}$ are the boundary points of $\mathcal{D}$ on the line passing through A and B so that A lies between P and B.

- Poincaré half-plane model:
  - Points: $\mathcal{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.
  - Lines:
    1. Vertical straight lines of $\mathbb{R}^2$.
    2. Circles of $\mathbb{R}^2$ with center on the x-axis.
  - Incidence and order relations are the same as in ordinary euclidean geometry of $\mathbb{R}^2$.
  - Is a conformal model.the distance between two points $A, B \in \mathcal{D}$ is measured using the following formula:

    $$d_h(A,B) := -\log \frac{d(A,P)d(B,Q)}{d(A,Q)d(B,P)}.$$

    where $P, Q \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ are the points where the semicircle meet the boundary line $y = 0$.

Definition 6.43 (Non-Paschian geometry). *Non-Paschian geometry* is the non-Euclidean geometry where axiom of Archimedes fails.

Proposition 6.44 (Construction of a non-Paschian geometry). Suppose we have a total order relation $\trianglelefteq$ on $\mathbb{R}$ such that:

1. $x \trianglelefteq y \implies x + z \trianglelefteq y + z \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. $\exists a, b \in \mathbb{R} : a \trianglerighteq 0, b \trianglerighteq 1$ and $ab \trianglelefteq 0$.

then, the ordinary affine geometry of $\mathbb{R}^2$ together with $\trianglelefteq$, satisfy all Hilbert's axioms except Pasch's axiom.

Definition 6.45 (Non-SAS geometry). *Non-SAS geometry* is the non-Euclidean geometry where SAS criterion fails.

Proposition 6.46 (Construction of a non-SAS geometry).

- Points: $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\} = \{(x,y,-x) \in \mathbb{R}^3\}$.
- Lines: Ordinary straight lines of $\mathbb{R}^2$ contained in $\mathcal{S}$.
- Incidence and order relations are the same as in ordinary euclidean geometry of $\mathbb{R}^2$.
- Congruence of angles is the same as in the ordinary geometry of $\mathbb{R}^3$. Congruence of segments is based in the following distance:

  $$d'((x,y,-x),(x',y'-x'))^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2.$$

  That is, two segments are congruent if its projections to the plane $z = 0$ are.

Definition 6.47 (Non-Archimedean geometry). *Non-Archimedean geometry* is the non-Euclidean geometry where SAS criterion fails.

6.1.6 Axiomatic projective space

Definition 6.48. An *axiomatic projective space* is a system of points and lines with an incidence relation that satisfy:

1. Every line contains at least 3 points
2. Any two distinct points lie on a unique line.
3. *(Projective axiom)* If A, B, C, D are four different points and lines AB and CD intersect, then lines AC and BD also intersect.

Definition 6.49. Let X be a projective space. A *projective submanifold of* X is a set $Z \neq \emptyset$ of points of X such that if $x, y \in Z$ are different points, then all the points lying on the line passing through x and y belong to Z. Thus, Z is also a projective space.

Proposition 6.50. Let X be a projective space. The intersection of submanifolds of X is also a subvariety of X.

Proposition 6.51. If A and B are submanifolds of a projective space X, we define its sum $A+B$ as the intersection of all submanifolds containing $A \cup B$. As a consequence, $A + B$ is a subvariety of X.

Definition 6.52. Let X, Y be a projective spaces. A *collineation between* X *and* Y is a bijection map $f : X \to Y$ such that $A, B, C \in X$ are three collinear points if and only if $f(A), f(B), f(C) \in Y$ are also collinear.

Definition 6.53. If X is a projective space, the *dimension of* X is the maximum n such that hi ha chain of inclusions

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n,$$

where each X_i is a non-empty submanifold of X. If this n doesn't exist, we say X has infinite dimension.

Definition 6.54. A *projective plane* is a projective space of dimension two that satisfies the following axioms:

1. Any two distinct points lie on a unique line.
2. Any two distinct lines meet in a unique point.
3. There exist at least four points of which no three are collinear.

Theorem 6.55. X is a projective space of dimension two if and only if X satisfies axioms 6.54.

Theorem 6.56 (Duality principle). If a statement $\mathcal{P}$ (which only involves points and lines) is true in any projective plane, then the statement obtained from $\mathcal{P}$ exchanging points by lines (and correctly changing all the connectors to make a consistent statement) is also true in any projective plane.

6.1.7 Affine and projective spaces

Definition 6.57. An *affine plane* is a set of points and lines satisfying the following axioms:

1. Any two distinct points lie on a unique line.
2. If r is a line and $P \notin r$ is a point, there exists a unique line s such that $P \in s$ and r and s does not intersect.
3. Any line has at least two distinct points.
4. There exist at least two distinct lines.

Proposition 6.58 (Passage from the projective plane to the affine plane). Suppose X is a projective plane and $r \in X$ is an arbitrary line of X. Let $\mathbb{A} := X - r$. Then, $\mathbb{A}$ is an affine plane.

Proposition 6.59 (Passage from the affine plane to the projective plane). Suppose $\mathbb{A}$ is an affine plane. Let $\mathcal{R}$ be the set of all lines of $\mathbb{A}$. We define

$$L = \mathcal{R}/\{r \sim s \iff r \parallel s\}.$$

Construction of a projective plane X:

1. The points of X are the points of $\mathbb{A}$ and L.
2. Lines of X are the lines of $\mathbb{A}$ an another line ℓ.
3. Incidence relation on X: Let $P \in X$ be a point and $r \in X$ a line. Then:
   - If $P \in \mathbb{A}$ and $r \in \mathbb{A}$, then $P \in r$ has the same meaning on X and on A.
   - If $P \in \mathbb{A}$ and $r = \ell$, then $P \notin r$.
   - If $P \in X \setminus \mathbb{A} = L$, then $P \in \ell$.
   - If $P \in X \setminus \mathbb{A} \neq L$, then P is an equivalence class of lines of $\mathbb{A}$ and, if $r \in \mathbb{A}$, we say $P \in r$ if $r \in X$.

6.2 | Projective geometry

6.2.1 Projective space

Definition 6.60. Let V be an $n+1$-dimensional vector space over a field k. We define the *n-dimensional projective space* $\mathcal{P}(V)$ *of* V in either of these two equivalent ways:

- $\mathcal{P}(V) := \{$1-dimensional vector subspaces of $V\}$.
- $\mathcal{P}(V) := (V \setminus \{0\})/\sim$ where the relation $\sim$ is defined as $v \sim u \iff v = \lambda u$, $\lambda \neq 0$.[32]

Definition 6.61. Let V, W be two vector spaces over a field k and $\mathcal{P}(V), \mathcal{P}(W)$ be its associated projective spaces. If $\phi : V \to W$ is an isomorphism, we can consider the map:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) &\to \mathcal{P}(W) \\ [v] &\mapsto [\phi(v)] \end{aligned}$$

We way $\mathcal{P}(\phi)$ is an *homography between* $\mathcal{P}(V)$ *and* $\mathcal{P}(W)$.

[32] Observe that $\sim$ is an equivalence relation.

Definition 6.62. Let V be a vector space over a field k and W a vector space over a field k'. An *semilinear isomorphism* $\phi : V \to W$ is a bijective map associated with a field isomorphism $r : k \to k'$ such that

$$\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v) \quad u, v \in V.$$
$$\phi(\lambda v) = r(\lambda)\phi(v) \quad v \in V, \lambda \in k.$$

Definition 6.63. Let V be a vector space over a field k, W a vector space over a field k' and $\phi : V \to W$ a semilinear isomorphism. We say $\mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ is an *isomorphism between projective spaces* and we write $\mathcal{P}(V) \cong \mathcal{P}(W)$ to denote that $\mathcal{P}(V), \mathcal{P}(W)$ are isomorphic.

Proposition 6.64. Let V be an $n + 1$-dimensional vector space over a field k. Then there is an homography $\mathcal{P}(V) \cong \mathcal{P}(k^{n+1})$.[33]

Definition 6.65. Let V be an $n + 1$-dimensional vector space over a field k and $E \subseteq V$ be a $m + 1$-dimensional vector subspace. Consider the natural inclusion $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(V)$. We say $\mathcal{P}(E)$ is a *m-dimensional projective submanifold of $\mathcal{P}(V)$*. In particular, we call *line of $\mathcal{P}(V)$* any 1-dimensional projective submanifold and we call *hyperplane of $\mathcal{P}(V)$* any $n - 1$-dimensional projective submanifold.

6.2.2 Homogeneous coordinates and Graßmann formula

Definition 6.66. Let V be an $n + 1$-dimensional vector space over a field k, $(v_0, \dots, v_n)$ a basis of V and $\mathcal{P}(V)$ a projective space. Given an $x \in \mathcal{P}(V)$ such that $x = [v]$ for some $v \in V$, $v = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n$, we define the *homogeneous coordinates of x* as

$$x = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}.$$

Definition 6.67. Let $\mathcal{P}(V)$ be an n-dimensional projective space. A *projective frame on $\mathcal{P}(V)$* is a tuple of $n+2$ points of $\mathcal{P}(V)$, such that any $n + 1$ points are not contained in a hyperplane.

Theorem 6.68. Let $\mathcal{P}(V)$ be an n-dimensional projective space. If $U_0, \dots, U_n, U$ is a projective frame of $\mathcal{P}(V)$, there exists a basis $(v_0, \dots, v_n)$ of V such that

$$U_i = [v_i] \text{ per } i = 0, \dots, n \text{ and } U = [v_1 + \cdots + v_n].$$

If $(u_0, \dots, u_n)$ is another basis of V that satisfies the same property, then $\exists \tau \neq 0 : u_i = \tau v_i$, for $i = 0, \dots, n$.

Definition 6.69. Let $\mathcal{P}(V)$ be an n-dimensional projective space and let $H \subset \mathcal{P}(V)$ be an hyperplane. The *equation of the hyperplane* is

$$x_0 a_0 + \ldots + x_n a_n = 0.$$

Definition 6.70. Let $\mathcal{P}(V)$ be a projective space and let $Y_1 = \mathcal{P}(E_1)$ and $Y_2 = \mathcal{P}(E_2)$ be two projective submanifolds of $\mathcal{P}(V)$. Then

- $Y_1 \cap Y_2 = \mathcal{P}(E_1 \cap E_2)$.
- $Y_1 + Y_2 = \mathcal{P}(E_1 + E_2)$.

Theorem 6.71 (Graßmann formula). Let $\mathcal{P}(V)$ be a projective space and $Y_1 = \mathcal{P}(E_1)$ and $Y_2 = \mathcal{P}(E_2)$ two projective submanifolds of $\mathcal{P}(V)$. Then:

$$\dim(Y_1 \cap Y_2) + \dim(Y_1 + Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2.$$[34]

6.2.3 Fano and Pappus configurations

Definition 6.72. A *configuration* is a finite set of points and lines satisfying the following axioms:

1. There are four points such that no three of them are collinear.
2. Two distinct points lie on at most one line.

Definition 6.73. Let X be a projective geometry and $\mathcal{C}$ a configuration. We say $\mathcal{C} \subseteq X$ if there exists one-to-one maps i_p, i_ℓ from the points and lines of $\mathcal{C}$ to the points and lines of X, respectively, such that if $A \in s$, then $i_p(A) \in i_\ell(s)$.

Definition 6.74. Let X be a projective geometry and $\mathcal{C}$ a configuration. We say $\mathcal{C}$ is *realizable on X* if the exists an inclusion $\mathcal{C} \subseteq X$.

Definition 6.75. Let X be a projective geometry and $\mathcal{C}$ a configuration. We say $\mathcal{C}$ is a *theorem in X* if satisfies that for any line $r \in \mathcal{C}$, the inclusion $\mathcal{C} - r \subseteq X$ can be extended to an inclusion $\mathcal{C} \subseteq X$.

Definition 6.76. *Fano configuration* is a configuration of 7 points and 7 lines defined in either of the following ways:

- It is the configuration described in the figure **??**.
- It is the unique projective plane of order 2.[35]
- It is the projective plane $P_2(\mathbb{F}_2)$.

Theorem 6.77. If $n \geq 2$, Fano configuration is a theorem in $P_n(k)$ if and only if $\operatorname{char} k = 2$.

Definition 6.78. *Pappus configuration* is a configuration of 9 points and 9 lines defined in either of the following ways:

- It is the configuration described in the figure **??**.
- It is the configuration whose points are the elements of the group $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ and whose lines are triples $\{i, j, k\}$ such that $i+j+k = 0$ where i, j, k are different modulo 3.
- It is the configuration obtained from the affine plane over $\mathbb{F}_3$ eliminating three parallel lines.

Theorem 6.79. Let k be a division ring. Pappus configuration is a theorem in $P_n(k)$ if and only if k is a field.

[33] From now on we will use the notation $P_n(k) := \mathcal{P}(k^{n+1})$.
[34] The formula is also valid for the case $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ if we consider, by agreement, $\dim \emptyset := -1$.
[35] A finite projective plane of order n is a projective plane in which every line has $n + 1$ points and every point lies in $n + 1$ lines.

6.2.4 Desargues configuration

Definition 6.80. Two triangles ABC and $A'B'C'$ are said to be in *perspective with respect to a point* if lines AA', BB' and CC' intersect at the point P. This point is called *centre of perspectivity.*

Definition 6.81. Two triangles ABC and $A'B'C'$ of sides a, b, c and a', b', c' respectively are said to be in *perspective with respect to a line* if the points $a \cap a'$, $b \cap b'$ and $c \cap c'$ lie on the same line r. This line is called *axis of perspectivity.*

Theorem 6.82 (Desargues' theorem). If two triangles are in perspective with respect to a point, so are in perspective with respect to a line.[36]

Definition 6.83. *Desargues configuration* is a configuration of 10 points and 10 lines defined in either of the following ways:

- It is the configuration described in the figure **??**.
- It is the configuration whose points are the elements of the set $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and whose lines are all subsets of cardinal 3 of S.
- It is the configuration created from two triangles that are simultaneously in perspective with respect to a point and in perspective with respect to a line.

Definition 6.84. Projective planes in which Desargues' theorem is not satisfied are called *non-Desarguesian planes.*

Theorem 6.85 (Coordination theorem). Let X be an axiomatic projective space of finite dimension $n > 1$ where Pappus' theorem is valid. Then there exist a field k and an isomorphism $X \cong P_n(k)$.[37]

6.2.5 Fundamental theorem of projective geometry and cross ratio

Theorem 6.86 (Fundamental theorem of projective geometry). Let $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ be a collineation between projective spaces of finite dimension greater than 1. Then, there exists an semilinear isomorphism $\phi : V \to W$ such that $f = P(\phi)$.

Definition 6.87 (Cross ratio). Let $A, B, C, D \in \mathcal{P}(V)$ be four collinear points lying on a line $L \in \mathcal{P}(V)$ with A, B, C different. As we have $A = [v_1]$, $B = [v_2]$, $C = [v_3]$ and $D = [v_4]$ for some vectors $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ then $L = \langle v_1, v_2 \rangle$. Therefore, $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ and $v_4 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$, for some $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in k$. We define the *cross ratio between* A, B, C, D as

$$(A, B, C, D) := \begin{cases} \dfrac{\lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2} & \text{si} \quad \lambda_1 \mu_2 \neq 0, \\ \infty & \text{si} \quad \lambda_1 \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Definition 6.88. Let $A, B, C, D \in \mathcal{P}(V)$ be four collinear points. If $(A, B, C, D) = -1$ we say the points A, B, C, D form an *harmonic ratio.*

Definition 6.89. Let a, b, c, d be four lines on a plane (with a, b, c different) intersecting at the point P. Let r be a different line such that $P \notin r$ and let $A := a \cap r$, $B := b \cap r$, $C := c \cap r$, $D := d \cap r$. We define the *cross ratio between* a, b, c, d as

$$(a, b, c, d) := (A, B, C, D).$$

Definition 6.90. Let X be a projective space such that $\dim X \geq 2$. Let $L_1, L_2 \in X$ be two lines intersecting at the point $P \in X$ and $f : L_1 \to L_2$ be a function such that $f(A) = L_2 \cap PA$. We say f is a *prespectivity.* The composition of prespectivities is called a *projectivity.*

Theorem 6.91. If $f : L_1 \to L_2$ is a projectivity, then f preserves cross ratio, that is:

$$(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (A, B, C, D).$$

Theorem 6.92. Let V be a 2-dimensional vector space and $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ be a bijection. There exists linear map $\phi : V \to V$ such that $f = P(\phi)$ if and only if f preserves cross ratio.

6.2.6 Plücker coordinates

Proposition 6.93. Let $r \in \mathcal{P}_3(k)$ be a line and $A, B \in r$ two points with coordinates $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ and $B = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$. Consider the matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Now consider the six minors of A:

$$p_{01} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad p_{02} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad p_{03} = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix},$$
$$p_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad p_{31} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad p_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

The coordinates $\{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}$ doesn't depend on the points A, B on the line r. We define the *Plücker coordinates of* r as the coordinates $\{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}$

Proposition 6.94. Two lines are equal if and only if have the same Plücker coordinates.

Proposition 6.95. Let r be a line with Plücker coordinates $\{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}$. Then the points $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \in r$ satisfy

$$\begin{pmatrix} p_{12} & -p_{02} & p_{01} & 0 \\ -p_{31} & -p_{03} & 0 & p_{01} \\ p_{23} & 0 & -p_{03} & p_{02} \\ 0 & p_{23} & p_{31} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[36] Desargues' theorem is valid in any axiomatic projective space of dimension 3 and, generally, in any axiomatic projective space that is a submanifold of an axiomatic projective space of dimension 3. In particular, it is valid in $P_n(k)$ for any division ring k and $n \geq 2$.

[37] If Pappus theorem is not valid but Desargues' theorem is, then $X \cong P_n(k)$ for some division ring k.

6.3 | Affine geometry

6.3.1 Affine space

Definition 6.96. Let V be a vector space over a field k. An *affine space over* V is a set $\mathbb{A}$ together with a map:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\times V &\to \mathbb{A}\\ (P,\vec{v}) &\mapsto P+\vec{v}\end{aligned}$$

such that:

1. $P+\vec{0}=P$ for all $P\in X$.
2. $P+(\vec{v}+\vec{w})=(P+\vec{v})+\vec{w}$ for all $P\in X$ and $\vec{v},\vec{w}\in V$.
3. For all $P,Q\in X$ $\exists!\vec{v}\in V: Q=P+\vec{v}$. We denote the vector $\vec{v}$ by $\overrightarrow{PQ}$.

Definition 6.97. Let $\mathbb{A}$ be an affine space associated to a vector space V over a field k.[38] We define the *dimension of* $\mathbb{A}$ as $\dim\mathbb{A}=\dim V$.

Proposition 6.98. Let $\mathbb{A}$ be an affine space, $P,Q,R,S\in\mathbb{A}$ and $u,v\in V$. Then, the following properties are satisfied:

1. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{0}\iff P=Q$.
2. $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP}$.
3. $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.
4. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}\implies\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QS}$.

Definition 6.99. Let $\mathbb{A}$ be an affine space, $P_1,\ldots,P_n\in\mathbb{A}$ and $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in k$ such that $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$. Given an arbitrary point $O\in\mathbb{A}$, we define the *affine combination of* $P_1,\ldots,P_n$ as

$$\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n:=O+\left(\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{OP_n}\right).$$

We say the points $P_1,\ldots,P_n$ are *affinely independents* if the vectors $\overrightarrow{P_1P_2},\ldots,\overrightarrow{P_1P_n}$ are linearly independent.

Definition 6.100. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space and $P_1,\ldots,P_r\in\mathbb{A}$. El *baricentre* del conjunt de punts $P_1,\ldots,P_r$ és

$$B:=\frac{1}{r}(P_1+\cdots+P_n).$$

6.3.2 Subvarietats and fórmula de Graßmann

Definition 6.101. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space sobre un espai vectorial V. If $P\in X$ and F is a vector subspace de V, then una *submanifold afí* de $\mathbb{A}$ és el conjunt:

$$P+F:=\{P+v\in\mathbb{A}:v\in F\}=\{Q\in\mathbb{A}:\overrightarrow{PQ}\in F\}.$$

Anomenem el subespai F, *subespai director* de la submanifold $P+F$. If $\dim F=m$, then $\dim(P+F)=m$. If $m=1$, We say la submanifold is a *recta*. If $m=\dim\mathbb{A}-1$, We say la submanifold is a *hyperplane*.

Proposition 6.102. Sigui $P+F$ una submanifold afí de l'espai afí $\mathbb{A}$. then if $Q\in P+F$, tenim que $P+F=Q+F$.

Definition 6.103. Dues submanifolds $P+F$ and $Q+G$ are *paral·leles* if $F\subseteq G$ o $G\subseteq F$.

Definition 6.104. Siguin Y and Z dues submanifolds de $\mathbb{A}$ such that $Y\cap Z\neq\emptyset$ and amb subespais directors F,G, respectivament. then if $P\in Y\cap Z$, tenim que $Y\cap Z$ is a submanifold de $\mathbb{A}$ and $Y\cap Z=P+F\cap G$.

Definition 6.105. Siguin $Y=P+F$ and $Z=Q+G$ dues submanifolds de $\mathbb{A}$. Definim la seva *suma* com la submanifold

$$Y+Z:=P+\left(F+G+\langle\overrightarrow{PQ}\rangle\right).$$

$Y+F$ és la submanifold més petita que conté $Y\cup Z$.

Theorem 6.106 (Fórmules de Graßmann afins). Siguin $L_1=P_1+F_1$ and $L_2=P_2+F_2$ dues submanifolds de $\mathbb{A}$. then:

- If $L_1\cap L_2\neq\emptyset$, then
$$\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2).$$
- If $L_1\cap L_2=\emptyset$, then
$$\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(F_1\cap F_2)+1.$$

6.3.3 Coordenades and equacions

Definition 6.107. Una frame d'an affine space $\mathbb{A}$ is a parella $\mathcal{R}=\{P;\mathcal{B}\}$ formada per un punt $P\in\mathbb{A}$ and una base $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ de V. El punt P s'anomena *origen* de la frame.

Definition 6.108. Sigui $\mathcal{R}=\{P;\mathcal{B}\}$, $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$, una frame d'an affine space $\mathbb{A}$. Definim les *coordenades afins* de $Q\in\mathbb{A}$ com

$$Q=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\iff\overrightarrow{PQ}=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n.$$

Proposition 6.109. Siguin $P_0,\ldots,P_n\in\mathbb{A}$ de manera que:[39]

1. Els punts are afinament independents.
2. No hi ha cap submanifold pròpia que els contingui tots.
3. $P_0+\cdots+P_n=\mathbb{A}$.
4. Els vectors $\overrightarrow{P_0P_1},\ldots,\overrightarrow{P_0P_n}\in V$ are linealment independents.

then $\mathcal{R}=\{A_0;\overrightarrow{P_0P_1},\ldots,\overrightarrow{P_0P_n}\}$ is a frame afí.

[38] From now on for simplicity we we will only refer to the affine space by mentioning the set $\mathbb{A}$ without mentioning the associated vector space V over a field k.

[39] Aquestes condicions are totes equivalents.

Definition 6.110. Siguin $\{\lambda_0,\dots,\lambda_n\}$ coordenades homogènies d'un projective space $\mathcal{P}(V)$ and $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ coordenades afins d'an affine space $\mathbb{A}$. Anomenem *homogenització* al pas de coordenades afins a homogènies de manera que:
$$(\mu_1,\dots,\mu_n)\to\{\mu_1,\dots,\mu_n,1\}.$$
De manera similar, anomenem *deshomogenització* al pas de coordenades homogènies a afins de manera que:
$$\{\lambda_0,\dots,\lambda_n\}\to\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_n},\dots,\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right).$$

Definition 6.111. Sigui $\mathcal{R}=\{P;\mathcal{B}\}$, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$, una frame d'an affine space $\mathbb{A}$ and $L=Q+F$ una submanifold de $\mathbb{A}$. Sigui $Q=(q_1,\dots,q_n)$ and $(v_1,\dots,v_r)$ una base de F. Anomenarem *equació paramètrica* de L l'expressió
$$(x_1,\dots,x_n)=(q_1,\dots,q_n)+\sum_{i=1}^r\lambda_iv_i.$$
If $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in k$ obtenim les coordenades de $(x_1,\dots,x_n)$. If $v_j=\sum_{i=1}^n\alpha_i^je_i$, $j=1,\dots,r$ tenim que l'equació paramètrica és:
$$\begin{pmatrix}x_1-q_1\\\vdots\\x_n-q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^1&\cdots&\alpha_1^r\\\vdots&&\vdots\\\alpha_n^1&\cdots&\alpha_n^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_r\end{pmatrix}.$$
Les *equacions cartesianes* de la submanifold are les que resulten d'igualar a zero els menors $(r+1)\times(r+1)$ de la matriu ampliada $\left(\alpha_i^j\mid x_i-q_i\right)$.

6.3.4 Afinitats

Definition 6.112. Una aplicació $f:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ entre dos espais afins sobre k-espais vectorials V_1,V_2 s'anomena *afinitat* if existeix una aplicació lineal $\phi:V_1\to V_2$ such that for all $P\in X$, $\overrightarrow{v}\in V_1$
$$f(P+\overrightarrow{v})=f(P)+\phi(\overrightarrow{v}).$$
If ϕ is a aplicació semi-lineal, en comptes de lineal, then We say f is a *semi-afinitat*. Denominarem per la *diferencial* de f, and ho denotarem per df, a l'aplicació ϕ.

Proposition 6.113. Siguin $f:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ and $g:\mathbb{A}_2\to\mathbb{A}_3$ afinitats. then $g\circ f:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_3$ is a afinitat and $d(g\circ f)=dg\circ df$.

Proposition 6.114. Sigui $f:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ una afinitat and $P,Q\in\mathbb{A}_1$. then
$$df(\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

Proposition 6.115. Siguin $f,g:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ afinitats such that $f(P)=g(P)$ per algun $P\in\mathbb{A}_1$ and $df=dg$. then $f=g$.

Proposition 6.116. Sigui $f:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ una afinitat and $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ such that $\lambda_1+\cdots+\lambda_r=1$. then
$$f(\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r)=\lambda_1f(P_1)+\cdots+\lambda_rf(P_r).$$

Proposition 6.117. Sigui $f:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ una afinitat and $L=P+F$ una subvarietat. then $f(P+F)$ is a submanifold and
$$f(P+F)=f(P)+df(F).$$

Proposition 6.118. Sigui $f:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ una afinitat and $\mathcal{R}_1=\{P_1;(e_1,\dots,e_n)\}$, $\mathcal{R}_2=\{P_2;(v_1,\dots,v_m)\}$ referències afins de $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, respectivament. If $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{A}_1$ and $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{A}_2$ then
$$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_1\\\vdots\\\rho_m\end{pmatrix}+M\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$
o, equivalentment,
$$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\\1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}&&&\rho_1\\&M&&\vdots\\&&&\rho_m\\\hline0&\cdots&0&1\end{array}\right)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}=M_{\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2}(f)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}$$
on M és la matriu de df and $(\rho_1,\dots,\rho_m)$ are les coordenades de $\overrightarrow{P_2f(P_1)}$ en la base $(v_1,\dots,v_m)$. Aquí, $M_{\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2}(f)$ denota la matriu de f respecte les referències $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$.

6.3.5 Algunes afinitats interessants

Definition 6.119. Dues afinitats $f,g:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ are *similars* if existeix una afinitat bijectiva $h:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ such that $h^{-1}fh=g$.

Proposition 6.120. Dues afinitats f,g are similars if existeixen referències $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ such that $M_{\mathcal{R}}(f)=M_{\mathcal{R}'}(g)$.

Definition 6.121. Un punt $P\in\mathbb{A}$ is a *punt fix* de $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ if and only if $f(P)=P$.

Definition 6.122. Una submanifold lineal $L=P+F\subset\mathbb{A}$ és *invariant* sota l'afinitat $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ if and only if $f(L)\subset L$.

Proposition 6.123. Una submanifold lineal $L=P+F\subset\mathbb{A}$ és invariant sota l'afinitat $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ if and només si

1. $df(F)\subset F$.
2. $\overrightarrow{Pf(P)}\in F$.

En particular, una recta $r=P+\langle\overrightarrow{v}\rangle$ és invariant per f if and només si

1. $\overrightarrow{v}$ és vector propi de df.
2. $\overrightarrow{Pf(P)}\in\langle\overrightarrow{v}\rangle$.

Proposition 6.124. If el conjunt de punts fixos d'una afinitat f, $\mathrm{Fix}(f)$, és no buit, then is a subvarietat.

Definition 6.125. Una afinitat f té *nivell d'invariància* $\rho(f)=r$, $r=0,\dots,\dim\mathbb{A}$, if and only if f té submanifolds invariants de dimension r and totes les submanifolds de dimension menor que r no are invariants, és a dir,
$$\rho(f)=\min\{\dim L:f(L)\subset L\subset\mathbb{A}\}.$$

Definition 6.126 (Translació). Sigui $\overrightarrow{v} \neq 0$. Una *translació* de $\mathbb{A}$ de vector de translació $\overrightarrow{v}$ is a afinitat $T_{\overrightarrow{v}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ definida per $T_{\overrightarrow{v}} = P + \overrightarrow{v}$.

Proposition 6.127 (Properties de les translacions). Sigui $T_{\overrightarrow{v}}$ una translació. then:

1. $T_{\overrightarrow{v}}$ no té punts fixos.
2. Les rectes invariants are les que tenen vector director $\overrightarrow{v}$.
3. If $\mathcal{R} = \{P; (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})\}$ is a frame afí, then
$$M_{\mathcal{R}}(T_{\overrightarrow{v}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
4. Totes les translacions are similar and $\rho(T_{\overrightarrow{v}}) = 1$.

Definition 6.128 (Reflexions). Suposem que $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Sigui $H = P + E$ un hyperplane de $\mathbb{A}$ amb subespai director E and $\overrightarrow{v} \notin E$. La *reflexió* respecte de H amb *arrel* $\overrightarrow{v}$ és l'única afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ such that $f(P) = P$ for all $P \in H$ and such that $df(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.[40]

Proposition 6.129 (Properties de les reflexions). Sigui f una reflexió amb arrel $\overrightarrow{v}$ and mirall $H = P + E$. then:

1. $\mathrm{Fix}(f) = H$.
2. Les rectes invariants are les que estan contingues a H and les que tenen subespai director $\langle \overrightarrow{v} \rangle$.
3. If $\mathcal{R} = \{P; (\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{v})\}$ is a frame afí such that $P \in H$ and $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}} \in E$, then
$$M_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
4. Totes les reflexions are similars and $\rho(f) = 0$.

Definition 6.130 (Projeccions). Sigui H un hyperplane de $\mathbb{A}$ amb subespai director E and $\overrightarrow{v} \notin E$. La *projecció* sobre H en la direcció del vector $\overrightarrow{v}$ és l'afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ such that $f(P) = P$ for all $P \in H$ and such that $df(\overrightarrow{v}) = 0$.

Proposition 6.131 (Properties de les projeccions). Sigui f una projecció sobre $H = P + E$ en la direcció de $\overrightarrow{v}$. then:

1. $\mathrm{Fix}(f) = H$.
2. Les rectes invariants are les que estan contingues a H.
3. If $\mathcal{R} = \{P; (\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{v})\}$ is a frame afí such that $P \in H$ and $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}} \in E$, then
$$M_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
4. Totes les projeccions are similars and $\rho(f) = 0$.

Definition 6.132 (Homotècies). Una *homotècia* is a afinitat $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ such that $df = \lambda id$, $\lambda \neq 0, 1$. Aquest λ s'anomena *raó* de la homotècia.

Proposition 6.133 (Properties de les homotècies). Sigui f una homotècia de raó λ. then:

1. f té un únic punt fix.
2. If $\mathcal{R} = \{P; \mathcal{B}\}$ is a frame afí amb $P \in \mathrm{Fix}(f)$ and $\mathcal{B}$ una base qualsevol, then
$$M_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \lambda Id & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$
3. Dues homotècies are similars if and only if tenen la mateixa raó. A més $\rho(f) = 0$.

Proposition 6.134. Sigui $T_{\overrightarrow{w}}$ una translació and R una reflexió amb arrel $\overrightarrow{v}$ respecte d'un hyperplane $H = P + E$. Sigui $f = T_{\overrightarrow{w}} R$. Prenem una frame $\mathcal{R} = \{P; (\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{v})\}$ de manera que $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_{n-1} \in E$. then if $\overrightarrow{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ en aquesta frame tenim que
$$M_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & w_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & w_2 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & w_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. If $\overrightarrow{w} \in \langle \overrightarrow{v} \rangle \implies w_1 = \cdots = w_{n-1} = 0$ and per tant tenim que f is a reflexió amb mirall l'hyperplane $2x_n = w_n$.
2. If $\overrightarrow{w} \notin \langle \overrightarrow{v} \rangle$ We say f is a *reflexió amb lliscament.* En aquest cas if $\overrightarrow{w} = w_n \overrightarrow{v} + \overrightarrow{e}$ amb $\overrightarrow{e} \in E$ and agafem $\mathcal{R} = (P + \frac{w_n}{2}\overrightarrow{v}; (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e_2} \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}, \overrightarrow{v}))$ tenim que
$$M_{\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
El nivell d'invariància de les reflexions amb lliscament és $\rho(f) = 1$.

[40] Sovint es diu que H és el *mirall* de la reflexió.

6.3.6 Dos teoremes importants de geometria afí

Definition 6.135 (Raó simple). Siguin $A, B, C \in \mathbb{A}$ tres punts alineats and diferents. La *raó simple* d'aquests punts és l'únic escalar $\lambda = (A, B, C) \in k$ such that

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}.$$

Theorem 6.136 (Teorema fonamental de la geometria afí). Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una col·lineació d'an affine space de dimension $n \geq 2$ sobre el cos k de més de dos elements. then f is a semi-afinitat.

Proposition 6.137. Dues afinitats $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ are similars if and només si

1. Les aplicacions lineals associades df and dg are similars.
2. $\rho(f) = \rho(g)$.

Theorem 6.138. Sigui $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinitat and $P \in \mathbb{A}$ un punt qualsevol. Sigui $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{Pf(P)}$. then

$$\rho(f) = \min\{r : (df - id)^r(\overrightarrow{v}) \in \operatorname{Im}(df - id)^{r+1}\}.$$

Corollary 6.139. If f is a afinitat and 1 no és valor propi de df, then $\rho(f) = 0$.

6.3.7 Espai afí euclidià

Definition 6.140. Un *espai afí euclidià* is a espai afí such that l'espai vectorial associat is a espai vectorial euclidià.[41]

Definition 6.141. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space euclidià. Definim la *distància entre dos punts* $P, Q \in \mathbb{A}$ per

$$d(A, B) := \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Definim el *segment* delimitat per A and B com

$$\{P \in \mathbb{A} : P = \lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Proposition 6.142. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space euclidià. then es compleixen les següents propietats:

1. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ *(Desigualtat triangular).*

   If ABC is a triangle rectangle amb angle recte al vèrtex A, then:

2. $d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$ *(Teorema de Pitàgores).*

Definition 6.143. Dues submanifolds $L_1 = P_1 + F_1$ and $L_2 = P_2 + F_2$ d'an affine space euclidià $\mathbb{A}$ We say are *ortogonals* ($L_1 \perp L_2$) if $F_1 \perp F_2$.[42]

Definition 6.144. Siguin $L_1 = P_1 + F_1$ and $L_2 = P_2 + F_2$ dues submanifolds d'an affine space euclidià $\mathbb{A}$. Definim la *distància entre dues submanifolds afins* com

$$d(L_1, L_2) := \inf\{d(A_1, A_2) : A_1 \in L_1, A_2 \in L_2\}.$$

Theorem 6.145. Siguin $L_1 = P_1 + F_1$ and $L_2 = P_2 + F_2$ dues submanifolds d'an affine space euclidià $\mathbb{A}$. Siguin $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \in F_1 + F_2$ and $\overrightarrow{v} \in (F_1 + F_2)^\perp$ such that $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. then tenim que

$$d(L_1, L_2) = \|\overrightarrow{v}\| = d(P_1 + \overrightarrow{u}_1, P_2 - \overrightarrow{u}_2).$$

6.3.8 Moviments rígids

Definition 6.146. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space euclidià. Una aplicació $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ is a *moviment rígid* if

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B) \quad \text{for all } P, Q \in \mathbb{A}.$$

Proposition 6.147. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space euclidià. $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ is a moviment rígid if and only if f is a afinitat and df is a isometria.[43]

Proposition 6.148 (Exemples de moviments rígids).

- Qualsevol translació $T_{\overrightarrow{v}}$ is a moviment rígid. A més, es compleix que $T_{\overrightarrow{u}} \sim T_{\overrightarrow{v}}$ com a moviments rígids if and only if $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$.
- Una homotècia f de raó λ is a moviment rígid if and only if $\lambda = -1$. A més totes les homotècies are similars com a moviments rígids.
- Una reflexió f de mirall $H = Q + E$ and arrel $\overrightarrow{v}$ is a moviment rígid if and only if $\langle \overrightarrow{v} \rangle \perp E$. Aquestes reflexions s'anomenen *reflexions ortogonals*. If $\overrightarrow{n}$ is a vector unitari normal al mirall, then la reflexió ortogonal ve donada per

$$f(P) = P - 2\langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}.$$

- Les *reflexions ortogonals amb lliscament* are moviments rígids.
- Una rotació afí al pla is a moviment rígid que té com a part lineal una rotació d'angle diferent de 0. Aquesta afinitat té un únic punt fix and if prenem aquest punt fix com a punt base d'una frame, la seva matriu serà

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[41] Recordem que un espai vectorial euclidià is a parell $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on V is a $\mathbb{R}$-espai vectorial and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a producte escalar definit positiu sobre V.

[42] Recordem que $F_1 \perp F_2$ if and only if $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$ for all $u \in F_1$ and $v \in F_2$.

[43] Recordem que una isometria $A : V \to W$ entre espais vectorials is a aplicació que conserva el producte escalar (i per tant és lineal), és a dir,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle A(\overrightarrow{u}), A(\overrightarrow{v}) \rangle,$$

que és equivalent a dir que $AA^t = I_n$.

6.3.9 Classificació dels moviments rígids

Theorem 6.149 (Classificació de les isometries).

1. Dues isometries are similars if and only if tenen el mateix polinomi característic.

2. If tenim una isometria qualsevol, existeix una base ortonormal en la qual la matriu de la isometria té aquesta forma

$$\begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & -I_s & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_t \end{pmatrix}$$

on $r, s, t \geq 0$, I_m denota la matriu identitat de $m \times m$ and cada R_i is a rotació amb matriu

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}.$$

amb $\alpha_i \neq 0, \pi$ per $i = 1, \ldots, t$.

Definition 6.150. Sigui $P \in \mathbb{A}$ un punt d'an affine space euclidià and $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un moviment rígid. Expressem

$$\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \qquad \overrightarrow{u} \in \ker(df - I), \overrightarrow{v} \in \operatorname{Im}(df - I).$$

then $\overrightarrow{u}_f := \overrightarrow{u}$ és el *vector de lliscament* de f

Proposition 6.151. El vector de lliscament $\overrightarrow{u}_f$ té les següents propietats:

- $df(\overrightarrow{u}_f) = \overrightarrow{u}_f$.
- $\overrightarrow{u}_f$ no depèn del punt P escollit.
- If $\overrightarrow{u}_f = 0 \implies \rho(f) = 0$. En cas contrari, $\rho(f) = 1$.

Theorem 6.152 (Teorema de classificació dels moviments rígids). Dos moviments rígids $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ are similars (com a moviments rígids) if and only if $df \sim dg$ (com a isometries) and $\|\overrightarrow{u}_f\| = \|\overrightarrow{u}_g\|$.

6.4 | Quàdriques

6.4.1 Quàdriques

Definition 6.153. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space de dimension n sobre un cos k. Una *quàdrica* de $\mathbb{A}$ is a polinomi de segon grau en n variables, $p(x_1, \ldots, x_n)$ amb coeficients al cos k mòdul la relació d'equivalència

$$p(x_1, \ldots, x_n) \sim \lambda p(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{si } \lambda \in k, \lambda \neq 0.$$

Els *punts* de la quàdrica $p(x_1, \ldots, x_n)$ are

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A} : p(a_1, \ldots, a_n) = 0\}.$$

Definition 6.154. Una *cònica* is a quàdrica en un espai de dimension 2.

Definition 6.155. Dues quàdriques p and q d'an affine space $\mathbb{A}$ are *equivalents* if existeix una afinitat bijectiva $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ such that $f(p) = q$.

Definition 6.156. Sigui $\mathcal{P}_n(k)$ l'projective space de dimension n sobre un cos k. Una *quàdrica* de $\mathcal{P}_n(k)$ is a polinomi homogeni de segon grau en $n+1$ variables, $p(x_1, \ldots, x_{n+1})$ amb coeficients al cos k mòdul la relació d'equivalència

$$p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim \lambda p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \quad \text{si } \lambda \in k, \lambda \neq 0.$$

Els *punts* de la quàdrica $p(x_1, \ldots, x_{n+1})$ are

$$\{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathcal{P}_n(k) : p(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0\}.$$

Definition 6.157. Dues quàdriques p and q de $\mathcal{P}_n(k)$ are *equivalents* if existeix una homography $f : \mathcal{P}_n(k) \to \mathcal{P}_n(k)$ such that $f(p) = q$.

Theorem 6.158. Hi ha una correspondència bijectiva entre les quàdriques de k^n and les quàdriques de $\mathcal{P}_n(k)$ que no are divisibles per x_{n+1}. En aquesta correspondència, els punts de la quàdrica afí are els punts de la quàdrica projectiva que estan a l'espai afí.[44]

Proposition 6.159. Sigui $\mathbb{A}$ an affine space and $\mathcal{P}_n(k)$ l'projective space, ambdós de dimension n and sobre el cos k. Sigui p una quàdrica:

- Procés d'*homogenització*: If $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}$, then
$$p(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_{n+1}^2 p\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \in \mathcal{P}_n(k).$$
- Procés de *deshomogenització*: If $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{P}_n(k)$, then
$$p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto p(x_1, \ldots, x_n, 1) \in \mathbb{A}.$$

6.4.2 Quatre punts de vista sobre les quàdriques

Definition 6.160. We say una forma bilineal és *anisòtropa* o *el·líptica* if l'únic vector isòtrop és el vector 0.[45]

Theorem 6.161. Llevat d'equivalència, hi ha una única forma bilineal simètrica de dimension 2 such that sigui no singular and no el·líptica. Anomenarem *pla hiperbòlic* a aquesta forma bilinieal.

Definition 6.162. Sigui $\varphi : V \times V \to k$ una forma bilineal simètrica. Definim la *forma quadràtica* associada a φ com

$$\begin{aligned} q : V &\to k \\ \overrightarrow{u} &\mapsto \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

És clar que aquesta aplicació satisfà:

[44] Observem que, no obstant aquest teorema, dues quàdriques projectives equivalents (com a quàdriques projectives) pot ser que no ho siguin com a quàdriques afins.

[45] Recordem que if $\varphi : V \times V \to k$ una forma bilineal simètrica, then

$$\operatorname{Rad}(V) = \{\overrightarrow{v} \in V : \varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0, \ \forall \overrightarrow{u} \in V\}.$$

A més, We say φ és *no singular* if $\operatorname{Rad}(V) = \{0\}$.

1. $q(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda^2\overrightarrow{u}$.
2. $\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}\left(q(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) - q(\overrightarrow{u}) - q(\overrightarrow{v})\right)$.

Proposition 6.163. Dues formes bilineals simètriques φ_1, φ_2 sobre V are equivalents if existeix un isomorphism lineal $\phi : V \to V$ such that $\varphi_1(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \varphi_2(\phi(\overrightarrow{u}),\phi(\overrightarrow{v}))$ for all $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v} \in V$.
Dues formes quadràtiques q_1, q_2 sobre V are equivalents if existeix un isomorphism lineal $\phi : V \to V$ such that $q_1(\overrightarrow{u}) = q_2(\phi(\overrightarrow{u}))$ for all $\overrightarrow{u} \in V$.

Theorem 6.164. Les formes bilineals simètriques, formes quadràtiques, matrius simètriques and polinomis homogenis de grau 2 are maneres equivalents d'estudiar les quàdriques.

Definition 6.165. Una quàdrica és *no degenerada* if la seva forma quadràtica associada és no singular.

6.4.3 Teoremes de classificació

Definition 6.166. Un *espai quadràtic* is a parella (V,Q) on V is a vector space over a field k and Q is a forma quadràtica.[46]

Definition 6.167. Siguin $E_1 = (V_1,Q_1)$ and $E_2 = (V_2,Q_2)$ dos espais quadràtics. Una *isometria* entre E_1 and E_2 ($E_1 \cong E_2$) is a isomorphism $\phi : V_1 \to V_2$ such that $Q_1(\overrightarrow{v}) = Q_2(\phi(\overrightarrow{v}))$ for all $\overrightarrow{v} \in V$.

Definition 6.168. Let V be a espai quadràtic. V és *totalment isòtrop* if tots els seus vectors are isòtrops.

Definition 6.169. Let V be a espai quadràtic. Definim el *rang* de V com

$$\rho(V) := \dim V - \dim \mathrm{Rad}(V).$$

Theorem 6.170 (Teorema de Witt). Let V be a espai quadràtic and siguin $V = E_1 \perp F_1 = E_2 \perp F_2$ dues descomposicions de V. If $E_1 \cong E_2$, then $F_1 \cong F_2$.

Definition 6.171. Let V be a espai quadràtic. Definim l'*índex* de V com

$$\iota(V) := \max\{\dim F : F \subseteq V \text{ and } F \text{ és totalment isòtrop}\}.$$

Theorem 6.172. Sigui $E \subseteq V$ un subespai totalment isòtrop de dimension màxima and $(\overrightarrow{e}_1,\dots,\overrightarrow{e}_r)$ una base de E (per tant, $r = \iota(V)$). then existeixen vectors $\overrightarrow{e}'_1,\dots,\overrightarrow{e}'_r \in V$ such that cada subespai $H_i := \langle\overrightarrow{e}_i,\overrightarrow{e}'_i\rangle$ is a pla hiperbòlic and $V = H_1 \perp \dots \perp H_r \perp F$ on F is a anisòtrop.

Proposition 6.173. Let V be a espai quadràtic and M la matriu associada a la seva forma quadràtica. then $\dim V$, $\rho(V)$, $\iota(V)$ and $\det M$ mòdul quadrats[47] are invariants per isometries.

6.4.4 Classificació de les quàdriques

Theorem 6.174 (Classificació de les formes quadràtiques a $\mathbb{C}$). If $k = \mathbb{C}$, dues formes quàdriques are equivalents if and only if tenen el mateix rang. Tota forma quadràtica de rang r és equivalent a

$$x_1^2 + \dots + x_r^2.$$

Theorem 6.175 (Classificació de les formes quadràtiques a $\mathbb{F}_q$). If $k = \mathbb{F}_q$ amb q senar, tota forma quadràtica de rang n és equivalent a una d'aquestes dues formes diagonals:

$$x_1^2 + \dots + x_n^2,$$
$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \nu x_n^2,$$

on ν no is a quadrat. A més, tenim que dues formes quadràtiques are equivalents if and only if tenen el mateix rang and determinant (mòdul quadrats).

Theorem 6.176 (Classificació de les formes quadràtiques a $\mathbb{R}$). If $k = \mathbb{R}$, tota forma quadràtica de rang r és equivalent a una forma diagonal

$$\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2.$$

If designem per r^+ el nombre de signes positius and per r^- el nombre de signes negatius, then tenim que dues formes quadràtiques are equivalents if and only if tenen els mateixos valors (r^+, r^-).

Theorem 6.177 (Classificació projectiva de les quàdriques a $\mathbb{C}$). If $k = \mathbb{C}$, dues quàdriques projectives are equivalents if and only if tenen el mateix rang.

Theorem 6.178 (Classificació projectiva de les quàdriques a $\mathbb{F}_q$). If $k = \mathbb{F}_q$, hi ha (llevat d'equivalència) aquestes quàdriques projectives en cada rang n:

- If n és senar:
$$x_1^2 + \dots + x_n^2.$$
- If n és parell:
$$x_1^2 + \dots + x_n^2,$$
$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \nu x_n^2,$$
on ν no is a quadrat.

Theorem 6.179 (Classificació projectiva de les quàdriques a $\mathbb{R}$). If $k = \mathbb{R}$, dues quàdriques projectives are equivalents if tenen el mateix rang and el mateix índex.

Theorem 6.180 (Regla dels signes de Descartes). If un polinomi amb coeficients reals té totes les seves arrels reals, el nombre d'arrels positives és igual al nombre de canvis de signe entre monomis consecutius no nuls (quan els ordenem per ordre creixent).

Theorem 6.181 (Classificació afí de les quàdriques). Siguin Q_1, Q_2 dues quàdriques afins. $Q_1 \sim Q_2$ if and només si:

1. $Q_1 \sim Q_2$ com a quàdriques de $P_n(k)$.
2. $Q_1^\infty \sim Q_2^\infty$ com a quàdriques de $H \cong P_{n-1}(k)$.[48]

[46] Per abús de llenguatge denotarem l'espai quadràtic únicament per el primer membre de la parella, és a dir, per V en comptes de (V,Q).

[47] És a dir, if V_i are dos espais quadràtics and M_i les la matrius associades a les seves formes quadràtiques ($i = 1,2$), tenim que $\det M_1 = a^2 \det M_2$, $a \in k$.

[48] Aquí Q_i^∞ s'entén que are les quàdriques Q_i restringides a l'hyperplane de l'infinit H, és a dir, fent $x_{n+1} = 0$.

7 Discrete mathematics

7.1 | Generating functions and recurrence relations

Definition 7.1. Let (a_n) be a sequence of real numbers. We define its *ordinary generating function* as the following formal power series:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Proposition 7.2. Let $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ be two formal power series. Then:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n.$
- $\displaystyle\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n.$
- $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n.$
- $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$

Proposition 7.3 (Closed forms). We can write the following ordinary generating functions with its corresponding closed forms:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k.$

Proposition 7.4. Suppose A and B are two finite disjoint sets. We set some restrictions for the non-ordered selection of elements of $A \cup B$. For every $n \geq 0$, let:

- a_n be the number of non-ordered selection of n elements of A satisfying the restrictions,
- b_n be the number of non-ordered selection of n elements of B satisfying the restrictions,
- c_n be the number of non-ordered selection of n elements of $A \cup B$ satisfying the restrictions.

And let $f(x), g(x), h(x)$ be the ordinary generating functions of $(a_n), (b_n), (c_n)$, respectively. Then we have

$$h(x) = f(x)g(x).$$

Definition 7.5. Let (a_n) be a sequence of real numbers. We define its *exponential generating function* as the following formal power series:

$$a_0 + a_1x + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Definition 7.6. Let (a_n) be a sequence of real numbers such that $a_i = 1\ \forall i$. The its exponential generating function associated is the called *exponential series*:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Proposition 7.7. The exponential series has the following properties:

1. $e^{x+y} = e^x e^y\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. $(e^x)^n = e^{nx}\ \forall x, n \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.8. Suppose A and B are two finite disjoint sets. We set some restrictions for the ordered selection of elements of $A \cup B$. For every $n \geq 0$, let:

- a_n be the number of ordered selection of n elements of A satisfying the restrictions,
- b_n be the number of ordered selection of n elements of B satisfying the restrictions,
- c_n be the number of ordered selection of n elements of $A \cup B$ satisfying the restrictions.

And let $f(x), g(x), h(x)$ be the exponential generating functions of $(a_n), (b_n), (c_n)$, respectively. Then we have

$$h(x) = f(x)g(x).$$

Definition 7.9. Let (a_n) be a sequence of real numbers. A *recurrence relation of order k* for (a_n) is an expression that express a_n in terms of k consecutive terms of the sequence, $a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$, for $k \leq n$. We say a sequence is *recurrent* if satisfy a recurrence relation or, equivalently, if it is a solution of the recurrence relation.

Definition 7.10. The *initial values* of a recurrence relation of order k are the values of the first k terms for which the recurrence relation is not yet valid, that is, the values $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

Lemma 7.11. The solution of a recurrence relation of order k with k initial conditions is unique.

Definition 7.12. A *linear recurrence relation of order k* is a recurrence relation that can be written as the form

$$a_n + c_1a_{n-1} + \cdots c_ka_{n-k} = g(n)$$

where $c_1, \ldots c_k \in \mathbb{R}, c_k \neq 0$ and $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is an arbitrary function.

Definition 7.13. We say linear recurrence relation is *homogeneous* if $g(n) = 0$, that is, it is of the form:

$$a_n + c_1a_{n-1} + \cdots c_ka_{n-k} = 0$$

with $c_k \neq 0$.

Proposition 7.14. The general solution to a recurrence relation

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots c_k a_{n-k} = g(n)$$

can be expressed as

$$(a_n^{\text{part}}) + (a_n^{\text{hom}}),$$

where (a_n^{part}) is a particular solution of the recurrence relation and (a_n^{hom}) is the general solution of its associated linear recurrence relation.

Proposition 7.15. Given $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, the set of the sequences that are solution of the homogeneous linear recurrence relation $a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$ form a real vector space.

Definition 7.16. Let $a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$ be a homogeneous linear recurrence relation of order k. The *characteristic polynomial* of the recurrence is:

$$x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k = 0.$$

Proposition 7.17. Consider an homogeneous linear recurrence relation with characteristic polynomial

$$(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k) = 0$$

where $r_1, \ldots, r_k$ are different complex numbers. Then the general term of the sequences that satisfy the recurrence relation is

$$a_n = \lambda_1 r_1^n + \cdots + \lambda_k r_k^n$$

with arbitrary $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.

7.2 | Graph theory

Definition 7.18. A *graph* G is an structure based on a set $V(G)$ of vertices and a set $E(G)$ of edges, which are non-ordered pairs of vertices.

Definition 7.19. Let G be a graph. The *order of* G is $n = |V(G)|$ and the *size of* G is $m = |E(G)|$.

Definition 7.20. Let G be a graph. Two vertices $a, b \in V(G)$ are said to be *adjacent* to one another if exists an edge e that connects them. In this case we say the edge e is *incident* on vertices a and b.

Definition 7.21. An edge that connects a vertex with itself is called a *loop*.

Definition 7.22. Two or more edges incidents with the same vertices are called *multiple edges*.

Definition 7.23. A graph G is *finite* if $V(G)$ and $E(G)$ are.

Definition 7.24. A graph is *simple* if it has neither multiples edges nor loops.

Definition 7.25. A *complete graph* is a graph in which each pair of vertices is joined by an edge. We denote by K_n the complete graph of order n.

Definition 7.26. Let G be a finite graph. The *degree* of a vertex is the number of edges that are incident to it. If $v \in V(G)$ we denote the degree of v by $\deg v$ or $\deg_G v$.[49]

Lemma 7.27 (Handshaking lemma). For every graph G we have:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2|E(G)|.$$

Corollary 7.28. In any graph, the number of odd-degree vertices is even.

Definition 7.29. Let G be a graph with $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. The *degree sequence of* G is the decreasing sequence

$$(\deg v_{i_1}, \ldots, \deg v_{i_n}).$$

Definition 7.30. We say a graph G is k*-regular* if $\deg v = k\ \forall v \in V(G)$.

Definition 7.31. Let G be a graph. A graph F is a *induced graph* of G if $V(F) \subseteq V(G)$ and $E(F) \subseteq E(G)$.

Definition 7.32. A *walk of lenght* k in a graph G is a sequence of vertices $(u_1, \ldots, u_k)$ where $u_i u_{i+1} \in E(G)$ for $i = 1, \ldots, k-1$.

Definition 7.33. A walk in a graph is *closed* if it starts and ends in the same vertex.

Definition 7.34. A walk in a graph is a *trail* if all the edges of the walk are distinct.

Definition 7.35. A walk in a graph is a *path* if all the vertices (and therefore the edges) of the walk are distinct.

Definition 7.36. A closed walk in a graph is a *closed trail* if all the edges of the closed walk are distinct.

Definition 7.37. A closed path is called a *cycle*.

Proposition 7.38. Let G be a graph. Given $u, v \in V(G)$, there exists a walk between u and v if and only if there exists a path between u and v.

Definition 7.39. Let G be a graph. Given $u, v \in V(G)$, we say that u and v are connected if there is a path in G between u and v.

Proposition 7.40. The relation $u \sim v$ if u and v are connected is an equivalence relation. The equivalent classes are the *connected components of* G.

Definition 7.41. A graph G is *connected* if $\forall u, v \in V(G)$, u and v are connected.

Definition 7.42. A graph G is *bipartite* if $V(G) = X \sqcup Y$ and $\forall e \in E(G)$ we have $e = xy$ with $x \in X$ and $y \in Y$.

Definition 7.43. Let G be a graph such that $E(G) \neq \emptyset$. We take an edge $e \in E(G)$ and denote by $G - e$ the induced graph of G such that

$$V(G - e) = V(G) \qquad E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}.$$

Definition 7.44. Given a connected graph G, we say that $e \in E(G)$ is a *bridge* of G if $G - e$ is non-connected.

[49] We observe that with this definition every loop counts as two edges.

Proposition 7.45. Let G be a connected graph. $e \in E(G)$ is a bridge if and only if e doesn't belong to any cycle of G.

Definition 7.46. Let G be a connected graph. An *Eulerian trail* in G is a trail that contain all the edges of G. An *Eulerian circuit* in G is closed eulerian trail. G is called *eulerian* if it admits an eulerian circuit.

Theorem 7.47 (Euler theorem). Let G be a connected graph. G is eulerian $\iff \deg v = 2k\ \forall v \in V(G)$, $k \in \mathbb{N}$.

Definition 7.48. Let G be a graph of order n with $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. We define the *adjacency matrix of* G, $A(G) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, as a_{ij} to be the number of edges incident with v_i and v_j.

Proposition 7.49. Let G be a graph of order n with $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ and let $A(G) = (a_{ij})$ be the adjacency matrix of G. Then:

1. $A(G)$ is symmetric.
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = \deg v_k, \quad k = 1, \ldots, n.$
3. For $k \in \mathbb{N}$, consider $A(G)^k = (b_{ij})$. Then b_{ij} is equal to the number of walks of length k between vertices v_i and v_j.

Definition 7.50. A *tree* is an acyclic connected graph, that is, a connected graph that has no cycles.

Definition 7.51. Let T be a tree. A *leave* of T is a vertex of degree 1.

Definition 7.52. Let G be a graph. A *generator tree* is a induced graph T of G such that $|V(G)| = |V(T)|$ and T is a tree.

Proposition 7.53. Let G be a graph such that $|V(G)| = n \geq 2$. The following are equivalent:

1. G is a tree.
2. G is connected and every edge of G ia a bridge.
3. G is connected and $|E(G)| = n - 1$.
4. G is acyclic and $|E(G)| = n - 1$.
5. For $v_i, v_j \in V(G)$, $i \neq j$, there exists a unique path between v_i, v_j.
6. G is acyclic but adding a new edge creates exactly on cycle.

Definition 7.54. Let G be a connected graph. G is called *traversable* if admits an eulerian trail.

Theorem 7.55. Let G be a connected graph. G is traversable if and only if G has exactly to odd-degree vertices.

Definition 7.56. Two graphs G, H are said to be *isomorphic* if exists a bijective map $f : V(G) \to V(H)$ such that $vv' \in E(G) \iff f(v)f(v') \in E(H)$.

Proposition 7.57. Two finite isomorphic graphs have the same order, size and degree sequence.

Theorem 7.58. Two graphs G, H are isomorphic if and only if exists a permutation matrix P such that

$$PA(G)P^t = A(H)$$

where $A(G), A(H)$ are adjacency matrices of G, H respectively.

7.3 | Linear programming

Definition 7.59. Given vectors $c, u, v \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ and a matrix $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, we define the *linear programming to maximize*[50] as

$$\text{LP} = \begin{cases} \text{max} : & z = c^t x & \textit{(objective function)} \\ \text{subject to} : & Ax \lesseqqgtr b & \textit{(restrictions)} \\ & u \leq x \leq v & \end{cases}$$

Definition 7.60. Given vectors $c, u, v \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ and a matrix $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, we define the *canonical form of a linear programming to maximize* as

$$\text{LP} = \begin{cases} \text{max} : & z = c^t x & \textit{(objective function)} \\ \text{subject to} : & Ax \leq b & \textit{(restrictions)} \\ & u \leq x \leq v & \end{cases}$$

Analogously we define the *canonical form of a linear programming to minimize* as

$$\text{LP} = \begin{cases} \text{min} : & z = c^t x \\ \text{subject to} : & Ax \geq b \\ & u \leq x \leq v \end{cases}$$

Definition 7.61. Given a linear program, the *feasible region* of the program is the set

$$\mathfrak{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \lesseqqgtr b, u \leq x \leq v\}.$$

That is, the set of the points that satisfy the conditions of the problem. Given an $x \in \mathbb{R}^n$, x is a *feasible solution* of the linear program if and only if $x \in \mathfrak{F}$.

Definition 7.62. A *polyhedron* P is a set of $\mathbb{R}^n$ that can be expressed as an intersection of a finite collection of half-spaces, that is

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m\}.$$

A *polytope* is a non-empty and bounded polyhedron. The feasible region of any linear program is a polyhedron.

Definition 7.63. Let $P \subset \mathbb{R}^n$ be a polyhedron. A point $x \in \mathbb{R}^n$ is an extreme point of P if there is neither a pair of points $y, z \in P$ nor an scalar $\lambda \in [0, 1]$ such that $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$.

Definition 7.64. Let LP be a linear program. We define the *standard form of LP* as

$$\text{LP} = \begin{cases} \text{min} : & z = c^t x \\ \text{subject to} : & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

[50] Analogously we can define a *linear programming to maximize* changing the objective function to a minimize function.

Definition 7.65. Let LP $= \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$. Feasible solution in which free variables or non-basic variable equal zero with respect to basis of basic variables are called *basic feasible solutions.*

Proposition 7.66. If a linear program admits feasible solutions, exists a basic feasible solution. If a linear program admits an optimal solution, exists an optimal basic feasible solution.

Theorem 7.67. Let P be a non-empty polyhedron of a linear program in standard form with maximum rank and let $x \in P$. Then x is an extreme point of P if and only if x is a basic feasible solution.

Definition 7.68 (Simplex method: Phase I). Given a linear program in standard form

$$\text{LP} = \left\{ \begin{array}{rc} \min: & z = c^t x \\ \text{subject to}: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

its associated problem in phase I (LP_1) és

$$\text{LP}_1 = \left\{ \begin{array}{rc} \min: & w = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{subject to}: & Ax + I_m y = b \\ & x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

A condition necessary for LP having basic feasible solutions is that the optimal solution of LP_1 must be $w = 0$. In fact, if $w \neq 0$, then the original linear program has no feasible solutions.[51]

Proposition 7.69 (Simplex method: Phase I). Suppose in a simplex table with positive pivots and therefore independent-terms vector $d \geq 0$, there is a coefficient $c_j < 0$.

$$\left(\begin{array}{c|c} * & d^t \\ \hline c & z - z_0 \end{array}\right).$$

To find a basic feasible solution with lower cost, we make the following change of variable:

1. The variable in column j becomes a basic variable.
2. The variable in row i such that
$$\frac{d_i}{a_{ij}} = \min_{a_{kj}>0} \frac{d_k}{a_{kj}}$$
becomes non-basic variable. If this variable does not exists, that is, $a_{kj} \leq 0\ \forall k$ then the linear program is not bounded.

Definition 7.70 (Dual program). Let LP be the following linear program LP $= \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^t x : Ax \geq b, x \geq 0\}$. We define the *dual program* of LP as

$$\text{LP}^* \left\{ \begin{array}{rc} \max: & z = b^t y \\ \text{subject to}: & A^t y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array} \right.$$

The linear program LP is called *primal.*

Theorem 7.71 (Weak duality theorem). Let x be a feasible solution of the primal linear program and y a feasible solution of the dual linear program. Then we have:

- $c^t x \leq d^t y$ if the primal linear program is in canonical form to maximize.
- $c^t x \geq d^t y$ if the primal linear program is in canonical form to minimize.

Corollary 7.72. Let x, y be feasible solutions of the primal and dual linear programs, respectively such that $c^t x = d^t y$. Then x and y are optimal solutions.

Theorem 7.73 (Strong duality theorem). Any linear program has optimal solution if and only if its dual linear program does, and in that case, the values coincide.

Theorem 7.74 (Complementary property). Suppose that optimal table of the primal linear program is of the form

$$\left(\begin{array}{c|c} * & d^t \\ \hline c & z - z_0 \end{array}\right),$$

where $c = (c_1, \ldots, c_{n+m})$ and $d = (d_1, \ldots, d_m)$ with $c_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n+m$. If $(y_1, \ldots y_m, t_1^*, \ldots, t_n^*)$ is the optimal solution of the dual linear program, expressed in standard form, then

$$c_1 = t_1^*, \ldots, c_n = t_n^*, c_{n+1} = y_1, \ldots, c_{n+m} = y_m.$$

[51]This phase is useful to find, if there is, an initial basic feasible solution.

8 Estructures algebraiques

9 Taller de modelització

Third year Fourth year

Part II
Physics

First year

10 Electricitat i magnetisme

10.1 | Anàlisi vectorial

	Fórmula (en coordenades rectangulars)
Gradient	$\operatorname{grad} f := \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
Divergència	$\operatorname{div} \vec{A} := \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotacional	$\operatorname{rot} \vec{A} := \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\vec{e}_z$
Laplaciana	$\nabla^2 f := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

10.2 | Electroestàtica

Quantització de la càrrega elèctrica: tota càrrega elèctrica és un múltiple de la càrrega fonamental.

$$Q = Ne$$

on $e = 1,602 \times 10^{-19}\ C$.
Equació de la continuïtat (conservació de la càrrega):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

on ρ és la densitat de càrrega i $\vec{J}$ és la densitat de corrent.
Llei de Coulomb:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12}$$

on $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \times 10^9$, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ i $\hat{r}_{12}$ és el vector unitari que va de 1 a 2.
Principi de superposició:

$$\vec{F}_Q = kQ\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^2}\hat{r}_i$$

Camp elèctric:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = k\frac{q_1}{|\vec{r}_{10}|^2}\hat{r}_{10}$$

Principi de superposició de camps elèctrics:

- Distribucions discretes de càrrega:

$$\vec{E} = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r}_{i0}|^2}\hat{r}_{i0}$$

- Distribucions contínues de càrrega:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = k\int \frac{dq}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

on $dq = \rho dV$, $dq = \sigma dS$ o $dq = \lambda dl$ segons si es tracta de distribucions volumètriques, superficials o lineals, respectivament.

Flux d'un camp vectorial $\vec{A}$:

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = AdS\cos\theta$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Llei de Gauß:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

on Φ és el flux elèctric.
Energia potencial electroestàtica:

$$dU = -\vec{F}d\vec{l} = -q_0\vec{E}d\vec{l}$$

$$\int_a^b dU = \Delta U = U(b) - U(a) = -\int_a^b q_0\vec{E}d\vec{l}$$

Treball efectuat:

- pel camp:

$$W_{\text{camp}} = -\Delta U = U(a) - U(b)$$

- per forces externes:

$$W_{\text{ext}} = \Delta U = U(b) - U(a)$$

Diferència de potencial:

$$dV := \frac{dU}{q_0} = -\vec{E}d\vec{l}$$

$$\Delta V = V(b) - V(a) = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E}d\vec{l}$$

Potencial creat per:

- una càrrega puntual q:

$$V(r) = \frac{kq}{r}$$

- una distribució discreta de càrregues:

$$V = \sum_{i=1}^{N} \frac{kq_i}{r_{i0}}$$

- una distribució contínua de càrregues:

$$V(b) - V(a) = \Delta V = -\int_a^b \vec{E}d\vec{l}$$

Energia electroestàtica:

- Càrrega puntual q:

$$U = q_0 V = k\frac{qq_0}{r}$$

- Conjunt de càrregues puntuals:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i V_j$$

- Distribució de càrrega:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho V d^3r$$

En un conductor en equilibri electroestàtic:

- Tota la càrrega es troba en la superfície i el camp total dins el conductor és nul.
- El camp elèctric just a fora és perpendicular a la superfície del conductor i val σ/ϵ_0, on σ és la densitat superficial de càrrega.
- El volum tancat pel conductor i la seva superfície són equipotencials.

Capacitat d'un condensador:

$$C := \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

on S és la superfície de les plaques del condensador i d és la distància de separació entre aquestes. $[C] = F$ (Farads).
Moment dipolar elèctric $\vec{p}$:

$$\vec{p} = q\vec{L}$$

on q és el valor absolut de les càrregues del dipol i $\vec{L}$ és el vector desplaçament d'un pol a l'altre.
Energia potencial d'un dipol elèctric:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Moment elèctric:

$$\vec{\tau} = \vec{p}\wedge\vec{E}$$

on aquest moment tendeix a alinear el dipol amb el camp.
Constant dielèctrica κ:

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0$$

Energia emmagatzemada en un condensador:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Densitat d'energia del camp elèctic η_e:

$$\eta_e := \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Associació de condensadors:

- en sèrie:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

- en paral·lel:

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i$$

Intensitat de corrent:

$$I := \frac{dQ}{dt}$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

on $\vec{J}$ és la densitat de corrent.
Relació del corrent amb el moviment de càrregues:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d S$$

on n és el nombre de portadors de càrrega q per unitat de volum; v_d, la velocitat de deriva de les càrregues, i S, la secció del conductor.

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Llei d'Ohm microscòpica:

$$\vec{J} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

on τ és el temps mitjà entre col·lisions de portadors; m_e, la massa de l'electró, i σ, la conductivitat. $[\sigma] = S/m$ (Siemens/metre).
Llei d'Ohm macroscòpica:

$$I = \frac{V}{R}$$

Resistència i resistivitat:

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

on $\rho = 1/\sigma$ és la resistivitat del material de secció S i longitud l.
Resistivitat en funció de la temperatura:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

on α és el coeficient de temperatura, T_0 és una temperatura fixada i ρ_0 és la resistivitat a T_0.
Potència elèctrica:

$$P = \frac{dU}{dt} = I^2R = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Associacions de resistències:

- en sèrie:
$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i$$
- en paral·lel:
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Lleis de Kirchhoff:

1. Regla dels nusos: en un nus del circuit on el corrent es pot dividir, la suma dels corrents que entren al nus ha de ser igual a la suma dels corrents que en surten.
$$\sum_i I_i = 0$$
2. Regla de les malles: la suma de les diferències de potencial en una malla ha de ser igual a zero.
$$\sum_i V_i = 0$$

Circuits RC ($\tau = RC$):

- Càrrega d'un condensador:
$$Q = Q_f(1 - e^{-t/\tau})$$
$$I = \frac{\xi}{R}e^{-t/\tau}$$
on τ és la constant de temps del circuit; Q_f, la càrrega final del condensador, i ξ, la fem de la bateria.
- Descàrrega d'un condensador:
$$Q = Q_0e^{-t/\tau}$$
$$I = I_0e^{-t/\tau}$$
on Q_0 és la càrrega inicial del condensador, i I_0, la intensitat inicial que hi passa a través.

10.3 | Magnetoestàtica

Força exercida per un camp magnètic $\vec{B}$ sobre una càrrega en moviment:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

on $[B] = T$ (Tesla).
Força exercida per un camp magnètic $\vec{B}$ sobre un element de corrent $Id\vec{l}$:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

La força magnètica no realitza treball sobre la partícula.
Trajectòria de la partícula:

- $\vec{v} \perp \vec{B} \implies$ òrbita circular. Radi de l'òrbita:
$$r = \frac{mv_\perp}{qB}$$
- $\vec{v} \not\perp \vec{B} \implies \vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel \implies$ trajectòria helicoïdal.

Força de Lorentz (força electromagnètica):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Moment dipolar magnètic $\vec{\mu}$:

$$\vec{\mu} = NI\vec{S}$$

Moment magnètic:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

Treball per rotar una espira:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Força magnètica sobre un dipol (que no gira sobre si mateix):

$$F_{\text{ext}} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

Efecte Hall:
S'usa per:

- determinar el nombre de portadors de càrrega n:
$$n = \frac{IB}{qdV_H}$$
on d és l'amplada del material conductor i V_H és el voltatge de Hall, és a dir, la diferència de potencial entre els extrems superior i inferior del material conductor.
- mesurar la intensitat del camp magnètic:
$$V_H = \frac{I}{nqd}B$$

Camp magnètic creat per una càrrega puntual en moviment:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \wedge \hat{r}}{|\vec{r}|^2}$$

on $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ és el vector unitari en la direcció de $\vec{r}$.
Camp magnètic creat per un element de corrent (Llei de Biot-Savart):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Camp magnètic $\vec{B}$ creat per:

- una espira circular de radi R:
  - En un punt qualsevol del seu eix a distància x del seu centre:
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\vec{e}_x$$

- En el seu centre:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_x$$

- un solenoide de radi R, longitud L i densitat d'espires $n = N/L$ situat entre $x = -a$ i $x = b$:
  - En un punt qualsevol del seu eix a distància x del seu centre:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{nI}{a+b}\left(\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+R^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+R^2}}\right)\vec{e}_x$$

  - En el seu centre ($a, b >> R$):

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_x$$

- un fil a un punt P tal que l'angle entre l'eix vertical i els vectors directors de P als extrems del fil són θ_1 i θ_2:
  - fil finit:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

  - fil infinit ($\theta_1 \to -\pi/2, \theta_2 \to \pi/2$):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Força per unitat de longitud entre dos cables paral·lels transportant intensitats I_1 i I_2 respectivament, separats per una distància d:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$$

Llei de Gauß pel magnetisme:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

Llei d'Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Camp magnètic creat per un anell toroïdal de N espires i de radi interior a i exterior b:

$$B = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < a \text{ o } r > b \\ \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r} & \text{si} \quad a < r < b \end{cases}$$

Relació entre el moment angular orbital $\vec{L}$ i el moment magnètic $\vec{\mu}$:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$$

El moment angular està quantitzat.
Magnetó de Bohr:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9,274\times 10^{-24}\ J/T$$

Moments magnètics causats pel moment angular i spin d'un electró:

$$\vec{\mu}_L = -\mu_B\frac{\vec{L}}{\hbar} \qquad \vec{\mu}_S = -2\mu_B\frac{\vec{S}}{\hbar}$$

on $\vec{S}$ és l'spin de l'electró.
Moment angular total:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Imantació:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} = \frac{di}{dl}$$

on $\vec{M}$ és el moment dipolar magnètic net per unitat de volum.

$$\vec{M} = \frac{1}{V}\sum_i \vec{\mu}_i$$

Imantació de saturació:

$$M_s = n\cdot\vec{\mu}$$

on n és el nombre d'àtoms per unitat de volum.
La imantació de saturació es produeix quan tots els àtoms tenen els seus moments magnètics alineats.
Camp generat:

$$\vec{B}_{\text{gen}} = \mu_0\vec{M}$$

Intensitat del camp magnètic:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$
$$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$$

on χ_m és la susceptibilitat magnètica. Aquesta no té dimensions i representa el grau de magnetització del material en resposta a un camp magnètic aplicat.
Camp aplicat i camp generat: Considerem un cil·lindre conductor pel qual circula una intensitat de corrent sotmès dins d'un solenoide, pel qual també circula una intensitat de corrent. El camp total del cil·lindre serà la suma dels camps generat (per aquest mateix) i aplicat (el generat pel solenoide):

$$\vec{B}_T = \vec{B}_{\text{apl}} + \vec{B}_{\text{gen}} = \mu_0\vec{H}(1+\chi_m)$$

Tipus de materials:

- Ferromagnètics (Fe, Ni, Co, ...): $\chi_m \in (10^2, 10^5) \to$ Atracció forta
  Els materials ferromagnètics presenten un fenomen anomenat *exchange interaction*. L'*exchange interaction* és un efecte descrit per la mecànica quàntica que ocorre entre electrons d'un mateix àtom aparellats o de diferents àtoms quan superposen les seves funcions d'ona (quan estan molt a prop). Quan això passa, poden alinear-se entre ells de forma que es minimitza l'energia del conjunt. Això genera els anomenats dominis magnètics, que són regions microscòpiques del material on els moments magnètics estan alineats.
  Cicle d'histèresi:

- Paramagnètics (Al, Mg, O_2, ...): $\chi_m \in (10^{-5}, 10^{-2}) \rightarrow$ Atracció feble
  Si hi ha camp, els moments magnètics comencen a alinear-se formant un camp. Ara bé, com que les interaccions atòmiques no són gaire fortes, els àtoms són susceptibles a l'agitació tèrmica, la qual indueix un moviment aleatori en els àtoms. Això provoca que l'energia tèrmica d'un material paramagnètic sigui molt més gran que l'energia magnètica.
  La temperatura de Curie és una temperatura a partir de la qual un material pot passar de ser paramagnètic a ser ferromagnètic. Per sota d'aquesta temperatura el material és ferromagnètic i per sobre d'aquesta, paramagnètic.
  En camps febles $\rightarrow$ llei de Curie:
  $$M = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{\text{ap}}}{k_B T} M_s$$
  és a dir, la imantació creix linealment en funció de la imantació de saturació.
- Diamagnètics (Bi, Ag, Hg, ...): $\chi_m \in (-10^{-6}, -10^{-4}) \rightarrow$ Repulsió feble
  El diamagnetisme es produeix per la presència d'un camp magnètic, que provoca que el moment magnètic orbital generi un camp en sentit contrari. Aquest fenomen passa en tots els materials, però com que els moments magnètics induïts són molt petits, els fenòmens de paramagnetisme i ferromagnetisme el superen.

Permeabilitat magnètica:
$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 = \kappa_m \mu_0$$
Flux magnètic:
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$
Si tenim N espires i B és constant:
$$\Phi = NBS\cos\theta$$
Llei de Faraday:
$$\xi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$
on ξ és la força electromotriu induïda.
Llei de Lenz: La fem i el corrent induït tenen una direcció i sentit que tendeixen a oposar-se a la variació que les produeix.
Inducció d'un camp elèctric E a partir d'una espira de radi r:
$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$
Inducció electromagnètica:
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{v=0} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{B=cte}$$
Generació de corrent altern:
$$V = NBS\omega \sin\omega t = V_0 \sin\omega t$$
$$I = \frac{V_0}{R}\sin\omega t$$
Té l'inconvenient que no s'aprofita sempre l'energia, ja que hi ha moments en què la força electromotriu s'anul·la. Per evitar-ho, es fa servir corrent trifàsic: tres espires amb un angle de desfasament de 120° entre si.
Corrents de Foucault: Corrents circulars produïdes en un tros de metall per fluxos magnètics variables. Aquests corrents indueixen una força magnètica que s'oposa al moviment.
Autoinductància L:
$$\Phi_B = LI$$
on $[L] = H$ (Henry).
Autoinductància per una bobina de longitud l, secció S i densitat d'espires n:
$$L = \mu_0 n^2 S l$$
Fem induïda fent variar el corrent elèctric:
$$\xi = -L\frac{dI}{dt}$$
Diferència de potencial entre els extrems d'un inductor:
$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt} - Ir$$
on r és la resistència interna de l'inductor.
Inductància mútua:
$$\Phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$
$$\Phi_{m2} = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$
on $M_{12} = M_{21} = M$ és el coeficient d'inducció mútua ($[M] = H$).
Circuits RL ($\tau = L/R$):

- Connexió amb la bateria:
  $$I = \frac{\xi}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$
- Desconnexió de la bateria:
  $$I = \frac{\xi}{R}e^{-t/\tau}$$

Energia magnètica emmagatzemada en un inductor:
$$U_m = \frac{1}{2}LI^2$$
Densitat d'energia magnètica η_m:
$$\eta_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$
Velocitat d'ones electromagnètiques al buit:
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

Llei	**Forma diferencial**	**Forma integral**
de Gauß	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
de Gauß (magnetisme)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
de Faraday-Lenz	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
d'Ampère-Maxwell	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Table 1: Equacions de Maxwell.

11 Mecànica i relativitat

11.1 | Mecànica

11.1.1 Cinemàtica

Equacions del moviment:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

Velocitat mitjana:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Velocitat instantània:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t)$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

Celeritat: $v(t) \equiv |\vec{v}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)|$
Acceleració mitjana:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\dot{\vec{r}}}{\Delta t}$$

Acceleració instantània:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \ddot{\vec{r}}(t)$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

Moviment rectilini:

1. uniforme:
$$x(t) = x_0 + vt$$
2. uniformement accelerat:
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$\dot{x}(t) = v_0 + at$$

Moviment circular en coordenades polars:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
$$\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$$
$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad \vec{v} = r\omega\vec{e}_\varphi \quad \vec{a} = r\alpha\vec{e}_\varphi - r\omega^2\vec{e}_r$$

Vectors de Frenet: Eixos de coordenades tangent i normal a la trajectòria en un determinat punt.

1. 1r vector de Frenet (tangent):
$$\vec{e}_1(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$$
2. 2n vector de Frenet (normal):
$$\vec{e}_2(t) = \frac{\dot{\vec{e}}_1(t)}{|\dot{\vec{e}}_1(t)|}$$

Celeritat i acceleració:

$$\dot{\vec{r}}(t) = v_t(t)\vec{e}_1$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = a_t(t)\vec{e}_1 + a_n(t)\vec{e}_2(t)$$

Curvatura k i radi de curvatura R:

$$\frac{1}{k(t)} = R(t) = \frac{|\dot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{e}}_1(t)|}$$

Acceleració normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

on R és el radi de curvatura instantani.
Curvatura mitjana:

$$k_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

Curvatura:

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Tir parabòlic:

$$x(t) = x_0 + v_0\cos\varphi t$$
$$y(t) = y_0 + v_0\sin\varphi t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v_x(t) = v_0\cos\varphi$$
$$v_y(t) = v_0\sin\varphi - gt$$

11.1.2 Dinàmica

Segona llei de Newton:

$$\frac{\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)}{m} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Força gravitatòria:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

Força elàstica:

$$F_e = -kx$$

Oscil·lador:

$$F_e = ma \iff \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

Coeficients de fregament:

- μ_e = coeficient estàtic de fregament.
- μ_c = coeficient cinètic de fregament.

Força de fregament:

$$F_f = \begin{cases} F & \text{si} \quad F \leq \mu_e F_N \\ \mu_c F_N & \text{si} \quad F > \mu_e F_N \end{cases}$$

on F és la força aplicada a l'objecte i F_N la força normal.
Forces inercials: força fictícia per a sistemes de referència no inercials.

$$\vec{F}(t) + \vec{F}_{\text{iner}}(t) = m\ddot{\vec{r}}'(t)$$

on $\vec{F}_{\text{iner}}(t) \equiv -m\ddot{\vec{R}}(t)$ i $\vec{R}(t)$ és l'equació del moviment d'un sistema de referència respecte de l'altre.
Transformacions de Galileo:

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt & v'_x &= v_x - V \\ y' &= y & v'_y &= v_y \\ z' &= z & v'_z &= v_z \\ t' &= t \end{aligned}$$

on V és la velocitat de S' respecte S.

11.1.3 Estàtica

Moment lineal:

$$\vec{p} = mv$$

Segona llei de Newton:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Moment lineal del sistema:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_{Oi}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}_{\text{total}}$$

Centre de masses:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$M\dot{\vec{R}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}_{\text{total}}$$

on $M = \sum_i m_i$.
Centre de masses d'un sòlid rígid:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho dV$$

on $M = \int_V \rho dV$.
Moment angular:

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

Moment angular del sistema:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{l}_{Oi}$$

Moment d'una força:

$$\vec{m}_O = \vec{r} \times \vec{f}$$

Moment de les forces:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{m}_{Oi}$$

$$\dot{\vec{l}}_O = \vec{m}_O \qquad \dot{\vec{L}}_O = \vec{M}^{\text{ext}}_O$$

Conservació del moment angular:

$$\vec{M}^{\text{ext}}_O = 0 \implies \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$$

Sòlids en equilibri estàtic:

$$\vec{F}^{\text{ext}}_{\text{total}} = 0 \qquad \vec{M}^{\text{ext}}_O = 0$$

11.1.4 Treball i energia

Treball:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos\theta$$

$$W = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Potència:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

Energia cinètica:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Teorema treball-energia cinètica:

$$W = \Delta K$$

Potència instantània:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Energia potencial elàstica:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Treball de forces conservatives:

$$W = -\Delta U$$

Energia mecànica:

$$E = K + U$$

- Si actuen només forces conservatives:

$$\Delta E = 0$$

- Si hi ha forces no conservatives:

$$\Delta E = W_{\text{nc}}$$

  on W_{nc} és el treball fet per les forces no conservatives.

Energia potencial gravitatòria:

- Per a alçades petites h sobre la superfície de la terra:

$$U = mgh$$

- Per al cas general:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

Velocitat d'escapament:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

11.1.5 Rotació

Moment d'inèrcia:

$$I_e = \sum_i m_i \eta_i^2$$

on η_i és la distància entre la posició de la partícula de massa m_i i l'eix e.
Moment angular:

$$L_e = I_e \omega$$

Sòlid rígid:

$$M_e^{\text{ext}} = \dot{L}_e = I_e \dot{\omega} = I_e \alpha$$

Moment angular respecte del CM:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P}$$

on $\vec{R}$ és la distància del CM al punt O.
Moment d'una força respecte del CM:

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{M}_{CM}^{\text{ext}} + \vec{R} \times \vec{F}_{\text{total}}^{\text{ext}}$$

on $\vec{R}$ és la distància del CM al punt O.

$$\dot{\vec{L}}_{CM} = \vec{M}_{CM}^{\text{ext}}$$

Energia cinètica de rotació:

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Teorema d'Steiner:

$$I_{e'} = I_e + M a^2$$

on a és la distància entre els eixos e i e'.

11.2 | Relativitat

Factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

on $\beta = v/c$.
Transformacions de Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) & x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) & ct &= \gamma(ct' + \beta x') \end{aligned}$$

on v és la velocitat de S' respecte de S.
Dilatació temporal:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

on Δt_0 és el temps propi, és a dir, el temps mesurat entre dos esdeveniments per un sistema de referència on aquests dos succeeixen al mateix lloc.
Contracció de longituds:

$$\Delta l = \frac{\Delta l_0}{\gamma}$$

on Δl_0 és la longitud pròpia, és a dir, és la longitud mesurada en un sistema de referència on l'objecte està en repòs.
Invariant de Lorentz:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- $s^2 > 0 \implies$ *timelike*
- $s^2 = 0 \implies$ *lightlike*
- $s^2 < 0 \implies$ *spacelike*

Els esdeveniments *timelike* i *lightlike* estan en contacte causal amb l'origen (és possible enviar un senyal de llum des del punt a l'origen o viceversa), mentre que els *spacelike* no.
Transformacions de Lorentz (velocitats):

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} & u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} & u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + u_x v/c^2)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} & u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + u_x v/c^2)} \end{aligned}$$

Efecte Doppler:

$$\nu_R = \frac{\nu_E}{\gamma(1 - \beta\cos\phi)}$$

on ϕ és l'angle, respecte del receptor, entre la velocitat de la font i la direcció de la llum i ν_E i ν_R són les freqüències de l'emissor i el receptor, respectivament.

$$\tan\frac{\phi'}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tan\frac{\phi}{2}$$

on ϕ' és l'angle, respecte de l'emissor, entre la velocitat de la font i la direcció de la llum.
Efecte Doppler longitudinal:

- Si la font s'allunya ($\phi = \pi$):

$$\nu_R = \nu_E \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

- Si la font s'apropa ($\phi = 0$):

$$\nu_R = \nu_E \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Efecte Doppler transversal ($\phi = \pi/2$):

$$\nu_R = \nu_E/\gamma$$

Energia relativista:

$$E = \gamma m c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Moment relativista:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{u}$$

Massa relativista:

$$m_r = \gamma m$$

on m és la massa, invariant, de l'objecte en repòs.
Energia i moment dels fotons:

$$E = h\nu \qquad E = |\vec{p}|c$$

Transformacions de Lorentz (Energia − moment):

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \beta c p_x) & E &= \gamma(E' + \beta c p'_x) \\ c p'_x &= \gamma(c p_x - \beta E) & c p_x &= \gamma(c p'_x + \beta E') \\ p'_y &= p_y & p_y &= p'_y \\ p'_z &= p_z & p_z &= p'_z \end{aligned}$$

Efecte Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

on λ i λ' són les longituds d'ona dels fotons abans i després de dispersió, θ és l'angle de dispersió, m és la massa de la partícula en repòs i $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ és la longitud d'ona Compton.

11.3 | Fluids

Pressió en un punt $p(x)$ (considerant una esfera molt petita al voltant del punt x):

$$p(x) = \frac{\sum F_N}{S}$$

Pressió hidrostàtica:

$$p = p_0 + \rho g \Delta h$$

on p_0 és la pressió a un punt a una distància vertical Δh del punt on hi ha una pressió p.
Principi de Pascal:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p_2$$

Principi d'Arquímedes (empenta hidrostàtica):

$$F_E = m_L g = \rho_L V g$$

on m_L i V són respectivament la massa i el volum de líquid desallotjat.
Equació de la continuïtat (per a fluids incompressibles):

$$Q_1 = S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q_2$$

on Q_i és el cabal; S_i, la secció, i v_i, la velocitat en l'instant i.
Principi de Bernoulli (per a fluids incompressibles, sense viscositat i amb flux laminar i estacionari):

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}$$

Força de sustentació:

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho S v^2$$

on C_L és el coeficient de sustentació.
Velocitat mínima de sustentació:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2mg}{C_L \rho S}}$$

Viscositat:

$$F = \eta \frac{vA}{z}$$

on F és la força actuant a la tapa de dalt (d'àrea A) separada una distància z de l'altra tapa per un fluid de viscositat η movent-se a velocitat v.
Velocitat en un canal:

$$v(x) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(r^2 - x^2)$$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta p}{8\eta L} r^2$$

on $v(x)$ és la velocitat del fluid a un punt x per sobre l'eix del canal entre dos punts separats una distància L amb diferència de pressió $\Delta p = p_1 - p_2$. $\langle v \rangle = v_{\max}/2$ és la velocitat mitjana.
Llei de Poiseuille:

$$Q = S\langle v \rangle \implies Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{L} r^4,$$

$$\Delta p = \frac{8\eta}{\pi}\frac{L}{r^4} Q \implies \Delta p = R_f Q$$

on $R_f := \frac{8\eta}{\pi}\frac{L}{r^4}$ és la resistència hidrodinàmica. Observem que l'última expressió és anàloga a la llei d'Ohm per a circuits elèctrics.
Resistències de fluids:

- en sèrie:
$$R_T = \sum_{i=1}^{n} R_i$$
- en paral·lel:
$$\frac{1}{R_T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Potència dissipada:

$$P = \Delta p Q = R_f Q^2$$

Forces de fregament (viscoses i d'inèrcia):

- Velocitats baixes i viscositat alta:
$$F = k\eta v r$$
on $k = 6\pi$ si és una esfera i r el radi.
- Velocitats altes i viscositat baixa:
$$F = \frac{1}{2} C_a \rho S v^2$$
on C_a és el coeficient aerodinàmic.

Velocitat límit:

- Forces viscoses:
$$v_L = \frac{mg}{k\eta r}$$
- Forces d'inèrcia:
$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C_a \rho S}}$$

Nombre de Reynolds: quantitat adimensional que dona informació sobre el tipus de règim (laminar o turbulent).

$$R_e = \frac{\rho v D}{\eta} \approx \frac{F_{\text{inèrcia}}}{F_{\text{vicosa}}}$$

on D és el diàmetre.

$$R_e < 2000 \implies \text{flux laminar}$$

$$R_e > 3000 \implies \text{flux turbulent}$$

12 Ones i òptica

12.1 | Oscil·lacions

Llei de Hooke i equacions de trajectòria:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$
$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \phi_0) = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$$
$$v_{\max} = A\omega \qquad a_{\max} = A\omega^2$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T}$$

Treball:

$$W^{\text{ext}}_{a\to b} = -\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(b) - U(a)$$

Energia mecànica:

$$E = U + K = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

Altres casos de MHS:

- Molla vertical:

$$y' = y - y_0 = y - \frac{mg}{k}$$
$$\sum F_y = -ky + mg = -ky'$$
$$y' = A\cos(\omega t + \phi_0)$$
$$U = \frac{ky'^2}{2} + U_0$$

on y és l'allargament de la molla; y_0, l'allargament de la molla en l'equilibri, i U_0, l'energia potencial en $y' = 0$.

- Pèndol simple:

$$\phi = \phi_0\cos(\omega t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Període T per amplituds grans:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2 \sin^{2n}\frac{\phi_0}{2}\right]$$

Tensió de la corda T:

$$T(\phi) = mg(3\cos\phi - 2\cos\phi_0)$$

- Pendol de torsió:

$$\tau = -\kappa\phi = I\alpha$$
$$\phi = \phi_0\cos(\omega t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

on τ és el moment aplicat al disc; κ, la constant de torsió del cable que subjecte el pèndol ($[\kappa] = N \cdot m$), i I, el moment d'inèrcia relatiu a l'eix de gir.

- Pèndol físic:

$$\tau = -MgD\sin\phi = I\alpha \implies \kappa = MgD$$
$$\phi = \phi_0\cos(\omega t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$$

on D és la distància del centre de masses a l'eix de rotació.

Moviment harmònic esmorteït:

$$\vec{F}_f = -\gamma\vec{v} \qquad 2\beta = \frac{\gamma}{m}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x =$$
$$= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$
$$\implies \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

on $\vec{F}_f$ és la força de fregament; γ, el coeficient de fregament ($[\gamma] = kg/s$); β, la constant d'esmorteïment ($[\beta] = s^{-1}$); ω_0, la freqüència sense esmorteïment, i ω, la freqüència. En l'última equació hem fet servir que $x = e^{\lambda t}$ per ser una equació diferencial homogènia de segon ordre.

- Sub-esmorteït ($\beta^2 - \omega_0^2 < 0$):

$$\lambda = -\beta \pm i\omega$$
$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mk - \gamma^2}}$$
$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0)$$
$$A_n = A_0 e^{-2\beta T n}$$

on A_n és l'amplitud de l'n-èssima oscil·lació.

Energia d'oscil·lació i potència perduda:

$$E \propto A^2 \propto (e^{-\beta t})^2$$
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}$$
$$P = \frac{dE}{dt} = Fv = -\gamma v^2$$

Factor de qualitat Q:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$
$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{cicle}}}$$
$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

on $(|\Delta E|/E)_{\text{cicle}}$ és l'energia perduda per cicle.

- Esmorteïment crític ($\beta^2 - \omega_0^2 = 0$):

$$\lambda = -\beta$$
$$x(t) = (A_0 + c_1 t)e^{-\beta t}$$
$$\gamma = \sqrt{4km}$$

on c_1 és una constant.

- Sobre-esmorteït ($\beta^2 - \omega_0^2 > 0$):

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$
$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t}$$

on c_1 i c_2 són constants.

Oscil·lació reforçada:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_{\text{ext}}t)$$
$$x(t) = A\cos(\omega_{\text{ext}}t + \phi_0)$$
$$A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_{\text{ext}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{ext}}^2}}$$
$$\tan\phi_0 = \frac{2\beta\omega_{\text{ext}}}{\omega_{\text{ext}}^2 - \omega_0^2}$$

Les solucions de l'equació diferencial estan formades per solucions del tipus $X(t) = y(t) + x(t)$, on $y(t)$ és la part transitòria (que s'anul·a passat un cert temps i és semblant a les condicions d'esmorteïment) i $x(t)$ és la part estacionària (s'aporta al sistema una energia igual a la que es dissipa).

Ressonància:

$$\omega_{\text{ext}} \to \omega_0 \implies \tan\phi_0 \to \infty \implies \phi_0 \to \frac{\pi}{2}$$
$$A = \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}$$

Energia de l'oscil·lació reforçada:

$$E(t) = \frac{A^2}{2}\left(m\omega^2\sin^2(\omega_{\text{ext}}t + \phi_0) + \right.$$
$$\left. + k^2\cos^2(\omega_{\text{ext}}t + \phi_0)\right)$$
$$\langle E\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt = A^2\frac{m\omega_{\text{ext}}^2 + k^2}{4}$$

Potència de l'oscil·lació reforçada:

$$P(t) = -\gamma v^2 = -\gamma A^2\omega_{\text{ext}}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$
$$\langle P\rangle_{\text{diss}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt =$$
$$= -\frac{\beta\omega_{\text{ext}}^2 F_0^2/m}{(\omega_{\text{ext}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{ext}}^2}$$

Amplada de ressonància per esmorteïment dèbil:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Donades dues oscil·lacions harmòniques amb amplituds A_1 i A_2, freqüències d'oscil·lació ω_1 i ω_2 i angles de fase ϕ_1 i ϕ_2, podem tenir les següents interferències:

- Interferència amb $\omega_1 = \omega_2$:

$$A_T^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\phi)$$
$$\tan\phi_T = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

- Interferència amb $A_1 = A_2$:

$$x_T(t) = 2A\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cdot$$
$$\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$$

- Interferència de n oscil·lacions d'igual amplitud i freqüència i fases diferents ($\phi_n = n\phi_0$):

$$x_T(t) = A_T\cos(\omega t + \theta)$$
$$A_T = A\frac{\sin(n\phi/2)}{\sin\phi/2} \qquad \theta = (n-1)\frac{\phi}{2}$$

Associació de motlles:

- en sèrie:

$$\frac{1}{k_T} = \sum_i \frac{1}{k_i}$$

- en paral·lel:

$$k_T = \sum_i k_i$$

12.2 | Ones

Equació d'ona (corda):

$$\frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

on T és la tensió de la corda i λ la densitat lineal d'aquesta.

Ona viatgera:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Velocitat de les ones:

- en un corda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

- d'aigua:

$$v = \sqrt{gh}$$

on h és la profunditat.

Transformada de Fourier de funcions periòdiques i no periòdiques:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(\omega_n t \pm k_n x_n)$$
$$f(x,t) = \int A(x)\sin(\omega t \pm kx)dx$$

Equació d'ona harmònica:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t \pm kx + \phi_0)$$

on els signes $\pm$ fan referència al sentit del moviment ($-x$ o $+x$). En les equacions següents emprarem únicament el signe $-$.

Relacions:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \qquad 2\pi = \frac{\Delta x}{vT}$$

Velocitat i acceleració:

$$v(x,t) = A\omega\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$
$$a(x,t) = -A\omega^2\sin(\omega t - kx + \phi_0)$$

Energia i potència:

$$E_m = \frac{\omega^2 A^2 \lambda v t}{2} = \frac{\omega^2 A^2 \lambda x}{2}$$
$$P_m = \frac{dE}{dt} = \frac{\omega^2 A^2 \lambda v}{2}$$
$$P = \omega^2 A^2 \lambda v \cos^2(\omega t - kx)$$

on λ és la densitat lineal de l'objecte generador d'ones (per exemple, una corda).

Energia per unitat de volum η:

$$\eta = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}$$

Superposició:

- Diferent fase:

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx)$$
$$y_2 = A\sin(\omega t - kx + \phi_0)$$
$$y_3 = y_1 + y_2 =$$
$$= 2A\sin\left(\omega t - kx + \frac{\phi_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right)$$

Desfase (destructiva): $\phi_0 = \pi + 2\pi k$

Fase (constructiva): $\phi_0 = 2\pi k$

- Diferent posició:

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx_1)$$
$$y_2 = A\sin(\omega t - kx_2 + \phi_0)$$
$$y_3 = 2A\cos\left(k\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\sin\left(\omega t - k\frac{x_2 + x_1}{2}\right)$$

Desfase (destr.): $\phi_0 = (2n+1)\pi k$

Fase (constr.): $\phi_0 = 2\pi n k$

- Diferent freqüència (batiments):
  Considerem dues ones amb equacions:

$$y_i(x,t) = A\sin(\omega_i t - k_i x)$$

on $i = 1, 2$.

Com a ona resultant tenim:

$$y_3 = y_1 + y_2 =$$
$$= 2A\cos(\omega_m t - k_m x)\sin(\omega_p t - k_p x)$$

on $\omega_m := (\omega_1 - \omega_2)/2$ és la freqüència de modulació; $k_m := (k_1 - k_2)/2$, el nombre d'ona de modulació; $\omega_p := (\omega_1 + \omega_2)/2$, la freqüència de propagació, i $k_p := (k_1 + k_2)/2$, el nombre d'ona de propagació.

Si suposem $\omega_1 \approx \omega_2 := \omega$ i $k_1 \approx k_2 := k$:

Velocitat d'ona modulada (ràpida):

$$v_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \approx \frac{\omega}{k} = v_{\text{fase}}$$

Velocitat d'ona moduladora (de grup):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_p k)}{dk} = v\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

on hem suposat que $v_p = c/n(k)$. Aquests fenòmens on $v(k)$ o $v(\omega)$ es coneixen com a dispersió cromàtica o dispersió.

Intensitat:

$$I = 4A_0^2\cos^2(\omega_m t - k_m x)\cdot$$
$$\cdot\sin^2(\omega_p t - k_p x)$$

- Ones estacionàries:
  Considerem dues ones amb equacions:

$$y_1 = A_0\sin(\omega t - kx)$$
$$y_2 = A_0\sin(\omega t + kx + \phi_0)$$
$$y_3 = y_1 + y_2 =$$
$$= 2A_0\cos\left(kx + \frac{\phi_0}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\phi_0}{2}\right)$$

Nodes:

$$x = \frac{1}{k}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} - \frac{\phi_0}{2}\right]$$

Ventres:

$$x = \frac{1}{k}\left(n\pi - \frac{\phi_0}{2}\right)$$

on $n \in \mathbb{Z}$.

En les ones estacionàries no hi ha propagació d'energia.

Tipus d'ones estacionàries ($n \in \mathbb{N}$):

- Amb dos extrems fixos:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n}$$
$$f_n = \frac{nv}{2L} = n\frac{1}{2L}\sqrt{T/\mu} = nf_1$$

- Amb un extrem fix i un de lliure:

$$\lambda_n = \frac{4}{2n-1}L = \frac{\lambda_1}{2n-1}$$
$$f_n = \frac{2n-1}{4L}\sqrt{T/\mu} = (2n-1)f_1$$

- Amb dos extrems lliures:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n}$$
$$f_n = \frac{nv}{2L} = n\frac{1}{2L}\sqrt{T/\mu} = nf_1$$

- Direccions perpendiculars (corbes de Lissajous):
  - Mateixa freqüència: Considerem dues ones amb equacions:

$$\vec{E}_1 = A_1 \sin(\omega t - kx)\vec{e}_y$$
$$\vec{E}_2 = A_2 \sin(\omega t - kx + \phi_0)\vec{e}_z$$

Fent $x = 0$:

$$\frac{z^2}{A_2^2} + \frac{y^2}{A_1^2} - \frac{2zy}{A_1 A_2}\cos\phi_0 = \sin^2\phi_0$$

que és l'equació d'una el·lipse inscrita en un rectangle $A_1 \times A_2$.

  - Diferents freqüències:
    Suposant que les freqüències de les dues ones estan relacionades per:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

D'aquesta manera combinant les dues equacions d'ona podem crear corbes com les que es mostren a la figura **??**.

Anàlisi i síntesi harmòniques:
L'anàlisi de Fourier ens permet descompondre cadascuna d'aquestes funcions periòdiques com a combinació lineal de funcions harmòniques de diferents freqüències. D'altra banda, l'invers de l'anàlisi harmònica és la síntesi harmònica que consisteix en la construcció d'una funció periòdica a partir dels seus components harmònics.
Difracció: Si l'ona que s'apropa a una escletxa té una longitud d'ona similar a la longitud de l'obertura de l'escletxa, aleshores en travessar aquesta l'escletxa els fronts d'ona es corben al voltant de l'obertura.
Efecte Doppler:

$$\nu = \nu_0 \frac{v - v_o \cos\beta}{v - v_s \cos\alpha} = \nu_0 \frac{v - \vec{v}_o \cdot \vec{u}}{v - \vec{v}_s \cdot \vec{u}}$$

on v és la velocitat de l'ona; v_o, la del receptor, i v_s, la de l'emissor. ν_0 és la freqüència de l'emissor i ν la del receptor. Els angles α i β són els que formen respectivament l'emissor i el receptor respecte del vector unitari u en la recta que els uneix.
Ones de xoc: Angle (θ) i nombre de Mach (M):

$$\sin\theta = \frac{v}{u} \qquad M = \frac{u}{v}$$

on s'ha emprat la notació de la figura **??**.
Trajectòria i pressió del so:

$$s(x,t) = s_0 \sin(\omega t - kx)$$
$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$
$$p_0 = \rho\omega v s_0$$

on $s(x,t)$ representa la trajectòria de les ones, $p(x,t)$, la pressió d'aquestes.
Velocitat ones sonores:

- en un fluid:
$$v = \sqrt{B/\rho}$$
on $B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$ és el mòdul de compressibilitat del fluid i ρ és la densitat d'aquest.
- en un sòlid:
$$v = \sqrt{Y/\rho}$$
on Y és el mòdul de Young.
- en un gas:
$$v = \sqrt{\gamma RT/M}$$
on γ és el coeficient adiabàtic del gas; M, la massa molar d'aquest; $R = 8,314\ J/(\mathrm{mol}\cdot K)$, i T, la temperatura.

Intensitat d'ones sonores:

$$I = \frac{P}{S} = \eta v = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 vv = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho v}$$

Energia per unitat de volum η d'ones sonores:

$$\eta = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$$

Intensitat i decibels:

$$B = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$\text{llindar d'audició: } B = 0\ dB$$
$$\text{llindar de dolor: } B = 120\ dB$$

on $[B] = dB$ (decibels) i $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$. Relació intensitat−distància:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{P/S_1}{P/S_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

on S_i és la superfície de l'esfera amb radi igual a la distància al focus emissor, r_i.

12.3 | Òptica

Dualitat ona-corpuscle:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad E = hf$$

Interacció llum-matèria:
Fluorescència i fosforescència: Si el procés absorció−emissió és quasi instantani (al voltant de ns) tenim la fluorescència. Si el procés és molt més llarg (al voltant de s o més), com que tenim nivells excitats quasi estacionaris, tenim el fenomen de la fosforescència.
Fonts de llum:

- convencionals: funcionen per emissió espontània. Ex: flama, sol, LED...
- làser (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*): funcionen per emissió estimulada. Necessiten un medi actiu (que emetrà la llum) que també s'ha d'excitar. En aquest medi cal aplicar una inversió de població (més àtoms excitats que en l'estat fonamental) i per això es necessita un sistema que aporti energia als àtoms anomenat sistema de bombeig. Finalment, també cal que hi hagi més emissió estimulada que espontània i això s'obté tenint molta llum atrapada, la qual cosa s'aconsegueix amb una estructura de dos miralls alineats, anomenada cavitat.

Principi de Huygens: Cada punt d'un front d'ones es pot considerar emissor d'ones esfèriques secundàries que avancen a la mateixa velocitat i freqüència que l'ona primària. El nou front d'ona (al cap d'un cert temps) és l'envoltant (corba tangent a totes les ones esfèriques) de les ones secundàries.
Principi de Fresnel: El nou front d'ones al cap d'un cert temps és la superposició de les ones secundàries.
Principi de Fermat: La trajectòria que segueix la llum per anar d'un punt A a un punt B és aquella que fa que el temps transcorregut sigui mínim.
Índex de refracció del material:

$$n \equiv \frac{c}{v}$$

Llei de reflexió:

$$\theta_1 = \theta_1'$$

Llei de refracció (Snell):

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Reflexió especular i reflexió difosa:
Angle crític θ_c:

$$\theta_c : \theta_2 = 90^\circ$$

Dispersió cromàtica: L'índex de refracció depèn lleugerament de λ, $n(\lambda)$. Això explica fenòmens com l'arc de Sant Martí. Intensitat reflectida I_r i transmesa I_t:

$$I_r = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0$$
$$I_t = I_0 - I_r$$

Làmina planoparal·lela:
Angle d'entrada θ_1 i de sortida θ_2':

$$\theta_2' = \theta_1$$

Desplaçament t:

$$t \approx d\theta_1 \frac{n-1}{n}$$

on s'ha emprat la notació de la figura **??**.
Prisma òptic:
En desviació mínima:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2 = \frac{\alpha}{2} \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2'$$

on s'ha emprat la notació de la figura **??**.
Polarització de la llum:

- Polarització per absorció:
  Camp elèctric final E_1:

  $$E_1 = E_0 \cos\theta$$

  on E_0 és el valor del camp elèctric inicial. Intensitat final I_1:

  $$I_1 = I_0 \cos^2\theta$$

  on I_0 és la intensitat de la llum que arriba a l'analitzador.
  Grau de polarització lineal:

  $$G = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

  on $I_{\max}$ i $I_{\min}$ són les intensitats màxima i mínima, respectivament, transmeses mentre va girant l'analitzador.

- Polarització per reflexió:

  $$\theta_2 + \theta_B = \pi/2 \implies \tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

  on θ_B denota l'angle de Brewster.
  El feix reflectit és polaritzat linealment i el refractat és parcialment polaritzat linealment.

- Polarització per dispersió: Quan arriba la llum als àtoms, aquests vibraran de diferents maneres. Un àtom que vibri de manera vertical emetrà ones als costats horitzontals, és a dir, aquesta llum irradiada estarà polaritzada amb el camp elèctric paral·lel a l'eix Y. De forma anàloga s'expliquen els àtoms vibrant de manera horitzontal.

- Polarització per birrefringència o doble refracció: Com observem a la figura **??**, si tenim un feix incident amb dues components perpendiculars, una d'elles es retarda respecte de l'altra, ja que es propaguen a diferents velocitats. Si la làmina té un gruix d, això es traduirà en un canvi de fase $\Delta\varphi$. Aquest retard pot provocar un canvi en la polarització de la llum.

  $$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d|n_e - n_o|$$

  on n_e i n_o són els índexs de refracció de cadascuna de les components del feix de llum i λ és la longitud d'ona del feix de llum.

12.4 | Òptica geomètrica

Definicions:

- Objecte: Lloc de l'espai d'on surt llum. Si és un punt → objecte puntual.
- Sistema òptic: Conjunt de superfícies que refracten i/o reflecteixen la llum.
- Eix òptic: En sistemes esfèrics, totes les superfícies comparteixen un eix de simetria de revolució. Aquest és l'eix òptic.
- Imatge puntual: Si després d'experimentar alguna reflexió o refracció, els raigs o les seves prolongacions semblen provenir d'un punt o anar a un punt, allà es forma una imatge.
  - Imatge real: Es produeix quan els raigs passen realment per la imatge.
  - Imatge virtual: Es produeix quan són les prolongacions dels raigs les que passen per la imatge i, per tant, la llum no hi passa realment.

Mirall pla:
Aplicacions de combinacions de miralls plans: periscopi, retroreflector, calidoscopi.
Criteri de signes (reflexió):

- $s > 0$ si l'objecte és a l'esquerra (davant) del mirall.

- $s' > 0$ si la imatge és a l'esquerra (davant) del mirall.
- $r > 0$ si el mirall és còncau, és a dir, si el centre de curvatura C és a l'esquerra davant del mirall.
- $y > 0$ si l'objecte està situat sobre l'eix òptic.
- $y' > 0$ si la imatge està situada sobre l'eix òptic.
- $f > 0$ si F és a l'esquerra (davant) del mirall.
- $f' > 0$ si F' és a l'esquerra (davant) del mirall.

Definim la distància focal imatge del mirall com f' de manera que si l'objecte està a l'infinit, F' és el focus imatge del mirall.

$$s \to \infty \implies s' \equiv f' = \frac{r}{2}$$

Definim la distància focal objecte f com la distància a la qual s'ha de posar un objecte per tal que la seva imatge sigui a l'infinit.

$$s' \to \infty \implies s \equiv f = \frac{r}{2}$$

Miralls esfèrics:
Imatges per reflexió:
Equació del mirall:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

on $f' = r/2$ és la distància focal.
Augment lateral β':

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Diagrama de raigs per miralls:
Criteri de signes (refracció):

- $s > 0$ si l'objecte és a l'esquerra (davant) del mirall.
- $s' > 0$ si la imatge és a la dreta (darrere) del mirall.
- $r > 0$ si el centre de curvatura C és a la dreta (darrere) del mirall.

Equació per a la refracció:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Augment lateral β':

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}$$

Lents primes:
Considerem lents d'un material amb índex de refracció n envoltades d'aire ($n_{\text{aire}} = 1$) Equació per a la lent prima:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f'}$$

on hem definit la distància focal imatge de la lent com $\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
Tipus de lents:

- Convergents: vegeu la figura **??**.
- Divergents:

Potència d'una lent:

$$P = \frac{1}{f'}$$

on $[f'] = m$ i $[P] = D$ (Diòptries)
Marxa dels raigs a través de lents primes: Combinacions de lents primes: La imatge de l'objecte a través de la primera lent és l'objecte de la segona lent.

$$s_2 = d - s_1'$$

on d és la distància de separació entre les dues lents. Dues lents primes en contacte són equivalents a una única lent prima de focal f_T' de manera que:

$$\frac{1}{f_T'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} \qquad P_T = P_1 + P_2$$

on P_i és la potència de la lent i-èssima.

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_T'}$$

Aberracions: Comportament "no perfecte" d'una lent o d'un sistema òptic. La imatge d'un objecte puntual no és un punt imatge. Tipus d'aberracions:

- Aberració esfèrica:

Si l'objecte és fora de l'eix, tenim altres aberracions com coma o astigmatisme.
Si l'objecte és extens, podem tenir també curvatura de camp o distorsió.
Si, a més, la llum incident és blanca (composta de diferents λ's), tenim aberració cromàtica.
Pels miralls també tenim totes aquestes aberracions excepte la cromàtica.
Altres defectes visuals:

- Hipermetropia:
- Miopia:
- Astigmatisme: Falta de simetria esfèrica de la còrnia o del cristal·lí, que té una curvatura diferent en un pla que en un altre. Es corregeix amb una lent cil·líndrica que compensa la manca de simetria esfèrica.
- Presbícia o vista cansada: Gràcies a la deformació del cristal·lí podem enfocar l'ull des de l'infinit fins al punt pròxim ($\sim$ 7 cm per als nadons; $\sim$ 25 cm per als adults, i $\sim$ 100 cm per a la tercera edat). Amb l'edat, la pèrdua de flexibilitat del cristal·lí allunya la posició del punt pròxim.
- Daltonisme: Percepció incorrecta dels colors per una diferent proporció de conus (fotoreceptors) vermells − verds − blaus.

Mida aparent d'un objecte:

$$y' \approx 2,5 \text{ cm} \frac{y}{n_{\text{ull}} s}$$

on $n_{\text{ull}} \sim 1,336 - 1,406$ variant lleugerament segons a quina part de l'ull ens referim.

Lupa (o lent d'augment):
Amplificació angular:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{25 \text{ cm}}{f}$$

Microscopi compost:
Augment total:

$$M = M_{\text{obj}} M_{\text{ocu}} = -\frac{L}{f_{\text{o}}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{\text{e}}}$$

Telescopi astronòmic:
Poder amplificador del telescopi:

$$M = \frac{\theta_{\text{e}}}{\theta_{\text{o}}} = \frac{f_{\text{o}}}{f_{\text{e}}}$$

12.5 | Interferències i difracció

Fórmula fonamental de les interferències: Donades dues ones amb intensitats I_1, I_2 i diferència de fase δ:

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

on δ pot dependre, per exemple, de la diferència de camins (r_2, r_1), de manera que $\delta = 2\pi \Delta r / \lambda$, o del canvi de fase en la reflexió en una superfície.

Tipus d'interferències:

- Interferència per divisió d'amplitud:
  - Làmines primes:
    Si estem a prop de la incidència normal, els dos feixos se superposen amb una diferència de fase δ:
    $$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd + \pi$$
    on el primer terme correspon al canvi de fase per la diferència de camins i el segon terme al canvi de fase per a la reflexió interna.
  - Anells de Newton:
  - Franges de Fizeau:
  - Interferòmetre Michelson:
    $$I_T = I_0 \cos^2(\delta/2)$$
    on I_0 és la intensitat inicial de la llum.
    Si la font és puntual, es formen anells d'interferència i
    $$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) 2 n_{\text{aire}} \cos \alpha$$
    on d_1, d_2 són les distàncies dels miralls 1 i 2, respectivament, a la làmina semitransparent i α és l'angle respecte l'horitzontal amb què incideix la llum.
  - Variants d'interferòmetre:
    * Mach-Zehnder:
    * Fabry-Pérot:
- Interferència per divisió de front d'ona:
  - Doble escletxa de Young:
    Màxims d'interferència:
    $$d \sin \theta = m\lambda$$
    on $m \in \mathbb{N}$.
    Mínims d'interferència:
    $$d \sin \theta = (m + 1/2)\lambda$$
    on $m \in \mathbb{N}$.
    Franges equidistants separades:
    $$\Delta y = \frac{\lambda L}{d}$$
    Diferència de fase en el punt P:
    $$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$
    Intensitat total:
    $$I_T = 4 I_0 \cos^2(\delta/2)$$
  - Variants de la doble escletxa de Young:
    * Mirall de Lloyd:
      $$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta + \pi$$
    * Biprisma de Fresnel: Hi ha una zona concreta d'interferència.
  - Difracció d'una escletxa d'amplada a:
    Mínim d'interferència:
    $$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$$
    on $m \in \mathbb{N}$.
    Si $L >> y$ i $L >> a$, la integral de Kirchhoff ens dona la intensitat de la llum que tindrem:
    $$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$
    on $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \sin \theta$.
  - Difracció de dues escletxes d'amplada a i separació d:
    Intensitat:
    $$I(\theta) = 4 I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2(\delta/2)$$
    on $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \sin \theta$ i $\frac{\delta}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2} \sin \theta$.

– Difracció de N escletxes idèntiques d'amplada a i separades una distància d:
Intensitat:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$$

on $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \sin\theta$ i $\frac{\delta}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2} \sin\theta$.

– Difracció de Fraunhofer i de Fresnel:
  * de Fraunhofer: si la pantalla és molt lluny de l'obertura.
  * de Fresnel: si la pantalla és a prop de l'obertura.

– Difracció i resolució:

– Xarxes de difracció: Moltes escletxes (N) petites idèntiques separades una distància d.

Equació de la xarxa de difracció (màxims d'interferència):

$$d \sin\theta = m\lambda$$

on $m \in \mathbb{Z}$.
Els màxims secundaris són molt petits i, per tant, els podem negligir.
Amplada dels pics:

$$\Delta(\sin\theta) = \frac{\lambda}{Nd}$$

Poder de resolució $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

on $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ i $m \in \mathbb{Z}$.
Els pics de dos λ's estan separats si $\mathcal{R} \leq Nm$.

13 Química

13.1 | Introducció

Calor:

$$dq = C_e dT = nc_e dT$$

on C_e és la capacitat calorífica; n, el nombre de mols, i c_e, la calor específica.

Llei dels gasos ideals:

$$pV = nRT = Nk_BT$$

on $R = k_BN_A = 8,314\ J/(\text{mol}\ \cdot K)$ és la constant universal dels gasos ideals; $k_B = 1,381 \times 10^{-23}\ J/K$ és la constant de Boltzmann; $N_A = 6,022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ és la constant d'Avogadro, i N és el nombre de partícules. Els gasos reals compleixen aquesta equació al límit $p \to 0$.

Llei de Dalton:

$$p_i := x_i p$$

on p_i és la pressió parcial d'un gas; $x_i = \frac{n_i}{\sum_i n_i}$ és la fracció molar, i p és la pressió total.

Per a una mescla de gasos ideals es compleix:

$$p_i = x_i p = \frac{n_i RT}{V}$$

Equació de Van der Waals (per a gasos reals):

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

on a, b són paràmetres empírics.

Factor de compressibilitat Z:

$$Z = \frac{pV}{nRT}$$

Si $Z = 1$, llavors es tracta d'un gas ideal. Si $Z > 1$, dominen les forces repulsives sobre el gas. Si $Z < 1$, dominen les forces atractives sobre el gas.

13.2 | Formes de transferència d'energia

Energia interna:

$$dU = dW + dq \implies \Delta U = W + q$$

on W és el treball i q és la calor intercanviats amb l'entorn.

Entalpia:

$$H = U + pV$$

Calor:

$$q = nC(T_2 - T_1)$$

on n és el nombre de mols i C la calor específica.

- Volum constant:

$$dU = dq_V \implies \Delta U = nC_V \Delta T$$

- Pressió constant:

$$dH = dq_p \implies \Delta H = nC_p \Delta T$$

Relació de Mayer:

$$C_p = C_V + R$$

Canvis d'estat en gasos ideals:

- Cas general:

$$\Delta H = nC_p(T_2 - T_1)$$
$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$$
$$W = -nR\int_{V_1}^{V_2} \frac{T}{V} dV$$

- Procés reversible isoterm (T=cte):

$$\Delta H = 0$$
$$\Delta U = 0$$
$$W = -nRT \log \frac{V_2}{V_1}$$

- Procés reversible isobàric (p=cte):

$$\Delta H = nC_p(T_2 - T_1)$$
$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$$
$$W = -p(V_2 - V_1)$$

- Procés reversible isocor (V=cte):

$$\Delta H = nC_p(T_2 - T_1)$$
$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$$
$$W = 0$$

Definim l'entalpia de formació estàndard d'una substància pura a T com ΔH^0 per al procés de formació d'un mol de substància a partir dels seus elements separats en l'estat de referència, és a dir, en la seva forma més estable a temperatura T i pressió $p = p^0 = 1$ bar.

Entalpia estàndard d'una reacció:

$$\Delta_r H^0 = \sum_{\text{productes}} \nu \Delta_f H^0 - \sum_{\text{reactius}} \nu \Delta_f H^0$$

on ν és el coeficient estequiomètric de cada substància.

Llei de Hess: $\Delta_r H^0$ d'una reacció és la suma de les entalpies estàndard de les reaccions en les quals es pot dividir. Segons el signe de $\Delta_r H^0$, una reacció s'anomena exotèrmica ($\Delta_r H^0 < 0$) o endotèrmica ($\Delta_r H^0 > 0$).

Entalpia d'enllaç:

$$\Delta_r H^0 = \sum_{\substack{\text{enllaços} \\ \text{trencats}}} \Delta_f H^0 - \sum_{\substack{\text{enllaços} \\ \text{formats}}} \Delta_f H^0$$

Llei de Kirchhoff:

$$\Delta_r H^0_{T_2} = \Delta_r H^0_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \Delta_r C^0_p dT$$

on $\Delta_r C^0_p = \sum_{\text{productes}} \nu C^0_p - \sum_{\text{reactius}} \nu C^0_p$

13.3 | Entropia

Entropia:

$$dS = \frac{dq_{\text{rev}}}{T}$$
$$\Delta S = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{entorn}} \geq 0$$

on dq_{rev} és la calor transferida reversiblement.
Processos reversibles:

- Procés adiabàtic ($dq_{\text{rev}} = 0$):
$$\Delta S = 0$$
- Procés isotèrmic:
$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T}$$
- Escalfament a p constant (isobàric):
$$\Delta S = nC_p \log \frac{T_2}{T_1}$$
- Escalfament a V constant (isocor):
$$\Delta S = nC_V \log \frac{T_2}{T_1}$$
- Canvi d'estat d'un gas ideal:
$$\Delta S = nC_V \log \frac{T_2}{T_1} + nR \log \frac{V_2}{V_1}$$

Distribució de Boltzmann:

$$\frac{N_i}{N} = \frac{e^{-E_i/(k_B T)}}{\sum_i e^{-E_i/(k_B T)}}$$

on N_i és el nombre de partícules a l'estat i; N, el nombre total de partícules, i E_i, l'energia al nivell i.
Definició estadística d'entropia:

$$\Delta S = k_B \log \frac{W_2}{W_1} = Nk_B \log \frac{V_2}{V_1}$$

on W_i és igual al nombre de microestats (maneres diferents de distribuir-se mantenint l'energia total constant) associats a un determinat macroestat del sistema i N és el nombre de partícules.
Enunciat de Nerst-Simon (3r principi de la termodinàmica): Per a qualsevol substància pura tenim:

$$\lim_{T \to 0} S = 0$$

Entropia absoluta:

$$S(T) = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT$$

Entropia estàndard de reacció:

$$\Delta_r S_T^0 = \sum_{\text{productes}} \nu S_{m,T,i}^0 - \sum_{\text{reactius}} \nu S_{m,T,i}^0$$

Energia lliure de Gibbs:

$$G = H - TS$$

Desigualtat de Clausius (per a un procés espontani a $p, T =$cte):

$$\Delta G < 0$$

Relacions:

$$dG = Vdp - SdT$$
$$dU = TdS - pdV$$
$$dH = TdS + Vdp$$

Energia lliure estàndard de reacció:

$$\Delta_r G_T^0 = \Delta_r H_T^0 - T\Delta_r S_T^0$$
$$\Delta_r G_T^0 \leq 0$$
$$\Delta_r G_T^0 = \sum_{\text{prod.}} \nu \Delta_f G_{T,i}^0 - \sum_{\text{reac.}} \nu \Delta_f G_{T,i}^0$$

13.4 | Canvis de fase

La fase estable a temperatura T és la que té G molar menor.
Regla de les fases:

$$L + F = C + 2$$

on L és el nombre de graus de llibertat independents que s'han de fixar per determinar l'estat d'un sistema; F, el nombre de fases, i C, el nombre de components.
Equació de Clapeyron. Les línies de separació entre dues fases corresponen a valors de p i T on les dues fases coexisteixen, és a dir, estan en equilibri i, per tant, les seves G_m són iguals:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S_m}{\Delta V_m} = \frac{\Delta H_m}{T\Delta V_m}$$

on $\Delta V_m = V_m^\alpha - V_m^\beta$, $\Delta S_m = S_m^\alpha - S_m^\beta$ i α i β són les diferents fases.
Equilibri sòlid-líquid. Temperatura de canvi de fase sòlid-líquid T_2 a una pressió p_2, coneixent p_1 i T_1:

$$p_2 = p_1 + \frac{\Delta H_{m,\text{fusió}}}{V_{m,\text{fusió}}} \log \frac{T_2}{T_1}$$

Equilibri líquid-gas. Suposant que el gas es comporta com un gas ideal $\to$ Equació de Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\Delta H_{m,\text{vap}}}{RT^2} dT$$

Temperatura de canvi de fase líquid-gas T_2 a una pressió p_2, coneixent p_1 i T_1:

$$\log \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\Delta H_{m,\text{vap}}}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Equilibri sòlid-gas. Temperatura de canvi de fase sòlid-gas T_2 a una pressió p_2, coneixent p_1 i T_1:

$$\log \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\Delta H_{m,\text{sublim}}}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

13.5 | Dissolucions

Propietat molar:

$$X_m = \frac{X(T, p, n_1, \ldots, n_i)}{n_{\text{total}}}$$

Propietat molar parcial:

$$X_{m,i} = \left(\frac{\partial X}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_{j\neq i}}$$

Formes d'expressar la concentració:

- Fracció molar:
$$x_i = \frac{n_i}{n}$$
- Molaritat:
$$c_i = \frac{n_i}{V}$$
on V és el volum total de la dissolució.
- Molalitat:
$$m_i = \frac{n_i}{kg \text{ de dissolvent}}$$
- % en pes:
$$\frac{\text{g de solut}}{\text{100 g de dissolució}}$$

Potencial químic:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_{j\neq i}}$$

Variació de $G_m = \mu^*$ a T constant:

- Gas ideal:
$$\mu^* = \mu^0 + RT \log \frac{p}{p_0}$$
on μ^0 és el potencial químic estàndard a $p = 1$ bar.
- Gas real:
$$\mu^* = \mu^0 + RT \log \frac{f}{p_0}$$
on $f = \gamma p$ és la fugacitat i γ és el coeficient de fugacitat.

Mescla de gasos ideals:

$$G_T = \sum_{i=1}^{m} n_i \left(\mu^0 + RT \log \frac{p_i}{p_0}\right)$$

Propietat molar parcial:

$$\mu_i(T, p) = \mu^0(T) + RT \log \frac{p_i}{p^0}$$

Mescla de gasos ideals:

$$\Delta_{\text{mix}} H = 0$$
$$\Delta_{\text{mix}} G = nRT(x_A \log x_A + x_B \log x_B)$$
$$\Delta_{\text{mix}} S = -nR(x_A \log x_A + x_B \log x_B)$$

on x_A i x_B són les fraccions molars de dos gasos ideals.

Una dissolució ideal és aquella en la quals les forces intermoleculars entre totes les espècies $(A, B, \ldots)$ són iguals (interaccions $A - A$ = interaccions $B - B$ = interaccions $A - B$).

Llei de Raoult:

$$p_i = x_i^l p_i^*$$

Llei de Henry:

$$p_B = x_B^l K_B$$

on K_B és la constant de Henry característica de cada solut.

Dissolució real:

$$\mu_i = \mu_i^* + RT \log a_i$$

on $a_i = \gamma_i x_i$ és l'activitat i γ_i és el coeficient d'activitat.

13.6 | Equilibri químic

Condició d'equilibri material:

$$(dG)_{T,p} = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\alpha} dn_i^{\alpha} = 0$$

on α és el nombre de fases.

Condició d'equilibri químic (quan només tenim una fase):

$$(dG)_{T,p} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i dn_i = 0$$

Grau d'avanç ξ d'una reacció:

$$\Delta n = n_i - n_{i,0} = \xi \nu_i \implies dn_i = \nu_i d\xi$$

on ν_i són els coeficients estequiomètrics positius per als productes i negatius per als reactius.

Reacció:

- En l'equilibri:
$$\Delta_r G = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,p} = \sum_{i=1} \mu_i \nu_i = 0$$
- Fora de l'equilibri:
$$\Delta_r G > 0 \text{ o } \Delta_r G < 0$$

Per a una reacció en l'equilibri:

$$\Delta_r G^0 + RT \log K_p = 0$$

on $K_p = \prod_i \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\nu_i}$ és la constant d'equilibri.

$$K_p = e^{-\Delta_r G^0/(RT)}$$

Constant en funció de fraccions molars:

$$K_x = \prod_i x_i^{\nu_i} = K_p \left(\frac{p}{p^0}\right)^{-\Delta\nu}$$

Constant en funció de les concentracions:

$$K_c = \prod_i \left(\frac{c_i}{c^0}\right)^{\nu_i} = K_p \left(\frac{c^0 RT}{p^0}\right)^{-\Delta\nu}$$

on $c_i \equiv \frac{n_i}{V}$ i $c^0 \equiv 1\ mol/L$ és la concentració estàndard.

Dependència amb la temperatura:

$$\log \frac{K_p(T_2)}{K_p(T_1)} = \frac{-\Delta_r H^0}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

Gasos no ideals:

$$K_p = \prod_i \left(\frac{f_i}{p_0}\right)^{\nu_i} = \prod_i (\gamma_i)^{\nu_i} \prod_i \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\nu_i}$$

on $f_i = \gamma_i p_i$ és la fugacitat i γ_i és el coeficient de fugacitat.
Dissolucions no ideals:

$$K_c = \prod_i \left(\frac{a_i}{c_0}\right)^{\nu_i} = \prod_i (\gamma_i)^{\nu_i} \prod_i \left(\frac{c_i}{c_0}\right)^{\nu_i}$$

on $f_i = \gamma_i p_i$ és l'activitat i γ_i és el coeficient d'activitat.
Quocient de la reacció:

$$\Delta_r G = RT \log \frac{Q_p}{K_p}$$

on $Q_p = \prod_i \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\nu_i}$ i quan la reacció està fora de l'equilibri. Si $Q_p > K_p \implies \Delta_r G > 0 \implies$ Reacció inversa (no espontània). I si $Q_p < K_p \implies \Delta_r G < 0 \implies$ Reacció directa (espontània).
Equació de Van 't Hoff:

$$\log \frac{K_p(T_2)}{K_p(T_1)} = \frac{-\Delta_r H^0}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

13.7 | Equilibris iònics

Reacció d'un àcid A i una base B:

$$\mathrm{HA} + \mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{A^-} + \mathrm{H_3O^+}$$
$$\mathrm{B} + \mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{BH^+} + \mathrm{OH^-}$$

Constant d'acidesa i de basicitat:

$$K_a = \frac{[\mathrm{A^-}][\mathrm{H_3O^+}]}{[\mathrm{HA}]} \quad K_b = \frac{[\mathrm{BH^+}][\mathrm{OH^-}]}{[\mathrm{B}]}$$

Relacions entre constants:

$$K_a K_b = K_w = 10^{-14}$$

pH i pOH:

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$$
$$\mathrm{pOH} = -\log[\mathrm{OH^-}]$$
$$\mathrm{pH} + \mathrm{pOH} = 14$$

pH en dissolucions tampó:

$$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log\left(\frac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}\right)$$

on $\mathrm{p}K_a = -\log K_a$.
Constant de producte de solubilitat. Agafant com a exemple la reacció $\mathrm{MgF_2\,(s)} \longleftrightarrow \mathrm{Mg^{2+}\,(aq)} + 2\,\mathrm{F^-\,(aq)}$:

$$K_s = [\mathrm{Mg^{2+}}][\mathrm{F^-}]^2$$

on veiem que les concentracions dels ions que constitueixen el compost ($\mathrm{MgF_2}$) s'eleven als seus coeficients estequiomètrics.
La fem d'una pila:

$$\xi = \xi_+ - \xi_- = \xi_{\text{càtode}} - \xi_{\text{ànode}}$$

Reacció redox:

$$\Delta G^0 = -nF\xi^0$$

on n és el nombre d'electrons bescanviats; $F = N_A e$ és la constant de Faraday, i ξ^0 és la fem estàndard de la pila que produeix la reacció redox.
Equació de Nernst:

$$\xi = \xi^0 - \frac{RT}{nF} \log Q$$

13.8 | Cinètica química

La velocitat de la reacció es defineix com el canvi de la composició del sistema en funció del temps.

$$v_A = \frac{dn_A}{dt}$$

on n_A són els mols presents de la substància A. En general, la velocitat a la qual un reactiu es consumeix o un producte es forma és proporcional al coeficient estequiomètric.
Si la reacció és elemental, el grau d'avanç de la reacció ξ és:

$$\xi = \frac{n_i - n_{i,t=0}}{\nu_i}$$

on n_i són els mols de la substància i; $n_{i,t=0}$, els mols de la substància i en $t = 0$, i ν_i, el coeficient estequiomètric de la substància i.
Velocitat v d'avanç de la reacció:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{a} v_A = \cdots = \frac{1}{\nu_i}\frac{dn_i}{dt}$$

Equació de velocitat:

$$v = k_n [A]^\alpha [B]^\beta \cdots [L]^\lambda$$

on els exponents $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ són enters o semienters. α és l'ordre de reacció respecte A; β és l'ordre de reacció respecte B;...; λ és l'ordre de reacció respecte L, i $n = \alpha + \beta + \cdots + \lambda$ és l'ordre total de la reacció. La constant k_n és la constant de velocitat d'ordre n i és una mesura de la rapidesa de la reacció. Aquesta constant depèn de la temperatura.
Equacions integrades de velocitat en una reacció ($aA \to P$) elemental o complexa:

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k_n [A]^n$$

- Ordre $n = 1$:

$$A = [A]_0 e^{-akt}$$

- Ordre n ($n \neq 1$):

$$\frac{1}{[A]^{n-1}} = \frac{1}{[A]_0^{n-1}} + a(n-1)kt$$

on $[A]_0$ és la concentració inicial de la substància A.

El període de semireacció és el temps necessari perquè la concentració d'un determinat reactiu es redueixi a la meitat de la seva concentració inicial.
Equació d'Arrhenius:

$$k(T) = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

on A és el paràmetre preexponencial d'Arrhenius; E_a, l'energia d'activació de la reacció; R, la constant universal dels gasos ideals, i T, la temperatura.

13.9 | Mecanismes de reacció

- Reaccions reversibles ($A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} B$, $[A]_0 = [A]_0$, $[B]_0 = 0$):

$$[A] = \frac{[A]_0 \left(k_{-1} + k_1 e^{-(k_1+k_{-1})t}\right)}{k_1 + k_{-1}}$$

$$[B] = \frac{k_1[A]_0 \left(1 - e^{-(k_1+k_{-1})t}\right)}{k_1 + k_{-1}}$$

$$\frac{[B]_\infty}{[A]_\infty} = \frac{k_1}{k_{-1}} = K_{\text{eq}}$$

- Reaccions consecutives ($A \xrightarrow{k_1} I \xrightarrow{k_2} P$, $[A]_0 = [A]_0$, $[I]_0 = [P]_0 = 0$):

$$[A] = [A]_0 e^{-k_1 t}$$

$$[I] = \frac{k_1[A]_0 \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)}{k_2 - k_1}$$

$$[P] = [A]_0 \left[1 + \frac{1}{k_2 - k_1} \left(k_1 e^{-k_1 t} - k_2 e^{-k_2 t}\right)\right]$$

- Reaccions paral·leles o competitives ($A \xrightarrow{k_1} P_1$ $A \xrightarrow{k_2} P_2$ $A \xrightarrow{k_3} P_3$, $[A]_0 = [A]_0$, $[P_i]_0 = 0$):

$$[A] = [A]_0 e^{-k_T t}$$

$$[P_i] = \frac{k_i}{k_T}[A]_0 \left(1 - e^{-k_T t}\right)$$

on $k_T = k_1 + k_2 + k_3$.

Mètodes aproximats:

- Aproximació de l'estat estacionari:
  - $A \xrightarrow{k_1} I \xrightarrow{k_2} P$ ($[A]_0 = [A]_0$, $[I]_0 = [P]_0 = 0$ i $k_2 >> k_1$):

$$[A] = [A]_0 e^{-k_1 t}$$

$$[I]_{\text{EE}} = \frac{k_1}{k_2}[A]_0 e^{-k_1 t}$$

$$[P]_{\text{EE}} = [A]_0 \left(1 - e^{-k_1 t}\right)$$

  - $A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} I \xrightarrow{k_2} P$ ($[A]_0 = [A]_0$, $[I]_0 = [P]_0 = 0$ i k_2 o $k_{-1} >> k_1$):

$$[I]_{\text{EE}} = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2}[A]_0$$

$$v = \frac{d[P]}{dt} = k_2[I] = \frac{k_2 k_1 [A]_0}{k_{-1} + k_2}$$

- Aproximació de l'equilibri:
  - $A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} I \xrightarrow{k_2} P$ ($[A]_0 = [A]_0$, $[I]_0 = [P]_0 = 0$ i k_1 i $k_{-1} >> k_2$):

$$[I]_e = \frac{k_1}{k_{-1}}[A]_0$$

$$v = \frac{d[P]}{dt} = k_2[I] = \frac{k_2 k_1 [A]_0}{k_{-1}}$$

Second year

14 Classical mechanics

14.1 | Motion in one dimension

14.1.1 Integration of Newton's 2nd law

Newton's 2nd law. If we consider the case of one particle with constant mass m that moves in one dimension, then satisfies

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} F(x(t), \dot{x}(t), t),$$

where we have supposed the force function F is known. We also suppose initial position and velocity, denoted by $x(t_0) = x_0$ and $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ respectively, are known.

Integration of Newton's 2nd law. We consider a force that only depend on time, position and velocity.

- Time dependence:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(t)}{m} \implies \dot{x}(t) = \dot{t_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{F(t')}{m} dt',$$
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \implies x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t') dt'.$$

- Position dependence:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F(x)}{m} \implies \dot{x}(x)^2 = \dot{x}(x_0)^2 + 2 \int_{x_0}^{x} \frac{F(x')}{m} dx',$$
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \implies x(t) = g^{-1}(t),$$

where $g(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\dot{x}(x')} dx' = t$.

- Velocity dependence:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(\dot{x})}{m} \implies \dot{x}(t) = h^{-1}(t),$$
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} h^{-1}(t') dt',$$

where $h(\dot{x}) = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{m}{F(\dot{x}')} d\dot{x}' = t$.

14.1.2 Variable mass

Mass accretion. Consider two objects of masses $m(t)$ and dm and velocities $\mathbf{v}(t)$ and $\mathbf{u}(t)$ respectively, which in an interval of time dt the second one collide with the first one and become a unique object. If $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ is the external force acting to the system, we have

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = m\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\dot{m} = \dot{\mathbf{p}} - \dot{m}\mathbf{u}, \tag{1}$$

where $\dot{\mathbf{p}}$ is the momentum of the object that gains mass.[52]

14.1.3 Rocket motion

Consider a rocket that expels gas at a velocity of $\mathbf{c}$ with respect to the rocket to propel itself. Suppose the mass of the rocket is $m(t)$ and $m_0 := m(t_0)$. Our proposal is to find an expression of $\mathbf{v}$ to describe the motion of the rocket. For doing that, first we need to express the magnitudes in an external frame of reference. In particular, the velocity of the fuel will be $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{c}$. By equation 1 we have

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} + \dot{m}\mathbf{c}.$$

Rocket without gravity. In this situation we have $\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$ and we will suppose $\mathbf{v} = v\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = -c\mathbf{j}$. Finally we get

$$m\frac{dv}{dt} = -c\frac{dm}{dt} \implies v = c \log \frac{m_0}{m}. \tag{2}$$

Consider now the discrete case, i.e. when the function $\dot{m}$ is not differentiable. For that we can consider instantaneous ejections of $\Delta m = (m_0 - m_f)/n$ amount of mass where m_f is the mass of the rocket after n ejections of mass. For this case, we have

$$v = c \sum_{k=1}^{n} \frac{(m_0 - m_f)/n}{m_f + k(m_0 - m_f)/n} = c \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta m}{m_f + k\Delta m}.$$[53]

Rocket with gravity. Now $\mathbf{F}^{\text{ext}} = -mg\mathbf{j}$, and for simplicity we will consider only the case where $\dot{m} = -\beta$, $\beta > 0$. Therefore, we obtain

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + c\beta \implies v = c \log \frac{m_0}{m} - \frac{g}{\beta}(m_0 - m). \tag{3}$$

We observe that if $m_0 g > \beta c$ then dv/dt will be negative, which is not possible. Therefore in this case the formula is not correct if we are considering the rocket launch. In this case the formula becomes

$$v = c \log \frac{\beta c}{mg} - \frac{g}{\beta}\left(\frac{\beta c}{g} - m\right). \tag{4}$$

Because of

$$\dot{m} = -\beta \implies m(t) = m_0 - \beta t,$$

we can express formulas 3, 4 as

$$v(t) = c \log \frac{m_0}{m_0 - \beta t} - gt,$$
$$v(t) = c \log \frac{\beta c}{m_0 g - g\beta t} - gt - \frac{g}{\beta}\left(\frac{\beta c}{g} - m_0\right),$$

respectively.

[52] The formula is also valid for the case when the object is losing mass, i.e. $\dot{m} < 0$.

[53] Obviously if we tend n to infinity we get the equation 2.

14.2 | Oscillations

14.2.1 Simple harmonic oscillator

Movement equation. Consider the following differential equation:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

with initials values of $x(0) = x_0$ and $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Then the general solution is

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \phi), \tag{5}$$

where $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$ and $\phi = -\arctan \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}$. Such constants ω_0 $[\omega_0] = \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, A $[A] = \mathrm{m}$ and ϕ $[\phi] = \mathrm{rad}$ are called *angular frequency*, *amplitude* and *initial phase*, respectively. Observe that the function in equation 5 is periodic with period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ and frequency $\nu = T^{-1} = \frac{\omega_0}{2\pi}$.[54]

Phase space. The phase space of the simple harmonic oscillator is

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \end{pmatrix}.$$

Definition 14.1. Let $U(x)$ be a potential function of class $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. We say x_0 is a *point of stable equilibrium* if U attains a maximum in x_0. Analogously, we say x_0 is a *point of unstable equilibrium* if U attains a minimum in x_0.

Behaviour near a minimum. Suppose x_0 is a point of stable equilibrium an let $U(x)$ be the potential function associated with a particle of mass m. Then if we disturb slightly the particle, it will start to oscillate at a frequency

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}.$$

Examples.

- Mass hanging from a spring: Let $y(t)$ be the position of the mass measured from initial string's length (without the mass) to the position of the mass at time t. If we disturb the system with an external force so that the mass starts to oscillate, we have

$$y(t) = \frac{mg}{k} + A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- Simple pendulum:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

- Physical pendulum:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgD}{I_e}}.$$

- LC circuit:

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

14.2.2 Damped harmonic oscillator

Movement equation. Consider the following differential equation:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

with initials values of $x(0) = x_0$ and $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Then we have three cases for the general solution:

- If $\beta < \omega_0$,

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(c_1 \cos \tilde{\omega} t + c_2 \sin \tilde{\omega} t\right). \tag{6}$$

- If $\beta = \omega_0$,

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(c_1 + c_2 t\right). \tag{7}$$

- If $\beta > \omega_0$,

$$x(t) = c_1 e^{-(\beta + \tilde{\omega})t} + c_2 e^{-(\beta - \tilde{\omega})t}. \tag{8}$$

Here c_1, c_2 are constants depending on the initial values and we have defined $\tilde{\omega} = \sqrt{|\omega_0^2 - \beta^2|}$.

Energy of damped harmonic oscillator.

$$E = \frac{\mu}{2} \left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\right),$$

where μ is a constant.

Underdamped harmonic oscillator: $\beta < \omega_0$. Coefficients c_1, c_2 of the general solution 6 are:

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\tilde{\omega}}.$$

The equation, can be simplified to

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega} t + \phi),$$

where $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\tilde{\omega}}\right)^2}$ and $\phi = -\arctan \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\tilde{\omega} x_0}$.

Definition 14.2 (Quality factor). The *quality factor* is defined as follows:

$$Q := \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

From that, we can rewrite the expression of $\tilde{\omega}$ to get:

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Energy of underdamped harmonic oscillator. For

$$E(t) = \frac{\mu \omega_0^2 A^2}{2} e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}.$$

The rate at which the energy is dissipated is

$$\left|\frac{dE}{dt}(t)\right| = 2\beta E(t) \implies \frac{E}{|dE/dt|} = \frac{1}{2\beta}.$$

If $\beta \ll \omega_0$, then

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E},$$

where ΔE is the energy dissipated in a pseudo-period $\tilde{T} = 2\pi/\tilde{\omega} \approx 2\pi/\omega_0$.

[54] From this last two equations we immediately deduce that $[T] = \mathrm{s}$ and $[\nu] = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}$.

Critically damped harmonic oscillator: $\beta = \omega_0$. Coefficients c_1, c_2 of the general solution 7 are:

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = x_0\omega_0 + \dot{x}_0.$$

This harmonic oscillator is the one that returns to balance more quickly.

Overdamped harmonic oscillator: $\beta < \omega_0$. Coefficients c_1, c_2 of the general solution 8 are:

$$c_1 = \frac{x_0(\tilde{\omega} - \beta) - \dot{x}_0}{2\tilde{\omega}}, \quad c_2 = \frac{x_0(\tilde{\omega} + \beta) + \dot{x}_0}{2\tilde{\omega}}.$$

14.2.3 Driven harmonic oscillators

Movement equation. Consider the following differential equation:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = f_0 \cos(\omega t + \psi),$$

with initials values of $x(0) = x_0$ and $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Then the particular solution is:

$$x_p(t) = A\cos(\omega t + \psi - \phi),$$

where $A = \dfrac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ and $\phi = \arctan \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Therefore for the general solution we have three cases to consider:

- If $\beta < \omega_0$,
$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 \cos\tilde{\omega}t + c_2 \sin\tilde{\omega}t) + A\cos(\omega t + \psi - \phi). \tag{9}$$
- If $\beta = \omega_0$,
$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 + c_2 t) + A\cos(\omega t + \psi - \phi). \tag{10}$$
- If $\beta > \omega_0$,
$$x(t) = c_1 e^{-(\beta+\tilde{\omega})t} + c_2 e^{-(\beta-\tilde{\omega})t} + A\cos(\omega t + \psi - \phi). \tag{11}$$

Here c_1, c_2 are constants depending on the initial values.

Underdamped driven oscillator. Coefficients c_1, c_2 of the general solution 9 are:

$$c_1 = x_0 - A\cos(\psi - \phi),$$
$$c_2 = \frac{\dot{x}_0 - \omega A \sin(\psi - \phi) + \beta\left[x_0 - A\cos(\psi - \phi)\right]}{\tilde{\omega}}.$$

Critically damped driven oscillator. Coefficients c_1, c_2 of the general solution 10 are:

$$c_1 = x_0 - A\cos(\psi - \phi),$$
$$c_2 = \dot{x}_0 A + \omega_0 x_0 + A\left(\omega \sin(\phi - \psi) - \omega_0 \cos(\psi - \phi)\right).$$

Overdamped driven oscillator. Coefficients c_1, c_2 of the general solution 11 are:

$$c_1 = A\frac{(\beta - \tilde{\omega})\cos(\psi - \phi) - \omega\sin(\psi - \phi)}{2\tilde{\omega}} + \frac{-(\beta - \tilde{\omega})x_0 - \dot{x}_0}{2\tilde{\omega}},$$
$$c_2 = A\frac{-(\beta + \tilde{\omega})\cos(\psi - \phi) + \omega\sin(\psi - \phi)}{2\tilde{\omega}} + \frac{(\beta + \tilde{\omega})x_0 + \dot{x}_0}{2\tilde{\omega}}.$$

Definition 14.3. Given a driven oscillator, we say it is in the *steady-state part* if $t \gg 1/\beta$. In that case $x(t)$ become:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \psi - \phi).$$

While the dependency on c_1, c_2 is non-negligible, we say the driven oscillator is in the *transient part.*

Resonance in amplitude. If $\omega = \omega_r := \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ we say the oscillator is in *resonance in amplitude*. For $\omega = \omega_r$ we have

$$A_r = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Energy in steady-state part.

$$E = \frac{\mu A^2}{2}\left[\omega^2 \sin^2(\omega t + \psi - \phi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \psi - \phi)\right].$$

If $\omega \approx \omega_0$ and $\beta \ll \omega_0$ then

$$E = \frac{\mu f_0^2}{8}\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2}.$$

Observe E has a maximum at $\omega = \omega_0$ with the value of $E^{\max} = \frac{\mu f_0^2}{8\beta^2}$.

Definition 14.4. We define the *cutoff frequencies* as this two frequencies:

$$\omega_1 = \omega_0 - \beta, \quad \omega_2 = \omega_0 + \beta.$$

The value $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\beta$ is called the *bandwidth.* Therefore, we can redifien the quality factor as:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$$

FALTA COSAAAAAAAAA

Impulsive forces. Consider a driven oscillator of equation $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f$, where

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < t' \\ f_0 & \text{if } t' \le t \le t' + \Delta t \\ 0 & \text{if } t > t' + \Delta t \end{cases}$$

15 Electromagnetism

15.1 | Electrostatics

Columb's law. Let q_1, q_2 be two point charges at positions $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, respectively. Then the force $\mathbf{F}_2$ experienced by q_2 in the vicinity of q_1 is given by

$$\mathbf{F}_{12} = kq_1q_2\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3},$$

where $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ and $\varepsilon_0 = 8,854\ F/m$ is the vacuum permittivity.

Electric field. We define the *electric field* $\mathbf{E}$ as the force per unit of charge. For a point charge, we have that the electric field created by q_1 i the position of r_2 is

$$\mathbf{F}_2 = q_2\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2), \qquad \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = kq_1\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}.$$

Superposition principle. Let $\rho(\mathbf{r}) = \frac{dq}{d\mathcal{V}}$ be the volume charge density of an object. Then we have that

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})d^3r, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}d^3r'.$$ [55]

Gauß's theorem.

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}d\mathcal{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \rho(r)d^3r = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}, \qquad (12)$$

where Q_T is the total charge enclosed within $\mathcal{V}$.

Electric potential. The electric potential ϕ in a point $\mathbf{r}$ is defined as:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \qquad \phi(\mathbf{r}) = k\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|r - r'\|}d^3\mathbf{r}'. \qquad (13)$$

And then,

$$\phi_a - \phi_b = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\ell = \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\ell.$$

Alternatively we can define the potential from the electric energy. The work required to move a charge q from b to a is

$$W_{b\to a} = -q\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\ell.$$

And also if we consider the point P as a reference point we can define the *electric energy* U_a as follows

$$U_a - U_b = -q\int_P^a \mathbf{E}\cdot d\ell + q\int_P^b \mathbf{E}\cdot d\ell = -q\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\ell = W_{b\to a}.$$

An finally we get

$$\Delta U(\mathbf{r}) = q\Delta\phi(\mathbf{r}).$$

Poisson and Laplace equations. Having in account formulas 12, 13, we get Poisson's equation

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

If $\rho = 0$, we obtain Laplace's equation:

$$\nabla^2\phi = 0.$$

[55] Analogously we can define $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{dq}{d\mathcal{S}}$ to be the surface charge density and $\lambda(\mathbf{r}) = \frac{dq}{d\ell}$ to be the linear charge density, and the integrals become as expected.

16 Laboratori d'Electromagnetisme

17 Laboratori de Mecànica

18 Mecànica Clàssica

Third year Fourth year