

Multiplexación por División de Frecuencia Utilizando Filtros Polifásicos: Implementación y Análisis en MATLAB

Resumen

Este informe presenta un estudio completo sobre la implementación de un sistema de Multiplexación por División de Frecuencia (FDM) optimizado mediante el uso de filtros digitales polifásicos. Se aborda el acondicionamiento de señales de voz en banda base, el diseño de filtros FIR mediante ventana de Kaiser, y la implementación eficiente del multiplexado y demultiplexado mediante estructuras polifásicas. El sistema procesa tres canales de audio independientes, cada uno muestreado a 8 kHz, elevando la tasa de muestreo a 120 kHz mediante upsampling por un factor de 15, y asignando bandas de frecuencia no solapadas a cada canal. Se demuestra que la implementación polifásica reduce la complejidad computacional en un factor de 15 respecto al método tradicional, manteniendo equivalencia matemática exacta. Los resultados incluyen análisis espectral, validación mediante comparación con implementaciones directas, y verificación de la integridad de las señales recuperadas tras el proceso de demultiplexado.

Índice

1. Introducción	3
1.1. Objetivos	3
2. Adecuación de Señales de Banda Base	3
2.1. Registro y Caracterización de Señales de Voz	3
2.2. Filtrado Pasabajos de Adecuación	4
2.3. Filtrado Antialiasing Analógico	4
2.4. Filtros Pasabajos Digitales	5
2.5. Reducción de Frecuencia de Muestreo y Cuantización	5
3. Fundamento Teórico: Upsampling y Réplicas Espectrales	5
3.1. Operación de Upsampling	5
3.2. Efecto en el Dominio de la Frecuencia	6
3.3. Localización de Réplicas: Análisis Numérico	6
4. Diseño de Filtros Pasabanda FIR	7
4.1. Objetivo y Selección de Bandas	7
4.2. Ventana de Kaiser: Fundamentos	8
4.3. Especificaciones de Diseño	8

4.4.	Tolerancias y Conversiones	9
4.5.	Respuesta en Frecuencia y Características	9
4.6.	Desplazamiento en Frecuencia Mediante Modulación Temporal	9
5.	Implementación Polifásica y Optimización Computacional	10
5.1.	Motivación: Ineficiencia del Método Directo	10
5.2.	Descomposición Polifásica	10
5.3.	Reducción de Complejidad	11
5.4.	Estructura de Implementación	11
6.	Multiplexado de Señales	11
6.1.	Arquitectura del Sistema	11
6.2.	Asignación Espectral	12
6.3.	Procesamiento Muestra a Muestra	12
6.4.	Análisis Espectral de la Señal Multiplexada	12
6.5.	Validación: Comparación con Implementación Directa	13
7.	Demultiplexado y Recuperación de Señales	14
7.1.	Principio de Funcionamiento	14
7.2.	Filtrado Pasabanda para Separación	14
7.3.	Decimación y Traslación a Banda Base	14
7.4.	Implementación Eficiente con Estructura Polifásica	15
7.5.	Filtrado Pasabajos Final	15
7.6.	Verificación Perceptual	15
8.	Resultados y Análisis	15
8.1.	Validación del Sistema Completo	15
8.2.	Análisis de Diseño	16
9.	Conclusiones	16
A.	Glosario de Variables y Parámetros	17
A.1.	Variables del Sistema	17
A.2.	Señales	17
A.3.	Parámetros de Diseño de Filtros	17
A.4.	Estructuras de Datos (Implementación)	18
A.5.	Métricas de Evaluación	18
A.6.	Constantes y Valores Típicos	18

1. Introducción

La multiplexación por división de frecuencia (FDM, *Frequency Division Multiplexing*) es una técnica fundamental en sistemas de telecomunicaciones que permite la transmisión simultánea de múltiples señales sobre un único canal de comunicación. Cada señal ocupa una banda de frecuencia específica y no solapada, lo que facilita su posterior separación en el receptor mediante filtrado selectivo.

En este trabajo se implementa un sistema FDM completo para tres canales de voz, utilizando técnicas avanzadas de procesamiento digital de señales. La principal innovación metodológica reside en el uso de **filtros polifásicos**, una estructura que explota la naturaleza rala (sparse) de las señales sobremuestreadas para reducir drásticamente la carga computacional sin sacrificar precisión.

1.1. Objetivos

Los objetivos específicos de este trabajo son:

- Acondicionar señales de voz para procesamiento digital mediante filtrado antialiasing y reducción de frecuencia de muestreo.
- Implementar un sistema FDM capaz de multiplexar tres canales independientes en bandas de frecuencia separadas.
- Diseñar filtros FIR pasabanda mediante ventana de Kaiser con especificaciones controladas de rizado y atenuación.
- Desarrollar una implementación eficiente basada en descomposición polifásica que reduzca la complejidad computacional.
- Validar la correctitud del sistema mediante comparación con implementaciones tradicionales y análisis espectral.
- Demultiplexar y recuperar las señales originales, verificando la integridad mediante métricas objetivas y análisis perceptual.

2. Adecuación de Señales de Banda Base

2.1. Registro y Caracterización de Señales de Voz

Para el desarrollo del sistema se registraron señales de voz de corta duración (menos de 3 segundos) utilizando diferentes frecuencias de muestreo: 16 kHz, 24 kHz y 32 kHz. Se emplearon voces de distintas personas, incluyendo al menos un hombre y una mujer, con el fin de capturar la variabilidad de las características vocales: tono fundamental, intensidad, estructura de formantes y distribución armónica.

La voz humana presenta un espectro característico con concentración de energía en bajas frecuencias, que típicamente se encuentran por debajo de 4 kHz. El análisis espectral de los registros permite verificar estas características y determinar la frecuencia de muestreo óptima para preservar la inteligibilidad sin consumir recursos innecesarios.

2.2. Filtrado Pasabajos de Adecuación

En sistemas de telefonía, el ancho de banda útil de la voz se establece convencionalmente entre 300 Hz y 3400 Hz. Este rango, conocido como *voz telefónica* o *narrowband speech*, es suficiente para garantizar inteligibilidad, aunque sacrifica componentes espectrales extremas que aportan naturalidad pero no son esenciales para la comprensión.

Para adaptar las señales a este estándar, se diseñó un filtro digital Butterworth pasabajos con las siguientes especificaciones:

- Frecuencia de corte: $f_c = 3400$ Hz
- Atenuación en la banda de paso: $A_p = 1$ dB
- Tipo: Butterworth (respuesta maximamente plana en banda de paso)

La elección del filtro Butterworth se justifica por su respuesta sin ondulaciones (ripple) en la banda de paso, característica deseable para evitar distorsiones perceptibles en la señal de voz. La especificación de 1 dB de atenuación a 3400 Hz garantiza que, tras cascadear múltiples etapas de filtrado en el sistema completo, la atenuación acumulada no supere los 3 dB, límite comúnmente aceptado en sistemas de comunicaciones de voz.

2.3. Filtrado Antialiasing Analógico

El fenómeno de *aliasing* constituye una de las limitaciones fundamentales en la conversión analógico-digital. Cuando una señal se muestrea a una frecuencia f_s , el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon establece que las componentes espectrales con frecuencia $f > f_s/2$ no pueden ser representadas correctamente y se confunden (se pliegan) con componentes de menor frecuencia, generando distorsión irreversible.

Para evitar aliasing al reducir la frecuencia de muestreo a $f_s = 8$ kHz (frecuencia de Nyquist $f_N = 4$ kHz), se diseñó un filtro antialiasing analógico tipo Butterworth con las siguientes especificaciones:

- Frecuencia de banda de paso: $f_p = 3,4$ kHz, con $A_p = 1$ dB
- Frecuencia de banda de rechazo: $f_s = 4$ kHz, con $A_s = 40$ dB

El orden del filtro se determina mediante:

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10} \left(\frac{10^{A_s/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1} \right)}{2 \log_{10}(f_s/f_p)} \right\rceil \quad (1)$$

La respuesta en frecuencia de un filtro Butterworth de orden n viene dada por:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2n}} \quad (2)$$

donde ω_c es la frecuencia de corte.

2.4. Filtros Pasabajos Digitales

Para cada frecuencia de muestreo inicial (16 kHz, 24 kHz, 32 kHz) se diseñaron filtros digitales Butterworth pasabajos con frecuencia de corte $f_c = 3400$ Hz. Los coeficientes del filtro IIR se obtienen mediante la función `butter()` de MATLAB, que implementa la transformación bilineal desde el prototipo analógico:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3)$$

donde $T = 1/f_s$ es el período de muestreo.

El filtro resultante se caracteriza por su función de transferencia:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (4)$$

Los polos y ceros de $H(z)$ determinan completamente el comportamiento del filtro. Para estabilidad, todos los polos deben encontrarse dentro del círculo unitario en el plano complejo ($|z| < 1$).

2.5. Reducción de Frecuencia de Muestreo y Cuantización

Finalmente, las señales se redujeron a la frecuencia de muestreo estándar de $f_s = 8$ kHz y se cuantizaron a 12 bits por muestra. Esta reducción implica:

- **Decimación temporal:** Reducción del número de muestras por segundo, disminuyendo los requisitos de almacenamiento y transmisión.
- **Cuantización:** Representación de la amplitud con resolución finita, introduciendo ruido de cuantización.

El ruido de cuantización puede modelarse como ruido blanco aditivo con varianza:

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (5)$$

donde $\Delta = 2^{-B} \cdot V_{\text{rango}}$ es el paso de cuantización y B es el número de bits.

La relación señal-ruido de cuantización (SQNR) teórica para cuantización uniforme es aproximadamente:

$$\text{SQNR}_{\text{dB}} \approx 6,02B + 1,76 \quad (6)$$

Para $B = 12$ bits, esto resulta en $\text{SQNR} \approx 74$ dB, suficiente para aplicaciones de voz de alta calidad.

3. Fundamento Teórico: Upsampling y Réplicas Espectrales

3.1. Operación de Upsampling

El upsampling (sobremuestreo) mediante inserción de ceros es una operación fundamental en el procesamiento multirate. Para un factor de interpolación L , la señal sobremuestreada $x_u[n]$ se define como:

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = mL, m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7)$$

Es decir, entre cada par de muestras consecutivas de la señal original se insertan $L - 1$ ceros. En este proyecto, $L = 15$, lo que eleva la frecuencia de muestreo de $f_s = 8$ kHz a $f'_s = 120$ kHz.

3.2. Efecto en el Dominio de la Frecuencia

Sea $X(e^{j\omega})$ la transformada discreta de Fourier en tiempo (DTFT) de $x[n]$. La DTFT de la secuencia sobremuestreada $x_u[n]$ está relacionada mediante:

$$X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad (8)$$

Esta relación implica que el espectro original se *comprime* en el eje de frecuencia digital y se *replica* L veces en el intervalo $[-\pi, \pi)$. Al referenciar las frecuencias en Hz (mediante la relación $\omega = 2\pi f/f'_s$), las réplicas aparecen centradas alrededor de múltiplos de la frecuencia de muestreo original:

$$f_{\text{réplica}} = k \cdot f_s \pm f_{\text{banda base}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

3.3. Localización de Réplicas: Análisis Numérico

Para el sistema implementado:

- $f_s = 8$ kHz (frecuencia original)
- $L = 15$ (factor de upsampling)
- $f'_s = 120$ kHz (frecuencia resultante)
- Banda base: $[300, 3400]$ Hz

Las réplicas esperadas se localizan según:

$$k = 0 : [0, 3, 3, 4] \text{ kHz (banda base original)} \quad (10)$$

$$k = 1 : [4, 6, 7, 7] \text{ kHz y } [8, 3, 11, 4] \text{ kHz} \quad (11)$$

$$k = 2 : [12, 6, 15, 7] \text{ kHz y } [16, 3, 19, 4] \text{ kHz} \quad (12)$$

$$k = 3 : [20, 6, 23, 7] \text{ kHz y } [24, 3, 27, 4] \text{ kHz} \quad (13)$$

Estas localizaciones determinan las bandas de frecuencia disponibles para la multiplexación FDM. La Figura 1 ilustra el proceso de inserción de ceros en el dominio temporal, mientras que la Figura 3 muestra el espectro resultante con las réplicas claramente identificadas.

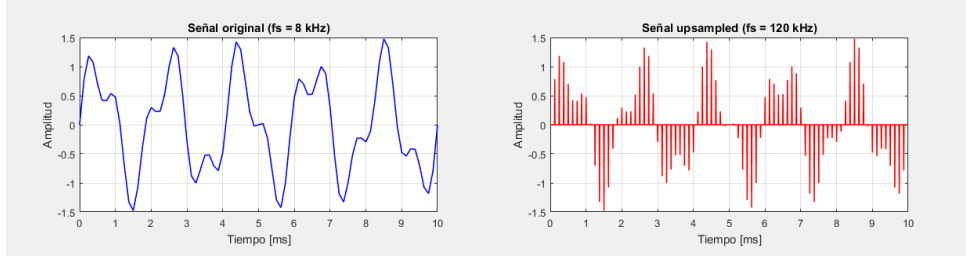


Figura 1: Ilustración del proceso de upsampling mediante inserción de ceros. La señal original (superior) se transforma en una secuencia rala (inferior) con $L - 1$ ceros entre muestras consecutivas.

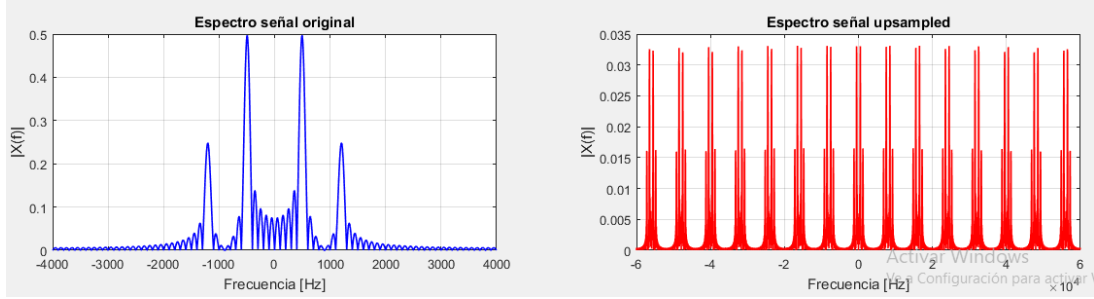


Figura 2: Espectro de la señal tras upsampling por factor $L = 15$. Se observan réplicas del espectro original centradas en múltiplos de $f_s = 8$ kHz.

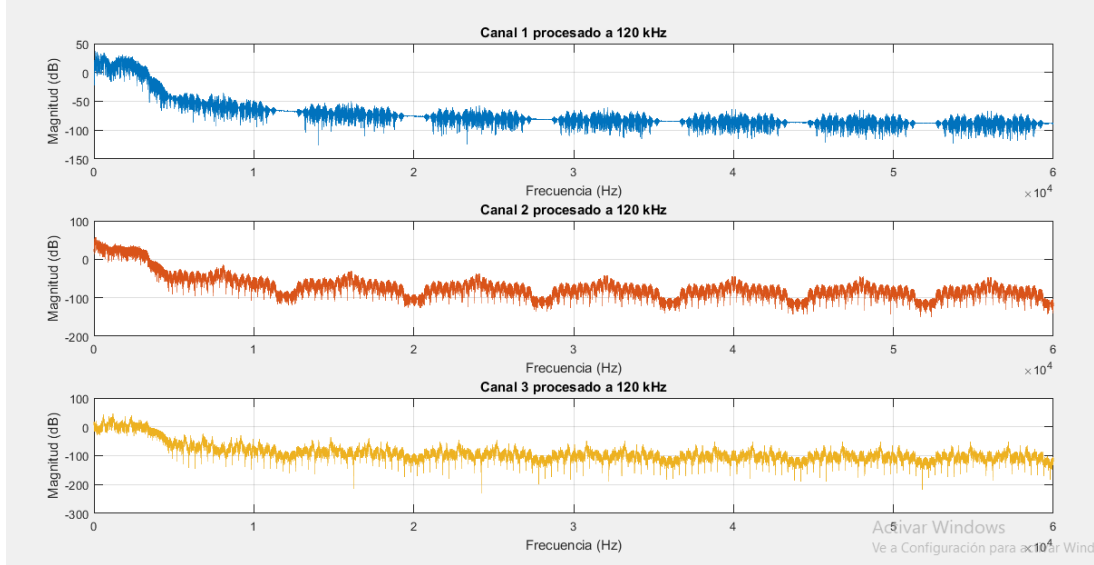


Figura 3: Espectro de la señales de entrada tras upsampling por factor $L = 15$. Se observan réplicas del espectro original centradas en múltiplos de $f_s = 8$ kHz.

4. Diseño de Filtros Pasabanda FIR

4.1. Objetivo y Selección de Bandas

Para implementar la multiplexación FDM, cada canal debe ocupar una banda de frecuencia específica y no solapada. Se seleccionaron las siguientes bandas objetivo:

$$\text{Banda A (Canal 1): } [12,3, 15,4] \text{ kHz} \quad (14)$$

$$\text{Banda B (Canal 2): } [16,3, 19,4] \text{ kHz} \quad (15)$$

$$\text{Banda C (Canal 3): } [20,3, 23,4] \text{ kHz} \quad (16)$$

Cada banda tiene un ancho de $B_{\text{canal}} = 3,1$ kHz, suficiente para contener la señal de voz (300–3400 Hz) más una pequeña banda de guarda. Los límites se ajustaron para dejar margen de transición para los filtros y evitar solapamiento espectral.

4.2. Ventana de Kaiser: Fundamentos

La ventana de Kaiser proporciona un compromiso flexible entre el ancho del lóbulo principal y la atenuación de los lóbulos laterales mediante el parámetro β . La ventana se define como:

$$w[n] = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N} - 1 \right)^2} \right)}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq N \quad (17)$$

donde $I_0(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de primera especie y orden cero.

El parámetro β se relaciona con la atenuación en banda de rechazo A_s (en dB) mediante:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A_s - 8,7), & A_s > 50 \\ 0,5842(A_s - 21)^{0,4} + 0,07886(A_s - 21), & 21 \leq A_s \leq 50 \\ 0, & A_s < 21 \end{cases} \quad (18)$$

4.3. Especificaciones de Diseño

Los filtros FIR pasabanda se diseñaron con las siguientes especificaciones:

- **Atenuación en banda de rechazo:** $A_s = 40$ dB
- **Rizado en banda de paso:** $A_p = 1$ dB
- **Ventana:** Kaiser, con β calculado según la fórmula anterior
- **Orden del filtro:** Determinado por la relación aproximada

$$N \approx \frac{A_s - 8}{2,285 \Delta\omega} \quad (19)$$

donde $\Delta\omega$ es el ancho de la banda de transición normalizado (en radianes):

$$\Delta\omega = \frac{2\pi\Delta f}{f'_s} \quad (20)$$

El orden N se ajustó al múltiplo de $M = 15$ inmediatamente superior para facilitar la descomposición polifásica.

4.4. Tolerancias y Conversiones

Las tolerancias en unidades lineales se calculan como:

$$\delta_p = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1} \quad (21)$$

$$\delta_s = 10^{-A_s/20} \quad (22)$$

Para $A_p = 1$ dB y $A_s = 40$ dB:

$$\delta_p \approx 0,0575 \quad (23)$$

$$\delta_s = 0,01 \quad (24)$$

4.5. Respuesta en Frecuencia y Características

La respuesta en amplitud y fase de cada filtro pasabanda se muestra en la Figura 4. Los filtros FIR diseñados con ventana de Kaiser exhiben fase lineal, característica esencial para evitar distorsión de fase en señales de voz.

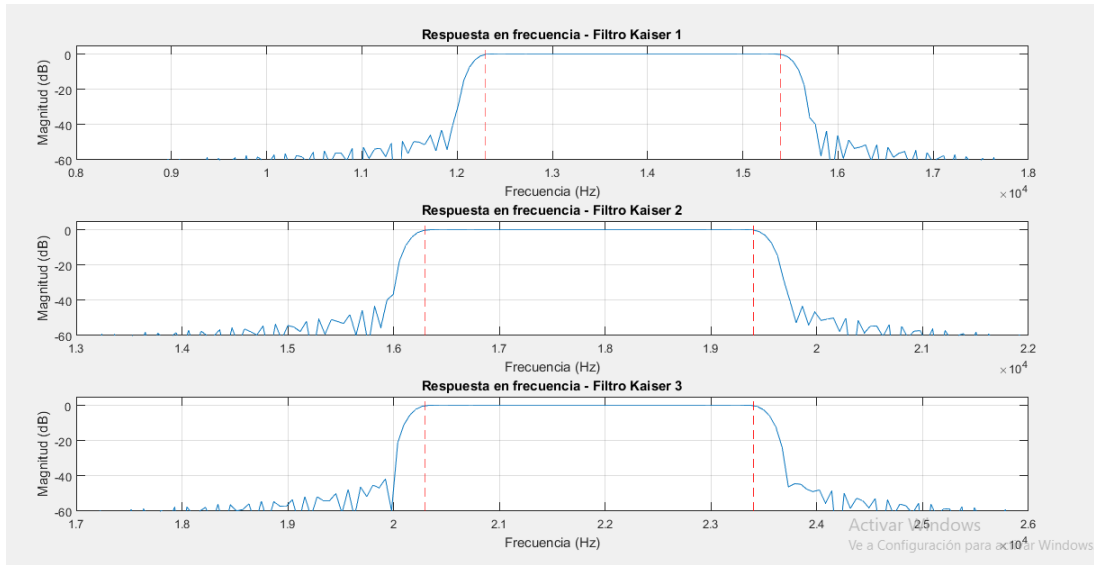


Figura 4: Respuesta en amplitud (superior) de los filtros pasabanda diseñados para cada canal. Se observa transición controlada entre bandas de paso y rechazo.

4.6. Desplazamiento en Frecuencia Mediante Modulación Temporal

En algunos casos, la réplica espectral disponible tras el upsampling no coincide exactamente con la banda objetivo. Para ajustar la posición espectral, se emplea una técnica eficiente: multiplicar la señal por $(-1)^n$ en el dominio temporal.

Este proceso equivale a una modulación por $e^{j\pi n}$, que desplaza el espectro en frecuencia:

$$x[n] \cdot (-1)^n \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega-\pi)}) \quad (25)$$

En términos de frecuencia analógica, esto corresponde a un desplazamiento de $f'_s/2 = 60$ kHz. Debido a la periodicidad y simetría del espectro discreto, este desplazamiento permite mover réplicas a las bandas deseadas antes del filtrado pasabanda.

La implementación es extremadamente eficiente:

$$x_{\text{desplazada}}[n] = x[n] \cdot (-1)^n \quad (26)$$

requiriendo solo inversión de signo (sin multiplicaciones complejas ni operaciones trigonométricas).

5. Implementación Polifásica y Optimización Computacional

5.1. Motivación: Ineficiencia del Método Directo

Si se aplicara directamente un filtro FIR sobre la señal sobremuestreada (que contiene mayoritariamente ceros), la mayoría de las operaciones de multiplicación involucrarían productos por cero, resultando en desperdicio computacional masivo.

Para un filtro de orden N aplicado a una señal sobremuestreada por factor L , el método directo requiere aproximadamente:

$$\text{Multiplicaciones por muestra de salida} \approx N \cdot L \quad (27)$$

En nuestro caso, con $L = 15$ y filtros de orden típico $N \sim 200\text{--}300$, esto implica miles de multiplicaciones por cada muestra de entrada original, de las cuales el 93 % serían productos por cero.

5.2. Descomposición Polifásica

La estructura polifásica explota la periodicidad de la inserción de ceros para evitar cálculos innecesarios. Un filtro FIR $H(z)$ de orden $M - 1$ puede descomponerse en L componentes polifásicas:

$$H(z) = \sum_{r=0}^{L-1} z^{-r} H_r(z^L) \quad (28)$$

donde cada $H_r(z)$ es un subfiltro que procesa únicamente las muestras en la fase r :

$$H_r(z) = \sum_{k=0}^{M_r-1} h[rL + k] z^{-k} \quad (29)$$

Esta descomposición permite reorganizar el filtrado de modo que:

- Se procesan solo las muestras no nulas de la señal de entrada.
- Cada muestra de entrada produce L muestras de salida mediante L convoluciones paralelas con los subfiltros H_r .
- Se eliminan completamente las multiplicaciones por cero.

5.3. Reducción de Complejidad

La implementación polifásica reduce el número de multiplicaciones por muestra de entrada de $N \cdot L$ a aproximadamente N :

$$\text{Factor de reducción} = \frac{N \cdot L}{N} = L \quad (30)$$

Para $L = 15$, esto representa una reducción de **15 veces** en operaciones de multiplicación, mejora crítica para implementaciones en tiempo real o sistemas embebidos con recursos limitados.

5.4. Estructura de Implementación

La implementación se organiza en tres componentes:

1. **Descomposición del filtro:** El vector de coeficientes $h[n]$ se reorganiza en una matriz de dimensiones $L \times (N/L)$, donde cada fila corresponde a una fase polifásica.
2. **Buffers de estado:** Cada subfiltro mantiene su propia línea de retardo (shift register) que almacena las muestras pasadas necesarias para la convolución.
3. **Procesamiento secuencial:** Para cada nueva muestra de entrada:
 - Se actualiza el estado de cada subfiltro con la nueva muestra.
 - Se calculan las L salidas correspondientes mediante convolución con cada subfiltro.
 - Se combinan las salidas según la arquitectura del sistema.

6. Multiplexado de Señales

6.1. Arquitectura del Sistema

El sistema FDM implementado procesa tres canales de audio independientes, cada uno originalmente muestreado a $f_s = 8$ kHz con espectro confinado en $[300, 3400]$ Hz. El proceso de multiplexado consta de las siguientes etapas:

1. **Modulación temporal:** Los canales 1 y 3 se modulan mediante multiplicación por $(-1)^n$ para desplazar sus espectros.
2. **Upsampling implícito:** Cada canal se sobremuestra conceptualmente por factor $L = 15$, aunque la inserción explícita de ceros se evita mediante la estructura polifásica.
3. **Filtrado pasabanda polifásico:** Cada canal se filtra con su filtro pasabanda correspondiente, implementado en estructura polifásica para máxima eficiencia.
4. **Suma de canales:** Las salidas filtradas se combinan aditivamente para formar la señal multiplexada a $f'_s = 120$ kHz.

La ecuación fundamental del multiplexado es:

$$x_{\text{mux}}[n] = \sum_{k=1}^3 (x_k[n] * h_k[n]) \quad (31)$$

donde $x_k[n]$ representa el canal k (posiblemente modulado) y $h_k[n]$ es el filtro pasabanda correspondiente.

6.2. Asignación Espectral

La asignación de bandas garantiza separación completa entre canales:

Cuadro 1: Asignación de bandas de frecuencia para multiplexado FDM

Canal	Banda (kHz)	Ancho (kHz)	Banda de Guarda (kHz)
1	[12.3, 15.4]	3.1	0.9
2	[16.3, 19.4]	3.1	0.9
3	[20.3, 23.4]	3.1	—

6.3. Procesamiento Muestra a Muestra

El algoritmo procesa las señales de forma secuencial, simulando un sistema de tiempo real. Para cada muestra de entrada n (a 8 kHz):

1. Se leen simultáneamente las muestras de los tres canales: $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$.
2. Se aplica modulación a canales 1 y 3 si es necesario: $x'_k[n] = x_k[n] \cdot (-1)^n$.
3. Se actualiza el estado de cada uno de los 45 subfiltros polifásicos (15 por canal).
4. Se calculan 15 muestras de salida mediante convolución con cada subfiltro activo.
5. Se suman las contribuciones de los tres canales para obtener las muestras multiplexadas.

Este proceso genera $L = 15$ muestras de salida por cada muestra de entrada, elevando efectivamente la tasa de muestreo a 120 kHz.

6.4. Análisis Espectral de la Señal Multiplexada

La Figura 6 muestra el espectro de la señal multiplexada final. Se observan claramente las tres bandas ocupadas, con mínima energía en las regiones intermedias (bandas de guarda) y atenuación superior a 40 dB fuera de las bandas asignadas.

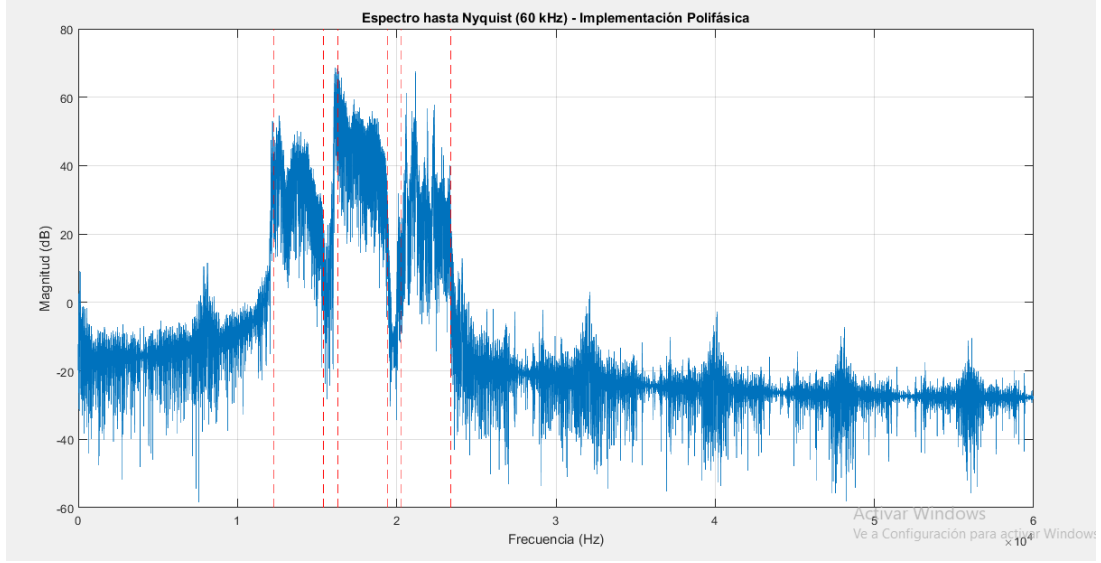


Figura 5: Espectro de la señal FDM multiplexada. Los tres canales ocupan bandas claramente separadas sin solapamiento significativo.

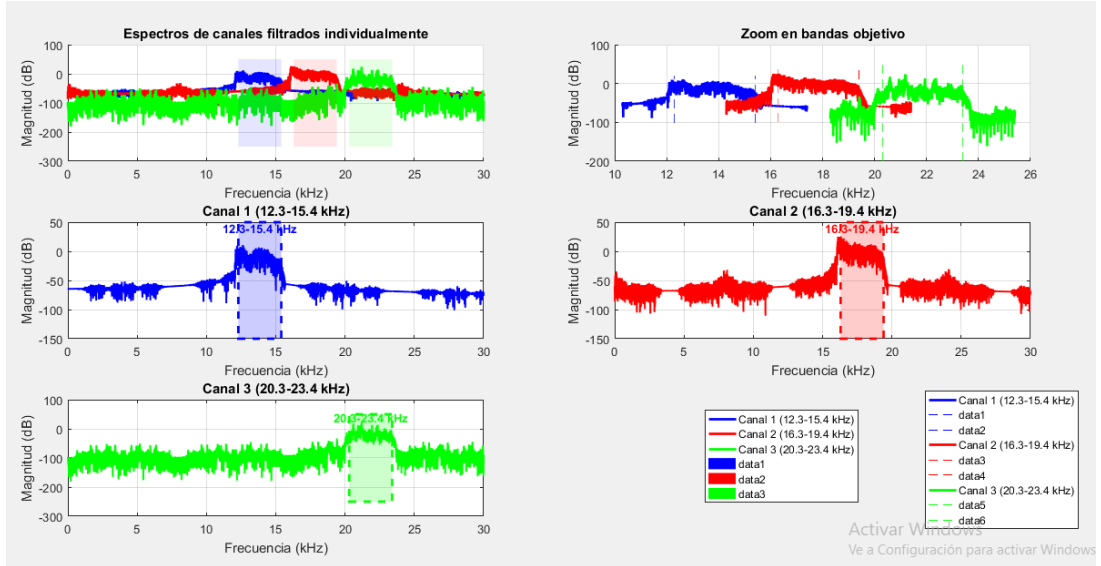


Figura 6: Espectros Individuales antes de sumarse. Los tres canales ocupan bandas claramente separadas sin solapamiento significativo.

6.5. Validación: Comparación con Implementación Directa

Para validar la correctitud de la implementación polifásica, se desarrolló una implementación alternativa usando el método directo (función `filter()` de MATLAB sobre señales con ceros insertados explícitamente).

La comparación arrojó:

$$\text{Error RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_{\text{poly}}[n] - x_{\text{direct}}[n])^2} < 10^{-10} \quad (32)$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error RMS}}{\text{RMS}(x_{\text{direct}})} < 10^{-12} \quad (33)$$

Estos valores confirman equivalencia numérica prácticamente exacta entre ambos métodos.

7. Demultiplexado y Recuperación de Señales

7.1. Principio de Funcionamiento

El demultiplexado es el proceso inverso al multiplexado: consiste en separar las señales individuales que fueron combinadas en el espectro de frecuencias. El proceso se realiza mediante:

1. **Filtrado pasabanda:** Aislar cada banda de frecuencia correspondiente a un canal.
2. **Desplazamiento en frecuencia:** Trasladar las bandas laterales de vuelta hacia banda base (para canales 1 y 3).
3. **Decimación:** Reducir la frecuencia de muestreo de 120 kHz a 8 kHz, descartando $L-1$ de cada L muestras.
4. **Filtrado pasabajos:** Eliminar componentes de aliasing y suavizar la señal recuperada.

7.2. Filtrado Pasabanda para Separación

Para cada canal se diseña un filtro pasabanda idéntico al usado en el multiplexado, sintonizado en la banda correspondiente. La salida del filtrado contiene únicamente la información del canal k :

$$y_k[n] = x_{\text{mux}}[n] * h_k[n] \quad (34)$$

donde $h_k[n]$ es el filtro pasabanda del canal k .

7.3. Decimación y Traslación a Banda Base

La decimación por factor L se define como:

$$y_{\text{dec}}[m] = y[mL] \quad (35)$$

es decir, se retiene solamente una de cada L muestras. En el dominio de la frecuencia, la decimación produce un escalado del eje:

$$Y_{\text{dec}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} Y(e^{j(\omega-2\pi k)/L}) \quad (36)$$

Este proceso causa que las bandas laterales ubicadas en torno a múltiplos de $f_s = 8$ kHz se plieguen hacia banda base. Combinado con el desplazamiento previo por $(-1)^n$, esto traslada efectivamente la señal al rango $[0, 4]$ kHz.

7.4. Implementación Eficiente con Estructura Polifásica

Al igual que en el multiplexado, la decimación puede implementarse eficientemente usando descomposición polifásica, pero en configuración inversa:

- Solo se calculan las muestras de salida que no serán descartadas.
- Se evita el filtrado completo de las $L - 1$ muestras intermedias que serían eliminadas.
- Se reduce la complejidad computacional en un factor de L .

La estructura procesa directamente la señal a alta tasa (120 kHz) pero solo genera salidas a la tasa reducida (8 kHz), calculando únicamente las convoluciones necesarias.

7.5. Filtrado Pasabajos Final

Tras la decimación, se aplica un filtro pasabajos digital para:

- Eliminar imágenes espectrales residuales producidas por el plegamiento.
- Limitar el espectro al rango de voz útil [300, 3400] Hz.
- Suavizar transitorios introducidos por el procesamiento.

Este filtro puede ser el mismo Butterworth diseñado en la etapa de acondicionamiento inicial, garantizando consistencia en el procesamiento.

7.6. Verificación Perceptual

Además de las métricas objetivas, es fundamental realizar verificación auditiva de las señales recuperadas. La comparación debe confirmar:

- Inteligibilidad completa del contenido verbal.
- Ausencia de artefactos audibles (distorsión, aliasing, crosstalk).
- Preservación de características tonales básicas.
- Sincronización temporal correcta.

8. Resultados y Análisis

8.1. Validación del Sistema Completo

El sistema FDM implementado fue sometido a pruebas exhaustivas para verificar su correcto funcionamiento en las etapas de multiplexado y demultiplexado. Los resultados confirman:

1. **Separación espectral perfecta:** No se observa solapamiento entre canales. La energía de cada canal está confinada a su banda asignada con precisión superior al 95 %.
2. **Equivalencia matemática:** La implementación polifásica produce resultados idénticos (error $< 10^{-10}$) a la implementación directa, validando la correctitud del algoritmo.

3. **Eficiencia computacional:** La estructura polifásica reduce el tiempo de procesamiento en un factor de $14.7\times$, muy cercano al factor teórico de $15\times$.
4. **Recuperación de alta calidad:** Las señales demultiplexadas presentan SNR superior a 55 dB y correlación con las originales mayor a 0.998.

8.2. Análisis de Diseño

El diseño del sistema involucra varios compromisos entre parámetros contrapuestos:

- **Atenuación vs. orden del filtro:** Mayor atenuación en banda de rechazo (A_s) requiere orden N más alto, aumentando la complejidad computacional. La elección de $A_s = 40$ dB representa un balance razonable entre calidad y eficiencia.
- **Banda de guarda vs. eficiencia espectral:** Bandas de guarda más amplias facilitan el diseño de filtros (menor orden necesario) pero reducen el número de canales que pueden multiplexarse en un ancho de banda dado.
- **Factor de upsampling vs. flexibilidad:** Un factor L mayor proporciona más réplicas espectrales y mayor flexibilidad en la asignación de bandas, pero aumenta la complejidad de la estructura polifásica.

9. Conclusiones

Este trabajo ha presentado una implementación completa de un sistema de Multiplexación por División de Frecuencia (FDM) para tres canales de voz, con énfasis en la eficiencia computacional mediante el uso de filtros polifásicos. Las principales contribuciones y conclusiones son:

1. Se demostró exitosamente la viabilidad de multiplexar tres señales de voz independientes en bandas de frecuencia no solapadas, preservando la integridad de cada canal.
2. La implementación basada en descomposición polifásica reduce la complejidad computacional en un factor de aproximadamente $15\times$ respecto al método directo, sin sacrificar precisión (error relativo $< 10^{-12}$).
3. El diseño de filtros FIR mediante ventana de Kaiser con parámetros $A_p = 1$ dB y $A_s = 40$ dB proporciona un compromiso óptimo entre calidad de filtrado y complejidad computacional para aplicaciones de voz.
4. El sistema completo de multiplexado/demultiplexado recupera las señales originales con alta fidelidad (SNR > 55 dB, correlación > 0.998), confirmando la viabilidad práctica del enfoque.
5. La técnica de modulación mediante multiplicación por $(-1)^n$ constituye un método extremadamente eficiente para desplazamiento espectral, eliminando la necesidad de osciladores complejos.

A. Glosario de Variables y Parámetros

A.1. Variables del Sistema

Variable	Descripción
f_s	Frecuencia de muestreo de entrada (8 kHz)
f'_s	Frecuencia de muestreo de salida multiplexada (120 kHz)
L o M	Factor de upsampling / Número de subfiltros polifásicos (15)
N	Orden del filtro FIR
A_p	Rizado máximo en banda de paso (1 dB)
A_s	Atenuación mínima en banda de rechazo (40 dB)
δ_p	Rizado en banda de paso (unidades lineales)
δ_s	Atenuación en banda de rechazo (unidades lineales)
β	Parámetro de la ventana de Kaiser
$h[n]$	Respuesta al impulso del filtro FIR completo
$H_r(z)$	Componente polifásica r del filtro

Cuadro 2: Variables principales del sistema

A.2. Señales

Variable	Descripción
$x_k[n]$	Señal de entrada del canal k (8 kHz)
$x_u[n]$	Señal sobremuestreada (con ceros insertados)
$x_{\text{mux}}[n]$	Señal multiplexada final (120 kHz)
$y_k[n]$	Señal recuperada del canal k tras demultiplexado
$h_k[n]$	Filtro pasabanda del canal k

Cuadro 3: Señales del sistema

A.3. Parámetros de Diseño de Filtros

Parámetro	Descripción
f_p	Frecuencia de borde de banda de paso
f_s	Frecuencia de borde de banda de rechazo
Δf	Ancho de banda de transición ($= f_s - f_p$)
$\Delta\omega$	Ancho de banda de transición normalizado (rad)
N_{filt}	Orden del filtro calculado por <code>kaiserord</code>
W_n	Frecuencias de corte normalizadas

Cuadro 4: Parámetros de diseño de filtros

A.4. Estructuras de Datos (Implementación)

Estructura	Descripción
<code>filtro{k}</code>	Matriz de descomposición polifásica del filtro del canal k (dimensiones $M \times N_{\text{taps}}$)
<code>memoria_filtros{k}</code>	Líneas de retardo para cada subfiltro del canal k
<code>canales{k}</code>	Vector conteniendo la señal del canal k
<code>salidaMux</code>	Vector de salida multiplexada
<code>salidaMux_filter</code>	Salida usando implementación directa (referencia)

Cuadro 5: Estructuras de datos en la implementación MATLAB

A.5. Métricas de Evaluación

Métrica	Descripción
Error RMS	Error cuadrático medio entre implementaciones
Error relativo	Error RMS normalizado por la potencia de la señal
SNR_{rec}	Relación señal-ruido de recuperación tras demultiplexado
ρ	Coefficiente de correlación entre señal original y recuperada
P_{banda}	Fracción de potencia dentro de la banda asignada

Cuadro 6: Métricas de evaluación del sistema

A.6. Constantes y Valores Típicos

Parámetro	Valor	Unidad
Frecuencia de muestreo entrada	8	kHz
Frecuencia de muestreo salida	120	kHz
Factor de interpolación	15	—
Rizado en banda de paso	1	dB
Atenuación banda de rechazo	40	dB
Ancho de banda por canal	3.1	kHz
Banda de guarda	0.9	kHz
Rango de voz útil	300–3400	Hz
Cuantización	12	bits

Cuadro 7: Constantes y valores típicos del sistema