1 Zwykłe funkcje tworzące

Grzegorz Świrski

1.1 Teoria

Funkcje tworzące są aparatem stosowanym w różnych dziedzinach matematyki. Jednym z najważniejszych zastosowań jest rozwiązywanie równań rekurencyjnych. Funkcje te stosuje się na przykład do wyznaczenia n-tego wyrazu ciągu Fibonacciego. Bardzo często przydają się w zliczaniu obiektów kombinatorycznych (najpierw układamy wzór rekurencyjny, a potem rozwiązujemy za pomocą funkcji tworzącej).

1.1.1 Definicje

Funkcja tworząca $G(x)$ ciągu współczynników $g_n = g_0, g_1, g_2, ...$ jest zdefiniowana jako

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n.$$

Ciąg będziemy często zapisywać jako $\langle g_0, g_1, g_2, ...\rangle$ lub po prostu $\langle g_n \rangle$. Współczynnik g_n przy x^n oznaczymy jako $[x^n]G(x)$.

Gdy mówimy o funkcjach tworzących praktycznie nigdy nie interesuje nas konkretna wartość liczbowa x. Wykładnik przy x determinuje jedynie pozycję współczynnika w ciągu wyjściowym.

Wartość $[S]$, gdzie S jest dowolnym wyrażeniem logicznym, będzie równa 1, gdy S prawdziwe. W przeciwnym wypadku wynosi 0.

1.1.2 Operacje na szeregach

Oczywistym jest, że na tak zdefiniowanym bycie możemy wykonywać wiele znanych operacji.

Dodawanie funkcji tworzących jest dość jasne:

$$\begin{aligned} \alpha F(x) + \beta G(x) &= \alpha \sum_n f_n x^n + \beta \sum_n g_n x^n \\ &= \sum_n (\alpha f_n + \beta g_n) x^n. \end{aligned}$$

Przesuwanie funkcji tworzącej nie jest wiele trudniejsze. Żeby przesunąć ciąg wyjściowy $\langle g_0, g_1, g_2, ...\rangle$ o m miejsc w prawo (nowe miejsca wypełniając zerami) i otrzymać ciąg $\langle 0, ..., 0, g_0, g_1, g_2, ...\rangle$ wystarczy pomnożyć naszą funkcję przez x^m:

$$x^m G(x) = x^m \sum_n g_n x^n = \sum_n g_n x^{n+m} = \sum_n g_{n-m} x^n.$$

Aby przesunąć ciąg w lewo musimy najpierw usunąć składniki, których zamierzamy się pozbyć po przesunięciu. Aby otrzymać ciąg $\langle g_m, g_{m+1}, g_{m+2}, ...\rangle$ odejmujemy pierwsze m składników, po czym dzielimy przez x^m:

$$\frac{G(x) - g_0 - g_1 x - ... - g_{m-1} x^{m-1}}{x^m} = \sum_{n \geqslant m} g_n x^{n-m} = \sum_{n \geqslant 0} g_{n+m} x^n.$$

Możemy także zamienić x przez jego stałą wielokrotność następującą sztuczką:

$$G(cx) = \sum_n g_n (cx)^n = \sum_n c^n g_n x^n.$$

otrzymując ciąg $\langle c^n g_n \rangle$. Szczególnie przydatny jest przypadek $c = -1$.

Aby pomnożyć współczynniku w szeregu możemy zastosować różniczkowanie, aby podzielić - całkowanie. To jednak pominiemy.

Funkcje tworzące możemy również mnożyć otrzymując *splot* ciągów.

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ...)(g_0 + g_1 x, g_2 x^2 + ...) \\ &= (f_0 g_0) + (f_0 g_1 + f_1 g_0)x + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)x^2 + ... \\ &= \sum_n (\sum_k f_k g_{n-k}) x^n. \end{aligned}$$

Jeżeli ciąg $\langle h_n \rangle$ jest splotem ciągów $\langle f_n \rangle$ i $\langle g_n \rangle$ to składnik $h_n = \sum_k f_k g_{n-k}$.

1.1.3 Podstawowe ciągi

Zacznijmy od podstawowego ciągu $\langle 1, 1, 1, ...\rangle$, którego funkcja tworząca to $\sum_n x^n$. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego, bądź też wzoru Taylora dowiemy się, że suma ta ma postać zwartą $\frac{1}{1-x}$.

Intuicyjnie ciąg $\langle 1, 0, 0, ...\rangle$ ma postać zwartą 1, a ciąg $\langle 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0\rangle$ (jedynka na m-tej pozycji) x^m.

Kolejny bardzo ważny ciąg $\langle 1, 2, 3, ...\rangle$ otrzymamy ze splotu $F(x) = 1/(1-x)$ z nią samą:

$$F(x)^2 = \sum_n (\sum_{k \leqslant n} 1) x^n = \sum_n (n+1) x^n.$$

Postać zwarta tego ciągu to oczywiście $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Łatwo zauważyć, że splot dowolnej funkcji tworzącej z $\frac{1}{1-x}$ daje nam funkcję tworzącą dla ciągu złożonego z sum częściowych (prefiksowych) ciągu początkowego.

Ciąg	**Funkcja tworząca**	**Postać zwarta**
$\langle 1, 0, 0, 0, ...\rangle$	$\sum_n [n = 0]x^n$	1
$\langle 0, ..., 0, 1, 0, ...\rangle$	$\sum_n [n = m]x^n$	x^m
$\langle 1, 1, 1, 1, ...\rangle$	$\sum_n x^n$	$\frac{1}{1-x}$
$\langle 1, -1, 1, -1, 1, ...\rangle$	$\sum_n (-1)^n x^n$	$\frac{1}{1+x}$
$\langle 1, 0, 1, 0, 1, ...\rangle$	$\sum_n [2/n]x^n$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\langle 1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 1, 0...\rangle$	$\sum_n [m/n]x^n$	$\frac{1}{1-x^m}$
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, ...\rangle$	$\sum_n (n + 1)x^n$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\rangle$	$\sum_n 2^n x^n$	$\frac{1}{1-2x}$
$\langle 1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, ...\rangle$	$\sum_n \binom{4}{n} x^n$	$(1 + x)^4$
$\langle 1, c, c^2, c^3, ...\rangle$	$\sum_n c^n x^n$	$\frac{1}{1-cx}$

1.1.4 Rozwiązywanie rekurencji

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych jest jednym z najważniejszych zastosowań funkcji tworzących. Znalezienie zwartej postaci najpierw funkcji tworzącej ciągu $\langle g_n \rangle$, a potem funkcji n wyrażającą n-ty wyraz opisany rekurencją sprowadza się zazwyczaj do wykonania trzech mechanicznych kroków.

1. Przemnożeniu obu stron równości przez x^n i zsumowanie dla każdego n. Po jednej stronie równania otrzymamy sumę $\sum_n g_n x^n$, którą oznaczamy jako funkcję tworzącą $G(x)$. Prawą stronę przekształcamy do wyrażeń zawierających $G(x)$.

2. Obliczeniu postaci zwartej funkcji tworzącej $G(x)$.

3. Rozwinięciu $G(x)$ w szereg potęgowy i podanie współczynnika przy x^n jako zwarta postać na g_n.

Zacznijmy od prostego przykładu. Znajdźmy postać zwartą n-tego wyrazu opisanego w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0,\\
a_1 &= 1,\\
a_n &= 2a_{n-1} + 1.
\end{aligned}$$

Po przemnożeniu stronami przez x^n otrzymamy:

$$\sum_n a_n x^n = 2\sum_n (a_{n-1}x^n) + \sum_n (x^n).$$

Oznaczmy $\sum_n a_n x^n$ jako $A(x)$. Widzimy, że aby wyrazić $\sum_n (a_{n-1}x^n)$ musimy nasze $A(x)$ przesunąć o jeden w prawo. Wiemy też, że $\sum_n (x^n)$ ma postać zwartą $\frac{1}{1-x}$. Ostatecznie otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2xA(x) + \frac{1}{1-x}\\
A(x)(1-2x) &= \frac{1}{1-x}\\
A(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)}.
\end{aligned}$$

Następną rzeczą którą musimy zrobić jest rozłożenie naszego ułamka na ułamki proste. W naszym wypadku będzie to:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{1-2x}\\
1 &= \alpha_1(1-2x) + \alpha_2(1-x)\\
1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + x(-2\alpha_1 - \alpha_2).
\end{aligned}$$

Aby dwa wielomiany były równe, to współczynnik przy x^i dla każdego i musi być równy, dlatego:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2.$$

Otrzymujemy więc:

$$A(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x}.$$

Widzimy, że mamy tutaj dwa razy ciąg $\langle 1, 1, 1, ... \rangle$ przemnożony przez stałą, a więc:

$$A(x) = -1 \sum_n x^n + 2 \sum_n (2x)^n = \sum_n (2^n x^n - x^n) = \sum_n x^n (2^n - 1).$$

Widzimy więc, że a_n ma postać zwartą:

$$a_n = 2^n - 1.$$

Pozostało nam sprawdzić indukcyjnie czy nie popełniliśmy błędu i mamy rozwiązanie.

W tym przykładzie znacznie prościej było „zgadnąć” rozwiązanie obserwując kilka pierwszych wartości i upewniając się indukcją. Niestety, nie zawsze będzie tak prosto, dlatego dobrze mieć mechaniczne narzędzie jakim są funkcje tworzące.

Jednym z bardziej kłopotliwych etapów jest rozbicie zwartej postaci funkcji tworzącej na sumę ułamków prostych.

Rzut oka na tabelkę najważniejszych ciągów potęgowych sugeruje, że rozkładając mianownik nie będziemy szukali pierwiastków postaci $(x - \rho_k)$, lecz raczej $(1 - \rho_1 x)$.

Przypuśćmy, że mamy wielomian $Q(x)$ postaci

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + ... + q_m x^m, \text{ gdzie } q_0 \neq 0 \text{ i } q_m \neq 0$$

„Lustrzany” wielomian

$$Q^R(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + ... + q_m$$

znajduje się w następującej ważnej relacji do $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q^R(x) &= q_0(x - \rho_1)...(x - \rho_m) \\ &\Leftrightarrow Q(x) = q_0(1 - \rho_1 x)...(1 - \rho_m x) \end{aligned}$$

dlatego bardzo często łatwiej będzie nam rozkładać lustrzane wielomiany w „standardowy” sposób tak, ażeby potem szybko otrzymać pierwiastki postaci $(1 - \rho_k x)$.

Po znalezieniu wszystkich pierwiastków mianownika możemy zabrać się za szukanie naszych ułamków prostych. Każdy taki ułamek będzie miał postać

$$\frac{\alpha_k}{1 - \rho_k x}.$$

Jeżeli któryś z pierwiastków ma krotność większą niż 1, dajmy na to j, to będziemy potrzebowali dla niego j ułamków prostych:

$$\frac{\alpha_{k1}}{1-\rho_k x}, \frac{\alpha_{k2}}{(1-\rho_k x)^2}, \ldots, \frac{\alpha_{kj}}{(1-\rho_k x)^j}.$$

Na koniec wystarczy wszystko przemnożyć stronami i wyznaczyć współczynniki α_k.

1.2 Zadania

1.2.1 Zadanie 1

Znaleźć zwarty wzór na n-tą liczbę Fibonacciego. Przypomnijmy:

$$\begin{aligned} &f_0 = 0; f_1 = 1; \\ &f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ dla } n \geqslant 2 \end{aligned}$$

Na początku mnożymy wyraz f_n przez x^n i sumujmy stronami:

$$\begin{aligned} \sum_n f_n x^n &= \sum_n f_{n-1} x^n + \sum_n f_{n-2} x^n + x \\ \sum_n f_n x^n &= x \sum_n f_n x^n + x^2 \sum_n f_n x^n + x \\ F(x) &= xF(x) + x^2 F(x) + x \\ F(x) &= \frac{x}{1-x-x^2}. \end{aligned}$$

Rozkładamy ułamek na ułamki proste. Wielomian „lustrzany” $x^2 - x - 1$ ma postać $(x-\varphi_1)(x-\varphi_2)$, gdzie $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, dlatego:

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{A}{1-\varphi_1 x} + \frac{B}{1-\varphi_2 x} \\ x &= A(1-\varphi_2 x) + B(1-\varphi_1 x) \\ x &= A + B - x(A\varphi_2 + B\varphi_1) \\ A &= \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\varphi_1 x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\varphi_2 x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_n (\varphi_1 x)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_n (\varphi_2 x)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_n (\varphi_1^n - \varphi_2^n) x^n,
\end{aligned}$$

czyli:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^n - \varphi_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

1.2.2 Zadanie 2

Znaleźć zwarty wzór na n-ty wyraz następującej rekurencji:

$$\begin{aligned}
&g_0 = g_1 = 1; \\
&g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n, \text{ dla } n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Aby ułatwić sobie wyznaczenie funkcji tworzącej poprawmy nasze równanie tak, aby działało również dla $n < 2$. Przyjmijmy, że $g_n = 0$ dla $n < 0$. W pozostałych przypadkach:

$$g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n[n \geqslant 0] + [n = 1].$$

Po pomnożeniu przez x^n i zsumowaniu stronami:

$$\begin{aligned}
\sum_n g_n x^n &= \sum_n g_{n-1} x^n + 2\sum_n g_{n-2} x^n + \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n x^n + \sum_{n=1} x^n \\
G(x) &= xG(x) + 2x^2 G(x) + \frac{1}{1+x} + x \\
G(x) &= \frac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

Mamy tutaj pierwiastek wielokrotny, więc przy rozkładaniu na ułamki proste musimy uważać:

$$\frac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-2x}.$$

Obliczamy, że $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{9}, C = \frac{7}{9}$.

Zastanówmy się jak rozwinąć pierwiastek $\frac{1}{(1+x)^2}$. Wiemy, że będzie to splot dwóch funkcji $\frac{1}{1+x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \sum_n (-1)^n x^n \\
\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 &= \left(\sum_n (-1)^n x^n\right)\left(\sum_n (-1)^n x^n\right) \\
&= (x^0 - x^1 + x^2 - x^3 + ...)(x^0 - x^1 + x^2 - x^3 + ...) \\
&= (x^0 - 2x^1 + 3x^2 - 4x^3 + ...) \\
&= \sum_n (n+1)(-1)^n x^n.
\end{aligned}$$

Dalsza część rozwiązania idzie mechanicznie. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{3}\sum_n (n+1)(-1)^n x^n - \frac{1}{9}\sum_n (-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum (2x)^n \\
&= \sum_n \left(\frac{1}{3}(n+1)(-1)^n - \frac{1}{9}(-1)^n + \frac{7}{9}2^n\right) x^n \\
&= \sum_n \left((-1)^n \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right) + \frac{7}{9}2^n\right) x^n.
\end{aligned}$$

Zatem:

$$a_n = \frac{7}{9}2^n + (-1)^n\left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)$$

Jak widać ciężko by nam było rozwiązać powyższą rekurencję bez użycia funkcji tworzących.

1.2.3 Zadanie 3

Obliczyć, jaka jest największa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych przy założeniu, że żadne dwie proste nie są równoległe i żadne trzy nie są współpunktowe.

Po pierwsze n-ta prosta zwiększa liczbę obszarów o k wtedy i tylko wtedy, gdy przecina k spośród zastanych obszarów. Dzieje się tak tak z kolei wtedy i tylko wtedy gdy przecina proste w $k-1$ różncyh punktach. Dwie proste mogą się przeciąć w co najwyżej jednym punkcie. Ponieważ żadne dwie proste nie są równoległe oraz ponieważ żadne trzy nie są współpunktowe, to nowa prosta przecina dokładnie $n-1$ zastanych prostych w dokładnie $n-1$ różnych punktach. Oznaczmy przez l_n liczbę obszarów wyznaczonych przez n prostych. Zatem:

$$\begin{aligned} l_0 &= 1; \\ l_n &= l_{n-1} + n, \text{ dla } n > 0. \end{aligned}$$

Po pomnożeniu przez x^n i zsumowaniu stronami otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_n l_n x^n &= \sum_n l_{n-1} x^n + \sum_n n x^n + 1 \\ L(x) &= xL(x) + \frac{x}{(1-x)^2} + 1 \\ L(x) &= \frac{1-x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{(1-2)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że $1/(1-x)^3$ to postać zwarta funkcji tworzącej ciąg sum częściowych kolejnych liczb naturalnych. Intuicyjnie możemy więc rozwinąć postać zwartą w szereg otrzymując:

$$\sum_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n.$$

Poprawność powyższego wzoru można sprawdzić indukcyjnie.

Dostajemy:

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_n x^n - \sum_n (n+1)x^n + \sum_n \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n \\ L(x) &= \left(\frac{1}{2}(2+3n+n^2) - nx^n\right) x^n \\ L(x) &= \frac{1}{2}(2+n+n^2)x^n \\ L(x) &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right) x^n. \end{aligned}$$

Ilość obszarów którą otrzymamy prowadząc n prostych to $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

1.2.4 Zadanie 4

Znudzony uczeń chodzi po korytarzu wzdłuż drzwi ponumerowanych od 1 do 1024. Otwiera zamek nr 1, potem opuszcza lub otwiera każdy zamknięty zamek na przemian. Kiedy dochodzi do końca korytarza, odwraca się i idzie z powrotem ponawiając procedurę. Chodzi tak dopóki nie otworzy wszystkich zamków. Jaki będzie numer ostatniego otwartego zamka?

Źródło: 102 Combinatorial Problems, USA IMO Team Training

Załóżmy, że mamy 2^n drzwi. Przez l_k oznaczmy numer ostatnio otwartych drzwi. Po pierwszym przejściu ucznia wzdłuż korytarza pozostanie 2^{k-1} zamkniętych drzwi. Wszystkie one będą miały parzyste numery i będą one ułożone malejąco od miejsca gdzie stoi student. Przenumerujmy teraz drzwi od 1 do 2^{k-1}. Widzimy, że drzwi, które na początku miały numer i teraz mają numer $2^{k-1}+1-\frac{i}{2}$. A więc, skoro l_{k-1} jest numerem ostatnio otwartych drzwi z nową numeracją, mamy:

$$l_{k-1} = 2^{k-1} + 1 - \frac{l_k}{2}.$$

Rozwiązując w celu otrzymania l_k

$$l_k = 2^k + 2 - 2l_{k-1}.$$

Możemy nieco uprościć nasze równanie:

$$l_k = 2^k + 2 - 2(2^{k-1} + 2 - 2l_{k-1}) = 4l_{k-2} - 2.$$

Ponieważ $1024 = 2^{10}$ to łatwo zauważyć, że interesować będą nas tylko liczby postaci l_{2j}. Dlatego „skompresujmy” nieco nasze równanie w celu uproszczenia rachunków:

$$l_0 = 1, l_n = 4l_{n-1} - 2.$$

Interesującą nas odpowiedzią będzie zatem l_5.

Teraz możemy policzyć wynik ręcznie, spróbujmy jednak użyć funkcji tworzących. Po pomnożeniu przez x^n i zsumowaniu stronami otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\sum_n l_n x^n &= 4\sum_n l_{n-1}x^n - 2\sum_n x^n + 3 \\
L(x) &= 4xL(x) - \frac{2}{1-x} + 3 \\
L(x) &= \frac{3 - \frac{2}{1-x}}{1-4x} = \frac{1-3x}{(1-x)(1-4x)} \\
&= \frac{2}{3(1-x)} + \frac{1}{3(1-4x)} \\
&= \frac{2}{3}\sum_n x^n + \frac{1}{3}\sum_n 4^n x^n \\
&= \sum_n \frac{1}{3}(2+4^n)x^n.
\end{aligned}$$

Zatem:

$$l_n = \frac{1}{3}(2+4^n).$$

Ostatecznym wynikiem jest $l_5 = 342$.

1.2.5 Zadanie 5

Listonosz przynosi przesyłki do 19 domów przy ulicy Elm Street. Zauważył on, że żadne dwa sąsiadujące domy nigdy nie dostały przesyłki tego samego dnia, oraz że nie było dnia w którym więcej niż dwa sąsiadujące domy nie dostały żadnej przesyłki. Znaleźć liczbę możliwych sytuacji (liczbę zbiorów takich, że domy z tego zbioru otrzymały przesyłkę, zaś pozostałe nie).

Źródło: 102 Combinatorial Problems, USA IMO Team Training

Zauważmy, że naszą sytuację dobrze opisują ciągi zer i jedynek, które odpowiednio informują, że nie było lub była przesyłka do danego domu. Taki ciąg będziemy nazywali *akceptowalnym*, jeżeli nigdzie w tym ciągu nie występuje 11 ani 000. Przez f_n oznaczmy liczbę akceptowalnych ciągów długości n. Niech a_n oznacza akceptowalny ciąg długości n taki, że 00 następuje po jedynce najbardziej z lewej, natomiast b_n taki, że po tejże jedynce występuje 01. Łatwo zauważyć, że $f_n = a_n + b_n$ dla $n \geqslant 5$. Usunięcie pierwszego wystąpenia 100 pokazuje, że $a_n = f_{n-3}$, a usunięcie 10 z pierwszego wystąpienia 101 pokazuje, że $b_n = f_{n-2}$. Zatem $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$ dla $n \geqslant 5$. Łatwo sprawdzić, że $f_1 = 2, f_2 = 3, f_3 = 4, f_4 = 7$. Dalej wystarczy pokazać, że $f_{19} = 351$.

1.2.6 Zadanie 6

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Znaleźć liczbę wielomianów $P(x)$ ze współczynnikami w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ takimi, że $P(2) = n$.

Źródło: 102 Combinatorial Problems, USA IMO Team Training

Przez S oznaczmy zbiór $\{0, 1, 2, 3\}$ oraz

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_i \in S$. Więc $P(2) = 2^m a_m + 2^{m-1} a_{m-1} + ... + 2a_1 + a_0$. Potrzebujemy znaleźć liczbę ciągów $(a_0, a_1, ...)$ z $a_i \in S$ takich, żeby

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_i = n.$$

Rozważmy funkcję tworzącą

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^4 + x^8 + x^12)...,$$

gdzie $1 + x + x^2 + x^3$ oznacza możliwe wybory dla a_0, $1 + x^2 + x^4 + x^6$ dla a_1 i tak dalej. Wystarczy znaleźć współczynnik wyrazu przy x_n w $f(x)$. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4-1}{x-1} \cdot \frac{x^8-1}{x^2-1} \cdot \frac{x^{16}-1}{x^4-1} \cdot \frac{x^{64}-1}{x^8-1} \cdot ... \\ &= \frac{1}{(x-1)(x^2-1)}. \end{aligned}$$

Rozkładamy to na ułamki proste otrzymując:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} \\ &= \sum_n \left(\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) \right) x^n. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla n nieparzystego $\frac{1}{4}$ się zredukuje, natomiast $\frac{1}{2}(n+1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Dla n parzystego otrzymujemy $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n+1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Zatem otrzymujemy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ wielomianów spełniających wymagania.

1.2.7 Zadanie 7

Udowodnić, że dla ciągu liczb Fibonacciego zachodzi:

$$F_0 + F_1 + ... + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Źródło: IMO Training Materials, www.imomath.com

Wiemy, że splot dowolnego szeregu z $\frac{1}{1-x}$ da nam szereg składający się z sum częściowych szeregu wyjściowego. Zatem lewa strona równości ma postać $F/(1-x)$, gdzie $F = x/(1-x-x^2)$ (funkcja tworząca ciągu Fibonacciego). Z drugiej strony mamy:

$$\frac{F-x}{x^2} - \frac{1}{1-x}.$$

Po kilku prostych przekształceniach dowodzimy równości.

1.2.8 Zadanie 8

Niech S i F będą dwoma przeciwległymi wierzchołkami ośmiokąta foremnego. Pionek zaczyna na polu S i w ciągu każdej sekundy przesuwa się na jeden z sąsiadujących wierzchołków. Kierunek ruchu zależy od rzutu monetą. Procedura się kończy w momencie,

gdy pionek dotrze na pole F. Niech a_n oznacza liczbę różnych ścieżek o długości n które pionek mógł przebyć aby dotrzeć z pola S na pole F. Udowodnić, że dla $n = 1, 2, 3...,$

$$a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^{n-1} - y^{n-1}), \text{ **gdzie** } z = 2 + \sqrt{(2)}, y = 2 - \sqrt{2}.$$

Źródło: IMO Compendium

Ponumerujmy wierzchołki zaczynając od S i idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara. W tym wypadku $S = 1$ i $F = 5$. Po nieparzystej ilości ruchów możemy się znaleźć jedynie na wierzchołków z parzystym numerkiem, stąd $a_{2n-1} = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech z_n i w_n oznaczają odpowiednio liczbę ścieżek z S do S w $2n$ ruchach i liczbę ścieżek z S do punktów 3 oraz 7 w $2n$ ruchach. Z łatwością otrzymujemy poniższe zależności rekurencyjne:

$$a_{2n+2} = w_n, w_{n+1} = 2w_n + 2z_n, z_{n+1} = 2z_n + w_n, n = 0, 1, 2, ...$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego dostajemy, że $z_{n+1} = w_{n+1} + w_n$. Podstawiając to równanie do wzoru na w_{n+2} otrzymujemy $w_{n+2} - 4w_{n+1} + 2w_n = 0$. Ponieważ $w_0 = 0$ i $w_1 = 2$ to otrzymujemy następującą funkcję tworzącą:

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{2x}{1 - 4x + 2x^2} = \frac{2x}{(1 - (2 - \sqrt{2})x)(1 - (2 + \sqrt{2})x)} \\ &= \frac{2x}{(1 - yx)(1 - zx)} = \frac{A}{1 - yx} + \frac{B}{1 - zx} \\ A &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, B = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n z^n x^n - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n y^n x^n \\ &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} (z^n - y^n) x^n. \end{aligned}$$

Dochodzimy do tego, że $a_{2n} = w_{n-1} = (z^{n-1} - y^{n-1})/\sqrt{2}$.