

# 论实数

## ——对实数引入的简要理解

郭耸霄

(2020 级计算机科学与技术学院 3 班 PB20111712)

**【摘要】**本文从实数是什么、如何引入的实数以及为什么要引入实数三个方面对实数引入进行理解。利用分解剖析方法理解实数的含义，利用纵向对比方法概括实数的引入历程，利用学科交叉的方法探索实数中蕴含的思想。成功理解实数这一数学概念的部分数学意义与非数学意义。细致分析“新”概念引入的历史有助于对未知领域的进一步探索。

**【关键词】**数学；分析

### 一、 何为实数

#### (一) 如何理解实数

所谓“实数”，并非仅用“实数”二字可以说明清楚。从唯物主义讲，在人类的语言中出现“实数”这一词语，即人们的意识中产生“实数”这一概念之前，实数就已经存在。因此，无论是汉语“实数”、英语“real numbers”还是其他语言在描述实数这一客观存在时，都会产生信息损失，以致不同人对同样的概念产生的理解略有差别。当然，这是所有定义都不可避免的。不过，为了理解“何为实数”，还是要从字面来返回头去推理，重新走过前辈为之命名的历程。

#### (二) 语言理解

##### 1、实

本义：充满。

衍义：符合客观情况。

##### 2、数

是一个用作计数、标记或用作量度的抽象概念，是比较同质或同属性事物的等级的简单符号记录形式（或称度量）。

#### (三) 数学理解

##### 1、定义

数学上，实数定义为与数轴上的点相对应的数。

##### 2、特点

以列举的方式不能描述实数的整体。

### 3、分类

实数可以分为有理数和无理数两类；

实数也可以分为代数数和超越数两类；

#### （四）小结

“实”的“充满”含义与“实数与数轴上的点相对应”相联系，因为实数充满整个数轴；“符合客观情况”含义与“以列举的方式不能描述实数的整体”相联系，因为列举是一种主观做法，它无法准确刻画客观情况。

实数的两种互不相干的分类正说明了它具有两种互不相干的引入流程，其中第一种是下面重点分析的内容。

## 二、 引入历程

### （一）、常规历程

#### 1、自然数

所谓“自然数”就是人们自然而然产生的有关数的概念。当我们拥有一个苹果时，就知道比没有“多”；如果我们再拥有一个，就会知道比原来更多。于是“自然数”的概念便产生了，它由一个数的序列组成，其中每一个数（除第一个）为前一个数的“后一个数”。

在我们都了解实数的基础上，我们可能会对上面的叙述产生质疑：为什么“1”的后面是“2”而不是“1.5”、或者“1.00001”？其实这个问题不难回答。从表面看，我们在引入自然数的概念时，还不知道什么是小数，什么是分数；更细致分析，无论是“1”“2”“1.5”还是“1.00001”，都是数字，而不是数。（数字只是对数的一种表示，因为它很简便，所以我们经常将其与数本身混淆）我们所说的是第一个自然数的“后一个数”，无论你认为它是什么，我们现在将其称为第三个自然数，记为“2”。

这样我们已经扫清了理解上的障碍，便可以更加严格地说明何为自然数。Peano 公理便给出了定义自然数的一种标准方法。

如同 Euclid 第五公设一样，如果我们不认可其中的若干条，可能建立起其它形式的对实际研究有益或无意义的“自然数”，但我们这里不对它进行理解。

#### 2、整数

整数是对自然数概念的合理推广。在定义自然数时，我们利用了增量运算，即什么为“后一个数”。合理地，我们用归纳法便可以定义增量运算的复合——加法。这一步并不困难，因为两个自然数相加得到的仍然是自然数。但是我们在

定义加法的逆运算时，便遇到了障碍——有时无法表示运算结果。这样，我们把所有自然数的差加入自然数集合，便得到了整数。

### 3、有理数

有理数是对整数概念的合理推广。在定义整数时，我们利用了加减法，即什么为两个自然数的和差。合理地，我们用归纳法便可以定义加法的复合——乘法。这一步并不困难，因为两个整数相乘得到的仍然是整数。但是我们在定乘法的逆运算时，便遇到了障碍——有时无法表示运算结果。这样，我们把所有整数的商加入整数集合，便得到了有理数。

### 4、实数

有理数集合已经对四则运算封闭，因此可能有人认为无法通过为实现四则运算对数域进行扩充而从有理数得到实数。其实这是对有限与无限的认识的局限。例如，我们发现某个数的平方是 2（它为边长为 1 的正方形的对角线长，有着由有理数刻画的几何图形中的几何意义），同时，我们可以同时找出比它大和比它小的数（如 1 和 2）。利用二分法，我们便可以缩小这个数的大小范围。可以试想，无限次进行下去，便可以得到准确的估计。这不就是利用无限次四则运算由有理数得出实数吗！

事实上，以上内容需要利用极限等知识严谨地建立，但本文主要论述理解，故不对此进行说明。有关详细内容可以参考参考文献。

### （二）小结

聪明的读者已经发现，从自然数到整数，再到有理数、实数，探索发现的难度是逐级提升的，特别地，从有理数到实数这一步格外困难，在历史上甚至造成了 Hippasus 的死亡，这一点更显示出无限概念的抽象与难以理解。

## 三、 蕴含思想

### （一）物理思想

实数与数轴上的点一一对应，严密地刻画了一维物理空间。实数理论使得我们可以度量一切可见的物质和过程。实数理论对经典力学的发展意义重大，其后扩充的复数亦然。

### （二）哲学思想

实数是客观存在的，而非我们在意识中构造出来的。我们只是通过适当的具体化方便研究与论述。正是依据这种朴素的唯物主义思想，我们通过一代又一代人努力，将自然的法则一点点地揭示出来。

### （三）与数域的扩充的联系

为了运算的有意义是对数域进行扩充的主要动机，更进一步地，实际研究、生产的需要是扩充数域的根本动力。

在迈过从有理数到实数这大大步之后，人们更容易地扩充出了复数，三元数、四元数等等有已被发现的实际意义的和尚未被发现实际意义的数域。

#### （四）小结

引入实数后，在自然数、整数域中定义的运算在实数中依然成立。这看起来理所当然、简洁明了，正体现出

简单性是真理的标志。

但实际上都是通过严密论证而得出的，这也恰恰是数学这一学科所特有的，也是我们亟需学习的，正所谓

数学方法是数学之精髓。

### 参考文献

【1】【澳】陶哲轩：《陶哲轩实分析》，李馨译，北京：人民邮电出版社 2018 年 5 月第 1 版。

【2】程艺，陈卿，李平：《数学分析讲义》，北京：高等教育出版社 2019 年 3 月第 1 版。