11 系 20 级 3 班　郭耸霄 PB20111712　2021 年 7 月 15 日

中国科学技术大学 2019-2020 学年 数学分析 (B2) 测试真题难题集萃

题解来源：5，13，14：叶升宇；11，15：陈景毅；12：刘枭男；6，9：陈卿（教授）.

1　向量场的微商

1．设 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 是常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 求向量场 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ 的旋度.
利用向量外积公式

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})=-(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r}+(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}=(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{v}.$$

2　二重积分

2．求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx\int_0^{x}\frac{\cos x}{x}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=\frac{1}{2}.$$

3　二重积分的换元

3．设 $D=\{(u.v)|u\geqslant 0,v\geqslant 0\}$ 为无界区域．求

$$\iint_D e^{-u^2-v^2-2uv\cos\alpha}\,du\,dv,$$

其中 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 为常数.
做代换

$$t=u-v\cos\alpha,s=v\sin\alpha,$$

则参数范围

$$D'=\{(t,s)|0\leqslant t,0\leqslant s\},$$

代换的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

原式变为

$$\iint_{D'}e^{-s^2-t^2}|\frac{1}{\sin\alpha}|\,dt\,ds.$$

利用常用积分

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

得原积分为

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sin\alpha}.$$

4 数量场在曲面上的积分

4．设曲面 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|x+y+z=1,x,y,z\geqslant 0\}$**．求**

$$\iint_S xyz\,dS.$$

使用 x,y 做参数，则对应的面积元

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy=\sqrt{3}\,dx\,dy,$$

参数范围

$$D=\{(x,y)|x,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}.$$

原式变为

$$\begin{aligned}&\iint_D xy(1-x-y)\sqrt{3}\,dx\,dy\\ &=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(xy-x^2y-xy^2)\,dx\,dy\\ &=\sqrt{3}\int_0^1(\frac{x(1-x)^2}{2}-\frac{x^2(1-x)^2}{2}-\frac{x(1-x)^3}{3})\,dx\\ &=\frac{\sqrt{3}}{120}.\end{aligned}$$

5．求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy(x,y\geqslant 0)$ **的面积．**
换为球坐标, 则参数曲面方程

$$\boldsymbol{r}=p\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i}+p\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j}+p\cos\theta\boldsymbol{k}$$

其中

$$p=\sin\theta\sqrt{\sin 2\phi},0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

$$p_\theta^{'}=\cos\theta\sqrt{\sin 2\phi},p_\phi^{'}=\frac{\sin\theta\cos 2\phi}{\sqrt{\sin 2\phi}}.$$

记

$$E=\boldsymbol{r}_\theta^{'2}=\cos^2\phi(p\cos\theta+p_\theta^{'}\sin\theta)^2+\sin^2\phi(p\cos\theta+p_\theta^{'}\sin\theta)^2+(-p\sin\theta+p_\theta^{'}\cos\theta)^2$$

$$=p^2+p_\theta^{'2};$$

$$G=\boldsymbol{r}_\phi^{'2}=\sin^2\theta(p_\phi^{'}\cos\phi-p\sin\phi)^2+\sin^2\theta(p_\phi^{'}\sin\phi+p\cos\phi)^2+\cos^2\theta p_\phi^{'2}$$

$$=p^2\sin^2\theta+p_\phi^{'2};$$

$$F=\boldsymbol{r}_\theta^{'}\cdot\boldsymbol{r}_\phi^{'}=\cos\phi(p\cos\theta+p_\theta^{'}\sin\theta)\sin\theta(p_\phi^{'}\cos\phi-p\sin\phi)$$

$$+\sin\phi(p\cos\theta+p_\theta^{'}\sin\theta)\sin\theta(p_\phi^{'}\sin\phi+p\cos\phi)+(-p\sin\theta+p_\theta^{'}\cos\theta)\cos\theta p_\phi^{'}$$

$$=p_\theta^{'}p_\phi^{'}.$$

则面积元

$$dS=|\boldsymbol{r}_\theta^{'2}\times\boldsymbol{r}_\phi^{'2}|\,d\theta\,d\phi=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\phi,$$

$$= \sqrt{(p^2 + p_\theta'^2)(p^2 \sin^2\theta + p_\phi'^2) - p_\theta'^2 p_\phi'^2}\, d\theta\, d\phi$$

$$= \sqrt{(\sin^2\theta \sin 2\phi + \cos^2\theta \sin 2\phi)(\sin^2\theta \sin 2\phi \sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta\cos^2 2\phi}{\sin 2\phi}) - \cos^2\theta \sin 2\phi \frac{\sin^2\theta\cos^2 2\phi}{\sin 2\phi}}\, d\theta\, d\phi$$

$$= \sin^2\theta\, d\theta\, d\phi.$$

曲面面积

$$\iint_S ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi^2}{4}.$$

5 向量场在曲线上的积分

6. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$，满足 $|\nabla f|^2 = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \equiv 1$.
（1）证明：$\forall \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^2, |f(\boldsymbol{Q}) - f(\boldsymbol{P})| \leqslant |\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}|$;
（2）设光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} (t \in [a, b])$ 满足

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \nabla f(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\boldsymbol{j},$$

证明：$\boldsymbol{r}(t)$ 是直线段.

记 $\boldsymbol{P} = (x_1, y_1), \boldsymbol{Q} = (x_2, y_2)$. 由微分中值定理, 存在 x', y' 有

$$|f(\boldsymbol{Q}) - f(\boldsymbol{P})| = |(x_2 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x', y') + (y_2 - y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x', y')|$$

由柯西不等式

$$\leqslant \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}$$

由已知

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= |\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}|.$$

取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}(a), \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{r}(b)$

$$\int_r |dr| = \int_a^b |\nabla f|\, dt = \int_a^b dt = \int_a^b \nabla f \cdot \nabla f\, dt = \int_r \nabla f \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_{\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{Q}} df = |f(\boldsymbol{Q}) - f(\boldsymbol{P})| \leqslant |\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}|.$$

其中 $\int_r |dr|$ 为 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 两点间的曲线长度，$|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}|$ 为 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 两点间的直线长度，表明两点间曲线长度不大于直线长度，只能说明该曲线是直线.

7. 设 D 是平面有界区域, $L = \partial D$ 是光滑曲线, $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 的单位外法向量, $\boldsymbol{v} \in C_1(D), \boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$. 用 Green 公式证明：

$$\int_L (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, ds = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})\, dx\, dy.$$

设单位外法向量

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j},$$

则逆时针单位切向量

$$\boldsymbol{\tau} = -\cos\beta \boldsymbol{i} + \cos\alpha \boldsymbol{j}.$$

一方面

$$\boldsymbol{\tau}\, ds = -\cos\beta \boldsymbol{i}\, ds + \cos\alpha \boldsymbol{j}\, ds,$$

另一方面

$$\boldsymbol{\tau}\, ds = \boldsymbol{i}\, dx + \boldsymbol{j}\, dy,$$

故

$$dx = -\cos\beta\, ds,\, dy = cos\alpha\, ds.$$

回到原式

$$\int_L (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, ds = \int_L (P\cos\alpha\, ds + Q\cos\beta\, ds)$$

利用 Green 公式

$$= \int_L P\, dy - Q\, dx = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})\, dx\, dy.$$

6　向量场在曲面上的积分

8．设曲面 $S = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0\}$，定向与 z 轴正向同侧．设

$$f = \frac{1+z}{1+x^2+y^2}, g = xy+yz+zx.$$

求积分

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g)\cdot\, d\boldsymbol{S}.$$

取曲面

$$S' = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \leqslant 1, z=0\},$$

定向与 Z 轴反向，则 S 与 S' 构成封闭曲面，定向向外．设其围城的区域为 V．由 Gauss 定理

$$\iint_{S+S'} (\nabla f\times\nabla g)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)\, dV = \iiint_V (\nabla f\cdot\nabla\times\nabla g) - \nabla g\cdot\nabla\times\nabla f)\, dV = 0.$$

$$\iint_{S'} (\nabla f\times\nabla g)\cdot\, d\boldsymbol{S} = \iint_{S'} (\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{1}{1+x^2+y^2})\times(y,x,x+y)\cdot\, d\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_{S'} \frac{2y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos 2\theta\, d\theta \int_0^1 \frac{r^2}{(1+r^2)^2}\, dr^2 = 0.$$

故

$$\iint_S (\nabla f\times\nabla g)\cdot\, d\boldsymbol{S} = (\iint_{S+S'} - \iint_{S'})(\nabla f\times\nabla g)\cdot\, d\boldsymbol{S} = 0.$$

9．设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的有界区域，$\partial\Omega$ 是光滑曲面．
（1）设 $f,g\in C^2(\overline{\Omega})$，满足 $\Delta f=\Delta g, f|_{\partial\Omega}=g|_{\partial\Omega}$．证明：$f=g$．
（2）设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上的光滑向量场（二阶偏导数连续），满足
（a）$\nabla\times\boldsymbol{v}_1=\nabla\times\boldsymbol{v}_2,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2$；
（b）$\boldsymbol{v}_1|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{v}_2|_{\partial\Omega}$．
证明：$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$．

记
$$h=f-g,$$
则
$$\Delta h=0,h|_{\partial\Omega}=0,$$
要证
$$h=0.$$
利用 Gauss 定理
$$0=\iint_{\partial\Omega}h\nabla h\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot(h\nabla h)\,dV=\iiint_{\Omega}((\nabla h)^2+h\Delta h)\,dV=\iiint_{\Omega}(\nabla h)^2\,dV.$$
故
$$\nabla h=\boldsymbol{0}.$$
这样 h 为常数，又 $h|_{\partial D}=0$, 得 $h=0$．设
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=(P,Q,R),$$
则
$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=0.$$
即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\\ \dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z},\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\\ \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0.\end{cases}$$
求导得
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 R}{\partial xz}=\dfrac{\partial^P}{\partial z^2},\\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 Q}{\partial xy},\\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 Q}{\partial xy}+\dfrac{\partial^2 R}{\partial xz}=0.\end{cases}$$
得到
$$\Delta P=0.$$
由（1）知
$$P=0.$$

同理

$$Q = 0, R = 0,$$

即

$$\boldsymbol{u} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

7 函数的 Fourier 级数

10．求函数 $y = |x|, x \in [-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi}.$$

$$y \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos n\pi - 1)\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}, x \in [-\pi, \pi]$$

11．求和：

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}, x \in [-\pi, \pi]$$

因为 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续且 $f(-\pi) = f(\pi)$，故由 Dirichlet 定理，

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛，且有

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = x.$$

在 $[0, \pi)$ 上两边积分

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} = \frac{x^2}{2} + C.$$

取 $x = 0$ 得 $C = 0$.
由原式是奇函数，故

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x^2}{2}, x \in [-\pi, 0]; \\ -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x^2}{2}. \in (0, -\pi]. \end{cases}$$

12．设 $\{b_n\}$ 是单调下降且非负数列，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

在 $[-\pi,\pi]$ 一致收敛．证明：

$$\lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

由 Cauchy 收敛准则，对 $\forall\epsilon>0,\exists N,$ 当 n，m>N 时（不妨设 n>m），对 $\forall x,$ 总有

$$|b_m \sin mx + \cdots + b_n \sin nx| < \epsilon.$$

取 $x=\frac{\pi}{4m}, n=2m-1,$ 则利用 b_n 的单调递减性有

$$mb_{2m}\sin\frac{\pi}{4} < b_m \sin\frac{\pi}{4} + \cdots + b_{2m-1}\sin\frac{2m-1}{4m}\pi < \epsilon.$$

得到对 $\forall\epsilon>0$，都存在 N 使得对 $\forall 2m>2N$,$2mb_{2m}<\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$，即

$$\lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

8 含参变量的反常积分

13．设

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx.$$

求证：

（1）$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续；

（2）$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导；

（3）$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导且满足方程 $F^{''}(t)-F(t)=-\frac{1}{t}$．

因为

$$|\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx| < \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx$ 关于 t 一致收敛，故 $F(t)$ 连续．

对于

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos tx}{1+x^2}\,dx,$$

$x=0$ 不是瑕点，所以只需考虑

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\cos tx}{1+x^2}\,dx$$

关于 t 在 t>0 上的一致收敛性即可．由于

$$|\int_0^{+\infty} \cos tx\,dx| < \frac{2}{t} \leqslant 2,$$

对每个固定的 t，

$$\frac{x}{1+x^2}$$

是 x 的单调函数，且关于 t 一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x\cos tx}{1+x^2}\,dx$$

一致收敛.

又

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx$$

收敛，

$$\frac{\sin tx}{1+x^2}, \frac{x\cos tx}{1+x^2}$$

在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续，所以 $F(t)$ 可导，且有

$$F^{'}(t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\cos tx}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{t}\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,d(\sin tx) =$$

$$\frac{1}{t}\frac{x\sin tx}{1+x^2}|_0^{+\infty} - \frac{1}{t}\int_{0}^{+\infty} \sin tx\,d(\frac{x}{1+x^2})$$

$$= \frac{1}{t}\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\sin tx\,dx = \frac{F(t)}{t} - \frac{2}{t}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

即

$$tF^{'}(t) = F(t) - 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx,$$

由于

$$|\int_{0}^{+\infty} \sin tx\,dx| < \frac{2}{t},$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx$$

收敛.

对于

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx,$$

$x=0$ 不是瑕点，所以只需考虑

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx$$

关于 t 在 $t>0$ 上的一致收敛性即可.

由于

$$|\int_{0}^{+\infty} \cos tx\,dx| < \frac{2}{t} \leqslant 2,$$

对每个固定的 t，

$$\frac{x}{(1+x^2)^2}$$

是 x 的单调函数，且关于 t 一致趋于 0，由 Dirichlet 判别法知

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx$$

一致收敛.

又

$$\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}, \frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}$$

在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续，所以 $F(t)$ 可导.

两边求导得

$$tF^{''}(t)+F^{'}(t)=F^{'}(t)-2\int_{0}^{+\infty} \frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx=F^{'}(t)+\int_{0}^{+\infty}\cos tx\,d(\frac{1}{1+x^2})$$

$$=F^{'}(t)+\cos tx\frac{1}{1+x^2}|_{0}^{+\infty}+t\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx=-1+tF(t).$$

即

$$tF^{''}(t)=-1+tF(t),$$

得

$$F^{''}(t)-F(t)=-\frac{1}{t}.$$

14．设 $|\alpha|\neq 1$，证明积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,dx$$

收敛，并求其值.

由于 $x=0$ 是可去瑕点，故只需将原积分视为无穷积分.

注意到

$$|\int_{a}^{b}\sin x\sin\alpha x|\,dx=\frac{1}{2}|\int_{a}^{b}\cos(1-\alpha)x-\cos(1+\alpha)x|\leqslant|\frac{1}{1-\alpha}|+|\frac{1}{1+\alpha}|,$$

又 $\frac{1}{x}$ 单调趋于 0，由 Dirichlet 判别法知原积分收敛.

引入积分因子，并记

$$I(\beta)=\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

在 $\beta>\beta_0>0$ 时，

$$|I(\beta)|<|\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta x}x\,dx|,$$

而

$$\int_{a}^{b}e^{-\beta x}\,dx$$

一致有界. 对固定的 β,

$$\frac{1}{x}$$

单调一致趋于 0. 由 Dirlichlet 判别法知

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta x}x\,dx$$

一致收敛.

由比较判别法知 $I(\beta)$ 收敛.

由于

$$|\int_0^{+\infty} -e^{-\beta x}\sin x\sin\alpha x\,dx| < \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,dx = 1,$$

故由比较判别法知

$$\int_0^{+\infty} -e^{-\beta x}\sin x\sin\alpha x\,dx$$

一致收敛.

又由

$$e^{-\beta x}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}, -e^{-\beta x}\sin x\sin\alpha x$$

在 $(0,+\infty)\times(\beta_0,+\infty)$ 上连续，故 $I(\beta)$ 可导，且有

$$I^{'}(\beta) = \int_0^{+\infty} -e^{-\beta x}\sin x\sin\alpha x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}(\cos(1-\alpha)x - \cos(1+\alpha)x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta^2+(\alpha-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta^2+(\alpha+1)^2}.$$

积分得

$$I(\beta) = \frac{1}{4}\ln\frac{(\alpha+1)^2+\beta^2}{(\alpha-1)^2+\beta^2} + C.$$

当 $\beta\to\infty$ 时，$I(\beta)\to C$．另一方面由

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,dx$$

的连续性知 $I(\beta)\to 0$, 故 $C=0$．这样

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,dx = I(\beta)|_{\beta=0} = \frac{1}{2}\ln\frac{|\alpha+1|}{|\alpha-1|}.$$

9 Euler 积分

15．计算无穷积分

$$I = \int_1^{+\infty} t^2 e^{t(2-t)}\,dt.$$

$$I = \int_1^{+\infty} t^2 e^{t(2-t)}\,dt = \int_0^{+\infty}(1+s)^2 e^{1-s^2}\,ds$$

$$= e\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds + e\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds^2 + \frac{e}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = e + \frac{3\sqrt{\pi}e}{4}.$$