

定理 3.1.1 三种初等变换将线性方程组变为同解线性方程组, 因此不会产生增根。

定理 3.3.1 线性方程组 (3.1) 的解的性质如下:

- (1) 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时, 线性方程组 (3.1) 无解;
- (2) 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$ 时, 线性方程组 (3.1) 有唯一解;
- (3) 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$ 时, 线性方程组 (3.1) 有多解。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} c_{11} & \dots & c_{1,j_2-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{rj_r} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (3.3)$$

推论 3.3.1 齐次线性方程组有非零解的充要条件为 $r < n$ 。

推论 3.3.2 若 $m < n$, 则齐次线性方程组一定有非零解。