

电偶极子与近似方法

摘要

电偶极子是电介质理论和原子物理学的重要模型，研究从稳恒到 X 光频电磁场作用下电介质的色散和吸收，以及天线的辐射等现象，都要用到偶极子（例如振荡偶极子）的概念。近似计算方法是物理学中十分重要的内容。研究电偶极子，近似计算方法必不可少。本文通过分析经典电偶极子理论的推导过程，提出关于近似计算的问题，得出方法论上的结论，并进行拓展与推广。

关键词：电偶极子 计算方法

1 经典理论

1.1 电场法研究电偶极子在远处产生的场

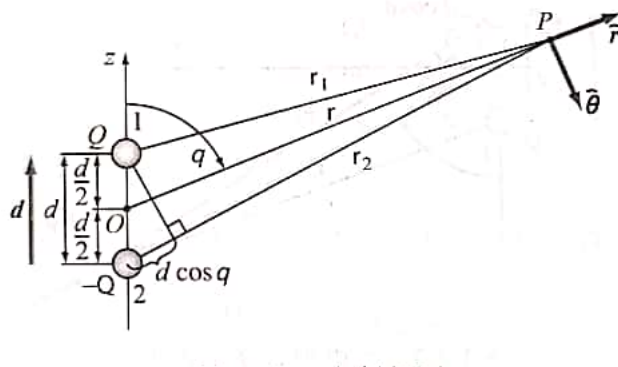


图 1: 电偶极子

中垂面上

$$E_{\perp} = E_{+x} + E_{-x} = -2E_{+} \cos \theta = -2E_{+} \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}},$$

当 $r \gg l$ 时,

$$E_{\perp} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3},$$

考虑方向，则有：

$$\vec{E}_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

延长线上

$$E_{\parallel} = E_{+} - E_{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - \frac{l}{2})^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r + \frac{l}{2})^2},$$

对 $r \gg l$ 时，有

$$(r \pm \frac{l}{2})^{-2} \approx r^{-2} (1 \pm \frac{l}{r}).$$

考虑方向，则有：

$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}.$$

课程论文

11 系 20 级 3 班

郭耸霄 PB20111712

2021 年 5 月 23 日

空间任意一点 考察场中任意一点 A, 坐标为 (r, θ) , 把电偶极子分解成平行分量和水平分量 p_{\perp} 和 p_{\parallel} ,

$$p_{\parallel} = p \cos \theta, p_{\perp} = p \sin \theta.$$

于是 A 点的场强可以看成是由两个电偶极子的场强叠加而成, 即:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}, E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

写成向量的形式:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3}.$$

1.2 电势法研究电偶极子在远处产生的场

如图 1 所示, 取电偶极子的中点为坐标原点 O, 则

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{1}{|\vec{r}_-|} \right).$$

当 $r \gg l$ 时, 由 Taylor 级数展开, 有

$$|\vec{r}_+| = r \sqrt{1 - \frac{1}{r} \cos \theta}, |\vec{r}_-| = r \sqrt{1 + \frac{1}{r} \cos \theta}.$$

代入并忽略二次以上的高次项, 有

$$U = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

在极坐标下, 由电场强度与电势的关系式, 有

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{e}_{\theta},$$

与 1.1 中的结果相同。

1.3 电势法研究电四极子在远处产生的场

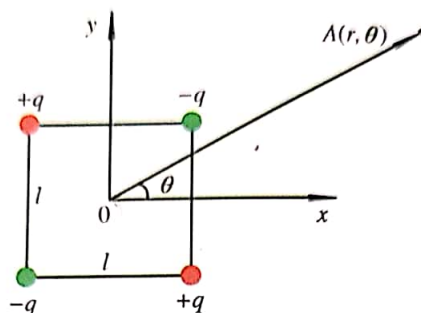


图 2: 电四极子

如图 2, 将电四极子看作两个纵向的电偶极子。A 关于两个电偶极子的中点的位矢分别为 $\vec{r}_1 = \vec{r} + \frac{\vec{x}}{2}$, $\vec{r}_2 = \vec{r} - \frac{\vec{x}}{2}$ 。分别在 A 点产生的电势为

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1}{r_1^3},$$

课程论文

11 系 20 级 3 班

郭耸霄 PB20111712

2021 年 5 月 23 日

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2}{r_2^3}.$$

由电势叠加原理

$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 &= \frac{ql}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{l} \cdot \vec{r}_2}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{ql^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^3 r_2^3} \\ &\approx \frac{ql^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3r^2(r_2 - r_1)}{r^6} \\ &\approx -\frac{3ql^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

在极坐标下，由电场强度与电势的关系式，有

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{9ql^2 \sin 2\theta}{8\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_r + \frac{3ql^2 \cos 2\theta}{4\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_\theta.$$

2 发现问题

2.1 电荷性质

不难发现，电偶极子只研究了两个靠得很近的异性电荷在空间中产生的场，而没有研究同性电荷。我们肯定会提出这样的疑问：两个两个靠得很近的同性电荷在空间中产生的场是怎么样？为什么没有研究他们？

2.2 空间条件

在第一部分的每个推导过程中，都强调了 $r \gg l$ 的条件，也就是说，所推导的公式只在远处成立。那么我们便有了疑问：在电荷近处的场是怎么样？为什么近处与远处的场分布不能一概而论？

2.3 研究方法

在电四极子电场分布的推导过程中，采用了多步近似与通过电势求梯度的办法求出了电场强度。那么，为什么不使用电场强度叠加的方法来解决？为什么采用那两步近似计算而不是别的近似方法？

3 理论分析

3.1 同性“电偶极子”在远处产生的场

我们采用 1.2 的方法研究同性“电偶极子”。取电偶极子的中点为坐标原点 O，则

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}_2|} \right).$$

当 $r \gg l$ 时，由 Taylor 级数展开，有

$$|\vec{r}_1| = r \sqrt{1 - \frac{1}{r} \cos \theta}, |\vec{r}_2| = r \sqrt{1 + \frac{1}{r} \cos \theta}.$$

代入并忽略二次以上的高次项, 有

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

在极坐标下, 由电场强度与电势的关系式, 有

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r.$$

与点电荷产生的电场形式完全相同。

事实上, 同性“电偶极子”远处产生的电场与点电荷产生的相似, 看起来这个模型的建立是成功的。然而, 如果我们用这个模型讨论 1.3 中电四极子的电场分布, 就会发现, 两组同性“电四极子”相互抵消, 根本在空间中没有电场! 这与客观事实不符, 所以, 这个模型被抛弃了。

3.2 电偶极子在近处产生的场

我们采用 1.2 的研究方法, 放弃近似估计, 研究电偶极子在近处产生的场。如图 1 所示, 取电偶极子的中点为坐标原点 O, 则

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{1}{|\vec{r}_-|}\right).$$

代入

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - 2r\frac{l}{2}\cos\theta},$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} + 2r\frac{l}{2}\cos\theta},$$

由极坐标下的电场强度与电势的关系式, 有

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \\ &= \left(\frac{2r + l\cos\theta}{2(r^2 + \frac{l^2}{4} + lr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2r - l\cos\theta}{2(r^2 + \frac{l^2}{4} - lr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right)\vec{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{-\sin\theta}{2(r^2 + \frac{l^2}{4} + lr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sin\theta}{2(r^2 + \frac{l^2}{4} - lr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right)\vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

可见, 其形式十分复杂, 不利于进一步计算与探究。另一方面, 也说明了电偶极子近处的电场比较复杂, 与远处有较大差别。

3.3 不同研究电四极子的近似方法比较

我们尝试着采用 1.1 的方法研究电四极子在远处产生的场。如图 2, 将电四极子看作两个纵向的电偶极子。A 关于两个电偶极子的中点的位矢分别为

$$\vec{r}_1 = -\frac{l}{2}\cos\theta\vec{e}_r + \frac{l}{2}\sin\theta\vec{e}_\theta + r\vec{e}_r,$$

$$\vec{r}_2 = \frac{l}{2}\cos\theta\vec{e}_r - \frac{l}{2}\sin\theta\vec{e}_\theta + r\vec{e}_r.$$

记

$$\vec{y} = ql(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta).$$

根据几何关系

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \cdot \vec{y} &= \vec{r}_2 \cdot \vec{y} = qlr \sin \theta. \\ \vec{E} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (3qlr \sin \theta (\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^5} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^5}) - \vec{y} (\frac{1}{|\vec{r}_1|^3} - \frac{1}{|\vec{r}_2|^3})) \\ &\approx -\frac{ql}{4\pi\epsilon_0} (3r \sin \theta (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{4r^4}{r^{10}} - (\sin \theta \vec{r}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \frac{3l \cos \theta r^2}{r^6}) \\ &= -\frac{9ql \sin 2\theta}{8\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_r + \frac{3ql^2 \cos 2\theta}{4\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_\theta - \frac{9ql^2 \sin^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

可以看出这个结果比 1.3 中多出一项。

那么,这种方法就无法得出正确的结果吗?事实并非如此。根据对称性,将 θ 换为 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 后,结果应当不发生变化。代入后,前两项不变,而最后一项变为

$$-\frac{9ql^2 \cos^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_\theta,$$

与原项不相等,故在此模型下,这一项应视为高阶无穷小,从而舍去,得到与 1.3 相同的结果。

4 得出结论

4.1 模型构建

模型构建应以实用为原则。不同的模型的简洁程度与贴合程度往往不同,且二者常常为负相关。所以在不同的具体情况下,可以选择不同的模型,以达到简洁与贴合兼顾的效果。经典力学与相对论力学的不同适用条件就是典型的例子。

4.2 宏微差别

宏观与微观的差别是很明显的。这不仅体现在绝对宏观的连续性与绝对微观的量子化上,还体现在相对的宏观与微观上。正因为这一点,我们有时可以选取“宏观小微观大”的研究对象,来兼顾二者。体积元与电流元都是很好的例子。

4.3 近似方法

近似方法的选取应以物理意义为准。数学上的近似固然重要,但是很多时候近似的选取方法有很多种,如果不清楚其中的物理意义,就难以选取恰当的、与客观事实相符的近似方法。对称性是高级规律,它支配了低级规律,所以通过对称性修正结果,符合事实。

5 延伸讨论

5.1 横向拓展：电四极子与电八极子

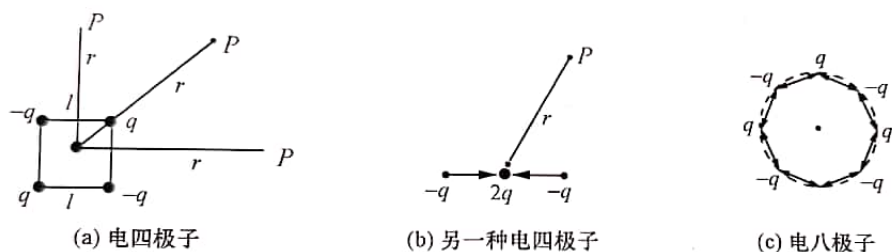


图 3: 电多极子

在讨论了电偶极子之后，一个很自然的想法就是：更多的极子叠加会有什么效果？图 3(b)(c) 列出了另外一种电四极子和一种电八极子的构型。可以证明：

电四极子 $E \propto \frac{p'}{r^4}$ ，电四极矩 $p' = 2ql^2$ ，

电八极子 $E \propto \frac{p''}{r^5}$ ，电八极矩 $p' = 4ql^3$ 。

5.2 纵向拓展：线电偶极子

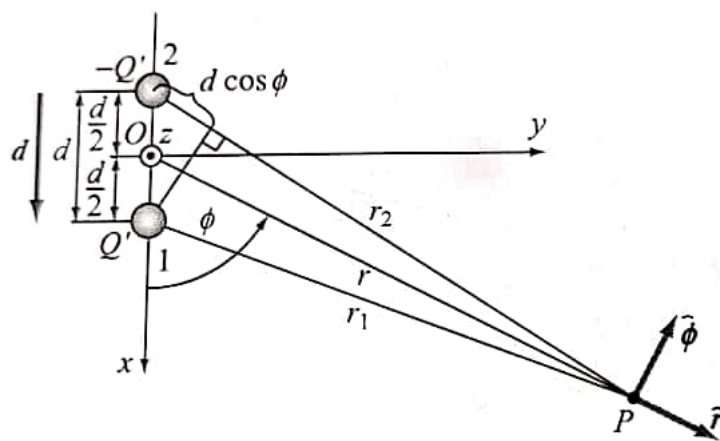


图 4: 线电偶极子

图 4 给出了线电偶极子的截面，其单位长度的电偶极矩 $\vec{p}' = Q'\vec{d}$ 。可以证明，线电偶极子产生的电势为

$$\begin{aligned}
 U &\approx \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + \frac{d \cos \phi}{r}\right) \\
 &\approx \frac{p' \cos \phi}{2\pi\epsilon r}.
 \end{aligned}$$

5.3 反演拓展：磁偶极子

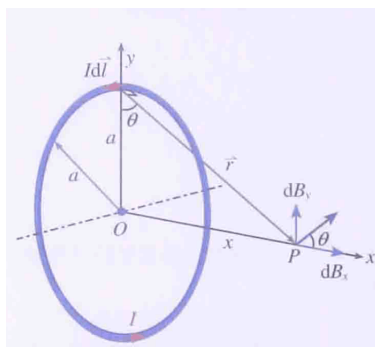


图 5: 磁偶极子

图 5 环形电流在这里称为磁偶极子。可以证明，其在空间中产生的磁感应强度为

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{\mu}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 (\vec{\mu} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5},$$

与电偶极子有着相同的形式！这就是自然界的美与和谐！

参考文献

- [1] 叶邦角. 电磁学 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.8
- [2] [美] 布拉尼斯拉夫·M. 纳托拉斯. 电磁学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2018
- [3] 钟锡华. 电磁学通论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2014.10