关于布尔逻辑的探讨

——“计算机导论”课程报告

郭弈霄

（20 级计算机 3 班 PB20111712)

【摘要】布尔逻辑在电子学、计算机硬件和软件中有很多应用。在其中数种逻辑中，“蕴含”逻辑显得与众不同，深刻而有趣。本文独立地推导了“蕴含”逻辑的万能用法。理解了蕴含逻辑，可谓是理解了布尔逻辑的精髓。理解了布尔逻辑，对在计算机领域及离散数学中的进一步学习大有帮助。

【关键词】计算机；布尔代数

一、布尔逻辑简介

布尔运算是数字符号化的逻辑推演法，包括联合、相交、相减。在图形处理操作中引用了这种逻辑运算方法以使简单的基本图形组合产生新的形体，并由二维布尔运算发展到三维图形的布尔运算。

布尔用数学方法研究逻辑问题，成功地建立了逻辑演算。他用等式表示判断，把推理看作等式的变换。这种变换的有效性不依赖人们对符号的解释，只依赖于符号的组合规律。这一逻辑理论人们常称它为布尔代数。20 世纪 30 年代，逻辑代数在电路系统上获得应用，随后，由于电子技术与计算机的发展，出现各种复杂的大系统，它们的变换规律也遵守布尔所揭示的规律。

由于布尔在符号逻辑运算中的特殊贡献，很多计算机语言中将逻辑运算称为布尔运算，将其结果称为布尔值。

二、 布尔逻辑基本运算与真值表

1、 真 T (true)；
2、 假 F (false)；
3、 合取∧ (conjunction)；
4、 析取∨(disjunction)；
5、 非 ¬ (negation)；
6、 蕴含 →(material implication)；
7、 双重蕴含↔（dual material implication)；

8、 异或 ⊕(exclusive or)。

x	y	x∧y	x∨y	¬x	x→y	x⊕y	x↔ y
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	1

其中，真、假及否为一元运算符，其余为二元运算符。

三、 “蕴含”的万能用法

从上述“真值表”中，我们可以发现除“蕴含”外的运算符均有着某种对称性。这样一来，我们可能会对“蕴含”这个运算符产生疑问与兴趣。事实上，经过探索，我们可以发现它可以用来表示除真假以外的所有运算符!（允许使用 0、1（其实 0 相当于“假”运算，1 相当于“真”运算））

1、 合取：x∧y≡x→y→0→0；

2、 析取：x∨y≡x→y→0；

3、 非：¬x≡x→0；

4、 双重蕴含：x↔y≡x→y→0→(y→x→0)；

5、 异或：x⊕y≡x→y→0→(y→x→0)→0；

上述逻辑等式的推导只需使用真值表。甚至我们可以发现，连“真”运算符都不需要。这样，我们甚至还可以写出关于“真”的一种表示

6、 真：1≡0→0。

四、 布尔逻辑的运算律

1、结合律：(x∧y)∧z≡x∧(y∧z)，(x∨y)∨z≡x∨(y∨z)；

2、交换律：x∧y≡y∧x，x∨y≡y∨x；

3、分配律：x∧(y∨z)≡(x∧y)∨(x∧z)，x∨(y∧z)≡(x∨y)∧(x∨z)；

4、吸收律：x∨(x∧y)≡x，x∧(x∨y)≡x.；

5、幂等律：x∧x=x.，x∨x=x；.

6、反演律：¬(x∧y)≡¬x∨¬y，¬(x∨y)≡¬x∧¬y；

7、对合律：¬(¬ x)≡x；.

8、互补律：x∨¬x≡1，x∧¬x≡0；.

9、零一律：x∨0≡x，x∧1≡x；

10、囿元律：x∨1≡1，x∧0≡0。

五、 布尔代数的应用实例

——索引的构建

在现实世界的互联网搜索中，往往能够在相当短的时间内查询到所需要的搜索结果。比如，在 google 中搜索“京东”，在 0.17 秒内便能够搜索到 171,000,000 条结果。搜索引擎能够在如此短的时间内查询到如此多的结果，依靠两方面的技术，一是分布式计算技术，该技术解决了大数据高速并行运算的难题，另外则是布尔索引构建技术。

这里的布尔索引与数据库中的位图索引概念相似。以数据库位图索引为例，如下图所示：

Value	R0	R1	R2	R3	R4
Yellow	1	0	0	1	0
Red	0	0	1	0	0
Blue	0	1	0	0	1

假设在一张数据表中存在 5 行数据，我们对在数据库索引的创建过程中，分别对这 5 行数据的值进行解析。从上图可以看到，这 5 行数据分别代表了黄色、红色、蓝色，这样经过解析并代码化，第一行数据则可以转换为 100,。同理，第二行可以转换为 001、第三行可以转换为 010，第四行、第五行以此类推。如果我们想要获取数据表中代表黄色的数据项，仅需要查找索引为 100 的数据即可。而假设我们想要查询黄色||红色的数据，由 110≡100∨010 可知我们仅需要寻找索引第一、二位均为 1 的数据即可。

类比到互联网搜索引擎，引擎对资源库中的所有关键词构造索引。以关键字“原子能”为例，“原子能”对应的索引为 010001000000……，则在第二、第六个网页中包含这个关键字。如果“应用”对应的索引为 011110000000……，那么当同时搜索“原子能”与“应用”时，我们将两个索引相与，可得 010000000000……，即第二个网页为所需查询的网页。

在当今的主要搜多引擎都是对所有词进行索引，也因此对于搜索引擎，索引的数量是海量的。对于如此大量的索引存储与计算将是一个难题，现代搜索引擎主要依赖于分布式计算，在这里不做赘述。

六、 感悟与思考

1、从对称性分析出发，我们找到了“蕴含”逻辑的特殊；我们又从特殊的“蕴含”逻辑，找出了它可以表示除真或假之一的其他逻辑的一般性，这便体现了联系特殊与一般的化归思想。

2、我们可能还会思考这样的问题：既然蕴含逻辑功能强大，为何还使用其余的逻辑？其实，使用符号便是一种将抽象的思想具体化的过程，而我们所需要的正是简洁的美。只使用蕴含固然可行，但嵌套的用法过于繁琐。这里，体现了真理的简单性。

3、布尔代数中的两种基元 0、1，恰恰与计算机中的两种状态 0、1 相符合。所以可以说，没有布尔逻辑就没有计算机。布尔代数是纯数学理论，而计算机科学是实践科学，从中体现了理论对实践的指导作用。

4、另一方面，有了计算机的发明，可以更好地解释和发展布尔代数，这体现了实践对理论的反作用。

5、目前计算机科学发展迅猛，可我们还是应该从最基础的计算机知识学习，掌握理论，进行实践。只有这样我们才能深刻了解、使用甚至改进计算机，正如 Laurent Gasser 所言：

计算机并不解决问题，它只是执行解决方案。

参考文献

【1】毕林，王李管，陈建宏等：《三维网格模型的空间布尔运算》，华中科技大学学报（自然科学版）2008 年 36 期。.

【2】【美】Thomas H. Cormen 等：《算法导论》，殷建平等译，北京：机械工业出版社 2013 年版。

【3】吴军：《数学之美》，北京：人民邮电出版社 2020 年版。