映射

2021年6月22日 11:38

定义3.1 设A和B是任意两个集合，如果有一个确定的规律（或法则）f，它把集合A中的每个元素都对应成集合B的唯一确定的元素b，则称这个规律（或法则）f为从集合A到集合B的一个映射，表示成$f: A\to B$或$A\xrightarrow{f}B$。

定义3.2 如果元素$a\in A$经过映射f变成元素$b\in B$，则记成$f(a)=b$或$f: a\mapsto b$，称b为元素a在映射f之下的像，或者叫做映射f在a点的值，而a叫b的原像。

定义3.3 $f: A\to B$，集合A的全部元素在映射f之下的全体像组成的集合称为f的值域，显然$R_f=\{b\mid b\in B, 存在a\in A使f(a)=b\}\subseteq B$。

定义3.4 设$f: A\to B$，$g: A\to B$，如果对任何$a\in A$都有$f(a)=g(a)$，则称映射f与g是相等的，记为$f=g$。

定理3.1 从有限集合A到集合B的映射共有$|B|^{|A|}$个。

定义3.5 $f: A\to A$，对A中任意元素a，均有$f(a)=a$，称f为A上的恒同映射，记为I_A。

定义3.6 $f: A\to B$，如果$R_f=B$，则称f为满射；
如果$f(a_1)=f(a_2)$，必推出$a_1=a_2$，则称f为单射；
如果f是满射且为单射，则称f为双射。

定义3.7 若f是从集合A到集合B的双射，定义$f^{-1}(b)=a$，如果$f(a)=b$，那么f^{-1}称为映射f的逆映射。
令$f: A\to B$，任取A的子集S，定义S的像集$f(S)=\{f(x)\mid x\in S\}$，特别当$S=\emptyset$时，$f(\emptyset)=\emptyset$；当$S=A$时，$f(A)$叫映射f的像集，记为$\mathrm{Im}\,f$。

定理3.2 f是从集合A到集合B的双射，如上定义的f^{-1}是从集合B到集合A的双射。

映射 + 单射 + 满射 → 双射

定理3.3 A，B是有限集合，存在着从A到B的满射的充要条件是$|A|\geq|B|$。

定理3.4 A，B是有限集合，如果存在着从集合A到集合B的双射，则$|A|=|B|$。

定理3.5 两个n元素集合间有$n!$个不同的双射。

定理3.6 如果映射 $f: A\to B$ 存在着逆映射 f^{-1}，那么 $f^{-1}\circ f = I_A$。

定理3.7 映射的合成满足结合律。

定理3.8 设 $f: A\to B$, $g: B\to C$.
1° 若 f, g 是满射，则 $g\circ f$ 也是满射；
2° 若 f, g 是单射，则 $g\circ f$ 也是单射；
3° 若 f, g 是双射，则 $g\circ f$ 也是双射，并且 $g\circ f$ 的逆映射 $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$。

定义3.8 A是有限集合，从A到自身的双射称为集合A中的置换。若 $|A|=n$，则A中的置换称为n元置换。
$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，n元置换 σ 表示成
$$\sigma = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n)\end{Bmatrix}, \quad \sigma(a_i)\in A, 1\le i\le n。$$
由于 σ 是A上的双射，$\sigma(a_i)\ne\sigma(a_j)$, $i\ne j$。特别地，
$$\sigma_I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$ 称为恒同置换。

定义3.9 设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 的r个不同的元素，σ 是A上的置换，它使 $\sigma(a_1)=a_2$, $\sigma(a_2)=a_3$, $\cdots$, $\sigma(a_{r-1})=a_r$, $\sigma(a_r)=a_1$，并且A中的其他元素a均有 $\sigma(a)=a$，即其他元素 σ 的作用下保持不动。我们称 σ 是长为r的轮换，记作 $\sigma=(a_1 a_2\cdots a_r)$。称 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 为轮换 σ 搬动的元素。

定理3.9 每个置换都可以写成若干个不相交的轮换的乘积。

定理3.10 置换的阶等于它的轮换分解中各因子长度的最小公倍数。

定理3.11 对换是奇置换。

定理3.12 全体n元置换中奇置换与偶置换各半，都有 $\frac{n!}{2}$ 个.

定义3.10 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是n元开关函数，对 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)\in F_2^n$
定义 $\bar{f}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \overline{f(a_1, a_2, \cdots, a_n)}$,
$(f+g)(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n) + g(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,
$(f\cdot g)(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot g(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,
称 $\bar{f}$ 为 f 的补函数，$f+g$, $f\cdot g$ 分别称为 f 与 g 的和函数与积函数。

定理3.13 设 f, g, h是开关函数，那么

1°结合律 $(f+g)+h=f+(g+h)$，

$(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$。

2°交换律 $f+g=g+f$，

$f\cdot g=g\cdot f$。

3°分配律 $f+(g\cdot h)=(f+g)\cdot(f+h)$，

$f\cdot(g+h)=(f\cdot g)+(f\cdot h)$。

4° $f+0=f$， $f\cdot 1=f$，

5° $f+\overline{f}=1$， $f\cdot\overline{f}=0$。

定义3.11 E为集合，$F_2=\{0,1\}$，对E的每个子集$A\subseteq E$，定义一个函数$\chi_A:E\to F_2$，

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & 当x\in A,\\ 0, & 当x\notin A。\end{cases}$$

χ_A称为集合E的特征函数。