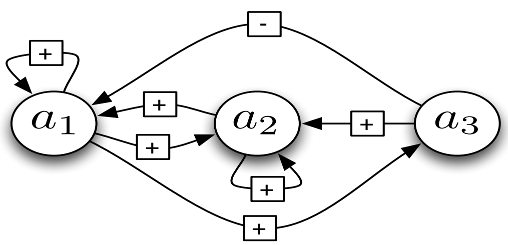
MODULARITÉ DES ÉQUILIBRES DANS LES RÉSEAUX BOOLÉENS

Frank Delaplace, Hanna Klaudel, *Tarek Melliti* et Sylvain Sené

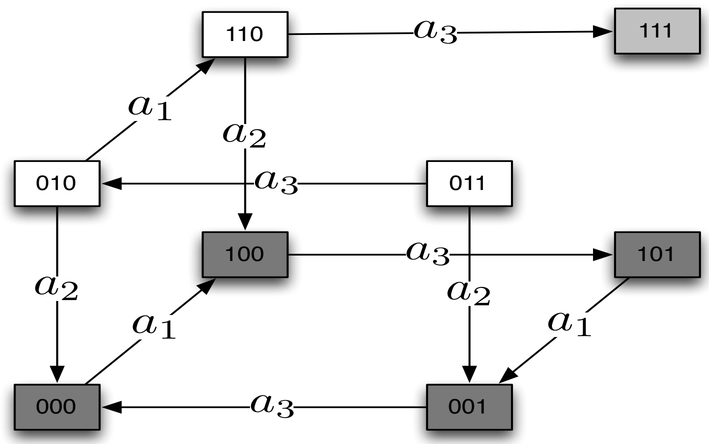
Les réseaux booléens

Structure

$$
\begin{cases}
a_1 & = & a_1 \wedge a_2 \vee \neg a_3 \\
a_2 & = & a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \\
a_3 & = & a_1
\end{cases}
$$



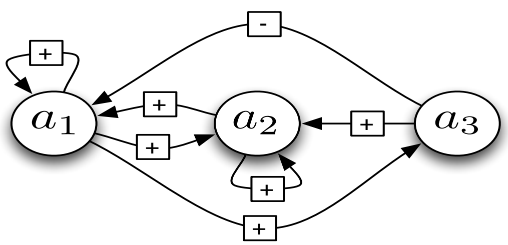
Dynamique

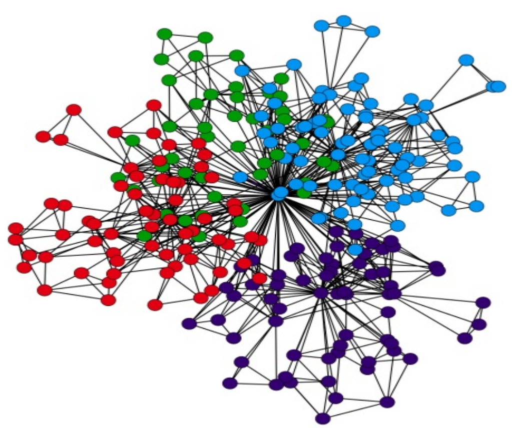


Les réseaux booléens

Structure

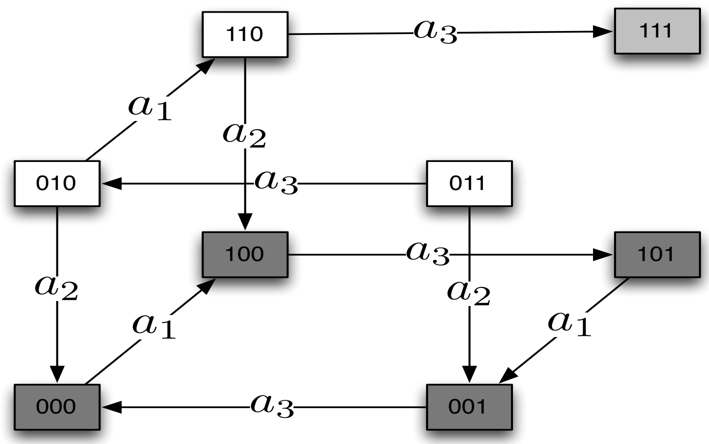
$$\begin{cases} a_1 & = & a_1 \wedge a_2 \vee \neg a_3 \\ a_2 & = & a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \\ a_3 & = & a_1 \end{cases}$$





N : Le nombre de variables

Dynamique

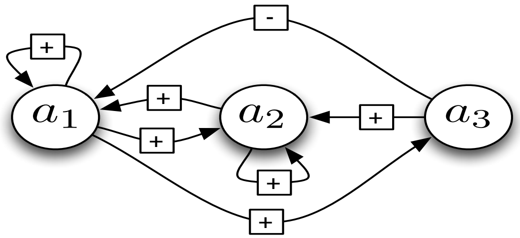


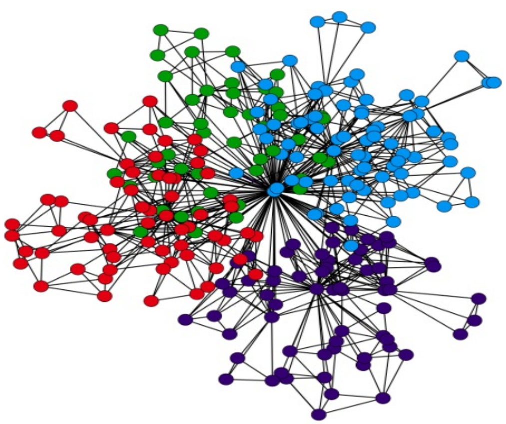
$$2^N$$

Les réseaux booléens

Structure

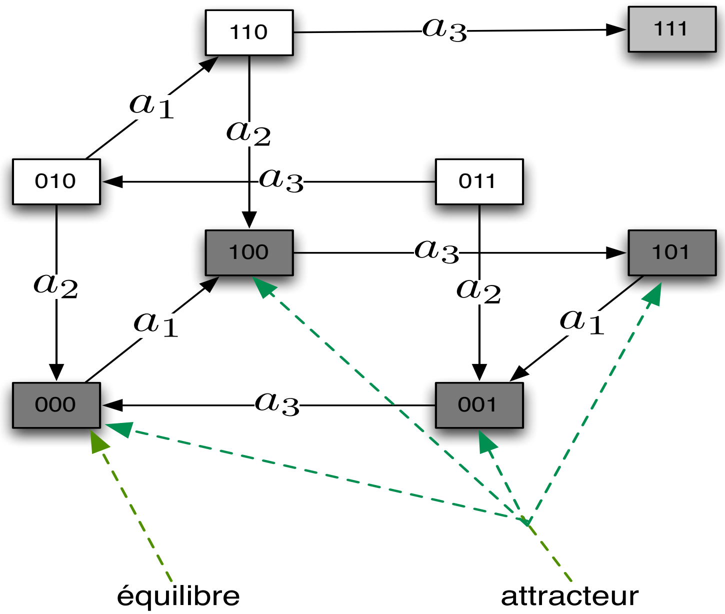
$$\begin{cases} a_1 & = & a_1 \wedge a_2 \vee \neg a_3 \\ a_2 & = & a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \\ a_3 & = & a_1 \end{cases}$$





N : Le nombre de variables

Dynamique



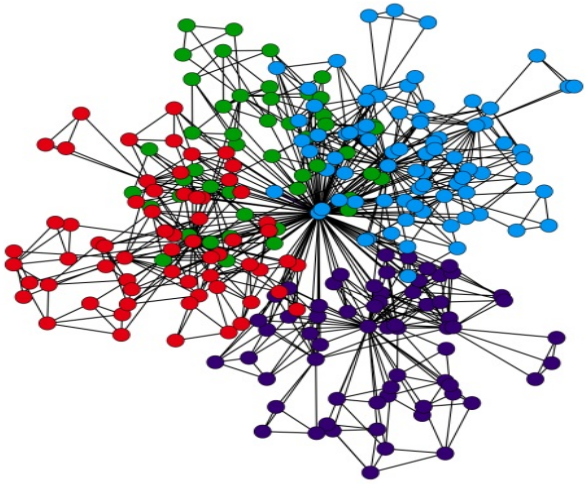
$$2^N$$

Modularité dans les réseaux booléens (1)

Définition :
vision du réseau comme une construction à partir de sous-réseaux (modules)

Objectif :

1. Découverte de fonction
2. Découverte des lois de construction des réseaux
3. Maîtrise de la grande taille (diviser pour reigner)



Modularité dans les réseaux booléens (2)

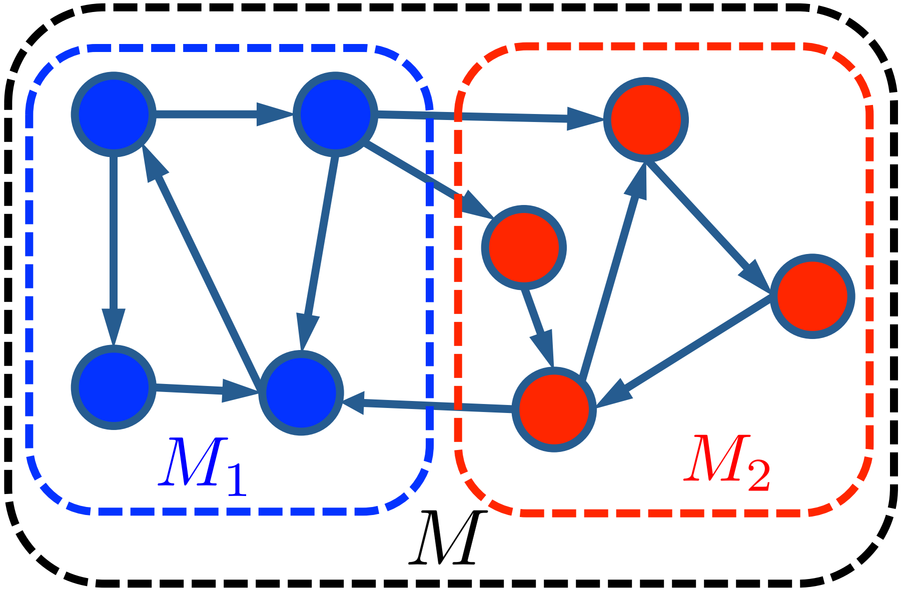
Étudier la modularité des réseaux booléens consiste à :

1. Trouver une manière d'identifier un module dans un réseau (décomposition en modules)
2. Trouver les lois qui régissent leurs compositions
3. Trouver un sens (applicatif) aux modules

Modularité dans les réseaux booléens (3)

Structure

Dynamique



$$P(M) \stackrel{?}{=} \mathcal{F}\Big[\mathrm{P}(M_1),\mathrm{P}(M_2)\Big]$$

Dans ce travail on se focalise sur la modularité de l'équilibre

Formalisation de la modularité des équilibres

Compositionalité

- homomorphisme op. structurel → op. dynamique

$$Eq(M_1 \cup M_2 \cup \ldots) = Eq(M_1) \otimes Eq(M_2) \otimes \ldots$$

Pliage

- Associativité

$$Eq(M_1 \cup M_2 \cup M_3) = Eq(M_1 \cup M_2) \otimes Eq(M_3) = \ldots$$

Sensibilité à l'ordre

- commutativité

$$Eq(M_1) \otimes Eq(M_2) \stackrel{?}{=} Eq(M_2) \otimes Eq(M_1)$$

$\cup$: opérateur de composition structurel

$\oplus$: opérateur de composition des équilibres

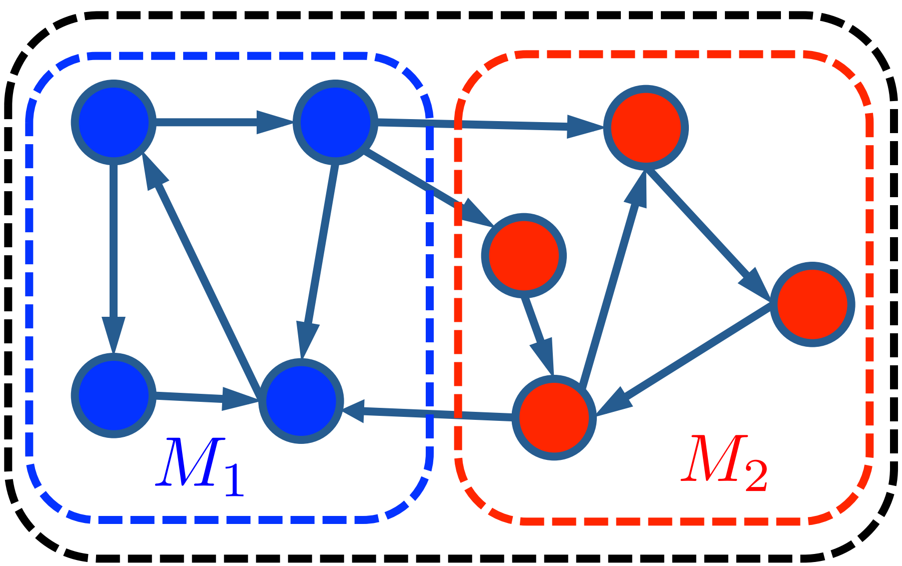
Modules dans les réseaux booléens

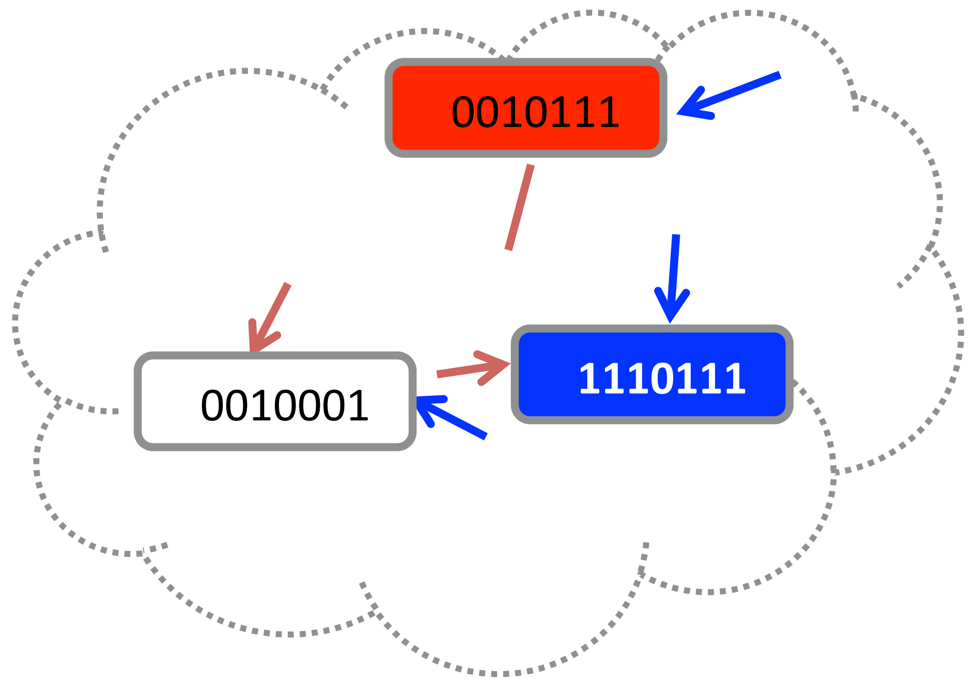
Structure

Dynamique

Approches classiques

Prop. sur la structure :
cliques – CFC - motifs



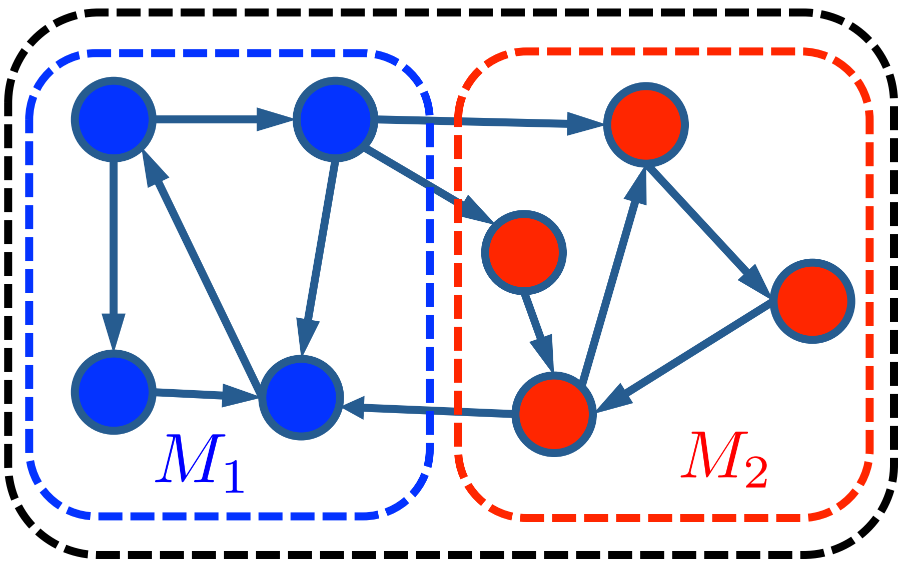


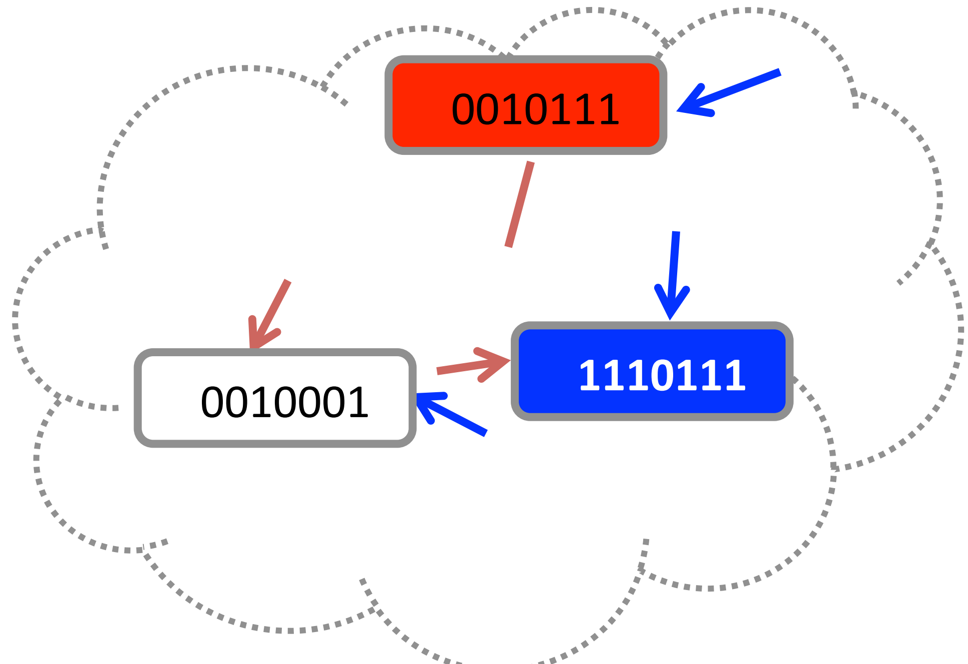
Modules dans les réseaux booléens

Structure | **Dynamique**

Interprétation des fonctions
(rarement les équilibres)

Prop. sur la structure :
cliques – CFC – motifs





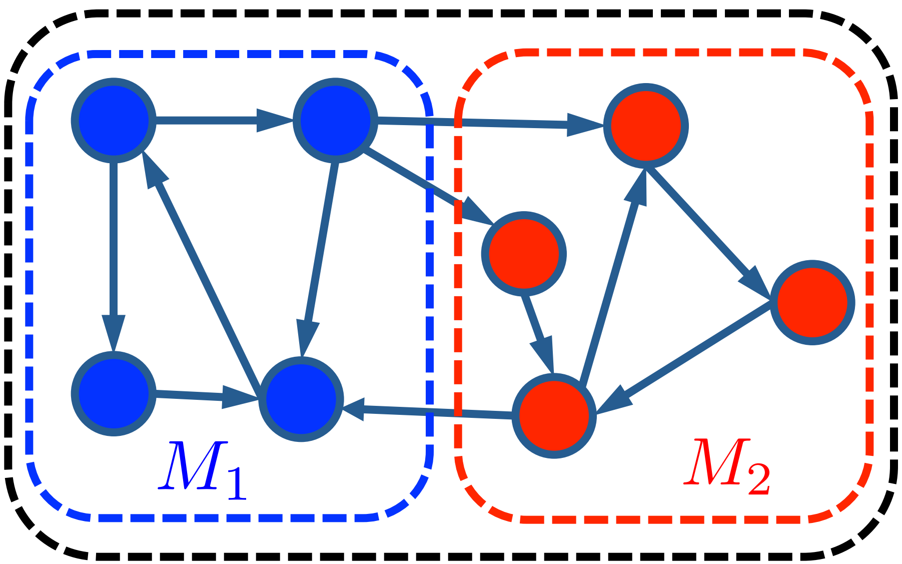
Approches classiques

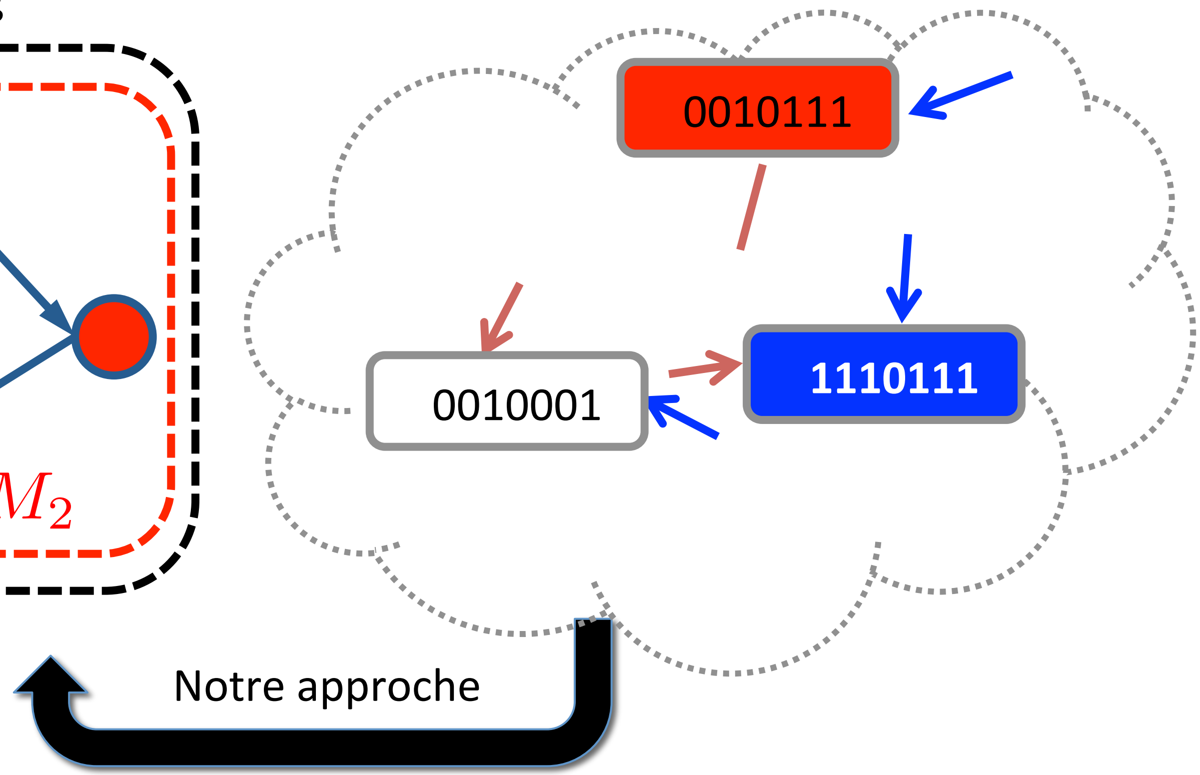
Modules et équilibres

Structure

Dynamique

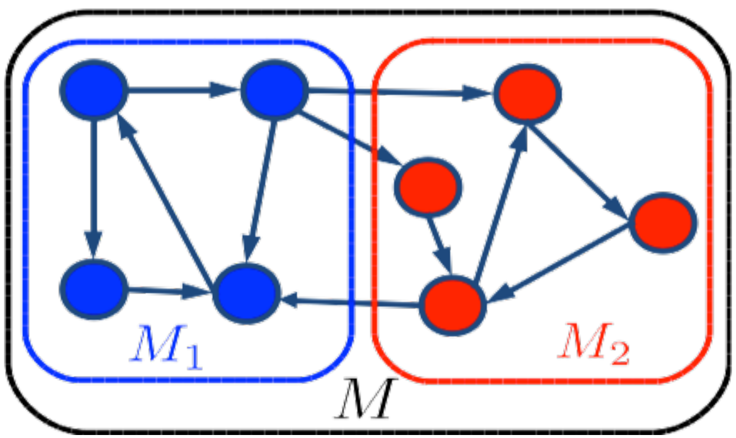
Prop. sur la structure:
cliques - CFC – motifs, clustering



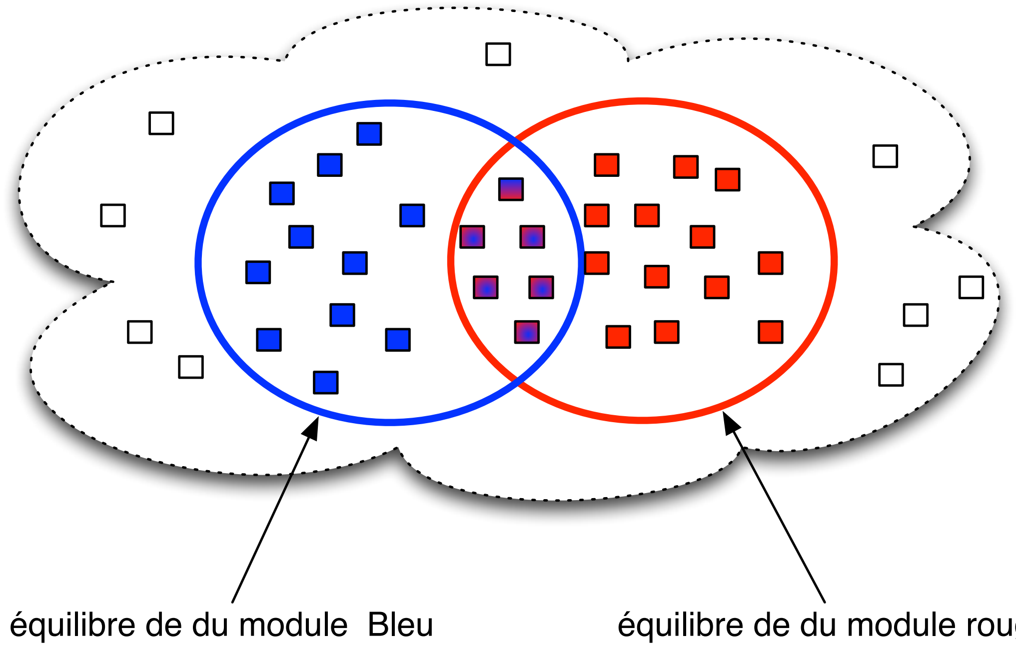


Modules et équilibres

Structure

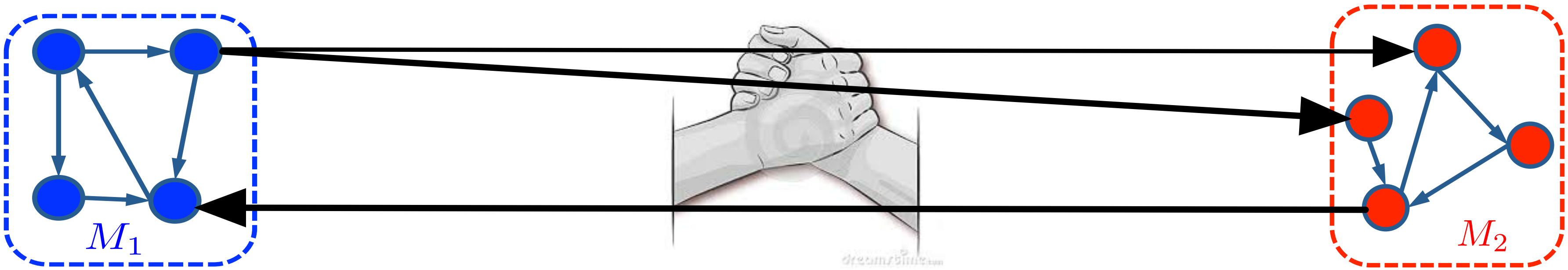


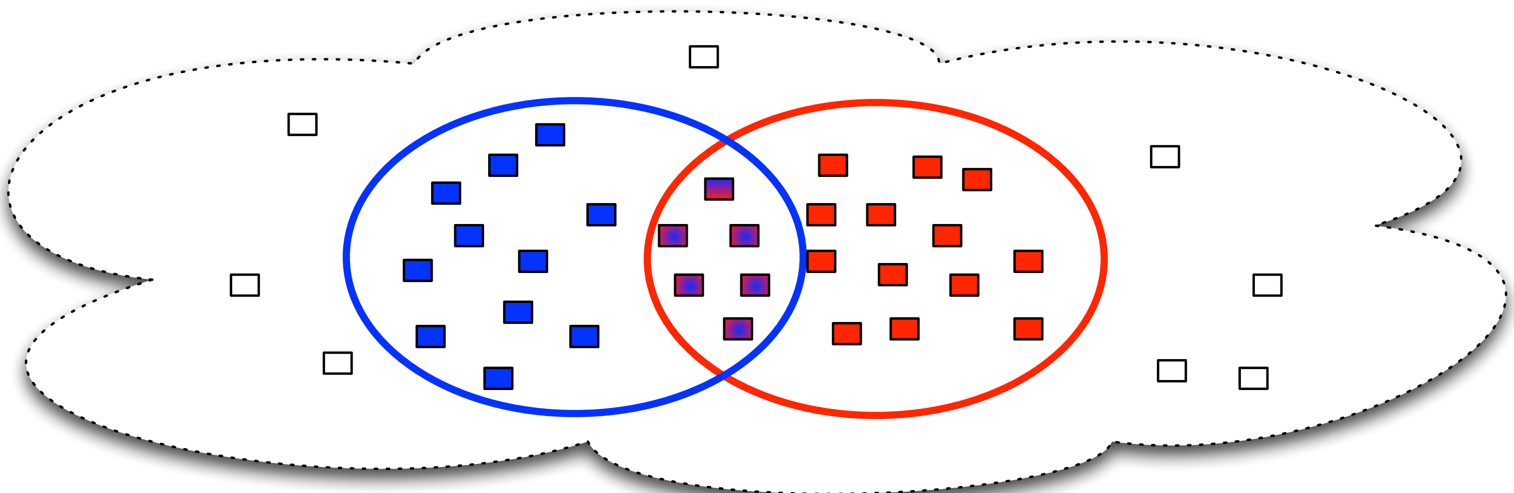
Dynamique



M_1 et M_2 sont des modules ssi on arrive à identifier dans l'équilibre de M les équilibres de M_1 et de M_2

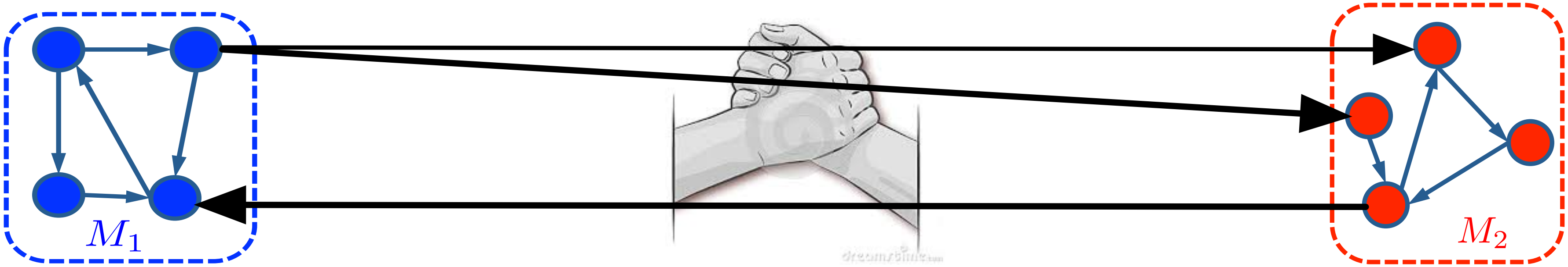
Modules et équilibres



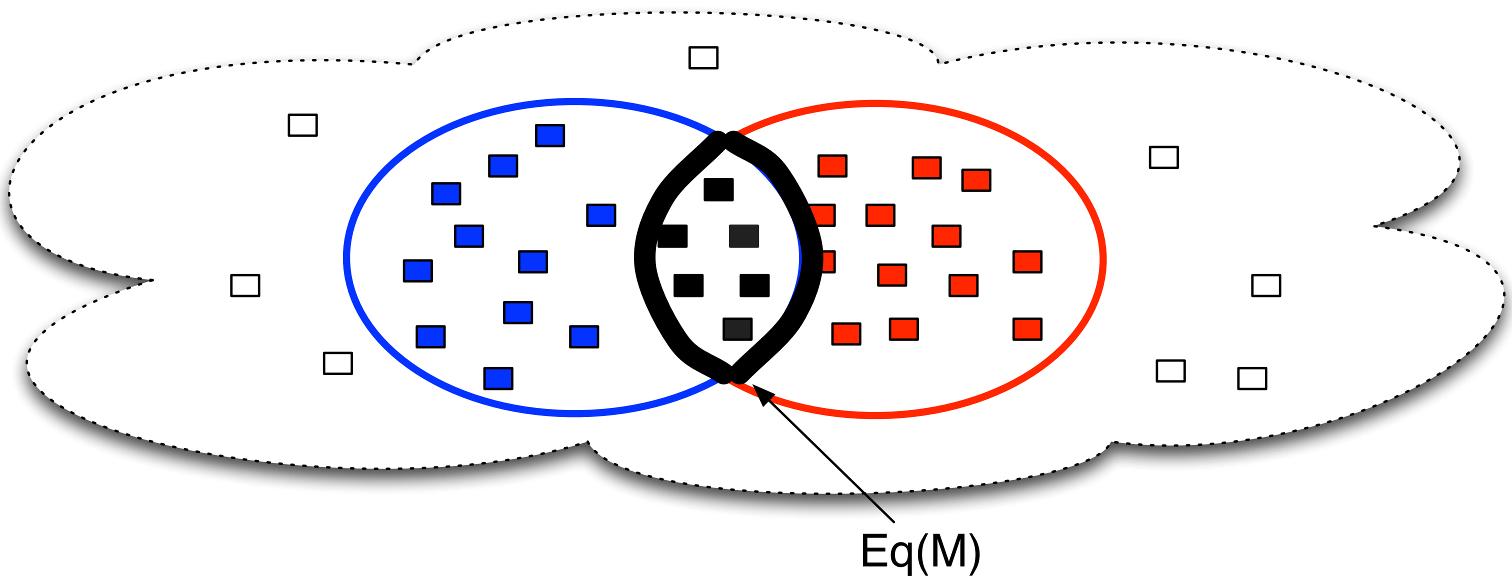


Trois issues possibles à l'affrontement

Modules et équilibres

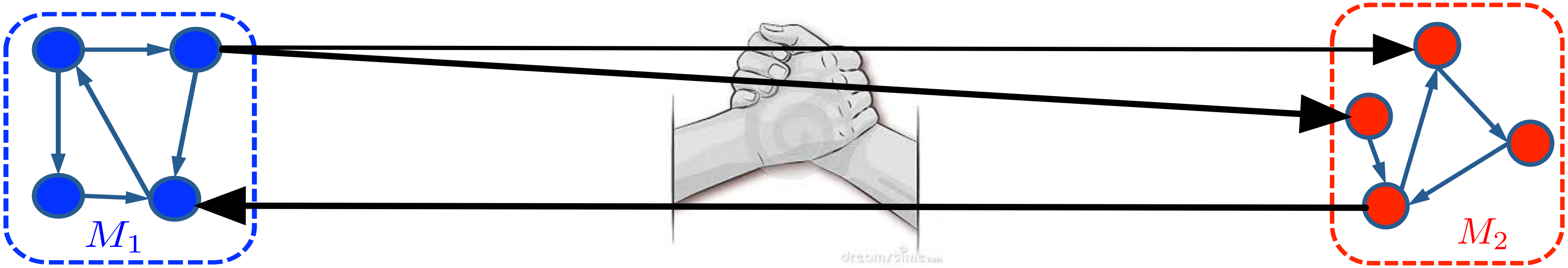


Cas 1 : égalité

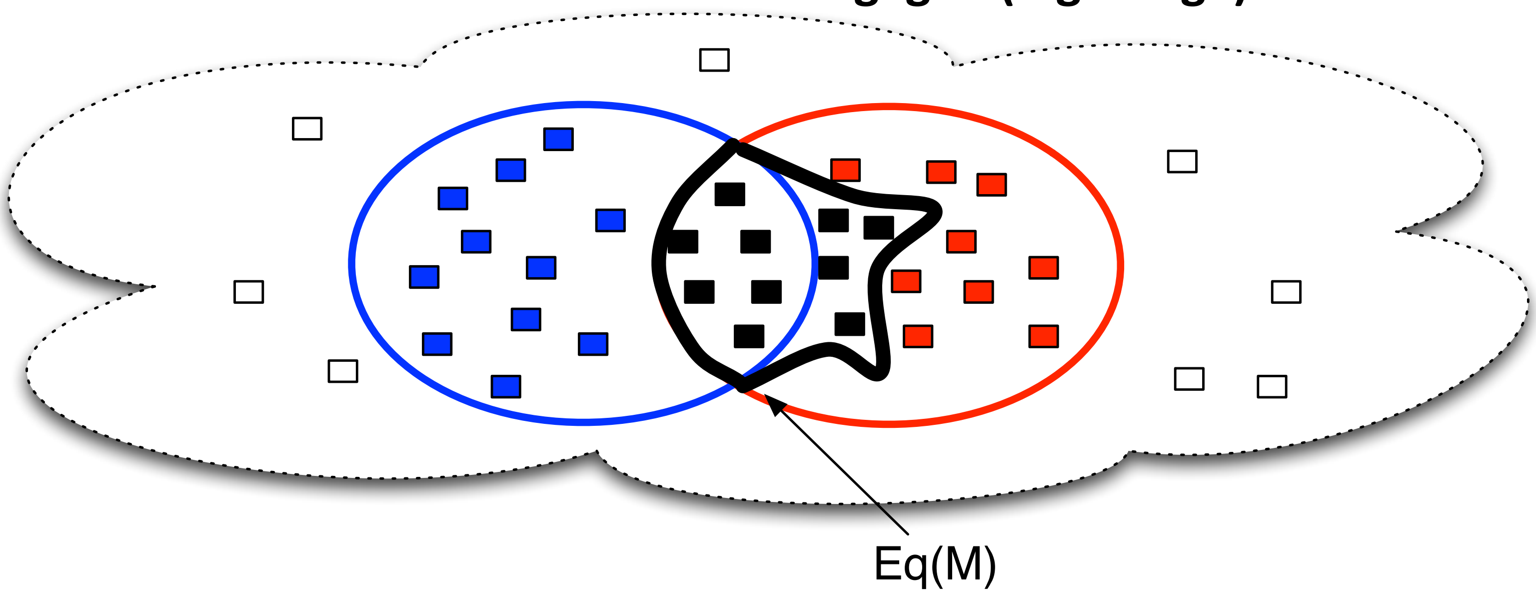


Eq(M) dans l'intersection de Eq(M_1) et Eq(M_2)

Modules et équilibres

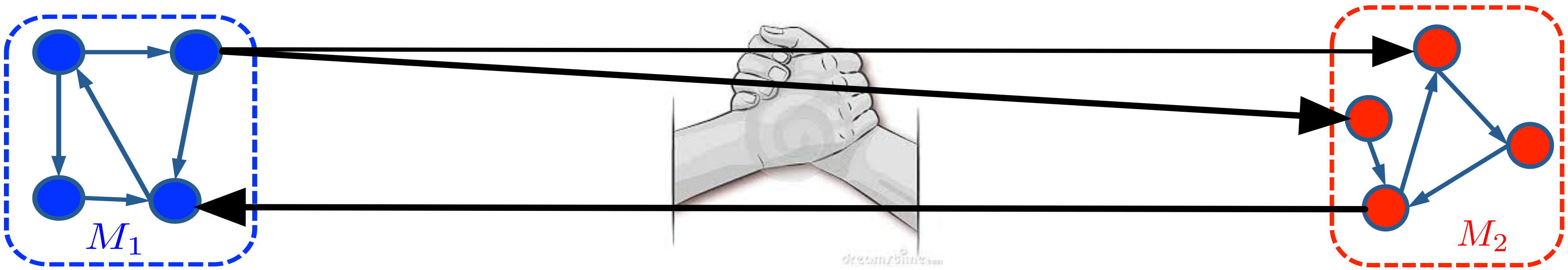


Cas 2 : Un des deux gagne (e.g Rouge)

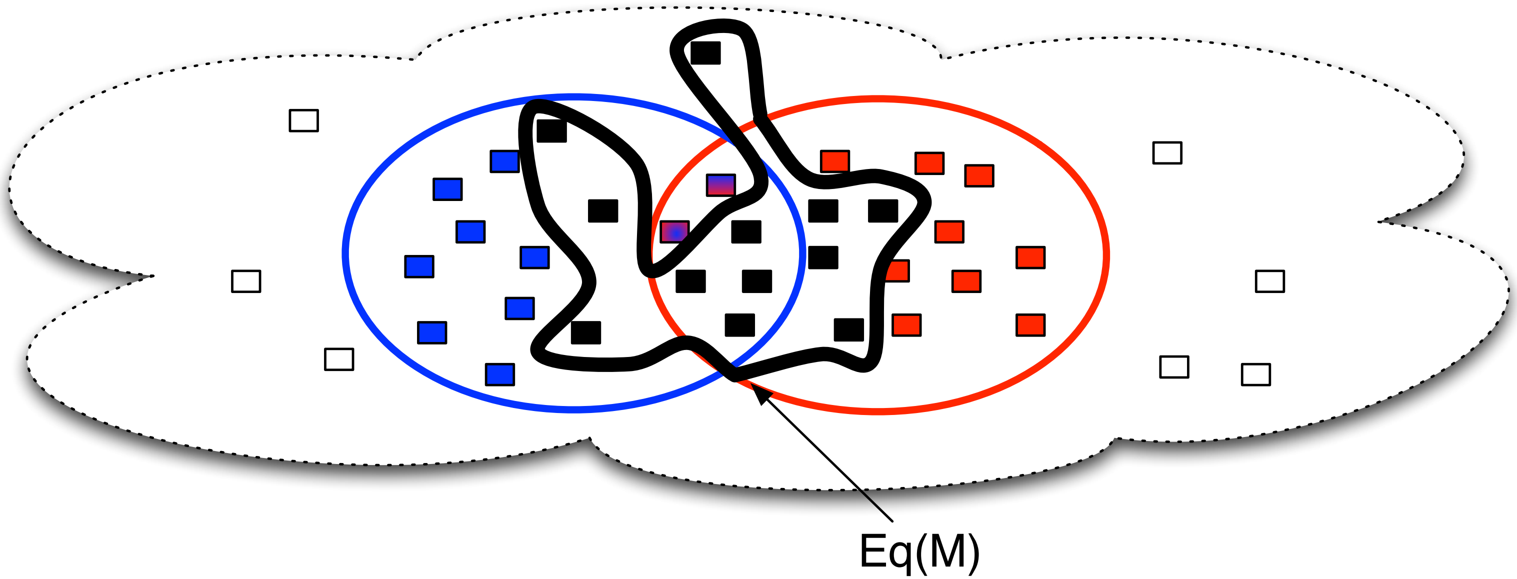


Eq(M) est dans Eq(M_2)

Modules et équilibres



Cas 3 : impossible de décider

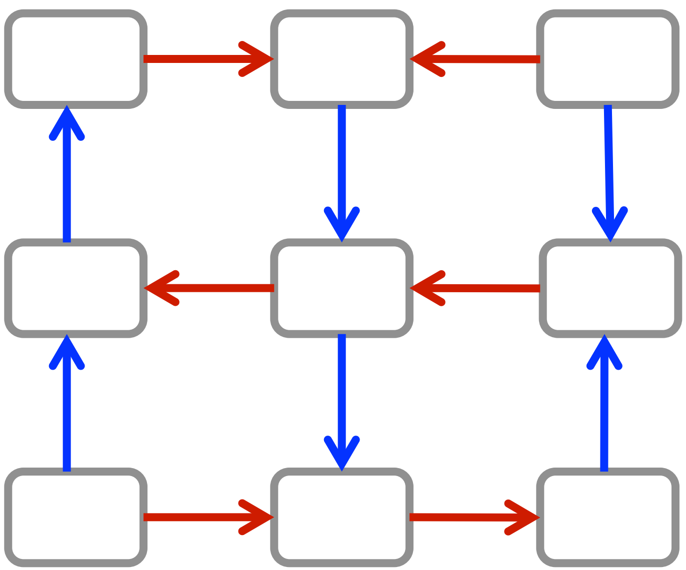


Eq(M) est … ?

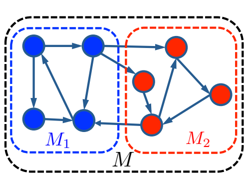
Modularité ➔ approche réductionniste

Cas 3

Dynamique

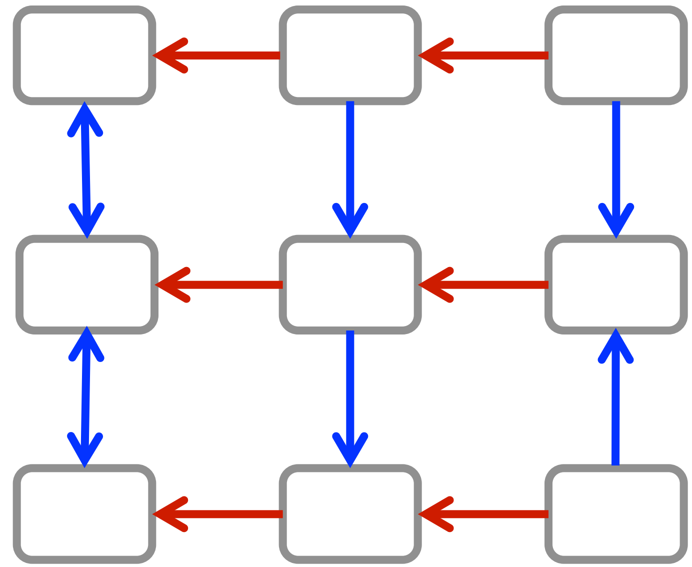


Structure

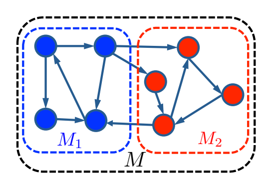


Cas 1 et cas 2

Dynamique



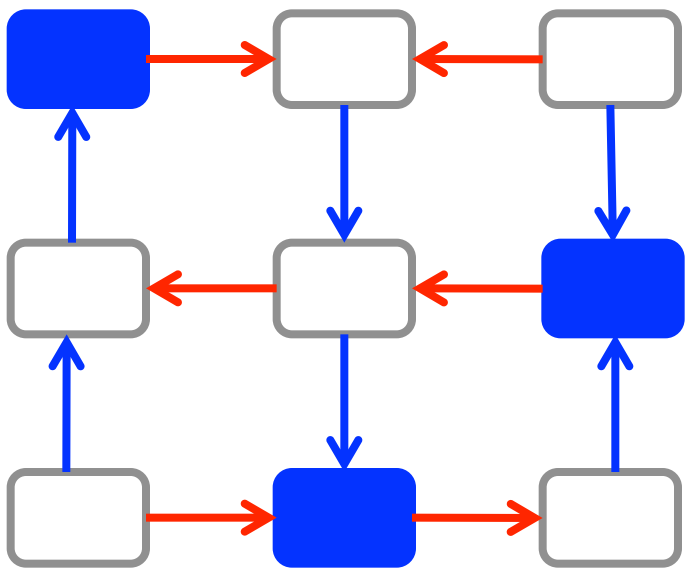
Structure



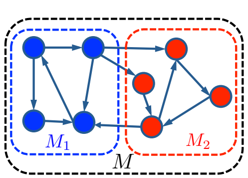
Modularité ➔ approche réductionniste

Cas 1

Dynamique

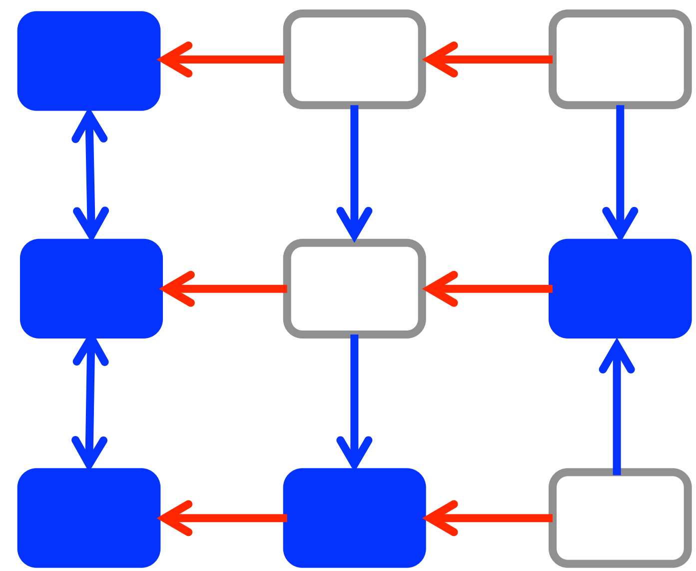


Structure

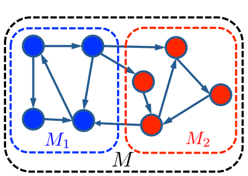


Cas 1 et cas 2

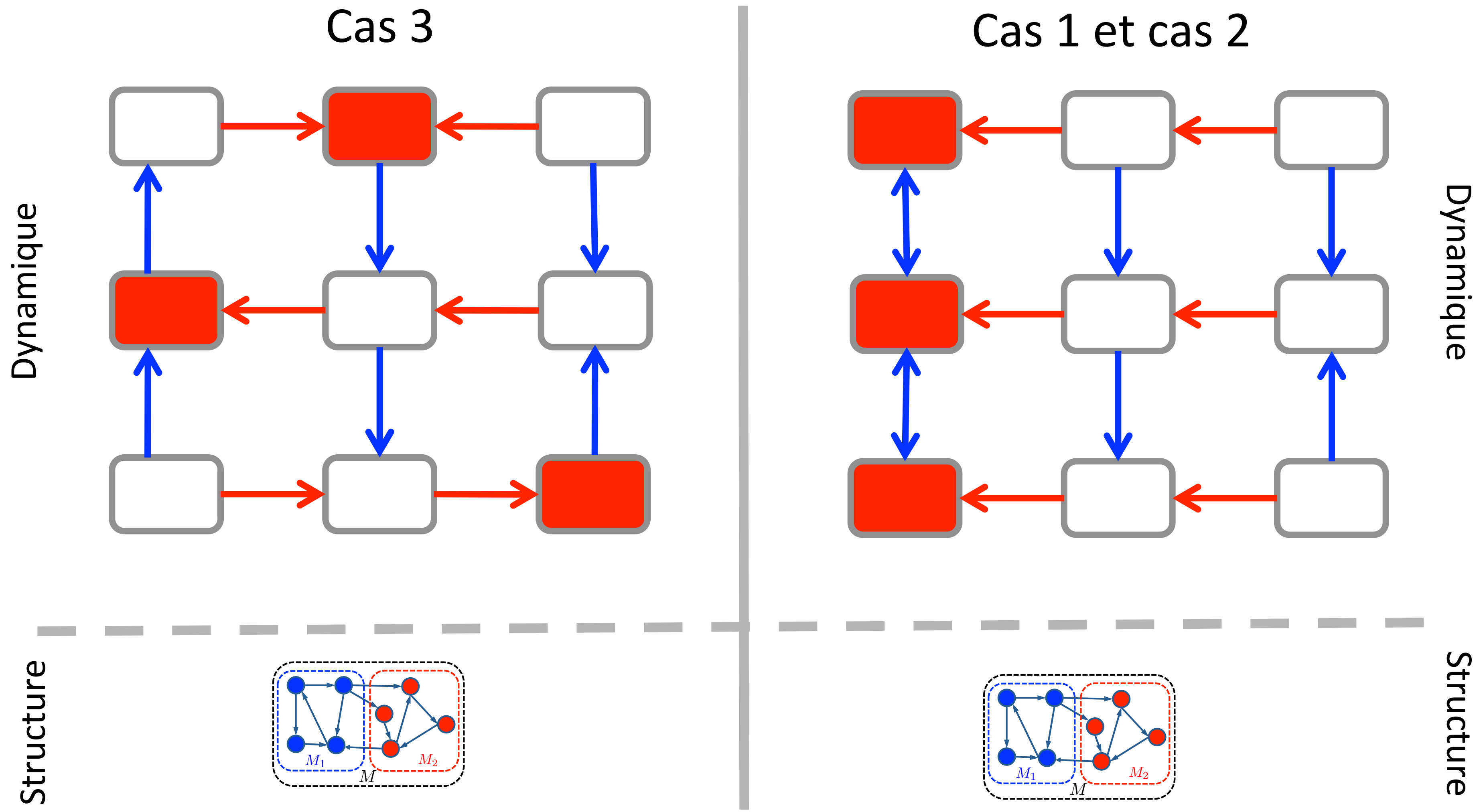
Dynamique



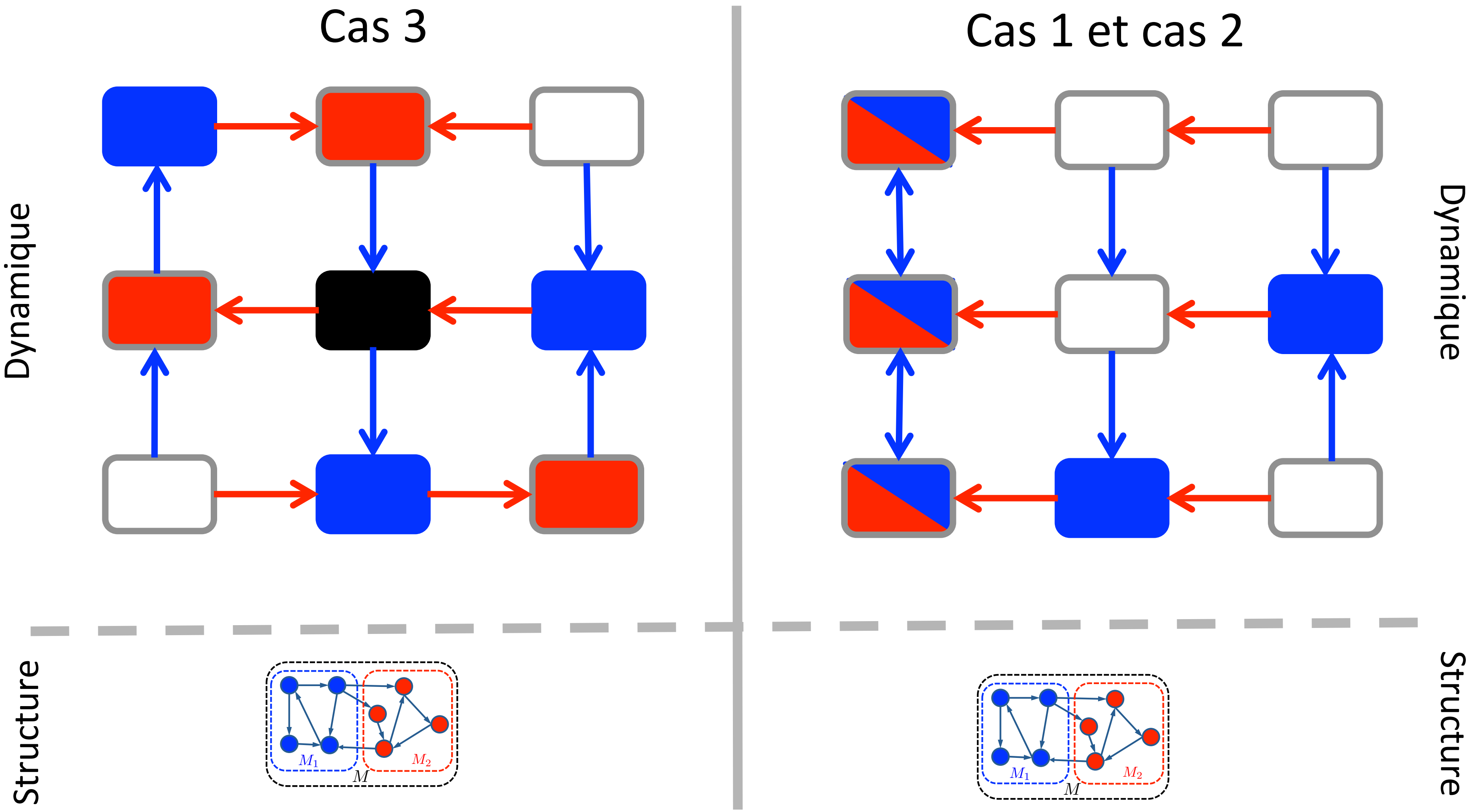
Structure



Modularité ➔ approche réductionniste



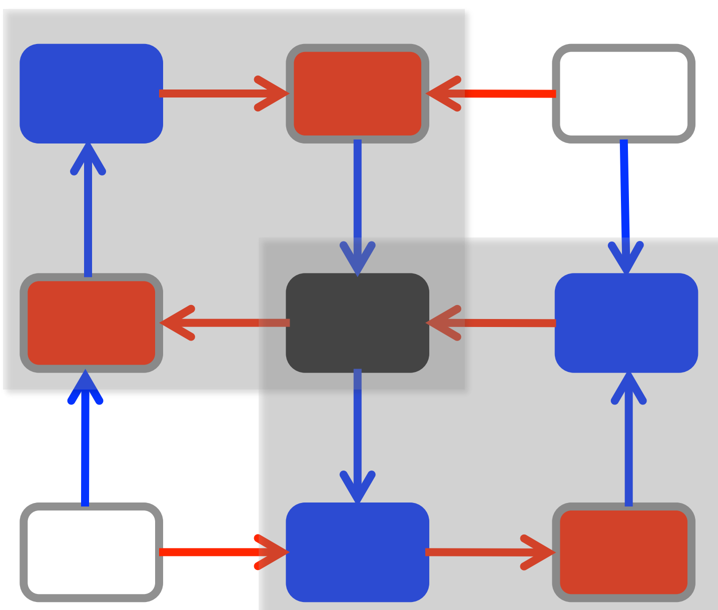
Modularité ➔ approche réductionniste



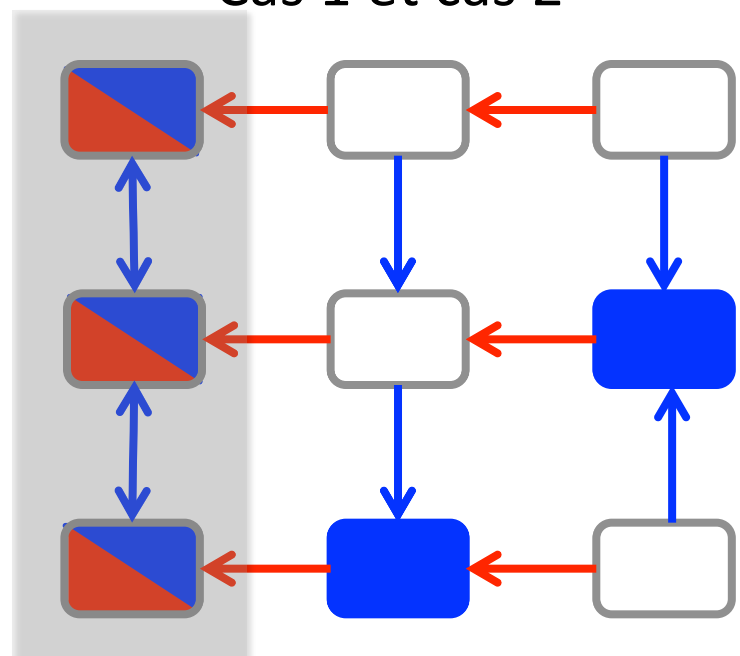
Modularité ➔ approche réductionniste

Dynamique

Cas 3

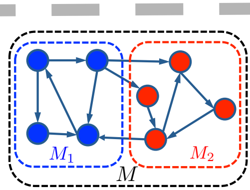


Cas 1 et cas 2

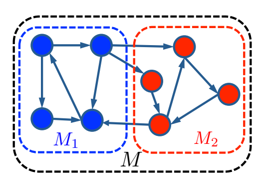


Dynamique

Structure



M1 et M2 ne sont pas des modules

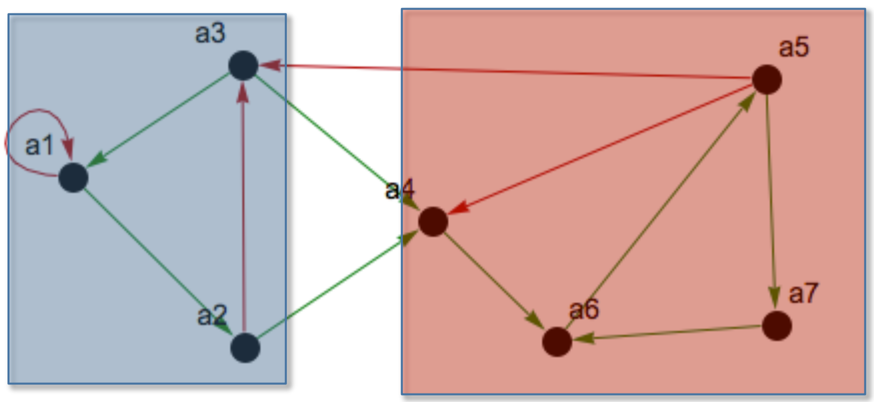


M1 et M2 sont des modules

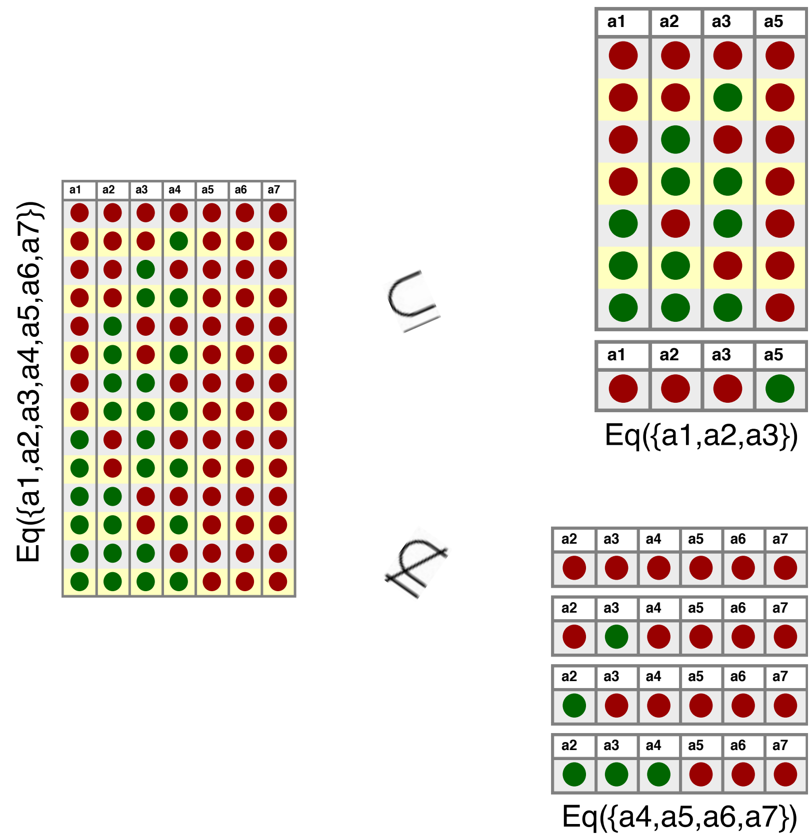
Structure

Exemples : cas 1 et 2

Structure

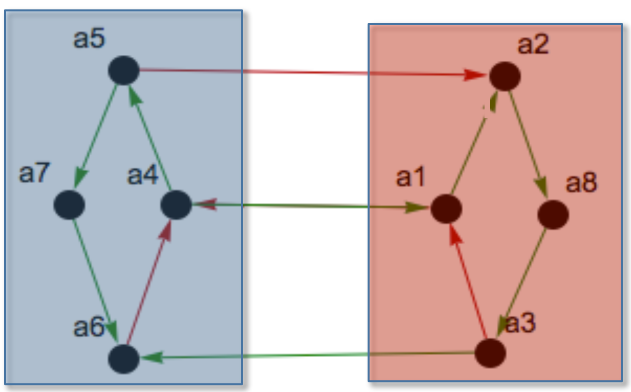


Dynamique

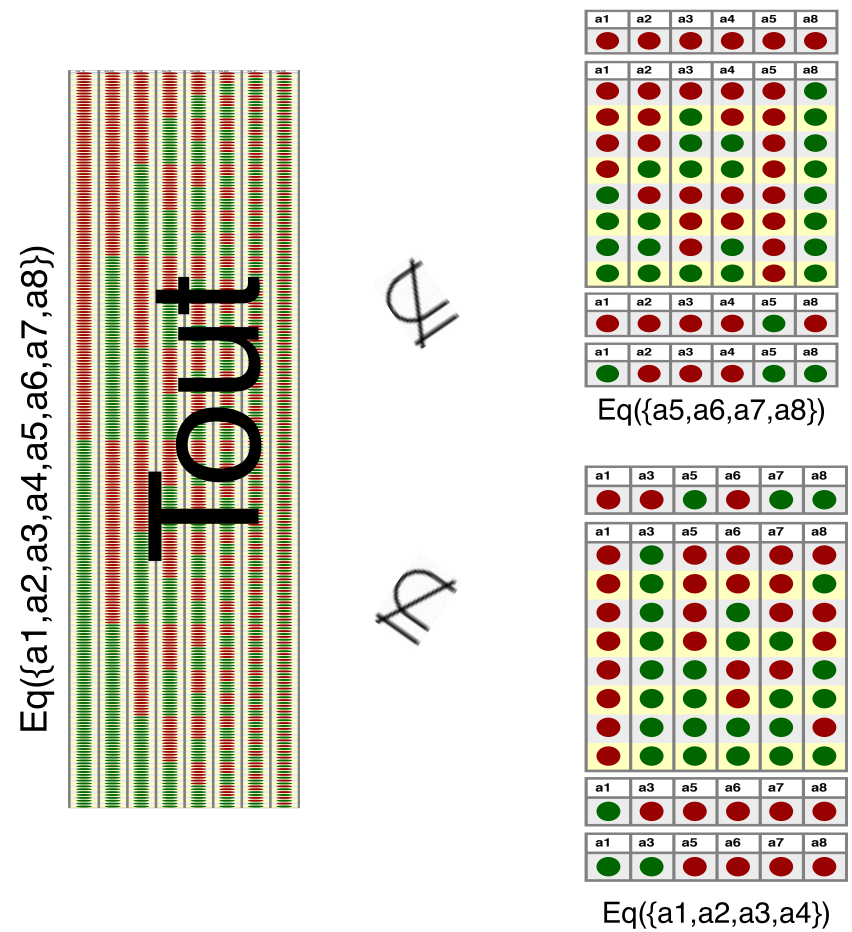


Exemples : cas 3

Structure



Dynamique



Modularité → approche réductionniste

- Pourquoi M1 et M2 ne sont-ils pas des modules dans le cas 3 ?
    1. Générateur de comportement complexe
    2. Supposer que c'est le cas cela implique que :
        - Pour un ensemble E, toutes les fonctions de $[(2^E)^3 \text{ -> } 2^E]$ sont équivalentes.

Une définition d'un module : M-Relation

- Soit R un réseau booléen
- Soit M_1 et M_2 deux sous-ensembles disjoints de R

Definition

M_1 et M_2 sont des modules entre eux dans R ssi

$$M_1 \leadsto M_2 \vee M_2 \leadsto M_1 \text{ avec}$$
$$M_i \leadsto M_j \leftrightarrow Eq(M_i \cup M_j) \subseteq Eq(M_i)$$

Décomposition modulaire d'un réseau booléen

- Soit R un réseau booléen
- Soit $D = \{M_1, \ldots, M_n\}$

Définition

D est une décomposition modulaire de R ssi

1. $\forall M_i, M_j \in D : M_i \rightsquigarrow M_j \vee M_j \rightsquigarrow M_i$
2. D admet un ordre topologique selon $\rightsquigarrow$

Pliage : associativité

Lemme

Soit $D = \{M_1, \ldots, M_n\}$ une décomposition modulaire de R.

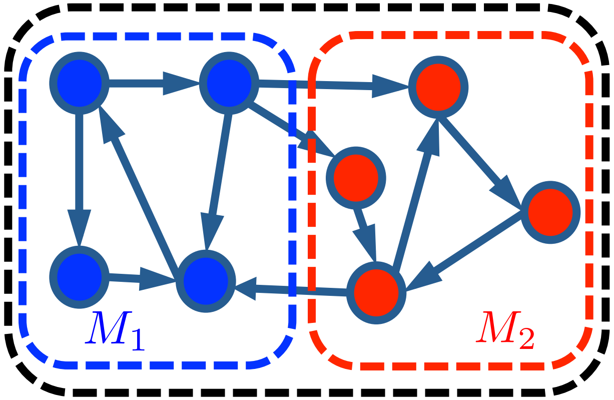
Soit $O = (M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_j, \ldots, M_n)$ un ordre topologique de D.

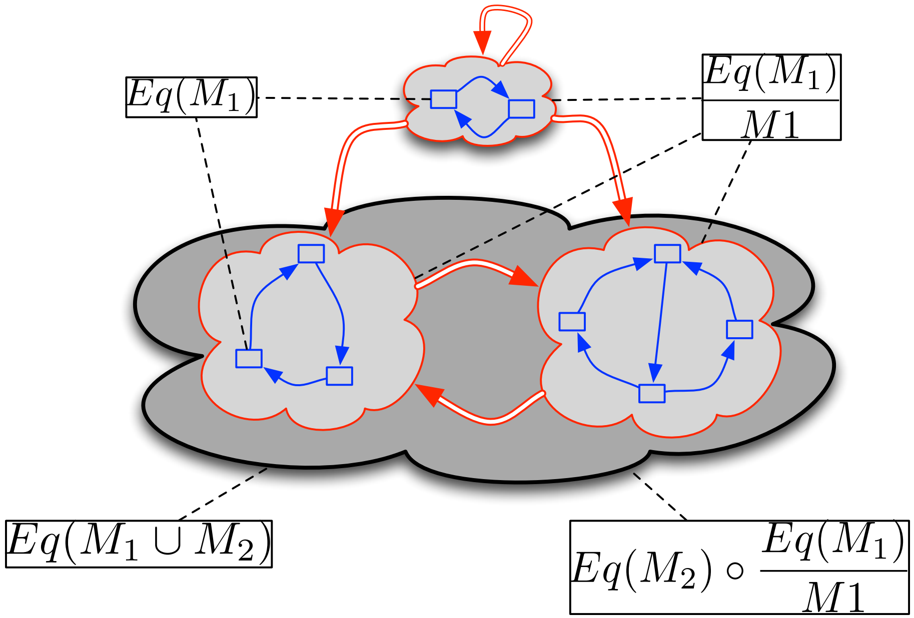
La décomposition

$$D' = \{M_1, \ldots, \bigcup_{k=i}^{k=j} M_k, \ldots, M_n\}$$

est également une décomposition modulaire de R.

L'opérateur de composition





Théorème :

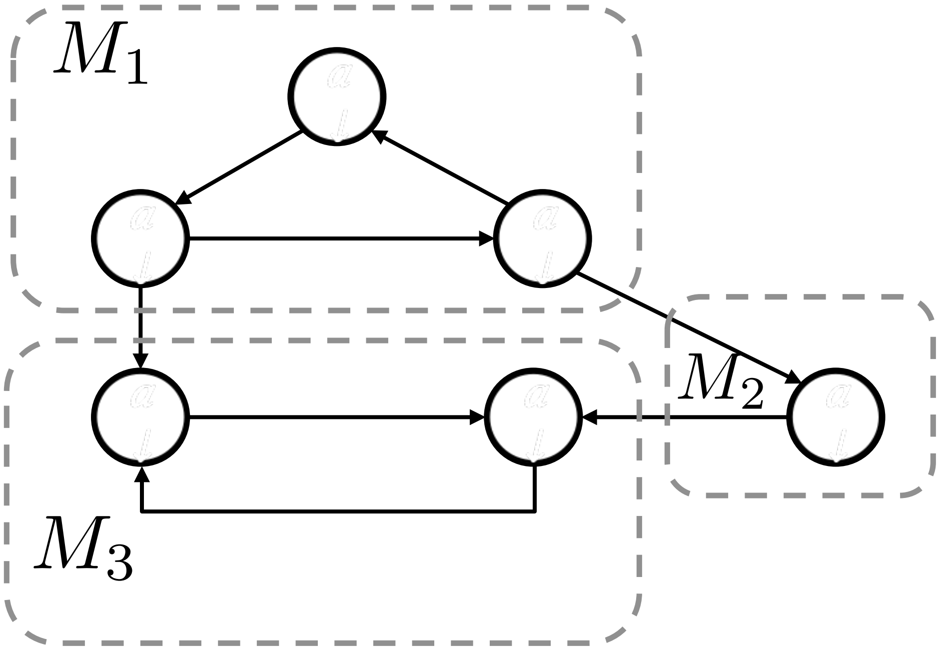
$$M_1 \rightsquigarrow M2 \Leftrightarrow Eq(M_1 \cup M_2) = Eq(M_2) \circ \frac{Eq(M_1)}{M_1}$$

Retour sur la structure

Est-ce qu'on peut identifier des modules sur la structure ?

Proposition

1. La décomposition de R en composantes fortement connexes est une décomposition modulaire.
2. Chaque ordre topologique est une organisation modulaire.



Organisation Modulaire

$$M_1 \rightsquigarrow M_2 \rightsquigarrow M_3$$

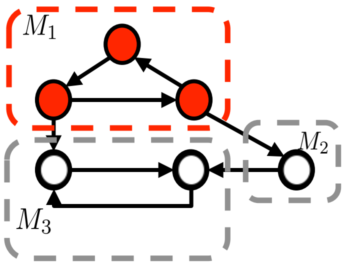
$$(M_1 \cup M_2) \rightsquigarrow M_3$$

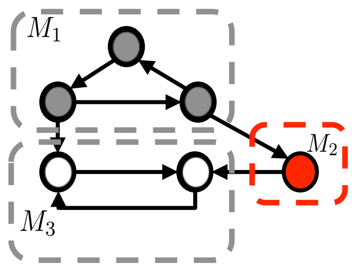
$$M_1 \rightsquigarrow (M_2 \cup M_3)$$

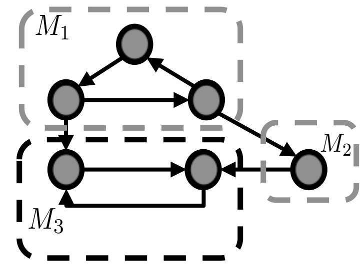
$$(M_1 \cup M_3) \not\rightsquigarrow M_2$$

Un calcul efficace de l'équilibre

- ➔ Calcul **parcimonieux** de l'équilibre global



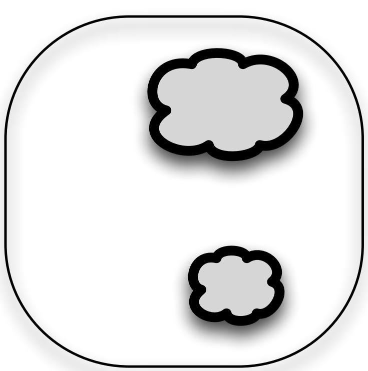


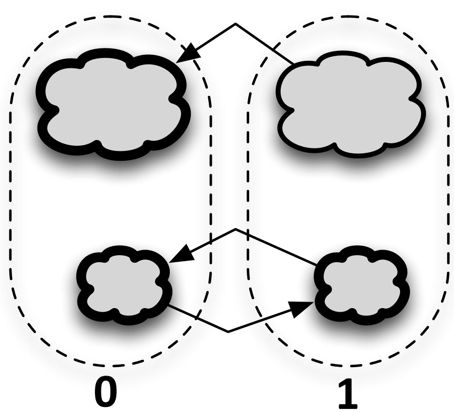


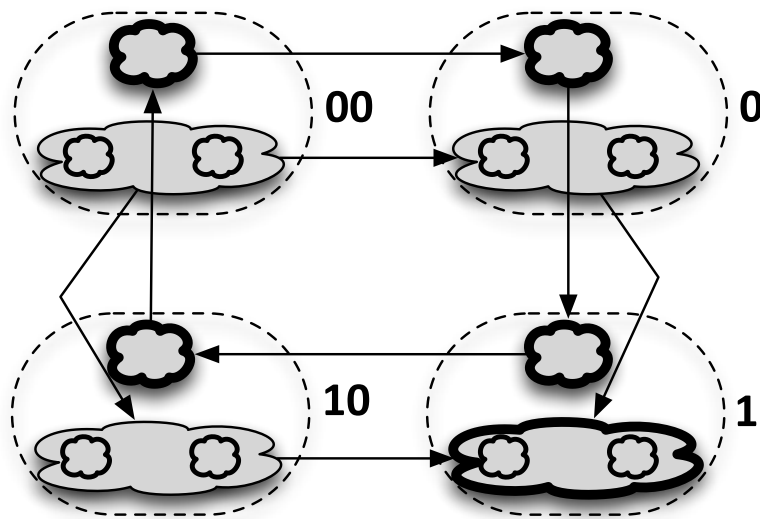
Step 1 : $Eq(M_1)$
Size : $2^{|M_1|}$

Step 2 : $Eq(M_2) \circ \frac{Eq(M_1)}{M_1}$
Size : $2^{|M_2|} * |Eq(M_1)|$

Step 3 : $Eq(M_3) \circ \frac{Eq(M_2) \circ \frac{Eq(M_1)}{M_1}}{M_2}$
Size : $2^{|M_3|} * |Eq(M_1 \cup M_2)|$

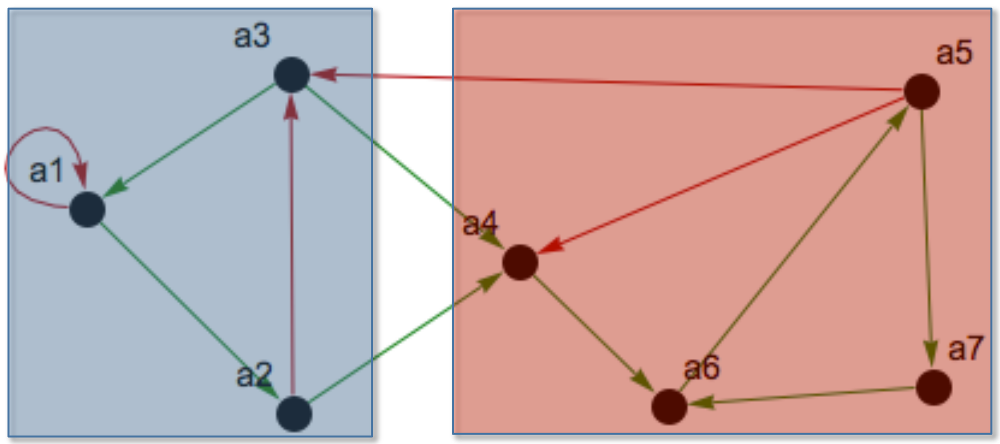






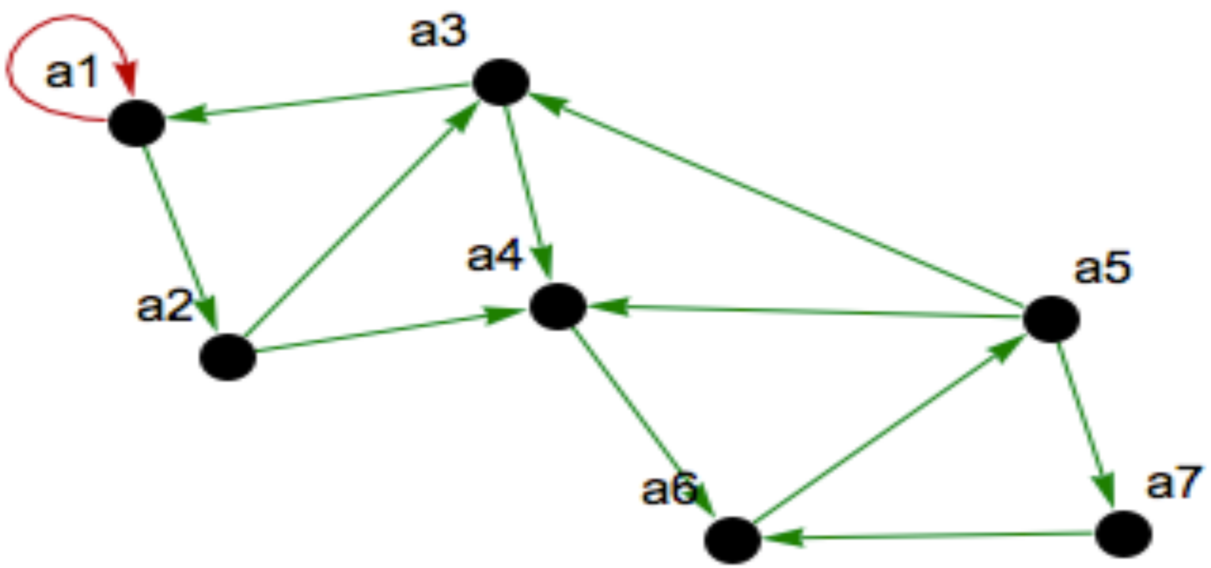
Retour sur la structure : quelques constats

Bien évidemment, il n'y a pas que les CFC



Retour sur la structure : quelques constats

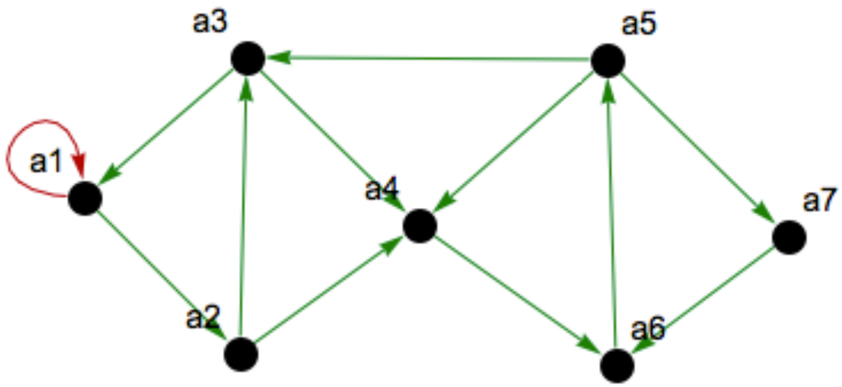
Les réseaux qui n'admettent que des points fixes n'impliquent pas nécessairement que toute partition est une décomposition modulaire.



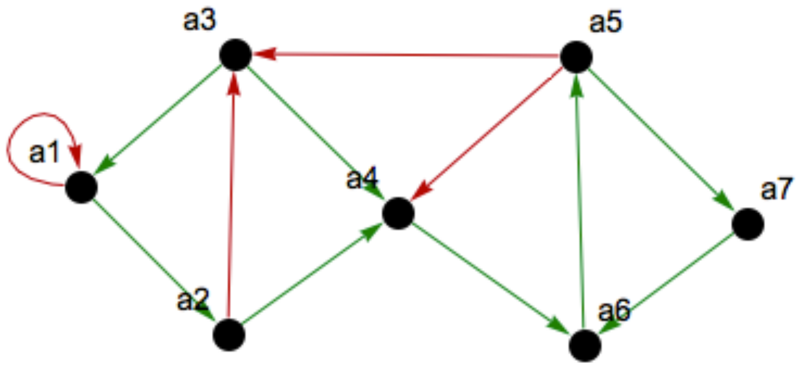
Mais on obtient forcément une sur-estimation des points fixes.

Retour sur la structure : quelques constats

On a besoin de voir plus que le graphe d'interaction



Pas modulaire



Modulaire

Même structure mais modulaire dans un cas mais pas dans l'autre

Conclusion

- La modularité des équilibres est une propriété importante pour la compréhension des réseaux de régulation.
  - Hypothèse : un module = une fonction biologique
- Contributions
  1. Condition réductionniste pour un découpage modulaire
     - Nécessaire dans le cadre général
     - Nécessaire et suffisante dans le cadre réductionniste
  2. Un opérateur de calcul modulaire des équilibres
  3. Quelques conditions structurelles suffisantes de découpage modulaire
- La suite
  - Prouver la suffisance ou non de la condition
  - Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la structure

MERCI