De la non monotonie aux Systèmes Dynamiques Discrets

Andrei Doncescu, Vincent Risch, Sylvain Séné, Pierre Siegel

- On part d'un réseau de gênes représenté par un graphe d'interaction en SDD booléen.

- On traduit le graphe en une théorie de **logique des hypothèses** (logique bi-modale non monotone).

$$p \xrightarrow{+} q \quad ==> \quad \{ Hp \longrightarrow Lq \ , \ \ H\neg p \longrightarrow L\neg q \}$$

$$p \xrightarrow{-} q \quad ==> \quad \{ Hp \longrightarrow L\neg q \ , \ \ H\neg p \longrightarrow Lq \}$$

Hp est l'hypothèse que le gêne p est activé. **H¬p** est l'hypothèse que p est inhibé
Lq dit que le gêne q est activé. **L¬q** dit que q est inhibé.

- On calcule des **extensions.** Une extension est obtenue en ajoutant à la théorie le plus d'hypothèses possible.

Si la traduction est consistante/satisfaisable, il existe au moins une extension.

- On a deux types d'extensions :
  - Les **extensions normales** caractérisent les états stables.
    (et donnent les extensions de la logique des défauts et les modèles stables des ASP.)

  - Les **extensions fantômes** caractérisent ? les cycles stables et instables.

- Calcul des extensions avec un algorithme non déterministe constructif (sans gestion de boucles).

Systèmes Dynamique Discret booléen

{1, .. , n} est l'ensemble des **entités** (gênes/protéines) (variables propositionnelles)

- Un état (x_1,..x_n) donne une valeur de vérité (0/1 ou V/F) (état = interprétation).
- L'ensemble de tous les états ou **espace des états** est donc $X = \{0,1\}^n$.
- La dynamique donne l'évolution du réseau de gêne dans le temps. Elle est donnée par une (*plusieurs*) application de X **dans** X + un **mode de mise à jour**

  $f\,(g, ..)\ :\ X \to X, \quad x = (x_1, \dots x_n) \to f(x) = (f_1(x), \dots , f_n(x))$

  mise à jour **synchrone** : toutes les entités changent ente t et t+1 en même temps

  mise à jour **asynchrone** : une seule entité entre t et t+1 (*plus les mises à jour mixtse*)

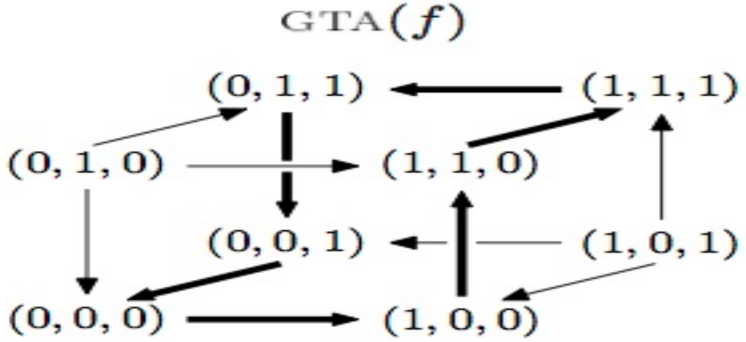
La fonction f et le mode de mise à jour donnent la dynamique. Pour le cas asynchrone, on étudie dynamique de f avec un **graphe de transition asynchrone**, GTA(f) ou avec un **graphe d'interaction** G(f).

Pour donner une représentation logique, la difficulté, n'est pas la représentation statique (l'ensemble des modèles du CP) mais la représentation de la dynamique du système, c'est à dire son évolution dans le temps.

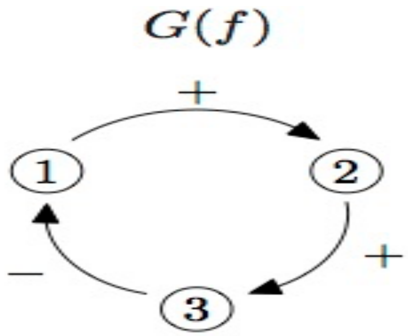
SDD booléen - Cas asynchrone - Circuit négatif/impair

f : $\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}^3$, $f(x1, x2, x3) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))\ ) = (1\text{-}x3, x1, x2) = (\neg x3, x1, x3)$

Graphe de transition asynchrone



Graphe d'interaction



Fonction → Graphe de transition → Graphe d'interaction

Une **trajectoire** est une promenade dans le graphe de transition (GTA) en suivant les arcs.

- Un **état stable** du GTA est un sommet qui n'a pas de successeur.
- Un **cycle stable** est un cycle dont chaque sommet a un unique successeur (sinon **cycle instable**).
- Un **attracteur** est un état stable ou un cycle stable (*on y reste indéfiniment)*

Un **graphe d'interaction** est un graphe G orienté signé dont les arêtes se notent (i, s, j) avec s ∈ {+, -}

Ce que l'on connait des réseaux de gènes est souvent représenté par un graphe d'interaction.

Question : Si on a G que peut-on dire des comportements stables et oscillatoires ?

Eléments de réponse avec une logique non monotone. La difficulté est de capturer la notion de dynamique.

Logiques non monotones

Les logiques « classiques » (CP, LPO, logiques modales ..) sont **monotones** :

A ⊢ B => A ∪ A' ⊢ B - (Si A infère B, alors A et A' infère toujours B)

Si la connaissance augmente/diminue, les déductions augmentent/diminuent.

La monotonie est nécessaire en math (on garde les théorèmes !) mais pas réaliste dans la vraie vie (et en IA) car la connaissance est souvent *incomplète, incertaine, révisable, contradictoire, fausse, multi-sources … alternative …*

Histoire : … début des années 70 deux problèmes intéressants :

- Base de données, hypothèse du monde clos ==> **circonscription, approche préférentielle.** Logiques semi-monotones (**cumulatives**) avec des algorithmes constructifs.

- Négation par échec en Prolog. Si `p :- not(r)` on obtient `p=true.` Quelle est la sémantique ?

=> => **logique des défauts** (Reiter 198

=> => **ASP** (Marek and Truszczyński , Gelfond, Lifschitz- 1989..) (fragment de la logique des défauts)

Lien entre les SDD et les logiques non monotones ?

En SDD pour passer d'un état E_t à un état à E_{t+1} on utilise un mécanisme de révision non monotone.

Logiques Modales (Aristote … Lewis 1910 ... Kripke 1959)

- La logique du premier ordre donne une valeur de vérité V/F aux formules : *Il pleut / Il ne pleut pas*
- Une logique modale nuance ces valeurs : *Il est prouvé qu'il pleut, Je sais qu'il pleut, Je crois qu'il pleut, Demain il pleuvra, A côté il pleut ... la logique modale est un couteau Suisse.*
- On ajoute à la LPO un **opérateur modal L.** On associe à **L** son dual **M, avec Mp = ¬L¬p** .
- On obtient un **langage modal** : $ML(p \rightarrow (M(p \rightarrow ML\neg\neg q)))$ est une formule modale

---

SYNTAXE : On ajoute des **règles d'inférence** et des **schémas d'axiomes** à ceux de la LPO.

Pour les **logiques modales normales** (celles qui ont une sémantique de Kripke) on ajoute en particulier :

- N : $\vdash f \Rightarrow \vdash Lf$ règle de nécessitation (si f est une tautologie, alors Lf est une tautologie).
- K : $(L(f \rightarrow g) \wedge (Lf) \rightarrow Lg)$ axiome de distribution (on récupère modus ponens pour la modalité)

N + K donnent le **système K** (très faible)

On peut aussi ajouter l'axiome de réflexivité T :

- T : $Lf \rightarrow f$ (Ce qui est prouvé est vrai / Si p est activée/inhibée alors p est présente/absente)

N + K + T donnent le **système T**

*Pour les spécialistes : On n'ajoute pas l'axiome **S4 : $Lf \rightarrow LLf$** car il fait perdre la dynamique.*

Logique des hypothèses $\mathcal{H}$ (ps , C. Schwind 1990)

$\mathcal{H}$ est une logique bimodale, d'opérateurs modaux **L** et **[H].**

- **L** a les propriétés du système T (en particulier $Lp \rightarrow p$).
- Si f est une formule fermée (sans variable libre) **H**f est une **hypothèse**
- ***[H]****f* = ¬***H***¬*f* *dit que l'on ne peut pas faire l'hypothèse f.* ***[H]*** *a les propriétés du système K.*
- Le seul lien entre **H** et **L** est le schéma d'axiome de cohérence

  $C: \neg(\mathbf{H}f \wedge \mathbf{L}\neg f) \Leftrightarrow Hf \rightarrow \neg L\neg f \quad Hf \Leftrightarrow L(f) \rightarrow \neg H\neg f \Leftrightarrow \mathbf{L}f \rightarrow [\mathbf{H}]f$

  On ne peut pas prouver f et faire l'hypothèse ¬f en même temps.

  On ne peut pas activer/inhiber p et faire l'hypothèse que p est inhibée/activée.

- Une **théorie des hypothèses** est un couple TH ={HY, F}, HY est un ensemble d'hypothèses et F est un ensemble de formules de $\mathcal{H}$.
- Une extension de TH est un ensemble maximal consistant : $E = F \cup H'Y$ avec $H'Y \in HY$.

Pour obtenir une extension, on ajoute à F le plus d'hypothèses possible tout en restant consistant.

- Propriété : Si F est consistant, alors TH a au moins une extension
- Propriété : On a $\neg(Lf \wedge L\neg f)$ *On ne peut pas activer et inhiber p en même temps*

- E est une extension normale si elle vérifie : $\forall\ Hf, \quad \neg Hf \in E \Rightarrow L\neg f \in E$
- E est une extension fantôme sinon : $\exists\ Hf$, tel que $\neg Hf \in E$ et $L\neg f \notin E$

  Hf est un littéral fantôme

Pourquoi la logique des hypothèses ?

Les solutions (extensions/ modèles stables) de la logique des défauts (et des ASP) sont des points fixes.

=> Une théorie des défauts peut ne pas avoir d'extension (*en particulier l'équivalent des circuits négatifs*)

=> Le calcul des extensions est compliqué.

Résultats :

- On peut traduire toute théorie des défauts Δ ={D, W} en une théorie des hypothèses TH(Δ) = { HY, F)
- Si W est consistant, TH(Δ) a au moins une extension
- Les extensions de Δ sont isomorphes aux extensions classiques de THΔ.

  …. *idem pour les ASP généraux et étendus*.

On a une logique non-monotone, préférentielle, **cumulative** qui capture la logique des défauts.

Traduction de Δ = (D, W) en TH(Δ) = (HY, F)

- Une formule f de W se traduit par $Lf \in F$
- Un défaut $d = \dfrac{\mathbf{f : g}}{\mathbf{h}}$ (*ou* $f, : g \vdash h$) se traduit par $(Lf \wedge Hg \rightarrow Lh) \in F$
- HY est l'ensemble de toutes les hypothèses de F

$p \leftarrow q,\ not\ r$ *se traduit par* $Lq \wedge H\neg r \rightarrow Lp$

Traduction d’un graphe d’interaction G en $\mathcal{H}$

La proposition *p* représente une protéine/gêne.

- p (p=1) dit que la protéine est **activée/présente**. ¬p dit que la protéine est **inhibée/absente.**
- Hp : **on fait l’hypothèse** que p est activé H¬p : **on fait** l’**hypothèse** que p est inhibé
- Lq : la cellule **active**/produit q L¬q : la cellule **inhibe**/détruit q.

On traduit chaque arc de (i, s, j) ∈ G :

- Un arc positif (i,+,j), se traduit par tr(i,+, j) = {Hi →Lj, H¬i → L¬j}
- Un arc négatif (j ,-,i) , se traduit par tr(i, -, j) = {Hi →L¬j, H¬i → Lj}

- **tr(G**) est l’union de tous les tr(j, s, i) de G.
- **HY(G)** est l’ensemble de toutes les hypothèses Hi et H¬i qui apparaissent dans tr(G)
- On obtient la **théorie des hypothèses** TH(G) = {HY(G), tr(G)}.

- On calcule les extensions de TH(G).
- Comme tr(G) est consistant (on a un modèle en affectant toutes les hypothèses à faux) il existe toujours une extension.

Au lieu d’avoir 2 valeurs de vérités p et ¬p on en a 10 :

p, ¬p, Lp , ¬Lp, L¬p, ¬L¬p, Hp, ¬Hp, H¬p, ¬H¬p

!! (L¬p ≠ ¬Lp), H¬p ≠ ¬HLp **)**

Remarques algorithmiques pour le cas particulier des SDD booléens

- L'ensemble tr(G) est équivalent à un ensemble de « clauses » binaires

=> **On travaille sur 2-SAT**.

=> **On calcule une extension en un temps linéaire**.

=> Si on a n entités, le **calcul de toutes les extensions est en** 7**n.2** $^{\mathbf{n}}$ (beaucoup moins dans la pratique)

- Un arc se traduit par 2 formules {Hi → Lj , H¬i → L¬j} ou {Hi → L¬j , Hi → L¬j}

  => **¬(Hi ∧ H¬i**) (de l'axiome T).

- Tous les i et ¬i sont symétriques.

Les algorithmes sont sympathiques.

G est un graphe de sommets {1 ..n} et Th(F(G) $\cup$ {Hx_1, …, Hx_k}) est une extension de TH(G).

Définitions.

- Le **symétrique** de E est D(E) = Th(F(G) $\cup$ {H¬x_1, …, ¬ H¬x_k }
- **E est complète** si pour tout i , **Hi $\in$ E ou H¬i $\in$ E**
- Un sommet i **est libre** dans E si Li $\notin$ E et L¬i $\notin$ E. Il est **lié** sinon.
- Le **degré de liberté** d'une extension est le nombre de ses sommets libres.

Propriétés.

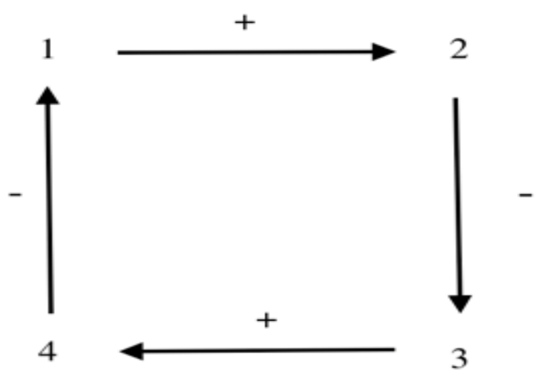
- Le symétrique d'une extension est une extension (*et si on une extension normale on en a 2*).
- Si tout sommet de G a un arc entrant alors une e⟶xtension complète est de degré 0.
- Une extension complète est normale.

On pose que tous les sommets ont un arc entrant. Si i n'a pas d'arc entrant on peut ajouter (i,+i) ce qui revient à représenter {i , s, j } par {Li → Lj, L¬i → L¬j}.

Conjectures / théorèmes :

- L'ensemble des extensions normales de TH(G) et l'ensemble des états stables associés à G sont isomorphes.
- Les extensions fantômes de degré de liberté 1 caractérisent les cycles stables.
- Les extensions fantômes de degré de liberté > 1 caractérisent des cycles instables.

Exemple circuit positif : G graphe d'interaction de f(x1, x2, x3, x4) = (¬x4, x1, ¬x2, x3)



Traduction : TH(G) = { tr(G), HY(G) }

tr(G) = { H1 → L2, H2 → L¬3, H3 →L4, L4 → L¬1,

H¬1 → L¬2, H¬2 → L3, H¬3 →L¬4, L¬4 → L1 }

Deux extensions normales de degré de liberté 0 : E1 et sa symétrique E2.

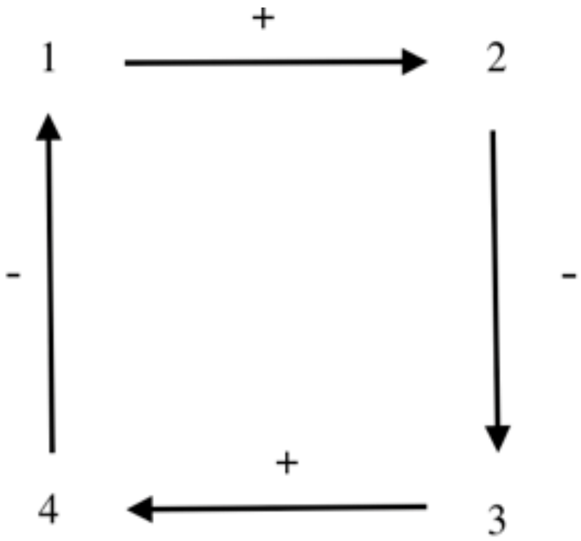
E1={H1, H2, H¬3, H¬4, **L1, L2, L¬3, L¬4** ¬H¬1, ¬H¬2, ¬H3, ¬H4 , 1, 2, ¬ 3,¬4 , ¬L¬1, ¬L¬2, ¬L3, ¬L4}

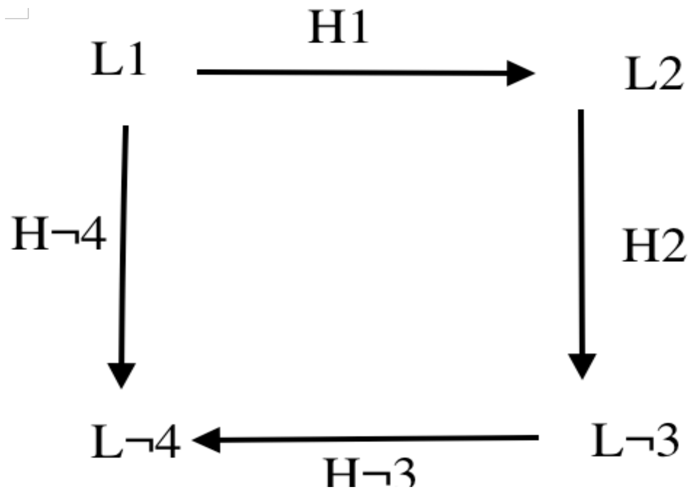
Pas de fantôme car quand on a ¬Hx, on a **L¬x** = > extension normale

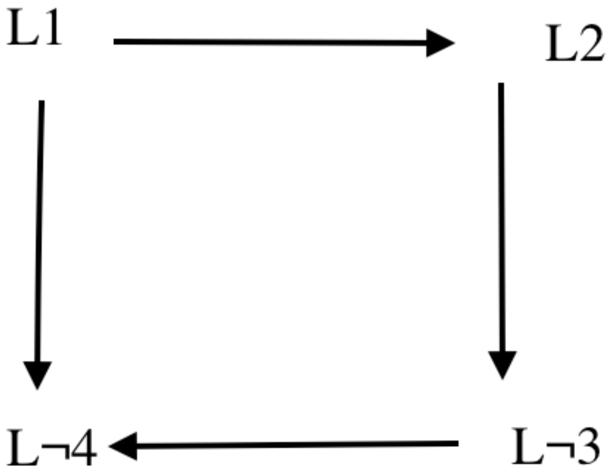
E2= {H¬1, H¬2, H3, H4, **L¬1, L¬2, L3, L4**, ¬H1, ¬H2, ¬H¬3, ¬H¬4 , ¬1, ¬2, 3, 4 , ¬L1, ¬L2, ¬L¬3, ¬L¬4}

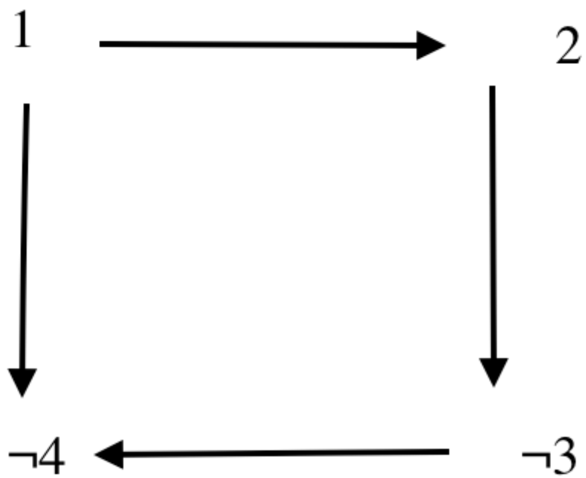
E1={H1, H2, H¬3, H¬4, **L1, L2, L¬3, L¬4** ¬H¬1, ¬H¬2, ¬H3, ¬H4 , 1, 2, ¬ 3,¬4 , ¬L¬1, ¬L¬2, ¬L3, ¬L4}

L'ensemble générateur *de E1 est { H1 → L2, H2 → L¬3, H3 →L4, L4 → L¬1}*

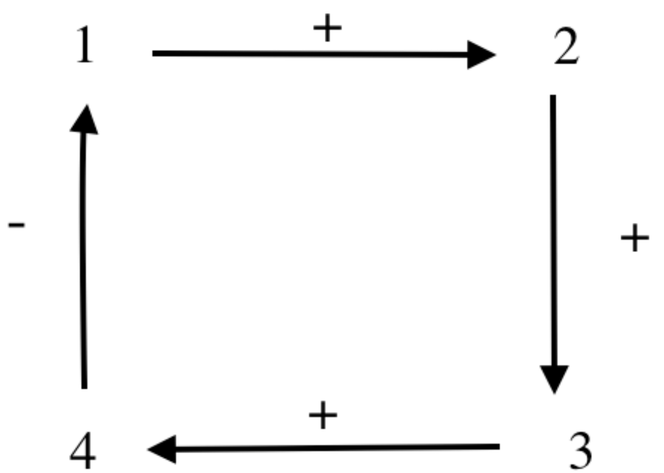








Exemple de circuit négatif : f(x1,x2,x3,x4) = (¬x4, x1, x2, x3)



tr(G) = { H1 → L2, *H2 → L3*, H3 →L4, L4 → L¬1,
H¬1 → L¬2, *H¬2 → L¬3*, H¬3 →L¬4, L¬4 → L1 }

Deux extensions fantômes de degré de liberté 1 : E1 et sa symétrique E2

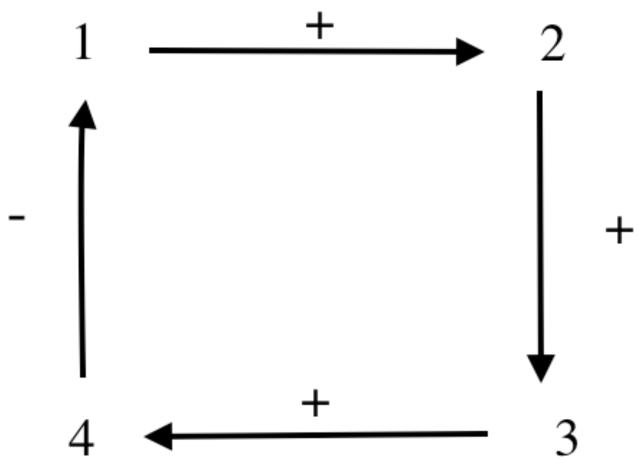
E1={H1, H2, H3 , **L2, L 3, L 4**, **¬H¬1**, ¬H¬2, ¬H¬3, ¬H4 , 2, 3, 4, ¬L¬2, ¬L3, ¬L¬4}

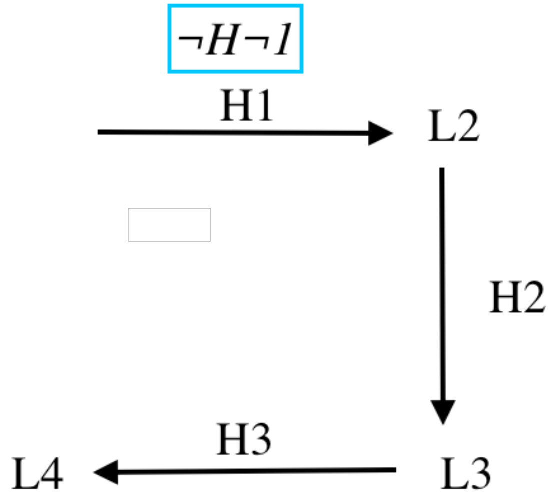
¬H¬1 est un fantôme et 1 est libre => **extension fantôme de degré de liberté 1**

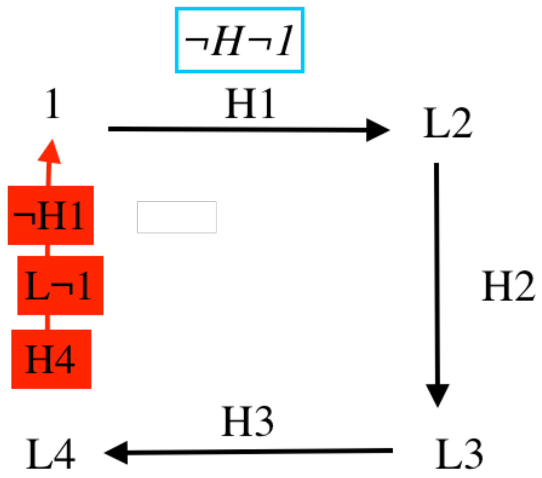
E2 ={H¬1, H¬2, H¬3 , **, L¬2, L¬3, L¬4**, **,** **¬H1**, ¬H2, ¬H3, H4 , ¬2, ¬3, ¬4, ¬L2, ¬L3, ¬L4}

E1={H1, H2, H3 , **L2, L 3, L 4,** $\boxed{\neg H \neg 1}$, ¬H¬2, ¬H¬3, ¬H4 , 2, 3, 4, ¬L¬2, ¬L3, ¬L¬4}

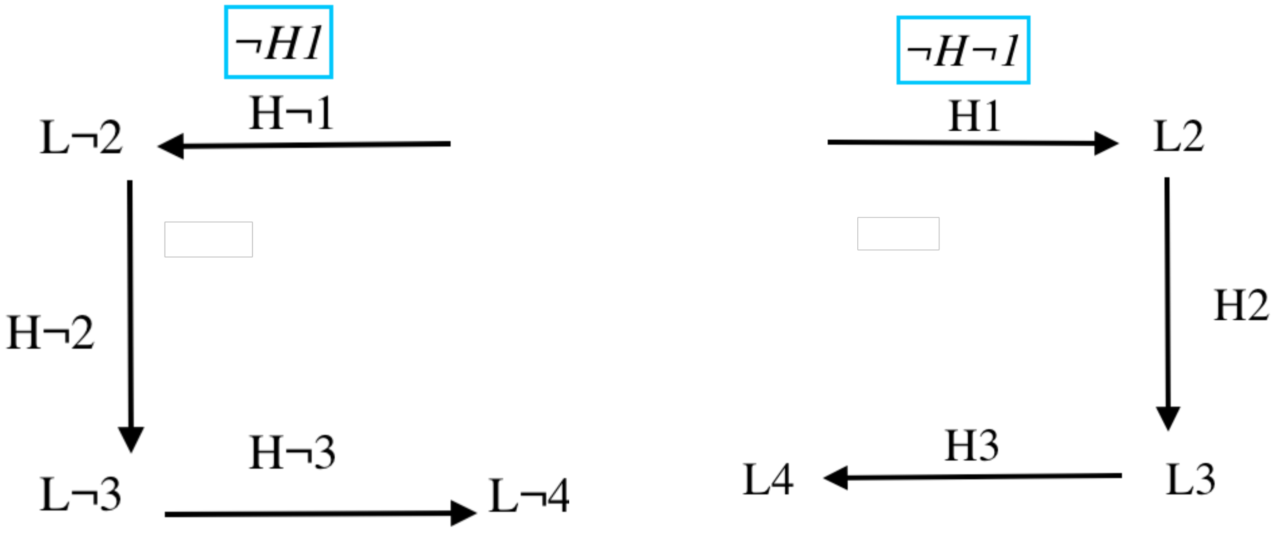
Ensemble générateur *de E1 = { H1 → L2, H2 → L3, H3 →L4}*



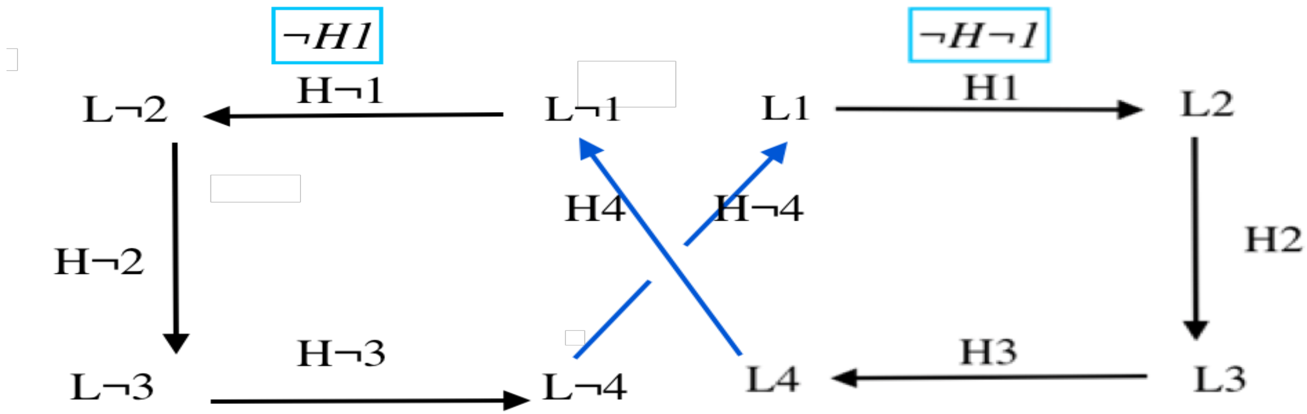




Il y a 2 extensions fantômes symétriques :



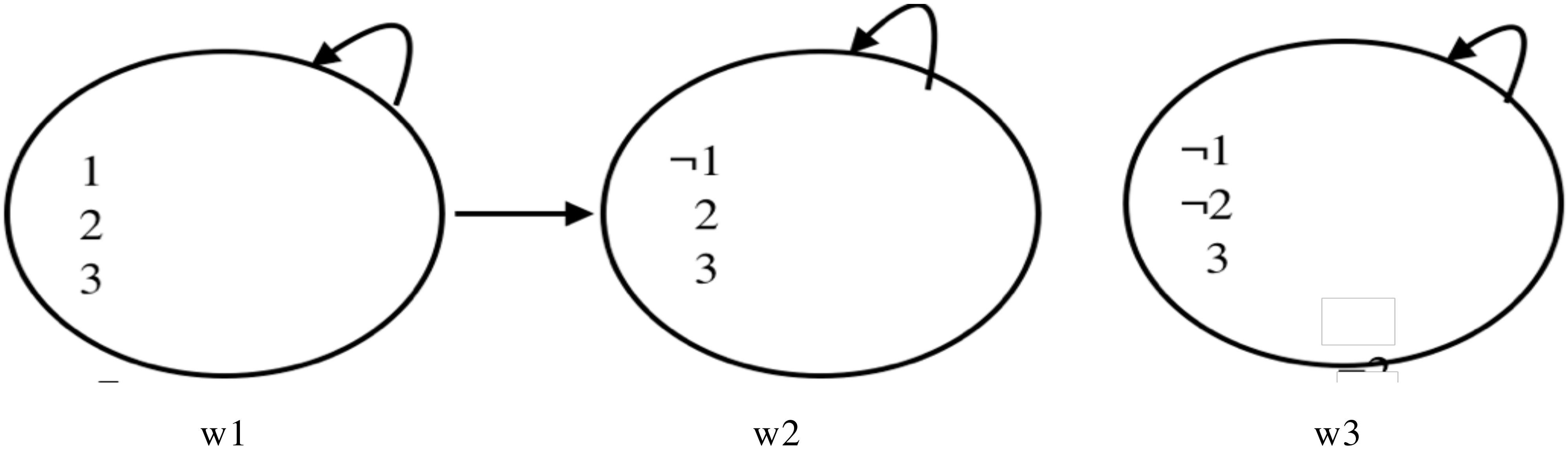
On les raccorde en utilisant la liberté.



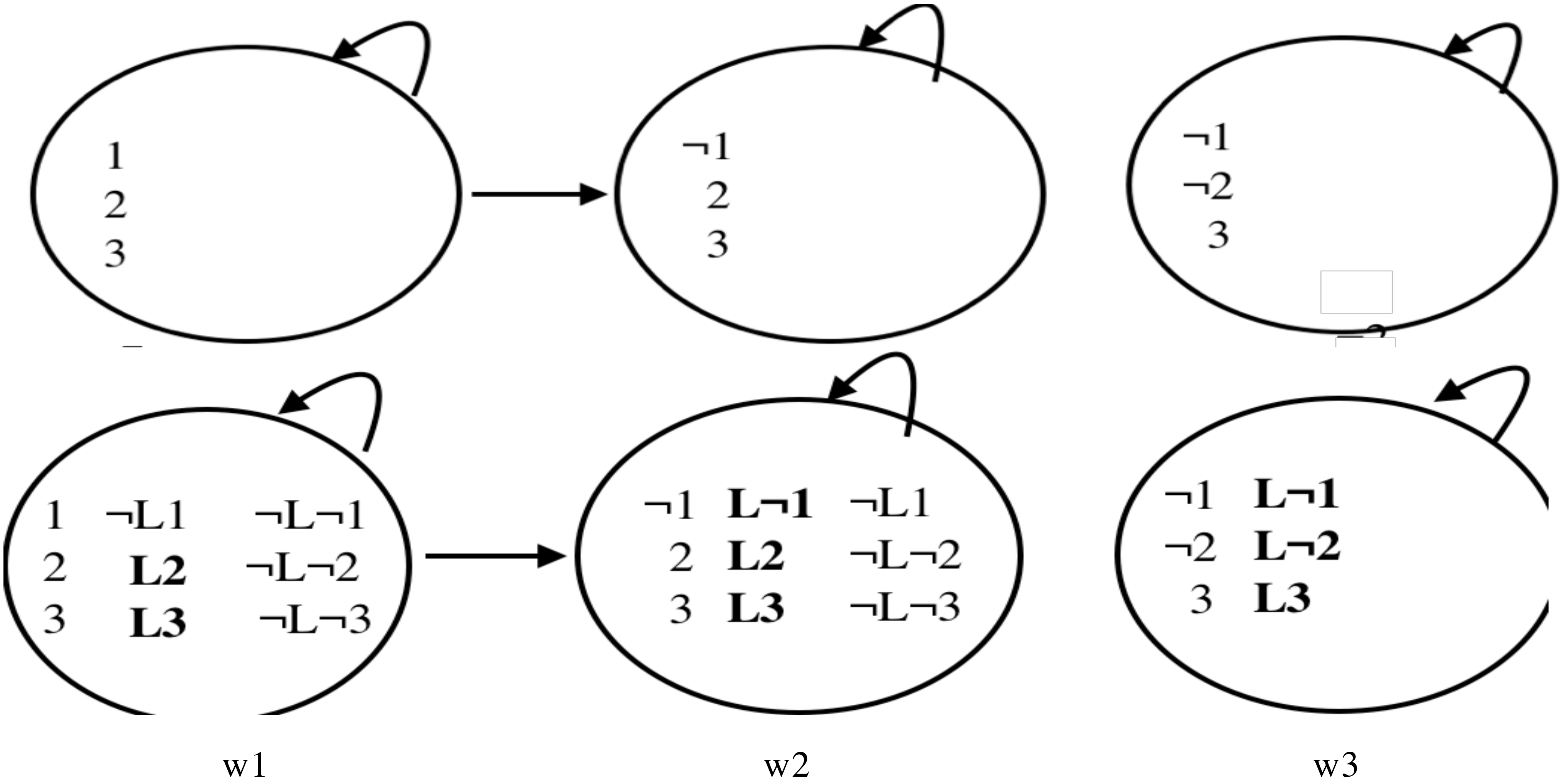
On a triché ! Ce n'est pas une transition asynchrone

SEMANTIQUE DES MONDES POSSIBLES DE KRIPKE (pour le calcul propositionnel)

- W = {w_1, …, w_n} est un ensemble de mondes possibles (pour les SDD l'ensemble des états).
- Dans chaque monde toutes les propositions classiques sont affectées (interprétation).
- R est une relation binaire sur W (ici w1Rw2 si w1 et w2 différent au plus par une proposition)
- Si on a l'axiome T, R est réflexive.
- Si w_1Rw alors w_2 est **accessible** à partir de w_1
- **Lp est vrai dans w, ssi p est vrai dans tous les mondes accessibles à partir de w**

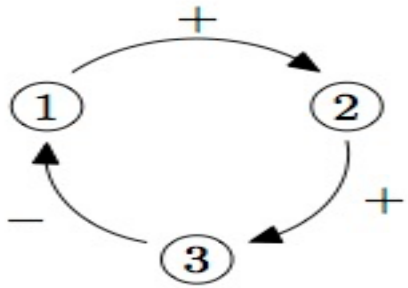


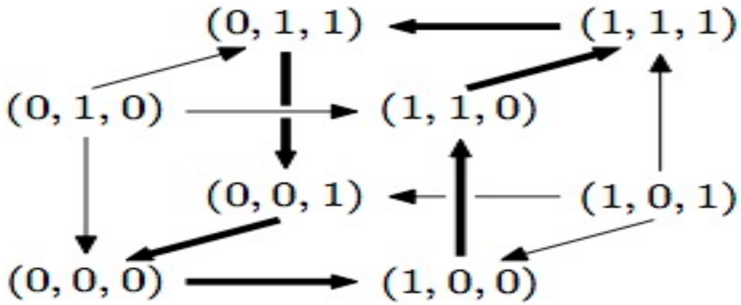
R = { (w1, w2), (w2, w3), (w1, w1), (w2, w2), (w3, w3),) }



Lp est vrai dans w, ssi p est vrai dans tous les mondes accessibles à partir de w

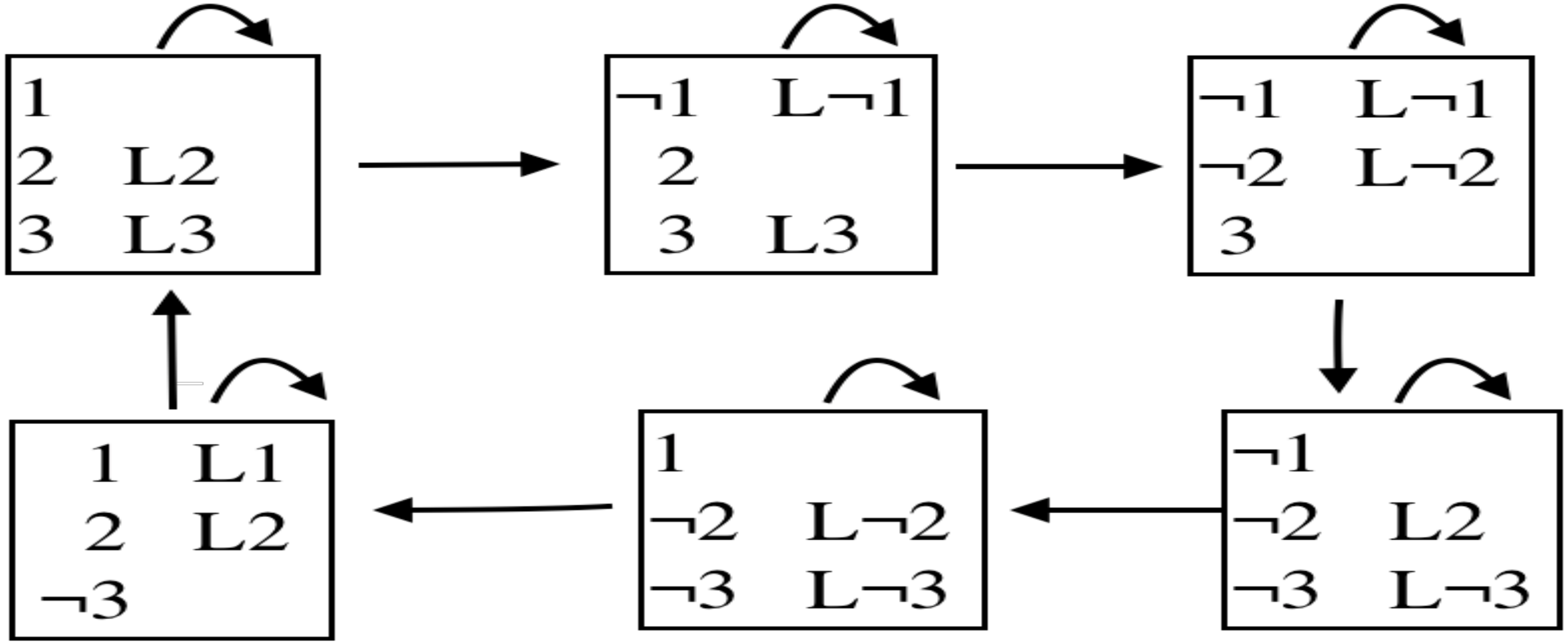
- Dans w1, on a L2 car 2 est vrai dans w1 et w2 (les mondes accessibles de w1)…
- w2 est de degré liberté 0, c'est un point fixe
- Si on ajoute une flèche de w2 vers w3, alors L2 devient ¬L2f : $\{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}^3$, f(x1, x2, f





F = {H1 ⟶ L2, H2 ⟶ L3, H3 ⟶ L¬1, H¬1 ⟶ L¬2, H¬2 ⟶ L¬3, H¬3 ⟶ L1}

6 extensions {(**L2,L3**), (**L¬1,L3**), (**L¬1,L¬2**), (**L2,L¬3**), (**L¬2,L¬3**), (**L1,L2**) }



Conclusion

- Les extensions fantômes sont utiles ☺

- Il y a du travail à faire.

- Le langage n'est pas limité aux $(Hp \longrightarrow Lp)$ on peut dire ce que l'on veut, par exemple :

$$Lp\ , \qquad \neg Lp, \qquad Lp \rightarrow Lq, \qquad (Hp \wedge Hq) \rightarrow Lr \ \text{(liaison)} \ldots$$

- Si on a un réseau incomplet on peut essayer de le compléter par abduction (expériences in-silico)

[1] P. Siegel, C. Schwind (1993) *Modal logic based theory for nonmonotonic reasoning*. Journal of Applied Non Classical Logic, vol 3 - n° 1/1993, P 73-92.

[2] C. Schwind, P. Siegel (1994) *A Modal Logic for Hypothesis Theory* Fundamenta Informaticae vol. 21, no. 1,2, pp. 89-101, 1994

[3] A. Doncescu, P. Siegel (2015). *DNA Double-Strand Break–Based Nonmonotonic Logic*, Chapter in Emerging Trends in Computer Science and Applied Computing . Elsevier, pp. 409-427, August 2015.

prochainement : Représentation des SDD booléens en logique des hypothèses