

Modélisation du Stockage du Dioxyde de Carbone dans les Forêts

Ferre Gabriel, Haykal Georges, Fert Lucas
Polytech Nice Sophia - MAM3 Analyse Numérique 2

5 Mai 2024

Résumé

Notre rapport présente l'étude, les démarches et les résolutions numériques suivant un modèle simplifié du cycle du carbone dans un environnement forestier. Pour cela, nous utilisons des système d'équations différentielles ordinaires pour traduire les échanges de carbone entre l'atmosphère, la forêt et le sol. Les différentes méthodes numériques (Euler explicite, Euler implicite, méthode du Trapèze) sont implémentées en Python et sont comparées. De plus, nous effectuons une analyse de sensibilité du modèle à ses paramètres pour tenter de comprendre leurs influences respectives sur la séquestration du carbone. Enfin, nous évoquons des pistes d'amélioration du modèle pour le rendre plus efficient et plus robuste face aux conditions réelle des séquestration du carbone.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Formulation Mathématique du Modèle | 2 |
| 2.1 | Variables d'état | 2 |
| 2.2 | Système d'Équations Différentielles | 2 |
| 2.3 | Analyse Théorique Préliminaire | 3 |
| 2.3.1 | Jacobien du système | 3 |
| 2.3.2 | Points d'équilibre | 3 |
| 3 | Résolution Numérique | 4 |
| 3.1 | Méthode d'Euler Explicite | 4 |
| 3.2 | Méthode d'Euler Implicite | 5 |
| 3.3 | Méthode du Trapèze (Runge-Kutta Implicite d'Ordre 2) | 5 |
| 4 | Analyse de Sensibilité aux Paramètres | 6 |
| 4.1 | Impact Théorique Attendu | 7 |
| 4.2 | Résultats Numériques de l'Analyse | 7 |
| 5 | Améliorations Possibles du Modèle | 9 |
| 6 | Conclusion | 10 |

1 Introduction

Aujourd'hui, les forêts jouent un rôle essentiel dans la régulation du climat mondial via le cycle de séquestration du carbone. En effet, elles absorbent le dioxyde de carbone (CO_2) de l'atmosphère grâce à la photosynthèse et le stockent sous forme de biomasse de part les troncs, les branches, les feuilles et la matière organique se situant dans le sol. Ainsi, comprendre et modéliser ces flux de carbone est essentiel pour déterminer la capacité actuelle et futures des forêts à influencer et à atténuer le changement climatique.

Dans le cadre de ce projet, nous étudions un modèle mathématique simplifié répartissant les échanges de carbone entre trois parties : l'atmosphère, les arbres et le sol. Ce modèle, s'inspire de travaux existants (à savoir : [1, 2, 3, 4, 5, 6]), et est volontairement simplifié nous permettant d'appliquer des méthodes d'analyse numérique vues en cours.

Le principal objectif est double ici :

1. Implémenter et comparer différentes méthodes numériques (explicites et implicites) possible pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (EDO) qui décrit le modèle.
2. Analyser la dynamique du système, et notamment la dynamique de séquestration du carbone, et sa dépendance aux différents paramètres biologiques et écologiques du modèle.

Notre rapport détaille alors l'élaboration mathématique du modèle, la démarche que nous avons suivie pour le résoudre numériquement le plus simplement et le plus précisément possible, puis montre l'analyse des résultats ainsi obtenus, et propose des possibilités d'amélioration du modèle mathématiquement et numériquement en partant du point de vue environnemental.

2 Formulation Mathématique du Modèle

2.1 Variables d'état

Le modèle suit l'évolution temporelle de la quantité de carbone dans trois réservoirs :

- $C_A(t)$: La quantité de carbone stockée dans l'atmosphère (au-dessus de la forêt du moins).
- $C_T(t)$: La quantité de carbone stockée dans les arbres.
- $C_S(t)$: La quantité de carbone stockée dans le sol.

Ces quantités sont supposément en tonnes de carbone).

2.2 Système d'Équations Différentielles

Les échanges de carbone entre ces réservoirs sont traduits par le système d'EDO suivant :

$$\frac{dC_A}{dt} = -S(C_T) + \beta C_T + \delta C_S \quad (1a)$$

$$\frac{dC_T}{dt} = S(C_T) - (\beta + \delta + \gamma)C_T \quad (1b)$$

$$\frac{dC_S}{dt} = (\gamma + \delta)C_T - \delta C_S \quad (1c)$$

où les termes représentent les flux suivants :

- $S(C_T) = \alpha C_T \left(1 - \frac{C_T}{K}\right)$: Taux de séquestration du carbone atmosphérique par les arbres via la photosynthèse. Proportionnel donc à la biomasse C_T lorsque celle-ci est faible, mais ralentit à mesure que C_T approche de la capacité K .
- α [temps⁻¹] : Taux de croissance de la biomasse.
- K [unité de carbone] : Capacité de stockage maximale de la forêt en carbone.
- βC_T : Taux de respiration des arbres, qui retournant du carbone vers l'atmosphère. β [temps⁻¹] est le taux de respiration par unité de carbone issu des arbres.

- γC_T : Taux de transfert de carbone des arbres vers le sol par ce qu'on appelle la litière (feuilles mortes, bois mort). γ [temps⁻¹] est le taux de mortalité/renouvellement contribuant à la matière organique du sol.
- δC_S : Taux de respiration du sol (décomposition de la matière organique), qui renvoie du carbone à l'atmosphère. δ [temps⁻¹] est le taux de décomposition par unité de carbone du sol.
- δC_T : Tel qu'écrit dans les équations (1b) et (1c), ce terme représente un transfert de carbone des arbres vers le sol, proportionnel à δ . Ceci est potentiellement ambiguë, mais s'ajoute au terme γC_T pour le transfert Arbres \rightarrow Sol.

Ainsi, le système peut s'écrire sous la forme vectorielle $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ avec $\mathbf{y}(t) = [C_A(t), C_T(t), C_S(t)]^T$.

2.3 Analyse Théorique Préliminaire

2.3.1 Jacobien du système

La Jacobienne de la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ par rapport à \mathbf{y} est nécessaire pour les méthodes implicites. Il est donné par $J_f(\mathbf{y}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right]_{i,j \in \{A,T,S\}}$. En notant $S'(C_T) = \frac{dS}{dC_T} = \alpha(1 - 2C_T/K)$, on obtient :

$$J_f(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -S'(C_T) + \beta & \delta \\ 0 & S'(C_T) - (\beta + \delta + \gamma) & 0 \\ 0 & \gamma + \delta & -\delta \end{pmatrix}$$

On remarque alors que la première colonne est nulle, ce qui indique que $dC_A/dt, dC_T/dt, dC_S/dt$ ne sont pas dépendant de C_A . Ce qui est cohérent avec le modèle dans lequel l'atmosphère considéré comme un réservoir dont la concentration en CO₂ n'influence pas directement les taux (sauf potentiellement α , cf. Section 5).

2.3.2 Points d'équilibre

Les points d'équilibre (ou états stationnaires) $\mathbf{y}^* = (C_A^*, C_T^*, C_S^*)$ sont atteints lorsque les dérivées temporelles sont nulles : $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$.

$$\text{— } \frac{dC_T}{dt} = 0 \implies C_T^* [\alpha(1 - C_T^*/K) - (\beta + \delta + \gamma)] = 0.$$

Deux solutions pour C_T^* :

$$1. C_T^* = 0 \text{ (équilibre trivial : cas où il n'y a pas de forêt).}$$

$$2. \alpha(1 - C_T^*/K) = \beta + \delta + \gamma \implies C_T^* = K \left(1 - \frac{\beta + \delta + \gamma}{\alpha} \right).$$

Cet équilibre non-trivial existe physiquement ($C_T^* > 0$) si $\alpha > \beta + \delta + \gamma$. Cette condition signifie que le taux de croissance de la forêt doit être supérieur à la somme des pertes des arbres (respiration, litière et autre transfert vers sol).

$$\text{— Si } C_T^* = 0, \text{ alors } \frac{dC_S}{dt} = 0 \implies -\delta C_S^* = 0, \text{ donc } C_S^* = 0. \text{ Et } \frac{dC_A}{dt} = 0 \implies 0 = 0 \text{ (pas de contrainte sur } C_A^*, \text{ la quantité atmosphérique peut être quelconque si la forêt n'existe pas, ou constante dans le cas où l'on considère un système fermé).}$$

$$\text{— Si } C_T^* = K \left(1 - \frac{\beta + \delta + \gamma}{\alpha} \right) > 0, \text{ alors : } \frac{dC_S}{dt} = 0 \implies C_S^* = \frac{\gamma + \delta}{\delta} C_T^*.$$

Alors, la quantité de carbone dans le sol à l'équilibre est donc proportionnelle à celle des arbres (ce qui est cohérent avec la réalité).

Et $\frac{dC_A}{dt} = 0 \implies -S(C_T^*) + \beta C_T^* + \delta C_S^* = 0$. Comme on a $S(C_T^*) = (\beta + \delta + \gamma)C_T^*$ à l'équilibre, alors $-(\beta + \delta + \gamma)C_T^* + \beta C_T^* + \delta \left(\frac{\gamma + \delta}{\delta} C_T^* \right) = 0$ et donc,

$$C_T^* (-\beta - \delta - \gamma + \beta + \gamma + \delta) = 0, \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

Cela signifie que l'équilibre non-trivial ($C_T^* > 0, C_S^* > 0$) peut exister pour n'importe quelle valeur de C_A^* . En pratique, dans un système fermé la valeur de C_A^* serait déterminée par $C_A^* = C_{total} - C_T^* - C_S^*$. Si le modèle ne considère que les quantités sortantes de C_A sans

quantités entrantes externe, C_A diminuerait jusqu'à atteindre l'équilibre (ou une valeur nulle si C_{total} est trop faible).

La question de l'existence d'un équilibre stable avec $C_T > 0$ et $C_S > 0$ est importante pour la séquestration à long terme.

3 Résolution Numérique

Pour résoudre le système d'EDOs (1), nous avons implémenté plusieurs méthodes numériques en Python à l'aide des bibliothèques NumPy et SciPy.

3.1 Méthode d'Euler Explicite

Premièrement, la méthode la plus simple est celle d'Euler Explicite :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$$

où h est le pas de temps, $\mathbf{y}_n \approx \mathbf{y}(t_n)$ et $t_n = t_0 + nh$.

Avantages : Simple à implémenter et demande peu de calcul par pas.

Inconvénients : Stabilité qui n'est pas systématique. Pour des systèmes où les échelles de temps caractéristiques sont très différentes, ou pour garantir la stabilité, le pas de temps h doit être très petit, ce qui peut rendre la méthode inutile pour une quelconque résolution numérique.

Résultats Numériques : En utilisant les paramètres décrit dans l'Annexe et un pas h relativement grand ($h = 2.5$), nous observons une instabilité rapide de la solution (à partir de $t = 15$ ici), illustrant l'instabilité de la méthode. Avec un pas plus petit ($h = 0.5$), la méthode converge.

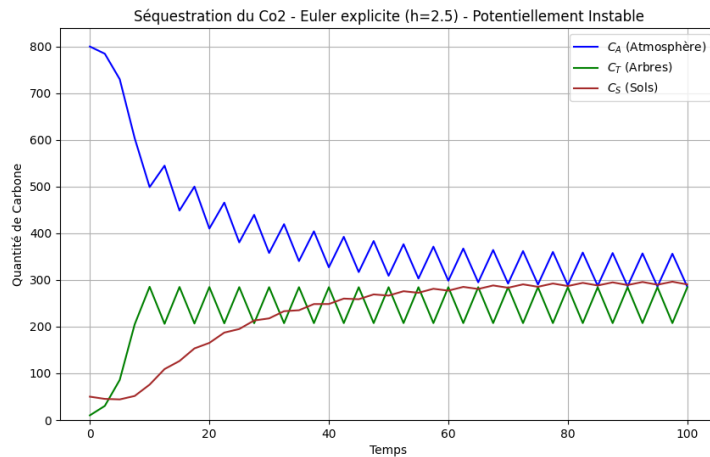


FIGURE 1 – Instabilité de la méthode d'Euler Explicite avec un pas de temps $h = 2.5$.

Cette limitation nous motive à utiliser des méthodes implicites, généralement plus robustes en termes de stabilité.

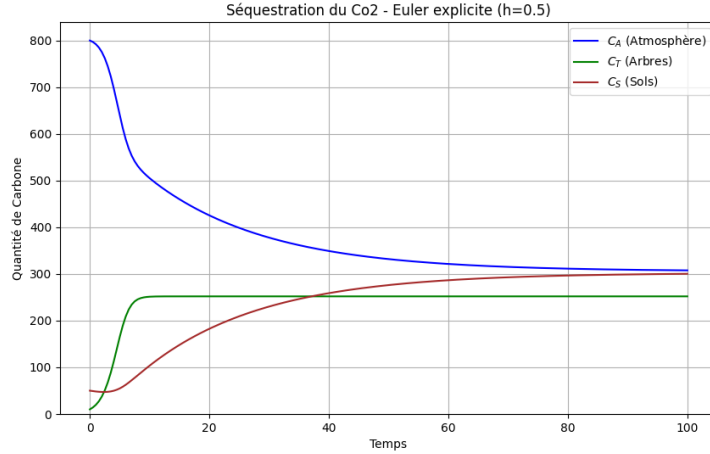


FIGURE 2 – Solution obtenue par Euler Explicite avec un pas de temps $h = 0.5$.

3.2 Méthode d'Euler Implicite

La méthode d'Euler Implicite est définie par :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$$

À chaque pas de temps, il faut résoudre cette équation pour trouver \mathbf{y}_{n+1} . Nous réécrivons l'équation comme $\mathbf{G}(\mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n - h\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{0}$. Ce système est résolu numériquement à l'aide d'une méthode de type Newton, qui requiert le Jacobien de \mathbf{G} par rapport à \mathbf{y}_{n+1} :

$$J_G(\mathbf{y}_{n+1}) = I - hJ_f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$$

où I est la matrice identité et J_f est le Jacobien du système original. Nous utilisons la fonction 'scipy.optimize.root' en python pour cette résolution.

Avantages : Toujours stable pour les systèmes linéaires, et généralement très stable pour les systèmes non linéaires, y compris les systèmes avec des échelles de temps très différentes. Cela permet donc d'utiliser des pas de temps h beaucoup plus grands qu'Euler Explicite.

Inconvénients : Plus coûteuse en calcul par pas, car elle nécessite la résolution d'un système non linéaire (impliquant souvent l'évaluation et l'inversion de la jacobienne). Aussi, l'implémentation est plus complexe.

Résultats Numériques : La méthode d'Euler Implicite converge sans problème avec un pas $h = 1.0$, alors que Euler Explicite peut diverger. L'observation graphique montre une diminution

initiale de C_A au profit de C_T et de C_S . Le carbone dans les arbres (C_T) augmente alors rapidement puis semble se trouver à l'équilibre, alors que le carbone dans le sol (C_S) augmente plus lentement mais en continue sur la période simulée. La quantité totale de carbone $C_A + C_T + C_S$ reste alors constante puisqu'on considère cela comme un système fermé.

3.3 Méthode du Trapèze (Runge-Kutta Implicite d'Ordre 2)

Par ailleurs, dans l'objectif d'améliorer la précision tout en conservant une bonne stabilité, nous avons souhaité implémenter la méthode du Trapèze, qui est un exemple simple de méthode

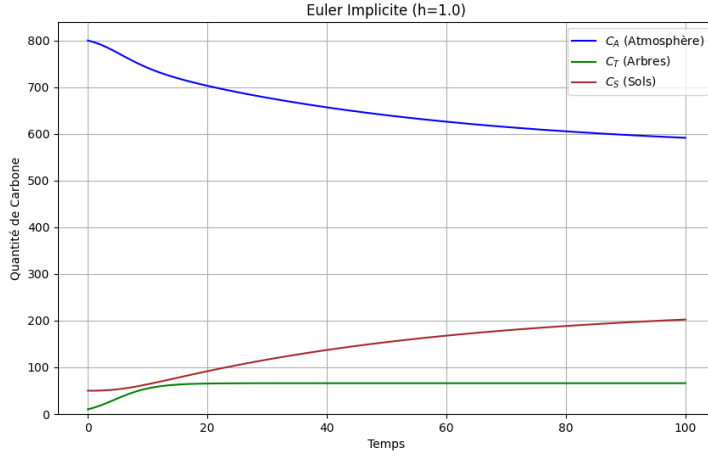


FIGURE 3 – Solution obtenue par Euler Implicite avec $h = 1.0$. Les paramètres sont donnés en Annexe.

de Runge-Kutta implicite. Elle est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} (\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}))$$

Comme Euler Implicite, cette méthode nécessite de résoudre un système non linéaire à chaque pas pour \mathbf{y}_{n+1} . L'équation à résoudre est $\mathbf{G}(\mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n - \frac{h}{2}\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) - \frac{h}{2}\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{0}$. Le Jacobien de \mathbf{G} est :

$$J_G(\mathbf{y}_{n+1}) = I - \frac{h}{2} J_f(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$$

Avantages : On a une précision d'ordre 2, ce qui est meilleur que les méthodes d'Euler. Également stable, et présentant un bon compromis entre précision, stabilité et coût de calcul par rapport à des méthodes d'ordre supérieur.

Inconvénients : Similaire à Euler Implicite, elle requiert la résolution d'un système non linéaire à chaque pas, ce qui la rend plus coûteuse qu'une méthode explicite. Par ailleurs, la complexité d'implémentation est comparable à celle d'Euler Implicite.

Résultats Numériques : La méthode du Trapèze a été appliquée avec $h = 1.0$. Les résultats sont visuellement similaires à ceux d'Euler Implicite, mais sont en théorie plus précis. Une comparaison quantitative à $t = T$ montre une légère différence entre les deux méthodes, suggérant l'impact de l'ordre supérieur du Trapèze par rapport à Euler Implicite (comme on le peut le voir sur le graphique ci-dessous).

Choix de la méthode implicite : Pour l'analyse de sensibilité suivante, nous privilégions une méthode implicite (Euler Implicite ou Trapèze) pour sa fiabilité en fonction de h , permettant d'utiliser un pas de temps (ici $h = 0.5$) raisonnable sans risque de divergence numérique. Dans l'idéal si on souhaite une meilleure précision on peut utiliser la méthode du Trapèze.

4 Analyse de Sensibilité aux Paramètres

Dans cette partie, notre objectif est de comprendre comment une variation d'un paramètre $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, K)$ influence la dynamique de la séquestration du carbone, et en particulier les capacités

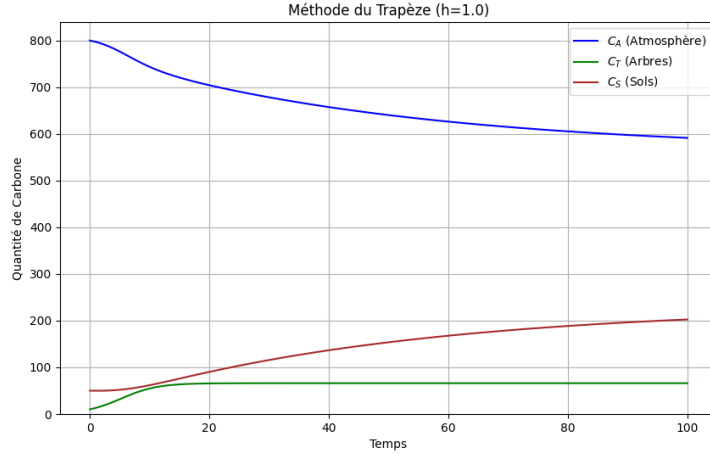


FIGURE 4 – Solution obtenue par la méthode du Trapèze avec $h = 1.0$.

stockées dans les arbres (C_T) et le sol (C_S). Pour cela, nous faisons varier chaque paramètre autour de sa valeur de référence (voir Annexe), en gardant les autres fixes, et observons les trajectoires simulées à l'aide de la méthode d'Euler Implicite.

4.1 Impact Théorique Attendu

- α (Taux de croissance) : L'augmentation de α devrait accélérer la croissance de C_T et augmenter le niveau d'équilibre C_T^* (et donc C_S^*), favorisant la séquestration.
- K (Capacité portante) : L'augmentation de K permet à priori à C_T et C_S d'accéder à des niveaux d'équilibre plus élevés, en augmentant ainsi la séquestration totale.
- β (Respiration arbres \rightarrow atm.) : L'augmentation de β représente alors une perte accrue de capacité de stockage de carbone pour les arbres. Cela devrait réduire C_T^* et C_S^* , ce qui défavorise alors la séquestration.
- γ (Litière arbres \rightarrow sol) : L'augmentation de γ permet à priori de transférer plus de carbone des arbres vers le sol. Cela aurait donc pour conséquence de diminuer C_T^* mais d'augmenter C_S^* .
- δ (Respiration sol \rightarrow atm. ET transfert arbres \rightarrow sol) : C'est le paramètre le plus complexe à interpréter à l'avance. L'augmentation de δ augmente la perte de carbone du sol vers l'atmosphère ($-\delta C_S$), ce qui réduit C_S^* . Dans le même temps, il augmente le transfert des arbres vers le sol ($+\delta C_T$ dans dC_S/dt) et la perte des arbres ($-\delta C_T$ dans dC_T/dt). L'effet net sur C_S^* et C_T^* est difficile à prévoir puisque cela dépend aussi des autres paramètres. Dans l'idée, on s'attend à ce qu'une augmentation de δ réduise la séquestration nette en augmentant les pertes respiratoires du sol et en réduisant le stock dans les arbres.

4.2 Résultats Numériques de l'Analyse

Les simulations confirment globalement les impacts attendus. *Observation pour α* : Comme attendu, des valeurs plus élevées de α mènent à une croissance plus rapide et à des niveaux de carbone plus élevés dans les arbres et le sol. *Observation pour K* : Augmenter K permet d'atteindre des stocks de carbone significativement plus élevés à l'équilibre, ce qui confirme bien son rôle de limite supérieure pour la biomasse. *Observation pour β* : Une respiration accrue des arbres (augmentation de β) réduit fortement les stocks de carbone dans les arbres et par

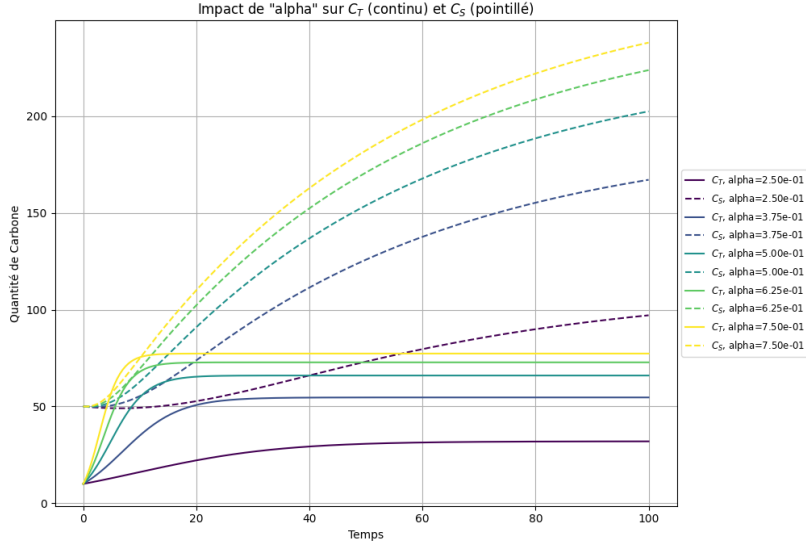


FIGURE 5 – Impact de la variation de α sur C_T (continu) et C_S (pointillé).

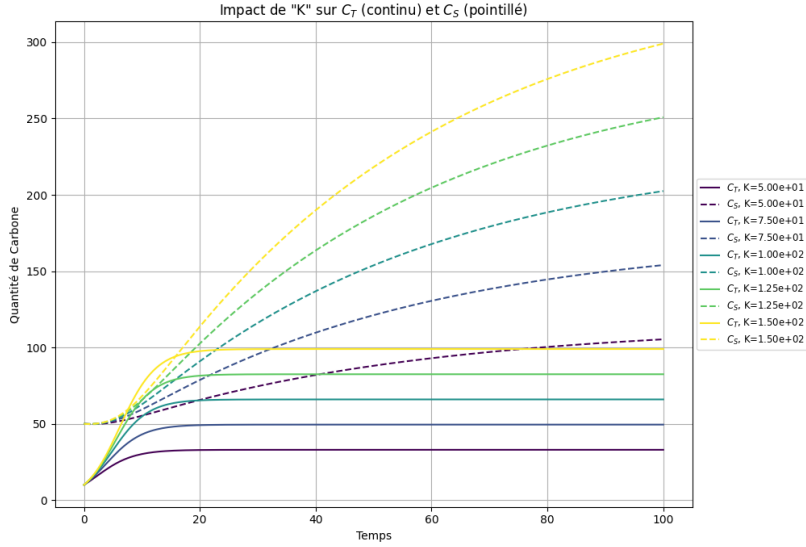


FIGURE 6 – Impact de la variation de K sur C_T (continu) et C_S (pointillé).

conséquent, dans le sol. *Observation pour γ* : Augmenter le taux de litière γ diminue le carbone stocké dans les arbres mais augmente celui stocké dans le sol. L'effet sur $C_T + C_S$ semble modéré finalement. *Observation pour δ* : On a bien l'augmentation de δ qui réduit le carbone stocké

dans les arbres (C_T) en raison du terme $-\delta C_T$. Elle a un effet plus complexe sur C_S : la quantité de départ de $(\gamma + \delta)C_T$ augmente avec δ (si C_T ne baisse pas trop vite) mais la perte $-\delta C_S$ augmente aussi. Numériquement, on observe une diminution de C_T et une diminution de C_S .

Conclusion de l'analyse : Les paramètres α (croissance) et K (capacité) sont clés pour augmenter la séquestration, tandis que β (respiration arbres) et δ (respiration sol et autres pertes/transferts) la diminuent. Le paramètre γ (litière) module la répartition entre arbres et sol. La quantification précise de ces paramètres est essentielle pour des prédictions fiables. L'ambiguïté du paramètre δ mériterait plus d'investigation pour une meilleure interprétation écologique.

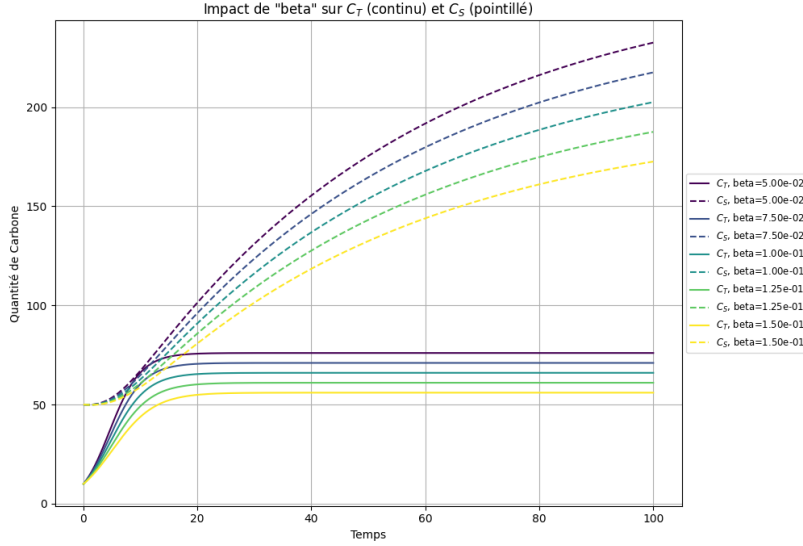


FIGURE 7 – Impact de la variation de β sur C_T (continu) et C_S (pointillé).

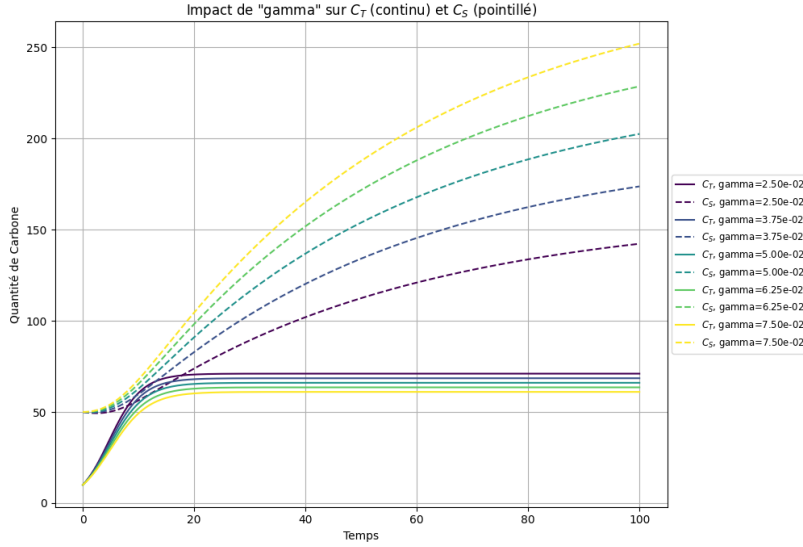


FIGURE 8 – Impact de la variation de γ sur C_T (continu) et C_S (pointillé).

5 Améliorations Possibles du Modèle

Cependant, une fois cela fait on remarque que le modèle actuel, bien qu'instructif, est une simplification de la réalité. Plusieurs améliorations pourraient être envisagées pour le rendre plus réaliste :

1. **Dépendance Environnementale** : Rendre les paramètres (en particulier α , β , δ) dépendants de facteurs climatiques comme la température, les précipitations, et le rayonnement solaire. Par exemple, α pourrait suivre une courbe en cloche avec la température, et δ augmenter avec la température et l'humidité, ce qui est cohérent puisque les capacités de stockages de l'atmosphères changes en fonctions de ces paramètres. Cela obligerait aussi à considérer les dynamique saisonnière.
2. **Effet de Fertilisation par le CO_2** : Le taux de photosynthèse S dépend de la concentration de CO_2 atmosphérique (C_A). On pourrait modifier S en $S(C_A, C_T) = \alpha' f(C_A) C_T (1 - C_T/K)$, où $f(C_A)$ est une fonction croissante (par exemple, une fonction logarithmique)

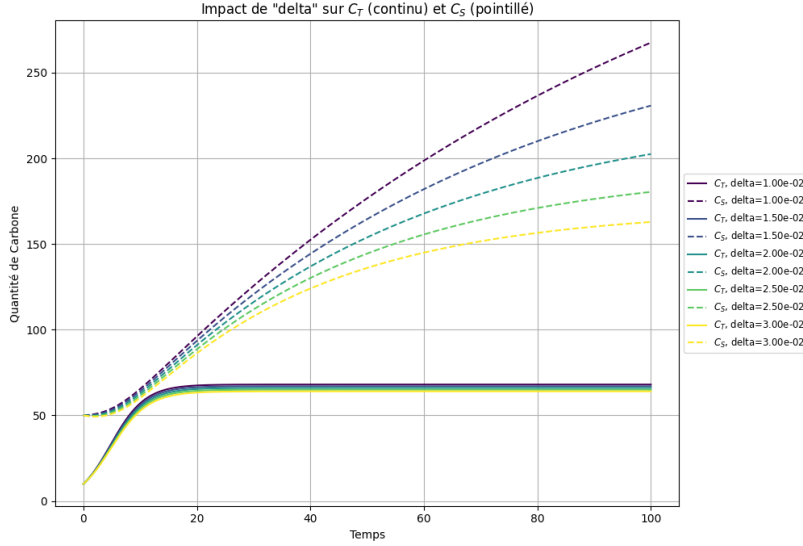


FIGURE 9 – Impact de la variation de δ sur C_T (continu) et C_S (pointillé).

reflétant la stimulation de la photosynthèse par un C_A plus élevé, jusqu'à saturation.

3. **Compartiments du Sol Détaillés :** Diviser C_S en plusieurs bassins avec des temps de stockages différents : litière fraîche, matière organique active, et humus. Chaque type de sol aurait ses propres taux de décomposition (δ_i). Cela permettrait de mieux représenter le stockage à long terme dans les sols.
4. **Structure d'Âge de la Forêt :** Une jeune forêt séquestre plus activement qu'une forêt mature. Introduire des classes d'âge pour les arbres, ou rendre les paramètres α, β, γ dépendants de l'âge de la forêt ou de la biomasse C_T elle-même pour refléter le passage d'une phase de croissance rapide à une phase de captage plus lent.
5. **Prise en Compte des Perturbations :** Intégrer les incendies, les coupes forestières, les attaques d'insectes, les inondations, qui provoquent des pertes rapides de C_T et C_S vers C_A .
6. **Limitations par les Nutriments :** Coupler le cycle du carbone avec celui de nutriments comme l'azote (N) ou le phosphore (P). La croissance (α) et la décomposition (δ) dépendraient alors aussi de la disponibilité de ces nutriments.

Chacune de ces améliorations augmenterait la complexité du modèle et nécessiterait des données supplémentaires pour la paramétrisation et la validation, mais permettrait certainement d'avoir un modèle plus fidèle à la réalité.

6 Conclusion

Ainsi, ce projet nous a permis d'explorer la modélisation d'un cycle du carbone entre une forêt et son environnement à l'aide de différentes méthodes de résolutions numériques. L'implémentation de différentes méthodes numériques (Euler Explicite, Euler Implicite, Trapèze) a permis de mettre en évidence l'importance du choix de la méthode pour assurer la cohérence, la stabilité et la précision des solutions, en particulier la constance dans les résultats des méthodes implicites pour ce type de problème avec des échelles de temps variables.

De plus, l'analyse de sensibilité a montré l'influence des différents paramètres biologiques et écologiques ($\alpha, K, \beta, \gamma, \delta$) sur la capacité de l'écosystème à séquestrer le carbone. En sachant que, comprendre ces dépendances est essentiel pour évaluer le rôle des forêts dans le contexte du

changement climatique. Durant notre analyse on a également souligné une potentielle ambiguïté dans la définition du paramètre δ du modèle fourni.

Enfin, nous avons identifié plusieurs pistes pour améliorer le modèle en le rendant plus réaliste, notamment en intégrant des dépendances écologiques et environnementales, des processus plus détaillés pour le sol, ou l'effet des perturbations environnementales diverses. Ces cycles plus complexes permettraient de se rapprocher de la complexité des écosystèmes réels, ouvrant la voie à des études plus approfondies sur la dynamique du carbone stocké par les espaces boisés. Ce travail constitue une base intéressante pour de futures investigations utilisant des modèles plus élaborés et des techniques numériques plus avancées.

Annexe : Paramètres et Conditions Initiales de Référence

Les simulations numériques ont été réalisées avec les valeurs de référence suivantes :

Paramètres pour Euler Explicite :

- $\alpha = 1$ [temps⁻¹]
- $\beta = 0.1$ [temps⁻¹]
- $\gamma = 0.01$ [temps⁻¹]
- $\delta = 0.05$ [temps⁻¹]
- $K = 300.0$ [unité de carbone]

Paramètres par défaut pour toutes les méthodes :

- $\alpha = 0.5$ [temps⁻¹]
- $\beta = 0.1$ [temps⁻¹]
- $\gamma = 0.05$ [temps⁻¹]
- $\delta = 0.02$ [temps⁻¹]
- $K = 100.0$ [unité de carbone]

Conditions Initiales :

- $C_A(0) = 800.0$ [unité de Co₂]
- $C_T(0) = 10.0$ [unité de Co₂]
- $C_S(0) = 50.0$ [unité de Co₂]

Intervalle de Temps :

- $t \in [0, 100]$ [unité de temps]

Annexe : Repartition et temps de travail

Nous avons initialement coder chacun de notre côté en s'entraîdant si nécessaire. Lucas a fait le code initial d'euler explicite (temps : environ 3h), Gabriel a fait le code initial d'euler explicite (temps : environ 3h), Georges a fait le code initial pour la méthode du trapèze et l'étude de la sensibilité des paramètres (temps : environ 9h). Puis, on a mis cela en forme puis sous un seul programme python, Gabriel s'en est occupé (temps : environ 6h). Lucas fait la première ébauche du rapport (temps : environ 6h). Puis on a corrigé et finaliser le rapport ensemble (temps : environ 5h).

Références

- [1] Chapin, F. S., Matson, P. A., and Mooney, H. A. (2011). *Principles of Terrestrial Ecosystem Ecology*. Springer, 2nd edition.
- [2] Friedlingstein, P., Cox, P., Betts, R., et al. (2006). Climate-carbon cycle feedback analysis : Results from the C4MIP model intercomparison. *Journal of Climate*, 19(14) :3337–3353.
- [3] Jenkinson, D. S. and Rayner, J. H. (1977). The turnover of organic matter in soil. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences*, 281(980) :41–49.
- [4] Manzoni, S. and Porporato, A. (2009). Soil carbon and nitrogen mineralization : Theory and models across scales. *Soil Biology Biochemistry*, 41(7) :1355–1379.
- [5] Parton, W. J., Schimel, D. S., Cole, C. V., and Ojima, D. S. (1987). Analysis of factors controlling soil organic matter levels in great plains grasslands. *Soil Science Society of America Journal*, 51(5) :1173–1179.

- [6] Sitch, S., Smith, B., Prentice, I. C., et al. (2003). Evaluation of ecosystem dynamics, plant geography, and terrestrial carbon cycling in the LPJ dynamic global vegetation model. *Global Change Biology*, 9(2) :161–185.