

第9章中弦振动问题的 $Matlab$ 求解

童话 PB18000081

摘要

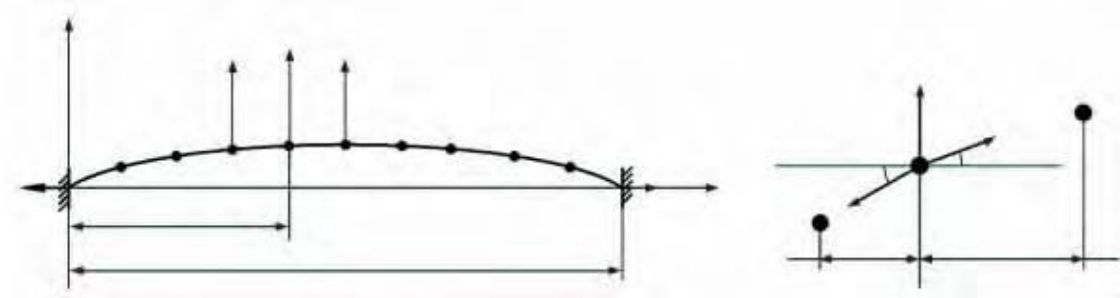
首先，我建立了张紧弦的物理模型。使用 $MATLAB$ 根据边界及初始条件，用数值计算的方法计算求得了定解条件下弦 $0-5s$ 的解。最终分析得出：数值计算的结果和理论分离变量的解十分吻合，证明 $MATLAB$ 具有较好的稳定性和精度。

引言

弦振动在振动理论这门学科中有着很广泛的应用，无论是斜拉桥上的钢丝，旅游景点观光缆车的缆绳都离不开它的身影。弦振动问题考虑弦振动模型方程的初值和边值问题，理论解可以通过分离变量法求得。但对于复杂的问题，通过数值方法的求解有时则更为高效简便，同时也可以得到与实际问题的基本相符的数值解。本文借助 $MATLAB$ 进行边界条件和参数设置，利用有限元把原问题转化为变分问题，得到弦振动问题的数值解，并与理论解进行比较，以图像的形式展示我的比较结果。

模型

如下图所示，弦是一个多自由度的振动系统。把弦分为 n 段，以 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示每段的质量。每段之间受拉力 T 作用。我们研究第 i 个质点 m_i 偏离平衡位置的位移 y_i 。



假设各质点的位移很小， F_i 为各质点上的作用力，由牛二定律，质点横向振动的方程为：

$$m_i \ddot{y}_i = T \sin \theta_i - T \sin \theta_{i-1} + F_i$$

根据近似有：

$$\sin \theta_i \approx \tan \theta_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\sin \theta_{i-1} \approx \tan \theta_{i-1} = \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\text{因此 } m_i \ddot{y}_i = T \Delta \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) + F_i$$

$$m_i \frac{\ddot{y}_i}{\Delta x_i} = T \frac{\Delta}{\Delta x_i} \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) + \frac{F_i}{\Delta x_i}$$

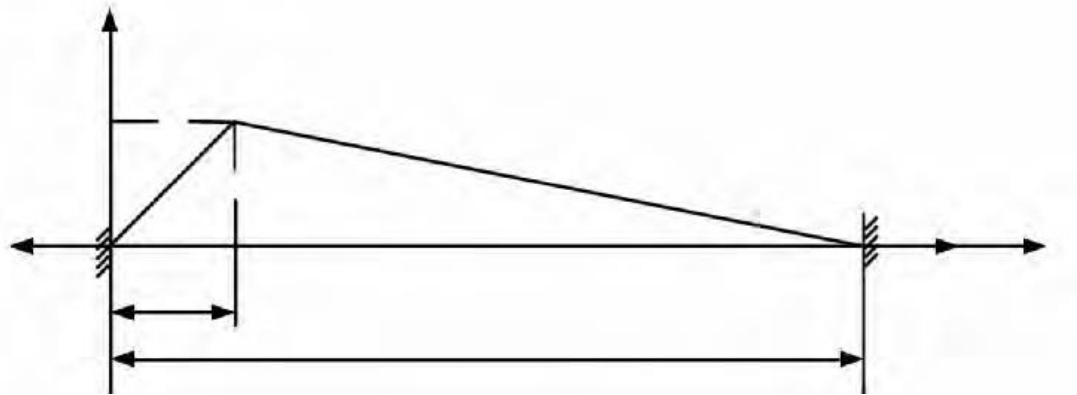
n 趋于无穷时过渡到黎曼可积的情况，上式变为 $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p(x, t)$ ，边界条件是两边固定 $y(0, t) = y(l, t) = 0$

我们考虑最简单的无阻尼自由振动 $p(x, t) = 0$ 的情况，此时 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 是沿弦长度方向传播的速度。

例子

下图所示为弦的初始位置。长度为 l 的弦两段受到弦紧力 T 的作用。在距离左端 $\frac{l}{6}$ 的地方拨动弦离开平衡位置 h 的距离后静止释放，不考虑阻尼。



由此得知初始条件是：

$$y(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{6h}{l}x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{6} \\ \frac{6h}{5l}(l-x), & \frac{l}{6} \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0$$

理论解

由分离变量法，设 $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{l}x)[A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t)]$

由 *Fourier* 展开得：

$$A = 0, B = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\frac{n\pi x}{l}) dx = \frac{72h}{5n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{6}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{故理论解为 } y(x, t) = \frac{72h}{5\pi^2} \left[\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{l} \cos\left(\frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right) + \frac{0.866}{4} \sin \frac{2\pi x}{l} \cos\left(\frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right) + \dots \right]$$

数值解

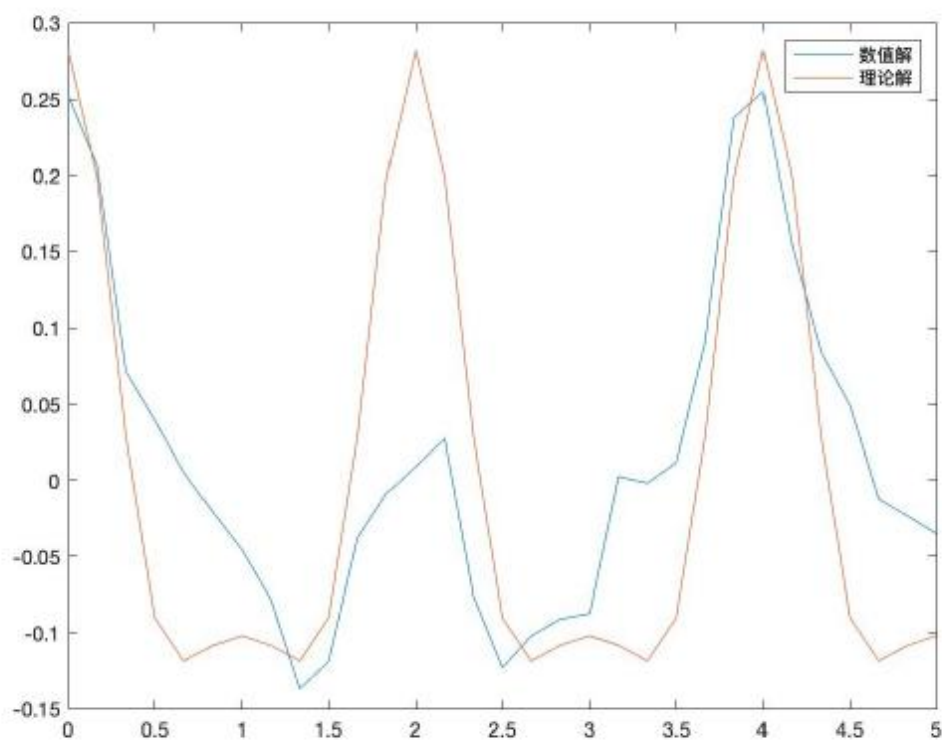
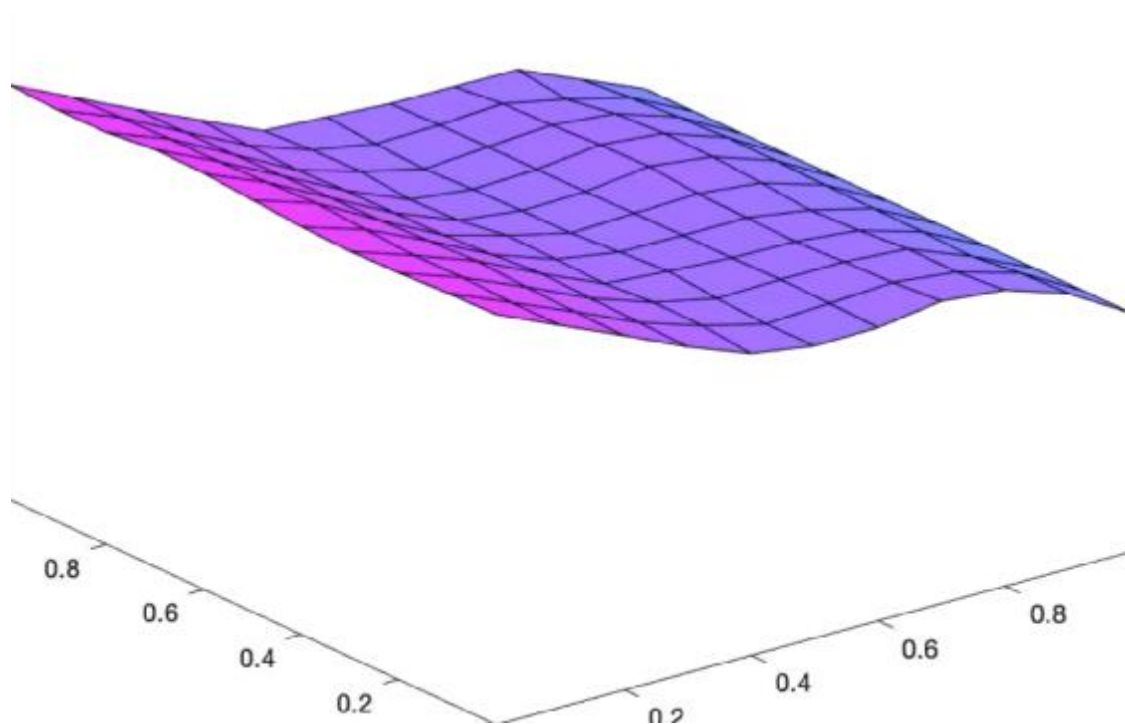
在 *MATLAB* 的偏微分工具箱里使用二维细分平面并假设沿某一个坐标上振动形式相同。取参数 $h = 0.3, l = 1, c = 1$ 。软件代码在 *m* 文件中给出如下。

```

h=0.3;
l=1.0;
c=1;a=0;f=0;d=1;
g='squareg'
[p,e,t]=initmesh(g);
[p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t);
x=p(1,:);
y=p(2,:);
u0=6*h/l*x.*(x>=0&x<=1/6)+6*h/l/5*(1-x).*(x>1/6&x<=1);
ut0=0;
n=31;
tlist=linspace(0,5,n);
uu=hyperbolic(u0,ut0,tlist,'squareb3',p,e,t,1,0,0,1);
pdeplot(p,e,t,'xydata',uu,'zdata',uu,'mesh','off')
delta=0:0.05:1;
[uxy,tn,a2,a3]=tri2grid(p,t,uu(:,1),delta,delta);
gp=[tn;a2;a3];
np=newplot;hf=get(np,'parent');
M=moviein(n,hf);
umax=max(max(uu));
umin=min(min(uu));
for i=1:n,
pdeplot(p,e,t,'xydata',uu(:,i),'zdata',uu(:,i),...
'mesh','on','xygrid','on','gridparam',gp,...
'colorbar','off','zstyle','continuous');
axis([0 1 0 1 umin umax]);caxis([umin umax]);
M(:,i)=getframe;
end
out = VideoWriter('out.avi');
out.FrameRate = 10;
open(out);
writeVideo(out,M);
close(out);
range=0.001;
temp=find(p(1,:) - 0.3 < range & p(1,:) - 0.3 > -range);
temp=temp(1);
x2=0.3;
t=tlist;
y2=72*h/5/(pi^2)*(1/2*sin(pi*x2/l)+cos(c*pi/l*t)+0.866/4*sin(2*pi*x2/l)+cos(2*c*pi/l*t)
+1/9*sin(3*pi*x2/l)+cos(3*c*pi/l*t));
figure(3);
plot(t,uu(temp,:),t,y2)
legend('数值解','理论解')

```

分为两部分，第一部分是数值计算（到 $range = 0.001$ 之前），第二部分是理论计算的结果和数值计算结果的比较。调用的子函数中给定方程的求解区域是 $[0, 1, 0, 1]$ 。程序显示弦在 $0 - 5s$ 内的波动动画（动画 avi 文件附在压缩包中）。弦上各质点的运动频率相同。在 $x = 0.3$ 处的两解的比较如下所示。



总结

1. 研究了弦的小振动。在数学模型的基础上利用细分网格把弦振动的偏微分方程定解问题转化为变分问题求解。
2. 弦的微分方程是一维的波动方程，利用多自由度系统的模型可以得到较精确的解。
3. 得到的数值解和解析解除了在平衡点和最大偏离位置有误差外误差基本稳定。
4. 同时，该研究方法也可用在杆件的纵向振动分析上。

