# Матан 13

Igor Engel

## 1

**Теорема 1.1** (Теорема барроу (с прошлой лекции))**.**

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f.$$

$$\Phi' = f.$$

**Лемма 1.1.1.**

$$\Psi' = -f.$$

*Доказательство.*

$$\Psi(x) = \left(\int\limits_a^b f - \Phi(x)\right)' = -\Phi'(x) = -f(x).$$

□

**Лемма 1.1.2.**

$$f \in C\left<a, b\right> \implies \exists F \quad F' = f.$$

*Доказательство.* Возьмём $c \in \left<a, b\right>$

$$F(x) = \begin{cases} \int\limits_c^x f & x \geq c \\ -\int\limits_x^c f & x < c \end{cases}$$

Рассмотрим $x > c$:

$$F'(x) = \left(\int\limits_c^x f\right)' = f(x).$$

При $x < c$:

$$F'(x) = \left(-\int\limits_x^c f\right)' = -(-f) = f(x).$$

При $x = c$:

$$F'_+(x) = \left(\int\limits_c^x f\right)' = f(x).$$

$$F'_-(x) = \left(-\int\limits_x^c f\right)' = f(x).$$

$\square$

**Теорема 1.2** (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть $f \in C\,[a, b]$. $F = \int f$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) =: \left. F \right|_a^b.$$

*Доказательство.* Все первообразные отличаются только на константу. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$.

$$\Phi(a) = F(a) + C = 0.$$

$$\Phi(b) = F(b) + C = \int\limits_a^b f.$$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f - 0 = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$ $\square$

**Лемма 1.2.1** (Линейность опр. инт.). $f, g \in C[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда:

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g.$$

*Доказательство.*

$$F = \int f.$$

$$G = \int g.$$

$$\alpha F + \beta G = \int \alpha f + \beta g.$$

$$\begin{aligned}(\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a) &= \alpha F(b) - \alpha F(a) + \beta G(b) - \beta G(a) \\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(F(b) - F(a)) \\ &= \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g\end{aligned}$$ $\square$

**Лемма 1.2.2** (Интегрирование по частям для опр. инт.)**.** $f, g \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g.$$

*Доказательство.*

$$H = \int f'g.$$

$$fg - H = \int fg'.$$

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b fg' &= (fg-H)(b) - (fg-H)(a)\\ &= (fg)(b) - (fg)(a) - H(b) + H(a)\\ &= fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g\end{aligned}$$

□

**Определение 1.1.** Если $a > b$:

$$\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f.$$

**Лемма 1.2.3** (Замена переменной в опр. инт)**.** $f \in C\langle a,b\rangle$, $\varphi \in C^1\langle c,d\rangle$, $\varphi : \langle c,d\rangle \mapsto \langle a,b\rangle$, $p, q \in \langle c,d\rangle$. Тогда:

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

*Доказательство.*

$$F = \int f(x)dx.$$

$$F \circ \varphi = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f.$$

□

## 2 Продолжение формулы интегрирования по частям

**Определение 2.1.**

$$W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

**Лемма 2.1.1.** Интегралы действительно равны.

*Доказательство.*

$$\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^n(x).$$

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\varphi'(x) = -1.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^n(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.$$ □

**Лемма 2.1.2.**

$$W_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$W_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$
\begin{aligned}
W_n &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\
&= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \cdot (\cos)'(x) dx \\
&= -\left(\sin^{n-1}\cos)(x)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1})'(x)\cos(x) \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx \\
&= (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x - \sin^n x dx\right) \\
&= (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right) \\
&= (n-1)\left(W_{n-2} - W_n\right) \\
&= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \\
nW_n &= (n-1)W_{n-2} \\
W_n &= \frac{n-1}{n} W_{n-2}
\end{aligned}
$$

**Лемма 2.1.3.**

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

**Лемма 2.1.4** (Формула Валлиса)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

*Доказательство.*

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin^{2n+2} \le \sin^{2n+1} \le \sin^{2n}.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}.$$

$$W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}.$$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} \to \frac{\pi}{2}.$$

□

**Лемма 2.1.5.**

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

*Доказательство.*

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\frac{((2n)!!)^2}{4^n}} = 4^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim 4^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim 4^n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

□

**Определение 2.2** (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**.** $f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle$, $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

*Доказательство.* База: $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t) dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0).$$

Переход:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}(x).$$

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)' dt\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left(\left(-f^{(n+1)}(t)\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} - \int\limits_{x_0}^{x} -f^{(n+2)}(t)\cdot\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)dt\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} + \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}dt\right)\\
&= \frac{(x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)(x_0)}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)\cdot(x-t)^{n+1}dt \qquad \square
\end{aligned}
$$

**Теорема 2.1** (Теорема Ламберта)**.** $\pi$ и $\pi^2$ - иррацональны.

*Доказательство.*

$$H_j := \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x dx.$$

$$H_1 = 1.$$

$$H_2 = 2.$$

$$H_j = (4j-1)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}.$$

$$P_j(x) = (4j-1)P_{j-1} + xP_{j-2}(x).$$

Если $\pi^2$ иррационально, то $\pi$ тоже.
Предположим что $\pi^2 = \frac{m}{n}$.

$$0 < H_j = P_j(\pi^2) = P_j\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{x \in \mathbb{Z}}{n^j} \geq \frac{1}{n^j} \implies n^j H_j \geq 1.$$

Но $\lim\limits_{j\to\infty} n^j H_j = 0.$ $\square$

# 3 Интегральные суммы

**Определение 3.1.** $f : E \mapsto \mathbb{R}$ равномерно непрерынва, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)|.$$

(Если функция непрерывна всюду, то $\delta$ зависит от $\varepsilon$ и $y$, а если равномерно - только от $\varepsilon$ ).

**Лемма 3.1.1.** Липщицева функция всегда равномерно нерпревна.

$$\forall x, y \in E \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

**Теорема 3.1** (Теорема Кантора)**.** $f \in C[a,b]$, $f$ равномерно непрерынва на $[a,b]$.

*Доказательство.* Предположим что равномерной непрерывности нет. Значит,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in [a,b] \quad |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$. Пусть оно не подходит. Т. е.

$$\exists x_n, y_n \in [a,b] \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Возьмём подпоследовательность $x_{n_k}$ имеющюю предел, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, $c \in [a,b]$.
Заметим, что $y_{n_k} \in \left[x_{n_k} - \frac{1}{n}; x_{n_k} + \frac{1}{n}\right]$, значит $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = c$.
Так-как $f$ непрерывна в $c$, выберем подоходящее $\delta'$ по $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\forall x \in [a;b] \quad |x - c| < \delta' \implies |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так-как $\exists K \quad \forall k > K \quad x_{n_k}, y_{n_k} \in [c - \delta', c + \delta']$, возьмём такую пару, тогда

$$\begin{cases} |x_{n_k} - c| < \delta' \\ |y_{n_k} - c| < \delta' \end{cases} \implies \begin{cases} |f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(c) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \implies |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon.$$

Значит, $\delta = \frac{1}{n}$ подходит, и функция равномерно непрерынва.

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{y \in E} \delta(\varepsilon, y).$$

□

**Определение 3.2** (Модуль непрерывности)**.** $f : E \mapsto \mathbb{R}$, тогда модуль непрерывности $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$

**Лемма 3.2.1.** $\omega_f(0) = 0$.
$\omega_f(\delta) \geq 0$.
$\omega_f$ - нестрого монотонно возрастает.
$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x-y|)$.
$f$ равномерно непрерывна на $E$ тогда и только тогда, когда $\omega_f(\delta)$ непрерывна в нуле.

*Доказательство.* Необходиомть:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$\forall x, y \in E \quad |x - y| < \frac{\delta}{2} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$\omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall 0 < \gamma < \beta \quad \omega_f(\gamma) < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$. Достаточность:

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|) \leq \omega_f(\delta).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \omega_f(\delta) < \varepsilon \implies \forall x, y \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$\square$