Алгебра 5

Igor Engel

1 Оценивание

$$\text{Алг+ДМ} = 0.5\text{Алг} + 0.5\text{ДМ}.$$

1. Письменный экзамен за модуль
2. Оценка за ДЗ
3. $\text{Алг} = 0.3\text{ДЗ} + 0.7\text{Экз}$
4. $\text{Экз} \geq 4$
5. КР - оценка в семестр

2 Гомоморфизмы

Лемма 2.0.1. Если $|G| = 2$, то G изоморфна $\mathbb{Z}/2$.

Единственная группа из двух элементов:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

Определение 2.1. Если G - группа, то $\operatorname{Aut} G = \{f : G \mapsto G \mid f\text{- изоморфизм}\}$

Лемма 2.1.1. $\langle \operatorname{Aut} G, \circ \rangle$ - группа

Доказательство. Докажем замкнутость относительно $\circ$. Остальные свойства тривиальны.

$$(f \circ g)(a \cdot b) = f(g(a \cdot b)) = f(g(a) \cdot g(b)) = f(g(a)) \cdot f(g(b)) \in \operatorname{Aut} G.$$

□

Пример 2.1. Найдём $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}$:

$$f(0) = 0.$$

$$f(1) = a.$$

$$f(2) = f(1+1) = a + a = 2a.$$
$$f(n) = na, n \in \mathbb{Z}.$$

Изоморфизм при $a = \pm 1$.
$\operatorname{Aut} \mathbb{Z} \sim \{\pm 1\} \sim \mathbb{Z}/2$.

Пример 2.2. Найдём $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}/n$

$$f(0) = 0.$$
$$f(1) = a.$$
$$f(n) = na.$$

При $(a, n) = 1$ - изоморфизм.

$$\operatorname{Aut} \mathbb{Z}/n \sim (\mathbb{Z}/n)^*.$$

3 Подгруппы порождённые подмножеством

Определение 3.1. Если G - группа, $X \subset G$.
$H = \langle X \rangle$ - наименьшая по включению подгруппа G, такая, что $X \subset H$.

Лемма 3.1.1. Если $\forall \alpha \quad H_\alpha \subset G$, H_α - подгруппа G, то

$$H = \bigcap_\alpha H_\alpha.$$

Тоже подгруппа.

Лемма 3.1.2.
$$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subset H \subset G} H.$$

Где H - подгруппа.

Лемма 3.1.3.
$$\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n} \mid x_i \in X, \varepsilon \in \{\pm 1\}\}.$$

Определение 3.2. $g \in G$
$\langle g \rangle$ - циклическая подгруппа порождённая g.

Определение 3.3.
$$|\langle g \rangle| = \operatorname{ord} g.$$

Лемма 3.3.1.

$$\forall g \in G \quad \exists! f : \mathbb{Z} \mapsto G,\ f \text{ - гомоморфизм} \quad f(1) = g.$$

Лемма 3.3.2. Пусть $g \in G$ и $\operatorname{ord} g = n$.

$$\begin{cases} g^n = e \\ \forall n' < n \quad g^{n'} \neq e \end{cases}$$

Теорема 3.1. $g \in G$, то

1. $\operatorname{ord} g \in \mathbb{N} \implies \langle g \rangle \sim \mathbb{Z}/n$
2. $\operatorname{ord} g = \infty \implies \langle g \rangle \sim \mathbb{Z}$