Мат. Анализ 4

Igor Engel

1

Теорема 1.1. $x_n > 0$ и $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, то $\lim x_n = 0$

Доказательство. Доказано на прошлой лекции. □

Лемма 1.1.1. $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ если $k \in \mathbb{N}$ и $a > 1$

Доказательство.

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a}.$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

□

Лемма 1.1.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Доказательство.

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

□

Лемма 1.1.3.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Доказательство.

$$x_n = \frac{n!}{n^n}.$$

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

□

Теорема 1.2 (Теорма Штольца)**.** $y_n < y_{n+1}$, $\lim y_n = +\infty$. Если $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \ell$

Доказательство. Рассмотрим случай $\ell = 0$
Пусть $\varepsilon_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$
Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и выберем m, такое, что $\forall n \geq m \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon$

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_{m+1} - x_m) + x_m.$$
$$x_n = \varepsilon_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + \ldots + \varepsilon_m(y_{m+1} - y_m) + x_m.$$
$$|x_n| \leq |\varepsilon_{n-1}|(y_n - y_{n-1}) + \ldots + |\varepsilon_m|(y_{m+1} - y_m) + |x_m|.$$
$$|x_n| < \varepsilon\,(y_n - y_m) + |x_m|.$$
$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon(y_n - y_m)}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon + \frac{|x_m|}{y_n}.$$
$$\exists n > m \quad \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \varepsilon \implies \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Рассмотрим случай $\ell \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x_n} = x_n - \ell y_n.$$
$$\frac{\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - \ell.$$
$$\lim \frac{\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n}{y_{n+1} - y_n} = 0 \implies \lim \frac{\tilde{x}_n}{y_n} = 0 \implies \lim \frac{x_n}{y_n} = \ell$$

Рассмотрим случай $\ell = +\infty$:

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \implies \lim \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = +0 \implies \lim \frac{y_n}{x_n} = +0 \implies \lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

Рассмотрим случай $\ell = -\infty$: Возьмём $\tilde{x}_n = -x_n$

$$\lim \frac{\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \implies \lim \frac{\tilde{x}_n}{y_n} = +\infty \implies \lim \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

□

Пример 1.1.

$$m \in \mathbb{N}.$$
$$\lim \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}}.$$
$$x_n = \sum_{i=1}^{n} i^m.$$

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^m.$$

$$y_{n+1} - y_n = (n+1)^{m+1} - n^{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} n^{m-i}.$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m}{\binom{m+1}{1} + \dots} = \frac{1}{m+1}.$$

Значит, начальный предел тоже равен $\frac{1}{m+1}$

Теорема 1.3 (Теорема Штольца (v2))**.** $0 < y_{n+1} < y_n$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$
Если $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \ell$

Доказательство. Рассмотрим случай $\ell = 0$:
Пусть $\varepsilon_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$
Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и выберем m, такое, что $\forall n \geq m \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + \dots (x_{m+1} - x_m).$$

$$x_n - x_m = \varepsilon_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + \dots.$$

$$|x_n - x_m| \leq |\varepsilon||y_n - y_{n-1}| + \dots.$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon\left((y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots\right).$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon\left|y_n - y_m\right|.$$

$$\lim |x_n - x_m| = |x_m|.$$

$$\lim \varepsilon(y_n - y_m) = -\varepsilon y_m.$$

$$|x_m| \leq |\varepsilon y_m| \implies \left|\frac{x_m}{y_m}\right| \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$$

□

2 Подпоследовательности

Определение 2.1. Пусть n_k - строго возрастающая последовательность индексов
Тогда $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ - подпоследовательность

Лемма 2.1.1. $n_k \geq k$

Доказательство. $n_1 \geq 1$
$n_{k+1} > n_k \implies n_{k+1} > k \implies n_{k+1} \geq k + 1$ □

Лемма 2.1.2. Подпоследовательности последовательности имеющий предел (из $\overline{\mathbb{R}}$), имеет тот-же предел.

Лемма 2.1.3. Пусть x_{n_k} и x_{n_l} - подпоследовательности, при этом $x_{n_k} \cup x_{n_l} = x_n$ Если $\lim x_{n_k} = \lim x_{n_l} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim x_n = \ell$.

Теорема 2.1 (Теорема о стягивающихся отрезках)**.**

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots.$$

$$\lim_{i \to \infty} (b_i - a_i) = 0.$$

Тогда существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам. Если это точка c, то $\lim a_n = \lim b_n = c$

Доказательство. Существование следует из теоремы о вложенных отрезках.
Предположим, существует две точки: c и d.

$$\forall n \quad |d - c| \leq b_n - a_n.$$

$$\lim |c - d| \leq \lim b_n - a_n \iff \lim |c - d| = 0 \implies c = d.$$

Докажем равенство:
Рассмотрим расстояние $|c - a_n| \leq |b_n - a_n| \to 0$. Симметрично для b_n. □

Теорема 2.2 (Теорема Больцано-Вейерштрасса)**.** Из любой ограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, которая имеет конечный предел.

$$x_n \in [a, b].$$

$$\exists x_{n_k} \quad \lim x_{n_k} \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Разделим отрезок $[a, b]$ на две части: $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.
Как минмум в одной из половин находится бесконечное число x_n. Обозначим её как $[a_1, b_1]$.
Повторим разеделение, получим отрезок $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$
Повторяя такой процесс можем получить отрезок произвольно малой длинны вокруг некоторой точки c.
Обозначим последовательности границ отрезков как a_n, b_n. По теореме о вложенных отрезках - $\lim a_n = \lim b_n = c$
Возьмём некоторый x_{n_1} принадлежащий отрезку $[a_1, b_1]$
Возьмём такой x_{n_2} принадлежащий отрезку $[a_2, b_2]$, так, что $n_2 > n_1$
Повторяем, получаем подпоследовательность, где $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$.
Значит, $\lim a_k \leq \lim x_{n_k} \leq \lim b_k \iff c \leq \lim x_{n_k} \leq c \iff \lim x_{n_k} = c$. □

Лемма 2.2.1. Если последовательность неограниченна сверху(снизу), то из неё можно выбрать подпоследовательность которая стреитмя к $\pm\infty$

Доказательство. Докажем для неограниченной сверху: Тогда b_1 не является верхней границей. Тогда $\exists n_1 \quad x_{n_1} > b_1$
Пусть $b_2 = \max\left(\{2\} \cup x_{[1,n_{n_1}]}\right)$.
Тогда $\exists n_2 > n_1 \quad x_{n_2} > b_2$. Повторяем. x_{n_k} - возрастающая последовательность неограниченная сверху. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. □

Определение 2.2. Фундаментальная последовательность (Последовательность Коши, сходящаяся в себе) -

$$\forall \varepsilon \quad \exists N > 0 \quad \forall m, n \geq N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Лемма 2.2.1. Фундаментальная последовательность ограниченна

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, и N соответствует условию.
Тогда $\forall n \geq N \quad |x_n - x_N| < 1 \implies |x_n| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < |x_N| + 1$.
Тогда $|x_n| \leq \max\{|x_k| \mid k \in [1, N)\} \cup \{|x_N| + 1\}$. □

Лемма 2.2.2. Если у фундаментальной последовательности есть подпоследовательность имеющая конечный предел, то сама последовательность имеет тот-же предел.

Доказательство. Пусть x_n - фундаментальная последовательность. $\lim x_{n_k} = \ell$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 1 \quad \forall n, m \geq N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists K > 1 \quad \forall k \geq K \quad |x_{n_k} - \ell| < \varepsilon.$$

Возьмём ε, N и K удовлетворяющие условиям.
Возьмём $n \geq N$, $k \geq \max(N, K)$. Тогда

$$|x_{n_k} - \ell| < \varepsilon.$$

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

$$|x_n - \ell| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \ell| < 2\varepsilon.$$

□

Теорема 2.3 (Критерий Коши)**.** Последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она фундаментальная.

Доказательство. Необходимоть: Пусть $\lim x_n = \ell$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \geq N \quad |x_n - \ell| < \varepsilon > |x_m - \ell| \implies |x_n - x_m| \leq |x_n - \ell| + |\ell - x_m| < 2\varepsilon.$$

Достаточность: x_n - фундаментальная.
Значит, она ограниченна.
Тогда, можно выбрать подпоследовательность, имеющую конечный предел.
Предел фундаментальной последовательности равен пределу этой подпоследовательности. □

Определение 2.3. Число a - частичный предел последовательности, если существует подпоследовательность, которая стремится к a.

Теорема 2.4. Пусть a - частичный предел. Тогда и только тогда в любом интервале, содержащем a находится бесконечное число пределов последовательности.

Доказательство. Необходимость: a - частичный предел, занчит $\exists n_k \quad \lim x_{n_k} = a$
Вне любого интервала содержащего a лежит конечное число членов подпоследовательности. Значит, внутри находится бесконечное.
Достаточность: Возьмём интервал $(a-1; a+1)$. В этом интервале бесконечное числе членов последовательность. Возьмём один из них, и назовём x_{n_1}.
Рассмотрим интервал $(a-0.5; a+0.5)$ найдём такой элемент, что его номер больше чем n_1, назовём x_{n_2}. Повторяем.
По аналогии с доказательством **??**, $\lim x_{n_k} = a$. □

Задача 2.1. Модифицируйте рассуждение если $a = \pm\infty$:
Рассмотрим случай для $a = +\infty$ Вместо отрезков будем выбирать лучи с началами в 1, 2, 3, ...
Из каждого будем выбирать x_{n_k}. Это будет неограниченная возрастающая подпоследовательность. Для $a = -\infty$ аналогично.

Лемма 2.4.1. Монотонно возрастающая неограниченная сверху последоватльность стремится в $+\infty$.
Симметрично для убывания.

Доказательство.

$$\forall E \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n > E.$$

E - не верхняя граница. Значит, $\exists N \quad x_N > E$. Последовательность возрастает, значит $\forall n > N \quad x_n > x_N > E$. □

Определение 2.4. Нижний предел - $\underline{\lim}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$
Верхний предел - $\overline{\lim}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$

$$y_n = \inf_{k\geq n} x_k.$$

$$z_n = \sup_{k\geq n} x_k.$$

Теорема 2.5. $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

Доказательство.

$$y_n \leq y_{n+1}.$$

$$z_n \geq z_{n+1}.$$

Тогда, по **??**, существуют $\underline{\lim}\, x_n = \lim y_n$, $\overline{\lim}\, x_n = \lim z_n$. □

Теорема 2.6. $\overline{\lim}$ - наибольший из частичных пределов.
$\underline{\lim}$ - нименьший из частичных пределов.
$\lim x_n$ существует тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$

Доказательство. Пусть $b = \overline{\lim}\, x_n = \lim z_n$
Возьмём z_ℓ. Это $\sup\limits_{k \geq \ell} x_k$. Тогда найдётся такой x_i, $i \geq \ell$, такой, что $x_i \geq z_\ell - \frac{1}{\ell}$.
Назовём $n_\ell = i$.

$$z_\ell \geq x_{n_\ell} > z_\ell - \frac{1}{\ell} \implies b \geq \lim x_{n_\ell} > b - \varepsilon \implies \lim x_{n_\ell} = b.$$

Построем подпоследовательность, выбирая $\ell_{j+1} = n_{\ell_j} + 1$.
Пусть x_{n_k} - какая-то подпоследовательность, имеющая предел.

$$x_{n_k} \leq z_{n_k} \implies \lim x_{n_k} < \lim z_{n_k} \implies \lim x_{n_k} \leq b.$$

Если $\forall n \quad z_n = +\infty$

$$z_1 = +\infty \implies \exists n_1 \quad x_{n_1} > 1$$

$$z_{n_1} = +\infty \implies \exists n_2 > n_1 \quad x_{n_2} > x_{n_1}.$$

И так далее.
Для нижнего аналогично.
Докажем существование предела:
Необходимость:
Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность имеет тот-же предел, значит существует ровно один частичный предел
Достаточность:

$$y_n \leq x_n \leq z_n \implies \underline{\lim}\, x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim}\, x_n \implies \lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n.$$

□