Алгебра 9

Igor Engel

1 Нормальные подгруппы

Определение 1.1. $g, h \in G$, тогда ghg^{-1} называется сопряжённым к h при помощи g.

Определение 1.2. $h_1, h_2 \in G$ называются сопрядёнными, если $\exists g \in G \quad h_2 = gh_1g^{-1}$.

Определение 1.3. $H \leq G$ называется нормальной подгруппой G и обозначается $H \trianglelefteq G$, если

$$\forall h \in H \quad \forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H.$$

Теорема 1.1. $H \leq G$, следующие услвоия эквивалентны:

1. $H \trianglelefteq G$
2. $\forall g \in G \quad gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G \quad gH = Hg$
4. $\forall g \in G \quad gH \subset Hg$

Доказательство. $1 \implies 2$: переформулируем формулировку нормальности: $H \trianglelefteq G \iff \forall g \quad gHg^{-1} \subset H$.
Рассмотрим $H = g^{-1}gHg^{-1}g \subset g^{-1}Hg$, пусть $g = k^{-1}$, тогда $H \subset kHk^{-1}$. Значит, $H = \forall g \quad gHg^{-1}$.
$2 \implies 3$: $gHg^{-1} = H \implies gH = Hg$ (домножение на g справа)
$3 \implies 4$: тривиально
$4 \implies 1$: $gH \subset Hg \to gh \in Hg \implies gh = h'g \implies ghg^{-1} = h'$. □

Лемма 1.1.1. Любая подгруппа абелевой группы - нормальная.

Доказательство. $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h$ □

Определение 1.4. Факторгруппа по $H \trianglelefteq \langle G, \times \rangle$, называется группа состоящая из смежных классов по H с операцией $\cdot$:

$$g_1H \cdot g_2H = (g_1 \times g_2)H.$$

Лемма 1.4.1. Операция задана корректоно.

Доказательство. Возьмём два класса: g_1H, g_2H.
Рассмотрим представителей g_1h_1, g_2h_2.
Тогда $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2g_2^{-1}h_1g_2h_2 = g_1g_2h_3h_2 = g_1g_2h_4 \in g_1g_2H$ $\square$

Лемма 1.4.2. Факторгруппа - группа.

Доказательство. Докажем свойства:
Ассоциативность: $(g_1H \cdot g_2H) \cdot g_3H = (g_1g_2)g_3H = g_1(g_2g_3)H = g_1H(g_2H \cdot g_3H)$
Нейтральный элемент: $eH = H$.
Обратный элемент: $(gH)^{-1} = g^{-1}H$. $\square$

Теорема 1.2 (Теорема о изоморфизме)**.** Пусть $f : G \mapsto G_1$ - гомоморфизм.
$G/\operatorname{Ker} f \cong f(G)$ (гомоморфный образ группы изомофрен факторгруппе по ядру гомоморфизма)
Причём, изоморфизм имеет вид $g \operatorname{Ker} f \mapsto f(g)$.

Доказательство. Пусть $H = \operatorname{Ker} f$
Корректоность: $h \in H$, $f(gh) = f(g)f(h) = f(g)$.
Гомоморфизм: $\hat{f}(g_1g_2H) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \hat{f}(g_1H)\hat{f}(g_2H)$.
Инъективность: $gH \in \operatorname{Ker} \hat{f} \iff f(g) = e \iff gH = H$
Сюръективность: $x \in \operatorname{Im} f$, $f(g) = x$, тогда $\hat{f}(gH) = x$. $\square$

Определение 1.5. Группа G называется простой, если в ней нет нетривиальных нормальных подгрупп.

Теорема 1.3. Есть список всех конечных простых групп.