Мат. Анализ 10

Igor Engel

1

1.1

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \ldots + \binom{p}{n}x^n + o(x^n).$$

Теорема 1.1. При всех $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin x = \sum_{n=x}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Доказательство.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad \left|\sin^{(n)}(t)\right| < 1.$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad \left|\cos^{(n)}(t)\right| < 1.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

Аналогично для синуса.
Для e^x рассмотрим отрезко $[0; x]$ (или $[x; 0]$).
Тогда на этом отрезок $\forall t \in [0; x] \quad \forall n \quad (e^x)^{(n)} \le \max(e^x, 1)$.
Тогда на этом отрезке (включая точку x) функция равна своему ряду. □

Теорема 1.2. $e \notin \mathbb{Q}$

Доказательство. Поедположим, что $e \in \mathbb{Q}$. Тогда $\exists n, m \in \mathbb{N} \quad \frac{m}{n}$
Так-как $2 < e < 3$, то $n \geq 2$.
Заметим, что
$$\frac{m}{n} e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$
При этом, $0 < c < 1$.
$$m(n-1)! = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^c}{n+1}.$$
При этом, $m(n-1)! \in \mathbb{Z}$.
Сумма отношений факториалов так-же целая.
Тогда $\frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{N}$.
Тогда $\frac{e^c}{n+1} \geq 1$.
Так-как $c < 1$, то $e^c < e$, а т.к $n \geq 2$, то $n + 1 \geq 3$, а $\frac{e}{3} < 1$.
Значит, $e \notin \mathbb{Q}$. □

2 Точки экстремума

Определение 2.1. $f : (E \subset \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, $a \in E$.
a - точка локального минимума, если $\exists U_a \quad \forall x \in U_a \cap E \quad f(a) \leq f(x)$.
a - точка строго локального минимума, если $\exists \mathring{U}_a \quad \forall x \in \mathring{U} \cap E \quad f(a) < f(x)$. Аналогично для максимума.

Определение 2.2. a - точка экстремума, если a - точка локального максимума, или локального минимума.

Теорема 2.1 (Необходимое условие экстремума)**.** $f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дифференцируема в x_0.
Если x_0 - точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю.

Доказательство. Для определённости - x_0 - локальный максимум.
$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle \quad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \implies f(x) \leq f(x_0).$$
Функция $f|_{(x_0 - \delta; x_0 + \delta)}$ имеет глобальный максимум в точке x_0, и по теореме Ферма производная равна нулю. □

Лемма 2.1.1. Обратное неверно.
Например, у x^3 производная в нуле равна нулю, но экстремума в нуле нет.

Лемма 2.1.2. Экстремум может быть в точке, в которой функция недифференцируема. Например, у $|x|$ нет производной в нуле, но есть минимум в нуле.

Теорема 2.2 (Достаточные условия экстремума в терминах первой производной)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a; b)$, f непрерывна в x_0 и дифференцируема в на $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$.
Тогда, если $f' > 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f' < 0$ на $(x_0; x_0 + \delta)$, то x_0 - строгий локальный максимум.
Нестрогие занки дуют нестрогий максимум, обратные знаки - минимум. Если f' не меняет знак, то x_0 не экстремум.

Доказательство. Пусть для определённости $f' > 0$ на $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f' < 0$ на $(x_0; x_0 + \delta)$.
Рассмотрим полуинтервал $(x_0 - \delta; x_0]$, f на нём непрерывна, и $f' > 0$ в интервале.
Значит, f строго возрастает на полуинтервале, и $\forall x_0 - \delta; x_0 \quad f(x) < f(x_0)$.
Аналогично на полуинтервале $[x_0; x_0+\delta)$, на нём f строго убывает. $\forall x \in (x_0; x + \delta) \quad f(x) < f(x_0)$.
Совмещая, получаем:

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) \quad f(x) < f(x_0).$$

А значит x_0 - строгий локальный максимум. Остальные доказываются аналогично.
□

Теорема 2.3 (Достаточные условия экстремума в термниах второй производной)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дважды дифференцируема в x_0, $f'(x_0) = 0$.
Тогда

1. $f''(x_0) > 0$ - x_0 - точка строго локального минимума.
2. $f''(x_0) < 0$ - x_0 - точка строго локального максимума.

Доказывается как частный случай следующей теоремы.

Теорема 2.4 (Достаточные условия экстремума в термниах n-й производной)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f n раз дифференцируема в x_0, $\forall k \in [1; n) \quad f^{(k)} = 0$.
Тогда

1. n чётно, и $f^{(n)}(x_0) > 0$ - x_0 - точка строго локального минимума.
2. n чётно, и $f^{(n)}(x_0) < 0$ - x_0 - точка строго локального максимума.
3. n нечётно, и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то x_0 - не точка экстремума.

Доказательство.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right).$$

Рассмотрим первый случай:
n чётно, $(x - x_0)^n > 0$, знак определяется вторым множетелем, котрый стремится к $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0$. По теореме о стабилизации знака, $f(x) - f(x_0) > 0$ в некоторой окрестности x_0. Значит, x_0 является локальным минимумом.
Второй случай аналогично.
Третий случай:
n нечётно, значит $(x - x_0)^n < 0$ если $x < x_0$, и $(x - x_0)^n < 0$ если $x > x_0$.
Пусть $f^{(n)}(x_0)$ положительна, тогда функция $f(x) - f(x_0)$ поменяет знак в точке x_0, и x_0 не может быть экстремумом. Аналогично для отрицательной производной. $\square$

3 Выпуклые функции

Определение 3.1. Функция $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ называется выпуклой, если:

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \lambda \in (0; 1) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Если знак строкий и $x \neq y$, то f называется строго выпуклой.
f называется вогнутой, если

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \lambda \in (0; 1) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$