Мат. Анализ 11

Igor Engel

1

Определение 1.1 (Обозначеия внутри конспекта)**.**

$$m_\lambda(a, b) := \lambda a + (1-\lambda)b.$$

$$m_\lambda^f(a, b) := m_\lambda(f(a), f(b)).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} m_\lambda(a,b) + m_\lambda(c,d) &= \lambda a + (1-\lambda)b + \lambda c + (1-\lambda)d \\ &= \lambda(a+c) + (1-\lambda)(b+d) = m_\lambda(a+c, b+d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha m_\lambda(a,b) &= \alpha(\lambda a) + \alpha((1-\lambda)b) \\ &= \lambda(\alpha a) + (1-\lambda)(\alpha b) = m_\lambda(\alpha a, \alpha b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_\lambda^f(a,b) + m_\lambda^g(a,b) &= m_\lambda(f(a), f(b)) + m_\lambda(g(a), g(b)) \\ &= m_\lambda(f(a)+g(a), f(b)+g(b)) = m_\lambda^{f+g}(a,b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha m_\lambda^f(a,b) &= \alpha m_\lambda(f(a), f(b)) \\ &= m_\lambda(\alpha f(a), \alpha f(b)) = m_\lambda^{\alpha f}(a,b) \end{aligned}$$

Теорема 1.1 (Переформулировка выпуклости)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$.

$$f \text{ выпуклая } \iff \forall x < z < y \in \langle a, b\rangle \quad (y-x)f(z) \le (y-z)f(x) + (z-x)f(y).$$

Доказательство.

$$f(m_\lambda(x,y)) \le m_\lambda^f(x,y).$$

$$z = m_\lambda(x,y) = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

$$\lambda = \frac{y-z}{y-x}.$$

$$1-\lambda = \frac{z-x}{y-x}.$$

$$f(z) \le \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y).$$

$$(y-x)f(z) \le (y-z)f(x) + (z-x)f(y).$$

□

Теорема 1.2 (Ариф. Действия с выпуклыми функция). $f, g : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ - выпуклые функции.
$f + g$ - выпуклая.
$\forall \alpha > 0 \quad \alpha f$ - выпуклая.

Доказательство.

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) \quad \begin{cases} f(m_\lambda(x, y)) \leq m_\lambda^f(x, y) \\ g(m_\lambda(x, y)) \leq m_\lambda^g(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) \quad & f(m_\lambda(x, y)) + g(m_\lambda(x, y)) \\ & \leq m_\lambda^f(x, y) + m_\lambda^g(x, y) = m_\lambda^{f+g}(x, y) \end{aligned}$$

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) \quad \alpha f(m_\lambda(x, y)) \leq \alpha m_\lambda^f(x, y) = m_\lambda^{\alpha f}(x, y)$$

□

Теорема 1.3 (Лемма о трёх хордах). $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ - выпуклая.
Тогда, если $x < z < y$ из $\langle a, b\rangle$, то:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Каждое из трёх неравенств равносильно выпуклости.
Если поставить строгие знаки, то выпуклость строгая.

Доказательство. Неравенство 1:

$$\begin{aligned} & (y - x)(f(z) - f(x)) \leq (z - x)(f(y) - f(x)) \\ \iff & (y - x)f(z) - (y - x)f(x) \leq (z - x)f(y) - (z - x)f(x) \\ \iff & (y - x)f(z) \leq (z - x)f(y) + ((y - x) - (z - x))f(x) \\ \iff & (y - x)f(z) \leq (z - x)f(y) + (y - z)f(x) \end{aligned}$$

Неравенство 2:

$$\begin{aligned} & (y - z)(f(y) - f(x)) \leq (y - x)(f(y) - f(z)) \\ \iff & (y - x)f(z) \leq (y - z)f(x) + ((y - x) - (y - z))f(y) \\ \iff & (y - x)f(z) \leq (y - z)f(x) + (z - x)f(y) \end{aligned}$$

Неравенство 3:

$$\begin{aligned} & (y - z)(f(z) - f(x)) \leq (y - x)(f(y) - f(z)) \\ \iff & ((y - z) - (z - x))f(z) \leq (y - z)f(x) + (z - x)f(y) \\ \iff & (y - x)f(z) \leq (y - z)f(x) + (z - x)f(y) \end{aligned}$$

□

Теорема 1.4. $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ - выпуклая, $x \in (a, b)$.
Тогда в x существует конечная $f'_\pm(x)$, и $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

Доказательство.

$$u < v < x < y < z \in \langle a, b \rangle .$$

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x} \le \frac{f(v)-f(x)}{v-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Из первого неравенства следует, что $\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ возрастает по u, из второго неравенства следует, что она ограничена $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
Тогда сщуествует конечная $f'_-(x) = \lim\limits_{u \to x-} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
Аналогично, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ возрастает по y, и онграничена снизу $f'_-(x)$.
Значит, существует конечная $f'_- \le f'_+(x) = \lim\limits_{y \to x+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. □

Лемма 1.4.1. $f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$ - выпуклая, тогда f непрерывна на (a, b).

Доказательство. Рассмотрим $x \in (a, b)$.
Тогда существует конечная $f'_\pm(x)$, значит функция непрерывна слева в x и справа в x. □

Теорема 1.5. $f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$, дифференцируемая.
Тогда f - выпуклая тогда и только тогда $\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle \quad f(x) \ge (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$.

Доказательство. Необходиомсть: При $x > x_0$:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$$(x-x_0)f'(x_0) + f(x_0) \le f(x).$$

При $x < x_0$:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) \ge \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$$(x-x_0)f'(x_0) + f(x_0) \le f(x).$$

При $x = x_0$ равенство очевидно.
Достаточность:

$$x < x_0 < y.$$

$$f(x) \ge (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

$$f(y) \ge (y-x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

$$\begin{aligned}(y-x_0)f(x) + (x_0-x)f(y) &\ge (y-x_0)(x-x_0)f'(x_0) + (y-x_0)f(x_0) \\ &+ (y-x_0)(x_0-x)f'(x_0) + (x_0-x)f(x_0) \\ &= ((y-x_0)+(x_0-x))f(x_0) = (y-x)f(x_0)\end{aligned}$$ □

Теорема 1.6 (Критерий выпуклости)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, дифференцируемая на (a, b) и непрерывная на $\langle a, b\rangle$.
Тогда:

1. f выпуклая на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда f' возрастает.

2. Если f дважды дифференцируема, f выпукла тогда и только тогда, когда $f'' \geq 0$ на (a, b).

   Доказательство. Необходимость:
   При $x > y$:
   $$f'(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(x).$$
   Значит, с ростом x растёт $f'(x)$. Достаточность:
   $$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}.$$
   По теореме Лагранжа: $\exists p \in (u, v) \quad \exists q \in (v, w)$
   $$f'(p) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v} = f(q).$$
   Но $p < q$, значит f' возрастает. ☐

Теорема 1.7 (Неравенство Йенсена)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, выпуклая.
Тогда
$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \implies f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Доказательство. При $n = 1$ - тривиально. При $n = 2$ - опеределение выпуклости.
Переход:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}.$$
$$y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{1 - \lambda_{n+1}}.$$
$$f((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq (1 - \lambda_{n+1}) f(y) + \lambda f(x_{n+1}).$$
Раскрывая $f(y)$ по предположению индукции получим нужное утверждение. ☐

Теорема 1.8 (Неравенство о средних)**.** $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, тогда
$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Доказательство. Если какой-то x_i равен нулю, то утверждение оченвидно.

$$\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1)+\ldots+\ln(x_n)}{n}.$$

Заметим, что логарифм - вогнутая функция, подставим $\lambda_i = \frac{1}{n}$ в неравенство Йенсена с функцией $f(x) = -\ln(x)$. Получим нужное утверждение. □

Определение 1.2 (Среднее степенное)**.** Среднее степенное порядка p, $x_i > 0$:

$$M_p := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$M_0 := \lim_{p\to 0} M_p = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Лемма 1.2.1 (Неравенство между средними степенными)**.** Если $p < q$, то $M_p \leq M_q$

Доказательство. Случай $0 < p < q$: $f(x) = x^{\frac{q}{p}}$ - выпуклая функция
$y_i = x_i^p$, $\lambda_i = \frac{1}{n}$.

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n}.$$

Извлечаем корень степени q, получаем слева степень $\frac{1}{p}$, справа $\frac{1}{q}$, что соответевствтует $M_p \leq M_q$.
Случай $0 = p < q$:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Возводем в степень q, получаем неравенство о средних для x_i^q.
Случай $p < q = 0$: Аналогично предыдущему, возводим в степень p, возведение в отрицательную сторону перевёрнет знак, и подойдёт нeравество о средних для x_i^p.
Случай $p < 0 < q$:

$$M_p < M_0 < M_q.$$

□

2 Интегральное исчесление фукнции одной переменной

2.1 Первообразная и непрерывный интеграл

Определение 2.1. Первообразная функции $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, тогда $F : \langle a, b\rangle$ называется первообразной для f, если F дифференцируема, и $\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x)$.

Теорема 2.1. $f \in C\,\langle a, b\rangle$, тогда у f есть первообразная.
Пока без доказательтва.

Теорема 2.2. $f, F : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, F - первообразная f.

1. Тогда $F + C$ - первообразная f
2. Φ - первообразная f, то $\Phi = F + C$

Доказательство. Пункт 1 : $(F + C)' = F' + C' = F' = f$
Пункт 2 : Рассмотрим $(\Phi - F)' = \Phi' - F' = f - f = 0$, значит $\Phi - F$ - постоянная, и $\Phi = F + C$. □

Определение 2.2. Множество всех первообразных для f называется неопределённым интегралом f, и обозначается следующим образом:

$$\int f.$$

$$\int f(x)dx.$$

Лемма 2.2.1.

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Где F - произвольная первообразная.

Теорема 2.3 (Таблица интегралов)**.**

$$\int 0 = C.$$

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ p \neq -1.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \neq 1.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Доказательство.

$$\ln(-x)' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\ln(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot (x' + (\sqrt{x^2+1})') = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|\right)' = .$$

□

Теорема 2.4 (Ариф. действия с непор. интегралами)**.** Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, f и g имеют первообразные.
Тогда:

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

$$\int \alpha f = \alpha \int f, \text{ при } \alpha \neq 0.$$

Доказательство. Пусть F, G - первообразные f, g.
Тогда $(F+G)' = F' + G' = f + g$.
$(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$. □

Лемма 2.4.1 (Линейность интеграла)**.** $f, g : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, f и g имеют первообразные, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.
Тогда:

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Теорема 2.5 (Замена переменной в неопр. интеграле)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ имеет первообразную $F : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$.
$\varphi : \langle c, d\rangle \mapsto \langle a, b\rangle$ дифференцируема.
Пусть $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $g : \langle c, d\rangle \mapsto \mathbb{R}$.
Тогда:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Доказательство.

$$F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

□

Лемма 2.5.1. Если F - первообразная f, то

$$\int f(\alpha x + \beta) = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C.$$

Доказательство. $\varphi(x) = \alpha x + \beta$.
$\varphi'(x) = \alpha$.

$$\int f(\alpha x + \beta)\alpha = F(\alpha x + \beta).$$

□

Теорема 2.6 (Формула интегрирования по частям)**.** $f, g : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируемые и $f'g$ имеет первообразную.
Тогда fg' имеет первообразную.

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

$$\int fg' + \int f'g = fg.$$

Доказательство.

$$H = \int f'g.$$

$$(fg - H)' = (fg)' - f'g = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

□

2.2 Площади и определённый интеграл

Определение 2.3. $\mathcal{F}$ - совокупность всех ограниченных подномжеств $\mathbb{R}^2$

Определение 2.4. $\sigma : \mathcal{F} \mapsto [0; +\infty]$ - площадь, если $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$, при $a \le b$, $c \le d$ и если $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$.

Лемма 2.4.1. Если $E \subset \tilde{E}$, то $\sigma(E) \le \sigma(\tilde{E})$.

Доказательство.
$$\tilde{E} = E \cup (\tilde{E} \setminus E).$$
$$\sigma(\tilde{E}) = \sigma(E) + \sigma(\overline{E}) \geq \sigma(E).$$
$\square$

Определение 2.5. $\sigma : \mathcal{F} \mapsto [0, +\infty)$ назвоём квазиплощадью, если:

1. $\sigma\left([a,b] \times [c,d]\right) = (b-a)\,(d-c)$
2. Если $E \subset \tilde{E}$, то $\sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$
3. $E \in \mathcal{F}$, ℓ - горизонтальная или вертикальная прямая.
   Обозначим за E_- чусть множества, лежащую слева от прямой, или на ней.
   $E_+ = E \setminus E_-$, $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

Лемма 2.5.1. A - подмножество вертикального или горизонтального отрезка, то $\sigma(A) = 0$.

Доказательство. Если A - отрезок, то $A = [a,a] \times [c,d]$, и площадь равна нулю. Площадь подмножества не больше площади самого отрезка. $\square$

Лемма 2.5.2. Куда относятся точки на ℓ не имеет значения.

Доказательство. Пусть $\tilde{E}_- = E_- \cup \ell$.
Тогда $\sigma(\tilde{E}_-) = \sigma(E_-) + \sigma(\tilde{E}_- \setminus E) = \sigma(E)$ $\square$