Мат. Анализ

Igor Engel

1 Введение

$x \in A$ - x принадлежит A
$x \notin A$ - x не принадлежит A
$A \subset B \iff \forall x \in A \quad x \in B$
$A = B \iff \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$
$A \subsetneq B \iff \begin{cases} A \subset B \\ A \neq B \end{cases}$ - A - собственное подмножество B
$\emptyset$ - пустое множество
$\mathbb{N}$ - натуральные числа
$\mathbb{Z}$ - целые числа
$\mathbb{Q}$ - рациональные числа
$\mathbb{R}$ - вещественные числа
2^A - множество всех подмножеств A
$A = \{1, 2\}$
$2^A = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$\forall$ - для всех
$\exists$ - существует

1.1 Задание множеств

- Перечисление: $\{a, b, c\}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- Описание: множество простых чисел - множество таких чисел, которые делятся только на себя и на единицу
- Функция: $\{x \in X \mid \Phi(x)\}$ - множество всех x из множества X, для которых $\Phi(x)$ - истина. Выбирать Φ аккуратно.

1.2 Операции с множествами

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in I \quad x \in A_{\alpha_i}\}.$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in I \quad x \in A_\alpha\}.$$

$$\bigcup_{a=1}^{k} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [1;k]} A_\alpha.$$

1.3 Правила Де'Моргана

Теорема 1.1.

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} A \setminus B_\alpha.$$

$$A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A \setminus B_\alpha.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе аналогично.

$$\begin{aligned}
& x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \\
& \iff \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I \quad x \notin B_\alpha \end{cases} \\
& \iff \forall \alpha \in I \quad x \in A \setminus B_\alpha \\
& \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} A \setminus B_\alpha
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.2.

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha).$$

$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе аналогично.

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) \\
&\iff \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I \quad x \in B_\alpha \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha \in I \quad x \in A \cap B_\alpha \\
&\iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)
\end{aligned}
$$

□

1.4 Упорядоченная пара

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

1.4.1 Кортеж (Упорядоченная n-ка)

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \rangle \iff \forall i \in [1, n] \quad x_i = x'_i.$$

1.5 Декартово произведение

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B\}.$$

1.6 Бинарное отношение

Б. о. между множествами A, B:

$$R \subset A \times B.$$

$$xRy \iff \langle x, y \rangle \in R.$$

1.6.1 Область определения отношения

$$\delta_R \iff \{x \in A \mid \exists y \in B \quad xRy\}.$$

$$\rho_R \iff \{y \in B \mid \exists x \in A \quad xRy\}.$$

δ_R - область определения, ρ_R - область значений.

1.6.2 Обратное отношений

$$R^{-1} \subset B \times A.$$

$$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}.$$

1.6.3 Композиция отношение

$$R_1 \subset A \times B.$$

$$R_2 \subset B \times C.$$

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle x, z\rangle \mid \exists y \in B \quad xR_1y \wedge yR_2z\}.$$

1.6.4 Примеры

1. $A = B$
   Отношение равенства: $R = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$

2. $A = B = \mathbb{R}$
   Отношение "$\leq$": $R = \{\langle x, y\rangle \mid x \leq y\}$

3. $A = B = \mathbb{N}$ Отношение "$<$": $R = \{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$
   $\delta_R = \mathbb{N}$
   $\rho_R = \mathbb{N} \setminus \{1\}$
   $(< \circ <) = \{\langle x, z\rangle \mid x < z - 1\}$

4. Отношение перпендикулярности:
   $\perp \circ \perp \iff \|$

5. A - множество всех живших мужчин
   $R = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ отец } y\}$
   $\delta_R =$ все у кого есть отец
   $\rho_R =$ все у кого есть сыновья
   $R \circ R =$ дед по отцовской линии

1.7 Функция

f называется функцией и обозначается $f : A \mapsto B$, если :

$$f \subset A \times B.$$

$$\delta_f = A.$$

$$\forall x \in A \quad \forall y, z \in B \quad xfy \wedge xfz \implies y = z.$$

$$y = f(x) \iff xfy.$$

1.7.1 Последовательность

Последовательность: $f : \mathbb{N} \to B$

1.8 Свойства

1.8.1 $A = B$

R - рефлексивное если $\forall x \in A \quad xRx$
R - иррефлексивное если $\nexists x \in A \quad xRx$
R - симметричное если $\forall x, y \in A \quad xRy \iff yRx$
R - антисимметричное если $\forall x, y \in A \quad (xRy = yRx) \implies x = y$
R - транзитивное если $\forall x, y, z \in A \quad xRy \wedge yRz \implies xRz$
R - отношение эквивалентсности если оно симметрично и транзитивное

1.8.2 Названия

R - отношение строго частичного порядка, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
R - отношение нестрого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисиимметрично и транзитивно.
R - отношение эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1.8.3 Функция

f - инъективная, если $\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \implies x = y$
f - сюръективна, если $\rho_f = B$
f - биективна, если она инъективна и суръективна

1.8.4 Примеры

1. Равенство, сравнение по модулю, паралелльность, подобие треугольников - отношение эквивалентсноти

2. Рефлексивное + антисимметричное + транзитивное - отношение нестрогого частичного порядка
   Например,
   $$A = \mathbb{R}, R =\leq$$
   $$A = 2^C, R =\subset$$

3. Иррефлексивное + транзитивное: Отношение строгого частичного порядка
   Например:
   $$A = \mathbb{R}, R =<$$
   $$A = 2^C, R =\subsetneq$$