Матан 7

Igor Engel

1

Определение 1.1 (Обратная функция).

$$f : E \mapsto \tilde{E}.$$

Если f - биекция, то

$$\exists g : \tilde{E} \mapsto E \quad \forall x \in \tilde{E} \quad f(g(x)) = x \quad \text{и} \quad \forall x \in E \quad g(f(x)) = x.$$

Теорема 1.1 (Теорема об обратной функции).

$$f : \langle a, b \rangle \mapsto \langle m, M \rangle .$$

$$m = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} f(x).$$

$$M = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} f(x).$$

f всюду непрерывна и строго монотонна.
Тогда:

$$f^{-1} : \langle m, M \rangle \mapsto \langle a, b \rangle .$$

f^{-1}, существует, строго монотонна и всюду непрерывна.

Доказательство. Непрерывность гарантирует $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$, значит f сюръективна.
Строго монотонная функция инъективна, занчит f - биекция.
Пусть f строго возрастает.
Возьмём $x < y$, допустим $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$.
Тогда $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y)) \iff x \geq y$, что противоречит условию.
Возьмём произвольную точку y_0.

$$\begin{aligned} f(y) < f(y_0) \iff y < y_0 \iff f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0). \\ A = \sup_{y < y_0} f^{-1}(y) \\ = \lim_{y \to y_0 -} f^{-1} y \leq f^{-1}(y_0) \leq \lim_{y \to y_0 +} f^{-1}(y) \\ = \inf_{y > y_0} f^{-1}(y) = B \end{aligned}$$

Если $A = B$ то функция непрерывна в этой точке.
Пусть $A < B$.

$$f^{-1}(\langle m, M\rangle) = f^{-1}(\langle m, y_0)) \cup \{f(y_0)\} \cup f^{-1}((y_0, M\rangle) \subset (-\infty; A] \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup [B; \infty).$$

Что невозможно, так-как облать значений непрерывна. □

Теорема 1.2 (Первый замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство.

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sin x \le x \le \tan x.$$

$$\frac{\sin x}{x} \le 1 \le \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1, \text{ из-за чётности верно при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)..$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \iff 1 \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

2 Элементарные функции

2.1 Степенная функция

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}.$$

$n \in \mathbb{N}$, непрерывна на $\mathbb{R}$.

2.1.1 n нечётно

$x^n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, строго возрастает, есть обратная.

2.1.2 n чётно

$x^n : [0; \infty) \mapsto [0; \infty)$, строго возрастает, есть обратная.

2.2 Обратная степенная функция

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

$x^{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$, непрерывна.

2.3 Рациональная степень

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & q \text{ нечётное, } p > 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R} & q \text{ нечётное, } p < 0 \\ [0; +\infty) \mapsto \mathbb{R} & q \text{ чётное}, p > 0 \\ (0; +\infty) \mapsto \mathbb{R} & q \text{ чётное}, p < 0 \end{cases}$$

2.4 Показательная функция

$$a > 1 \implies (r < s \implies a^r < a^s).$$

$$0 < a < 1 \implies (r < s \implies a^s < a^r).$$

$$a^{r+s} = a^r a^s.$$

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

$$(a^r)^s = a^{rs}.$$

Теорема 2.1.

$$a > 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Доказательство.

$$a > 1.$$

$$b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0.$$

$$a = (b_n + 1)^n \geq 1 + nb_n > nb_n \implies b_n < \frac{a}{n}.$$

$$0 < b_n < \frac{a}{n} \implies \lim b_n = 0.$$

$$0 < a < 1.$$

$$\lim \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim a^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

□

Теорема 2.2.

$$a > 0.$$

$$x_n \in \mathbb{Q}.$$

$$\lim x_n = x.$$

Тогда

$$\exists \lim a^{x_n} = f(x).$$

Доказательство. Не умаляя общности, $a > 1$.
x_n ограниченна. $\exists M \quad \forall n \quad x_n \leq M$

$$0 < a^{x_n} \leq a^M.$$

Пусть $x_k > x_m$

$$a^{x_k} - a^{x_m} = a^{x_m}(a^{x_k - x_m} - 1) \leq a^M \left(a^{x_k - x_m} - 1\right) < \varepsilon.$$

$$\exists N \quad \forall n > N \quad a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^M}.$$

x_n фундаментальная

$$\exists K \quad \forall k, m > K \quad |x_k - x_m| < \frac{1}{N}.$$

$$0 < a^M \left(a^{x_k - x_m} - 1\right) \leq a^M \left(a^{\frac{1}{N}} - 1\right) \leq a^M \cdot \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon.$$

Значит, a^{x_n} фундаментальна, и предел существует.
Пусть $\lim x_n = \lim y_n = x$.
Перемешаем последовательности:

$$z_n = x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots.$$

$$\lim z_n = x.$$

Тогда существунт $\lim a^{z_n}$.
Значит $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n}$, как пределы подпоследовательностей. $\square$

Определение 2.1.

$$a^x = \lim a^{x_n}.$$

Где $x_n \in \mathbb{Q}$ и $\lim x_n = x$.

Лемма 2.1.1. Все свойства рациональной степени сохраняются.

Доказательство. Пусть $a > 1$.
Возьмём $r, s \in \mathbb{Q}$, $x < r < s < y$.
Возьмём $x_n, y_n \in Q$, $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$.
При больших n: $x_n < r < s < y_n$.
Значит

$$a^{x_n} < a^r < a^s < a^{y_n} \implies a^x \leq a^r < a^s \leq a^y \implies a^x < a^y.$$

Второе и третье свойство доказываются предельным переходом. $\square$

Лемма 2.1.2.
$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Доказательство. Возьмём монотонно убывающую $x_n \in \mathbb{Q}$, $\lim x_n = 0$
Тогда найдём по ε такое N, что $a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$.
Найдём K, такое, что $\forall k > K \quad x_k < \frac{1}{N}$.
Тогда
$$\forall k > K \quad 0 < a^{x_k} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon.$$

Возьмём мнотонно возрастающую последовательность x_n, тогда $y_n = -x_n$.
$$\lim a^{x_n} = \lim a^{-y_n} = \lim \frac{1}{a^{y_n}} = 1.$$

□

Теорема 2.3. a^x всюду непрерывна.

Доказательство. Рассмотрим точку x_0:
$$\lim_{xxt0x_0} a^x = a^{x_0}.$$
$$\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} x10.$$
Что верно по предыдущех лемме. □

$$a^x : \mathbb{R} \mapsto (0; +\infty)\,.$$
$$a > 0.$$
$$a \neq 1.$$
a^x - непрерывная строго монотонная функция. Значит, есть обратная.

2.5 Степенная функция для произвольной степени

$$p \in \mathbb{R}.$$
$$x^p = e^{p \ln x} : (0; +\infty) \mapsto (0; +\infty)\,.$$
x^p непрерывна и строго монотонна.

Теорема 2.4.
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Проверим на мотонном $x_n \to +\infty$.
Пусть $k_n = \lfloor x_n \rfloor$ - нестрого монотонная последовательность.

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \le \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{x_n} \le \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \le \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

k_n повторяются только конечное число раз, значит предел не потерялся.

$$e \le \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le e.$$

□

Лемма 2.4.1.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Возьмём $y_n = -x_n$.

$$\left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} = e.$$

Лемма 2.4.2 (Второй замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Доказательство. Возьмём монотонную последовательность $x_n \to \infty$.
Возьмём $y_n = \frac{1}{x_n}$.

$$\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e.$$

□

Теорема 2.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Доказательство.

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = \ln (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x\to 0} \ln (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

□

Теорема 2.6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Доказательство.
$$\lim x_n = 0.$$
$$y_n = a^{x_n} - 1.$$
$$y_n + 1 = a^{x_n}.$$
$$\ln (y_n + 1) = x_n \ln a.$$
$$\lim \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \ln a \frac{y_n}{\ln(y_n + 1)}.$$

□

Теорема 2.7.
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^p - 1}{x} = p.$$

Доказательство.
$$\lim x_n = 0.$$
$$y_n = (1 + x_n)^p - 1 \to 0.$$
$$\ln(1 + y_n) = p \ln(1 + x_n).$$
$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \frac{y_n}{\ln (1 + y_n)} \frac{p \ln (1 + x_n)}{x_n} = p \lim \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = p.$$

□