Математическая логика (Лекции)

Игорь Энгель

10 июня 2020 г.

Содержание

0. Конкспект по лекциям

Это конспект сгруппированный по лекциям, потому-что так его удобнее писать. **Ошибки в этой версии конспекта не исправляются**. Этот конспект может обновляться чуть раньше основного.

1. Лекция 1

***Определение* 1.1.**
Множества A и B называются равномощными, если $\exists$ биекция $\quad f : A \to B$.

Замечание.
Равномощность - отношение эквивалентности:

1. $A \sim A \impliedby f = \mathrm{id}$
2. $(A \sim B \implies B \sim A) \impliedby g = f^{-1}$.
3. $(A \sim B \land B \sim C \implies A \sim C) \impliedby h = g \circ f$.

***Определение* 1.2.**
Множество называется счётным, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Пример.
Примеры счётных множеств: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 2\}$.

Лемма.
Если A и B счётны, то $A \cup B$ счётно.

Доказательство.
Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$.
Тогда, представим $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$.
Тогда

$$f(x) = \begin{cases} a_i & x = 2i + 1 \\ b_i & x = 2i \end{cases}.$$

Если $A \cap B$ не пустое, то некоторые элементы функции надо выкинуть. □

Лемма.
Если A счётно, то $\forall B \subset A \quad$, B либо конечно либо счётно.

Доказательство.
Так-как A счётно, возьмём биекцию $f : \mathbb{N} \mapsto A$.
Тогда, $g(i) = f(\min\{j \geqslant i \mid f(j) \in B\})$. □

Лемма.
Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство.
Так-как A бесконечно, в нём существует хотя-бы один элемент a_1, $A \setminus \{a_1\}$ тоже бесконечно, и можно взять a_1, a_2, a_3, $\ldots$. □

Лемма.
$\mathbb{Q}$ счётно.

Доказательство.

Докажем сначала для $\mathbb{Q}_+$.

Выпишем их следующим образом: **TODO:**

$$\begin{bmatrix} \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \dots \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \dots \\ \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Будем обходить эту таблицу диагоналями: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \dots$.

Будем пропускать повторяющиеся числа.

Каждое число будет выписано, потому-что за $(n+m)^2$ шагов мы точно дойдём до строки m столбца n и получим число $\frac{n}{m}$.

Аналогичное доказательство подходит для $\mathbb{Q}_-$. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$, значит, тоже счётно. □

Лемма.

Объединение конечного или счётного числа счётных или конечных множеств счётно или конечно.

Доказательство.

Выпишем на i строке в j столбце j-й элемент i-го множества. Построив такую-же последовательность как для рациональных чисел, получим биекцию, либо кончатся элементы. □

Теорема 1.1.

Если A, B - счётные, то $A \times B$ счётно.

Доказательство.

Рассмотрим семество множеств $A_a = \{(a, b) \mid b \in B\}$. $\forall a \in A \quad A_a$ равномощно B, значит, A_a счётно. При этом, различных A_a - счётно, столько-же скольо элементов A.

Тогда

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} A_a.$$

счётно по предыдущей лемме. □

Утверждение 1.2.

Множества $(0, 1]$ и $[1, +\infty)$ равномощны с биекцией $\frac{1}{x}$.

Множества $[0, 1]$ и $[0, 1)$ равномощны

Доказательство.

Пусть $B = [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{i} \mid i \geqslant 1\right\}$

$$[0, 1] = \left\{\frac{1}{i} \mid i \geqslant 1\right\} \cup B.$$

$$[0, 1) = \left\{\frac{1}{i} \mid i > 1\right\} \cup B.$$

Возьмём биекцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{i+1} & x = \frac{1}{i} \\ x \end{cases}$$

□

Теорема 1.3.
Если A бесконечно, B конечно или счётно, то $A \cup B$ равномощно A.

Доказательство.
Рассмотрим случай $A \cap B = \varnothing$.

Возьмём счётное $A_0 \subset A$.

Начнём строить биекцию: $\forall x \in A \setminus A_0 \quad f(x) = x$.

Так-как $A_0 \cup B$ счётно, то между A_0 и $A_0 \cup B$ существует биекция, воспользуемся ей чтобы достроить f. □

Теорема 1.4.
Отрезок $[0, 1]$ равномощен множеству бесконечных последовательностей из $\{0, 1\}$.

Доказательство.
Можно доказывать для $[0, 1)$, так-как они равномощны.

Каждому $x \in [0, 1)$ соответствует представление в двоичной системе счисления. (например, $\frac{1}{4} = 0.010000000$.

Заметим, что разные числа переходят в разные последовательности, но разные последовательности могут перейти в одно число. Для чисел вида $\frac{n}{2^k}$ $n, k \in \mathbb{N}$ существует две последовательности.

Тогда, множество последовательностей $\sim [0, 1) \sqcup \{\frac{n}{2^k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что второе множество счётно, значит множество последовательностей равномощну интервалу, который равномощен отрезку. □

Теорема 1.5.
Множества $[0, 1]$ равномощно множеству $[0, 1] \times [0, 1]$.

Доказательство.
Возьмём по предыдущей теореме последовательности a_i и b_i для $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Сделаем из них последовательность $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$. Между такими последовательностями есть биекция, при этом, между второй последовательностью и отрезком есть биекция. □

Теорема 1.6 (Теорема Кантора)**.**
Множество бесконечных последовательностей из $\{0, 1\}$ несчётно.

Доказательство.
Предположим существование биекции f.

Построим последовательность b:

Пусть $b_1 = 1 - a_{11}$, тогда $b \neq f(1)$

Аналогично, $b_i \neq a_{ii}$. Тогда $\forall i \quad b \neq f(i)$. Противоречие. □

2. Лекция 2

Теорема 2.1 (Теорема Кантора 2)**.**
$[0, 1]$ несчётно.

Доказательство.
Предположим что $[0, 1]$ счётно. Тогда существует последовательность $a_1, a_2, \ldots,\ a_i \in [0, 1]$, $\forall x \in [0, 1] \quad \exists i \quad a_i = x$.

Разбьём отрезок на три части, первая точка попала не более чем в два подотрезка, выберем один из тех, в который не попало. Повторя, получим последовательность отрезков $I_1, I_2, \ldots$, $a_i \notin I_i$, $I_{i+1} \subset I_i$. По теореме о вложенных отрезках, $\bigcap_{i=1}^n I_i \neq \varnothing$, значит, есть число, которого нет в последовательности. Противоречие. □

Теорема 2.2 (Теорема Кантора-Бернштейна)**.**
Если $f_A : A \to B$, $f_B : B \to A$ - инъекции, то A равномощно B.

Доказательство.
Рассмотрим случай $A \cap B = \varnothing$.

Тогда, если построить двудольный граф где рёбра соответствуют отношениям, то $\forall x \in A \sqcup B$ есть ровно одно исходящее ребро и не более одного входящего ребра. Значит, максимальная степень графа - 2.

Графы с максимальной степени 2 являются объеденением графов следующих видов: конечный путь, бесконечный в одну сторону путь, бесконечный в обе стороны путь, цикл. Так-как граф двудольный, то цикл может быть только чётный, а конечных путей быть не может, так-как из каждой вершины есть изходящее ребро.

Рассмотрим цикл: выберем вершину x_1, назовём получаемую из неё по ребру вершниу y_1, биекция будет $x_i \to y_i$, тоесть, если вершина лежит на цикле, то для неё как биекция подходит f_A.

Рассмотрим бесконечный в одну сторону. Их два вида - начинающиеся в A и начинающиеся в B. Если вершина на пути начинающимся в A, то ей подойдёт f_A как биекция. Если путь начинается в y, то подойдёт f_B^{-1}.

Рассмотрим бесконечный в обе стороны путь: Назовём множество точек на нём $X = A_x \sqcup$, нужна функция отображающая $A_x \mapsto B_x$, f_A подойдёт. □

Теорема 2.3 (Теорема Кантора (обобщённая))**.**
Никакое множество X не равномощно 2^X (множество всех подмножеств X).

Доказательство.
Пусть существует $f : X \mapsto 2^X$ - биекция.

Рассмотрим $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. $Y \in 2^X \implies \exists y \in X \quad f(y) = Y$.

Тогда $y \in Y \iff y \in f(y) \iff y \notin Y$ - противоречие. □

2.1. Операции над мощностями

Если мощность конечна, то можем скалдывать, умножать, возводить в степень, и тд.

Обощим для бесконечных -

***Определение* 2.1.**

Пусть A, B - множества. Тогда сумма мощностей $|A| + |B| = |A \sqcup B|$, где $A \sqcup B = (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)$.

***Определение* 2.2.**

Пусть A, B - множества. Тогда произведение мощностей $|A| \cdot |B| = |A \times B|$

***Определение* 2.3.**

Пусть A, B - множества. Тогда, возведение мощностей в степень $|A|^{|B|}$ - мощность множества всех функций $f : B \mapsto A$.

Замечание.

Симметричные операции можно задать на самих множествах.

Свойства.

1. $|A|^{|B|+|C|} = |A|^{|B|} \times |A|^{|C|}$

   Доказательство.
   $|A|^{|B|+|C|}$ - мощность множества функций $f : B \sqcup C \mapsto A$. Каждую функцию можно рассмотреть как пару фукнций $g : B \mapsto A$ и $h : C \mapsto A$. $\square$

2. $(|A||B|)^{|C|} = |A|^{|C|} \cdot |B|^{|C|}$

   Доказательство.
   Функцию $f : C \mapsto A \times B$ можно представить как пару фукнций $g : C \mapsto A$ и $h : C \mapsto B$. $\square$

3. $|A|^{|B| \cdot |C|} = \left(|A|^{|B|}\right)^{|C|}$

   Доказательство.
   Пусть $f : B \times C \mapsto A$. Можно представить это как отображение элементов C в функции $f_c : B \mapsto A$. Получили функцию $g : C \mapsto (B \mapsto A)$. $\square$

***Определение* 2.4.**

Обозначим:

$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$

$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$

Свойства.

$$\aleph_0 + n = \aleph_0.$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$
$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$
$$\mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$
$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$
$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Утверждение 2.4.

Утверждение $\exists A \quad \aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$ нельзя ни доказать ни опровергнуть в ZFC.

3. Лекция 3

***Определение* 3.1.**

$\leqslant$ называется отношением частичного порядка если

1. $\forall a \quad a \leqslant a$
2. $\forall a, b \quad \begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \implies a = b$
3. $\forall a, b, c \quad \begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{cases} \implies a \leqslant c$

Если $\forall a, b \quad a \leqslant b \vee b \leqslant a$, то $\leqslant$ также называется отношение линейного порядка.

***Определение* 3.2.**

Пара $\langle X, \leqslant \rangle$ из множества и отношения частичного порядка называется частично упорядоченным множеством.

***Определение* 3.3.**

$<$ называется отношением строгого частичного порядка если

1. $\nexists a \quad a < a$
2. $\forall a, b, c \quad \begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases} \implies a < c$

Лемма.

Если $\leqslant$ - отношение частичного гопорядка, то $(\leqslant \wedge x \neq y)$ - отношение строгого частичного порядка.

Если $<$ - отношение строгого порядка, то $(< \vee x = y)$ - отношение частичного порядка.

Лемма.

Если X - ЧУМ, то $Y \subset X$ - ЧУМ, с отношением порядка полученным ограничением отношения из X на Y.

Если X, Y - ЧУМ, то $X \sqcup Y$ - ЧУМ.

Если X, Y - ЧУМ, то $X + Y$ - ЧУМ, такой, что $\forall x \in X, y \in Y \quad x \leqslant y$.

Если X, Y - ЧУМ, то $X \times Y$ - ЧУМ.

Покоординатный порядок: $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \iff x_1 \leqslant x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2$.

Лексикографический порядок: $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \iff x_1 \leqslant x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2)$.

***Определение* 3.4.**

Элемент $x \in X$ называется наибольшим, если $\forall y \in X \quad y \leqslant x$.

Аналогично наименьший.

***Определение* 3.5.**

Элемент $x \in X$ называется максимальным, если $\forall y \in X \quad x \leqslant y \implies x = y$.

Аналогично минимальный.

Утверждение 3.1.

Наибольший элемент максимален.

Утверждение 3.2.

Обратное в общем случае неверно.

Доказательство.

$$X = \{(1,0),(0,1)\}.$$

В покоординатном порядке эти пары не сравнимы, значит, они обе максимальны, но среди нех нет наибольшей. □

***Определение* 3.6.**

Пусть $\langle X, \leqslant_X\rangle$, $\langle Y, \leqslant_Y\rangle$ - ЧУМ.

X и Y называются изоформными, если $\exists f : X \mapsto Y,\ f$ - биекция, $\forall a, b \in X \quad a \leqslant_X b \iff f(a) \leqslant_Y f(b)$.

Теорема 3.3.

Конечные линейно-упорядоченные множества равной мощности изоморфны.

Доказательство.

Индукция по мощности. Для $\varnothing$ тривиально.

Возьмём $x_1 \in X$. Либо x_1 наименьший, либо можем взять элемент меньше него.

Будем выбирать $x_{i+1} < x_i$.

Так-как порядок линейный, а множество конечно, то когда-нибудь придём к наименьшему элементу.

Пусть x_i - наименьший элемент X, y_j - наименьший элемент Y.

Тогда, переводим $x_i \to y_i$, дальше по индукции. □

Утверждение 3.4.

Отрезок $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$ не изоформны.

Доказательство.

1 - наибольший элемент $[0, 1]$, а в $\mathbb{R}$ нет. Но если изоморфны, то должно быть $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant f(1)$. □

Утверждение 3.5.

$\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ не изоморфны.

Доказательство.

Рассмотрим $f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(2)$. В $\mathbb{Q}$ между ними есть некое z. Но тогда $1 < f(z) < 2$. А такого в $\mathbb{Z}$ нет. □

***Определение* 3.7.**

x и y называются соседними элементами, если $\nexists z \quad x < z < y$.

***Определение* 3.8.**

Порядок называется плотным, если не существует соседних элементов.

Теорема 3.6.

Любые равномощные множетсва с линейным плотным порядком, наибольшим и наименьшим элементом изоморфны.

Доказательство.

TODO: □

***Определение* 3.9.**

Антицепь - подмножество ЧУМ элементов, где каждая пара различных элементов несравнима.

***Определение* 3.10.**

Цепь - подмножество ЧУМ элементов, где каждая пара элементов сравнима.

Теорема 3.7 (Теорема Дилуорса)**.**

Если $\langle X, \leqslant \rangle$ - конечное ЧУМ, то размер наибольшей антицепи равен наименьшему количеству цепей, покрывающих X.

Доказательство.

Кол-во цепей $\geqslant$ макс антицепь - любые элементы в антицепи нсравнимы, значит не могут лежать в одной цепи.

Кол-во цепей $\leqslant$ макс антицепь:

Индукция по $|X|$: для $|X| = 0$ и $|X| = 1$ очевидно.

Выберем m - минимальный элемент в X.

Рассмотрим $X \setminus \{m\}$. Пусть в X есть антицепь размера S. Если мы можем покрыть $X \setminus m$ $S - 1$ цепью, то утверждение доказано.

Мы знаем, что $X \setminus m$ покрывается S цепями, по предположению индукции.

Рассмотрим множество антицепей размера S. Каждая антицепь имеет по одному элементу с каждой цепи.

Выберем x_i - наименьший элемент с i-й цепи, который входит в хотя-бы одну антицепь размера S.

Тогда $\{x_i\}$ образует антицепь. Если $x_1 < x_2$, рассмотрим антицепь A, в которую входит x_1. В A существует y, находящийся в то-же цепи что x_2. Тогда $y > x_2 > x_1 \implies y > x_1$, что невозможно в A.

Добавим m. У нас всё ещё нет антицепей размера $S + 1$. Значит, m сравним с одним из x_i. Так-как m - минимальный элемент X, то $m < x_1$. Построим цепь, состоящую из куска цепи где был x_1, и m. Остался «хвост» цепи, на котором нет ни одного элемента входящего в антицепь размера S. Тогда, у множества без новой цепи нет цепей размера S, можем покрыть его $S - 1$ цепью, значит можем покрыть X S цепями. □