Мат. Анализ 12

Igor Engel

1

Теорема 1.1. Инфинум по всем покрытииям прямоугольниками $\sigma(E)$ - квазиплощадь.
$\sigma(E)$ не меняется при парралелльном переносе.

Доказательство. Докажем сначала второе свойство: перенесём все прямоугольники вместе с E, они все ещё его покрывают, сумма их площадей не изменилась.
Докажем что это квазиплощадь:
Если $E \subset \tilde{E}$, то $\sigma(E) \leq \sigma(\tilde{E})$.
Любое покрытие $\tilde{E}$ так-же является покрытием E, значит инфинум не может быть больше $\sigma(\tilde{E})$.

$$\sigma(E) \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-).$$

Возьмём покрытие $E \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$.
Тогда разделим покрытие:

$$P_k^+\text{- часть } P_k \text{ лежащая правее прямой } \ell.$$

$$P_k^-\text{- часть } P_k \text{ лежащая левее прямой } \ell.$$

Тогда $|P_k| = |P_k^+| + |P_k^-|$.
Тогда

$$\sum_{i=1}^n |P_i| = \sum_{i=1}^n |P_i^+| + \sum_{i=1}^n |P_i^-|.$$

Правая часть соответствует покрытиям E_+ и E_-, значит $\sigma(E) \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$.

$$\sigma(E) \leq \sigma(E_+) + \sigma(E_-).$$

Возьмём какое-нибудь покрытие для E_+ (назовём P) и E_- (назовём Q).
Тогда

$$E \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \cup \bigcup_{k=1}^m Q_k.$$

Тогда $\sigma(E) \le \sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| + \sum\limits_{k=1}^{m} |Q_k|$.
Зафиксируем Q, тогда $\sigma(E) \le \inf \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |P_k| \right) + \sum\limits_{k=1}^{m} |Q_k|$.
Значит, $\sigma(E) \le \sigma(E_+) + \sum\limits_{k=1}^{m} |Q_k|$.
Взяв инфинум по Q получим $\sigma(E) \le \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$.
Значит, $\sigma(E) = \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$.

$$\sigma([a;b] \times [c;d]) = (b-a)(d-c).$$

Неравенство $\le$ очевидно.
Докажем $\ge$ неравенство:
Разделим прямоугольник на прямоугольники вертикальными (a) и горизонтальными (b) прямыми.
Тогда

$$\sigma(E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=j}^{m} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{m} b_j = (b-a)(d-c).$$

Теперь рассмотрим произвольное покрытие:
Проведём все вертикальные и горизонтальные прямые, которые будут включать в себя стороны прямоугольников.
Заменим все прямоугольники покрытаия его нарезкой.
Получсим некоторое покрытие, выкинем из него части, которые вылезают за границы исходного множества, и те, которые повторяются.
Площадь может только уменьшится, а в результате получится площадь начального прямоугольника. Значит площадь покрытия была не меньше. $\square$

Определение 1.1. $f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$.
Тогда

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Лемма 1.1.1.

$$f_\pm \ge 0.$$

$$f = f_+ - f_-.$$

$$|f| = f_+ + f_-.$$

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2}.$$

$$f_- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Если f непрерывна, то $f_\pm$ тоже непрерывна.

Определение 1.2. Пусть $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $f \geq 0$.
Тогда подграфик функции $\mathcal{P}_f = \{\langle x, y\rangle \mid x \in [a; b]\, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Лемма 1.2.1. Подграфик непрерывной функции - ограниченное множество,

Определение 1.3. Определённый интеграл функции $f \in C\,[a, b]$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\mathcal{P}_{f_+}) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}).$$

Лемма 1.3.1. Свойства интеграла:

1. $\int\limits_a^a f = 0$.

2. $\int\limits_a^b 0 = 0$.

3. $f \geq 0 \implies \int\limits_a^b f \geq 0$.

4. $\int\limits_a^b -f = -\int\limits_a^b f$.

5. $\int\limits_a^b c = c(b - a)$.

6. $\begin{cases} f \geq 0 \\ \int\limits_a^b f = 0 \end{cases} \implies f = 0.$

Доказательство. 6: Пусть $f(c) > 0$ при $c \in [a; b]$.
Тогда $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (c - \delta; c + \delta) \quad f(x) > \frac{f(c)}{2}$.
Тогда при $x \in \left[c - \frac{\delta}{2}; c + \frac{\delta}{2}\right]$, $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$.
Тогда подграфик содержит прямоугольник $\left[c - \frac{\delta}{2}, c + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[0; \frac{f(c)}{2}\right]$.
Площадь этого прямоугольника больше нуля, что пртиворечит тому, что площадь подграфика равна нулю. □

2 Свойства интегралов

Теорема 2.1 (Аддитивность интеграла)**.** Пусть $f \in C\,[a, b]$, $a \leq c \leq b$, тогда

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

Доказательство. Обозначим за $\mathcal{P}_f(E)$ - подграфик $f|_E$.
Тогда

$$\int\limits_a^c f = \sigma\left(\mathcal{P}_{f_+}([a,c]\right) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}([a,c])).$$

$$\int\limits_c^b \sigma(\mathcal{P}_{f_+}([c,b])) - \sigma(\mathcal{P}_{f_-}([c,b])).$$

Эти частичные подграфики являются разделением всего подграфика вертикальной прямой, значит их сумма равна площади самого подграфика. □

Теорема 2.2 (Монотонность интеграла)**.** $f, g \in C\,[a;b]$, $f \geq g$.
Тогда

$$\int\limits_a^b f \geq \int\limits_a^b g.$$

Доказательство. Заметим, что $f_+ \geq g_+$, $f_- \leq g_-$.
Значит, $\mathcal{P}_{f_+} \subset \mathcal{P}_{g_+}$, $\mathcal{P}_{g_-} \subset \mathcal{P}_{f_-}$.
Значит, $\sigma(P_{f_+}) > \sigma(\mathcal{P}_{g_+})$, $\sigma(\mathcal{P}_{f_-}) < \sigma(\mathcal{P}_{g_-})$. □

Лемма 2.2.1. Следствия:

1. $(b-a)\min\limits_{[a;b]} f \leq \int\limits_a^b f \leq (b-a)\max\limits_{[a;b]} f$

2. $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$

Доказательство.

1. $m \leq f \leq M \implies \int\limits_a^b m \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b M \implies (b-a)m \leq f \leq (b-a)M$

2. $-|f| \leq f \leq |f| \implies \int\limits_a^b -|f| \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b |f| \implies \left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b |f|$

□

Теорема 2.3 (Интегральная теорема о срденем)**.** $f \in C\,[a;b]$, тогда $\exists c \in [a;b]$ $\int\limits_a^b f = (b-a)f(c)$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса, $\exists p, q \in [a;b]$ $\begin{cases} f(p) = \min f \\ f(q) = \max f \end{cases}$.

Тогда $(b-a)f(p) \leq \int\limits_a^b f \leq (b-a)f(q)$.

$f(p) \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \leq f(q)$.

По теореме Больцано-Коши, $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f$. $\square$

Определение 2.1 (Среднее значение функции)**.**

$$I_f := \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f.$$

Определение 2.2 (Опр. интеграл с переменным пределом)**.**

$$\Phi, \Psi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}.$$

$$\Phi(x) := \int\limits_a^x f.$$

$$\Psi(x) := \int\limits_x^b f.$$

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_a^b f.$$

Теорема 2.4 (Теорема Барроу)**.** Если $f \in C[a, b]$, то $\Phi(x)$ - первообразная f.

Доказательство.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x).$$

Будем считать, что $h > 0$.

Тогда $\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+h} f$.

Тогда

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f.$$

Тогда $\exists \theta_h \in [0; 1] \quad \Phi'(x) = \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f = f(x + \theta_h h)$.

По нерпреывности, $\lim\limits_{h \to 0} f(x + \theta_h h) = f(x)$. $\square$