Алгебра 8

Igor Engel

1

Определение 1.1. Знакопеременная группа $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ - чётная}\}$ Оно группа, так-как равна ядру гомоморфизма знака.

Лемма 1.1.1.
$$|A_n| = \frac{n!}{2}.$$

Теорема 1.1. Знак перестановки равен $(-1)^{\text{кол-во циклов чётной длины}}$

Лемма 1.1.1. $\operatorname{sgn} \sigma \in S_n = (-1)^{n-k}$, где k - число орбит.

Доказательство. Каждая орбита раскладывается в $|\Omega| - 1$ транспозиций, сумма порядков орбит равна n, сумма -1 равна k. □

Теорема 1.2. Пусть $c = (a_1 \dots a_k)$, тогда
$$gcg^{-1} = (g(a_1) \dots g(a_K)).$$

Доказательство.
$$gcg^{-1}(g(a_1)) = gc(a_1) = g(a_2).$$
итд. □

Лемма 1.2.1. Пусть $\sigma \in S_n = c_1c_2c_3 \dots c_k$, тогда
$$g\sigma g^{-1} = gc_1g^{-1}gc_2g^{-1} \dots gc_kg^{-1}.$$
Где gc_ig^{-1} - независимые циклы.

Определение 1.2. Цикловый (цикленный) тип перестановки $\sigma \in S_n$ - набор пар $(1, k_1), \dots, (n, k_n)$, где k_i - количество орбит длины i относительно σ.

Лемма 1.2.1.
$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n \quad (\exists g \in S_n \quad g\sigma_1 g^{-1} = \sigma_2) \iff \text{циклинный типы } \sigma_1 \text{ и } \sigma_2 \text{ равны.}$$

Доказательство. Необходимость тривиальна.
Достаточность: Пронумеруем все циклы в σ_1 и σ_2, так, чтобы циклы меньшей длины имели меньший номер.
Запишем каждый цикл начиная с наименьшего элемента в нём.

$$\sigma_1 = (a)(b)(c)(d, e) \dots .$$
$$\sigma_2 = (a')(b')(c')(d', e') \dots .$$

Тогда можно построить перестановку g, так-как элементы в разложении не повторяются. $\square$

Теорема 1.3. Пусть $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$.
Тогда $h_1, \dots h_k$ порождают G, тогда и только тогда когда g_i выражается через h_j.

Теорема 1.4. S_n порождена транспозициями вида $(1, i)$, где $i \in [2; n]$.

Доказательство.
$$(a, b) = (1, a)(1, b)(1, a)$$ $\square$.

Теорема 1.5.
$$S_n = \langle \tau = (12), c = (1 \dots n) \rangle .$$

Доказательство. По индукции.
При $n = 2$ тривиально.
Заметим, что $S_{n-1} \leq S_n$.
Построим $\sigma' \in S_{n-1}$ из $\sigma \in S_n$.
Пусть $\sigma(n) = i$, тогда $(\sigma c^{n-i-1})(n) = (n)$.
По индукции σ' выражается через τ и c'.
Заметим, что $\tau c = (2 \dots n)$.
Тогда $c^{-1} \tau c^2 = (1 \dots n-1) = c'$.
$\square$

Теорема 1.6.
$$A_n = \langle (123), (124), \dots, (12n) \rangle .$$

Доказательство. По индукции.
$\sigma \in A_n$.
$\sigma[n] = i$.
$(12n)^2(12i)\sigma = \sigma' \in A_{n-1}$.
$\square$

Теорема 1.7. Пусть $g_1 = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$, $g_2 = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$.
Тогда $g_1 \times g_2 = \langle (h_1, e_2), \dots, (h_n, e_2), (e_1, g_1), \dots, (e_1, g_n) \rangle$.

Определение 1.3. Пусть $G_1, G_2 \leq G$, G раскладывается в прямое произведение, если $f : G_1 \times G_2 \mapsto G$, $f(g_1, g_2) = g_1 g_2$ - изоморфизм.

Теорема 1.8. Пусть $G_1, G_2 \leq G$, то G раскладывается в прямое произведение G_1 и G_2 тогда и только тогда, когда выполнятются три условия:

1. $g_1 \cap g_2 = \{1\}$
2. $\forall x \in G_1, y \in G_2 \quad xy = yx$
3. $\langle G_1, G_2 \rangle = G$

Доказательство. Необходимость очевидна.
Докажем что f гомоморфизм.

$$f((h_1, h_2) \cdot (g_1, g_2)) = f((h_1 g_1, h_2 g_2)) = h_1 g_1 h_2 g_2 = g_1 g_2 h_1 h_2 = (g_1 g_2, h_1 h_2) = f(g_1, g_2) f(h_1, h_2).$$

Образ f содержит G_1 и G_2, значит содержит порождённую ими группу, которая равна G.

$$(g_1, g_2) \in \ker f \iff g_1 g_2 = e \iff g_1 = g_2^{-1} \iff g_1 = g_2 = e.$$

Значит, ядро тривиально, и f инъективно. $\square$

Теорема 1.9. Если $H_1, H_2 \leq G$, $H_1 =< h_1, \dots h_\ell$, $H_2 = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$.
Тогда

$$\forall x \in H_1, y \in H_2 \quad xy = yx \iff \forall h_i, g_i \quad h_i g_i = g_i h_i.$$