Матан 9

Igor Engel

1

Определение 1.1. $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируемая на $\langle a, b\rangle$ непрерывна дифференцируема если f' будет непрерывна на $\langle a, b\rangle$.
Аналогично для дважды непрерывно дифференцируемой, и более высоких порядков.
Обозначения: $C^1(\langle a, b\rangle)$, $C^2(\langle a, b\rangle)$. $C(\langle a, b\rangle)$ - функция непрерывна на промежутке. $C^\infty(\langle a, b\rangle)$ - дифференцируема сколько угодно раз.

Теорема 1.1 (Арифметические действия с n-ми производными)**.** f, g, n раз дифференцируемы в x_0.
Тогда $\alpha f + \beta g$ n раз дифференцируема в x_0, $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.
fg n раз дифференцируема в x_0 и $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
$f(\alpha x + \beta)$ n раз дифференцируема, и $\alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)$.

Доказательство. База - $n = 1$, теоремы для первой производной.
1:
$$(\alpha f + \beta g)^{(n+1)} = ((\alpha f + \beta g)^{(n)})' = (\alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)})' = \alpha f^{(n+1)} + \beta g^{(n+1)}.$$

2:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}g^{(n+1-k)}+f^{(k+1)}g^{(n-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}f^{(j)}g^{(n+1-j)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= fg^{(n+1)}+f^{(n+1)}g+\sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k})f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

3:

$$(f(\alpha x+\beta))' = f'(\alpha x+\beta)\cdot(\alpha x+\beta)' = \alpha f'(\alpha x+\beta).$$

Однократное дифференцирование домножает на α, сделаем n раз, получим α^n. □

Лемма 1.1.1. $f(x) = (x-x_0)^k$

$$f^{(m)}(x_0) = \begin{cases} m! & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

Доказательство.

$$f^{(m)}(x) = (k)_m(x-x_0)^{k-m}.$$

Если $m < k$, то $(x_0-x_0)^{k-m} = 0$.
Если $m > k$, то $(k)_m = k\cdot(k-1)\cdot\ldots(k-k)\cdot\ldots = 0$.
Если $m = k$, то $(x_0-x_0)^0 = 1$, $(k)_k = k!$. □

Теорема 1.2. Пусть T многочлен, степени не больше n.
Тогда

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Правая часть называется формулой Тейлора для многочлена T.

Доказательство. (Доказательство взято из АУшного конспекта, я сам его чёт не совсем понимаю, если у кого есть получше - просьба написать мне)

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k.$$

$$T^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k ((x - x_0)^k)^{(m)}.$$

Подставим $x = x_0$

$$T^{(m)}(x_0) = c_m \cdot m! \implies c_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}.$$ □

Определение 1.2 (Многочлен Тейлора)**.** Пусть f дифференцируема в x_0 n раз. Тогда

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Определение 1.3 (Формула Тейлора)**.**

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x).$$

Лемма 1.3.1. g n раз дифференцируема в x_0, при этом

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда $g(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ при $x \to x_0$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \frac{g^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{n!(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{o(x - x_0)}{(x - x_0)} = 0
\end{aligned}$$ □

Теорема 1.3 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано)**.** $f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$, f n раз дифференцируема в x_0.
Тогда:

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + o((x - x_0)^n).$$

Доказательство.

$$g(x) = f(x) - T_{n,x_0} f(x).$$

$$g^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - (T_{n,x_0} f(x))^{(m)}.$$

$$g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \cdot m! = 0.$$

Верно $\forall m \quad 0 \le m \le n$.
Тогда $g(x) = o((x - x_0)^n)$. $\square$

Лемма 1.3.1. f n раз дифференцируема в точке x_0.
P - многочлен степени не выше n.
Если $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, то $P = T_{n,x_0} f$.

Доказательство.

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + o((x - x_0)^n).$$

$$Q(x) = P(x) - T_{n,x_0} f(x) = o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k.$$

Рассмотрим c_m - первый ненулевой коэффициент.
Тогда $Q(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} c_k (x - x_0)^k$.

$$\left(\frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^k} \to 0 \right) = \frac{Q(x)}{(x - x_0)^k} = c_m + \sum_{k=m+1}^{n} c_k (x - x_0)^{k-m} \to c_m.$$

Значит, $c_m = 0$, что невозможно по предположению что c_m - ненулевой коэффициент.
Значит, ненулевых коэффициентов не существует. $\square$

Теорема 1.4 (Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)**.** $f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$, дифференцируема $n + 1$ раз на $\langle a, b \rangle$.
$x_0, x \in \langle a, b \rangle$.
Тогда: (ВНИМАНИЕ: (x, y) в этой теореме означает $(\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$)

$$\exists c \in (x, x_0) \quad f(x) = T_{n,x_0} f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}.$$

Доказательство. При $n = 0$, эквивалентно теореме Лагранжа.

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + M(x - x_0)^{n+1}.$$

$$g(t) = f(t) - T_{n,x_0} f(t) - M(t - x_0)^{n+1}.$$

$$g(x) = 0.$$

$$g(x_0) = f(x_0) - T_{n,x_0} f(x_0) = 0.$$

$$g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - (T_{n,x_0} f(x_0))^{(m)} \impliedby 0 \le m \le n.$$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M(n+1)!.$$

Надо найти такую точку c, что $g^{(n+1)}(c) = 0$.

$$g(x) = g(x_0) = 0 \implies \exists c_1 \in (x, x_0) \quad g'(c_1) = 0.$$

$$g'(c_1) = g(x_0) = 0 \implies \exists c_2 \in (c_1, x_0) \quad g''(c_1) = 0.$$

Повторяем $n+1$ раз, найдём c_{n+1}. $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. □

Лемма 1.4.1. Если $\forall t \in (x, x_0) \quad |f^{(n+1)}(x)| \le M$ то

$$R_{n,x_0}f(x) \le \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Лемма 1.4.2. Есои $\forall n \quad \forall t \in \langle a, b \rangle \quad |f^{(n)}(t)| \le M$, то

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,x_0}f(x) = f(x).$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}f(x) \le \lim_{n\to\infty} \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

□