Математический анализ

Игорь Энгель

10 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчесление одной переменной

1.1. Интегральные суммы

1.1.1. Модуль непрерывности (с первого семестра)

***Определение* 1.1.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)|.$$

(Если функция непрерывна всюду, то δ зависит от ε и y, а если равномерно - только от ε).

Замечание.

Липшицева функция всегда равномерно нерпревна.

$$\forall x, y \in E \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Теорема 1.1 (Теорема Кантора)**.**

$f \in C[a, b]$, f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

Предположим что равномерной непрерывности нет. Значит,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in [a, b] \quad \begin{cases} |x - y| < \delta \\ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$. Пусть оно не подходит. Т. е.

$$\forall n \quad \exists x_n, y_n \quad \begin{cases} |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Возьмём подпоследовательность x_{n_k} имеющюю предел, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, $c \in [a, b]$.

Заметим, что $y_{n_k} \in \left[x_{n_k} - \frac{1}{n}; x_{n_k} + \frac{1}{n}\right]$, значит $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = c$.

Так-как f непрерывна в c, выберем подоходящее δ' по $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\forall x \in [a; b] \quad |x - c| < \delta' \implies |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так-как $\exists K \quad \forall k > K \quad x_{n_k}, y_{n_k} \in [c - \delta', c + \delta']$, возьмём такую пару, тогда

$$\begin{cases} |x_{n_k} - c| < \delta' \\ |y_{n_k} - c| < \delta' \end{cases} \implies \begin{cases} |f(x_{n_k}) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(c) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \implies |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon.$$

Значит, $\delta = \frac{1}{n}$ подходит, и функция равномерно непрерывна.

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{y \in E} \delta(\varepsilon, y).$$

□

***Определение* 1.2** (Модуль непрерывности)**.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}$, тогда модуль непрерывности $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{|x-y|\leqslant\delta} |f(x) - f(y)|$

Свойства.

$\omega_f(0) = 0$.

$\omega_f(\delta) \geqslant 0$.

ω_f - нестрого монотонно возрастает.

$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x - y|)$.

f равномерно непрерывна на E тогда и только тогда, когда $\omega_f(\delta)$ непрерывна в нуле.

Доказательство.

Необходиомть:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$\forall x, y \in E \quad |x - y| < \frac{\delta}{2} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$\omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) < \varepsilon.$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\beta > 0 \quad \forall 0 < \gamma < \beta \quad \omega_f(\gamma) < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Достаточность:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x - y|) \leqslant \omega_f(\delta).$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \omega_f(\delta) < \varepsilon \implies \forall x, y \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

□

1.1.2. Собственно, интегральные суммы

***Определение* 1.3.**

Дроблением (разбиением, пунктиром) отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$$\tau = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}.$$

Такой, что $\forall k \quad x_{k-1} < x_k$

***Определение* 1.4.**

Мелкотью дробления τ называется $|\tau| = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \{x_k - x_{k-1}\}$

***Определение* 1.5.**

Оснащённым дроблением называется пара $\langle\tau, \xi\rangle$, где τ - дробление, $\xi = \{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

***Определение* 1.6** (Интегральная сумма (сумма Римана))**.**

Пусть есть функция $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, и оснащённое дробление $\langle\tau, \xi\rangle$

Тогда сумма Римана этой функции:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Теорема 1.2 (Теормеа об интегральных суммах)**.**

Пусть $f \in C\,[a,b]$, $\langle \tau, \xi \rangle$ - оснащённое дробление $[a,b]$. Тогда

$$\left| S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \right| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta &= S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - s_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f \\
&= \sum_{k=1}^n \left(f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)dt - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ((f(\xi_k) - f(t))dt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta| &= \left| \sum_{k=1}^n \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(t))dt \right) \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(t))\,dt \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(t)|dt \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(x_k - x_{k-1})dt \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \omega_f(|\tau|)(x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b-a)
\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \langle \tau, \xi \rangle \quad |\tau| < \delta \implies \left| S\left(f,\tau,\xi\right) - \int\limits_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

$$f \in C\,[a,b] \implies \lim_{\alpha \to 0} \omega_f(\alpha) = 0.$$

По $\varepsilon > 0$ можем выбрать $\delta > 0$, такое, что $0 < |\tau| < \delta \implies \omega_f(|\tau|) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

$$\left| S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \right| < (b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)} = \varepsilon. \qquad \square$$

Следствие. Пусть $\langle \tau_n, \xi_n \rangle$ - последовательность дроблений, такая, что $\lim |\tau_n| = 0$, тогда

$$\lim S\left(f, \tau_n, \xi_n\right) = \int\limits_a^b f.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$, выбираем δ по предыдущему следствию, так-как $|\tau_n| \to 0$, то $\exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |\tau_n| < \delta$, тогда $|S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f| < \varepsilon$. $\square$

Пример.

$$S_n(p) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

Хотим что-то узнать про эту сумму ($p > 0$).

Можем легко оценить сверху: $S_n(p) < nn^p = n^{p+1}$

Оценим снизу через середину:

$$\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^p = \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} < S_n(p).$$

Попробуем посчитать предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^p} \cdot \frac{1}{n}.$$

Представим как интегральную сумму: возьмём отрезок $[0,1]$, $x_k = x_{k-1} + \frac{1}{n}$. $\xi_k = x_k$, $f(t) = t^p$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^p} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int\limits_0^1 f(t)dt = \left.\frac{t^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Тогда $S_n(p) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Лемма. Пусть есть $f \in C^2\left[\alpha,\beta\right]$, тогда

$$\Delta = \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta - t)dt.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'dt \\
&= f(t)(t-\gamma)|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt \\
&= f(\beta)\frac{\beta-\alpha}{2} - \left(f(\alpha)\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt \\
&= \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)dt
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$((t-\alpha)(\beta-t))' = (-t^2+(\alpha+\beta)t-\alpha\beta)' = -2t+(\alpha+\beta) = -2(t-\gamma).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma) \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))' \\
&= \frac{1}{2}\left(f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(t-\beta)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.3 (оценка погрешностей в формуле трапеции)**.** $f \in C^2[a,b]$, τ - дробление. Тогда

$$\left|\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|.$$

Доказательство.

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)dt\right).$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)||t-x_{k-1}||x_k-t| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''|\left(\frac{|\tau|}{2}\right)^2 = \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''(t)|dt.$$

□

Замечание. Если в τ $x_k = (b-a)\frac{k}{n}$, $|\tau| = \frac{b-a}{n}$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(x_n)\right).$$

Теорема 1.4 (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)**.** $f \in C^2\,[m,n]$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})dt.$$

Доказательство.

$$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(t)dt + \frac{f(k)-f(k+1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\{t\}dt.$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{f(m)-f(n)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\{t\}(1-\{t\})dt.$$

Если прибавить $f(n)$, то получим нужную формулу.

Теперь докажем первую формулу. Можем считать что $k=0$, так-как можно заменить функцию.

$$f(0) = \int\limits_0^1 f(t)dt + \frac{f(0)-f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)t(1-t) \iff \int\limits_0^1 f(t)dt - \frac{f(0)-f(1)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)t(1-t).$$

А последнее выражение верно по лемме. □