Мат. Анализ 8

Igor Engel

1 Дифференциальное исчисление

1.1 Дифференцируемость и производная

Определение 1.1. $f : \langle a,b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$.
f дифференцируема в точке x_0, если

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0.$$

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad f(x_0 + dx) = f(x_0) + kdx + o(dx) \quad dx \to 0.$$

Определение 1.2. Производная f в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{dx\to 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}.$$

Теорема 1.1 (Критерий дифференцируемости)**.** $f : \langle a,b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$.
Следующие условия равносильны:

1. f дифференцируема в точке x_0
2. Существует конечная $f'(x_0)$
3. $\exists \varphi : \langle a,b\rangle \mapsto \mathbb{R} \quad f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, φ непрерывна в точке x_0.
4. $\exists \varphi : \langle a,b\rangle \mapsto \mathbb{R} \quad f(x_0 + dx) - f(x_0) = \varphi(x_0 + dx)dx$, φ непрерывна в точке x_0

Если эти условия выполняются, то $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Доказательство. $k \implies f'$:

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o(x - x_0) \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \to k.$$

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = kdx + o(dx) \implies \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = k + \frac{o(dx)}{dx} \to k.$$

Тогда производная существует, конечна, и равна k.
$f' \implies \varphi$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x) \end{cases}$$

$$\varphi(x_0+dx) = \begin{cases} \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} & dx \neq 0 \\ f'(x_0) \end{cases}$$

Проверим что φ непрерывна:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0).$$

$$\lim_{dx\to 0} \varphi(x_0+dx) = \lim_{dx\to 0} \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \varphi(x_0).$$

$\varphi \implies k$:
φ непрерына, значит, $\varphi(x) = \varphi(x_0) + o(1)$.

$f(x) = f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0) = f(x_0)+(\varphi(x_0)+o(1))(x-x_0) = f(x_0)+\varphi(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

$f(x_0+dx) = f(x_0)+dx\cdot\varphi(x_0+dx) = f(x_0)+dx\,(\varphi(x_0)+o(1)) = f(x_0)+\varphi(x_0)\cdot dx+o(dx)$.

Значит, $k = \varphi(x_0)$. □

Определение 1.3. Производная справа:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{dx\to 0+} \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}.$$

Аналогично слева.

Лемма 1.3.1.

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \implies f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Определение 1.4.

$$f(x_0+dx) = f(x_0) + kdx + o(dx).$$

Отображение $dx \mapsto kdx$ называется дифференциалом.

Теорема 1.2. Если f дифференцируема в x_0, то f непрерывна в x_0.

Доказательство.

$$f(x+dx) = f(x_0) + kdx + o(dx).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{dx\to 0} kdx + \lim_{dx\to 0} o(dx) = f(x_0).$$ □

Теорема 1.3 (Арифметические действия с производными). $f, g : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, f, g - дифференцируемы в x_0.
Тогда:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)\,(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

□

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x)g(x) - f(x)g(x_0)) + (f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)
\end{aligned}$$

□

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

Доказательство. $g(x) = c \implies f'(x) = 0 \implies (fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) = cf'(x_0)$. □

$$g(x_0) \neq 0 \implies \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}$$
$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\cdot\left(\lim_{x\to x_0}g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$=\frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

□

Теорема 1.4 (Производная композиции)**.** $f:\langle a,b\rangle\mapsto\mathbb{R}$, $g:\langle c,d\rangle\mapsto\langle a,b\rangle$, $x_0\in\langle c,d\rangle$, g дифференцируема в x_0, f в $g(x_0)$.

$$(f\circ g)(x)=f'(g(x))g'(x).$$
$$\frac{d(f\circ g)}{dx}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

Доказательство.

$$y_0=g(x_0).$$
$$g(x)-g(x_0)=\psi(x)(x-x_0),\ \psi \text{ непрерывна в } x_0.$$
$$f(y)-f(y_0)=\varphi(y)(y-y_0),\ \varphi \text{ непрерывна в } y_0.$$
$$f(g(x))-f(g(x_0))=\varphi(g(x))(\psi(x)(x-x_0)).$$

$g(x)$ непрерывна в x_0, значит $\varphi(g(x))$ непрерывна в x_0, и $\varphi(g(x))\psi(x)$ непрерывна в x_0, как произведение непрерывных. □

Теорема 1.5 (Производная обратной фнукции)**.** $f:\langle a,b\rangle\mapsto\mathbb{R}$, f непрерывна, строго монотонна и дифференцируема в x_0, при этом $f'(x_0)\neq 0$.
Тогда, $g=f^{-1}$ дифференцируема в $y_0=f(x_0)$, $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(g(x_0))}$.

Доказательство.

$$f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0).$$

Заметим, что $\varphi(x)\neq 0$, так-как в $x\neq x_0\implies f(x)-f(x_0)\neq 0$, а в x_0 она равна производной.

$$x-x_0=\frac{1}{\varphi(x)}(f(x)-f(x_0))\iff g(y)-g(y_0)=\frac{1}{\varphi(x)}(y-y_0).$$

Так-как $\varphi(x)\neq 0$, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ непрерывна.

$$g'(y_0)=\frac{1}{\varphi(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

□

1.2 Производные элементарных функций

$$c' = 0.$$

$$(x^p)' = px^{p-1}.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0.$$

$$(e^x)' = e^x.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

$$(\cos x)' = \sin x.$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = 0\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство.

$$(x^p)' = \lim_{dx\to 0} \frac{(x+dx)^p - x^p}{dx} = x^p \lim_{dx\to 0} \frac{(1+\frac{dx}{x})^p - 1}{\frac{dx}{x}} = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = px^{p-1}.$$

$$(a^x)' = \lim_{dx\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{dx\to 0} \frac{a^{dx} - 1}{dx} = a^x \ln a.$$

$$(\ln x)' = \lim_{dx\to 0} \frac{\ln(x+dx) - \ln x}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{\frac{dx}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)' = \lim_{dx\to 0} \frac{\sin(x+dx) - \sin x}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{2\left(\sin\frac{dx}{2}\cos\left(x+\frac{dx}{2}\right)\right)}{dx} = \cos x.$$

Косинус аналогично, остальные по арифметике и обратным. □

1.3 Теорема о среднем

Теорема 1.6 (Теорема Ферма)**.** $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, и $f(x_0) = \max f(x)$ или $\min f(x)$, и f дифференцируема в x_0, тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Для определённости, пусть будем минмум.

$$\begin{cases} f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \\ f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \end{cases} \implies f'(x_0) = 0$$

□

Теорема 1.7 (Теорма Ролля)**.** $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, дифференцируема на (a, b), непрерывна на всём отрезке, и $f(a) = f(b)$.
Тогда существует $c \in (a, b)$, $f(c) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса, f достигает максимума и минимума в каких-то точках.
Если максимум или минимум внутри интервала, то по теореме Ферма производная там равна нулю.
Если и максимум и минимум достагается на концевых точках, то функция постоянна на отрезке, и её производная равна нулю. □

Теорема 1.8 (Теорема Лагранжа (формула конечных приращений))**.** $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, дифференцируема на интервале, непрерывна на отрезке.

$$\exists c \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

$$\exists c \in (a, b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доказательство.

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$g(x) = f(x) - k(x - a).$$

$$g(a) = f(a).$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Применим теорему Ролля:

$$\exists c \in (a, b) \quad g'(c) = 0 = f'(c) - k = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c)(b - a) = f(b) - f(a).$$

□

Теорема 1.9 (Теорема Коши (очередная))**.** $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, f, g непрерывны на отрезке, дифференцируемы на интервале, $\forall x \in (a, b) \quad g'(x) \neq 0$.
Тогда

$$\exists c \in (a, b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$$h(x) = f(x) - k(g(x) - g(a)).$$

$$\exists c \in (a, b) \quad h'(c) = 0 = f'(c) - kg'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) \implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

1.3.1 Следствия из Лагранжа

$f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathbb{R}$, диффферецируема на интервале, непрерывна на промежутке.

Лемма 1.9.1. Если $\forall x \in (a, b) \quad |f'(x)| \leq M$, то

$$\forall x, y \in (a, b) \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Такая функция называется Липшицевой функйией с константой M.

Доказательство. По Т. Л. $\exists c \in (x, y) \quad |f(y) - f(x)| = f'(c)|x - y| \leq M|x - y|$. □

Лемма 1.9.2. Если $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0$, то f нестрго монотонно возрастает.

Доказательство.

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0 \iff y \geq x.$$

□

Лемма 1.9.3. Если $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$, то f строго монотонно возрастает.

Лемма 1.9.4. Если $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \leq 0$, то f нестрого монотонно убывает.

Лемма 1.9.5. Если $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < 0$, то f строго монотонно убывает.

Лемма 1.9.6. Если $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$, то $f(x) = \text{const}$.

Теорема 1.10 (Теорема Дарбу)**.** $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, f дифференцируема на отрезке.
Пусть C лежит строго между $f'(a)$, $f'(b)$, тогда $\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = C$

Доказательство. Случай $C = 0$.
Для определённости $f'(a) < 0 < f'(b)$.
f непрерывна, значит принимает максимальное и минимальное значение на отрезке.
При таких знаках производной, минимум функции точно будет внутри интервала, и в этой точке $f'(x) = 0$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Пусть a - точка минимума. Тогда числитель больше нуля, знаменатель больше нуля, предел ≥ 0, но $f'(a) < 0$.
Аналогично для $f'(b)$.
При другой расстановке знаков, внутри будет максимум.
Если $C \neq 0$, можно из f вычесть фукнцию Cx, и получится случай для $C = 0$.

□

Лемма 1.10.1. Пусть $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, f непрерывна на промежутке, диффренцируема на интервале, $f'(x) \neq 0$ на всём интервале. Тогда f строго монотонна.

Доказательство. Если существет точки в которых производная разных знаков, то между ними была-бы точка с нулевой производной. □

Теорема 1.11 (Правило Лопиталя)**.** Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
$f, g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0$.
$\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to b-} g(x) = 0$.
Если $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Доказательство. По предыдущей лемме, g строго монотонно, значит, она либо везде положительна, либо везде отрицательная, и $g(x) \neq 0$.
Проверим предел по Гейне. Возьмём монотонно возрастающую последовательность $x_n \to b$.
Тогда $g(x_n)$ строго монотонно.
Тогда, по теореме Штольца:

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})}.$$

$$\exists c_n \in (x_{n-1}, x_n) \quad \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$c_n \to b$, значит, предел равен ℓ.

□

Теорема 1.12 (Лопиталь для бескончностей)**.** Меняем условие $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to b-} g(x) = 0$, на $\lim\limits_{x \to b-} g(x) = +\infty$. Доказательство аналогично Лопиталю для нулей, с заменёнными пределами последовательностей.

1.4 Производные высших порядков

Определение 1.5. $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки x_0, тогда f' определена в окретнсоти x_0, и если f' дифференцируема, то f дифференцируема дважды, в x_0.
Вторая производная f - производная f'.