Алгебра 10

Igor Engel

1

Определение 1.1. Отображение $f : G \times X \mapsto X$, $\langle g, x\rangle \to gx$ называется действием G на x, если:

1. $\forall x \in X \quad (e, x) \to x$
2. $\forall g_1, g_2 \in G \quad f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x)$

Определение 1.2. Группа действует на множестве, если существует действие этой группы на это множесетсво.
Обозначается $G \curvearrowright X$

Лемма 1.2.1. Если $G \curvearrowright X$.

1. $\forall n > 0 \quad G \curvearrowright X^n$
2. $G \curvearrowright 2^X$
3. $G \curvearrowright \{f \mid f : X \mapsto A\}$
4. Пусть $H \leq G$, тогда $H \curvearrowright X$
5. Если существует гомоморфизм $H \mapsto G$, то $H \curvearrowright X$

Теорема 1.1. G - группа, X - множество. Тогда есть биекция между действиями $G \curvearrowright X$ и гомоморфизмами $G \mapsto S_X$.

Доказательство. Действие по гомоморфизму тривиально: $S_X \curvearrowright X$, ограничим S_X на образ G.
Построим гомоморфизм $T_g : G \mapsto S_X$ по действию:
$T_g(x) = gx$.
T_g - биекция, так-как $T_{g^{-1}}(T_g(x)) = g^{-1}gx = x$.
T_g - гомоморфизм, так-как $T_{g_1}(T_{g_2}(x)) = g_1 g_2 x = T_{g_1 g_2}(x)$.
Покажем что построение T_g обратно ограничению на образ:

$$\langle g, x\rangle \to T_g(x) = g \cdot x.$$
$$\langle g, x\rangle \to \varphi_g(x) = g \cdot x.$$
□

Лемма 1.1.1. G - все изометрии, сохраняющие правильный тетраэдр. $G \cong S_4$.

Доказательство. Заметим, что любая изометрия пространства определяется образом четырёх точек, не лежащих в одной плоскости.
Гомоморфизм существует, так-как $G \curvearrowright$ множество вершин.
Если все 4 вершины остались на месте, то G - тождественная перестановка. Значит, гомоморфизм инъективен.
Заметим, что перестановки (12) и (1234) входят в образ G, как симметрия и поворот на $120°$.
$S_4 = \langle 12, 1234 \rangle$, значит гомоморфизм сюръективен, а значит он изоморфизм. □

Лемма 1.1.2 (Теорема Кэли)**.** Любая группа G, $|G| = n$ вкладывается в S_n.

Доказательство. Зададим действие $G \curvearrowright G$: $f(g, h) = gh$.
Получили $\varphi : G \mapsto S_G$, докажем что он инъективен:
Путь $g \neq e$, тогда $\varphi(g)(1) = g$. Значит, ядро тривиально. □

Теорема 1.2. $G \curvearrowright X$, $Y \subset X$. $G \curvearrowright Y \iff \forall g \in G \quad g(Y) \subset Y$.
Y называется инвариантным подмножеством, если $G \curvearrowright Y$.

Определение 1.3. $G \curvearrowright X$, $x \in X$, орбитой элемента x назывется $Gx = O_x = \{gx \mid g \in G\}$.

Лемма 1.3.1. $G \curvearrowright X$, $x \sim y := y \in O_x$ - отношение эквивалентности.

Доказательство.

$$x = ex.$$

$$y = gx \implies x = g^{-1}x.$$

$$y = gx \quad z = hy \implies z = hgx.$$

□

Определение 1.4. $G \curvearrowright X$, $x \in X$, $G_x = \mathrm{Stab}_x$ - $\{g \in G \mid gx = x\}$.

Лемма 1.4.1. $\forall x \in X \quad \mathrm{Stab}_x \leq G$.

Теорема 1.3. $G \curvearrowright X$, $x \in X$, есть биекция $f : y \in O_x \mapsto g\,\mathrm{Stab}_x \in G/\,\mathrm{Stab}_x$.

Доказательство. Пусть $y = gx$. Тогда $y = gx \to_f g\,\mathrm{Stab}_x \to_{f^{-1}} gx = y$
Докажем корректность:
$h \in \mathrm{Stab}_x$, $g_2 = g_1 h$. Тогда $g_2 x = g_1 h x = g_1 x$.
Обратимость тривиальна. □

Лемма 1.3.1. $G \curvearrowright X$, $x \in X$. Тогда $|G| = |\mathrm{Stab}_x|\,|O_x|$.

Лемма 1.3.2 (Лемма Шрайера)**.** $\langle g_1, \dots, g_n \rangle = G$, $G \curvearrowright X$, $x \in X$.
При этом $g_i^{-1} \in \{g_1, \dots, g_n\}$. Для каждого $y \in O_x$, зафиксируем h_y, такое, что $h_y(x) = y$. При этом $h_x = e$
Тогда $\mathrm{Stab}_x = \left\langle h_{g_i y}^{-1} g_i h_{g_i y} \right\rangle$

Доказательство. Возьмём $g \in \mathrm{Stab}_x$.
$g = g_{i_s} \dots g_{i_1}$.
$x \to^{g_{i_1}} x_1 \to^{g_{i_2}} \to \dots \to^{g_{i_s}} x$.
Тогда $x = (h_{x_i}^{-1} x_i h_{x_i})(x)$. □