Матан 6

Igor Engel

1 Арифметика пределов

Теорема 1.1 (Предельный переход в неравенстве)**.**

$$f, g : E \mapsto \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in E \quad f(x) \leq g(x).$$

a - предельная точка E, и существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$.
Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Доказательство. Пусть $(x_n) \to a$.
Тогда $\lim f(x_n) = A$, $\lim g\left(x_n\right) = B$.

$$\forall x_n \quad f(x_n) \leq g(x_n) \implies A \leq B.$$ □

Теорема 1.2 (Теорема о двух миллиционерах)**.**

$$f, g, h : E \mapsto \mathbb{R}.$$

a - предельная точка E.

$$\forall x \in E \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство. Пусть $(x_n) \to a$.

$$\lim f(x_n) = \lim h(x_n) = A.$$

$$A \leq \lim g(x_n) \leq A \implies \lim g(x_n) = A \implies \lim_{x \to a} g(x) = A.$$ □

Определение 1.1 (Предел слева и справа)**.**

$$f : E \mapsto \mathbb{R}.$$

$E_1 = (-\infty; a) \cap E$, a - предельная точка E_1.

$$g = f|_{E_1}$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

$E_2 = (a, +\infty) \cap E$, a - предельная точка E_2.

$$h = f|_{E_2}.$$

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Пример 1.1.

$$f(x) = [x].$$

$$\lim_{x\to n+} [x] = n.$$

$$\lim_{x\to n-} [x] = n-1.$$

Лемма 1.1.1.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = A$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < a - x < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Лемма 1.1.2.

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A \iff \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Определение 1.2. $f : E \mapsto \mathbb{R}$ - монотонно возрастает если

$$\forall x, y \in E \quad x < y \implies f(x) \leq f(y).$$

Строго монотонно возрастает если

$$\forall x, y \in E \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

Аналогично для убывания

Лемма 1.2.1. $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $E_1 = (-\infty, a) \cap E$.
a - предельная точка E_1.
Если f монотонно возрастает и ограниченна сверху, то

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \sup_{x\in E_1} f(x).$$

Если f монотонно убывает и ограниченна снизу, то

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \inf_{x\in E_1} f(x).$$

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{x \in E_1} f(x) = B < \infty$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E_1 \quad f(y) > B - \varepsilon.$$

Пусть $\delta = a - y$, возьмём $0 < a - x < \delta \iff y < x < a$

$$B - \varepsilon < f(y) \le f(x) \le B < B + \varepsilon. \implies \lim_{x \to a-} f(x) = B.$$

□

Теорема 1.3 (Критерий Коши)**.**

$$f : E \mapsto \mathbb{R}.$$

a - предельная точка E.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A < \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad \begin{cases} 0 < |x - a| < \delta \\ 0 < |y - a| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in E \quad 0 < |y - a| < \delta \implies |f(y) - A| < \varepsilon.$$

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - A| + |A - f(y)| < 2\varepsilon.$$

Достаточность: Пусть $(x_n) \to a$.
Возьмём $\delta > 0$ по ε.
По δ найдётся N, такой, что $\forall n > N \quad |x_n - a| < \delta$, $\forall m > N \quad |x_m - a| < \delta$.
Тогда

$$\forall n, m > N \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Последовательность $f(x_n)$ - фундаментальна, значит у неё есть конечный предел.

□

2 Непрерывные функции

Определение 2.1. $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a \in E$.
f непрерывна в точке a, если выполняется одно из равносильных условий:

1. a - не предельная точка E или a - предельная точка и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. $\forall U_{f(a)} \quad \exists U_a \quad f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$
3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
4. Для любой последовательности $\{x_n \in E\} \to a$, $\lim f(x_n) = f(a)$

Теорема 2.1 (Арифметические действия с непрерывными функциями)**.** $f, g : E \mapsto \mathbb{R}$, $a \in E$, f, g - непрерывны в точке a.
Тогда:

1. $f \pm g$ - непрерывна в a
2. $f \cdot g$ - непрерывна в a
3. $|f|$ непрерывна в a
4. $\frac{f}{g}$ непрерывна в a, если $g(a) \neq 0$

Доказательство. Если a - не предельная точка, там непрерынвы все функции.
Если a - предельная точка, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a).$$

Другие пункты аналогично. □

Лемма 2.1.1. Многочлены непрерывным во всех точках.

Доказательство. $C_c(x) = c$ - непрерывна.
$f(x) = x$ - непрерывна.
$F_a(x) = x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{a}$ - непрерывна.
$P(x) = C_{a_0}(x) + C_{a_1} F_1(x) + \ldots C_{a_n} F_n(x)$ - непрервына. □

Лемма 2.1.2. Рациональные функции непрерывны во всех точках, где знаменатель не обращается в 0.

Доказательство. $P_1(x)$, $P_2(x)$ - непрерывны.
$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ - непрерывна, если $P_2(a) \neq 0$ □

Теорема 2.2 (Теорема о стабилизации знака)**.** $f : E \mapsto \mathbb{R}$, f непрерывна в точке a, $a \in E$, $f(a) \neq 0$.

$$\exists U_a \quad \forall x \in U_a \cap E \quad \operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(f(a)).$$

Доказательство. Если a не предельная точка, то утверждение эквивалентно $\operatorname{sign}(f(a)) = \operatorname{sign}(f(a))$.
Если a предельная точка, то следует из стабилизации знака для передлов. □

Теорема 2.3 (Теорема о непрервыности композиции)**.** $f : E \mapsto G \subset \mathbb{R}$, $g : G \mapsto \mathbb{R}$. f непрерывна в a, g непрерывна в $b = f(a)$.
$h(x) = g(f(x))$ непрерывна в a.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in G \quad |y - b| < \delta \implies |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall x \in E \quad |x - a| < \gamma \implies |f(x) < f(a)| < \delta.$$

$$y = f(x).$$

$$|x - a| < \gamma \implies |y - b| < \delta \implies |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

□

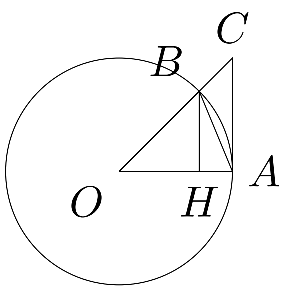
Лемма 2.3.1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, g непрерывна в точке A.
Тогда $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(A)$.

Доказательство. Подправим функцию f в точке a, так, чтобы $f(a) = A$. Пределы от этого не изменились.
Теперь f непрерывна в a, значит $g(f(x))$ непрерывна в a.
Значит, $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a)) = g(A)$. □

Теорема 2.4.

$$\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin x < x < \tan x.$$

Доказательство. Рассмотрим рисунок:



$$\sin x = BH.$$

$$\operatorname{tg} x = AC.$$

$$S_{\triangle OBA} < S_{OBA} < S_{\triangle OCA}.$$

$$S_{\triangle OBA} = \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{\sin x}{2}.$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} x r^2 = \frac{x}{2}.$$

$$S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{\tan x}{2}.$$

$$\sin x < x < \tan x.$$

□

Лемма 2.4.1. $|\sin x| \le |x|$. Равно только при $x = 0$

Лемма 2.4.2. $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$
$|\cos x - \cos y| \le |x - y|$.

Лемма 2.4.3. $\sin x$ и $\cos x$ всюду непрерывны.
$\tan x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны во всех точках определения.

Теорема 2.5 (Теорема Вейерштрасса)**.** $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$, непрерывна на всей области определения.
Тогда:

1. f ограничена

2. f принимает наибольшее и наименьшее значение.

Доказательство. Докажем от противного.
Пусть f неограничена.

$$\forall n \quad \exists x_n \in [a; b] \quad |f(x_n)| > n.$$

x_n - ограниченная последовательность, существует x_{n_k}, $\lim x_{n_k} = c$.

$$a \le x_n \le b \implies a \le c \le b.$$

Тогда f непрерывна в точке c.
Значит, $\lim f(x_{n_k}) = f(c)$, значит, $f(x_{n_k})$ ограничена.
Но $|f(x_{n_k})| \ge n_k \ge k$, значит, $\lim |f(x_{n_k})| = +\infty$. Противореие, значит функция ограничена.
Пусть $M = \sup f(x) < +\infty$.
Предположим что M не достигается.

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) < M.$$

Пусть $g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > 0$, g непрерывна на всей области определения.
Значит, она ограниченна. $g(x) \le M_1$:

$$\frac{1}{M - f(x)} \le M_1 \implies M - f(x) \ge \frac{1}{M_1} \implies f(x) \le M - \frac{1}{M_1}.$$

Но M - супремум. Так-что пртиворечие. В другую сторону аналогично. □

Теорема 2.6 (Теорема Больцано-Коши)**.** $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$, непрерывна на всей области определения.
Если $C \in [f(a), f(b)]$, то $\exists c \in [a; b] \quad f(c) = C$.

Доказательство. Пусть, без ограничения общности $C = 0$, $f(a) < 0 < f(b)$.
Пусть $a_0 = a$, $b_0 = b$.
Рассмотрим функцию в точке $m = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Если $f(m) = 0$, то точка найдена.
Если $f(m) > 0$, то $a_1 = a_0$, $b_1 = m$.
Если $f(m) < 0$, то $a_2 = m$, $b_1 = b$.
Повторяя итерацию, сойдёмся до нужной точки, так-как отрезки стягивающие.

□

Теорема 2.7. Непрерывный образ отрезка - отрезок.
Пусть $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$, f непрерывна.
Тогда $f([a; b]) = [\min f(x); \max f(y)]$.

Доказательство. По теореме Вейершатрасса, мнимум и максимум достигаются.
Пусть $p = \operatorname{argmax} f(x)$, $q = \operatorname{argmin} f(x)$.
Путь $p \leq q$ По теореме Боiнцмана-Коши:

$$\forall C \in [f(p); f(q)] \quad \exists c \in [p; q] \quad f(c) = C.$$

□

Теорема 2.8. Непрерывный образ промежутка - промежуток.
Пусть $\langle a; b\rangle$ - одно из $[a; b]$, $(a; b]$, $(a; b)$, $[a; b)$. $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, f непрерывна на $\langle a, b\rangle$

Доказательство. Пусть $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$.

$$f(\langle a, b\rangle) \subset [m; M].$$

Докажем, что:

$$(m; M) \subset f(\langle a, b\rangle).$$

Возьмём $C \in (m; M)$
C - не нижняя грань.
Значит

$$\exists p \in \langle a, b\rangle \quad f(p) < C.$$

C - не верхняя грань.
Значит

$$\exists q \in \langle a, b\rangle \quad f(q) > C.$$

$$f(p) < C < f(q) \implies C \in [f(p); f(q)].$$

□