Мат. Анализ 5

Igor Engel

1

Теорема 1.1.

$$\overline{\lim}\, x_n = b \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad x_n > b - \varepsilon \end{cases}$$

$$\underline{\lim}\, x_n = a \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство.

$$z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Достаточность:

$$\forall n > N \quad z_n \le b + \varepsilon.$$

$$\forall N \quad \exists n > N \quad x_n > b - \varepsilon \implies \forall n \quad z_n > b - \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \ge N \quad b - \varepsilon \le z_n \le b + \varepsilon \implies \lim z_n = b \implies \overline{\lim}\, x_n = b.$$

Необходиомсть:

$$z_n \ge z_{n+1}.$$

$$\lim z_n = b \implies z_n \ge b > b - \varepsilon \implies \exists k > n \quad x_n > b - \varepsilon.$$

$$\lim z_n = b \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \ge N \quad z_n < b + \varepsilon \implies x_n < b + \varepsilon.$$ □

Теорема 1.2. Если $x_n \le \tilde{x}_n$, то $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, \tilde{x}_n$, $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, \tilde{x}_n$

Доказательство.

$$y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

$$\tilde{y}_n = \inf\{\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}\}.$$

$$y_n \le \tilde{y_n} \implies \lim y_n \le \lim \tilde{y}_n.$$ □

2 Пределы и непрерывность функций

2.1 Пределы функций

Определение 2.1. Окрестность точки a - $U_a = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, для $\varepsilon > 0$.
Проколотая окрестность - $\overset{\circ}{U}_a = U_a \setminus \{a\}$
Окрестность бесконечности: $U_{+\infty} = (E; +\infty)$
Окрестность минус бесконечности: $U_{-\infty} = (-\infty; E)$

Определение 2.2.

$$a \in E \subset \mathbb{R}.$$

a - предельная точка E, если

$$\forall \overset{\circ}{U}_a \quad \overset{\circ}{U}_a \cap E \neq \emptyset.$$

Теорема 2.1. Следующие условия равносильны:

1. a - предельная точка E
2. В любой окрестности a содержится бесконечно много точек из E
3. Существуют $x_n \in E$, $x_n \neq a$, такие, что $\lim x_n = a$.

Доказательство. Докажем $2 \implies 1$:

$$\overset{\circ}{U}_a \cap E = U_a \cap E \setminus \{a\}.$$

Докажем $3 \implies 2$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \in \overset{\circ}{U}_a.$$

Докажем $1 \implies 3$:
Возьмём $\varepsilon_1 = 1$. Тогда в $(a - \varepsilon_1; a + \varepsilon_1) \cap E$ есть точка, отличная от a. Назовём её x_1.
Возьмём $\varepsilon_2 = \min\left(\frac{1}{2}, |x_1 - a|\right)$. Аналогично найдём x_2.
Повторяем.

$$|x_k - a| < \varepsilon_k \leq |x_{k-1} - a|.$$

$$|x_k - a| < \varepsilon_k \leq \frac{1}{k} \to 0.$$

□

Определение 2.3. $f : E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

1. $\forall U_A \quad \exists \overset{\circ}{U}_a \quad f(\overset{\circ}{U}_a \cap E) \subset U_A$
2. (если A конечно) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$

3. (если $A = +\infty$) $\forall K \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > K$

4. (если $A = -\infty$) $\forall K \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < K$

5. (по Гейне) $\forall((x_n) \in E, x_n \neq a) \quad \lim x_n = a \implies \lim f(x_n) = A$

Теорема 2.2. Определения равносильны

Доказательство. $2 \implies 5$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Берём последовательность $x_n \in E$, $x_n \neq a$, $\lim x_n = a$.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Тогда $f(x_n) - A < \varepsilon \implies \lim f(x_n) = A$
$5 \implies \langle 2, 3, 4 \rangle$:
Докажем от противного: Пусть существует $\varepsilon > 0$, для которого $\delta = \frac{1}{n}$ не подходит.
Пусть $x_n \in E$, $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$.

$$\lim x_n = a.$$

Значит, $\lim f(x_n) = A$. Что приводит к противоречию. $\square$

Лемма 2.3.1. Предел единственнен.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = B \end{cases} \implies A = B$$

Доказательство.

$$\exists (x_n) \in E, x_n \neq a \quad \lim x_n = a.$$
$$\lim f(x_n) = A.$$
$$\lim f(x_n) = B.$$ $\square$

Лемма 2.3.2 (Локальная ограниченность)**.**

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \implies \exists U_a \quad \exists a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U_a \quad a \leq f(x) \leq b.$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon = 1$, выберем подходящую δ. $U_a = (a - \delta; a + \delta)$
Если $x \in E$ и $x \in \mathring{U}_a$, то $|f(x) - A| < 1$

$$|f(x)| \leq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1.$$
$$|f(x)| \leq \max\{|A| + 1, |f(a)|\}.$$ $\square$

Лемма 2.3.3 (Стабилизация знака)**.** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$

$$\exists \mathring{U}_a \quad \forall x \in \mathring{U}_a \cap E \quad \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} A.$$

Доказательство. Пусть $A > 0$. Возьмём $\varepsilon = A$, $U_A = (0; 2A) \implies \exists \mathring{U}_a \quad f(\mathring{U}_a \cap E) \subset U_a$. Значит, f в этой окрстности положительная. □

Лемма 2.3.4.

$$f, g : E \to R.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = B.$$

То

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B.$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB.$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|.$$

$$B \neq 0 \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Найдём по Гейне последовательность x_n, такую, что

$$\lim x_n = a.$$

$$\lim f(x_n) = A.$$

$$\lim g(x_n) = B.$$

То

$$\lim f(x_n) + g(x_n) = A + B.$$ □