Математический анализ (лекции)

Игорь Энгель

10 июня 2020 г.

Содержание

0. Конкспект по лекциям

Это конспект сгруппированный по лекциям, потому-что так его удобнее писать. **Ошибки в этой версии конспекта не исправляются**. Этот конспект может обновляться чуть раньше основного.

1. Лекция 1

***Определение* 1.1.** Дроблением (разбиением, пунктиром) τ отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

***Определение* 1.2.** Мелкотью дробления τ называется $|\tau| = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \{x_k - x_{k-1}\}$

***Определение* 1.3.** Оснащённым дроблением называется - пара $\langle \tau, \xi \rangle$, где τ - дробление, $\xi = \{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

***Определение* 1.4.** Интегральная сумма (сумма римана)

Пусть есть функция $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, и оснащённое дробление $\langle \tau, \xi \rangle$

Тогда сумма Римана этой функции:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Теорема 1.1 (Теормеа об интегральных суммах)**.** $f \in C\,[a, b]$, $\langle \tau, \xi \rangle$ - оснащённое дробление $[a, b]$.

Тогда

$$|S(f, \tau, \xi) - \int\limits_a^b f| \leqslant (b - a)\omega_f(|\tau|).$$

Доказательство.

$$\Delta = S(f, \tau, \xi) - \int\limits_a^b f = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f \right).$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \left(f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \right).$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f \right) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(\xi_k) - f(t) dt \right).$$

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(t)| dt \right).$$

$$|\Delta| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) \right) = \sum_{k=1}^{n} \omega_f(|\tau|)(x_k - x_{k-1}) = \omega_f(|\tau|)(b - a).$$

□

Следствие.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \langle \tau, \xi \rangle \quad |\tau| < \delta \implies \left| S\left(f, \tau, \xi\right) - \int\limits_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.
$$f \in C[a,b] \implies \lim_{\alpha\to 0} \omega_f(\alpha) = 0.$$

По $\varepsilon > 0$ можем выбрать $\delta > 0$, такое, что $0 < |\tau| < \delta \implies \omega_f(|\tau|) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда
$$\left| S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \right| < (b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)} = \varepsilon.$$
□

Следствие. Пусть $\langle \tau_n, \xi_n \rangle$ - последовательность дроблений, такая, что $\lim |\tau_n| = 0$, тогда
$$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = \int\limits_a^b f.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$, выбираем δ по предыдущему следствию, так-как $|\tau_n| \to 0$, то $\exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |\tau_n| < \delta$, тогда $|S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f| < \varepsilon$. □

Пример.
$$S_n(p) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

Хотим что-то узнать про эту сумму $(p > 0)$.

Можем легко оценить сверху: $S_n(p) < nn^p = n^{p+1}$

Оценим снизу через середину:
$$\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^p = \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} < S_n(p).$$

Попробуем посчитать предел:

Представим как интегральную сумму: возьмём отрезок $[0,1]$, $x_k = x_{k-1} + \frac{1}{n}$. $\xi_k = x_k$, $f(t) = t^p$

Тогда
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^p} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int\limits_0^1 f(t)dt = \left.\frac{t^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Тогда $S_n(p) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Лемма. Пусть есть $f \in C^2[\alpha,\beta]$, тогда
$$\Delta = \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)dt.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. **TODO:**
$$\Delta = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f(t)((t-\alpha)(\beta-t))' = -\frac{1}{2}\left(f(t)(t-\alpha)(\beta-t)|_\alpha^\beta + \int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(t-\beta) \right) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta$$
□

Теорема 1.2 (оценка погрешностей в формуле трапеции)**.** $f \in C^2[a,b]$, τ - дробление. Тогда

$$\left|\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|.$$

Доказательство.

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)dt\right).$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)||t - x_{k-1}||x_k - t| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''| \left(\frac{|\tau|}{2}\right)^2 = \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''(t)|dt.$$

□

Замечание. Если в τ $x_k = (b-a)\frac{k}{n}$, $|\tau| = \frac{b-a}{n}$.

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k).$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^n f(x_n)\right).$$

Теорема 1.3 (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)**.** $f \in C^2[m,n]$, $m,n \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt.$$

Доказательство.

$$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(t)dt + \frac{f(k) - f(k+1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\{t\}dt.$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \int\limits_m^n f(t)dt + \frac{f(m) - f(n)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\{t\}(1 - \{t\})dt.$$

Если прибавить $f(n)$, то получим нужную формулу.

Теперь докажем первую формулу. Можем считать что $k = 0$, так-как можно заменить функцию.

$$f(0) = \int\limits_0^1 f(t)dt + \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)t(1-t) \iff \int\limits_0^1 f(t)dt - \frac{f(0) - f(1)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)t(1-t).$$

А последнее выражение верно по лемме. □

2. Лекция 2

Пример.

TODO: Добавить среднее

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

$$f(t) = t^p.$$

$$f''(t) = p(p-1)t^{p-2}.$$

$$S_p(n) = \int\limits_1^n t^p dt + \frac{1+n^p}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1) + t^{p-2}\{t\}(1-\{t\}).$$

$$\int\limits_1^n t^p dt = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

Пусть $-1 < p < 1$

$$0 \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2}dt \impliedby \{t\}(1-\{t\}) \geqslant \frac{1}{4}.$$

$$0 \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})dt \leqslant \frac{1}{4(1-p)}\left(1 - \frac{1}{n^{1-p}}\right) \leqslant \frac{1}{4(1-p)} = O(1).$$

$$-1 < p < 1 \implies S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(1).$$

Если $p > 1$:

$$0 \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2}dt = \frac{1}{4(p-1)}\left(n^{p-1} - 1\right) = \mathcal{O}(n^{p-1}).$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(n^{p-1}).$$

Пример.

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$$f(t) = \frac{1}{t}.$$

$$f''(t) = \frac{2}{t^3}.$$

$$H_n = \int\limits_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int\limits_1^n \frac{1}{t^3}\{t\}(1-\{t\})dt.$$

$$a_n := \int\limits_1^n \frac{1}{t^3}\{t\}(1-\{t\})dt.$$

$$a_{n+1} = a_n = \int\limits_n^{n+1} (g(x) \geqslant 0) \geqslant a_n.$$

$$a_n \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^3} = \frac{-1}{8t^2}\Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a \implies a_n = a + o(1)$.

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Где $\gamma := a + \frac{1}{2} = 0.5772156649\ldots$ - постоянная Эйлера.

Пример.

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

$$f(t) = \ln t.$$

$$f'(t) = \frac{1}{t}.$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

$$\ln n! = \int\limits_1^n \ln t dt + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{1}{t^2}\{t\}(1-\{t\})dt.$$

$$b_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}dt.$$

$$b_{n+1} \geqslant b_n.$$

$$b_n \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{4}.$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n =: b \implies b_n = b + o(1).$$

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} - \frac{b}{2} + o(1).$$

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{-\frac{b}{2}}ie^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}\cdot C.$$

Попробуем найти C:

$$\frac{2n!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

$$\frac{2n!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}C}{(n^n e^{-n}\sqrt{n}C)^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{\sqrt{n}C}.$$

$$\frac{4^n\sqrt{2}}{C\sqrt{n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \implies C \sim \sqrt{2\pi} \implies C = \sqrt{2\pi}.$$
$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

***Определение* 2.1** (Интеграл Римана)**.**

Пусть есть $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, f огранич.

Если $\exists I \in \mathbb{R}$ для которого верно, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \langle \tau, \xi \rangle \quad |\tau| < \delta \implies |S(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon.$$

То $I := \int\limits_a^b f$ - интеграл Римана.

Свойства.

Сохраняются:

- Линейность
- Аддитивность
- Монотонность по функции
- Интегрирование по частям
- Замена переменной

Теряются:

- Всё связанное с первообразной.

TODO: параграф 6 несобственные интегралы

***Определение* 2.2.**

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a,b)$

Тогда

$$\int\limits_a^b f := \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c f.$$

Или $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, $f \in C(a,b]$

Тогда

$$\int\limits_a^b f := \lim_{c \to a+} \int\limits_c^b f.$$

Замечание.

Если функция непрерывна в точке b (точке a), то ничего не изменилось.

Доказательство.

$$\lim_{c \to b-} \int\limits_a^c f = \lim_{c \to b-} (F(c) - F(a)) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f.$$

Так-как первообразная непрерывна. □

***Определение* 2.3.**

Несобственный интеграл сходится, если он конечный, и расходится если он бесконечный или не существует.

Теорема 2.1 (Критерий Коши для сходимости интегралов)**.**

Пусть $f \in C[a,b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in (a,b) \quad \forall A, B \in (c,b) \quad \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b f = \lim_{y \to b} F(y) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in (a,b) \quad \forall A, B \in (c,b) \quad |F(B) - F(A)| < \varepsilon.$$

Так-как F - первообразная,

$$|F(B) - F(A)| < \varepsilon \iff \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon \qquad \square.$$

Замечание.

Если $b = +\infty$

$$\int\limits_a^{+\infty} f \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > a \quad \forall A, B > c \quad \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon.$$

Если $b \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^b f \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A, B < b \quad \begin{cases} |A - b| < \delta \\ |B - b| < \delta \end{cases} \implies \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon.$$

Если $\exists A_n, B_n \in (a,b) \quad \lim A_n = \lim B_n = b \wedge \forall n \quad \left|\int\limits_{A_n}^{B_n} f\right| \geqslant \varepsilon$

Если F - первообразная f на $[a,b)$, то

$$\int\limits_a^b f = \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c f = \lim_{c \to b-} F(c) - F(a).$$

Пример.

$$p \neq 1.$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

$$F(x) = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}+\frac{1}{p-1}\in\mathbb{R}\iff p>1.$$

Значит, при $p>1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{p-1}$.

При $p<1$, интеграл равен $+\infty$

Рассмотрим $p=1$:

$$F(x)=\ln x.$$

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln 1=+\infty.$$

Пример.

Пусть $p\neq 1$

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}=F(1)-\lim_{x\to0+}F(x)=\frac{1}{1-p}-\lim_{x\to0+}\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}.$$

Если $p<1$, то интеграл сходится, и равень $\frac{1}{1-p}$

Если $p>1$, то интеграл равен $+\infty$

Пусть $p=1$

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x}=F(1)-\lim_{x\to0+}\ln x=+\infty.$$

***Определение* 2.4.**

Пусть $F\in C[a,b)$.

Тогда,

$$F|_a^b=\lim_{c\to b-}F(c)-F(a).$$

Свойства.

Пусть $f\in C[a,b)$.

1. Аддитивность. Если $\int\limits_a^b f$ - сходится, и есть точка c, то, $\int\limits_c^b f$ сходится, и $\int\limits_a^b f=\int\limits_a^c f+\int\limits_c^b f$

   Доказательство. Пусть F - первообразная f на $[a,b)$.

   Тогда

$$\int\limits_a^b=\lim_{B\to b-}F(B)-F(a).$$

$$\int\limits_c^b=\lim_{B\to b-}F(B)-F(c).$$

$$\int\limits_a^c=F(c)-F(a).$$

Заметим, что предел существует и конечен, так-как сходиться начальный интеграл, а значить сходится $\int\limits_c^b f$.

$$\int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f = F(c) - F(a) + \lim_{B \to b-} F(B) - F(c) = \lim_{B \to b-} F(B) - F(a) = \int\limits_a^b f.$$

$\square$

1' Если $\int\limits_c^b f$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

2. Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_c^b f = 0$

Доказательство.

$$\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c.$$

$$\lim_{c \to b-} \int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0.$$

$\square$

3. Линейность. Пусть $f, g \in C[a, b)$. $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся, тогда

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g.$$

Доказательство. F, G - первообразные f, g.
Тогда

$$\int\limits_a^b f = \lim_{c \to b-} F(c) - F(a).$$

$$\int\limits_a^b g = \lim_{c \to b-} G(c) - G(a).$$

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_{c \to b-} F(c) + \beta \lim_{c \to b-} G(c) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g \qquad \square.$$

4. Пусть $f \leqslant g$, $\int\limits_a^b f$, $\int\limits_a^b g$ определены в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

Доказательство. **TODO:** $\square$

5. Если $\int\limits_a^b f$ - сходится, то $\int\limits_a^b f = F|_a^b$

Доказательство. **TODO:** □

6. Пусть $f, g \in C^1[a, b)$, $\int\limits_a^b fg'$ - сходится и $\exists \lim\limits_{c \to b-} f(c)g(c)$, тогда сходится $\int\limits_a^b f'g$, и $\int\limits_a^b f'g = fg|_a^b - \int\limits_a^b fg'$

Доказательство. **TODO:** □

7. Если $f \in C[a, b)$, $\varphi : [\alpha, \beta) \mapsto [a, b)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$. Обозначим $\varphi(\beta-) := \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \varphi(\gamma)$. Если этот предел существует и конечен, а так-же сходится один из данных интегралов, то верно равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} = f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $F(y) := \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{y} f(x)dx$, $\Phi(\gamma) = \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} f(x) = F(\varphi(\gamma))$.

Пусть существует $\lim\limits_{y \to \varphi(\beta-)} F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(t)dt =: I$.

Возьмём возрастающией γ_n, $\lim \gamma_n = \beta$. Тогда $\lim \varphi(\gamma_n) = \varphi(\beta-)$.

Тогда $I = \lim F(\varphi(\gamma_n)) = \lim \Phi(\gamma_n) = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Пусть существует $\lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma)$.

Случай 1: $\varphi(\beta-) < b$. Тогда результирующий интеграл собственный, и всё тривиально.

Случай 2: $\varphi(\beta-) = b$:

Возьмём возрастающий $\varphi(\alpha) < b_n$, $\lim b_n = b$.

Заметим, что любой член b_n - значение функции φ в какой-то точке. (По Больцано-Коши).

Значит, $\exists \gamma_n \quad \varphi(\gamma_n) = b_n$.

Заметим что $\lim \gamma_n = \beta$. Докажем это от противного: тогда либо $\underline{\lim}\, \gamma_n$ либо $\underline{\lim}\, \gamma_n \neq \beta$. Возьмём подпоследовательность γ_{n_k}, такую что $\lim \gamma_{n_k} = \tilde{\beta}$, но тогда $\lim \varphi(\gamma_{n_k}) = \varphi(\tilde{\beta}) < \beta$. Что невозможно.

$$F(b_n) = \lim F(\varphi(\gamma_n)) = \lim \Phi(\gamma_n) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma).$$

Значит, предел существует и верна предыдущая часть док-ва. □

Замечание.

Пусть $f \in C[a, b)$, $b < +\infty$.

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt.$$

Пример.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$x = \sin t.$$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

$$\varphi(t) = \sin t.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теорема 2.2.

Пусть $f \in C[a,b)$, $f \geqslant 0$. Тогда сходимость $\int\limits_a^b f$ сходится $\iff$ первообразная f ограниченна сверху.

Доказательство.

$$F(y) := \int_a^y f.$$

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} F(c).$$

$$y < z \implies F(z) = F(y) + \int_y^z \geqslant F(y).$$

Тогда F возрастает и ограниченна сверху, значит интеграл сходится. □

Следствие.

Пусть $f, g \in C[a,b)$, $0 \leqslant f \leqslant g$.

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится
2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство. **TODO:** □

Замечание.

Достаточно выполнения неравенства $f \leqslant g$ только при аргументах близких к b. (так-как интеграл до произвольной промежуточной точки собственный).

Вместо $f \leqslant g$ можно использовать $f = \mathcal{O}(g)$

Если $f \in C[a, +\infty)$ $f \geqslant 0$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$, $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится.

Следствие.

$f, g \in C[a,b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f \sim_{x \to b-} g$. Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинакого.

Доказательство.

$$f \sim g \implies \begin{cases} f = \mathcal{O}(g) \\ g = \mathcal{O}(f) \end{cases} \quad .$$

□

3. Лекция 3

***Определение* 3.1.**

Пусть $f \in C[a,b)$, тогда $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если сходится $\int\limits_a^b |f|$.

Теорема 3.1.

Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Заметим, что $0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$. Тогда сходятся интегралы $\int\limits_a^b f_+$ и $\int\limits_a^b f_-$, а значит сходится

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_-.$$

□

Теорема 3.2 (Признак Дирихле)**.**

Пусть $f, g \in C[a, +\infty)$. При этом:

$$\forall c > a \quad \left|\int\limits_a^c f\right| \leqslant M.$$

g - монотонна.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Тогда, $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство. Доказательство для $g \in C^1[a, +\infty)$.

Пусть $F(y) := \int\limits_a^y f$. Знаем, что $|F(y)| \leqslant M$.

$$\begin{aligned}\int\limits_a^c fg &= \int\limits_a^c F'g \\ &= Fg|_a^c - \int\limits_a^c Fg'\end{aligned}$$

Докажем сходимость:

$$\lim_{c \to +\infty} Fg|_a^c = \lim_{c \to +\infty} F(c)g(c) - C \leqslant \lim_{c \to +\infty} Mg(c) - C = -C$$

Докажем абсолютную сходимость:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^c |F||g'| \leqslant M\int\limits_a^c |g'| \quad & g \text{ монотонна, значит } g' \text{ знакопостоянна} \\ = M\left|\int\limits_a^c g'\right| & \\ = M|g(c)-g(a)| & \\ \lim_{c\to+\infty} M|g(c)-g(a)| \leqslant M|g(a)| &\end{aligned}$$

Значит, сумма сходится, и начальный интеграл тоже сходится. □

Теорема 3.3 (Признак Абеля)**.**

Пусть $f, g \in C[a, +\infty)$. При этом $\int\limits_a^{+\infty} f$ - сходится.

g ограничена монотонна.

Тогда $\int\limits_a^b fg$ сходится.

Доказательство. Существует конечный предел $B := \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, так-как g ограничена и монотонна.

Пусть $\tilde{g}(x) = g(x) - B$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = 0$.

Знаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_a^c f$. Значит, этот интеграл ограничен.

По признаку Дирихле, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\tilde{g}$ сходится.

$$\begin{aligned}\int\limits_a^{+\infty} fg &= \int\limits_a^{+\infty} f(\tilde{g}+B) \\ &= \int\limits_a^{+\infty} f\tilde{g} + B\int\limits_a^{+\infty} f\end{aligned}$$

Мы знаем про сходимость обоих интегралов, значит сумма сходится. □

Теорема 3.4.

Пусть $f, g \in C[a, +\infty)$, g монотонная, а f переодическая с периодом T, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тогда если $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится абсолютно.

Если $\int\limits_a^{+\infty} g$ разходится, то $\int\limits_a^b fg$ сходится $\iff$ $\int\limits_a^{a+T} f = 0$.

Доказательство. Заметим, что раз f переодична, то f ограничена. Пусть $|f| \leqslant M$

С какого-то момента, g знакопостоянна, назовём этот момент b.

Будем считать что g положительна.

Тогда $\int\limits_b^{+\infty} g$ сходится.

Заметим, что $\int\limits_b^{+\infty} |fg| \leqslant M \int\limits_b^{+\infty} g$ - сходится.

Докажем второй пункт:

Достаточность:

Пусть $F(y) = \int\limits_a^y f$. F - непрерывна и T-переодична (так-как интеграл по периоду f равен нулю), а значит ограничена.

По признаку Дирихле, $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Необходиомсть:

От противного. Пусть $\int\limits_a^{a+T} f = C \neq 0$.

Пусть $\tilde{f} := f(x) - \frac{C}{T}$. Заметим, что $\int\limits_a^{a+T} \tilde{f} = \int\limits_a^{a+T} (f(x) - \frac{C}{T})dx = \int\limits_a^{a+T} f - C = 0$.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g =$ сходится.

$$\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g - \frac{C}{T}\int\limits_a^{+\infty} g$$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится. Противоречие. □

Пример.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

Проверим абсолютную сходимость:

Если $p > 1$, то $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}$. Знаем, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится, значит оригинальный тоже.

Если $0 < p \leqslant 1$: Знаем, что $\frac{1}{x^p}$ монотонна и стремится к нулю, а $|\sin x|$ - π-переодическая функция. Интеграл по периоду не 0, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ расходится, значит $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right|$.

Случай $p < 0$ отложим.

Обычная сходимось:

При $p > 1$ как следствие абсолютной.

При $0 < p \leqslant 1$: $\frac{1}{x^p}$ - монотонная, стремится к нулю. $\sin x$ - 2π-переодическая, и $\int\limits_0^{2\pi} \sin x = \cos(2\pi) - \cos(0) = 0$. Значит, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}$ сходится.

Если $p \leqslant 0$: по следствию из Коши, если есть $A_n, B_n \to \infty$, такие, что $\int\limits_{A_n}^{B_n} x^{-p} \sin x \not\to 0$, то он расходится.

Пусть $A_n = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $B_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. На этих промежутках $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$, заметим, что $\int\limits_{A_n}^{B_n} \frac{x^p}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, значит не стремится к нулю, значит $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}$

3.1. 7 Метрические и нормированные пространства

3.1.1. Метрические и нормированные простантсва

***Определение* 3.2.**

Метрическим пространством называется пара $\langle X, \rho \rangle$ из множества точек и метрики.

Метрика: $\rho : X^2 \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример.

$$\langle \mathbb{R}, |x - y| \rangle$$

$$\left\langle \mathbb{R}^2 \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2} \right\rangle.$$

$$\left\langle X, \rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \right\rangle \text{ - дискретная метрика (метрика лентяя).}$$

$$\left\langle \mathbb{R}^2, |a_x - b_x| + |a_y - b_y| \right\rangle \text{ - Манхэттенское расстояние.}$$

Расстояние на сфере - длина дуги большого круга.

Французская железнодорожная метрика: Есть центральный объект P, от него идут «ветки» до разных объектов, если два объекта на одной ветке $\rho(A, B) = |AB|$, если на разных - $\rho(A, B) = |AP| + |PB|$.

***Определение* 3.3.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шар - $B_r(x)$, с радиусом $r > 0$ с центром в $x \in X$.

$$B_r(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}.$$

Замкнутый шар - $\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$.

Свойства.

1. $B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(x) = B_{\min(r_1, r_2)}(x)$. (Верно и для $\overline{B}$)
2. Если $x \neq y$, то $\exists r > 0 \quad B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$. (Верно и для $\overline{B}$).

***Определение* 3.4.**

Пусть $A \subset X$. $x \in A$ называется внутренний точкой, если

$$\exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A.$$

***Определение* 3.5.**

Внутренностью множества $A \subset X$ называется $\operatorname{Int} A = \{x \in A \mid x \text{ - внутренняя}\}$

***Определение* 3.6.**

Множество A называется открытым, если любая точка - внутренняя.

Теорема 3.5 (О свойствах открытых множеств)**.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

1. $\varnothing$, X - открытые

   Доказательство. Тривиально □

2. Объединение любого числа открытых множеств открытое

   Доказательство. Пусть G_α - открытые множества, $\alpha \in I$.

   Рассмотрим $x \in \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, пусть $x \in G_{\alpha_0}$.

   Значит, $\exists r > 0 \quad B_r(x) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ □

3. Пересечение конечного числа открытых множеств открытое

   Доказательство. G_k - открытые множества.

   Возьмём точку $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$, $x \in G_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

   $$\exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(x) \subset G_k.$$

   Тогда $B_{\min(r_1, \ldots, r_n)} \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$.

   Если пересечение бесконечное, то минимум может стать 0. □

4. Открытый шар - открытое множество

   Доказательство. Возьмём $y \in B_R(x)$.

   Возьмём $r = R - \rho(x, y)$.

   Пусть $z \in B_r(y) \implies \rho(y, z) < r \implies \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \implies \rho(x, z) < R$ □

Теорема 3.6 (О свойствах внутренности множества)**.**

1. $\operatorname{Int} A \subset A$

   Доказательство. Тривиально. □

2. $\operatorname{Int} A$ - объединение всех открытых подмножеств A.

Доказательство. Пусть $U = \bigcup_{G \subset A} G$, где G - открытое.

Надо доказать что $\operatorname{Int} A = U$.

Покажем $\operatorname{Int} A \subset U$:

$x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. Это множество открытое, значит является частью U, значит $x \in U$

Покажем $U \subset \operatorname{Int} A$:

Пусть $x \in U$, тогда $\exists G \subset A \quad x \in G$, G - открытое, тогда $\exists r > 0 \quad B_r(x) \subset G \subset A \implies x \in \operatorname{Int} A$. □

3. $\operatorname{Int} A$ - открытое

   Доказательство. Как объединение открытых. □

4. $\operatorname{Int} A = A \iff A$ - открытое

   Доказательство. Необходимость по свойству 3, достаточность: Если A открыто, то $\operatorname{Int} A = A \cup \ldots = A$ по свойству 2. □

5. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$

   Доказательство. $x \in \operatorname{Int} A \implies \exists B_r(x) \subset \operatorname{Int} A \quad \implies B_r(x) \subset B \implies x \in \operatorname{Int} B$ □

6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

   Доказательство.

   $$x \in \operatorname{Int}(A \cap B) \iff \exists B_r(x) \subset A \cap B \quad \implies \begin{cases} B_r(x) \subset A \\ B_r(x) \subset B \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \operatorname{Int} A \\ x \in \operatorname{Int} B \end{cases} \iff x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$$

   TODO: □

7. $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

   Доказательство.
   Свойства 3 и 4. $7 = 3 + 4$. □

***Определение* 3.7.**
Множество A называется замкнутым, если $\overline{A}$ - открытое.

Теорема 3.7 (О свойствах замкнутых множеств)**.**

1. $\varnothing$, X - замкнутые.

   Доказательство. $\overline{\varnothing} = X$
   $\overline{X} = \varnothing$ □

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство. Пусть F_α - замкнутые множества, $\alpha \in I$.
   $X \setminus F_\alpha$ - открто, значит $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{F_\alpha} = \overline{\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha}$ - открыто, значит $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ замкнуто. □

3. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство. $F_1, \dots, F_n$ - замкнутые.
   $\bigcap_{i=1}^n \overline{F_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^n F_i}$ - открыто, значит $\bigcup_{i=1}^n F_i$ - замкнуто. □

4. Замкнутый шар - замкнутое множество

   Доказательство. Пусть $y \in X \setminus \overline{B_r(x)}$, значит $\rho(x, y) > r$.
   Тогда $B_{\rho(x-y)-r}(y) \cap B_r(x) = \varnothing$, значит дополнение открыто, а шар замкнут. □

Определение* 3.8** (Замыкание множества).***
Замыканим множества A называется $\mathrm{Cl}\, A = \bigcap_{A \subset F} F$ где F - замкнутое.

Теорема 3.8.

$$\mathrm{Cl}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Int}\, A}.$$
$$\mathrm{Int}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Cl}(A)}.$$

Доказательство. Заметим, что так-как $\mathrm{Int}\, A = \bigcup_{G \subset A} G$, G - открытое, то $\overline{\mathrm{Int}\, A} = \overline{\bigcup_{G \subset A} G} = \bigcap_{G \subset A} \overline{G}$.

Пусть $F := \overline{G}$. Заметим, что F замкнуто $\iff$ G открыто, а и $\overline{A} \subset F \iff G \subset A$. Значит $\overline{\mathrm{Int}\, A} = \bigcap_{\overline{A} \subset F} = \mathrm{Cl}(\overline{A})$

Второе утверждение получается подстановкой $\overline{A}$ в первое. □

Следствие.

$$\mathrm{Cl}\, A = \overline{\mathrm{Int}\, \overline{A}}.$$
$$\mathrm{Int}\, A = \overline{\mathrm{Cl}\, \overline{A}}.$$

Свойства.

1. $A \subset \mathrm{Cl}(A)$ как пересечение содержащих A
2. $\mathrm{Cl}(A)$ - замкнуто, как пересечение замкнутых.
3. $\mathrm{Cl}(A) = A \iff A$ замкнуто.
4. $A \subset B \implies \mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(B)$. ($\overline{B} \subset \overline{A} \implies \mathrm{Int}(\overline{B}) \subset \mathrm{Int}(\overline{A})$.
5. $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$.
6. $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}\, A$.

Теорема 3.9.

$$x \in \mathrm{Cl}\, A \iff \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \neq \varnothing.$$

Доказательство.
$x \in \mathrm{Cl}\, A \iff x \in \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})} \iff x \notin \mathrm{Int}\, \overline{A}$, значит $\forall r > 0 \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \iff B_r(x) \cap A \neq \varnothing$. □

Следствие.
Пусть U - открытое, $U \cap A = \varnothing \implies U \cap \mathrm{Cl}\, A = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $x \in U \cap \operatorname{Cl} A$.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \implies B_r(x) \cap A = \varnothing \implies x \notin \operatorname{Cl} A$. Противоречие. $\square$

***Определение* 3.9** (Окрестность)**.**
Окрестность точки x - $B_r(x)$.

***Определение* 3.10** (Проколотая окрестность)**.**
Проколотая окрестность x - $B_r(x) \setminus \{x\}$.

***Определение* 3.11** (Предельная точка)**.**
x называется предельной точкой A, если $\forall r > 0 \quad (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$

Множество предельных точек A обозначетсят A'.

4. Лекция 4

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$

   Доказательство.
   Если $a \in \operatorname{Cl} A \setminus A \implies \forall r > 0 \quad (B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \varnothing \implies A \in A'$. □

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$.

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   Доказательство.
   Включение $\supset$ по предыдущему свойству.

   Возьмём точку $a \in (A \cup B)' \setminus A' \implies \forall r > 0 \quad (B_r(a) \setminus \{a\}) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$. $\exists R > 0 \quad \forall r \leqslant R \quad (B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A = \varnothing$. Значит, $\forall r > 0 \quad (B_r(a) \setminus a) \cap B \neq \varnothing \implies a \in B'$.

   TODO: Нормально обозначить проколотые шары □

$\operatorname{Cl} A = A \iff A' \subset A$

Теорема 4.1.
a - предельная точка множества A тогда и только тогда когда $\forall r > 0$ в $B_r(a)$ содержится бесконечно много точек из A.

Доказательство.
Необходиомсть:

Если есть бесконечно много точек, то $\exists b \in B_r(a) \cap A \quad b \neq a \implies (B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \varnothing$.

Достаточность:

Пусть $a \in A'$. Возьмём $x_1 \in (B_1(a) \setminus \{a\}) \cap A$.

Пусть $r_1 = \rho(x_1, a) > 0$. Рассмотрим $B_{r_1}(a)$.

Аналогичным образом возьмём $x_2 \in (B_{r_1}(a) \setminus \{a\}) \cap A$.

Повторяя этот процесс, можем получить бесконечно много точек. □

Следствие.
Конечное множество не имеет предельных точек.

***Определение* 4.1.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, и $Y \subset X$.

Тогда $\langle Y, \rho|_{Y^2} \rangle$ называется метрическим подпространством.

Теорема 4.2 (об открытых и замкнутых множествах в подпространствах).
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $\langle Y, \rho \rangle$ - его подпространство.

Тогда: **TODO:** Обозначения для замкнутых и откртых, чтоб не разбивать формулы

1. $U \subset Y$ открыто в $\langle Y, \rho \rangle \iff \exists G \subset X$, G открыто в $\langle X, \rho \rangle$, $U = G \cap Y$.

Доказательство.
Достаточность:

Пусть $U \subset Y$ открыто. Тогда $\forall x \in U \quad \exists r_x \quad B^Y_{r_x}(x) \subset U$.

Заметим, что $B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y$.

Тогда, определим G как $\bigcup\limits_{x\in U} B^X_{r_x}(x)$. G открыто в X как объединение открытых.

Заметим, что $G \cap Y = \bigcup\limits_{x\in U}(B^X_{r_x} \cap Y) = \bigcup\limits_{x\in U} B^Y_{r_x}(x)$.

Так-как каждый шар - $\subset U$, то $G \cap Y \subset U$.

$U \subset G \cap Y$, так-как каждый шар содержит свой центр.

Необходимость:

Пусть $G \subset X$ открыто. $x \in G \cap Y \implies x \in G \implies \exists r_x > 0 \quad B^X_{r_x}(x) \subset G \implies B^Y_{r_x}(x) \subset G \cap Y \implies G \cap Y$ - открыто. $\square$

2. $A \subset Y$ замкнуто в $\langle Y, \rho\rangle \iff \exists F \subset X \quad, F$ замкнуто в $\langle X, \rho\rangle$, $A = F \cap Y$.

Доказательство. Необходимость:

Пусть $A \subset Y$ замкнуто. Тогда $Y \setminus A$ - открыто.

По пункту 1: $\exists G \subset X \quad, G$ открыто в X, такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$.

Тогда $(X \setminus G) \cap Y = A$.

Достаточность:

Пусть $F \subset X$ замкнуто в X. Тогда $X \setminus F$ открыто в X. $(X \setminus F) \cap Y$ - открыто в Y.

Тогда $F \cap Y$ - замкнутое. $\square$

***Определение* 4.2.**
Векторным (линейным) пространством над $\mathbb{R}$ называется множество векторов X. на котором определены операции $+ : X^2 \mapsto X$ и $\cdot : \mathbb{R} \times X \mapsto X$ удовлетворяющие следующим условиям:

- A1 $x + y = y + x$
- A2 $(x + y) + z = x + (y + z)$
- A3 $\exists\vec{0} \in X \quad x + \vec{0} = x$
- A4 $\exists(-x) \in X \quad x + (-x) = \vec{0}$
- M1 $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- M2 $1 \cdot x = x$
- AM1 $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- AM2 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Пример.
$\mathbb{C}$ - векторное пространство над $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^d$ - векторное пространство над $\mathbb{R}$.

***Определение* 4.3** (Норма)**.**

Пусть X - векторное пространство. $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\|x\| \geqslant 0$. $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Пример.

$\mathbb{R}$ - векторное пространство над собой. $|x|$ - норма.

$\mathbb{R}^d$, $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| := |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

$\mathbb{R}^d$, $\|x\| = \max |x_i|$,

$C[0,1]$ - векторное пространство, $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$

$\mathbb{R}^d$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Неравенство треугольнико верно по неравенству Минковского. Стандартная норма $\mathbb{R}^d$ - $\|x\|_2$.

***Определение* 4.4** (Скалярное произведение)**.**

Пусть X - векторное пространство.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : X^2 \mapsto \mathbb{R}$ - скалярное произведение, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Пример.

$\mathbb{R}^d$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_d y_d$. Стандартное скалярное произведение $\mathbb{R}^d$.

Возьмём последовательность $w_1, w_2, \ldots, w_d > 0$. $\langle x, y \rangle = w_1 x_1 y_1 + \ldots w_d x_d y_d$.

$C[0,1]$, $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 fg$.

Свойства.

1. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

   Доказательство.
   Пусть $f(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$, $t \in \mathbb{R}$.

   $$f(t) = \langle x, x + ty \rangle + t \langle y, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle .$$

   Это квадратный трёхчлен, всюду положительный и с положительным старшим коэффициентом. Значит, $D \leqslant 0$, $D = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = 4(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle) \implies \langle x, y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. □

2. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Доказательство.
Первое свойство тривиально из первого свйоства произведениея

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \alpha\sqrt{\langle x, x\rangle} = \alpha\|x\|.$$

$$\langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}.$$

$$\langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}.$$

TODO: поправить неравенство треугольника □

3. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика.

Доказательство. Неотрицательность очевида, симметричность **TODO:** , неравенство $\triangle$ напрямую соответсвует версии из нормы. □

4. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Доказательство.

$$-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y| \iff \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y| \impliedby \triangle.$$

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|x - y\| = \|x\| + \|y - x\| \iff \|x + (y - x)\| \leqslant \|x\| + \|y - x\| \impliedby \triangle.$$

□

***Определение* 4.5.**
Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $x_1, x_2, \ldots \in X$.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Альтернативно: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ - если вне любого шара с центром в точке a лежит конечное число членов последовательности.

5. Лекция 6

Теорема 5.1.

Пусть $f : (E \subset X) \mapsto Y$ и $\lim\limits_{x \to a} = b$, тогда

$$\exists B_r(a) \quad f \text{ ограничена в} B_r(a).$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists r > 0 \quad x \in B_r^\circ(a) \cap E \implies f(x) \in B_1(b).$$

Тогда $R = \max\{1, \rho(b, f(a)\} \implies f(B_r(a)) \subset B_R(b)$. □

Теорема 5.2 (Ариф. действия с пределами)**.**

Пусть X - метрическое пространство, Y - нормированное. $f, g : (E \subset X) \mapsto Y$. a - предельная точка E. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$.

Тогда:

$$\lim_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha b + \beta c.$$

$$\lim_{x \to a} \|f(x)\| = \|b\|.$$

Если в Y есть скалярное произведение:

$$\lim_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle .$$

Теорема 5.3 (Критерий Коши)**.**

Пусть $f : (E \subset X) \mapsto Y$, X, Y - метрические, Y - полное. a - предельная точка E.

Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \quad \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \setminus \{a\} \quad \rho_X(x, a) < \delta \wedge \rho_X(y, a) \implies \rho_Y(f(x), f(y)).$$

Доказательство. Необходимость:

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{a\} \quad \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall y \in E \setminus a \quad \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho(f(y), b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \leqslant \rho_Y(f(x), b) + \rho_Y(b, f(y)) < \varepsilon.$$

Достаточность:

Проверим последовательности. Берём $x_n \in E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Надо доказать что существует $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$. Y полное, значит достаточно фундаментальности.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \setminus \{a\} \quad \rho_X(x, a) \wedge \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

По δ выберем N, такой, что $\rho_X(x_n, a) < \delta$ при $n > N$.

Возьмём x_n, x_m, $m > n > N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_m) < \varepsilon$. Значит, последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, значит она имеет предел, значит, $f(x)$ имеет предел. □

***Определение* 5.1.**

Функция $f : (E \subset X) \mapsto Y$, a - предельная точка E. f называется непрерывной, если верно одно из следующих равносильных условий:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$
3. $\forall B_\varepsilon(f(a)) \quad \exists B_\delta(a) \quad f(B_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(f(a)).$
4. $\forall x_n \in E \quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$

Теорема 5.4.

Пусть $f : (E \subset X) \mapsto (\tilde{E} \subset Y)$, a - предельная точка E. $g : \left(\tilde{E} \subset Y\right) \mapsto Z$. f непрерывна в a, g непрерывна в $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в a.

Теорема 5.5.

Пусть $f : X \mapsto Y$. X, Y - метричиские, тогда, f непрерывна всюду на X равносильно тому, что $\forall$ открытых $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ открыто в X. $(f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\})$.

Доказательство. Необходимость:

Пусть U - открытое, рассмотрим $f^{-1}(U)$. Пустое множество открыто, предположим что $a \in f^{-1}(U)$.

Знаем, что $a \in f^{-1}(U) \implies f(a) \in U \implies \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(f(a)) \subset U$. Тогда, по непрерывности, $\exists \delta > 0 \quad f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Значит, $B_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$, и $f^{-1}(U)$ отркыто.

Достаточность:

Рассмотрим $a \in X$. Возьмём $B_\varepsilon(f(a))$, оно открыто в Y. Значит, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ - открыто $\implies$ $\exists \delta > 0 \quad B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Получили определение непрерывности в a. □

Теорема 5.6.

Пусть $f : K \mapsto Y$, K - компакт, f - непрерывна. Тогда $f(K)$ - компакт.

Доказательство.

Пусть $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

Тогда $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(G_\alpha)$. Прообраз открытого множества открыт. Выберем конечное покрытие G_i.

Тогда $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n f(G_i)$. □

***Определение* 5.2.**

Функция $f : (E \subset X) \mapsto Y$ называется ограниченной, если $f(E)$ ограниченно в Y.

Следствие.

Пусть $f : K \mapsto Y$, K - компакт, f непрерывна. Тогда f ограничена, $f(K)$ - замкнутое множество.

Доказательство. $f(K)$ - компакт, значит замкнуто и ограничено. □

Следствие Теорема Вейерштрасса.

Пусть $f : K \mapsto \mathbb{R}$, K - компакт, f непрерывна. Тогда $\exists a, b \quad \forall x \in K \quad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

Доказательство.

Знаем, что $f(K)$ ограниченно в $\mathbb{R}$. Ограниченное множество в $\mathbb{R}$ имеет супремум. $\sup f(K) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$. Если $\exists b \in K \quad f(b) = \sup f(K)$ то всё хорошо.

Если не существует точки, то существует последовательность $x_n \in K$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K)$. $f(K)$ замкнуто в $\mathbb{R}$. Если у последовательности есть предел, то этот предел лежит в $f(K)$. Противоречие, значит точка существует.

Аналогично для инфинума. □

Теорема 5.7.

Пусть $f : K \mapsto Y$, f непрерывна, K компакт, f - биекция.

Тогда есть обратная функция $f^{-1} : Y \mapsto K$. Тогда f^{-1} непрерывная.

Доказательство.

Проверим, что для f^{-1} прообраз открытого множества открыт $\iff$ для f образ открытого множества открыт.

Возьмём $U \subset K$, U открыто. Тогда $K \setminus U$ - замкнутое. Значит, $K \setminus U$ - компакт. $f(K \setminus U)$ - компакт, замкнутое. $f(K \setminus U) = f(K) \setminus f(U) = Y \setminus f(U)$. $Y \setminus f(U)$ замкнутое, значит $f(U)$ открытое. □

***Определение* 5.3.**

Функция $f : (E \subset X) \mapsto Y$ называется равномерно непрерывной если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Теорема 5.8 (Теорема Кантора)**.**

Пусть $f : K \mapsto Y$, K компакт, f непрерывна. Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство.

Знаем, что $f(K)$ - компакт. Покроем его: $f(K) \subset \bigcup_{x\in f(K)} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$

Тогда $K \subset \bigcup_{x\in K} f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x)))$.

По лемме Лебега, $\exists r > 0 \quad \forall y \in K \quad B_r(y)$ - содержится в покрытии.

Тогда $\delta = r$ подходит.

Если $\rho_X(x, y) < r \implies y \in B_r(x) \subset f^{-1}\left(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)\right) \implies f(B_r(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z) \implies f(x), f(y) \in f(B_r(x)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z) \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. □

***Определение* 5.4.**

Пусть X - векторное просрtранство в котором заданы нормы $\|\cdot\|_A$ и $\|\cdot\|_B$. Нормы эквивалентны, если $\exists C_1, C_2 > 0 \quad C_1\|x\|_A \leqslant \|x\|_B \leqslant C_2\|x\|_A$ $(\|\cdot\|_A = \Theta(\|\cdot\|_B))$.

Теорема 5.9.

В пространстве $\mathbb{R}^d$ все нормы эквивалентны.

Доказательство.

Докажем эквивалентность стандартной норме $\|\cdot\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$:

Пусть p - норма. Тогда $p(x - y) = p(\sum\limits_{i=1}^{d}(x_i - y_i)e_i)$, где e_i - i-й вектор стандартного базиса.

$$p(x-y) = p\left(\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{d}|x_i - y_i|p(e_i) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{d}p(e_i)^2}.$$

Оценили сверху. Получили ещё что p непрерывна, так-как $|p(x)-p(y)| \leqslant p(x-y) \leqslant M\|x-y\|$. Значит, p непрерывна на единичной сфере, значит p ограничена на ней. Значит, $\exists a \in S_1 \quad \forall x \in S_1 \quad p(a)$
$p(x)$.

Тогда $p(y) = p\left(\|y\|\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\|p\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \geqslant \|y\|p(a)$. Заметим, что $p(a) > 0 \impliedby 0 \notin S_1$. $\square$

6. Лекция 7

6.1. Линейные операторы

***Определение* 6.1.**
Пусть X, Y - векторные пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $A : X \mapsto Y$ называется линейным оператором, если
$$\forall a, b \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b).$$

Пример.
Пусть $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Свойства.

1. $A0_X = 0_Y$
2. $\forall x_k \in X \quad \forall \alpha_k \in \mathbb{R} \quad A\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_k A x_k$

***Определение* 6.2.**
Пусть A, B - линейные операторы, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда
$$(A + B)x = Ax + Bx.$$
$$(\lambda A)x = \lambda A(x).$$

Следствие.
На множестве линейных операторов вида $X \mapsto Y$ можно ввести линейной пространство.

Замечание Лектописца.
Это пространство изоморфно пространству матриц размерности $\dim X \times \dim Y$

***Определение* 6.3.**
Пусть $A : X \mapsto Y$, $B : Y \mapsto Z$ - линейные операторы, тогда их композиция (произведение) $BA : X \mapsto Z$ - линейный оператор.
$$(BA)x = B(Ax).$$

***Определение* 6.4.**
Тождественный линейный оператор I - такой оператор, что $Ix = x$.

***Определение* 6.5.**
Пусть $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор. Обратным к нему называется отображение $A^{-1} : Y \mapsto X$, такой, что $A^{-1}A = I_X$, $AA^{-1} = I_Y$.

Следствие.
Обратный оператор существует $\iff$ A - биекция.

Свойства.

1. Если обратный оператор существует, то он единственный.
2. Обратный оператор линеен: **TODO:**
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$: $\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A)\, x = \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A(x)) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda A(x)) = A^{-1}(A(x)) = x$, в другую сторону симметрично.
4. Если $X = Y$, то множество обратимых операторов образует группу по комопзиции.

6.1.1. Связь с матрицами

Пусть $x = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$. Пусть $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор.

Возьмём канонические базисые $e_k \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^n$.

Тогда

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{m} x_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{m} x_k A(e_k).$$

Пусть

$$A(e_k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}.$$

Тогда, применение оператора эквивалентно умножению вектора x на матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \big[A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_m)\big]$$

Замечание Лектописца.

Выбор базиса в любом векторном пространстве задаёт изоморфизм в $\mathbb{R}^{\dim X}$, так-что любой оператор можно представить как матрицу, указав базис.

***Определение* 6.6.**

Пусть X и Y - нормированные пространства. Тогда, норма оператора $A : X \mapsto Y$:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y.$$

***Определение* 6.7.**

Оператор называется ограниченным, если его норма конечная.

Замечание.

Ограниченный оператор $\neq$ ограниченная функция.

Если линейный оператор - ограниченная функция, то он тождественнен нулю. (Пусть $A(x) \neq 0$, тогда $A(\alpha x) = \alpha A(x)$, норма $\|\alpha Ax\| = |\alpha|\|Ax\|$, если $\alpha \to \infty$, то норма тоже стремиться к бесконечности.

Свойства.

1. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$
3. $\|A\| = 0 \iff A = 0$
4. Норма оператора - норма на пространстве операторов.

Доказательство.

Заметим, что супремум сохраняет нестрогие неравенства, и $\sup(x+y) \leqslant \sup x + \sup y$, поэтому достаточно доказать неравенство норм для всех векторов.

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\|.$$

$$\|(\lambda A)x\| = |\lambda|\|Ax\|.$$

Достаточность очевидна, необходимость:

$$\|A\| = 0 \implies \forall x \in X \quad \|x\| \leqslant 1 \implies Ax = 0.$$

$$\forall x \in X \quad \|x\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = Ax \implies Ax = 0.$$

□

Теорема 6.1 (Равносильные определения нормы оператора)**.**

$$\|A\| =_1 \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| =_2 \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| =_3 \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| =_4 \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} =_5 \inf\{C > 0 \mid \|Ax\| \leqslant C\|x\|\}.$$

Доказательство.

Пусть все равенства имеют вид $N_{i-1} =_i N_i$.

Знаем, что $N_0 = N_1$. $N_1 \geqslant N_2$ и $N_1 \geqslant N_3$.

Докажем $N_2 \geqslant N_1$:

Возьмём x, такой, что $\|x\| \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$, тогда $\left\|\frac{x}{1+\varepsilon}\right\| < 1$.

Тогда $\left\|A\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right\| \leqslant N_2$. (Так-как N_2 это супремум по таким выражениям).

$$\left\|A\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right\| = \frac{1}{1+\varepsilon}\|Ax\| \implies \|Ax\| \leqslant (1+\varepsilon)N^2.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, тогда $\|Ax\| \leqslant N_2 \implies N_1 \leqslant N_2$.

Докажем $N_3 \geqslant N_1$:

Возьмём $x \neq 0$, $\|x\| \leqslant 1$. ($x = 0$ не влияет на супремум N_1).

$$\|Ax\| = \left\|A(\|x\|\frac{x}{\|x\|})\right\| = \|x\| \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant N_3.$$

Докажем $N_3 = N_4$:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|.$$

Докажем $N_4 = N_5$:

Замеитм, что для 0 неравенство всегда выполнено, так-что его можно исключить из множества.

$$N_5 = \inf\left\{C > 0 \mid \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant C\right\} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = N_4.$$

□

Следствие.

1. $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$
2. $\|BA\| \leqslant \|B\|\|A\|$

Доказательство.

Первое очевидно по N_4.

Второе: $\|B(Ax)\| \leqslant \|B\|\|Ax\| \leqslant \|B\|\|A\|\|x\|$.

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|BAx\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|A\|\|B\|\|x\| \leqslant \|A\|\|B\|.$$

□

Теорема 6.2.

Пусть $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор. Тогда следующие услвоия равносильны:

1. A - ограниченный оператор
2. A непрерывен в 0
3. A непрерывен всюду
4. A равномерное непрерывен

Доказательство.

$4 \implies 3 \implies 2$ - очевидно.

$1 \implies 4$:

Рассмотрим $\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leqslant \|A\|\|x-y\|$, если $\|x-y\| \to 0$, то $\|A\|\|x-y\| \to 0$.

$2 \implies 1$:

Возьмём $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ по ε. Тогда $\forall x \quad \|x\| < \delta \implies \|Ax\| < 1$

$$\|Az\| = \frac{2\|z\|}{\delta} \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|} \cdot \frac{\delta}{2}\right) \right\| \leqslant \frac{2\|z\|}{\delta} \implies \|A\| \leqslant \frac{2}{\delta}.$$

□

7. Лекция 8

Теорема 7.1.

Если $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ - линейный оператор, то $\|A\|^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}^2$

Доказательство.

Возьмём $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\|x\| \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i A(e_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \|x\|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\end{aligned}$$

□

7.0.1. 5. Длина кривой

***Определение* 7.1** (Путь)**.**

Путь - $\gamma : [a, b] \mapsto X$, X метрческое пространство, γ - непрерывное.

$\gamma(a)$ - начало пути

$\gamma(b)$ - конец пути

Путь называется простым (несамопересекающимся), если $\forall x, y \in [a, b) \quad \gamma(x) \neq \gamma(y)$.

Путь называется замкнутым, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Противоположный путь: $\gamma^{-1} : [a, b] \mapsto X$, $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$.

Пути $\gamma_1 : [a, b] \mapsto X$, $\gamma_2 : [c, d] \mapsto X$ называются эквивалентными, если $\exists \tau : [a, b] \mapsto [c, d] \quad \tau(a) = c, \tau(b) = d$, τ строго монотонно, такое, что $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$. Такие τ называются допустимыми преобразованиями параметра.

Носитель пути - $\operatorname{Im} \gamma$.

***Определение* 7.2** (Кривая)**.**

Кривая - класс эквивалентных путей.

Пути этого класса называются параметризациями кривой.

Носитель кривой - носитель пути из класса.

***Определение* 7.3.**

Путь $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ назывется C^r-гладким, если его компоненты $\gamma_i : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы r раз.

***Определение* 7.4.**

Путь называется кусочно гладким, если его можно разбить на конечное количество гладких путей.

***Определение* 7.5.**

Длиной пути $\gamma : [a, b] \mapsto X$ называется

$$\ell(\gamma) = \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{n} \rho(\gamma(\xi_{i-1}), \gamma(\xi_i)).$$

Где супремум берётся по всем возможным разбиенеиям отрезка $[a, b]$.

Свойства.

1. Длины эквивалентных путей совпадают

   Доказательство.
   Пусть пути эквивалентны с преобразованием параметра τ. Тогда, любое разбиенеие для одного можно перевести в разбиенеие для другого, не изменив значение суммы. □

2. Длины противоположных путей равны

   Доказательство.
   Рассмотрим разбиение полученное перечислением точек в обратном порядке. □

3. $\ell(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b))$

   Доказательство.
   Как часть супрермума мы рассматриваем разбиенеие $\xi_0 = a$, $\xi_1 = b$ □

***Определение* 7.6.**
Длина кривой - длина любого представителя класса (они все равны по свойству 1).

Теорема 7.2.
Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto X$, $c \in (a, b)$.

Тогда, $\ell(\gamma) = \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$.

Доказательство.
Неравенство $\geqslant$:

Возьмём разбиенеия $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = c$, $c = u_0 < \ldots < u_m < b$.

Тогда, разбиенеие $t_0, t_1, \ldots, t_n, u_0, u_1, \ldots, u_m$ рассматривалась в супремуме $\ell(\gamma)$.

Можем перейти к суперемуму, так-как он $\leqslant$ любой верхней границы.

Неравенство $\leqslant$:

Рассмотрим рабиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Пусть $t_k \leqslant c < t_{k+1}$.

Рассмотрим $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant c$ - разбиение $[a, c]$, и $c < t_{k+1} < t_{k+2} < \ldots < t_n = b$.

Тогда,

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\gamma\left(t_{i-1}\right), \gamma(t_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) + \rho(\gamma(t_k), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{k+1})) + \sum_{k+2}^{n} \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)).$$

А правая часть неравенства - сумма длин пути на $[a, c]$ и на $[c, b]$. Можем перейти к супремуму, и получить неравенство на длины пути. □

Теорема 7.3.
Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^d$ - гладкий путь.

Тогда $\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, где производная берётся покоординатно.

Доказательство.

Лемма.

Для отрезка $\Delta \subset [a, b]$ завдём обозначения:

$$m_\Delta^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|.$$

$$M_\Delta^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|.$$

$$m_\Delta^2 := \sum_{i=1}^{d} (m_\Delta^{(i)})^2.$$

$$M_\Delta^2 := \sum_{i=1}^{d} (M_\Delta^{(i)})^2.$$

Тогда

$$\ell(\Delta) m_\Delta \leqslant \ell\left(\gamma|_\Delta\right) \leqslant \ell(\Delta) M_\delta.$$

Доказательство.

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$. Тогда $\ell = \beta - \alpha$.

Выберем $\alpha < t_0 < t_1 < \ldots < \beta$

Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} \rho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} (\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1})^2}$

Рассмотрим одно слагаемое: $\sum\limits_{i=1}^{d} \left(\gamma_i(t_j - \gamma_i(t_{j-1})\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{d} \left(\gamma_i'(\xi_{ij})(t_j - t_{j-1})\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{d} \sum\limits_{i=1}^{d} (M_\Delta^i(t_j - t_{j-1}))^2 = M_\Delta^2(t_j - t_{j-1})$

Берём корень, получаем что длина

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} M_\Delta(t_j - t_{j-1}) = (\beta - \alpha) M_\Delta.$$

□

TODO: Возьмём разбиение $[a, b]$, назовём его t.

Тогда $m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}(t_k - t_{k-1}) \leqslant \ell\left(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}\right) \leqslant M_{[t_{k-1}, t_k]}(t_k - t_{k-1}) =: M_k$

Просумиируем:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \ell(\gamma) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1}).$$

При этом,

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \leqslant M_k(t_k - t_{k-1}).$$

Можем таким-же образом просуммировать:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leqslant \int\limits_{a}^{b} \|\gamma'(t)\| dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1}).$$

Осталось показать, что разность левой и правой части стремится к 0:

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(M^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]}\right)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(m^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]}\right)^2}$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(M^{(i)}_{[t_{k-1},t_k} - m^{(i)}_{[t_{k-1},t_k]}\right)}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(\gamma_i'(\xi_{ik}) - \gamma'(\eta_{ik}))^2}$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(\omega_{\gamma_i'}(\varepsilon)\right)^2}$$

Где $\varepsilon = \max_k t_k - t_{k-1}$.

При $\varepsilon \to 0$ всё выражение стремиться к 0.

Значит,

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

$\square$

Следствие.

1. Длина графика функции: $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ - $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \iff \gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$
2. Длина в полярных координатах: $r : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$ - $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi \iff \gamma(t) = \begin{bmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin(t) \end{bmatrix}$
3. $\ell(\gamma) \leqslant (b-a)\max\|\gamma'\|$

Определение 7.7.

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна.

Утверждение 7.4.

Можно рассмотреть $f(t) = \ell\left(\gamma|_{[a,t]}\right)$.

f непрерывна тогда и только тогда, когда кривая спрямляема.

Определение 7.8.

Пусть $A \subset X$, где X - метрическое пространство.

A - связно, если при покрытии $A \subset U \cup V$, где U, V - открытые множества, такие, что $U \cap V$, либо $A \subset U$, либо $A \subset V$.

Теорема 7.5.

Непрерывнай образ связного множества связен.

Доказательство.

Пусть $f : (E \subset X) \mapsto Y$, E связно, f непрерывно.

Покроем $f(E)$ открытыми в Y непересекающимися множествами U и V.

Тогда $E \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Эти множества не пересекаются, и прообраз открытого множества открыт. Тогда, одно из множеств можно выкинуть. Пусть $E \subset f^{-1}(U)$. Тогда $f(E) \subset U$. $\square$

Следствие Теорема Больцано-Коши.

Пусть $f : E \mapsto \mathbb{R}$. f непрерывно, E связно. $a, b \in E$, такие, что $f(a) = A$, $f(b) = B$.

Тогда $\forall A \leqslant C \leqslant B \quad \exists c \in E \quad f(c) = C$.

Доказательство.

Пусть $\exists A \leqslant C \leqslant B \quad \forall x \in E \quad f(x) \neq C \implies f(E) \subset (-\infty, C) \cup (C, +\infty)$. При этом, $A \in (-\infty, C)$, $B \in (C, +\infty)$. Ни одно множество выкинуть нельзя. Противоречие. $\square$

Теорема 7.6.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ - связное множество.

Доказательство.

Предположим что не связан.

Пусть $[a, b] \subset U \cup V$, U, V - открытые непересекающиеся.

Пусть $b \in V$.

Рассмотрим $S := [a, b] \cap U$. По предположению, $S \neq \varnothing$.

Рассмотрим $s = \sup S$.

Пусть $s \in V$. Тогда, $\exists \varepsilon \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset V$. Тогда $(s - \varepsilon, s] \cap U = \varnothing$, значит, $s - \varepsilon$ тоже верхняя граница S. Противоречие с тем, что s - супремум.

Пусть $s \in U$, тогда $s \neq b$. Тогда, $\exists \varepsilon \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U \land s + \varepsilon < b$. Тогда, $[s, s + \varepsilon) \subset S$. Противоречие с тем, что s супремум.

Значит, предположение о несвязности отрезка неверно. $\square$

Следствие.

Носитель любого пути связен.

***Определение* 7.9.**

Множество $A \subset X$ называется линейно связным, если $\forall x, y \in A \quad \exists \gamma : [a, b] \mapsto A \quad \gamma(a) = x \land \gamma(b) = y$, γ - путь.

Теорема 7.7.

Линейно связное множество связно.

Доказательство.

Пусть не так.

Пусть $A \subset U \cup V$, U, V - открытые непересекающиеся.

Возьмём $x \in A \cap U$, $y \in A \cap V$.

Соеденим их путём $\gamma : [a, b] \mapsto A$.

Тогда, $\gamma([a, b]) \subset U \cap V$. При этом, $\gamma(a) \in U$, $\gamma(b) \in V$. Но носитель пути связен. Противоречие. $\square$

***Определение* 7.10.**

Область - открытое линейно связное множество.

Замечание.

Если U - открытое, то U связно $\iff$ U линейно связно.

7.1. 7 Ряды

7.1.1. 1 Ряды в нормированных пространствах

***Определение* 7.11.**

Пусть X - нормированное пространство. $x_1, x_2, \ldots \in X$.

Ряд - $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$.

Частичная сумма ряда - $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Если сущесвует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то он называется суммой ряда.

Ряд называется сходящимся если предел сущесвует.

Замечание.

Если рассматриваем ряды в $\mathbb{R}$, то $\infty \notin \mathbb{R}$, значит для обычных пределов «сходится» $\iff$ «предел существует и конечен»

Теорема 7.8 (Необходимое условие сходимости)**.**

Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Доказательство.

$$x_n = S_n - S_{n-1} \implies \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

$\square$

Свойства.

Теорема 7.9 (Линейность суммы)**.**

Если $S_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$, $S_2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha S_1 + \beta S_2$.

Теорема 7.10 (Расстановка скобок)**.**

В сходящемся ряду можно без изменения суммы расставить скобки.

Доказательство.

Расстановка скобок - выбор подпоследовательности из последовательности частичных сумм.

$\square$

Теорема 7.11 (Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^d$)**.**

Пусть $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}^d$. $x_i = \begin{bmatrix} x_i^{(1)} \\ \vdots \\ x_i^{(d)} \end{bmatrix}$.

Тогда, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall 1 \leqslant i \leqslant d \quad$ сходится рад $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)}$.

Теорема 7.12 ((Очередной) Критерий Коши)**.**

Пусть X - полное нормированное пространство.

Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ - сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \left|\sum\limits_{i=m}^{n} x_i\right| < \varepsilon$.

Доказательство.

Заметим, что $\sum\limits_{i=m}^{n} x_i = S_m - S_n$. Получили критерий для предела частичных сумм, сходимость которого и определяем сходимость ряда. $\square$

***Определение* 7.12.**

Абсолютная сходимость.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ абсолютно сходится, если сходится $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$.

Теорема 7.13.

Пусть X - полное нормированное пространство.

Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n$ сходится абсолютно, то он сходится, и $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\right\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Доказательство.

Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i i\| \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \left\|\sum\limits_{i=n}^{m} x_k\right\| \leqslant \sum\limits_{i=n}^{m} < \varepsilon$

Значит, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \qquad \forall m, n > N \quad \left\|\sum\limits_{i=m}^{n} x_i\right\| < \varepsilon$.

При этом, знаем

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Прейдём к пределу, получим нужное утверждение. $\square$

8. Лекция 9

Теорема 8.1.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и кол-во слагаемых в каждой группе $\leqslant M$, то если ряд после группировки сходится, то сходится и начальный ряд.

Доказательство.

Знаем, что есть подпоследовательность частичных сумм, соответствующая группировке. При этом $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$

При этом, S_{n_k+r} - произвольная частичная сумма, $0 \leqslant r \leqslant M$.

Рассмотрим $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k+r} - S = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_k+r}$.

$$\|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_k+r}\| \leqslant \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \ldots + \|x_{n_k+r}\| \to 0.$$ □

Теорема 8.2.

Для числовых рядов, если члены ряда в каждой группе одного знака, и ряд после группировки сходится, то сходится и начальный ряд.

Доказательство.

Если в группе от x_{n_k+1} до $x_{n_{k+1}}$ всё $\geqslant 0$, то $S_{n_k} \leqslant S_{n_k+r} \leqslant S_{n_{k+1}}$.

Если всё $\leqslant 0$, то $S_{n_k} \geqslant S_{n_k+r} \geqslant S_{n_{k+1}}$.

В обоих случая, S_{n_k+r} зажата между двумя стремящимися к S последовательностями. □

8.1. 2 Знакопостоянные ряды

Теорема 8.3.

Если $a_n \geqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff \exists M \quad \forall n \quad S_n \leqslant M$

Доказательство.

Заметим, что S_n монотонно возрастает. А значит, имеет предел тогда и только тогда, когда ограниченна. □

Теорема 8.4 (Признак сравнения)**.**

Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

Тогда если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Доказательство.

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k =: B_n.$$

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ схоидтся, то $\exists B \quad \forall n \quad B_n \leqslant B$, значит, $\forall n \quad a_n \leqslant B$, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, получаем противоречие. □

Следствие.

Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$. Если $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ схоидтся.

Если $a_n \sim b_n$, то ряды ведут себя одинакого.

Доказательство.

Начиная с какого-то момента, $a_n < cb_n$.

Если они эквивалентны, то с какого-то момента, $\frac{b_n}{2} \leqslant a_n \leqslant 2b_n$. □

Теорема 8.5 (Признак Коши)**.**

Пусть $a_n \geqslant 0$. При этом

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то расходится.
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд схоидтся.
3. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, если < 1, то сходится. При $= 1$ ничего не известно.

Доказательство.

Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то $a_n \geqslant 1 \implies a \not\to 0$.

Если $\sqrt[n]{a_n} < 1 \implies a_n \leqslant q^n$. Геометрическая прогрессия сходится.

Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, тогда, $\exists n_k \quad \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = q > 1$. Тогда, при больших k все $a_{n_k} \in (q-\varepsilon, q+\varepsilon) = (1, q+\varepsilon)$. Тогда, $a_{n_k} \geqslant 1$, значит нет стремления к нулю, значит расходится.

Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} = q < 1$. Возьмём ε, так, чтобы получилась окрестность с правым концом $\frac{1+q}{2}$, тогда, с какого-то n, $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{k} < \frac{q+1}{2}$. Тогда $\sqrt[k]{k} < \frac{q+1}{2}$. По пункту 2 сходится.

□

Теорема 8.6 (Признак Даламбера)**.**

Пусть $a_n > 0$.

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, ряд расходится
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, ряд сходится.
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует и конечен. Если он > 1, то расходится, если < 1 сходится. При $= 1$ ничего не известно.

Доказательство.

Члены ряда возрастают, значит не стремятся к нулю.

Ряд ограничен геометрической прогрессией со знаменателем d. $a_k = \mathcal{O}(d^k)$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Начиная с некоторого номера, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \gtreqless 1$, по пункту 1/2 расходится/сходится.

□

Теорема 8.7.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует, то он равен $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

Доказательство.

Рассмотрим логарифмы.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1} - \log a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \log a_{n+1} - \log a_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

□

Теорема 8.8.

Пусть $f : [m, n] \mapsto \mathbb{R}$ - монотонная, $f \geqslant 0$.

Тогда, $\left| \sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(t)dt \right| \leqslant \max\{|f(m)|, |f(n)|\}$.

Доказательство.

Без ограничения общности, f убывает.

Заметим, что $\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) \geqslant \int\limits_{m}^{n} f(t)dt \geqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n}$.

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) - \int_{m}^{n} \leqslant 0 \implies \sum_{m=k}^{n} f(k) - \int_{m}^{n} f \leqslant f(m).$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) - \int_{m}^{n} f \geqslant 0 \implies \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_{m}^{n} f \geqslant f(n) \geqslant 0.$$

□

Замечание.

Теорема верна и без ограничения $f \geqslant 0$.

9. Лекция 10

Теорема 9.1 (Интегральный признак сходимости)**.**
Пусть $f : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$. f монотонно убывает.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинакого.

Доказательство.
Сходимость ряда равносильная ограниченности частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}$.

Сходимость интеграла равносильна ограниченности первообразной $F(n) = \int\limits_{1}^{n} f(x)dx$.

По предыдущей теореме **TODO:** ref, $|S_n - F(n)| \leqslant f(1)$. Значит, их ограниченности эквивалентны. ☐

Пример.
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Если $p \leqslant 0$, то точно расходится.

Если $p > 0$, то сходимость эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

Про интеграл знаем, что сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Значит, ряд сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Следствие.
Если $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{c}{n^p}$, $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство.
Признак сравнения + последний пример. ☐

Пример.
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx$. Его сходимость равносильная сходимости ряда.

$$\int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x \log x} \overset{y = \log x}{=} \int\limits_{\log 2}^{\log b} \frac{dy}{y} = |\log y|_{\log 2}^{\log b} = \log\log b - \log\log 2 \to \infty$$

Интеграл расходится, значит ряд тоже.

9.1. 3 Знакопеременные ряды

Определение **9.1.**
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

***Определение* 9.2.**

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, если он сходится, но абсолютной сходимости нет.

Теорема 9.2 (Преобразование Абеля (дискретное интегрирование по частям))**.**

$$A_0 = 0A_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{j=2}^{n} A_{j-1} b_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - A_k b_{k+1} \\
&= A_n b_n - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)
\end{aligned}$$

□

Теорема 9.3 (Признак Дирихле)**.**

Если частичные суммы $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничены, b_k монотонны, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ - сходится.

Доказательство.

Рассмотрим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$.

Заметим, что $A_n b_n$ - произведение ограниченного на бесконечно малое, значит стремится к нулю.

Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$. Это частичная сумма какого-то ряда, надо показать что есть её предел. Докажем абсолютную сходимость ряда.

Пусть $|A_n| \leqslant M$

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = M \left| \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) \right| = M(b_1 - b_{n+1}) \to M b_1$$

Замену суммы модулей на модуль суммы можно делать, так-как все b_n с какого-то момента одного знака.

Значит, всё имеет предел. □

Теорема 9.4 (Признак Абеля)**.**

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, b_n монотонны и ограничены.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство.

Знаем, что сущетсвует предел b_n. Пусть $B := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Тогда $\tilde{b}_n = b_n - B$. $\tilde{b}_n$ монотонна и стремится к 0.

Знаем, что у $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. A_n имеет предел, значит она ограниченна.

По признаку Дирихле, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$ сходится.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_n (b_n - B) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - B \sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + B \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Значит, нужный ряд - сумма двух сходящихся рядов. □

***Определение* 9.3.**

Ряд называется знакочередующимся, если он имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geqslant 0$. (Либо, $(-1)^n$).

Теорема 9.5 (Признак Лейбница)**.**

Если a_n - монотонны и стремяется к 0, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Более того, $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$.

Доказательство.

Заметим, что $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$. Так-как a_n монотонны, $S_{2n+2} \geqslant S_{2n}$.

Аналогично, $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$. Значит, $S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$.

Значит, следующие отрезки вложенны:

$$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \ldots.$$

При этом, $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n}$. По теореме о стягивающих отрезках, начала и концы имеют пределы, и они равны. $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = S \implies \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. □

Пример.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$. Знаем, что при $p > 1$ сходится абсолютно.

При $p \leqslant 0$ члены ряда не стремятся к 0, поэтому ряд расходится.

При $0 < p \leqslant 1$, по признаку Лейбница, сходится условно.

Пример.

Рассмотрим ряд Лейбница - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

По признаку Лейбница сходится.

Найдём предел частичных сумм с чётными номерами:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}).$$

$$S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}) = H_{2n}-H_n = \log(2n)+\gamma$$

TODO:

Пример.

Рассмотрим ряд $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$.

Обозначим сумму за $\tilde{S}$.

Рассмотрим $\tilde{S}_{3n}$ (группируем слагаемые по 3).

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_{2n} \\ &= \frac{1}{2}\left(H_{2n} - H_n\right) = \frac{1}{2}S_{2n} = \frac{\log 2}{2}\end{aligned}$$

От перестановки слагаемых в бесконечных рядах их сумма в общем случае меняется.

***Определение* 9.4** (Перестановка членов ряда)**.**

Рассмотрим $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ - биекция. Тогда, перестановка членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$

Теорема 9.6.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сходится абсолютно.

Тогда, любая перестановка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$.

Доказательство.

Пусть $\tilde{S} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$

Случай 1: $a_n \geqslant 0$. Тогда $\tilde{S}_n \leqslant S$. Значит, частичные суммы ограничены, и $\tilde{S} \leqslant S$. Так-как φ - биекция, можем сделать обратную перестановку, и получить $S \leqslant \tilde{S}$. Значит, $S = \tilde{S}$.

Случай 2: Рассмотрим $(a_n)_+ = \max\{a_n, 0\}$, $(a_n)_- = \max\{-a_n, 0\}$. Тогда $(a_n)_+ - (a_n)_- = a_n$. $(a_n)_+ + (a_n)_- = |a|$.

Ряд сходится абсолютно, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_\pm \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{\varphi(n)})_\pm$.

Вычтем ряды друг из друга, получим ту-же сумму. □

Замечание.

Если $a_n \geqslant 0$ и ряд расходится, то любая его перестановка даёт тот-же результат.

Если ряд сходится условно, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_-$ расходятся, так-как их разность сходится, а сумма расходится.

Теорема 9.7 (Теорема Римана о перестановке членов ряда)**.**

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

Тогда $\forall s \in \overline{\mathbb{R}} \quad \exists \varphi$ - перестановка $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s$.

Так-же существует перестановка, для которой ряд вообще не будет иметь суммы.

Доказательство.

Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Положительные члены ряда находятся в b, отрицательные, домноженные на -1, в c. Нули где угодно.

Знаем что эти ряды расходяется, потому-что они эквивалентны рядам из $(a_n)_\pm$. При этом, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$.

Возьмём такое число n_1, что $b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1-1} \leqslant s < b_1 + \ldots + b_{n_1}$. Возьмём n_1 b-шек.

Дальше, возьмём число m_1, такое, что $b_1 + \ldots + b_n - c_1 - \ldots - c_{m_1} < s \leqslant b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - \ldots - c_{m_1-1}$. Возьмём m_1 c-шек.

Дальше сного берём b, потом снова c. Так-как и b и c стремятся к нулю, этот ряд будет стремится к s. При этом, мы всегда сможем набрать достаточную сумму, так-как $b, c \geqslant 0$ и расходятся.

Если $s = +\infty$.

На i-й итерации возьмём сколько-то b, пока сумма не станет $> i$, потом добавим одну c. С какого-то момента $c_n < 1$, так-что последоватльность будет строго возрастать на каждой итерации, значит ряд расходится в бесконечность. Симметрично для $-\infty$.

Если хотим получить отсутствее суммы, будем брать b чтобы стало > 1, а потом c, чтобы стало < -1. Тогда предела не будет. □

Теорема 9.8 (Теорема Коши о произведении рядов)**.**

Пусть есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ сходятся абсолютно, то ряд составленный из $a_n b_k$ в произвольном порядке будет абсолютно сходится. И его сумма - AB.

Доказательство.

Пусть $A^* := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $B^* := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Рассмотрим $\sum\limits_{i,j} |a_i b_j| \leqslant \sum\limits^{\max i} |a_i| \sum\limits^{\max j} |b_j| \leqslant A^* B^*$.

Значит, все суммы вида $\sum |a_i b_j|$ - ограничены. Значит, ряд абсолютно сходится.

Будем считать ряд в следующем порядке: $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + \ldots$ (главные подквадраты квадратной таблицы).

Любая подпоследовательность частичных суммы сходится к тому-же пределу что вся последовательность. Будем рассматривать суммы с номерами вида n^2.

$$S_{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_j = A_n B_n \to AB$$ □

***Определение* 9.5.**

Произведением рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ (диагонали квадратной таблицы).

Теорема 9.9 (Теорема Мертенса)**.**

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ - сходятся, причём один из них абсолютно, то их произведение сходится к AB.

Замечание.

Здесь важен порядок

Просто сходимости недостаточно

Лемма.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_{n-k-1}) = xy$.

Доказательство.

Случай $y = 0$. Тогда $|x_n| \leqslant M$, $|y_n| \leqslant M$. Выберем N, такое, что $\forall n > N \quad |y_n| < \varepsilon$.

Тогда $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_{n-k+1}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_{n-k+1}| < (n-N)M\varepsilon + NM^2$.

Тогда $S_n < \frac{(n-N)M\varepsilon+NM^2}{n} < M\varepsilon + \frac{(N-1)M^2}{n} < M\varepsilon + \varepsilon$ при больших n.

Случай, если $y_n = y$.

Тогда $S_n = y\frac{x_1+x_2+\ldots}{n} = yx$ по теореме Штольца.

Произвольный случай: Пусть $y_n = y + \tilde{y}_n$. Тогда $\tilde{y}_n \to 0$.

Тогда $S_n \to xy + 0 = xy$. □

Теорема 9.10 (Теорема Абеля)**.**

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = C$. Если все ряды сходятся, то $C = AB$.

По лемме знаем, что $\frac{A_1B_n + A_2B_{n-1} + \ldots + A_nB_n}{n} \to AB$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\left(na_1b_1 + (n-1)(a_1b_2 + a_2b_1) + (n-2)(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1)\right) \\
&\quad = \frac{1}{n}(nc_1 + (n-1)c_2 + (n-2)c_3 + \ldots + c_n) \\
&\quad = \frac{C_n + C_{n-1} + \ldots + C_1}{n} \to C
\end{aligned}$$

9.2. 4 Бесконечные произведения

***Определение* 9.6.**

Значение бесконечного произведениея $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ - предел $P_n := \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$, если он существует.

Произведение называется сходящимся, если предел сущесвует, конечен, и **отличен от нуля**

Свойства.

1. Конечное количество ненулевых множителей не влияет на сходимость.

2. Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ - сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

3. Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ начиная с некоторого места все члены положительны.

4. Если $p_n > 0$, то для сходимости $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ необходима и достаточна сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log p_n$. При этом, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log p_n = S$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = e^S$.

10. Лекция 11

***Определение* 10.1** (Равномерная сходимость).

Пусть есть последовательность функций $f_n : E \mapsto \mathbb{R}$ и функция $f : E \mapsto \mathbb{R}$.

Последовательность f_n называется равномерно сходящейся к f, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание.

Отличие от поточечной сходимости - N зависит только от ε, но не от x.

***Определение* 10.2** (Равномерная сходимость рядов).

Пусть есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $u_n : E \mapsto \mathbb{R}$.

Частичная сумма такого ряда: $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Ряд сходится поточечно/равномерно если частичные суммы сходятся поточечно/равномерно.

Теорема 10.1 (Критерий Коши (опять)).

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится тогда и только тогда когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

TODO: □

Теорема 10.2 (Признак сравнения).

Пусть $\forall x \in E \quad |u_n(x) \leqslant v_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство.

По критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad \sum_{k=n}^{m} v_k(x) < \varepsilon.$$

При этом, $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} v_k(x)$. Получили верность критерия Коши для u_k. □

Теорема 10.3 (Признак Вейерштрасса).

Пусть $\forall x \in E \quad |u_n(x)| \leqslant a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство.

Подставляем в признак сравнения $v_n(x) = a_n$. Получаем равномерную сходимость, так-как не зависит от x. □

Следствие.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ равномерно сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство.

Признак сравнения с $v_n(x) = |u_n(x)|$. □

Пример.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

Подставим в признак Вейерштрасса $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Замечание.

Абсолютная сходимость независит от равномерной.

Пример.

Абсолютно но не равномерно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на $(-1, 1)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|}$.

При этом критерий Коши не проходит, например $\varepsilon = \frac{1}{2}$, но $\sum\limits_{k=n}^{n} x^n = x^n$. При фиксированном n если устремить x к 1, то x^n стремится к 1.

Пример.

Равномерно но не абсолютно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Это числовой ряд, он сходится, значит сходится рваномерно. Но если взять модуль, то получим расходящийся ряд.

Пример.

Абсолютно равномерно сходится, но ряд из модулей не сходится равномерно - тоже бывает.

Теорема 10.4 (Признак Дирихле)**.**

Если $a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$ и

1. $\exists M \quad \forall n \quad \forall x \in E \quad |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)| \leqslant M$.
2. b_n равномерно стремится к 0
3. $b_n(x)$ монотонно по n при фиксированном x.

То $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство.

Пусть $A_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$, $|A_n(x)| \leqslant M$.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x) = A_n(x) b_n(x) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$.

Поймём что $A_n(x) b_n(x)$ равномерно стремится к 0: $A_n(x) b_n(x) \leqslant M b_n(x) \rightrightarrows 0$.

Заметим, что $|A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))| \leqslant M |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$.

Покажем равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n(x) - b_{n+1}(x)|$:

Пусть $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$. Зафиксируем x. b_k монотонно по k, значит разность знакопостоянна, значит $S_n(x) = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x) - b_{k+1}(x)\right| = |b_1(x) - b_n(x)|$.

Заметим, что $|b_1(x) - b_{n+1}(x)| - |b_1(x)| \leqslant |b_1(x) - b_{n+1}(x) - b_1(x)| = |b_{n+1}(x)| \rightrightarrows 0 \implies |b_1(x) - b_{n+1}(x) \rightrightarrows 0$, значит сумма (второе слагаемое после преобразования) равномерно сходится, значит ряд равномерно сходится. $\square$

Теорема 10.5 (Признак Абеля)**.**

Пусть $a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - равномерно сходится
2. $\exists M \quad \forall x \in E \quad \forall n \quad |b_n(x)| \leqslant M$
3. $b_n(x)$ монотонны по n.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство.

Проверим критерий Коши:

Рассмотрим $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) b_{n+k}(x) = (A_{n+p}(x) - A_n(x)) b_{n+p}(x) + \sum\limits_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x))$.

Проверим слагаемы по отдельности:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in E \quad \forall n \geqslant N \quad |A_{n+p}(x) - A_n(x)||b_{n+p}(x)| \leqslant K|A_{n+p}(x) - A_n(x)| = K|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n(x)| < \varepsilon K.$$

(По критерию Коши для a_n)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in E \quad \forall n > N \quad \left|\sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k}(x) - A_n(x))(b_{n+k} - b_{n+k+1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k} - A_n||b_{n+k} - b_{n+k+1}| \leqslant \varepsilon$$

TODO:

Получили, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in E \quad \forall n \geqslant N \quad \sum_{k=1}^{n+p} a_k b_k(x) \leqslant \varepsilon M + 2\varepsilon M = 3\varepsilon M.$$

$\square$

Теорема 10.6 (Признак Лейбница)**.**

Пусть $a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$, $b_n(x) \geqslant 0$, монотонно убывают по n, $b_n \rightrightarrows 0$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$ равномерно сходится.

Доказательство.

Берём $a_n = (-1)^{n-1}$ и подставляем в Дирихле. □

Пример.

Абсолютно и равномерно сходится, но ряд из модулей не сходится равномерно - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ на $(0,1)$.

Равномерная сходимость: По признаку Лейбница с $b_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

Абсолютная сходиомсть: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ не сходится равномерно:

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{10}$

$$\forall n \quad \exists x \in (0,1) \quad \sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{k} \geqslant n \left(\frac{x^{2n}}{2n} \right) = \frac{x^{2n}}{2} > \frac{1}{10}.$$

Теорема 10.7 (Признак Дини)**.**

Пусть K - компакт, $u_n \in C(K)$, $u_n \geqslant 0$.

Обозначим $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Предположим, что $S(x) \in C(K)$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство.

Пусть $r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_n(x) = S(x) - S_n(x)$. $r_n(x)$ монотонно убывает по n, и $r_n(x) \in C(K)$ как конечная сумма непрерывных функций.

Надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in K \quad r_N(x) \leqslant \varepsilon$.

Предположим что $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists x \in K \quad r_N(x) > \varepsilon$.

Тогда, получаем последовательность $x_N \in K$. Так-как K - компакт, то всегда есть сходящаяся подпоследовательность $x_{N_k} \to x_0$.

Зафиксируем номер M, и рассмотрим r_M. Если $N_k \geqslant m$ то $\varepsilon \leqslant r_{n_k}(x_{n_k}) \leqslant r_m(x_{n_k} \to r_m(x_0)$. Значит, $\forall m \quad r_m(x_0) \geqslant \varepsilon$, значит ряд не сходится. Но так-как $S(x)$ непрерывна, то она конечна для всех x, противоречие. □

10.1. 6 Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 10.8.

Пусть $f_n, f : E \mapsto \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$, a - предельная точка E.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f_n(a) = b_n$, то существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, и существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, причём они равны.

Доказательство.

Проверим фундаментальность b_n:

Из равномерной сходимости знаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремив $x \to a$ получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \geqslant N \quad |b_n - b_m| < \varepsilon.$$

$\square$

Значит, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ сщуествует и конечен.

Докажем что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$:

$$\forall n \quad |f(x) - b| \leqslant |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Возьмём такое n, что $|b_n - b| < \varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Такое точно найдётся.

$$|f(x) - b| \leqslant 2\varepsilon + |f_n(x) - b_n|.$$

Возьмём δ, что $|x - a| < \delta \implies |f_n(x) - b_n| < \varepsilon$.

Получилось

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - b| \leqslant 3\varepsilon.$$

Теорема 10.9.

Пусть $u_n : E \mapsto \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится и $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = b_n$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство.

Пусть $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k =: B_n$. При этом, $S_n \rightrightarrows S$.

По предыдущей теореме, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{x\to a} S(x)$. $\square$

Следствие.

Если u_n непрерывны в точке a и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то сумма тоже непрерывна в a.

Доказательство.

$$\lim_{x\to a} u_n(x) = u_n(a) \implies \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a).$$

$\square$

Теорема 10.10.

Пусть $f_n, f \in C[a, b]$, $f_n \rightrightarrows f$.

Тогда $\int\limits_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dt$ (равномерно по x).

Доказательство.

$$\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \leqslant (x-a)\max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leqslant (b-a)\max_{t\in[a,b]} |f_n($$

TODO: $\square$

Следствие.

Если $u_n \in C[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то

$$\int\limits_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n(t)dt.$$

Доказательство.

Так-как $S_n \rightrightarrows S \implies \int\limits_a^x S_n \rightrightarrows \int\limits_a^x S \iff$ **TODO:** □

Замечание.

Поточечной сходимсоти недостаточно. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

Теорема 10.11.

Пусть $f_n \in C^1[a,b]$, $\exists c \quad f_n(c) \to A$ и $f_n' \rightrightarrows g$.

Тогда $f_n \rightrightarrows f$, $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$. В частности $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$.

Доказательство.

Рассмотрим $\int\limits_c^a g(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^a f_n'(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - f_n(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - A$.

Тогда, по предыдущей теореме, $f_n(x) \rightrightarrows A + \int\limits_c^x g(t)dt =: f(x)$. □

Следствие.

Пусть $u_n \in C^1[a,b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ равномерно сходится.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows S \in C^1[a,b]$ и $S' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$.

Доказательство.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \implies S_n' = \sum_{k=1}^{n} u_k' \rightrightarrows g.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(c) = A.$$

$$S_n \rightrightarrows S.$$

$$S' = g.$$

□

10.2. 7 Степенные ряды

***Определение* 10.3** (Степенной ряд)**.**

Степенной ряд - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$.

Во всех утверждениях можно считать, что $z_0 = 0$, так-как всегда можно сделать замену.

Теорема 10.12.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z = z_c \neq 0$, то он сходится абсолютно $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < |z_c|$.

Доказательство.

Раз ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_c^n = 0$. Значит, $\exists M \quad \forall n \quad |a_n z_c^n| \leqslant M$.

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_c \cdot \left(\frac{z}{z_c}\right)^n\right| \leqslant M \cdot \left|\frac{z}{z_c}\right|^n.$$

Получили сходящуюся геометрическую прогрессию. □

Следствие.

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится при $z = z_c$, то он расходится $\forall z \quad |z| > |z_c|$

Доказательство.

Если есть такая точка z, то он сходился-бы в z_c. □

11. Лекция 12

***Определение* 11.1.**

Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - такое $R \in [0, +\infty]$, что $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < R$ ряд сходится, а $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > R$ ряд расходится.

***Определение* 11.2.**

Круг сходиомсти ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - множество точек $|z| < R$, где R - радиус сходимости.

Теорема 11.1 (Формула Коши-Адамара)**.**

Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости, причём верна формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Доказательство.

Применим признак Коши для абсолютной сходимости:

$$K := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| = \frac{|z|}{R}.$$

Ряд сходится абсолютно, если $K < 1 \iff |z| < R$.

Если $K > 1$, то члены ряда не стремятся к 0, $K > 1 \iff |z| > R$. □

Следствие.

Внутри круга сходимости, сходимость абсолютная.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$. $R = 0$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. $R = +\infty$.
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{k^n}$, $R = k$.

Теорема 11.2.

Пусть R - радиус сходимости, и $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Он сходится абсолютно, так-как находится в круге сходиомсти.

Признак Вейерштрасса: $|z| \leqslant r \implies |a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$. Ограничили рядом, независимым от переменной, значит сходится равномерно. □

Замечание.

Равномерной сходимости во всём круге сходимости НЕТ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Хвост $\sum\limits_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z}$ не будет равномерно стремится к нулю, так-как супремум при любом конкретном n может быть бесконечно большим.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмём w в круге. Выберем $|w| < r < R$. Знаем, что ряд равномерно сходится в $|z| < r$. Слагаемые степенного ряда - непрерывные функции. Значит, сумма непрерывна в $|z| < r$, в том чилсе в w. $\square$

Теорема 11.3 (Теорема Абеля)**.**

Пусть R - радиус сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ сходимость равномерна.

Доказательство.

Заметим, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$.

Знаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится, $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1]$, значит равномерно ограничено, $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает.

Применим признак Абеля, значит ряд равномерно сходится. $\square$

Замечание.

Если $|z| = R$, то есть равномерная сходимость на отрезке от z до нуля.

Доказательство.

Повернём систему координат. $\square$

Следствие.

Функция $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. В условиях теоремы, $f \in C[0, R]$.

В частности, $\lim\limits_{x\to R-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

Лемма.

Пусть x_n, y_n - последовательности из $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (0, +\infty)$.

Тогда, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n y_n = \lim x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

Доказательство.

Пусть $A := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $B := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, $C := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n y_n$.

Есть поледовательность n_k, такая, что $x_{n_k} y_{n_k} \to C$. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \implies C = A \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$. Значит, $B \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \frac{C}{A}$.

Есть последовательность m_k, такая, что $y_{m_k} \to B$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} y_{m_k} = AB \implies AB \leqslant C \implies B \leqslant \frac{C}{A}$.

Значит, $B = \frac{C}{A}$. $\square$

Следствие.

Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Заметим, что если все элементы ряда умножить на константу, то радиус сходимости не изментися. Можем переписать как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n z^n$.

$$R_1 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

$$R_2 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}.$$

$$R_3 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{n}}.$$

Несовпадающие элементы стремятся к 1, по лемме можем их вытащить. □

Теорема 11.4 (Почленное интегрирование степенного ряда)**.**

Пусть R - радиус сходимости $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Тогда, если $|x - x_0| < R$:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Причём, радиус сходимости совпадает с R.

Доказательство.

Знаем, что на $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно, значит f на нём непрерывна, а также можно интегрировать почленно.

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

По предыдущей теореме радиус совпадает. □

***Определение* 11.3.**

Пусть $f : E \mapsto \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} E$. Если $\exists k \in \mathbb{C} \quad f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \to z_0$, то f комплексно-дифференцируема в z_0, а k - производная f в z_0.

Замечание.

$$k = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0).$$

Существование производной по этой формуле равносильно дифференцируемости.

Теорема 11.5.

Пусть R - радиус сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Тогда f бесконечно комплексно-дифферецируема в круге $|z - z_0| < R$ и $f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} (n)_m a_n (z-z_0)^{n-m}$.

Доказательство.

Индукция по m: производная получилась степенным рядом с тем-же радиусом сходимости, значит переход есть.

Доказываем для $m = 1$.

Без ограничения общности, $z_0 = 0$.

Считаем производную в точке z, $|z| < R$. Выберем $|z| < r < R$.

Возьмём точку w, $|w| < r$.

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (w^n - z^n)}{w - z} = \lim_{w \to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}).$$

Надо проверить равномерную сходимость по w:

Признак Вейерштрасса: $|w| < r \wedge |z| < r \implies |a_n(w^{n-1} + \ldots z^{n-1})| \leqslant |a_n|(|w|^{n-1} + \ldots + |z|^{n-1}) \leqslant |a_n| n r^{n-1}$. При этом, радиус сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n r^{n-1}$ радиус сходимости совпадает с R, значит он сходится абсолютно, значит начальный ряд сходится равномерно. Можем переставить сумму и предел.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \to z} a_n(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

□

Теорема 11.6 (Единственность разложения функции в степенной ряд)**.**

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ при $|z - z_0| < R$.

Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Доказательство.

Тогда $f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} (n)_m a_n (z - z_0)^{n-m}$.

Подставим $z = z_0$: Все слагаемые кроме $n = m$ занулятся, значит $f^{(m)}(z_0) = (n)_m a_m = m! a_m$. □

***Определение* 11.4.**

Ряд тейлора для функции f в точке z_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

***Определение* 11.5.**

Функция называется аналитической в z_0, если она совпадает с суммой ряда Тейлора для точки z_0 в окрестности z_0.