Мат. Анализ 3

Igor Engel

1 Предел последовательности

Теорема 1.1 (Теорема об арифметических действиях с пределами (продолжение))**.**
Пусть $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$. Тогда:

$$\lim (x_n + y_n) = a + b.$$

$$\lim (x_n y_n) = ab.$$

$$\lim (x_n - y_n) = a - b.$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \text{ если } b \neq 0.$$

$$\lim |x_n| = |a|.$$

$$y_n \neq 0 \wedge b \neq 0 \implies \lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

Доказательство.

$$\lim(x_n - y_n) = \lim(x_n + (-1) \cdot y_n) = a + (-1)b = a - b.$$

Для доказательсвта отношения достаточно доказать, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|}.$$

Подставим $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$, тогда $\exists N \quad \forall n > N \quad |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$.
Тогда, $|y_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда

$$\frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} < \frac{|y_n - b|}{|b|/2 \cdot |b|} = \frac{2|y_n - b|}{b^2} < \varepsilon'.$$

Подставим $\varepsilon' = \frac{b^2\varepsilon}{2}$, тогда найдётся $\tilde{N}$ удовлетворяющие условию предела.
Докажем про модуль.

$$||x_n| - a| \leq |x_n - a| \iff -|x_n - a| \leq |x_n| - |a| \leq |x_n - a|.$$

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a|.$$

$$|a| \leq |x_n| + |x_n - a|, \text{ симметрично.}$$

$\lim x_n = a \implies \lim(x_n - a) = 0 \implies \lim |x_n - a| = 0 \implies \lim |x_n| - |a| = 0 \implies \lim |x_n| = |a|.$

$\square$

Пример 1.1.

$$\lim \frac{n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 4n - 6} = \lim \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} - \frac{6}{n^2}}.$$

$$\frac{\lim(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2})}{\lim(3 + \frac{4}{n} - \frac{6}{n^2})}.$$

$$\frac{1 - \lim \frac{3}{n} + \lim \frac{5}{n^2}}{3 + \lim \frac{4}{n} + \lim \frac{6}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Определение 1.1. Последовательность x_n монотонно возрастает, если $\forall n \quad x_n \leq x_{n+1}$

Определение 1.2. Последовательность x_n монотонно убывает, если $\forall n \quad x_n \geq x_{n+1}$

Определение 1.3. Последовательность x_n монотонна, если она монотонно возрастает или монотонно убывает

Теорема 1.2.
1. Если последовательность монотонно возрастает и ограниченна сверху, то она имеет предел
2. Если последовательность монотонно убывает и ограниченна снизу, то она имеет предел
3. Пусть последовательность монотонна, тогда она имеет предел тогда и только тогда когда она ограниченна.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - ограниченное множество, значит у него есть супремум. Пусть $\sup\{x_n\} = b$. Докажем что $\lim x_n = b$.
Возьмём ε. $b - \varepsilon$ не является верхней гранью множества, занчит $\exists N \quad x_N > b - \varepsilon$

$$\forall n > N \quad b \geq x_n > b - \varepsilon \implies b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon \iff \lim x_n = b.$$ □

Второй пункт доказывается симметрично.

Доказательство. Необходимость: Если последовательность имеет предел, она ограниченна.
Достаточность следует из предыдущих пунктов

□

2 Бесконечные пределы

Определение 2.1. $\lim x_n = +\infty$ - вне любого луча $(E; \infty)$ находится лишь конечное число членов последовательности.

$$\forall E \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad x_n > E.$$

$\lim x_n = -\infty$ - вне любого луча $(-\infty; E)$ находится лишь конечное число членов последовательности.

$$\forall E \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad x_n < E.$$

$\lim x_n = \infty$ - вне любой пары лучей $(-\infty; -E) \cup (E; \infty)$ находится лишь конечное число членов последовательности

$$\forall E \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad |x_n| > E.$$

Лемма 2.1.1. Если $\lim x_n = +\infty$, или $\lim x_n = -\infty$, то $\lim x_n = \infty$
Обратное неверно.

Лемма 2.1.2.

$$\lim x_n = \infty \iff \lim |x_n| = +\infty.$$

Определение 2.2. x_n - бесконечно большая, если $\lim x_n = \infty$.

Теорема 2.1. Если $x \neq 0$, то x_n - бесконечно большая тогда, и только тогда, когда $\frac{1}{x_n}$ - бесконечно малая.

Доказательство. Необходимость:
Возьмём ε, и подставим $E = \frac{1}{\varepsilon}$ в $\lim x_n = \infty$.

$$\exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| > E = \frac{1}{\varepsilon} \iff \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon.$$

Достаточность:
Возьмём $E > 0$, подставим $\varepsilon = \frac{1}{E}$ в $\lim \frac{1}{x} = 0$:

$$\exists N \quad \forall n > N \quad \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon = \frac{1}{E} \iff |x_n| > E.$$ □

3 Число e

Теорема 3.1 (Неравенство Бернулли)**.**

$$n \in \mathbb{N}, x > -1.$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

$$(1+x)^n = 1 + nx \implies x = 0 \vee n = 1.$$

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение очевидно.

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx).$$

$$(1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$ □

Лемма 3.1.1. Если $t > 1$, то $\lim t^n = +\infty$

Доказательство.

$$t = 1 + x, \text{ где } x > 0.$$

$$t^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx > E.$$

$$n > \frac{E}{x}.$$

□

Лемма 3.1.2. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$

$$\frac{1}{t} = 1 + x, x > 0.$$

$$\left|\frac{1}{t^n}\right| = (1+x)^n > 1 + nx > nx.$$

$$|t^n| < \frac{1}{nx} < \varepsilon.$$

$$N > \frac{1}{\varepsilon x}.$$

Рассмотрим последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Теорема 3.2. x_n строго монотонно возрастает, а y_n строго монотонно убывает.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \\
&= \frac{\frac{n^n}{(n-1)^n}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} \\
&= \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{n^{2(n+1)}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \\
&> \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

□

Доказательство.

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\left(n^2-1\right)^n}{n^{2n}} \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &> \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1\end{aligned}$$

□

x_n - ограничена сверху, значит у неё есть предел. $\lim x_n = e$.

Лемма 3.2.1. $x_n < e$, а $y_n > e$.

Лемма 3.2.2.

$$2 = x_1 < e < y_5 < 3.$$

Лемма 3.0.1.

$$y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n - x_n = \frac{x_n}{n} > \frac{2}{n}.$$

Теорема 3.3. Пусть $x_n > 0$ и $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, тогда $\lim x_n = 0$

Доказательство.

$$q = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Подставим $\varepsilon = \frac{q+1}{2}$. Тогда, $\exists N \quad \forall n > N \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon$.

Возьмём $n \geq N$: $x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{N-1}}{x_N} \cdot x_N < \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n-N} x_N = \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \frac{x_n}{c} \iff \lim x_n = 0$ □