



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES**

**UMA ABORDAGEM DE SISTEMAS LINEARES A TEORIA ESPECTRAL DE SÉRIES  
TEMPORAIS ESTACIONÁRIAS E NÃO ESTACIONÁRIAS**

**BELO HORIZONTE**  
**2023**

GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES

UMA ABORDAGEM DE SISTEMAS LINEARES A TEORIA ESPECTRAL DE SÉRIES  
TEMPORAIS ESTACIONÁRIAS E NÃO ESTACIONÁRIAS

Monografia de graduação submetida ao curso  
de Engenharia Elétrica da Universidade Federal  
de Minas Gerais como requerimento parcial  
para obtenção do Bacharel em Engenharia  
Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Gualberto  
Coelho

BELO HORIZONTE

2023

GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES

UMA ABORDAGEM DE SISTEMAS LINEARES A TEORIA ESPECTRAL DE SÉRIES  
TEMPORAIS ESTACIONÁRIAS E NÃO ESTACIONÁRIAS

Monografia de graduação submetida ao curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requerimento parcial para obtenção do Bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovado em: 23 de junho de 2023

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Frederico Gualberto Coelho (Orientador)  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Prof. Dr. Adriano Vilela Barbosa

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço inicialmente minha família, por seu contínuo suporte de diversas formas. Minha jornada educacional não teria sido possível sem esse apoio desde minha infância.

Dentro os tantos alunos e professores da UFMG cujo apoio foi indispensável em minha jornada destaco os integrantes do Laboratório de Inteligência Computacional. Sou grato ao Prof. Antônio Braga pela confiança ao me incluir como membro mesmo sem experiência alguma, em 2018, e pela paciente e atenciosa orientação profissional e pessoal ao longo dos últimos cinco anos. Sou grato ao Prof. Frederico Coelho pela paciência, confiança, orientação e colaboração em projetos que incluem o presente trabalho. Sou grato ao meu colega e amigo Gabriel Barbutti, que exerceu em diversos momentos um papel de tutor sobre temas que atualmente são centrais aos meus hobbies e trabalho, além de ser uma grande inspiração.

Dos demais docentes reconheço e agradeço as contribuições do Prof. Adriano Veloso como centrais na cultivação de meus interesses em processamento de sinais. Dos demais alunos sou imensamente grato ao meu colega e amigo Frederico Marinho, um verdadeiro companheiro de guerra, por sua colaboração em inúmeras matérias e apoio em minha educação matemática.

Por fim agradeço a todos meus amigos que tornaram o trabalho dos últimos anos mais leve, em especial ao Gabriel Saliba, Bruno Cimbleris e Pedro Bahia, que forneceram momentos de descontração muito necessários.

“Alice sighed wearily. ‘I think you might do something better with the time,’ she said, ‘than waste it in asking riddles that have no answers.’ ‘If you knew time as well as I do,’ said the Hatter, ‘you wouldn’t talk about wasting it. It’s him.’ ‘I don’t know what you mean,’ said Alice. ‘Of course you don’t!’ the Hatter said, tossing his head contemptuously. ‘I dare say you never even spoke to Time!’ ‘Perhaps not,’ Alice cautiously replied, ‘but I know I have to beat time when I learn music.’ ‘Ah! That accounts for it,’ said the Hatter. ‘He won’t stand beating.”’

(L. Carrol, *Alice’s Adventures in Wonderland*)

## RESUMO

Time series, as a data category, has become more relevant with the rise of big data since they represent essentially any type of system that evolves over time. Much of the theory involved in the analysis of time series is very similar or indistinguishable from signal processing and linear system concepts. This work's objective is to explore the analytical power of an interpretation of classical time series theory through the lens of linear systems, as it pertains to the solution of practical problems. Chapter 2 establishes a series of fundamental concepts, such as operator algebra and stationarity, in an intuitive manner. Chapter 3 discusses traditional elements and procedures of univariate time series analysis using terminology and concepts of linear systems, leading to a delimitation of the limits of communication between the two areas. In chapter 4 stationary and non stationary spectral representations of time series are presented, once more in the language of linear systems, leading to an elegant interpretation of the frequency domain effects of integration and differencing. In chapter 5 a practical multivariate anomaly detection problem is tackled using the theoretical framework developed beforehand. It is demonstrated that this approach is efficient even in the absence of large volumes of data, condition which typically prohibits the use of modern machine learning algorithms. A final discussion on the integration of the present methodology with these algorithms is developed.

**Keywords:** Time series analysis. Linear Systems. Discrete-time signal processing. Time Frequency Representations

## RESUMO

Séries temporais como uma categoria de dados ganhou imensa importância com o advento de *big data* por representar essencialmente qualquer tipo de sistema que evolui no tempo. Grande parte da teoria envolvida no campo responsável pelo estudo desse tipo de dado é idêntica ou muito semelhante a conceitos de sistemas lineares e processamento de sinais. O objetivo deste trabalho é explorar o poder analítico de uma interpretação de teoria clássica de séries temporais por meio de conceitos de sistemas lineares e processamento de sinais, no que diz respeito à resolução de problemas da área. No capítulo 2 é estabelecida uma série de conceitos fundamentais, como álgebra de operadores e estacionariedade, de forma intuitiva. No capítulo 3 são discutidos elementos e procedimentos tradicionais da teoria de séries temporais univariadas utilizando terminologia e conceitos de sistemas lineares, levando à uma delimitação das possibilidades de comunicação entre as duas áreas. No capítulo 4, são abordadas representações espectrais especiais de séries estacionárias e não estacionárias novamente por meio de teoria de sinais e sistemas, levando a uma interpretação elegante do efeito em frequência das operações de integração e derivação. Por fim, no capítulo 5, um problema prático de detecção de anomalias em séries temporais multivariadas a partir de poucos dados é tratado utilizando do *framework* conceitual desenvolvido em capítulos anteriores. É demonstrado que essa abordagem é eficiente mesmo na condição de escassez de dados, que tipicamente inviabiliza algoritmos mais populares de aprendizado de máquina. Por fim, é travada uma breve discussão sobre a integração da metodologia considerada neste trabalho com estes algoritmos.

**Palavras-chave:** Análise de Séries Temporais. Sistemas Lineares. Processamento de Sinais de Tempo Discreto. Representações em tempo-frequência.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Visualização no tempo de ruído branco . . . . .	14
Figura 2 – Série temporal com tendência linear . . . . .	17
Figura 3 – Série temporal com tendência logarítmica . . . . .	17
Figura 4 – Série temporal com sazonalidade senoidal de período arbitrário . . . . .	18
Figura 5 – Série temporal com sazonalidade aditiva . . . . .	18
Figura 6 – Série temporal com sazonalidade multiplicativa . . . . .	19
Figura 7 – Visualização de correlograma de série com tendência linear. Observe que as autocorrelações decaem lentamente ao decorrer dos atrasos, comportamento típico de tendências determinísticas. . . . .	21
Figura 8 – Visualização de correlograma de série com sazonalidade. Observe que o padrão senoidal da série é reproduzido nas autocorrelações. . . . .	21
Figura 9 – Sinal periódico imerso em ruído e sua correspondente autocorrelação. . . .	22
Figura 10 – Conjunto de séries demonstrando diferentes níveis de estacionariedade. . . .	24
Figura 11 – Visualização de caminhada aleatória com $y_0 = 5$ . . . . .	26
Figura 12 – Visualização de aplicação de filtro média móvel com $m=15$ . . . . .	31
Figura 13 – Visualização de algoritmo LOESS . . . . .	32
Figura 14 – Representação de série temporal como modelo linear generalizado . . . .	36
Figura 15 – Visualização no tempo de processos média móvel de ordens diferentes. . . .	40
Figura 16 – Visualização do correlograma de processos média móvel de ordens diferentes. . . .	42
Figura 17 – Visualização de processos autoregressivos de diferentes ordens no domínio do tempo. . . . .	44
Figura 18 – Visualização do correlograma de processos autoregressivos de ordens diferentes. . . . .	46
Figura 19 – Visualização de realização de processo ARMA(2, 1) no tempo . . . . .	51
Figura 20 – Visualização de posicionamento de polos e zeros de processo ARMA(2, 1) em relação ao círculo unitário no plano L . . . . .	51
Figura 21 – Visualização de realização de processo ARMA(2, 1) com introdução de raiz unitária no tempo . . . . .	53
Figura 22 – Visualização de posicionamento de polos e zeros de processo ARMA(2, 1) com introdução de raiz unitária em relação ao círculo unitário no plano L . .	53
Figura 23 – Visualização de realização de processo ARMA(2, 1) derivado no tempo . .	54

Figura 24 – Visualização de posicionamento de polos e zeros de processo ARMA(2, 1) derivado em relação ao círculo unitário no plano L . . . . .	55
Figura 25 – Espectro de um processo MA(1) com $\beta_1 = -0.5$ . . . . .	63
Figura 26 – Espectro de um processo AR(1) com $\alpha_1 = 0.8$ . . . . .	64
Figura 27 – Espectro de um processo AR(1) com $\alpha_1 = -0.8$ . . . . .	64
Figura 28 – Espectro de um processo AR(2) com $\alpha_1 = 0.5$ and $\alpha_2 = -0.25$ . . . . .	65
Figura 29 – Espectro de um processo ARMA(4, 3) . . . . .	65
Figura 30 – Espectro de um processo MA(1) com $\beta_1 = -0.5$ diferenciado. . . . .	67
Figura 31 – Exemplo de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação normal. . . . .	74
Figura 32 – Exemplo de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação anômala. . . . .	75
Figura 33 – Matriz de correlação instantânea entre séries temporais sob regime de normalidade. . . . .	76
Figura 34 – Matriz de correlação instantânea entre séries temporais sob regime de anomalia. . . . .	77
Figura 35 – Exemplo de autocorrelação de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação normal. . . . .	78
Figura 36 – Exemplo de autocorrelação de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação anômala. . . . .	79
Figura 37 – Exemplo de modelagem de tendência via modelo de nível local e filtro de Kalman . . . . .	81
Figura 38 – Perfil de autocorrelação de uma janela arbitrária de dez minutos de operação normal. O intervalo entre as linhas vermelhas horizontais corresponde ao período do padrão sazonal. . . . .	82
Figura 39 – Visualização de computação de padrão sazonal médio. . . . .	83
Figura 40 – Visualização de decomposição linear de um trecho de oito minutos de sinal em regime de normalidade. . . . .	84
Figura 41 – Visualização de resíduos de um segmento de oito minutos de sinal em regime de normalidade juntamente de sua autocorrelação. . . . .	84
Figura 42 – Visualização de decomposição linear de um trecho de oito minutos de sinal em regime de anomalia. A linha horizontal vermelha indica o momento de ocorrência da falha. . . . .	85

Figura 43 – Visualização de resíduos de um segmento de oito minutos de sinal em regime de anomalia juntamente de sua autocorrelação. . . . .	85
Figura 44 – Visualização de aplicação do algoritmo de detecção de anomalias nos resíduos da decomposição linear de um trecho anômalo. . . . .	86
Figura 45 – Visualização de aplicação do algoritmo de decomposição para múltiplas correntes. . . . .	87
Figura 46 – Visualização no tempo de sinais analisados em frequência. . . . .	88
Figura 47 – Visualização comparativa de densidade de potência espectral de sinais em regime de normalidade e anomalia. . . . .	89
Figura 48 – Visualização comparativa de espectrogramas de sinais em regime de normalidade e anomalia. . . . .	90
Figura 49 – Visualização comparativa valor máximo dos <i>frames</i> de espectrogramas de sinais em regime de normalidade e anomalia. . . . .	90

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Sumarização dos dados. . . . .	75
---	----

## 1 INTRODUÇÃO

Séries temporais como uma categoria de dados ganhou tremenda importância no advento de *big data* por representar essencialmente qualquer tipo de informação que evolui no tempo. Grande parte da teoria envolvida no campo conhecido como análise de séries temporais é idêntica ou muito semelhante a conceitos de sistemas lineares e processamento de sinais, mas a compreensão dos temas na literatura científica e didática atual frequentemente não explora o potencial analítico dessa interseção. TODO: mention stochastic signal processing

O seguinte trabalho tem por objetivo abordar teoria clássica de séries temporais por um ponto de vista de sinais e sistemas. Em uma extensa revisão de literatura cada definição é introduzida notando paralelos em nomenclatura, conceito e papel analítico entre os dois campos. Eventualmente conceitos dificilmente capturados por quaisquer uma das áreas isoladamente são abordados de forma integrada e a simplicidade resultante é notável. Em uma reflexão teórica conclusiva o limite de comunicação dos campos é traçado. Por fim uma aplicação prática usando o corpo teórico desenvolvido é apresentada, na qual uma série de análises atípicas e informativas são realizadas por meio da abordagem desenvolvida.

O capítulo 2 inicia com a apresentação de uma base de definições e nomenclatura, sempre explorando os paralelos entre os campos abordados. Ao final do capítulo o conceito crítico de estacionariedade é apresentado e interpretado com devida atenção.

O capítulo 3 introduz teoria de decomposição, modelagem ARMA, modelagem sazonal e contém a interpretação mais direta de séries temporais como saídas de sistemas lineares. Essa interpretação é desenvolvida de forma a delimitar até onde as duas áreas podem se comunicar de forma a produzir análises úteis.

O capítulo 4 discute a representação espectral de séries temporais univariadas. São exploradas transformações lineares e não lineares. O desenvolvimento de uma representação espectral para uma realização teoricamente infinita de um processo estocástico é apresentada. Em seguida inicia-se uma discussão sobre representações não lineares por meio de uma generalização natural da função de autocorrelação e subsequentemente a classe de distribuições de Cohen.

O capítulo 5 brevemente discute testes estatísticos utilizados no capítulo 6.

O capítulo 6 apresenta um problema de extração de características para detecção de anomalias em uma série temporal multivariada com sazonalidade elaborada. O problema é abordado de forma prática - preocupações sobre sua resolução no mundo real são levantadas e ferramentas de operacionalização de modelos são utilizadas.

## 2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

### 2.1 Processo Estocástico

Dado um conjunto arbitrário  $\mathcal{T}$  um processo estocástico é uma família  $X(t, \omega)$ ,  $t \in \mathcal{T}$  e  $\omega \in \Omega$  de forma que para cada  $t \in T$ ,  $\omega \in \Omega$   $X(t, \Omega)$  é uma variável aleatória. As variáveis aleatórias podem ser reais ou complexas. Esse trabalho aborda apenas processos estocásticos reais exceto quando explicitamente mencionado.

Supõe-se que a família de variáveis aleatórias seja definida em um mesmo espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  com  $\Omega$  representando um espaço amostral,  $\mathcal{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra e  $P$  uma medida de probabilidade. Para propósitos desse trabalho podemos tomar o conjunto  $\mathcal{T}$  como  $\mathbb{R}$ , resultando em processos de tempo contínuo, e  $\mathbb{Z}$ , resultando em processos de tempo discreto.

Para cada  $t_k \in \mathcal{T}$  temos uma função de densidade de probabilidade associada à variável aleatória  $X(t_k, \omega)$  (assumindo que essa função exista). Na prática um processo aleatório no mundo real é observado ao longo de  $t$ , tal que  $\omega_k$  seja fixado ao universo em que a observação ocorre. Sob essa condição  $X(t, \omega_k)$  é considerada uma realização do processo estocástico. Realizações também são chamadas de *sample record* em alguns livros de engenharia e séries temporais na literatura estatística.

Para ilustrar os conceitos acima podemos pensar em um exemplo proposto por (BENDAT; PIERSOL, 2000) em que um gerador de ruído térmico é construído e sua tensão ao longo de um intervalo do tempo é medida. Se um outro gerador fosse construído sob condições e com propriedades idênticas sua tensão medida no mesmo intervalo de tempo não seria idêntica, assim como a tensão medida sob qualquer outro gerador idêntico. De fato cada registro de tensão é um exemplo de infinitos registros que poderiam ter ocorrido. Nessa situação os registros ou séries temporais de tensão são as realizações de um processo estocástico representativo de todas as possíveis realizações.

O adequado estudo de séries temporais é consequência de um primeiro adequado estudo sobre processos estocásticos, geradores dessas séries temporais. Essa não é a intenção desse trabalho. Como em grande parte da teoria de séries temporais estamos preocupados com o que podemos compreender ou inferir sobre o processo estocástico gerador de uma realização a partir apenas de seu único registro. Essa abordagem é essencial e de fato mais aplicável que um estudo que se preocupa excessivamente com os processos geradores devido ao fato de dados do mundo real frequentemente representarem realizações únicas. Não é possível realizar novamente

o índice Ibovespa entre 1970 e 2020 e muito menos ter acesso à realização desses índices em universos paralelos.

Ao longo desse trabalho a distinção e referência ao processo gerador de uma série temporal será feita quando necessário.

## 2.2 Série Temporal

Uma série temporal é um conjunto de observações realizadas sequencialmente no tempo, indexadas de acordo com o momento em que foram observadas. As observações representam a realização de um processo estocástico. Em alguns contextos, como análise de processos industriais, a natureza do processo subjacente é relevante para análise e modelagem de qualquer série temporal. Em outros, como análise de séries financeiras, o sistema gerador das séries é tão complexo que conhecimento sobre sua dinâmica dificilmente seria útil.

Assume-me, na linguagem de (HAMILTON, 1994), que um conjunto de amostras  $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, y_3 \dots y_T)$  pode ser interpretado como um segmento finito de uma sequência duplamente infinita:

$$\mathbf{y}_{t=-\infty}^{\infty} = (\dots, y_{-1}, y_0, \overbrace{y_1, y_2, y_3, \dots, y_T}^{\text{Série Observada}}, y_{T+1}, y_{T+2} \dots)$$

Apesar de parecer pouco tangível, de fato qualquer série observada é satisfatoriamente descrita dessa forma. Em um contexto industrial, por exemplo, o valor de uma variável de processo é zero até a planta ser construída e entrar em operação, assume valores representativos ou não da dinâmica de interesse (assumindo valores irrelevantes quando a planta não está em operação plena), e tendendo ao infinito retorna a zero quando a planta for desativada.

Essa interpretação de uma série temporal é importante ao implicitamente insinuar que o processo existe em um intervalo temporal mais abrangente do que o observado. É portanto necessário se questionar sobre quanto os dados representam o processo analisado e em quais intervalos de tempo.

Séries temporais são inherentemente diferentes de dados tabulares por representarem amostras de um mesmo processo estocástico ao invés de amostras aleatórias de uma população. Não faz sentido discutir uma população no contexto de séries temporais uma vez que estamos restritos à realizações observadas de um processo estocástico. Essa relevante diferença

impede propriedades estatísticas agradáveis consequentes da independência amostral associada à dados tabulares apropriadamente amostrados como a lei do grandes números e o teorema do limite central.

A forma mais natural de analisar uma série temporal é visualizar seus valores no tempo, como ilustra a imagem 1.

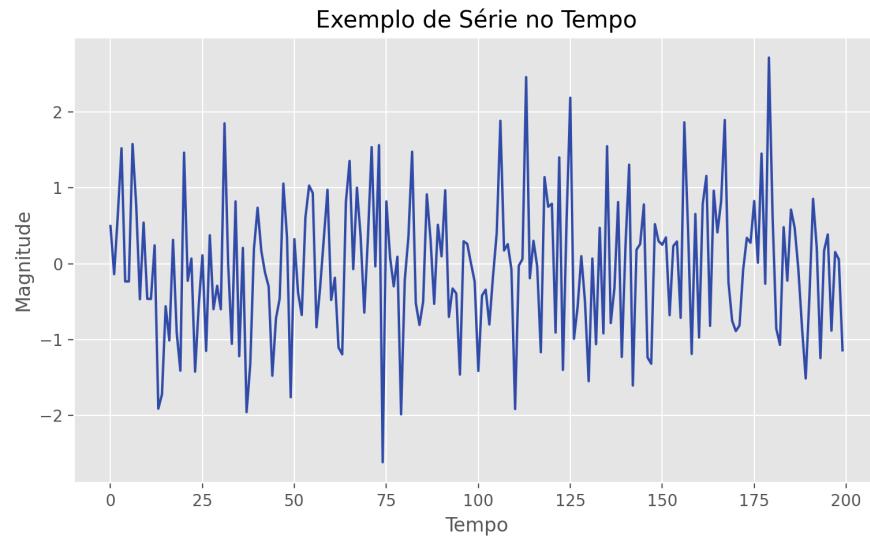


Figura 1 – Visualização no tempo de ruído branco

### 2.3 Operador de Atraso(*Lag*)

É importante introduzir o operador de atraso ou *lag*.

Dadas as séries  $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, y_3 \dots y_T)$  e  $\mathbf{x}_t = (x_0, x_1, x_2 \dots x_{T-1})$  tal que

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{t-1}$$

isso é,

$$y_1 = x_0$$

$$y_2 = x_1$$

$\vdots$

$$y_T = x_{T-1}$$

Podemos definir  $\mathbf{x}_t$  em função de  $\mathbf{y}_t$  como:

$$\mathbf{x}_t = L\mathbf{y}_t$$

tal que

$$\mathbf{y}_{t-1} = L\mathbf{y}_t$$

Observamos que o operador de atraso atrasa uma série temporal em uma unidade de tempo. Uma breve divagação matemática (HAMILTON, 1994) permite definir o operador com propriedades muito semelhantes às de multiplicação dos números reais, como associatividade, comutatividade e distribuição. Para atrasar múltiplas unidades de tempo temos que:

$$L(L(\mathbf{y}_t)) = L(\mathbf{y}_{t-1}) = \mathbf{y}_{t-2} = L^2\mathbf{y}_t$$

de forma que

$$L^n\mathbf{y} = \mathbf{y}_{t-n}$$

Um uso importante do operador, decorrente de suas propriedades algébricas, é exemplificado na seguinte expansão

$$(aL^2 + bL^3)\mathbf{y}_t = a\mathbf{y}_{t-2} + b\mathbf{y}_{t-3}$$

Conhecimento do operador de atraso é importante para compreender a literatura de séries temporais e facilita comunicação objetiva de análises cotidianas. O presente trabalho usa do operador para descrever uma série de modelos.

Como nota final é importante mencionar que alguns livros (CHATFIELD; XING, 2019) (STOFFER, 2017) usam a letra  $B$  para denotar o operador de atraso e que na maior parte dos recursos *online* o operador é referido por seu nome em inglês, *lag*.

A analogia entre o operador de atraso e a variável complexa  $e^{-j\omega} = z^{-1}$  é clara, com a relevante diferença que  $z^{-1}$  atrasa um sinal em uma unidade de tempo se a operação for realizada no domínio  $z$  enquanto o operador de atraso atua diretamente no domínio do tempo. Essa característica permite que filtros com equações de recorrência complexas sejam representados de forma compacta no domínio do tempo por meio de polinômios de atraso.

Uma propriedade interessante decorrente da equivalência entre  $z^{-1}$  e  $L$  é que pode se pensar em um plano  $L$  cuja análise é igualmente informativa à do plano  $z$ , notando que o espaço é de certa forma invertido. Uma análise da posição dos polos de um sistema representado por meio de um polinômio em  $L$  conclui que o sistema é instável se tais polos estiverem fora do círculo unitário, contrário do que conhecemos do plano  $z$ .

Por fim vale mencionar que alguns autores como (AGUIRRE, 2015) usam a notação  $q^{-1}$  para esse operador.

## 2.4 Operador de Diferença

O operador de diferenças  $\nabla$  ou  $\Delta$  é o equivalente discreto da operação contínua de derivação e opera sob uma série temporal  $\mathbf{y}_t$  da seguinte forma:

$$\nabla \mathbf{y}_t = (1 - L)\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - L\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$$

O operador possui propriedades de associatividade e distribuição, tal que

$$\nabla^2 \mathbf{y}_t = \nabla(\nabla(\mathbf{y}_t)) = \nabla(\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}) = \nabla \mathbf{y}_t - \nabla \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_t - 2\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{y}_{t-2}$$

## 2.5 Tendência(*Trend*)

A variação do valor esperado de um processo estocástico é denominado tendência. A partir de uma série temporal definimos tendência como a variação de sua média amostral. A imagem 2 ilustra uma série com tendência linear. Observa-se que ao longo do tempo a média das observações cresce linearmente. Tendências de séries reais frequentemente seguem um perfil

logarítmico (CHATFIELD; XING, 2019), como na figura 3. Nesse caso uma transformação exponencial da série, isso é, a aplicação de uma função exponencial a cada observação, tornaria a tendência linear.

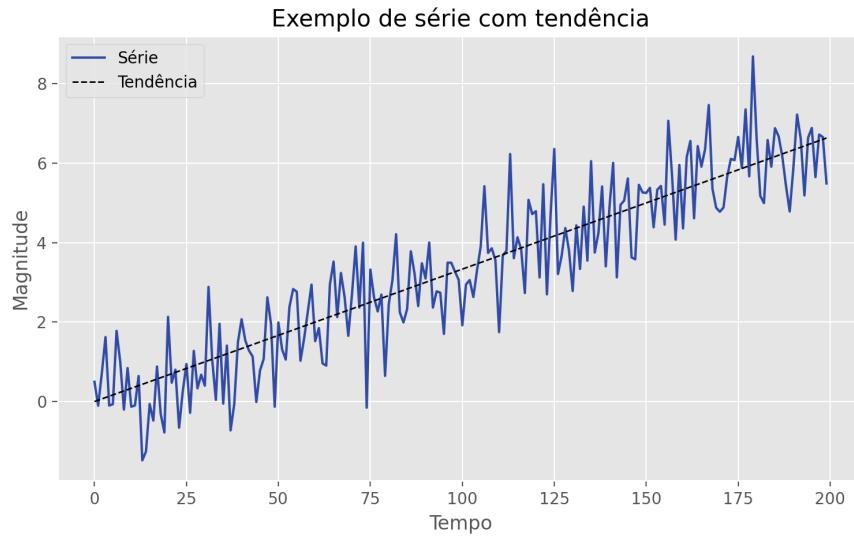


Figura 2 – Série temporal com tendência linear

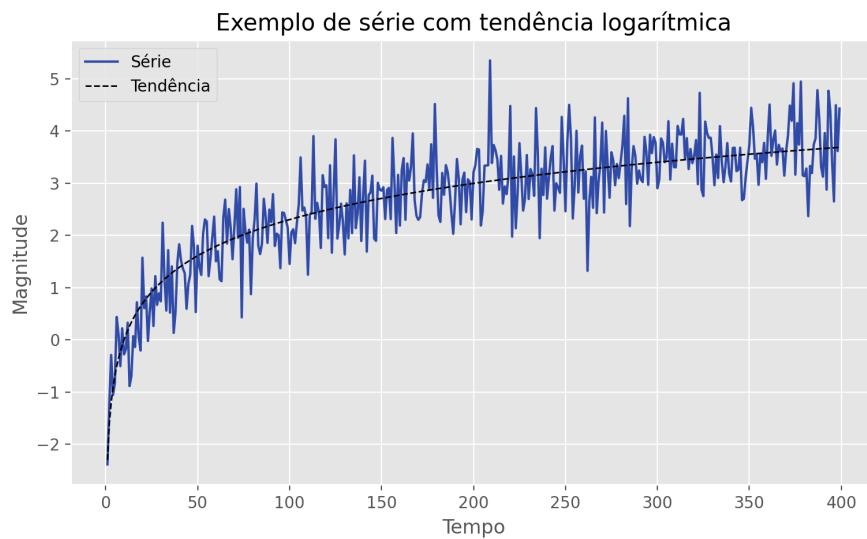


Figura 3 – Série temporal com tendência logarítmica

## 2.6 Sazonalidade

A variação periódica de média móvel das observações de uma série temporal é denominada sazonalidade. Em séries no contexto de finanças sazonalidade frequentemente segue ciclos de calendário como anual, mensal, semestral, etc. No contexto mais amplo de

séries temporais sazonalidade apresenta período arbitrário, apesar da linguagem em torno dessa propriedade estar muito associada aos períodos anteriormente mencionados.

Um exemplo de série temporal com sazonalidade é ilustrado na figura 4.

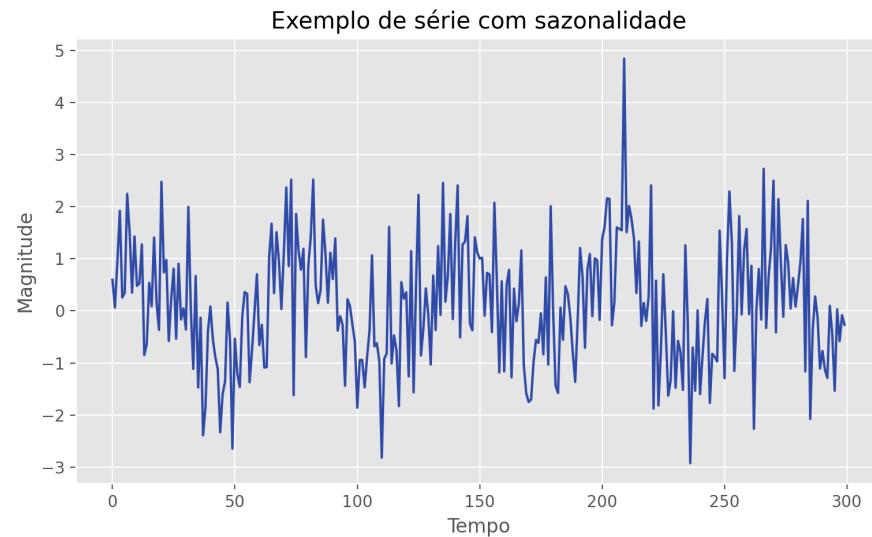


Figura 4 – Série temporal com sazonalidade senoidal de período arbitrário

Na presença de tendência sazonalidade pode ser considerada aditiva, se sua variação for constante em torno da tendência, e multiplicativa, se sua variação depender do valor da tendência. Exemplos de sazonalidade aditiva e multiplicativa são dados pelas figuras 5 e 6, respectivamente. Discernir entre os dois tipos de sazonalidade é importante para modelagem.

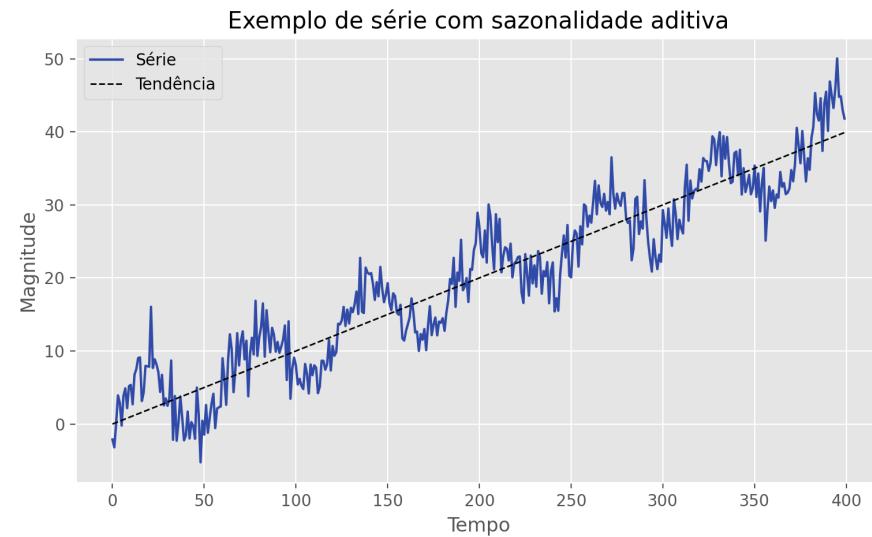


Figura 5 – Série temporal com sazonalidade aditiva

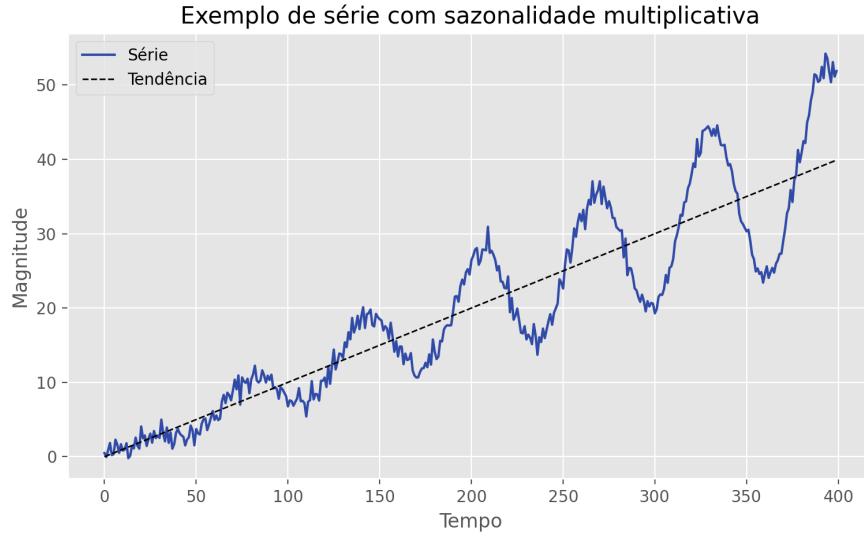


Figura 6 – Série temporal com sazonalidade multiplicativa

## 2.7 Autocorrelação

A função de autocorrelação é definida para processos estocásticos como a correlação de Pearson entre valores do processo em instantes de tempo diferentes. A função de autocovariância entre os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$  é dada pela seguinte equação

$$\gamma_{xx}(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})] \quad (2.1)$$

Normalizando a autocovariância obtemos a autocorrelação

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\gamma_{xx}(t_1, t_2)}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}}$$

Para processos estacionários (seção 2.8) a autocovariância, e consequentemente a autocorrelação, é função apenas do atraso  $\tau = |t_1 - t_2|$ . Temos então que

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\gamma_{xx}(\tau)}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}}$$

Para uma série temporal, isso é, uma única realização de um processo estocástico, a função de autocorrelação estacionária (tipicamente chamada apenas de função de autocorrelação) pode ser definida diretamente a partir da definição de correlação amostral sob as seguintes premissas

1. O processo estocástico gerador da série temporal é estacionário
  2. O número de observações  $N$  de  $\mathbf{y}_t$  é suficientemente grande ( $N \approx 100$ )
- resultando na equação 2.2, onde o subscrito duplo é omitido. Note que o atraso é discreto, indicado por  $k$ .

$$\rho_y(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Alguns comentários sobre a nomenclatura da função são apropriados. A literatura de engenharia tende a usar os termos autocovariância e autocorrelação de forma intercambiável para designar a definição de autocovariância apresentada. A literatura estatística assume as definições abordadas acima, que serão usada no restante desse trabalho.

Além disso, a função de autocorrelação como apresentada pela equação 2.1 é definida para um processo estocástico não necessariamente estacionário, apesar do termo ser usado para descrever a equação 2.2. A aplicação da equação que assume estacionariedade em uma série não estacionária resulta em correlações informativas praticamente apenas disso. Uma modificação estratégica da função dada por 2.1 resulta na chamada função de autocorrelação instantânea (seção 4.2.1), que é usada para representar séries temporais não estacionárias.

### **2.7.1 Autocorrelação Parcial**

É interessante mencionar a existência de autocorrelação parcial nessa seção juntamente de uma descrição em alto nível do que esse valor representa. Sua definição formal será apresentada na seção 3.2.4.

Autocorrelação parcial foi introduzida por Box e Jenkins em (BOX; JENKINS, 2016) como uma ferramenta auxiliar na identificação de modelos. O valor  $\phi_{kk}$  é definido como a correlação parcial entre  $\mathbf{y}_t$  e  $\mathbf{y}_{t-k}$ , isso é, a correlação restante entre  $\mathbf{y}_t$  e  $\mathbf{y}_{t-k}$  após levar em consideração a contribuição de  $\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1} \dots \mathbf{y}_{t-k+1}$ .

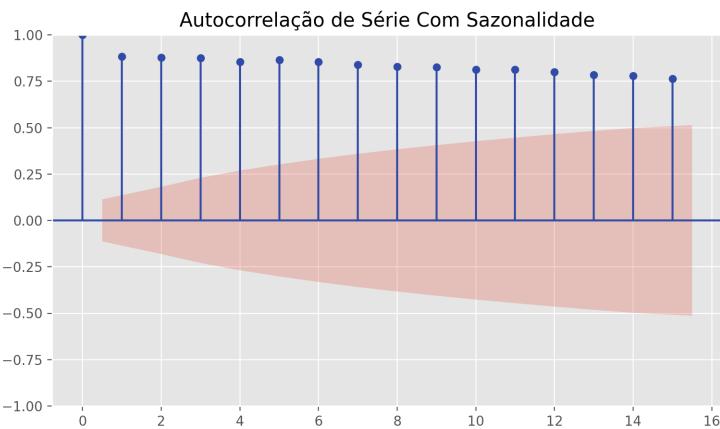


Figura 7 – Visualização de correlograma de série com tendência linear. Observe que as autocorrelações decaem lentamente ao decorrer dos atrasos, comportamento típico de tendências determinísticas.

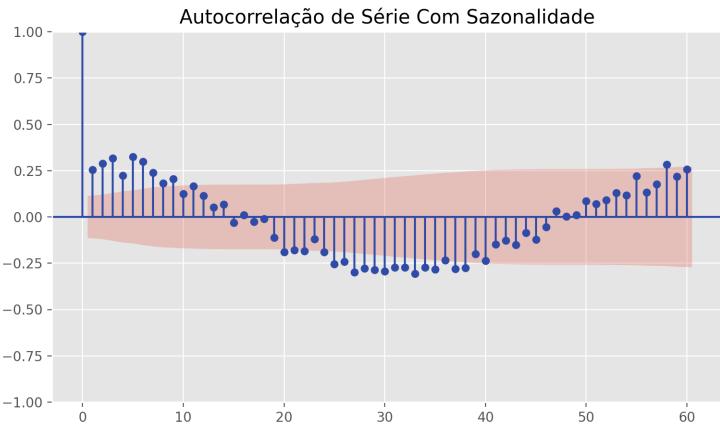


Figura 8 – Visualização de correlograma de série com sazonalidade. Observe que o padrão senoidal da série é reproduzido nas autocorrelações.

### 2.7.2 Correlograma

Um correlograma é um gráfico de barras representativo da autocorrelação ou autocovariância em  $k$  amostras de uma série temporal ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), de forma que a primeira barra represente a autocorrelação entre  $y_t$  e si mesmo (sempre igual à 1), a segunda entre  $y_t$  e  $y_{t-1}$ , a terceira entre  $y_t$  e  $y_{t-2}$ , e assim por diante. O correlograma da série visualizada pela figura 2 é ilustrado na figura 7.

A figura 7 informa um intervalo de relevância dado por um sombreamento vermelho. Qualquer valor de autocorrelação dentro desse intervalo é estatisticamente insignificante e pode ser considerado igual a zero.

O correlograma é uma ferramenta indispensável em análise de séries temporais

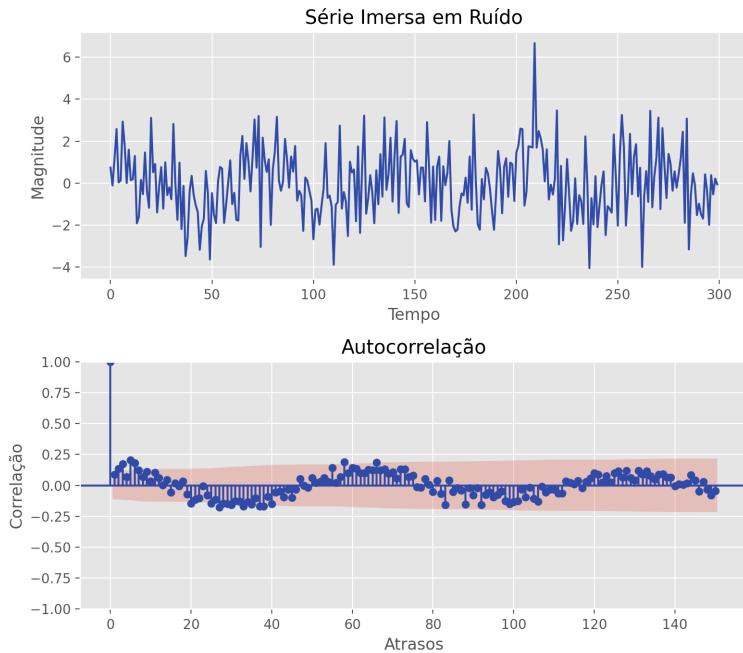


Figura 9 – Sinal periódico imerso em ruído e sua correspondente autocorrelação.

para tarefas como detecção de estacionariedade, identificação de sazonalidade, análise de resíduo, engenharia de características, escolha de modelo e identificação de ruído branco (seção 2.9), entre outros. No contexto de identificação de sistemas autocovariância e autocorrelação e portanto o correlalograma desempenham um importante papel na identificação de propriedades de sinais e sistemas imersos em ruído devido à robustez ao ruído da operação de correlação cruzada (AGUIRRE, 2015). A figura 9 apresenta um sinal imerso em ruído cuja natureza periódica subjacente se torna mais visível por meio de seu correlalograma.

É importante mencionar que o correlalograma de uma série com tendência determinística, como a da figura 7, apresenta o comportamento observado de autocorrelações altas com pouca atenuação ao longo dos atrasos. De forma análoga o correlalograma de uma série com sazonalidade apresenta periodicidade que reproduz seu padrão temporal, como ilustra a figura 8, correlalograma da série da figura 4. O primeiro correlalograma é informativo até certo ponto: informa simplesmente que a série apresenta tendência. Para analisar tais séries de forma mais produtiva, a fim de elaborar um possível modelo, por exemplo, é importante que a série seja estacionária (seção 2.8). É inclusive afirmado em alguns textos da literatura estatística (CHATFIELD; XING, 2019), que um correlalograma só faz sentido se a série associada for estacionária, observação mais geral e rigorosa das restrições de uso da equação 2.2.

Na engenharia a análise do correlalograma de sinais não estacionários é utilizada para investigação da adequação de tempo de amostragem, onde uma autocovariância com valores

lentamente decrescentes e um mínimo local indica que o sinal pode estar superamostrado, propriedade indesejável que pode resultar em problemas computacionais além de desperdício de memória.

## 2.8 Estacionariedade

Um processo estocástico  $\mathbf{X}(t)$  é considerado estacionário no sentido amplo se atender às seguintes três condições:

1.  $E(\mathbf{X}(t)) = \mu$
2.  $Var(\mathbf{X}(t)) = \sigma^2$
3.  $Cov[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t + \tau)] = \gamma(\tau)$

e estacionário no sentido restrito se sua distribuição de probabilidade  $P(x)$  for idêntica para todos os instantes de tempo, isso é,  $P(x)_{t_i} = P(x)_{t_j} \forall i, j \in \mathcal{T}$ . Essa restrição é frequentemente comunicada como a necessidade de todos os momentos da distribuição  $P(x)$  serem idênticos e invariantes ao tempo. Nesse trabalho, assim como em grande parte da literatura estatística e de engenharia, o termo estacionário se refere a estacionariedade no sentido amplo. Isso é parcialmente justificado pelo fato de verificação de estacionariedade no sentido amplo tipicamente ser condição suficiente para assumir estacionariedade no sentido restrito, segundo (BENDAT; PIERSOL, 2000).

A definição de estacionariedade apresentada descreve a família de sinais representada por um processo estocástico. Uma definição de estacionariedade para realizações únicas de um processo estocástico, isso é, séries temporais, demanda o estabelecimento de requisitos amostrais. Podemos dizer que uma série temporal é estacionária se suas propriedades amostrais de esperança, variância e autocovariância sejam apropriadamente invariantes de forma que flutuações em seu valor sob diferentes janelas de tempo sejam explicáveis por variações resultantes de amostragem. Sob essa perspectiva podemos traduzir os requisitos de estacionariedade para uma série  $\mathbf{x}_t$  como a seguir

1. A média da série  $\mathbf{x}_t$  é constante ao longo do tempo
2. A variância da série  $\mathbf{x}_t$  é constante ao longo do tempo
3. A autocorrelação de  $\mathbf{x}_t$  depende apenas do atraso

Um bom exemplo de graus de estacionariedade em séries temporais dado por Athana-

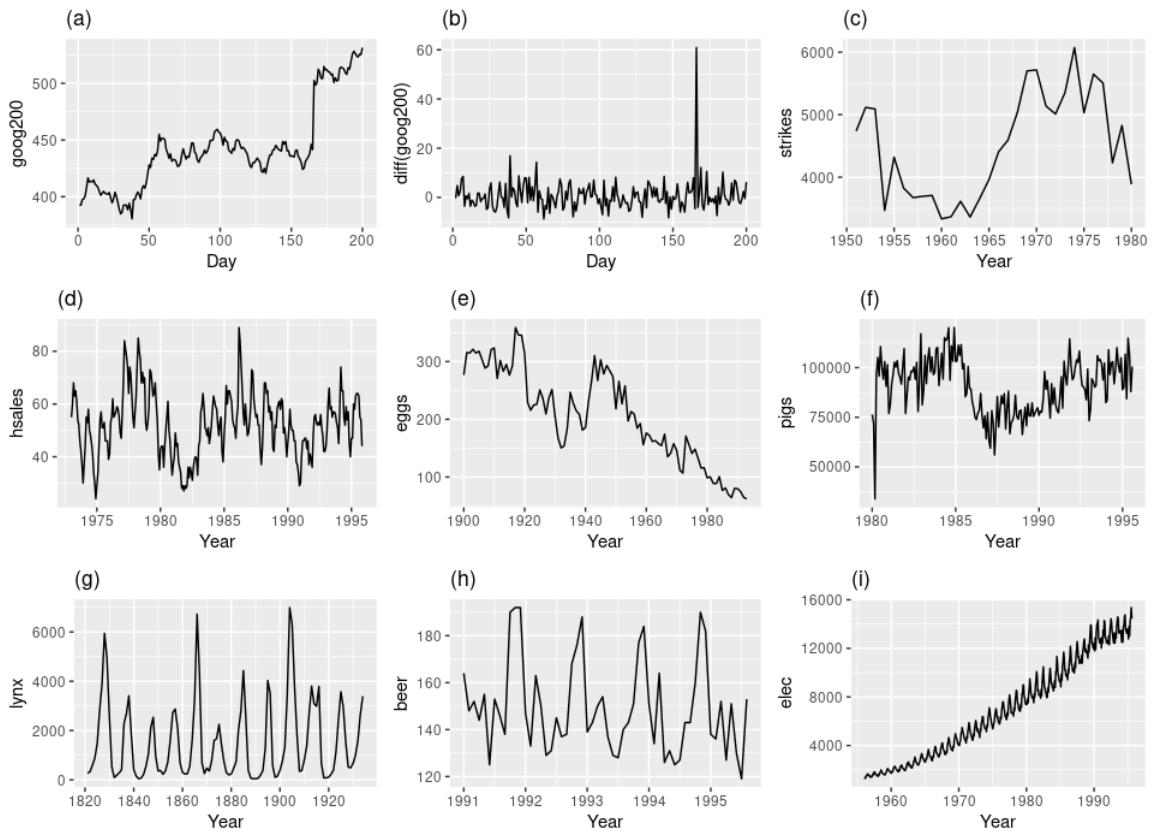


Figura 10 – Conjunto de séries demonstrando diferentes níveis de estacionariedade.

sopoulos e Hyndman (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018) é ilustrado pela figura 10. As séries das figuras 10.a, 10.e e 10.i demonstram clara tendência, sendo portanto não estacionárias. As séries das figures 10.d, 10.h, 10.i são igualmente não estacionárias por apresentarem clara sazonalidade, enquanto a série da figura 10.g aparenta ser sazonal mas apresenta picos aperiódicos de intensidade muito distinta, sendo considerada estacionária pelos autores. O caso da série da figura 10.g é um complicado por aparentar também violar o requisito de variância constante. Para concluir assim como os autores que a série é estacionária é necessário mais do que uma investigação visual; o texto que discute a série leva em conta seu processo gerador (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018).

As séries das figures 10.c e 10.f são aparentemente não estacionárias no intervalo observado por demonstrarem variação em sua média móvel mas podem ser um caso de raízes unitárias.

Por eliminação temos que apenas as séries ilustradas pelas figures 10.b e 10.g são estacionárias, o caso de 10.b contendo uma clara anomalia.

O exemplo de análise de estacionariedade da figura 10 demonstra a imprecisão da abordagem visual para essa tarefa. Torna-se necessário o estabelecimento de procedimentos mais

objetivos para detecção de estacionariedade.

### 2.8.1 Importância de Estacionariedade

Estacionariedade é uma propriedade desejável de se observar em uma série temporal para fins analíticos e de modelagem.

Há algumas formas de compreender como estacionariedade colabora para a modelagem bem sucedida de uma série temporal.

Podemos pensar na propriedade de estacionariedade como um tipo de estrutura de dependência. Se as amostras  $X_1, X_2, \dots, X_N$  de um conjunto  $\mathbf{X}$  forem independentes entre si temos formas interessantes de modelar a função geradora de  $\mathbf{X}$  como o teorema do limite central, lei dos grandes números, etc. Há apenas uma forma de um conjunto amostral ser independente mas muitas formas de ser dependente, tornando difícil o estabelecimento de recursos eficientes para modelagem geral de processos dependentes. Séries temporais sendo naturalmente observações de processos dependentes (seção 2.2) é interessante definir estruturas de dependência que permitam o uso de tais recursos. Estacionariedade é uma estrutura de dependência que permite aplicar propriedades úteis de independência em séries temporais. Abordando a mesma ideia mais intuitivamente podemos pensar no seguinte exemplo: se um processo possui valor esperado, variância constante e autocorrelação invariante ao tempo podemos por meio da lei dos grandes números estimar seu valor esperado e variância com cada vez mais confiança a partir da média e variância amostral, respectivamente. O mesmo argumento intuitivo se estende analogamente para o caso de aprendizado de máquina, no qual por meio de teoria de aprendizado estatístico é possível argumentar que uma série estacionária é “mais fácil” de aprender.

De forma mais quantitativa o teorema de decomposição de Wold (CHATFIELD; XING, 2019) conclui que qualquer série temporal estacionária pode ser representada pela seguinte combinação linear

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Z_{t-j} + \eta_t$$

No qual  $\eta$  representa uma série determinística e  $Z_t$  um processo puramente aleatório (seção 2.9). O leitor reconhecerá parte da expressão acima como um processo  $MA(\infty)$  (seção 3.1.1.1). Esse resultado tem como consequência a importante conclusão que qualquer série estacionária é possivelmente aproximável por um modelo MA e portanto, via invertibilidade,

modelos AR e ARMA.

Por fim estacionariedade permite o uso de uma série de modelos que serão discutidos na seção sobre modelos estacionários. Esses métodos são bem compreendidos e implementados, facilitando sua interpretação, uso e sustentação.

### 2.8.2 *Categorias Básicas de Não Estacionariedade*

Como extensão do argumento sobre estruturas de dependência na seção anterior podemos afirmar que, sendo estacionariedade um padrão de dependência, temos infinitas formas de não estacionariedade, retornando ao caso de dependência generalizada. É interessante identificar nesse universo de dependência padrões de séries não estacionárias que são facilmente transformadas em séries estacionárias.

Uma série temporal com presença de tendência determinística, como ilustrada na figura 2, pode ser representada pela seguinte expressão:

$$y_t = e_t + f(t) + \varepsilon_t \quad \text{onde } \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Na qual  $e_t$  representa uma série estacionária,  $f(t)$  uma função determinística do tempo e  $\varepsilon_t$  ruído branco(seção 2.9). Nota-se que  $f(t)$  é uma função monotônica arbitrária tal que  $y_t$  seja uma série não estacionária. No caso da figura 2 temos  $f(t)$  linear e na figura 3 logarítmica. Uma série temporal demonstrando esse tipo de não estacionariedade é considerada **tendência-estacionária**, uma vez que simplesmente removendo a tendência  $f(t)$  temos estacionariedade. Isso pode ser feito de várias formas, talvez com maior simplicidade diferenciando a série. Métodos mais sofisticados incluem decomposição ETS (seção 3.1) e regressão com finalidade de modelar  $f(t)$  de forma que o resíduo represente uma a série estacionária  $e_t + \varepsilon_t$ .

Uma série com presença de tendência estocástica pode ser classificada de maneira semelhante. O exemplo mais simples de tal série é gerada por um passeio aleatório, definido pelo seguinte processo, visualizado pela figura 11:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{onde } \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Por meio de um desenvolvimento recursivo do processo podemos escrever:

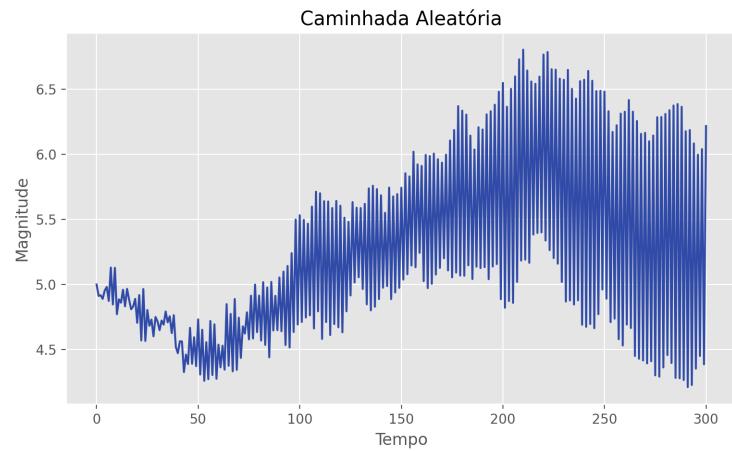


Figura 11 – Visualização de caminhada aleatória com  $y_0 = 5$

$$y_t = (y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$y_t = ((y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

⋮

$$y_t = \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_{t-j} + y_0$$

Resultado a partir do qual a não estacionariedade de  $y_t$  se torna evidente, uma vez que

$$\text{var}(y_t) = \sigma^2 t$$

Além da covariância ser dependente do tempo.

Uma forma simples de tornar a série estacionária é diferenciá-la em primeira ordem, isso é, aplicar o operador de diferença primeira:

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$\nabla y_t = \varepsilon_t$$

Sabemos pela seção 2.9 que ruído branco é um processo estacionário.

A caminhada aleatória é denominada uma série **diferença-estacionária** pelo fato da operação de diferença introduzir estacionariedade. Essa é uma forma tão comum de não estacionariedade que a ideia de “diferenciar uma série antes de fazer qualquer coisa” é proeminente entre profissionais de dados, apesar de que geralmente necessita-se apenas de estacionariedade. Essa prática é parcialmente justificada considerando que a maior parte das séries temporais “reais” são não estacionárias e frequentemente diferencialmente estacionárias.

É igualmente possível que uma série diferença-estacionária seja estacionária em sua  $n$ -ésima diferença, tal que estacionariedade seja observada por uma operação de diferenças de ordem  $n$ . A ideia de tirar sucessivas diferenças até atingir estacionariedade é fundamental no método de Box-Jenkins, por exemplo.

Séries diferença-estacionárias apresentam raízes unitárias e os dois termos são frequentemente usados nos mesmos contextos.

Podemos resumir as definições das categorias de não estacionariedade abordadas nessa seção assim como suas implicações como segue:

1. **Estacionariedade em Tendência:** Uma série é considerada tendência-estacionária se apresentar uma tendência determinística. No caso de anomalias ou eventos de perturbação, séries com esse tipo de tendência retornam ao valor da tendência ao longo do tempo, “esquecendo” o evento perturbador. Esse tipo de série se torna estacionária pela remoção da tendência determinística, processo realizado por meio de regressão da tendência, por diferenciação, por decomposição, etc.
2. **Estacionariedade Diferenciável:** Uma série é considerada diferença-estacionária se apresentar uma tendência estocástica. No caso de anomalias ou eventos de perturbação, séries com esse tipo de tendência são irreversivelmente afetadas, “lembrando” do evento perturbador. Esse tipo de série se torna estacionária por diferenciação em ordem  $n$ . Possui raízes unitárias e é frequentemente discutida nessa linguagem.

## 2.9 Ruído Branco

Uma série temporal  $\mathbf{x}_t$  gerada por um processo  $\mathbf{X}(t)$  é considerada ruído branco ou um processo puramente aleatório se atender às seguintes três condições:

1.  $E(\mathbf{X}(t)) = 0$
2.  $Var(\mathbf{X}(t)) = \sigma^2$
3.  $Cov[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t + \tau)] = 0$

Que podem ser interpretadas da seguinte forma

1. A média da série  $\mathbf{x}_t$  é nula ao longo do tempo
2. A variância da série  $\mathbf{x}_t$  é constante ao longo do tempo
3. Não há correlação entre as amostras de  $\mathbf{x}_t$

Observa-se que ruído branco é um caso específico de estacionariedade, se diferenciando pela especificação do valor esperado e autocorrelação entre quaisquer amostras em zero. A compreensão da definição e capacidade de identificação de ruído branco é importante para análise de resíduos.

### 3 TEORIA UNIVARIADA

#### 3.1 Decomposição de Séries Temporais

Decomposição em séries temporais tipicamente descreve o processo de representação de uma série por uma combinação linear de três componentes: tendência, sazonalidade e resíduos. A decomposição de uma série  $y_t$  pode ser aditiva ou multiplicativa como expressada pelas equações 3.1 e 3.2 respectivamente.

$$y_t = S_t + T_t + R_t \quad (3.1)$$

$$y_t = S_t \cdot T_t \cdot R_t \quad (3.2)$$

A escolha de decomposição aditiva ou multiplicativa deve ser feita de acordo com o tipo de sazonalidade (seção 2.6).

Como herança de econometria grande parte dos algoritmos clássicos de decomposição (X11 (LADIRAY; QUENNEVILLE, 2001), SEATS (BIANCIONINI, 2016, capítulo 5.2) e derivados) são baseados em período de sazonalidade anuais, semestrais, trimestrais e mensais (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018). A incapacidade desses algoritmos de processar dados com período menor os torna pouco utilizáveis no contexto de sinais elétricos, por exemplo, cujas séries tipicamente são de período inferior a um dia, apresentando padrões sazonais com período semelhante.

Antes de prosseguir é interessante comentar sobre os principais objetivos de decomposição:

1. Análise: O processo de pensar sobre, elaborar, ajustar e observar resultados de decomposição são altamente informativos da natureza da série sob análise. A operação é frequentemente usada para fins de análise exploratória.
2. Indução de estacionariedade: Como tendência sempre é e sazonalidade pode ser um padrão cuja presença qualifica não estacionariedade sua remoção pode tornar uma série “mais estacionária” ou pelo menos mais apropriada para modelagem por meio de modelos não estacionários.

3. Detecção de Anomalias: Eventos anômalos são tipicamente dissociados de e ocultados por estruturas de tendência e sazonalidade. A remoção dessas estruturas tende a expor anomalias de forma mais detectável.
4. Modelagem e Previsão: A representação de uma série por meio de três componentes distintas é interessante para problemas de previsão pela possibilidade de desenvolver modelos e previsões para cada componente de acordo com suas propriedades. Os modelos independentes tendem a ser menos complexos, mais generalizáveis e mais robustos do que um modelo adequado para a série original, se existir.

### 3.1.1 Modelagem de Tendência

Uma operação essencial em decomposição de séries temporais é a determinação de uma tendência subjacente dos dados. Os principais procedimentos para tal são abordados a seguir.

#### 3.1.1.1 Média Móvel

Um filtro de média móvel de ordem  $m$  é tipicamente expressado como:

$$MA_{t_m} = \frac{1}{m} \sum_{i=-k}^{i=k} y_{t+i} \quad (3.3)$$

A operação é visualizada pela figura 12.

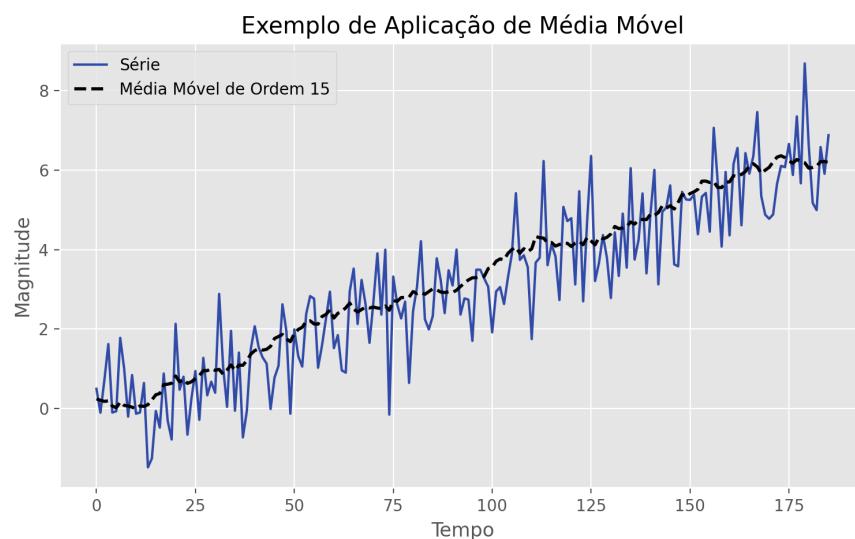


Figura 12 – Visualização de aplicação de filtro média móvel com  $m=15$

### 3.1.1.2 Regressão Localizada/Filtro de Savitzky-Golay

Uma forma mais robusta e granular de modelagem de tendência é o algoritmo LOESS, baseado em regressão localizada e conhecido em linguagem de processamento de sinais como o filtro de Savitzky-Golay. Apesar do algoritmo ser simples seu desenvolvimento será omitido por ser matematicamente verboso. É importante que o leitor conheça a existência do método LOESS, sabendo que ele oferece uma alternativa mais precisa para modelagem de tendência do que média móvel, apesar de ser potencialmente mais computacionalmente complexo. Uma breve intuição sobre seu funcionamento é apresentada a seguir.

A ideia fundamental do algoritmo é repartir a série temporal em grupos de pontos menores, calculando uma regressão (tipicamente mas não necessariamente linear) nesses grupos menores de forma a construir uma curva linear por partes que aproxima a tendência da curva original. O tamanho dos grupos é arbitrário e tipicamente informado como uma fração do tamanho da série completa e os grupos em si são determinados pelos  $n$  pontos mais próximos a um elemento chamado de “ponto focal” que é incrementado a cada iteração. O valor dos incrementos dos pontos focais também é um parâmetro.

A figura 13 ilustra o resultado do algoritmo LOESS para a mesma série analisada pela figura 12. A figura ilustra curvas de tendência modeladas via LOESS para diferentes tamanhos de grupos. Os tamanhos são informados como porcentagem do comprimento total do sinal. Observa-se que o uso de uma porcentagem menor do sinal aumenta a localidade da regressão tornando o ajuste da tendência mais sinuosa.

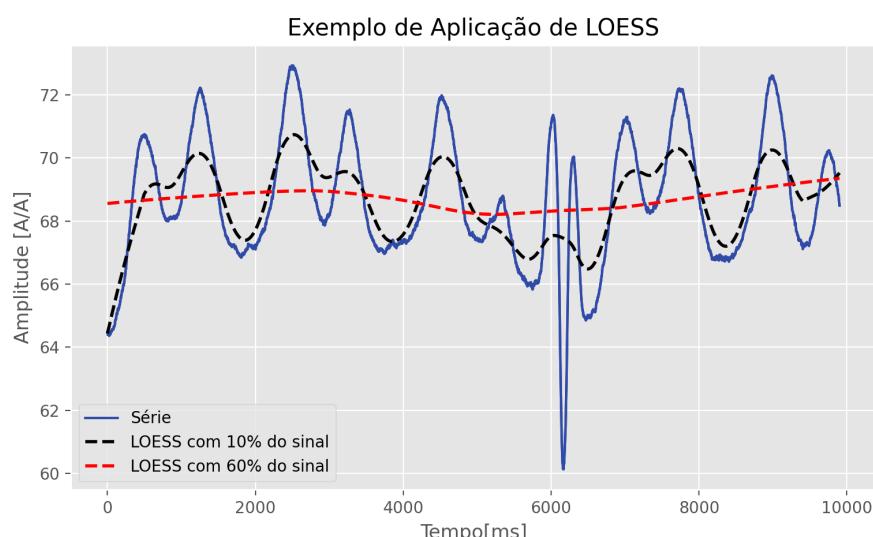


Figura 13 – Visualização do algoritmo LOESS

### 3.1.2 Modelagem de Sazonalidade(Ajuste de Sazonalidade)

A operação fundamental de decomposição é a modelagem ou ajuste de sazonalidade. Esse processo se preocupa em identificar estruturas periódicas em uma série temporal. Modelagem de sazonalidade em séries temporais é de fato uma área em si (HYLLEBERG, 1992). A seção 3.5 é dedicada à uma pequena exploração desses métodos. Abordamos a seguir sua versão mais simples, tipicamente implementada no processo de decomposição de séries temporais.

Uma possibilidade para estimativa da componente sazonal é determinar o “padrão sazonal médio” da série sem tendência. A série de tamanho  $n$  sem tendência é dividida em  $s$  segmentos de  $m$  amostras, no qual  $s = \frac{n}{m}$ . Usando livremente a vírgula como símbolo para concatenação podemos enumerar os segmentos como

$$\chi_1, \chi_2, \dots \chi_s$$

onde um segmento arbitrário

$$\chi_i = \chi_{i_1}, \chi_{i_1} \dots \chi_{i_m}$$

O padrão sazonal modelado  $S'_t$  corresponde ao segmento médio, isso é,

$$S'_t = \left( \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{1_k} \right), \left( \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{2_k} \right), \left( \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{3_k} \right) \dots \left( \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{m_k} \right)$$

A componente sazonal  $S_t$  é então dada pela concatenação de  $m$  cópias de  $S'_t$

$$S_t = \overbrace{S'_t, S'_t, \dots, S'_t}^{s \text{ vezes}}$$

### 3.1.3 Decomposição Clássica (Aditiva)

O algoritmo de decomposição clássica aditiva é simples e capaz de identificar períodos arbitrários de sazonalidade. O procedimento é apresentado passo a passo.

#### 3.1.3.1 Passo 1

**Identificar o período de sazonalidade que se deseja modelar.**

O período  $m$  de sazonalidade corresponde à duração de um ciclo de um padrão periódico observável nos dados. A determinação da duração desse ciclo não é necessariamente

trivial, especialmente tratando de séries de alta frequência, sendo interessante inclusive usar métodos automáticos para determinação da distância entre amostras iniciais dos períodos de sazonalidade. Uma possibilidade, por exemplo, é analisar os picos da função de autocorrelação e acusar a distância entre os picos como um período amostral.

### 3.1.3.2 Passo 2

#### **Modelar tendência $T_t$**

A tendência  $T_t$  é modelada por meio de algum dos métodos mencionados, por exemplo, um filtro média móvel com tamanho de janela  $w$ .

### 3.1.3.3 Passo 3

#### **Remover tendência da série**

A componente sem tendência é dada por  $y_t - T_t$ . A série resultante deve possuir média aproximadamente nula.

### 3.1.3.4 Passo 4

#### **Estimar componente sazonal**

A componente sazonal de  $S_t$  é estimada por meio de algum dos métodos mencionados. Para a maioria dos métodos precisamos informar o período sazonal  $m$ .

### 3.1.3.5 Passo 5

#### **Calcular a componente residual**

Por fim calcula-se a componente residual  $R_t$  como

$$R_t = y_t - T_t - S_t$$

A série está enfim descomposta

$$y_t = R_t + T_t + S_t$$

### **3.1.4 Qualificação de tendência e sazonalidade**

A presença de tendência ou sazonalidade é tipicamente visível imediatamente. Dúvida sobre a presença ou não dessas propriedades pode surgir se o sinal estiver imerso em ruído. Se houver presença de raízes unitárias curtos intervalos de tempo podem ser ambíguos quanto ao determinismo de sua tendência, isso é, uma tendência estocástica pode ser confundida com tendência determinística. Nesses cenários é interessante detectar a presença desses componentes por meio de testes estatísticos ou análise de correlograma.

### **3.1.5 Quantificação de tendência e sazonalidade**

#### **3.1.5.1 Força**

A decomposição de uma série temporal em componentes isolados de tendência, sazonalidade e resíduos permite que a intensidade de tendência e sazonalidade sejam quantificáveis de forma elegante. Essa intensidade de tendência ou sazonalidade é tipicamente chamada de força.

Para séries com forte tendência é esperado que a componente de tendência contenha considerável variância. Uma forma interessante de quantificar a força da tendência de uma série, proposta por Hyndman et. al. (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018), parte da observação da variância adicional introduzida pela adição do termo de tendência ao residual:

$$\frac{Var(R_t)}{Var(T_t + R_t)}$$

Espera-se que essa razão seja pequena para séries com alta tendência, isso é, haja introdução de considerável variância pela adição da componente de tendência no denominador. Podemos então definir a força  $F_T$  da tendência de uma série como

$$F_T = \max \left( 0, 1 - \frac{Var(R_t)}{Var(T_t + R_t)} \right)$$

Observe que  $F_T \in \text{real}$  limitado entre 0 e 1.

De forma idênticamente análoga podemos definir a força da sazonalidade de uma série como

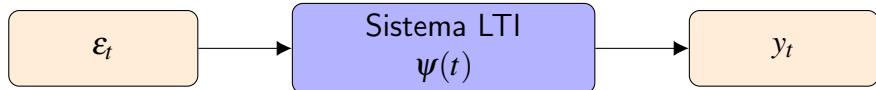


Figura 14 – Representação de série temporal como modelo linear generalizado

$$F_S = \max \left( 0, 1 - \frac{\text{Var}(R_t)}{\text{Var}(S_t + R_t)} \right)$$

Essas medidas são úteis ao oferecer uma interface quantitativa aos atributos tipicamente qualitativos de tendência e sazonalidade. É importante deixar claro que essas medidas necessitam que a série seja decomposta em suas componentes de tendência e sazonalidade, possivelmente dificultando sua aplicação.

### 3.2 Modelos Estacionários

#### 3.2.1 O Modelo Estacionário como um Filtro Linear

Segundo Box e Jenkins (BOX; JENKINS, 2016, capítulo 1.2.1) os modelos estacionários que serão abordados nas seguinte seções foram idealizados por (YULE, 1927) como filtros lineares que modelam a série temporal de interesse por meio do processamento de ruído branco. A modelagem apropriada do sinal em questão se resume então ao apropriado ajuste da função de transferência  $\psi$  desse filtro a partir dos dados observados, isso é, o apropriado posicionamento de zeros e/ou polos.

A função de transferência  $\psi$  é definida no domínio do tempo por meio do operador de atraso  $L$  ao invés de  $z^{-1}$ . Como no contexto de filtros digitais podemos pensar em um plano  $L$ , em analogia com o plano  $Z$ , e chegar às exatas mesmas conclusões sobre o efeito do posicionamento de polos e zeros na estabilidade (inclusive marginal), invertibilidade e resposta em frequência do filtro. A diferença relevante é que o operador de atraso no domínio  $Z$ ,  $z^{-1}$ , é definido de forma inversa à referência do plano. Essa inversão não acontece no plano  $L$ , levando a uma inversão das propriedades conhecidas.

É possível também descrever certos tipos de modelos-filtros como *Finite Impulse Response*(FIR) ou *Infinite Impulse Response*(IIR), dependendo a equação de recorrência, levando às propriedades conhecidas desses tipos de filtros.

A figura 14 torna clara a interpretação traçada. Para tornar o paralelo mais claro

podemos inicialmente pensar em um sinal de entrada  $\varepsilon[n]$  ( ruído branco) transformado por uma resposta ao impulso  $h[n]$ , causal de tamanho  $m$ , no sinal  $y[n]$  pela seguinte soma de convolução

$$y[n] = \sum_{k=0}^m h[n-k]\varepsilon[k] = \sum_{k=0}^m \varepsilon[n-k]h[k]$$

Introduzindo o operador de atraso  $L$  no somatório

$$y[n] = \sum_{k=0}^m L^k h[k] \varepsilon[n]$$

observamos que temos um polinômio em  $L$  cujos coeficientes correspondem aos da resposta ao impulso do filtro. Podemos então, chaveando para notação de séries temporais, reescrever a convolução como

$$\sum_{k=0}^m \psi(k)L^k \varepsilon_t = \sum_{k=0}^m \psi(k)\varepsilon_{t-k}$$

Expandindo as somas temos

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \psi_m\varepsilon_{t-m}$$

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1L\varepsilon_t + \psi_2L^2\varepsilon_t + \dots + \psi_mL^m\varepsilon_t$$

$$y_t = \varepsilon_t(1 + \psi_1L + \psi_2L^2 + \dots + \psi L^m)$$

$$y_t = \psi(L)\varepsilon_t \quad (3.4)$$

onde  $\psi(L)$  é um polinômio mônico em  $L$ .

A interpretação de modelos estacionários como filtros tem suas limitações no que diz respeito às possibilidades de herança de conhecimento da área de processamento de sinais. Inicialmente podemos constatar que filtros lineares no sentido tradicional se propõem em alterar as propriedades de um sinal arbitrário que por si já contém informação. Isso leva à importância imediata da função de impulso unitário como base natural de sinais em tempo discreto e a uma enorme preocupação com a fase da resposta ao impulso do filtro devido à facilidade de distorção

de fase indesejada do sinal processado. Para o modelo-filtro a função de impulso unitário não é tão importante porque esse filtro é sempre excitado pelo mesmo tipo de sinal que não possui nenhum tipo de estrutura a se preservar: ruído branco. A estrutura de fase desse sinal é menos relevante ainda por ser aleatória. Essas diferenças tornam muita da teoria de filtros inaplicável no contexto de séries temporais. Não há sentido de projetar um modelo filtro de fase linear generalizada, por exemplo, se não há o que preservar na fase do sinal de entrada e nenhuma preocupação com atraso de grupo.

Não obstante a interpretação de modelos estacionários como filtros lineares facilita a assimilação de propriedades desses modelos por meio da linguagem de processamento de sinais e nos leva a interessantes explorações de parte da teoria de filtros aplicada à modelagem de séries temporais.

Por fim podemos notar que nesse contexto o filtro tradicional representa uma função linear do processo estocástico de ruído branco  $\varepsilon(t)$  para a saída  $Y(t)$ , qualificando a saída em si como um processo estocástico. Conforme discutido na seção 2.1 abordaremos as propriedades de realizações específicas do processo  $Y(t)$ .

### 3.2.2 *Modelo Linear Generalizado*

É interessante expandir a discussão anterior para a definição de um modelo linear generalizado (GLM).

Tomando a equação 3.4 com  $m \rightarrow \infty$  temos um modelo linear generalizado que corresponde ao processamento de ruído branco por um filtro linear com resposta ao impulso de duração infinita:

$$y_t = \psi(L)\varepsilon_t = \sum_0^{\infty} \psi_m \varepsilon_t \quad (3.5)$$

onde  $\psi(L) = 1 + L + L^2 + L^3 \dots$

A literatura estatística frequentemente se refere ao vetor de ruído branco  $\varepsilon_t$  como “choques” ou “inovações”. O teorema de Wold (WOLD, 1954) estabelece que qualquer série estacionária tem uma representação dada pela equação 3.5 tal que  $\sum_0^{\infty} \psi_k^2 < \infty$ . Esse resultado é equivalente à constatação que qualquer sinal estacionário pode ser representado pelo processamento de ruído branco por um filtro com resposta ao impulso quadrado somável. Outro ponto de vista do teorema do Wold pode ser obtido analisando a variância do GLM.

$$\sigma_{GLM}^2 = E \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k} \right)^2 \right] = E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 \varepsilon_{t-k}^2 \right]$$

$$\sigma_{GLM}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 E[\varepsilon_{t-k}^2]$$

$$\sigma_{GLM}^2 = \sigma_{\varepsilon_t}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2$$

Que implica a necessidade de finitude de  $\sigma_{GLM}^2$ . Construindo um vetor  $\psi$  formado pelos coeficientes temos a variância representada pelo quadrado da norma desse vetor  $\|\psi\|^2 = \sigma_{GLM}^2$ .

### 3.2.2.1 Autocorrelação

A fim de definir a função de  $\rho_{GLM}(\tau)$  de autocorrelação de um modelo linear generalizado definimos inicialmente sua covariância

$$\gamma_{GLM}(\tau) = E \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k} \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i-\tau} \right) \right]$$

$$\gamma_{GLM}(\tau) = E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k} \psi_i \varepsilon_{t-i-\tau} \right]$$

onde temos que a esperança entre quaisquer  $\varepsilon_t - a$  e  $\varepsilon_t - b$  nula exceto para  $a = b$ , já que por definição  $\varepsilon_t$  é composto de variáveis aleatórias independentes. Estamos então interessados nos casos em que  $t - k = t - i - \tau$  tal que  $i = k - \tau$ . Substituindo as variáveis temos

$$\gamma_{GLM}(\tau) = E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k} \psi_{k-\tau} \varepsilon_{t-k} \right]$$

$$\gamma_{GLM}(\tau) = E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k-\tau} \varepsilon_{t-k}^2 \right] = \sigma_{\varepsilon_t}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k-\tau}$$

A autocorrelação é então dada por

$$\rho_{GLM}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k-\tau}$$

### 3.2.3 Modelo Média Móvel

Um processo  $\mathbf{Y}(t, q)$  é considerado de média móvel de ordem  $q$  se uma realização  $y_t$  for definida pela equação 3.6, na qual  $\varepsilon_t$  representa a realização de um processo puramente aleatório. O processo é tipicamente chamado de  $MA(q)$ .

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{i=q} \beta_i \varepsilon_{t-i} \quad (3.6)$$

Pela definição acima observamos que o modelo média móvel corresponde a um filtro FIR excitado por ruído branco.

Um processo de média móvel, como sugerido pelo nome, é análogo a uma média móvel de observações anteriores de uma série temporal de ruído branco. Não é de fato uma média móvel porque os coeficientes não necessariamente se somam a um.

Podemos escrever a equação 3.6 usando o operador de atraso por meio da equação 3.7. Nessa equação observamos claramente como o modelo  $MA(q)$  é um caso particular do *GLM*.

$$y_t = \varepsilon_t (1 + \sum_{i=1}^{i=q} \beta_{t-i} L^i) = \varepsilon_t \phi(L) \quad (3.7)$$

A figura 15 ilustra o comportamento temporal de modelos  $MA$  para diferentes ordens.

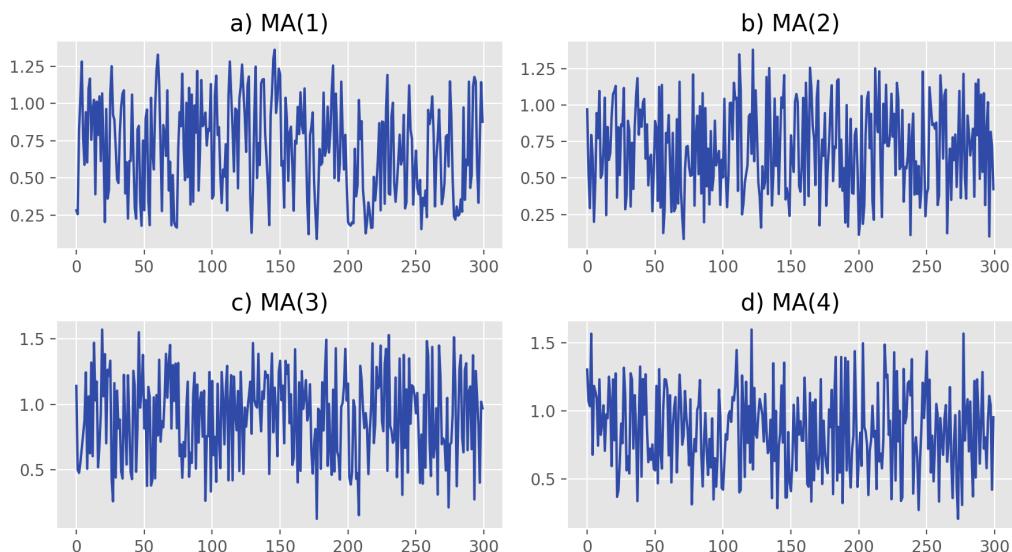


Figura 15 – Visualização no tempo de processos média móvel de ordens diferentes.

Observamos que não temos clara identidade visual dos processos de média móvel representados devido à natureza estocástica do sinal.

### 3.2.3.1 Autocorrelação

Definimos inicialmente a função de autocorrelação para o processo média móvel

$$\gamma_{MA(q)}(\tau) = E \left[ \left( \varepsilon_t + \sum_{k=1}^m \beta_k \varepsilon_{t-k} \right) \left( \varepsilon_{t-\tau} + \sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon_{t-i-\tau} \right) \right]$$

observando que para  $\tau > q$  temos  $\gamma_{MA(q)}(\tau) = 0$ , concluímos de forma análoga à dedução da autocorrelação do processo linear generalizado a seguinte forma

$$\gamma_{MA(q)}(\tau) = \sigma_{\varepsilon_t}^2 \sum_{k=1}^m \beta_k \beta_{k-\tau}$$

A variância é dada por  $\gamma(0)$  tal que

$$\sigma_{MA(q)}^2 = \sigma_{\varepsilon_t}^2 \sum_{k=1}^m \beta_k^2$$

Se definirmos o vetor  $\theta$  a partir dos coeficientes do polinômio  $\theta(L)$  temos  $\sigma_{MA(q)}^2 = \sigma_{\varepsilon_t}^2 \|\theta\|^2$ .

Temos autocorrelação definida então como

$$\rho_{MA(q)}(\tau) = \frac{\sum_{k=1}^m \beta_k \beta_{k-\tau}}{\|\theta\|}$$

A função de autocorrelação de um processo média móvel exibe a interessante propriedade de “cortar” após o atraso  $q$ , isso é, demonstrar autocorrelação igual a zero após um atraso de número correspondente à ordem do processo. A autocorrelação amostral de uma série temporal gerada por um processo de média móvel tende a apresentar a mesma propriedade, apesar de ser perfeitamente possível da autocorrelação amostral de um processo  $MA(q)$  cair para zero *antes* do lag  $q$  (CHATFIELD; XING, 2019).

A imagem 16 demonstra a visualização dos correlalogramas correspondentes aos modelos ilustrados no tempo pela figura 15. Observe que as autocorrelações são distintas de zero apenas para atrasos iguais ou inferiores à ordem  $q$  do processo.

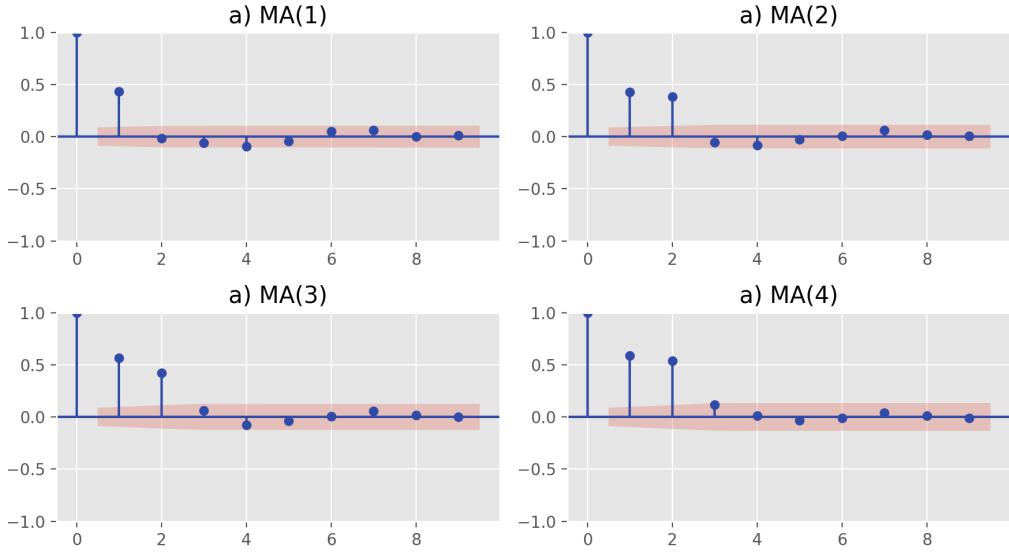


Figura 16 – Visualização do correlograma de processos média móvel de ordens diferentes.

Essa propriedade da função de autocorrelação possui consequências diretas para modelagem de séries temporais: é possível que uma série temporal estacionária com autocorrelações iguais a zero após atraso  $k$  seja satisfatoriamente aproximada por um modelo  $MA(k)$ . A função de autocorrelação amostral é usada então como ferramenta de identificação da aplicabilidade e ordem de modelos  $MA(q)$ .

### 3.2.4 Modelo Autoregressivo

Um processo  $\mathbf{Y}(t, p)$  é considerado autoregressivo de ordem  $p$  se uma realização  $y_t$  ele for definido pela equação 3.8, onde  $\varepsilon_t$  representa um processo puramente aleatório. O processo é frequentemente chamado de  $AR(p)$ .

$$y_t = \sum_{i=1}^{i=p} y_{t-i} \alpha_i + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

Um processo autoregressivo de ordem  $p$  é caracterizado por uma dependência entre uma amostra de instante de tempo  $t$  e as amostras de instantes de tempo  $t-1, t-2, \dots, t-p$ . Como sugerido pelo nome a equação de diferenças estabelece uma relação de regressão entre uma série temporal e suas versões atrasadas no tempo.

Podemos reescrever a equação 3.8 por meio do operador de atraso resultando na equação. 3.9. O polinômio  $\alpha(L)$  é chamado de polinômio autoregressivo ou equação característica.

$$y_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \sum_{i=1}^{i=p} L^i \alpha_i} \quad (3.9)$$

Como exemplo temos que um processo autoregressivo de segunda ordem, isso é,  $AR(1)$ , é definido pela expressão a seguir.

$$y_t = \frac{\varepsilon_t}{(1 - L\alpha_1)} \quad (3.10)$$

O polinômio de operadores de atraso  $1 - L\alpha_1$  recebe o nome de equação característica. Ao expandir essa equação por divisão polinomial encontramos o conhecido desenvolvimento de um filtro IIR.

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{t-k} \quad (3.11)$$

Observamos primeiramente que o parâmetro  $\alpha$  deve ser tal que a soma do lado direito da equação 3.11 seja convergente. Sabemos que essa condição corresponde à estabilidade do filtro e veremos que corresponde também à estacionariedade do sinal produzido pela filtragem. Concluímos que um sinal produzido por um processo autoregressivo estacionário pode ser modelado pelo processamento de ruído branco por um filtro IIR estável. Essa forma da equação autoregressiva é claramente um caso específico do GLM.

A divisão polinomial entre a equação 3.10 e 3.11 é generalizada como uma inversão do polinômio  $\alpha(L)$ , de forma que

$$y_t \alpha(L) = \varepsilon_t = y_t = \alpha^{-1}(L) \varepsilon_t$$

$\alpha^{-1}(L)$  é bem definido se o sistema linear definido pela função de transferência  $\alpha(L)$  for inversível, isso é, se suas raízes em  $L$  estiverem localizadas fora do círculo unitário.

Uma visualização do comportamento temporal de processos autoregressivos é dada pela figura 17. Observa-se que as séries temporais não exibem comportamento visivelmente distingível no domínio do tempo, como no caso das séries  $MA(q)$ .

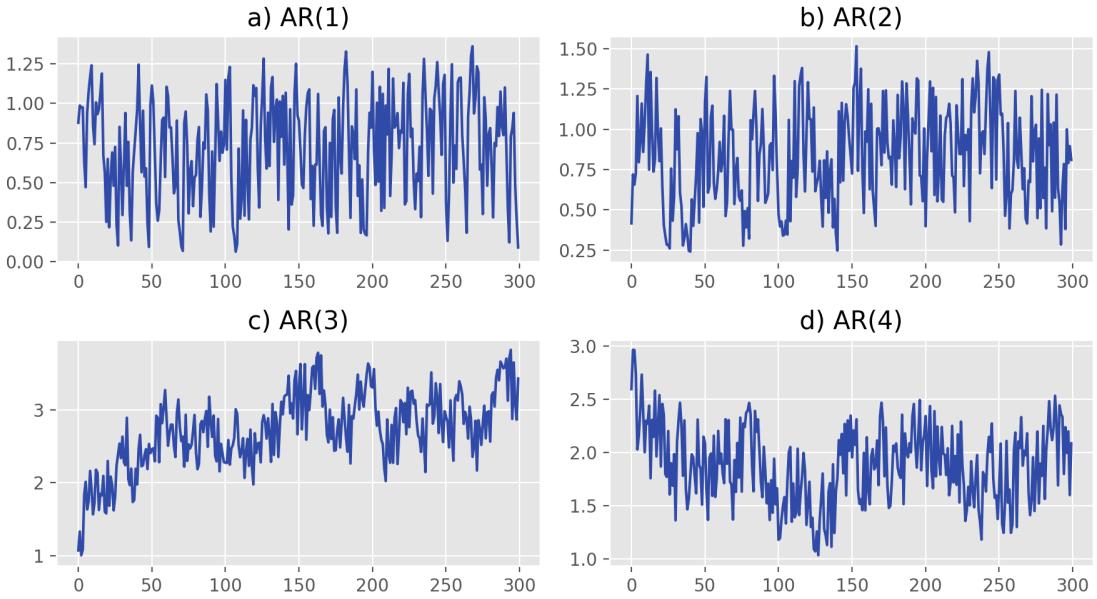


Figura 17 – Visualização de processos autoregressivos de diferentes ordens no domínio do tempo.

#### 3.2.4.1 Autocorrelação

Assumindo estacionariedade e multiplicando ambos os lados da equação 3.8 por  $y_{t-\tau}$  podemos então calcular a esperança da expressão para obter a autocovariância do processo para  $\tau \neq 0$

$$\gamma_{AR(p)}(\tau) = E \left[ \left( \sum_{k=1}^{i=p} y_{t-k} y_{t-\tau} \alpha_k \right) + (y_{t-\tau} \varepsilon_t) \right]$$

$$\gamma_{AR(p)}(\tau) = E \left[ \left( \sum_{k=1}^{i=p} y_{t-k} y_{t-\tau} \alpha_k \right) \right]$$

$$\gamma_{AR(p)}(\tau) = \sum_{k=1}^{i=p} \alpha_k \gamma_{AR(p)}(\tau - k)$$

Equação que igualmente satisfaz a autocorrelação  $\rho(\tau)$  pela divisão de cada um dos termos acima por  $\gamma_{AR(P)}(0) = \sigma_{AR(p)}^2$ .

$$\rho_{AR(p)}(\tau) = \sum_{k=1}^{i=p} \alpha_k \rho_{AR(p)}(\tau - k), \tau > 0 \quad (3.12)$$

Obtemos então uma autoregressão de ordem  $p$  nas autocovariâncias também. Para calcular a variância do processo multiplicamos os termos da equação 3.8 por  $y_t$

$$\sigma_{AR(p)}^2 = \sigma_{\varepsilon_t}^2 + \sum_{k=1}^{i=p} \gamma_{AR(p)}(k)$$

$$\sigma_{AR(p)}^2 = \sigma_{\varepsilon_t}^2 + \sigma_{AR(p)}^2 \sum_{k=1}^{i=p} \rho_{AR(p)}(k)$$

$$\sigma_{AR(p)}^2 - \left( \sigma_{AR(p)}^2 \sum_{k=1}^{i=p} \rho_{AR(p)}(k) \right) = \sigma_{\varepsilon_t}^2$$

$$\sigma_{AR(p)}^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon_t}^2}{1 - \sum_{k=1}^{i=p} \rho_{AR(p)}(k)}$$

A variância é também uma função autoregressiva da autocorrelação.

Podemos reescrever a equação 3.12 em função do polinômio de atraso (operando agora sobre  $\tau$  ao invés de  $t$ ) como

$$\alpha(L)\rho_{AR(p)}(\tau) = 0 \quad (3.13)$$

Expressando o polinômio em função de suas raízes  $G_i$  temos que

$$\alpha(L) = \prod_{k=1}^p (1 - G_k L)$$

É demonstrado em (BOX; JENKINS, 2016, capítulo 4) que a solução geral para a equação de 3.13 é dada por

$$\rho_{AR(p)}(\tau) = \sum_{k=1}^p A_k G_k^\tau \quad (3.14)$$

Essa é a expressão conclusiva da autocorrelação de um processo autoregressivo de ordem  $p$ .

Denotemos as raízes reais de  $\alpha(L)$  por  $R_h$  e as complexas conjugadas por  $C_j, C_k$ . Observamos que sob a forma 3.14 as raízes reais  $R_h$ , assumindo que  $|R_h| < 1$ , contribuem para a autocorrelação como exponenciais amortecidas  $A_h^\tau R_h$ . Raízes complexas conjugadas  $C_j, C_k$  contribuem com um senóide amortecido.

Concluímos então que a autocorrelação de um processo  $AR(p)$  é uma combinação de  $N$  exponenciais e senóides amortecidos tal que  $N \leq p$ .

Para o caso específico de um processo estacionário  $AR(1)$  temos pela equação 3.14 a seguinte relação de autocorrelação

$$\rho_{AR(1)}(\tau) = \alpha \rho_{AR(1)}(\tau - 1)$$

$$\rho_{AR(1)}(\tau) = \alpha^\tau$$

A imagem 18 demonstra a visualização dos correlalogramas correspondentes aos modelos ilustrados no tempo pela figura 17. Observe que as autocorrelações são misturas de exponenciais e senóides amortecidas.

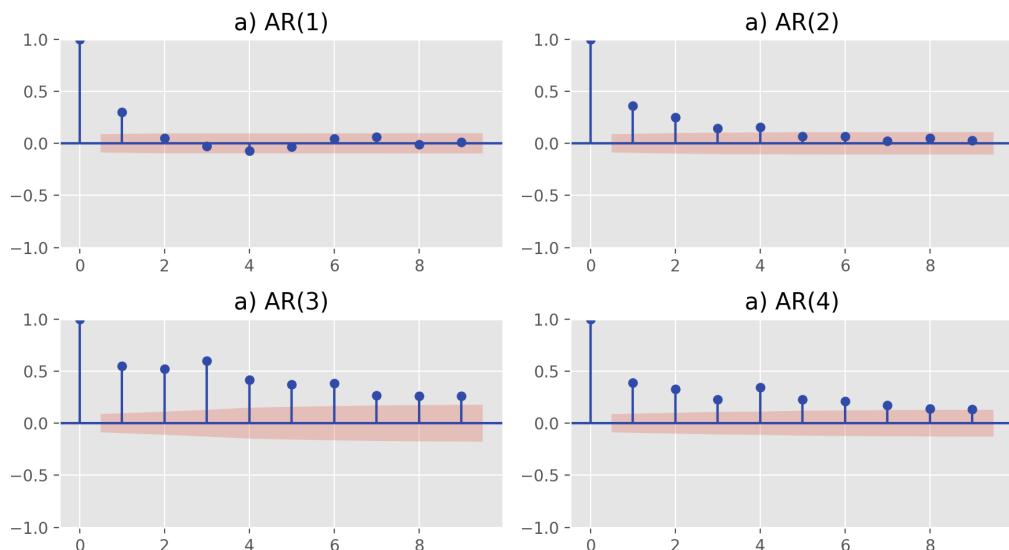


Figura 18 – Visualização do correlograma de processos autoregressivos de ordens diferentes.

#### 3.2.4.2 Equações de Yule Walker

É possível estimar os coeficientes autoregressivos  $\alpha$  desenvolvendo as equações 3.13.

Com  $\rho(-k) = \rho(k)$  e  $\rho(0) = 1$  temos

$$\rho(1) = \alpha_1 + \alpha_2 \rho(1) + \alpha_3 \rho(2) \dots + \alpha_p \rho(p-1)$$

$$\rho(2) = \alpha_1 \rho(1) + \alpha_2 \rho(1) + \alpha_3 \rho(2) \dots + \alpha_p \rho(p)$$

⋮

$$\rho(p) = \alpha_1\rho(p-1) + \alpha_1\rho(-1) + \alpha_2\rho(-2) \dots + \alpha_p$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

As equações 3.15 são conhecidas como equações de Yule Walker, que permitem uma estimativa de coeficientes autoregressivos por meio de uma estimativa de coeficientes de autocorrelação. A forma mais intuitiva de estimar o vetor  $\alpha$  é por meio da inversão da matriz de autocorrelações defasadas, mas outros algoritmos como o de Durbin-Levinson podem ser utilizados.

#### 3.2.4.3 Autocorrelação Parcial

Como mencionado na seção 2.7.1 autocorrelação parcial informa a correlação restante entre  $y_t$  e  $y_{t-\tau}$  após levar em conta a contribuição resultante dos termos intermediários  $y_{t-1}, y_{t-2} \dots y_{t-\tau+1}$ .

Autocorrelação parcial é formalmente definida para um processo autoregressivo partindo da equação 3.13, onde tomando  $p = 1$  para um processo autoregressivo de ordem 1 temos que

$$\rho(\tau) = \alpha_1\rho(\tau-1)$$

Tomando  $\tau = p = 1$  e adicionando um subscrito adicional em  $\alpha$  para indicar a ordem do processo autoregressivo temos

$$\alpha_{1_1} = \rho(1)$$

Para  $p = 2$  temos

$$\rho(\tau) = \alpha_1 \rho(\tau-1) + \alpha_2 \rho(\tau-2)$$

Novamente tomando  $\tau = p = 2$  obtemos

$$\rho(2) = \alpha_{12} \rho(1) + \alpha_{22} \rho(0)$$

Estamos como no caso de  $p = 1$  interessados no valor de  $\alpha_{22}$ , isso é,  $\alpha_{\tau\tau}$  com  $\tau = 2$ . Uma solução para esse valor em função das autocorrelações  $\rho$ , obtida por meio das equações de Yule Walker, é

$$\alpha_{22} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

As autocorrelações parciais em função de  $\tau$  são então dadas por sucessivos  $\alpha_{\tau\tau}$  para  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ , isso é, o último coeficiente autoregressivo  $\alpha_p$  de processos autoregressivos de ordem  $p$  crescentes.

A solução desses valores em função das autocorrelações de cada processo de ordem crescente, dada por (MORETTIN, 2017), é generalizada como

$$\alpha_{\tau\tau} = \frac{\|\mathbf{P}_\tau^*\|}{\|\mathbf{P}_\tau\|}$$

Onde a matriz  $\mathbf{P}$  é a matriz de autocorrelações de ordem  $p = \tau$  como definida na equação 3.15 e a matriz  $\mathbf{P}^*$  é obtida pela substituição da última coluna de  $\mathbf{P}$  pelo vetor de autocorrelações  $\rho$ .

Essa definição de autocorrelação parcial é bem definida para processos autoregressivos e para esse tipo de processo seu valor claramente se torna igual a zero a partir do atraso  $\tau = p$ .

A autocorrelação parcial amostral é calculada da mesma forma partindo da autocorrelação amostral como definida pela equação 2.2. A autocorrelação parcial amostral por sua vez é definida para séries temporais arbitrárias. Nesse caso sucessivos modelos autoregressivos de ordem  $p = \tau = 1, 2, 3, \dots$  são ajustados à série em questão e o último coeficiente de cada regressão é armazenado como a autocorrelação parcial amostral para o atraso  $\tau$ .

Como estamos interessados em trabalhar com séries temporais a definição acima de autocorrelação parcial amostral é o suficiente para generalizar o conceito definido sobre processos autoregressivos para realizações únicas (séries temporais) de processos estocásticos arbitrários.

### 3.2.5 ARMA

Processos ARMA, como sugerido pelo nome, são gerados pela sobreposição de processos AR e MA. Um processo  $\mathbf{Y}(t)$  é considerado  $ARMA(p, q)$  se for dado pela equação 3.16

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{i=q} \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{i=p} y_{t-i} \alpha_i \quad (3.16)$$

Um processo  $ARMA(2, 1)$  é portanto dado pela seguinte equação de recorrência.

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Em analogia aos casos anteriores o processo pode ser escrito por meio do operador de atraso.

$$y_t(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) = \varepsilon_t(\beta_0 + \beta_1 L)$$

Podemos introduzir  $\phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L$  e  $\theta(L) = \beta_0 + \beta_1 L$  tal que:

$$y_t = \varepsilon_t \frac{\phi(L)}{\theta(L)} \quad (3.17)$$

A equação 3.17 é prontamente generalizada para corresponder à equação 3.16 estabelecendo:

$$\phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 \dots - \alpha_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \beta_1 L^1 \dots - \beta_q L^q$$

Observamos que a forma da equação 3.17 é idêntica à de uma função de transferência, sendo definida no domínio do tempo sobre polinômios de  $L$  ao invés de no domínio  $Z$  sobre polinômios em  $z$ . As implicações do posicionamento das raízes dos polinômios numerador e denominador decorrem de maneira análoga.

Uma propriedade interessante de modelos ARMA é que processos estacionários frequentemente podem ser modelados por modelos ARMA com menos parâmetros que modelos AR ou MA.

### 3.3 Raízes Unitárias

Como um processo ARMA é essencialmente resultante do processamento de ruído branco por um filtro linear com função de transferência  $\frac{\theta(L)}{\phi(L)}$  sabemos que a posição das raízes dos polinômios  $\theta(L)$  e  $\phi(L)$  determina suas propriedades.

O posicionamento de raízes no círculo unitário é um caso interessante de analisar. Se algum dos polos função de transferência de um processo ARMA estiverem posicionados no círculo unitário diz-se que esse processo possui raízes unitárias. Esse termo tipicamente descreve o posicionamento dos polos e não dos zeros pelo maior efeito dessas raízes na dinâmica do sistema, mas essa seção inclui uma breve discussão sobre o efeito de zeros unitários também.

Antes de prosseguir um processo  $y_t$  ARMA(2, 1) será estabelecido para exemplificar as seguintes discussões.

Diante da recorrência

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

temos

$$y_t = \frac{1 + \beta_1 L}{1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2} \varepsilon_t$$

Uma realização desse processo para os parâmetros

$$\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = 0.25, \beta_1 = 0.8$$

é ilustrada pela figura 19 e seu diagrama de polos e zeros no plano  $L$  pela figura 20.

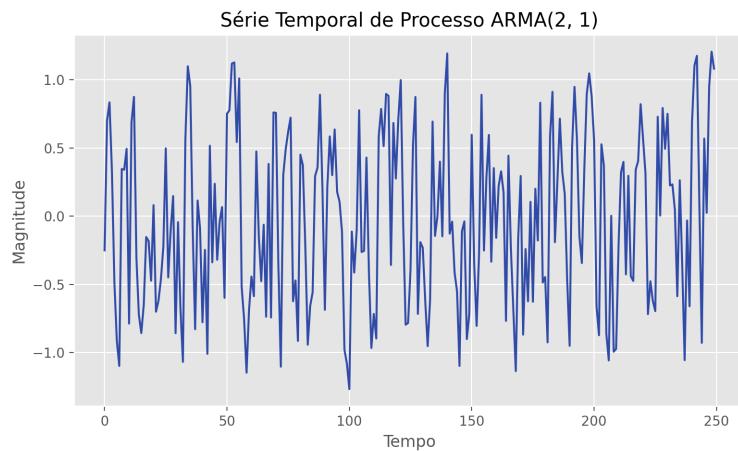


Figura 19 – Visualização de realização de processo ARMA(2, 1) no tempo

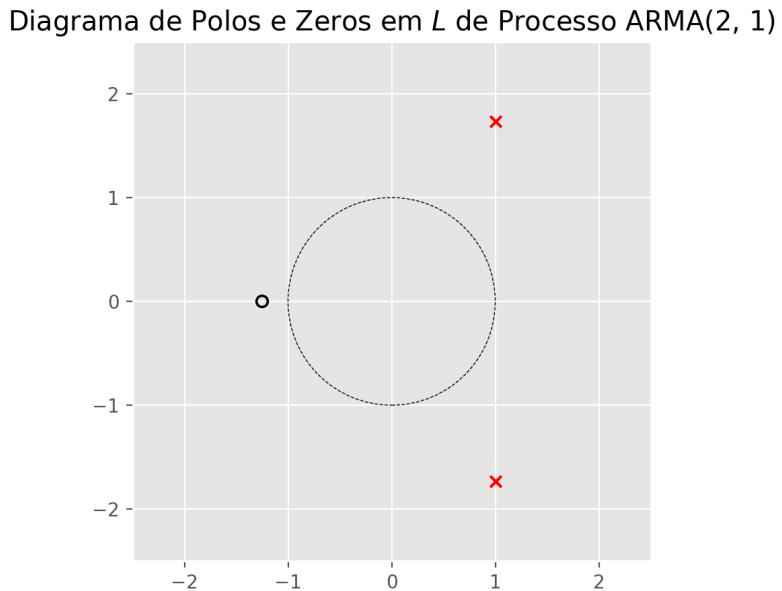


Figura 20 – Visualização de posicionamento de polos e zeros de processo ARMA(2, 1) em relação ao círculo unitário no plano L

### 3.3.1 Raízes Unitárias no Polinômio Autoregressivo

Inspecionemos qualitativamente a inserção presença de uma raiz unitária no polinômio autoregressivo do processo ARMA(2, 1) apresentado. Tomando  $z_t$  como o processo

$$z_t = \frac{y_t}{(1-L)} = \frac{1+0.8L}{(1+0.5L-0.25L^2)(1-L)} \varepsilon_t$$

Temos a seguinte relação entre  $z_t$  e  $y_t$

$$(1 - L)z_t = y_t$$

$$z_t - z_{t-1} = y_t$$

$$\nabla z_t = y_t$$

Tal que  $z_t$  represente uma integração de  $y_t$ .

$$z_t = \nabla^{-1} y_t$$

Dizemos que nesse caso o processo  $z_t$  é integrado de ordem um, ou  $I(1)$ , já que o diferenciando uma vez temos em um processo estacionário. Observamos imediatamente que o processo  $z_t$  não é estacionário.

Podemos definir um processo integrado de ordem  $d$ ,  $I(d)$ , como um processo cuja diferenciação em  $d$  vezes resulta em estacionariedade. Tal processo seria gerado a partir de  $y_t$  por meio de  $d$  integrações. Essa definição implica corretamente que um processo  $I(d)$ ,  $d > 0$ , não é estacionário, já que a condição de estacionariade para processos ARMA é pontualmente violada.

Analizando uma realização do processo  $z_t$ , por meio da figura 21, observamos um típico processo de raiz unitária, cuja não estacionariedade não é tão óbvia quanto nos casos de um filtro ARMA instável ou presença de tendência determinística. Processos com raiz unitária são diferença estacionários e possuem tendência determinística, como discutido na seção 2.8.2. Como esperado o diagrama de polos e zeros desse modelo inclui um polo adicional correspondente à raiz unitária.

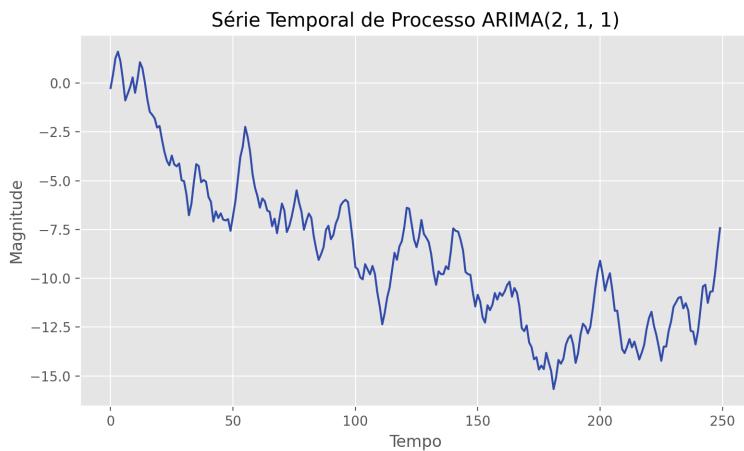


Figura 21 – Visualização de realização de processo ARMA(2, 1) com introdução de raiz unitária no tempo

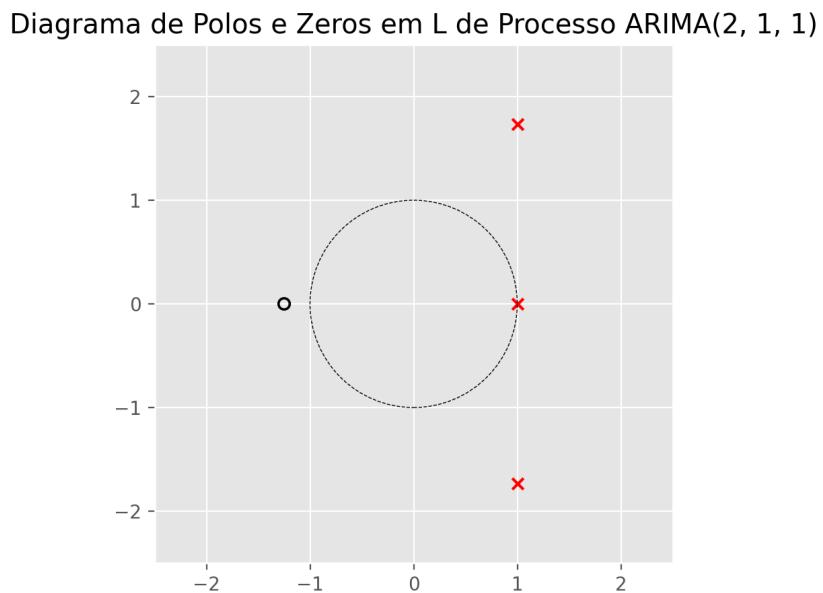


Figura 22 – Visualização de posicionamento de polos e zeros de processo ARMA(2, 1) com introdução de raiz unitária em relação ao círculo unitário no plano L

Processos de raízes unitárias são especialmente interessantes por sua capacidade de representar fenômenos do mundo real de forma eficiente. Logo serão reconhecimentos como processos da classe ARIMA.

No processamento de sinais determinísticos sistemas lineares com raiz unitária levam ao caso de estabilidade marginal, onde a resposta ao impulso do sistema é um sinal de potência ao invés de um sinal de energia. A ideia de uma resposta ao impulso de energia infinita sob presença de polos integradores manifesta-se no contexto de sinais aleatórios quando é dito que

processos de tendência estocástica (de estacionariedade diferenciável, como discutido na seção 2.8.2) são afetados irreversivelmente por eventos perturbadores. A “lembança” desses eventos é justamente a resposta de duração infinita do evento perturbador, apropriadamente modelado por funções impulso ou degrau. Essa interpretação é importante no campo de análise de intervenção, que procura incorporar efeitos de eventos perturbadores reais em modelos de séries temporais.

### 3.3.2 Raízes Unitárias no Polinômio Média Móvel

A presença de uma raiz unitária no polinômio de média móvel de um filtro ARMA gera efeitos menos dramáticos em sua dinâmica. Antes de tudo nota-se que a introdução de raízes unitárias de médias móveis tornam um sistema não inversível, já que sua inversão tornaria essa raiz um polo.

As figuras 23 e 24 ilustram uma realização do processo  $y_t$  com adição de raiz unitária de média móvel e o diagrama de polos e zeros resultante, respectivamente.

Observamos que a série com raiz de média móvel adicional aparenta ter uma distribuição de potência mais enviesada para altas frequências, de forma recíproca ao de raiz unitária autoregressiva, em que há introdução de componentes de baixa frequência. Isso será discutido apropriadamente no capítulo 4.

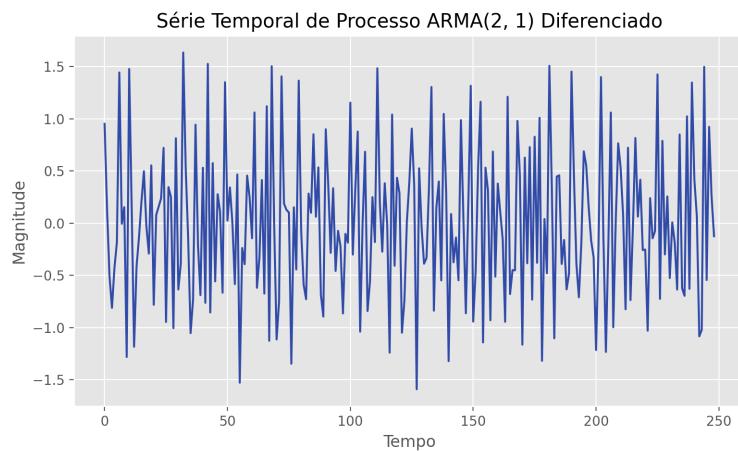


Figura 23 – Visualização de realização de processo ARMA(2, 1) derivado no tempo

Diagrama de Polos e Zeros em  $L$  de Processo ARMA(2, 1)

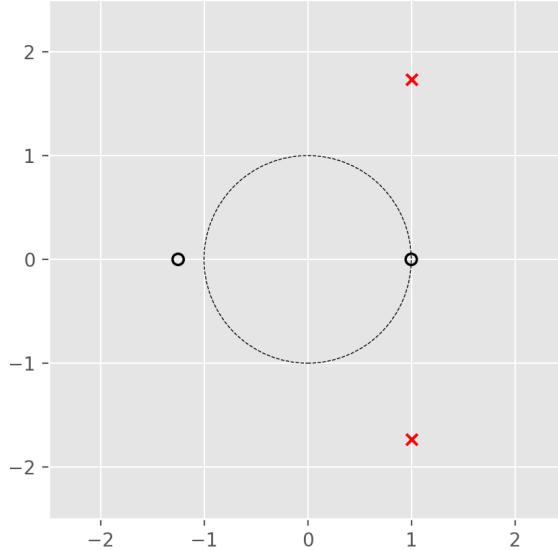


Figura 24 – Visualização de posicionamento de polos e zeros de processo ARMA(2, 1) derivado em relação ao círculo unitário no plano L

Tomando o processo  $w_t$  como

$$w_t = (1 - L)y_t = \frac{1 - 0.2L + L^2}{1 + 0.5L - 0.25L^2} \varepsilon_t$$

Temos  $w_t = y_t - y_{t-1} = \nabla y_t$  tal que  $w_t$  seja a derivada de  $y_t$ . Vemos que ato de diferenciar uma série, em uma tentativa de introduzir estacionariedade por exemplo, corresponde à introdução de uma raiz unitária no polinômio de média móvel. Conseguimos dessa forma compreender a indução de estacionariedade em uma série não estacionária com raiz unitária autoregressiva por meio de sua derivação como a sobreposição de  $d$  zeros aos  $d$  polos integradores do processo original. Isso é ilustrado por uma comparação das figuras 22 e 24, onde vemos que a diferenciação da série  $z_t$  introduziria um zero unitário de forma a “cancelar” seu polo unitário.

A presença de raízes unitárias de média móvel podem indicar que a série foi diferenciada mais vezes que necessário ou que diferenciação é a operação inadequada para indução de estacionariedade, isso é, a série não é diferença estacionária.

Um exemplo é a série tendência estacionária  $m_t$  a seguir:

$$m_t = \mu + \eta t + \varepsilon_t$$

$$\nabla m_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + \eta$$

$$\nabla m_t = (1 - L)\varepsilon_t + \eta$$

Em  $\nabla m_t$  temos uma raiz unitária no polinômio autoregressivo, resultando em uma série não inversível. A tendência determinística poderia ter sido removida por regressão resultando em um processo estacionário e inversível.

### 3.4 Modelo ARIMA

Também chamados de modelos ARMA Integrados modelos ARIMA são essencialmente modelos ARMA com tentativas de remoção de não estacionariedade. Assumindo que a série em questão seja diferença-estacionária o modelo ARIMA induz estacionariedade ajustando um modelo ARMA com raízes unitárias adicionais. A expectativa é que o processo original contenha  $d$  polos unitários que serão então sobrepostos por  $d$  zeros unitários, resultando em processo estacionário.

A distinção entre o modelo ARMA e ARIMA é a substituição de  $y_t$  por  $\nabla^d y_t$ .

Definindo  $w_t = \nabla^d y_t$  para  $d = 0, 1, 2, \dots$  temos a definição de um processo  $ARIMA(p, d, q)$  dada pela equação 3.18. Observe que a equação é idêntica à equação 3.16 com  $w_t$  ao invés de  $y_t$  e que a saída é  $w_t$ , demandando uma integração para previsão de  $y_t$ . O nome do modelo referencia essa operação de reconstrução de  $y_t$ .

$$w_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{i=q} \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{i=p} w_{t-i} \alpha_i \quad (3.18)$$

Podemos escrever um modelo  $ARIMA(p, d, q)$  por meio do operador de atrasos por meio da equação 3.19, onde:

$$\phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 \dots - \alpha_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \beta_0 - \beta_1 L^1 \dots - \beta_q L^q$$

Nessa forma o paralelo entre modelos ARMA e ARIMA se torna mais claro.

$$y_t = \varepsilon_t \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \frac{1}{(1-L)^d} \quad (3.19)$$

O modelo ARIMA segue a metologia Box-Jenkins de modelagem, assumindo diferença-estacionariedade e tentando induzir estacionariedade por meio de sucessivas operações de diferenças. Pela discussão acima é claro que um modelo  $ARIMA(p, 0, q)$  corresponde a um modelo  $ARMA(p, q)$ .

O leitor agora reconhece o sistema da figura 22 como  $ARIMA(2, 1, 1)$ .

### 3.5 Modelos de Sazonalidade

#### 3.5.1 Diferenciação Sazonal

O operador de diferença sazonal  $\nabla_s$  estende o operador de diferenças para subtração entre elementos não adjacentes e age sob uma série temporal  $\mathbf{y}_t$  da seguinte forma:

$$\nabla \mathbf{y}_t = (1 - L^s) \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - L^s \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-s}$$

O operador mantém as propriedades da diferença simples e pode ser empregado em ordens elevadas da mesma forma:

$$\nabla_4^2 y_t = \nabla_4 \nabla_4 y_t = \nabla_4 (y_t - y_{t-4}) = y_t - 2y_{t-4} + y_{t-8}$$

#### 3.5.2 SARIMA

O modelo ARIMA pode ser estendido de forma natural para acomodar padrões de sazonabilidade. O modelo SARIMA (Seasonal ARIMA) parte da observação que saídas de sinais com alta sazonabilidade podem possuir alta correlação com saídas anteriores em uma distância correspondente ao padrão de sazonabilidade, como constatado no capítulo 1.

O modelo SARIMA então estabelece, em adição à operação de diferenciação do modelo ARIMA, uma operação de diferenciação sazonal ao definir a componente  $w_t$  da seguinte forma:

$$w_t = \nabla_s^D \nabla^d y_t$$

Como na definição de  $w_t$  para o modelo ARIMA temos uma diferenciação tradicional de ordem  $d$  seguida de uma diferenciação sazonal de período  $s$  e ordem  $D$ .

Como exemplo um  $w_t$  definido em função de  $d = 1$ ,  $D = 1$  e  $s = 24$  assume a seguinte forma.

$$w_t = \nabla_{12}^1 \nabla^1 y_t = \nabla_2^1 (y_t - y_{t-1})$$

$$w_t = (y_t - y_{t-24}) - (y_{t-1} - y_{t-25})$$

Em seguida componentes autoregressivos e de média móvel são introduzidos com atrasos em múltiplos de  $s$ . O modelo final é descrito como  $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ , com  $P$  e  $D$  referenciando os componentes  $AR$  e  $MA$  sazonais. Para ilustrar melhor essa notação podemos analisar a expressão de um modelo específico para depois generalizar.

Um modelo  $SARIMA(1,0,1)(2,1,1)_{12}$  é dado pela seguinte expressão.

$$w_t = \varepsilon_t + \overbrace{\alpha_1 w_{t-1}}^{p=1} + \overbrace{\alpha_2 w_{t-12}}^{P=1} + \overbrace{\alpha_3 w_{t-24}}^{P=2} + \overbrace{\beta_1 \varepsilon_{t-1}}^{q=1} + \overbrace{\beta_2 \varepsilon_{t-12}}^{Q=1}$$

A escrita desse modelo por meio do operador de atraso é mais clara.

$$w_t = \varepsilon_t \frac{\beta_1 L^1 + \beta_2 L^{12}}{(1 - \alpha_1 L^1 + \alpha_2 L^{12} + \alpha_3 L^{24})}$$

Podemos então generalizar o modelo na forma do operador de atraso por meio da equação 3.20.

$$w_t = \varepsilon_t \frac{\theta_q(L) \theta_Q(L)}{\phi_p(L) \phi_P(L^s)} \quad (3.20)$$

Com os polinômios de atraso definidos como nos casos anteriores.

A diferenciação sazonal inicial do modelo SARIMA é um dos exemplos mais simples de um passo essencial no processamento de séries com padrões sazonais: a modelagem

do padrão de sazonalidade em si, que de fato é um campo próprio com livros como (LADIRAY; QUENNEVILLE, 2001). Diferenciação sazonal é limitada em sua capacidade de expressar múltiplos padrões de sazonalidade. Outra forma mais flexível de modelagem de sazonalidade será abordada na subseção seguinte.

### 3.5.3 *Variáveis de Fourier*

Versões sazonais de modelos ARIMA, como SARIMA, são pouco eficientes para modelar padrões sazonais com as seguintes características:

- Múltiplas periodicidades (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018)
- Períodos múltiplos fracionários do tempo de amostragem (HYNDMAN, 2014a).
- Curto tempo de amostragem (de um dia ou inferior) (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018)
- Períodos maiores que algumas centenas do tempo de amostragem (HYNDMAN, 2014b).

Sinais elétricos quase sempre possuem as duas últimas propriedades, tornando a exploração de métodos alternativos indispensável para este trabalho.

A inclusão de variáveis de Fourier como regressores é capaz de modelar padrões sazonais como esses de forma mais flexível. Essas variáveis exógenas aos ao modelo são somas de senos e cossenos, ambos reais, que oscilam em múltiplos de uma frequência fundamental definida como a frequência do padrão sazonal que se deseja modelar.

Para modelar um padrão de período  $m$  tomamos as variáveis dadas pela série  $F_t$

$$F_t = \sum_{k=1}^K \left( \alpha_k \frac{\sin(2\pi kt)}{m} + \beta_k \frac{\cos(2\pi kt)}{m} \right)$$

onde harmônicos do período sazonal  $m$  são incluídos pelo incremento de  $k$ . Para incluir múltiplos períodos sazonais as variáveis são generalizadas para diferentes valores de  $m$  como a seguir:

$$F_t = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{K_i} \left( \alpha_{ik} \frac{\sin(2\pi k t)}{m_i} + \beta_{ik} \frac{\cos(2\pi k t)}{m_i} \right)$$

Temos alguns parâmetros não regressores:  $K$ , a ordem dos harmônicos,  $m_i$ , os períodos dos padrões que se deseja modelar.  $M$  é simplesmente o número de padrões. A determinação de  $m_i$  pode ser realizada por conhecimento a priori do fenômeno em questão ou

métodos quantitativos como análise espectral dos dados amostrais. Já  $K$  é melhor determinado por métodos de seleção de modelo como AIC e BIC (MCQUARRIE; TSAI, 1998).

A série exógena pode então ser incluída como informação auxiliar em um modelo ARIMA resultando em um modelo sazonal  $y_t$  em função de  $(p, d, q, m_i, k)$ :

$$y_t = \varepsilon_t \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \frac{1}{(1-L)^d} + F_t$$

$$y_t = \varepsilon_t \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \frac{1}{(1-L)^d} + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{K_i} \left( \alpha_k \frac{\sin(2\pi k t)}{m_i} + \beta_k \frac{\cos(2\pi k t)}{m_i} \right)$$

## 4 TEORIA ESPECTRAL UNIVARIADA

### 4.1 Análise Estacionária

Sinais estacionários no sentido amplo são, por definição (seção 2.8), sinais de potência. Como a transformada de Fourier é bem definida apenas para sinais de energia finita sinais estocásticos estacionários não possuem uma transformada de Fourier no sentido tradicional. Para desenvolver uma representação espectral desse tipo de sinal é necessário definir o conceito de densidade de potência espectral e concluir que essa função é proporcional ao quadrado da magnitude de uma transformada de Fourier hipotética.

#### 4.1.0.1 Densidade de Potência Espectral

Constatamos inicialmente o teorema de Parseval, em que  $F\{\cdot\}$  representa a transformada de Fourier

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F\{x(t)\}(\omega)|^2 d\omega$$

Estendendo essa definição para potência de sinal temos

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} |F\{x(t)\}(\omega)|^2 d\omega$$

Note que apesar de  $F\{x(t)\}$  não ser bem definida a relação acima ainda é válida se  $|F\{x(t)\}|^2$  for descrita de uma forma diferente, o que será feito em breve.

A potência de um sinal pode ser reescrita representando a transformada de Fourier de  $x(t)$  por  $X(\omega)$  como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Onde  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2T} |X(\omega)|$  é reconhecida como uma função de densidade. A função densidade de potência espectral é finalmente definida como

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2T} |X(\omega)|$$

O nome dessa função é bem informativo para sua interpretação:  $S_x(\omega)$  representa a contribuição das componentes de frequência de  $x(t)$  localizadas em  $\omega + d\omega$  para a potência do sinal como um todo. A definição de  $|X(\omega)|^2$  necessária para que essa função faça sentido é fornecida pelo teorema de Wiener-Khinchin.

#### **4.1.1 Teorema de Wiener-Khinchin**

O teorema de Wiener Khinchin pode ser desenvolvido da seguinte maneira

$$|X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega) = F(F^{-1}(X(\omega)) * (F^{-1}(X^*(\omega)))) = F(x(t) * x^*(-t)) = F(x(t) * x(-t))$$

Examinando a parte mais à direita dessa igualdade observamos que a função que está sendo transformada corresponde à convolução de  $x(t)$  com uma versão espelhada de si mesmo. Isso é precisamente a definição de autocorrelação. Assumindo ergodicidade podemos agora expressar a magnitude ao quadrado da transformada de Fourier de  $x(t)$  como a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação.

$$|X(\omega)_T|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \rho(t)e^{-j\omega t} dt$$

Esse resultado é conhecido como o teorema de Wiener-Khinchin e permite uma representação espectral bem definida para sinais estocásticos estacionários.

Note que a transformada de Fourier da autocorrelação de um sinal real é em si puramente real, propriedade consistente com nossa noção de magnitude ao quadrado.

#### **4.1.2 Espectro de um Processo ARMA**

Tomando a magnitude ao quadrado da transformada Z da forma de recorrência geral de um processo ARMA ( 3.17) obtemos a seguinte função de transferência

$$H(z) = \frac{1 + \sum_i^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_i^q a_k z^{-k}}$$

que é excitada por ruído branco de forma a gerar uma realização de um processo ARMA. Podemos agora expressar a densidade de potência espectral de um processo ARMA como

$$S_{ARMA}(\omega) = |H(z)|^2 S_\varepsilon$$

$$S_{ARMA}(\omega) = \frac{\sigma^2 |1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j\omega k}|^2}{2\pi |1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}|^2} \quad (4.1)$$

Essa definição é usada como uma forma de estimativa paramétrica de espectro: os parâmetros são inferidos no domínio do tempo e usados pela relação acima para sugerir um espectro.

Visualizaremos agora o espectro de alguns processos ARMA.

#### 4.1.2.1 MA(1)

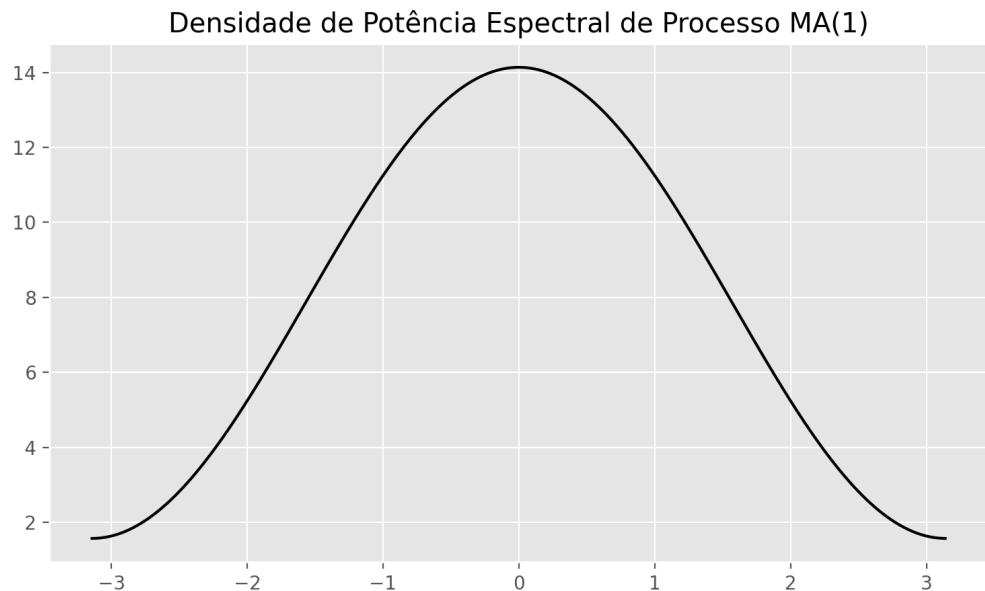


Figura 25 – Espectro de um processo MA(1) com  $\beta_1 = -0.5$

#### 4.1.2.2 AR(1)

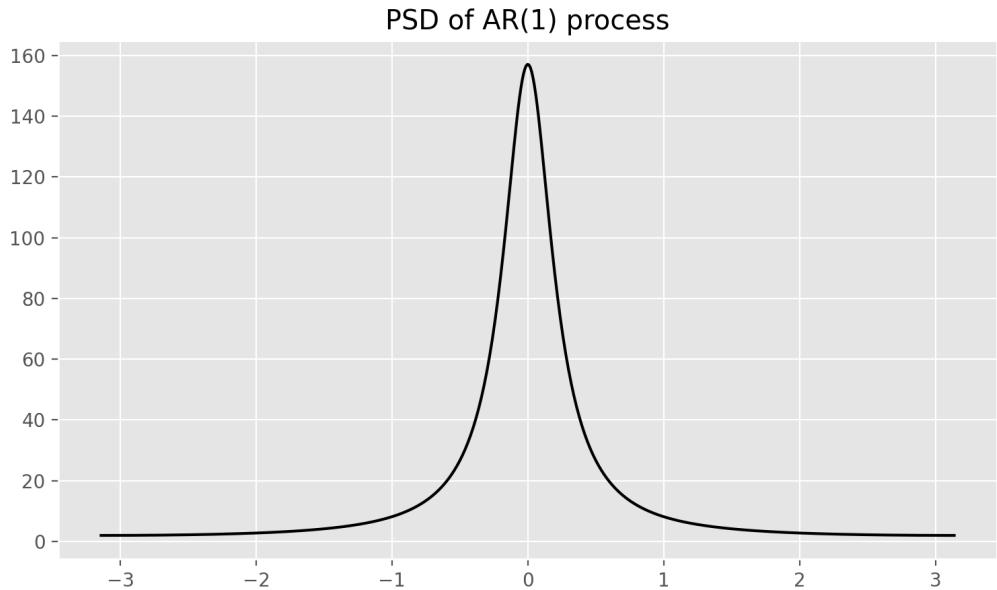


Figura 26 – Espectro de um processo AR(1) com  $\alpha_1 = 0.8$

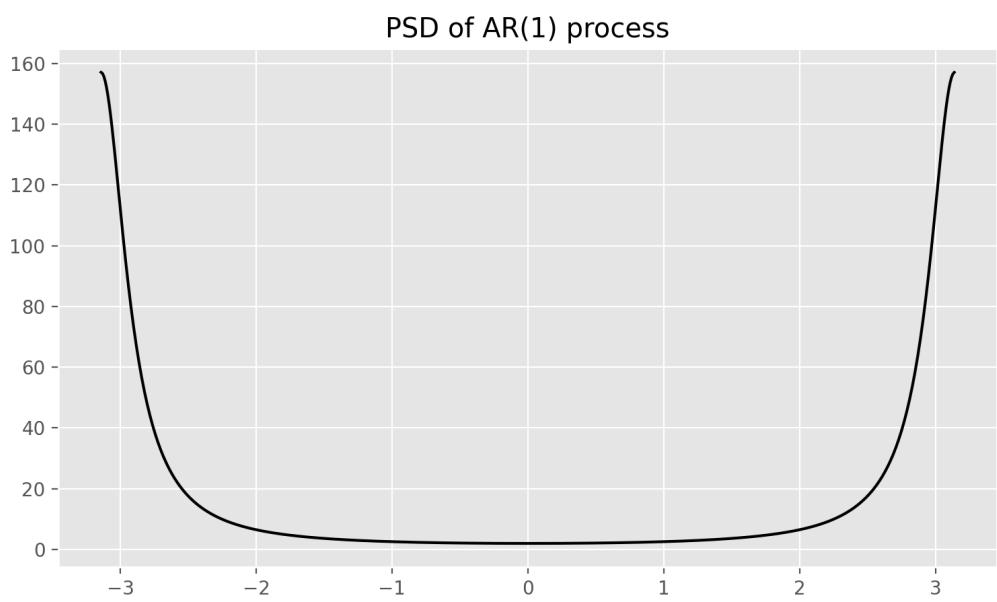


Figura 27 – Espectro de um processo AR(1) com  $\alpha_1 = -0.8$

#### 4.1.2.3 AR(2)

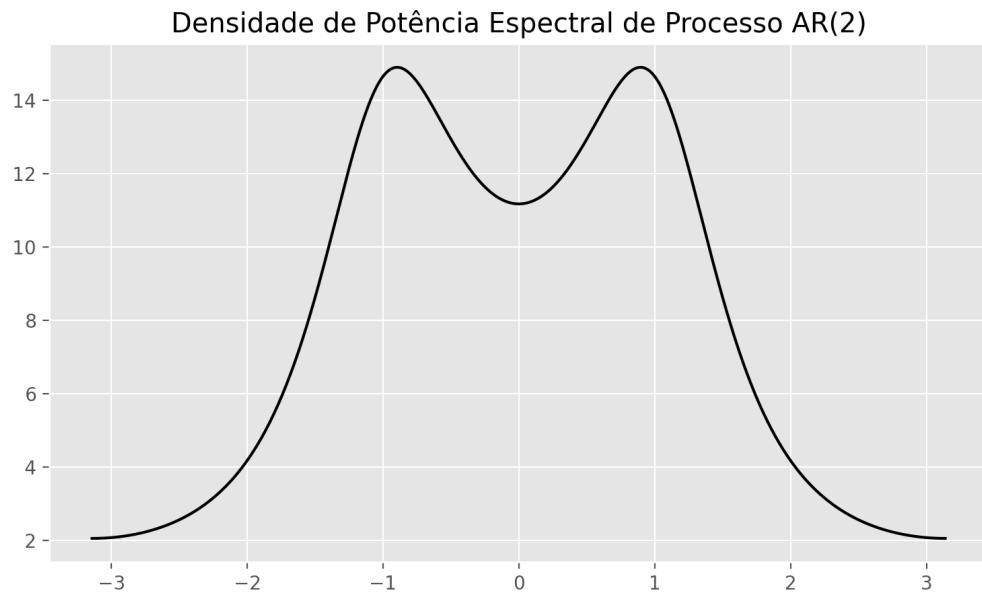


Figura 28 – Espectro de um processo AR(2) com  $\alpha_1 = 0.5$  and  $\alpha_2 = -0.25$

#### 4.1.2.4 ARMA(4, 3)

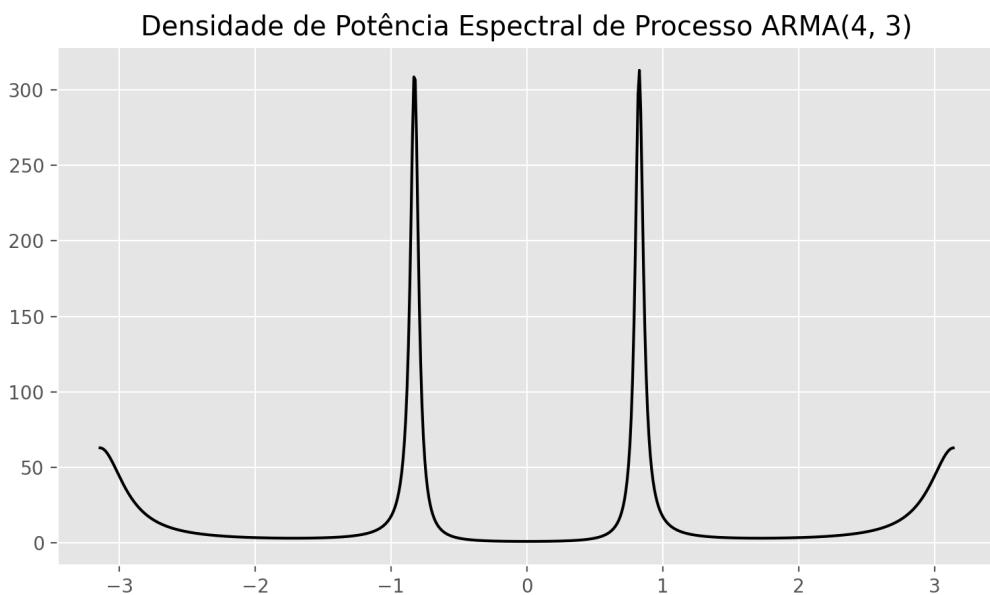


Figura 29 – Espectro de um processo ARMA(4, 3)

#### **4.1.3 Efeitos de raízes unitárias em espectros ARMA**

A introdução de raízes unitárias no polinômio de média móvel ou autoregressivo de um processo ARMA tem claros efeitos em seu conteúdo espectral, como mencionado na subseção 3.3.2. O impacto dessas operações no espectro de um processo pode ser compreendido pelas alterações resultantes ao gráfico de polos e zeros ou pela modificação da série temporal.

Uma análise do gráfico de polos e zeros de um sistema ARMA torna evidente o efeito de integração na função de transferência do sistema: um polo é introduzido em  $e^{j\omega} = 0$  de forma a fornecer energia às componentes de baixa frequência do sinal. Reciprocamente podemos compreender diferenciação, que é a introdução de um zero em  $e^{j\omega} = 0$ , como a supressão de componentes de baixa frequência, resultado em uma operação análoga à filtragem passa-altas.

No domínio do tempo o efeito de diferenciação pode ser observado comparando as figuras 19 e 23. A série diferenciada claramente tem mais energia distribuída em torno de componentes de alta frequência. Isso é de fato verdadeiro para qualquer sinal: diferenciação no domínio do tempo age de forma a enviesar o conteúdo espectral para altas frequências. O recíproco também é verdadeiro: integral um sinal tende seu conteúdo espectral para baixas frequências por meio da introdução de tendências estocásticas.

Apresenta-se agora uma versão diferenciada do espectro do processo MA(1) da figura 25. Note que o sinal passa por uma filtragem passa altas, como mencionado.

#### 4.1.3.1 MA(1) Diferenciado

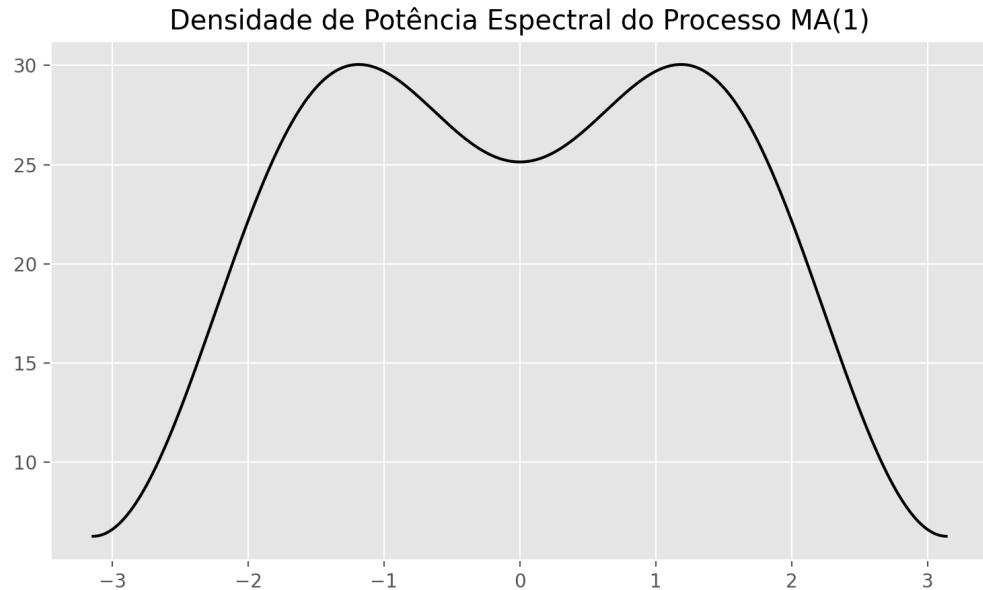


Figura 30 – Espectro de um processo MA(1) com  $\beta_1 = -0.5$  diferenciado.

## 4.2 Representações Não Estacionárias

O fato da grande maioria dos sinais produzidos por fontes reais serem não estacionários leva à necessidade de desenvolver algum tipo de representação espectral não estacionária. A densidade de potência espectral, definida pela transformada de Wiener-Khinchin, é incapaz de representar variações espetrais ao longo do tempo. Uma ideia natural para gerar uma “densidade de potência espectral variante no tempo” é tomar a transformada de Fourier de uma função de autocorrelação variante no tempo. Tal função é chamada de função de autocorrelação instantânea. A representação resultante é não linear, gerando termos cruzados prejudiciais para o objetivo da transformada.

### 4.2.1 Função de Autocorrelação Instantânea

A função de autocorrelação instantânea é, na realidade, só a função de autocorrelação de um sinal não estacionário escrita em uma forma específica. Interessantemente o termo função de autocorrelação passou a denominar uma função dependente apenas de um atraso  $\tau$ , como é o caso da autocorrelação para sinais estacionários, ao invés de uma função dependente de dois instantes no tempo  $t_1$  e  $t_2$ . Inicialmente reescrevemos a função de autocorrelação geral  $R_{xx}$  de

um sinal  $x(t)$  como

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$$

Que também pode ser escrita em função de um instante de tempo  $t$  e um atraso  $\tau$  como

$$R_x(t, \tau) = E[x(t)x(t - \tau)]$$

Que é ligeiramente mais conveniente para computações. Note que se  $x(t)$  é estacionário a dependência no tempo é removida porque  $R_{xx}$  possui o mesmo valor para todo  $t$ .

Um pequeno ajuste de notação nos leva a

$$\mathcal{R}_x(t, \tau) = E \left[ x \left( t - \frac{\tau}{2} \right) x \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

Usando um novo símbolo para indicar que enfim chegamos à função de autocorrelação instantânea  $\mathcal{R}_x$ .

Uma representação em tempo frequência agora é natural. Já que o teorema de Wiener-Khinchin afirma que o espectro de um sinal estacionário é a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação podemos de forma análoga assumir que a representação espectral de um sinal não estacionário será dado pela transformada de Fourier ao longo do eixo  $\tau$  da função de autocorrelação instantânea. Isso nos leva à distribuição de Wigner Ville.

#### 4.2.2 Distribuição de Wigner-Ville

Definimos a distribuição de Wigner-Ville (WVD) como

$$\mathcal{W}_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\mathcal{W}_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left( t - \frac{\tau}{2} \right) x \left( t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Essa representação natural pode ser considerada uma densidade de potência espectral instantânea. Sabe-se que a WVD otimiza a resolução tempo frequência (SCHOOL, 2021), uma propriedade desejável de representações tempo frequência (TFRs). Veremos agora que isso não ocorre sem problemas.

#### 4.2.2.1 Termos cruzados

Por construção a WVD é uma representação quadrática. Pelo princípio de superposição quadrática (HLAWATSCH; BOUDREAUX-BARTELS, 1992) sabemos que se  $x(t) = \mu x_1(t) + \lambda x_2(t)$  a representação WVD de  $x(t)$  é dada por

$$\mathcal{W}_x = \mu^2 \mathcal{W}_{x_1} + \lambda^2 \mathcal{W}_{x_2} + 2(\lambda\mu)^2 (\mathcal{W}_{x_1, x_2})$$

Onde  $\mathcal{W}_{z,y}$  representa a WVD cruzada entre  $x$  e  $y$ . Já que todo sinal de complexidade relevante é uma combinação linear na base de  $\cos(t)$  e  $\sin(t)$  esperamos que uma quantidade considerável de componentes cruzados seja introduzida. Esse é conhecido como o problema de termos cruzados das representações de Wigner Ville e é um dos motivos da transformada não ser a melhor escolha para grande parte de sinais reais apesar de sua ótima resolução tempo-frequência.

É conhecido que os termos cruzados possuem padrões de alta frequência (MARTINEZ-HERRERA *et al.*, 2023), levando à possibilidade de tornar a WVD mais representativa de seus auto termos por meio de filtragem. As diferentes formas possíveis e úteis de filtrar a WVD leva a um subconjunto da classe de distribuição de Cohen.

#### 4.2.3 Smoothed Pseudo Wigner Ville Distributions

A maioria dos membros da classe de distribuições de Cohen são essencialmente versões filtradas da WVD (SCHOOL, 2021). Um caso particularmente útil é conhecido como a *Smoothed Pseudo Wigner Ville Distribution* (Smoothed Pseudo Wigner Ville Distribution).

$$SPWVD(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_t(t - \tau) h_f(f - \phi) d\tau d\phi$$

em que  $h_t$  representa o filtro aplicado ao longo do tempo e  $h_f$  ao longo da frequência.

Se o projeto dos filtros for bem sucedido a supressão de termos cruzados é suficientemente bem sucedida a ponto de justificar o uso da SPWVD ao invés de métodos mais simples

de representação em tempo frequêncial.

## 5 APLICAÇÃO

### 5.1 Definição de Problema

O problema abordado é definido de maneira propositalmente vaga devido à limitações impostas por sigilo industrial.

No seguinte capítulo é realizada uma análise de correntes de motores elétricos a fim de detectar anomalias em sua operação. Na situação estudada múltiplos motores de indução são responsáveis pelo funcionamento de uma esteira industrial que transporta um produto em uma das etapas de sua fabricação. Os motores estão acoplados à mesma esteira e a corrente é medida na barra de uma de suas gaiolas. Detalhes sobre o processo de fabricação e produto em si não podem ser compartilhadas e não são particularmente interessantes para a abordagem deste trabalho, que se limita aos sinais de corrente. Basta esclarecer que em operação normal a esteira opera em velocidade constante, enquanto sob operação anômala um acúmulo indesejado do material transportado gera uma diminuição irregular de sua velocidade.

A partir dessa breve descrição do problema podemos delimitar o escopo do material utilizado na seguinte análise como exclusivamente os sinais de corrente dos motores. Nota-se que considerável progresso pode ser feito a partir de análises dos sistemas de controle de motores de indução. Quanto à fundamentação teórica, serão utilizados conceitos discutidos ao longo dos últimos capítulos.

A limitação da análise às correntes leva à necessidade da definição de um evento anômalo a nível deste sinal para que seja possível gerar algum tipo de procedimento para sua identificação. Essa definição é realizada *a priori* por meio de uma rotulação do momento em que a anomalia foi percebida pelos operadores do processo. Dessa maneira o problema pode ser considerado como supervisionado.

O desenvolvimento a seguir analisa dois grupos de intervalos de correntes correspondentes aos modos de operação normal e anômalo. Os procedimentos terão como objetivo explorar tendências indicativas dos eventos anômalos.

#### 5.1.1 *Problemas de operacionalização*

A resolução do problema abordado será desenvolvida levando em conta fatores que dificultariam a implementação de seus procedimentos em tempo real. Supondo que seja desenvolvida uma aplicação capaz de distinguir entre as classes descritas no início deste capítulo, sua

operacionalização requer que seus procedimentos sejam capazes de funcionar em tempo real e de forma contínua. Além disso sua infraestrutura deve ser interpretável, documentada e reproduzível. A partir destas considerações enumera-se três grandes problemas de operacionalização que serão abordados neste trabalho:

1. **Funcionamento em tempo real e contínuo:** Quaisquer modelos envolvidos devem não somente realizar inferência em tempo hábil mas também se adaptar a mudanças nas características dos sinais como regime de operação e conteúdo espectral.
2. **Reprodutibilidade:** A infraestrutura de processamento de sinais, fluxo de dados, modelagem e inferência deve ser absolutamente reproduzível para que a solução seja implementável e passível a manutenção ao longo do tempo.
3. **Documentação:** O código utilizado nos procedimentos envolvidos na solução devem ser apropriadamente documentados pelas mesmas motivações do ponto anterior.

A fim de endereçar cada uma dessas preocupações as seguintes considerações são estabelecidas.

#### *5.1.1.1 Funcionamento em tempo real e contínuo*

A necessidade de modelagem adaptativa sugere o uso de modelos estruturais (HARVEY, 1990), também chamados de bayesianos ou de espaço de estados, para a representação de qualquer dinâmica de interesse das séries temporais. A formulação dos modelos abordados nesse trabalho de forma estrutural permite a atualização bayesiana de seus parâmetros de acordo com novas amostras da variável prevista, essencialmente representando uma formulação *online* de modelos lineares. O algoritmo canônico para atualização dos parâmetros de um modelo estrutural é o filtro de Kalman (MAYBECK, 1990).

Em particular podem ser desenvolvidos modelos estruturais para as componentes de tendência e sazonalidade de uma série periódica. Modelos de sazonalidade estruturais exigem parametrizações mais complexas para o filtro de Kalman quando comparados aos de tendência. Como consequência, nesse trabalho será usado um modelo estrutural apenas para a tendência.

#### *5.1.1.2 Reproducibilidade*

O requisito de reproduzibilidade do *pipeline* de processamento de dados pode ser atendido por uma série de programas auxiliares. É indispensável, antes de tudo, que o código seja desenvolvida em um sistema de versionamento *git*, para que haja um claro histórico, isolamento

de tarefas e desenvolvimento incremental. A nível de infraestrutura em si é interessante que seja usado algum programa análogo ao `make`. O DVC, abreviação de *Data Version Control*, é uma aplicação que busca atender a diversas necessidades de projetos de dados, uma delas sendo justamente a estruturação de *pipelines* reproduzíveis e orientados por *Dynamic Acyclic Graphs*, semelhante ao `make`. A solução desenvolvida será então organizada como um *pipeline* DVC.

#### 5.1.1.3 Documentação

A demanda de documentação será atendida seguindo o princípio de evitar códigos em comentários (ANAYA, 2018). Usando do recurso de *docstrings* da linguagem Python, na qual a aplicação será desenvolvida, a documentação será escrita a nível de funções seguindo o padrão do projeto Sphinx (SPHINX...), no intuito de gerar um texto automaticamente a partir das *docstrings*.

#### 5.1.2 Descrição dos Dados

Os sinais representam as correntes individuais das gaiolas de dezessete motores, configurando uma série temporal multivariada. A série é sincronizada, isso é, suas amostras entre componentes distintas são realizadas em instantes idênticos no tempo.

O fornecedor dos sinais oferece duas taxas de amostragem:  $100Hz$ , representando a taxa de amostragem real dos instrumentos de medição, e  $1Hz$ , resultado de uma subamostragem do sinal original para maior facilidade de transmissão. Os sinais originais, amostrados a  $100Hz$ , não são fáceis de se obter. Como consequência o presente estudo é limitado no que tange à quantidade de dados. Uma propriedade positiva da abordagem empregada é sua validade mesmo na presença de poucos dados. Dessa forma, uma das contribuições desse trabalho é justamente a extração de padrões úteis a partir de poucos dados.

A seguinte figura ilustra um grupo de nove séries temporais sob um intervalo de tempo de três minutos em operação normal.

### Visualizações de Exemplos de Correntes

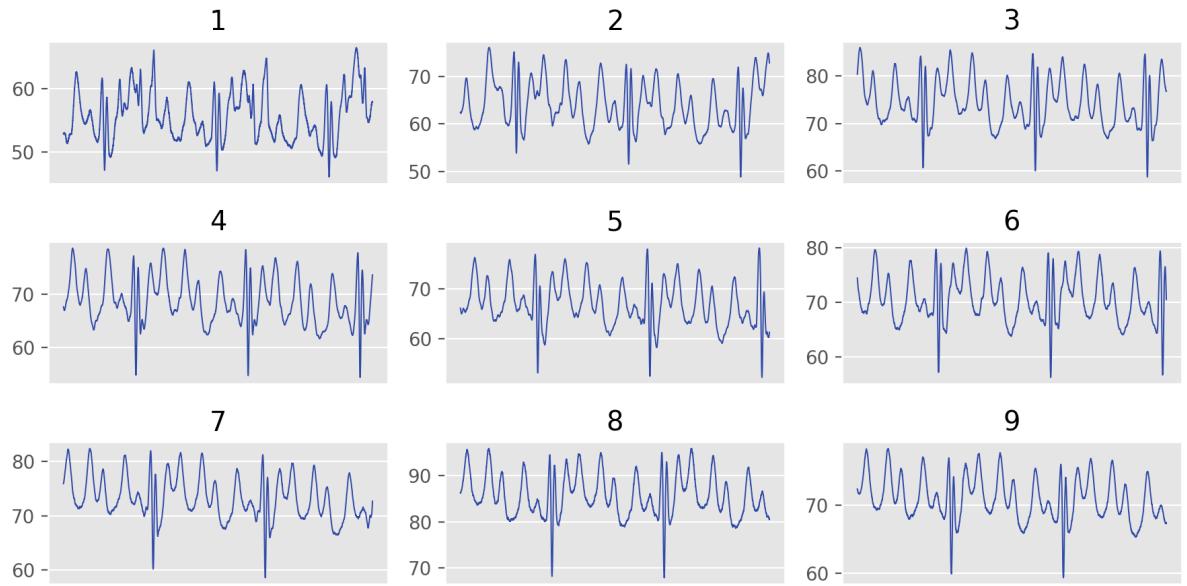


Figura 31 – Exemplo de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação normal.

Observamos pela imagem 31 que as correntes enumeradas exibem um perfil muito semelhante entre si: forte estrutura sazonal, interjeições de alta frequência em instantes semelhantes e uma tendência com pequenas variações em torno de um nível fixo. Note que a intensidade das correntes é indicada em porcentagem da intensidade máxima.

A seguinte figura é semelhante à figura 31, agora representando os três minutos antecedentes ao evento anômalo.

## Visualizações de Exemplos de Correntes sob Comportamento Anômalo

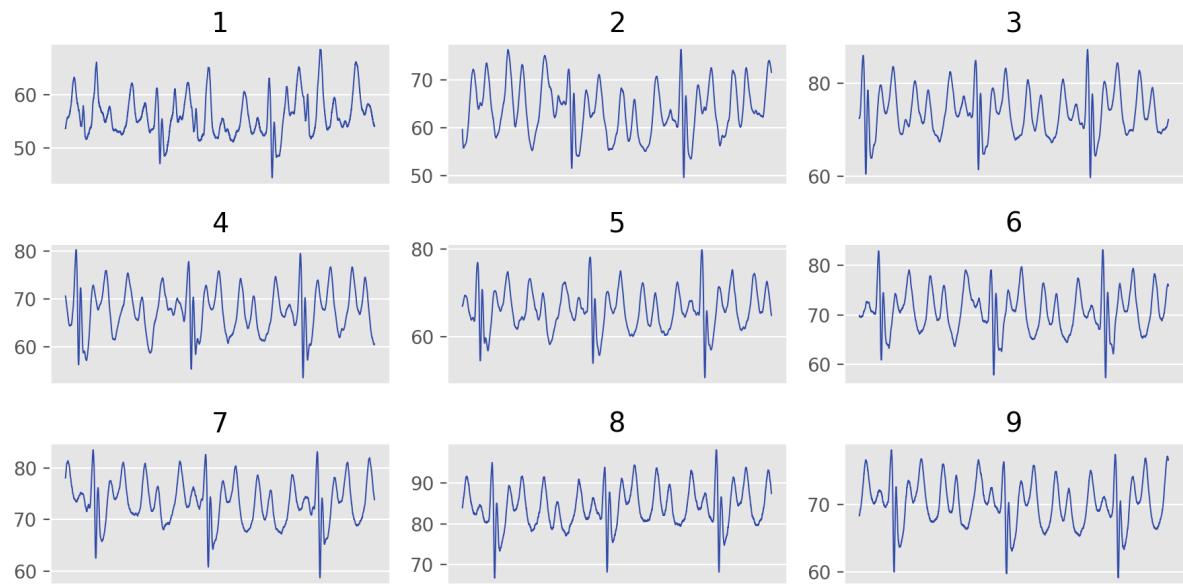


Figura 32 – Exemplo de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação anômala.

Comparando as imagens 31 e 32 é conclusivo que, no caso dessa anomalia em específico, não há sinais visuais claros de sua ocorrência.

A semelhança entre os sinais enumerados sugere que o seu uso em conjunto pode ser redundante. A seção 5.2.1 avalia essa hipótese de forma quantitativa.

Na seguinte seção a estrutura observada nos sinais será analisada em maior profundidade.

### 5.1.2.1 Sumarização

A análise será realizada em um conjunto de sinais que contém uma ocorrência de anomalia. A tabela 1 informa algumas estatísticas descritivas do sinal de um motor em regime de normalidade e em regime de anomalia. Considera-se o regime anômalo como os dez minutos anteriores ao momento registrado da anomalia.

	<b>Normalidade</b>	<b>Anomalia</b>
Média	59.13	65.86
Variância	18.17	21.56
<i>Skew</i>	0.14	-0.02
Duração	5 horas	10 minutos
Amostragem	100 Hz	100 Hz

Tabela 1 – Sumarização dos dados.

## 5.2 Análise de Propriedades das Séries Temporais

Nessa seção as propriedades de correlação cruzada, tendência e sazonalidade das séries temporais são analisadas. Por fim possíveis soluções são propostas.

### 5.2.1 Correlação Cruzada

Uma análise de correlação cruzada instantânea, isso é, desconsiderando correlações em função de atrasos, é interessante para determinar quão semelhantes os sinais são entre si de forma mais quantitativa do que a figura 31. Essa informação é útil por determinar quais séries devem ser mantidas na análise a seguir: um subconjunto com alta correlação instantânea entre si indica que seu processamento em paralelo é redundante. Além disso, o perfil de autocorrelação instantânea pode ser indicador do regime de operação: é possível que essa relação seja muito distinta entre os regimes de operação anômalos e de normalidade.

As matrizes visualizadas a seguir ilustram as correlações instantâneas entre as séries temporais em ambos os regimes de operação. As matrizes foram geradas pela amostragem uniforme de segmentos contínuos e disjuntos de dez minutos de duração das correntes. Limitado pelo número de eventos anômalos foram selecionados cinco intervalos. A estacionariedade das séries, estudada na subseção seguinte, permite que essa pequena amostra seja representativa das correlações instantâneas gerais.

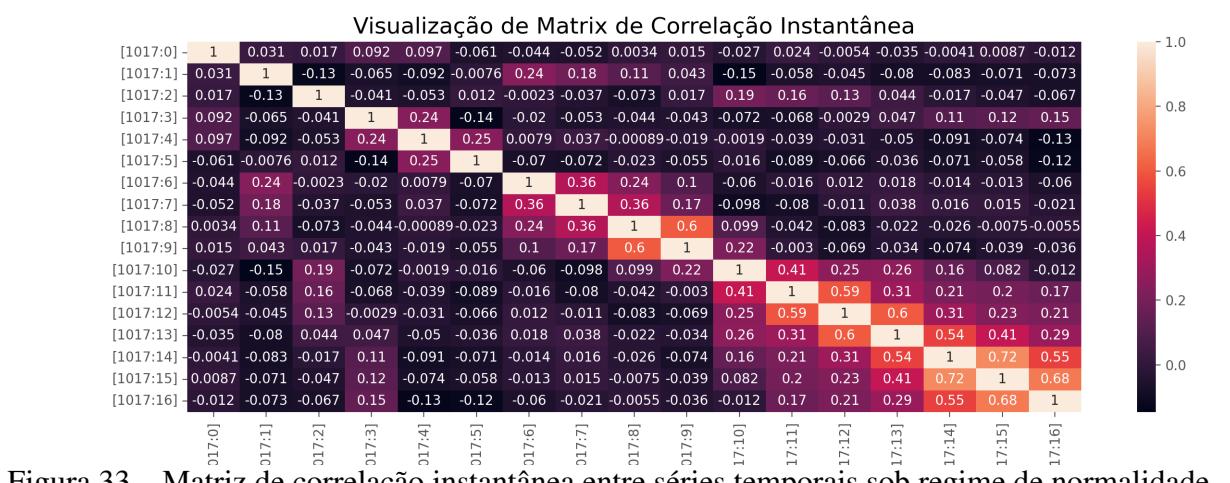


Figura 33 – Matriz de correlação instantânea entre séries temporais sob regime de normalidade.

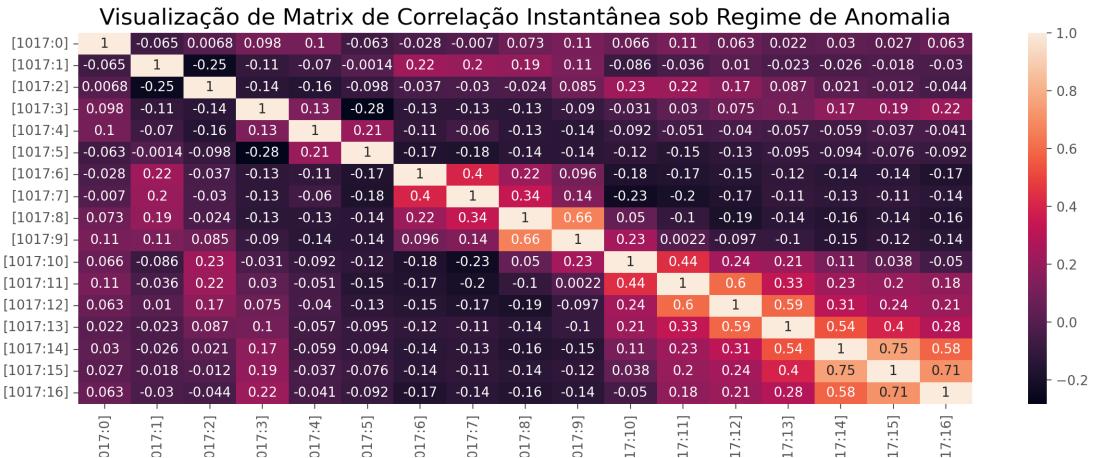


Figura 34 – Matriz de correlação instantânea entre séries temporais sob regime de anomalia.

Inicialmente observamos que em ambas as figuras há certas regiões de alta correlação que indicam grupos de sinais semelhantes entre si. Destacam-se os dois grupos formados pelas correntes enumeradas de seis a nove e de dez a dezesseis. Esses subconjuntos justificam a exclusão dos sinais enumerados sete a nove e onze a dezesseis.

Comparando as figuras 33 e 34, observamos que sob regime de anomalia há ligeiramente maior correlação cruzada entre os sinais, um primeiro sinal de diferença visível entre os dois regimes. No entanto, essa diferença não aparenta ser expressiva o suficiente para gerar algum tipo de discriminação eficiente.

### 5.2.2 Tendência

A presença de tendência para além de uma constante é evidenciada pela figura 31, característica que se mantém em quaisquer outros intervalos válidos das correntes. A figura 13 ilustra o uso do algoritmo LOESS para aproximar um padrão de tendência subjacente a um curto trecho de um dos sinais. Maneiras mais rigorosas de detectar a presença de tendência incluem testes estatísticos e análise de autocorrelação, cuja aplicação no caso presente é desnecessária devido à aparência da tendência.

### 5.2.3 Estacionariedade

A consistência na estrutura observada sugere a possibilidade de estacionariedade das séries. De fato, ao executar o teste estatístico de *Augmented Dickey Fuller* os p-valores observados são consistentemente estatisticamente indistinguíveis de zero. Essa conclusão se

repete para diversos métodos de amostragem de subsegmentos contínuos dos sinais. Note que a estacionariedade foi detectada em intervalos de quinze minutos.

Diante desses resultados, é seguro concluir que as séries são localmente estacionárias em janelas de no mínimo quinze minutos para ambos regimes. É possível que cada sinal seja globalmente estacionário (no escopo de funcionamento da planta), mas isso não será presumido nem investigado. Essa observação é essencial para vários passos das análises a seguir.

#### 5.2.4 Sazonalidade

O padrão de sazonalidade evidentemente presente nos sinais pode ser melhor inspecionado por meio de suas autocorrelações, que são constantes ao longo do tempo como consequência de estacionariedade. As figuras 35 e 36 ilustram as autocorrelações correspondentes aos sinais das figuras 31 e 32, respectivamente.

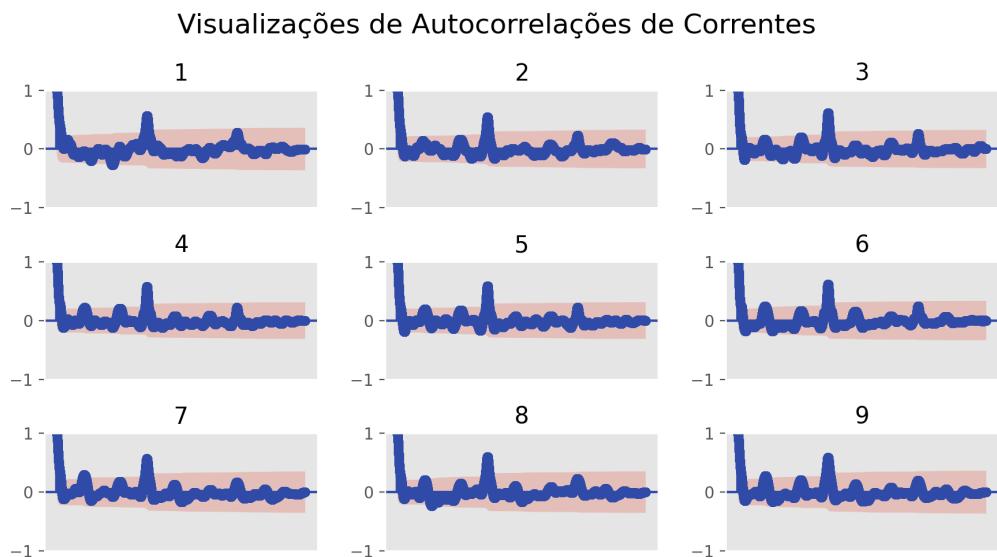


Figura 35 – Exemplo de autocorrelação de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação normal.

### Visualizações de Autocorrelações de Correntes sob Regime Anômalo

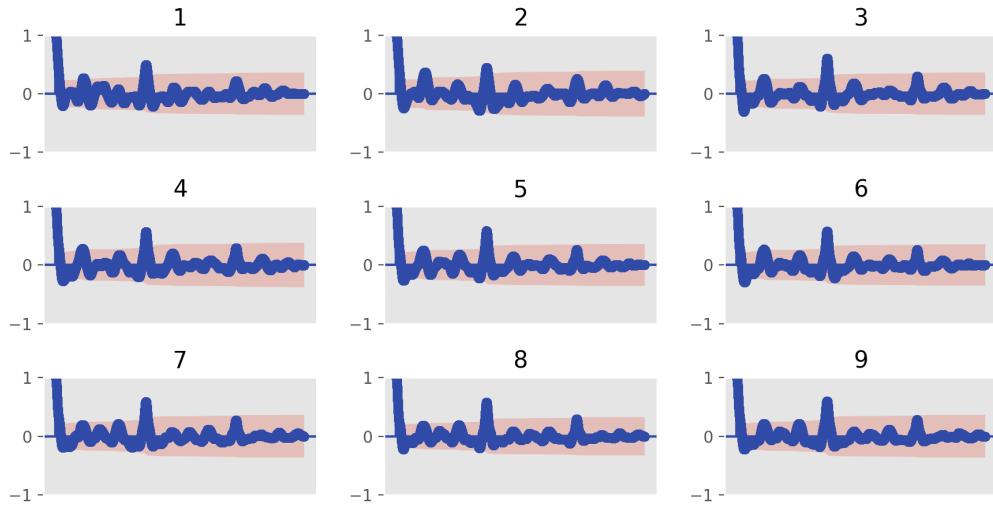


Figura 36 – Exemplo de autocorrelação de nove dos dezessete sinais de corrente em um intervalo arbitrário de três minutos em operação anômala.

As imagens demonstram um padrão sazonal coerente com o observado nos sinais no domínio do tempo, com um período grande relativo ao de amostragem. Uma comparação das imagens 36 e 35 leva à observação de que os primeiros picos de autocorrelação dos sinais em regime anômalo ocorrem ligeiramente antes. Essa característica pode ser útil para discriminar entre os dois regimes e é estudada de forma quantitativa na seção 5.4.

#### 5.2.5 Possíveis Soluções

Com as análises exploratórias realizadas anteriormente há embasamento para propor possíveis soluções. Duas propriedades que imediatamente se destacam são a presença de tendência e sazonalidade bem definidas, sugerindo a possibilidade do uso de decomposição linear (seção 3.1) de forma a melhor representar a anomalia que se deseja identificar. Nota-se que um dos principais usos de decomposição é justamente detecção de anomalia (GAO *et al.*, 2020).

Outra conclusão notável da análise conduzida é a estacionariedade das séries. Essa propriedade permite uma representação espectral simples para cada corrente, correspondente à transformada de Fourier de suas autocorrelações. O fato das autocorrelações de sinais em regime anômalo apresentarem picos em um número inferior de atrasos pode refletir em um conteúdo espectral mais enviesado para altas frequências, gerando uma *feature* discriminativa.

Dessa forma delimitam-se duas tentativas de detecção do regime de anomalia:

1. Exposição de algum padrão evidentemente anômalo por meio de decomposição linear
2. Uso de representação em frequência como característica discriminativa

### **5.3 Decomposição Linear**

Conforme estabelecido, há motivação para utilizar decomposição linear em uma tentativa de extrair sinais mais evidentes do comportamento anômalo nas séries temporais, devido à estrutura fortemente sazonal presente nas séries sob análise e uma visível tendência.

A modelagem de tendência será realizada por meio de um simples modelo estrutural com nativa capacidade de adaptação via filtro de Kalman. A modelagem da sazonalidade será realizada pelo método do padrão médio devido ao “custo benefício” associado à sua simplicidade e eficiência, considerando que a frequência do padrão sazonal não varia o suficiente para justificar o uso de um modelo estrutural como no caso da tendência. Note que a estacionariedade da série permite que o padrão extraído seja utilizado por um intervalo não desprezível de tempo. À medida que o padrão inevitavelmente se desatualizar devido a variações na frequência é possível calculá-lo novamente. Um mecanismo de reajuste do modelo sazonal será então desenvolvido a partir de um gatilho de erro. Por fim os resíduos da decomposição serão analisados essencialmente como uma nova versão da série original. A expectativa é que estes resíduos sejam muito mais representativos dos regimes de normalidade e anomalia.

As séries serão modeladas de forma individual na esperança que seja possível expor a anomalia a partir de uma única série, logo os modelos desenvolvidos são univariados.

#### **5.3.1 Modelagem de Tendência**

O modelo estrutural assumido para a tendência é conhecido como modelo de nível local, com equações de estado e saída dadas por 5.1 e 5.2. Nota-se que as inovações  $\eta_t$  e  $\varepsilon_t$  são independentes e identicamente distribuídas por distribuições normais centradas em zero com variância  $\sigma_\eta^2$  e  $\sigma_\varepsilon^2$  respectivamente.

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t \quad (5.1)$$

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (5.2)$$

O filtro de Kalman é usado para estimar a tendência ao longo do sinal.

O estado inicial será definido com média correspondente à média do sinal cuja tendência será modelada e variância unitária. As matrizes de covariância de transição e saída são, devido ao fato do modelo ser univariado, escalares. Esses valores são definidos como unitários.

Define-se por fim  $\sigma_\eta^2 = 1^{-7}$  e  $\sigma_e^2 = 1$ .

A modelagem da tendência de um segmento de sinal arbitrário por meio destas especificações é ilustrada pela figura 37. Nota-se que o sinal é transformado por um filtro médio móvel com janela de 50 amostras antes de ser submetido à estimativa do filtro de Kalman, a fim de garantir que as atualizações realizadas pelo filtro sejam robustas ao ruído de alta frequência.

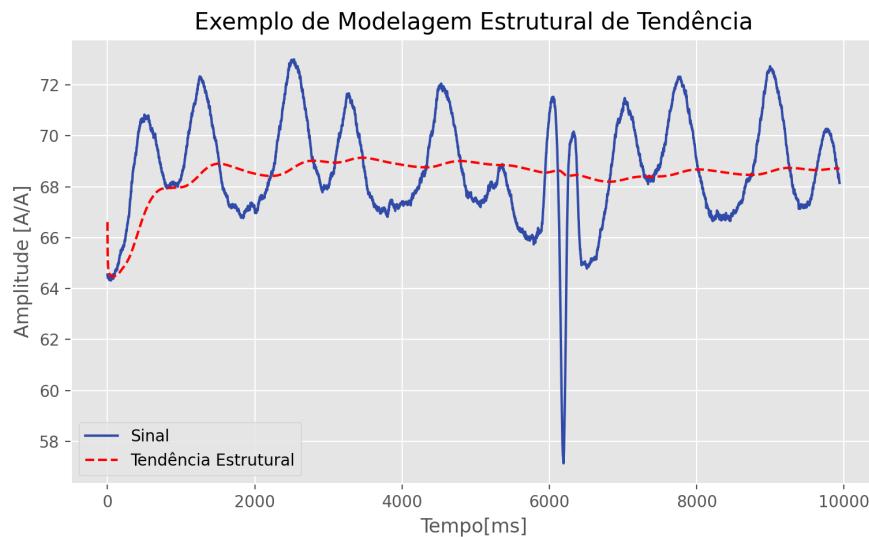


Figura 37 – Exemplo de modelagem de tendência via modelo de nível local e filtro de Kalman

O uso do filtro de Kalman permite que novas amostras sejam incorporadas em tempo real para que a estimativa da tendência seja realizada de forma *online*.

### 5.3.2 *Modelagem de Sazonalidade*

A abordagem para modelagem de sazonalidade será o cálculo do padrão sazonal médio, conforme a seção 3.1.2. Essencial para o funcionamento desse método é a determinação correta do período do padrão sazonal. É indispensável que esse valor seja determinado de forma automática pela multiplicidade de séries temporais e pela necessidade de contínuo cálculo de padrões sazonais. A forma mais direta de obter esse valor é pelo número de atrasos necessários para a função de autocorrelação atingir seu primeiro máximo local, como ilustrado pela figura 38.

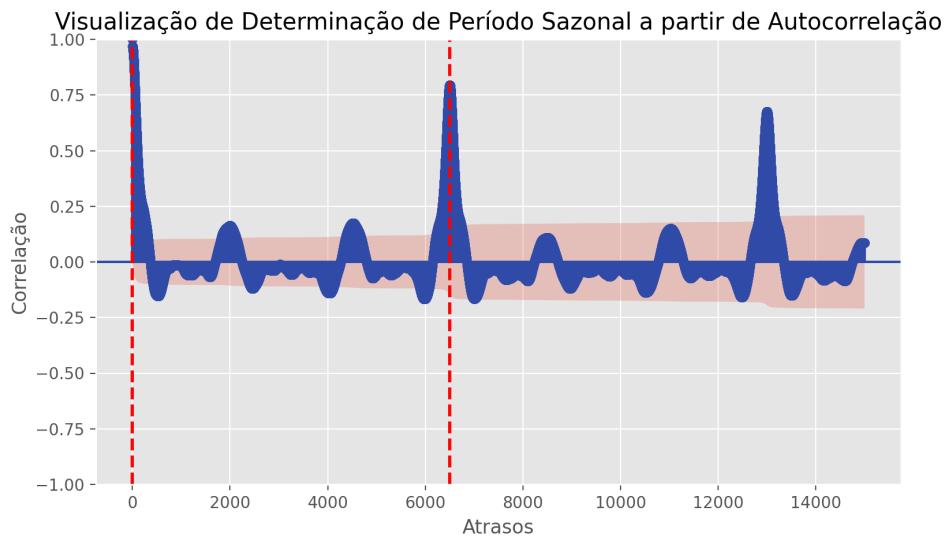


Figura 38 – Perfil de autocorrelação de uma janela arbitrária de dez minutos de operação normal. O intervalo entre as linhas vermelhas horizontais corresponde ao período do padrão sazonal.

Extraído este valor é possível prosseguir com a determinação do padrão sazonal. A imagem 39 ilustra o cálculo do padrão sazonal médio. As linhas em vermelho representam os segmentos do sinal resultantes de sua partição em trechos de comprimento correspondente ao período sazonal encontrado e o sinal preto representa o padrão sazonal médio entre os sinais em vermelho. A componente sazonal é então gerada pela sucessiva concatenação do padrão encontrado.

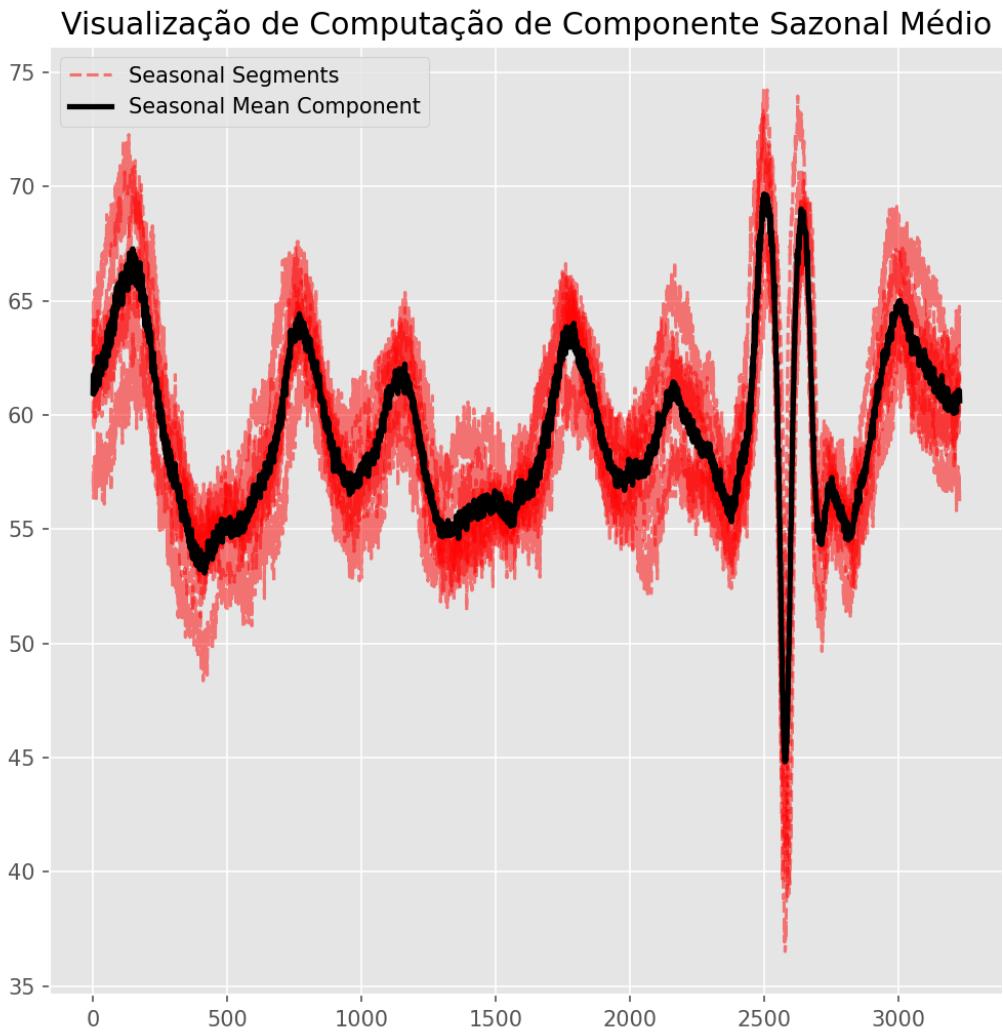


Figura 39 – Visualização de computação de padrão sazonal médio.

A modelagem de tendência e sazonalidade essencialmente conclui o processo de decomposição. O produto deste procedimento, denominado por resíduos, resulta da subtração destas componentes do sinal original.

### **5.3.3 Análise de Resíduos**

Finalizado o processo de decomposição são obtidos os resíduos. A decomposição de um trecho arbitrário de um sinal específico correspondendo à oito minutos de normalidade é visualizada pela figura 42 onde, de cima para baixo, observamos o sinal original, tendência, sazonalidade e resíduos. A figura 44 ilustra apenas os resíduos juntamente de sua autocorrela-

ção. Observamos que há permanência de estrutura nos resíduos, especificamente de algumas interjeições de alta frequência, mas que de forma geral o sinal se aproxima mais a um perfil de autocorrelação de ruído branco do que inicialmente.

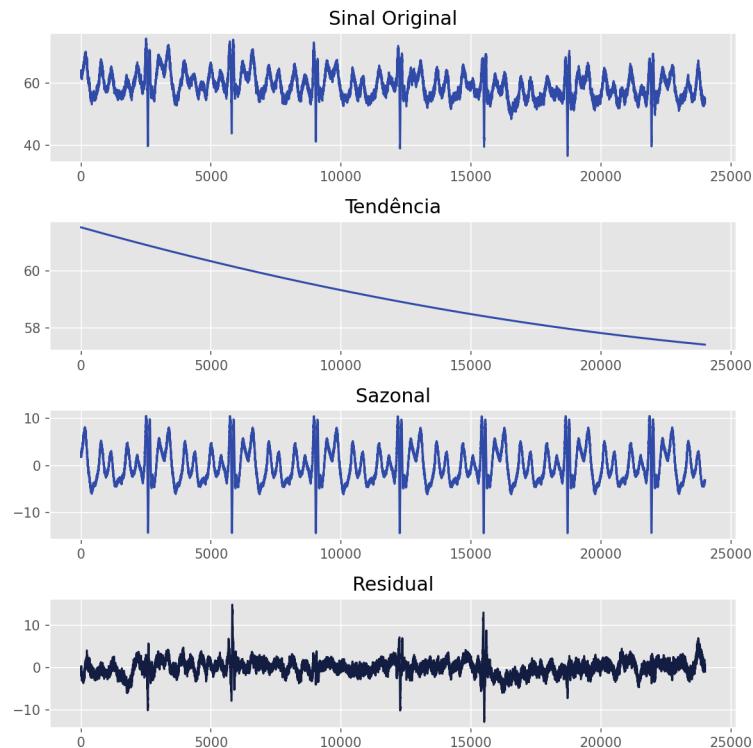


Figura 40 – Visualização de decomposição linear de um trecho de oito minutos de sinal em regime de normalidade.

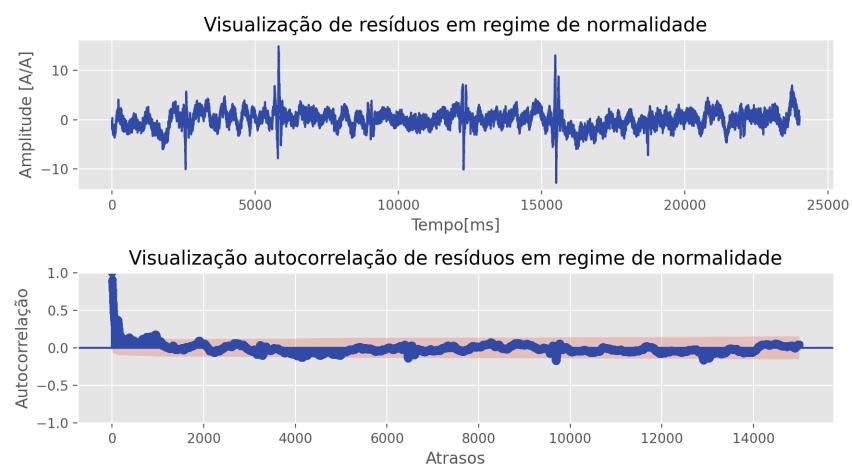


Figura 41 – Visualização de resíduos de um segmento de oito minutos de sinal em regime de normalidade juntamente de sua autocorrelação.

Podemos realizar visualizações identicamente análogas para um trecho de oito minutos em regime anômalo, resultando nas figuras 43 e 42. Observamos que, conforme

desejado, a presença da anomalia se torna evidente por meio de um padrão nos resíduos. No caso dessa anomalia em específico este padrão é uma forte tendência ou, de forma equivalente, em uma autocorrelação com valores altos que lentamente decaem.

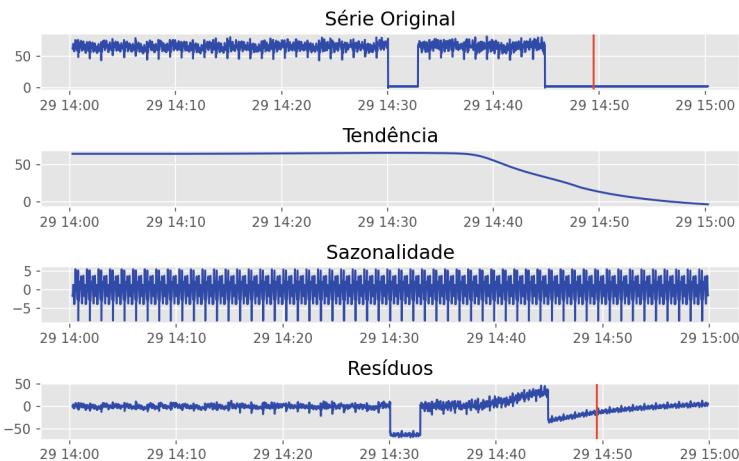


Figura 42 – Visualização de decomposição linear de um trecho de oito minutos de sinal em regime de anomalia. A linha horizontal vermelha indica o momento de ocorrência da falha.

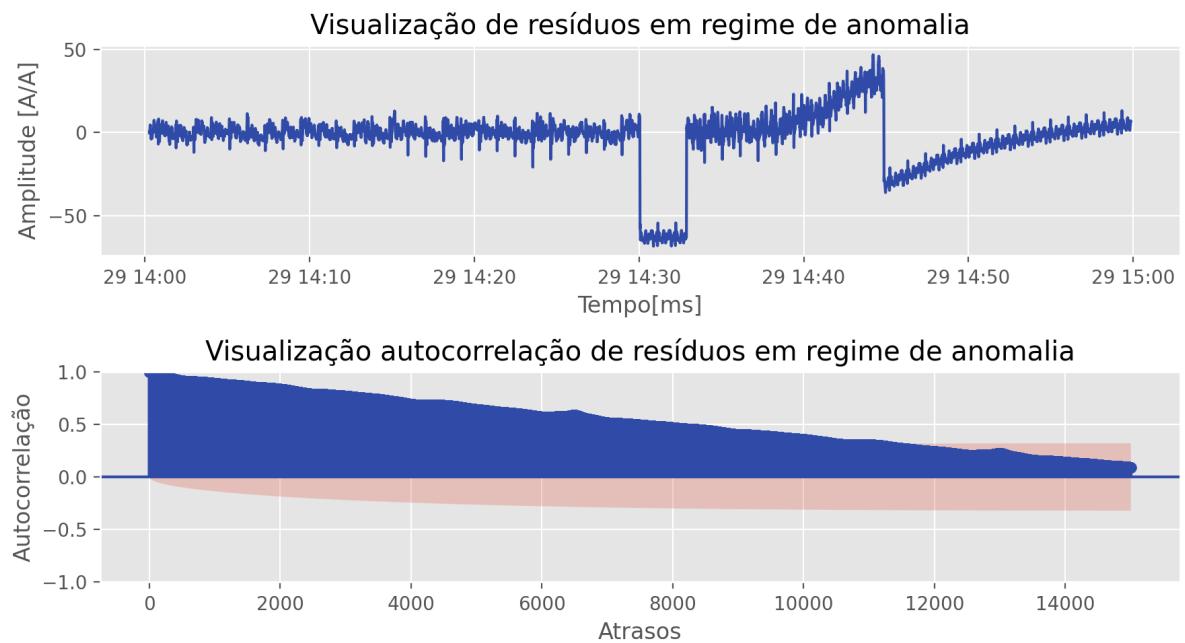


Figura 43 – Visualização de resíduos de um segmento de oito minutos de sinal em regime de anomalia juntamente de sua autocorrelação.

O objetivo intermediário de obter um sinal mais representativo da presença de uma anomalia foi atingido. A fim de de fato detectar a anomalia há a necessidade do emprego de algum tipo de algoritmo com esse objetivo.

### 5.3.3.1 Detecção de Anomalia

A força da tendência presente nos resíduos resultantes da decomposição linear do sinal anômalo sugere a possibilidade de usar a inclinação da reta resultante de uma regressão linear realizada sob uma janela fixa como um indicador de anomalia. Uma anomalia seria então acusada quando a inclinação da reta ultrapassar um valor manualmente determinado. Nota-se que logo antes da ocorrência da tendência há uma trecho do sinal que apresenta média consideravelmente inferior a de suas redondezas, de forma que a aplicação do algoritmo proposto resultaria na detecção de uma anomalia ao retomar a tendência anterior. Esse trecho do sinal representa um outro regime de operação rotulado, isso é, cuja ocorrência é conhecida. A fim de evitar o falso positivo decorrente da presença desse outro regime de operação o algoritmo proposto ignora a transição entre regimes rotulados.

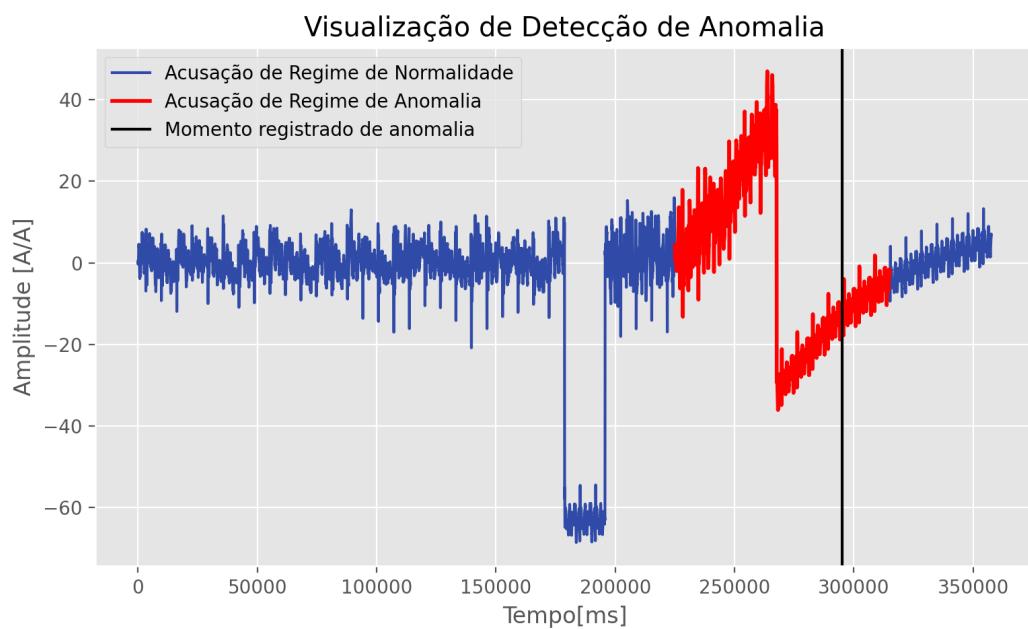


Figura 44 – Visualização de aplicação do algoritmo de detecção de anomalias nos resíduos da decomposição linear de um trecho anômalo.

Como observado na figura acima a aplicação do algoritmo é bem sucedida na detecção dessa anomalia específica.

### 5.3.3.2 Detecção de Anomalia Multivariada

O processo anterior foi realizado de forma univariada e os resultados comunicados por meio de seus resultados em uma série específica. A eficiência do algoritmo de detecção

usando apenas esta série demonstra que o uso do conjunto completo ou parcialmente completo das correntes pode ser redundante.

A solução desenvolvida executa os procedimentos em todas as séries, no entanto. O resultado da decomposição é visualizada para múltiplas séries por meio da figura 45. Observa-se que em todas as correntes visualizadas houve o surgimento da tendência sinalizadora da anomalia.

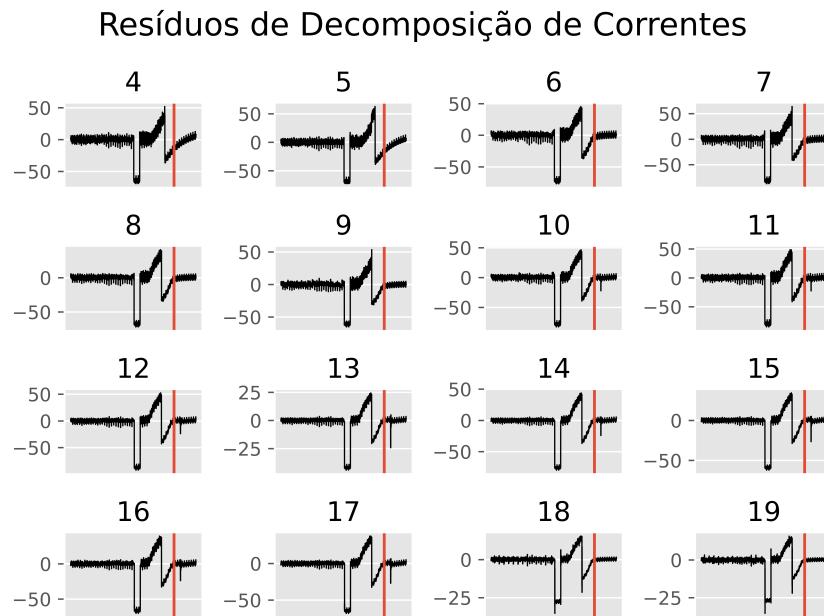


Figura 45 – Visualização de aplicação do algoritmo de decomposição para múltiplas correntes.

Os resultados sugerem que, na prática, um conjunto pequeno ou até mesmo uma única corrente pode ser usada para a detecção de anomalia.

#### 5.4 Análise Espectral

A estacionariedade local dos sinais de corrente permite que sejam computadas suas densidades de potência espectral. Como na seção anterior serão visualizadas essas funções para janelas em regimes de anomalia e normalidade na expectativa de gerar uma característica discriminativa. Em seguida uma breve análise linear de tempo frequência será realizada.

A figura 46 ilustra os segmentos de sinais de normalidade e anomalia que serão analisados. Como já constatado, não há diferença visível entre os sinais.

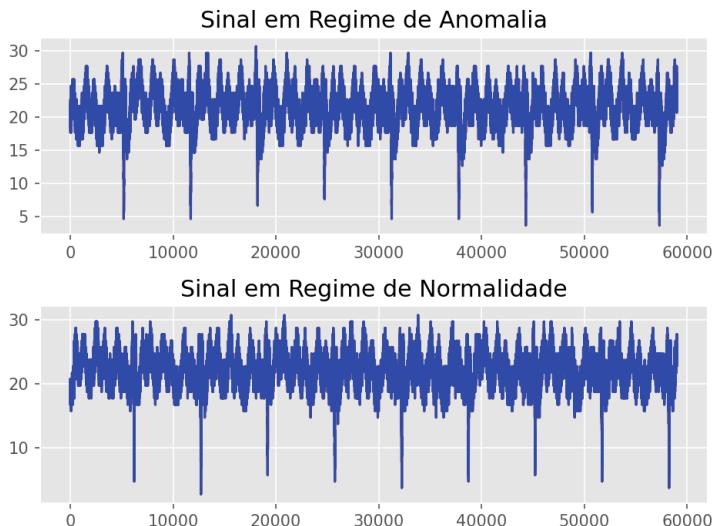


Figura 46 – Visualização no tempo de sinais analisados em frequência.

#### **5.4.1 Densidade de Espectro de Potência**

A figura 47 ilustra uma comparação das funções de densidade de espectro de potência dos sinais ilustrados pela figura 46. Essas funções foram estimadas pelo método de Welch (JWO *et al.*, 2021). Observa-se pouca diferença entre as densidades, além de um aparente viés do sinal anômalo para distribuição de potência em altas freqüências.

É possível que a janela de observação de dez minutos utilizada seja grande demais para capturar a variação local de freqüência dos sinais. Nesse caso se torna necessário a utilização de um método capaz de representar o conteúdo espectral dos sinais de forma variável ao longo do tempo.

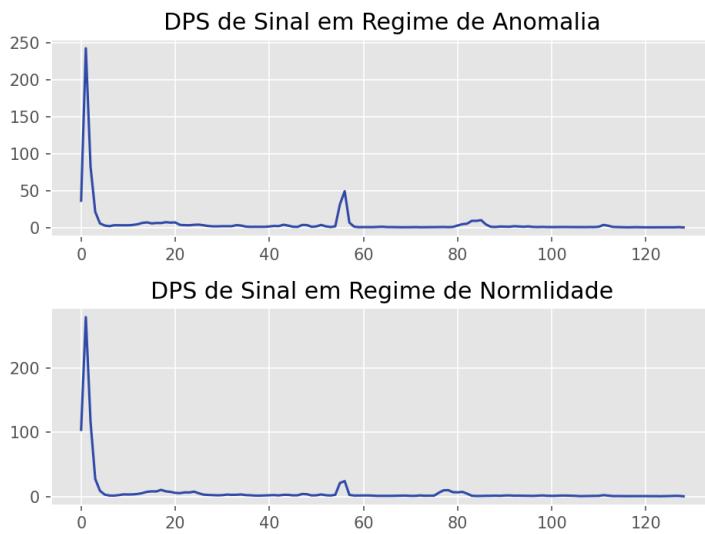


Figura 47 – Visualização comparativa de densidade de potência espectral de sinais em regime de normalidade e anomalia.

#### 5.4.2 Espectrograma

Uma forma natural de analisar a variação temporal instantânea do conteúdo dos sinais é por meio de um espectrograma. A figura 48 visualiza os espectrogramas dos sinais da figura 46. Observa-se que, como nos resíduos do sinal decomposto, há visível tendência na distribuição do conteúdo espectral do sinal anômalo. A extração de alguma característica espectral pode ser útil para detectar a anomalia. A figura 49 visualiza o cálculo do valor máximo de cada *frame*, sugerindo que esta característica pode ser discriminativa.

Gerada uma característica representativa da anomalia no domínio da frequência é necessário usá-la para a tarefa de detecção. Como a exposição da anomalia se deu por meio de uma tendência o algoritmo proposto na seção 5.3.3.1 pode ser empregado a este fim. Alternativamente algoritmos de classificação de imagem como redes neurais convolucionais(O'SHEA; NASH, 2015) podem ser usadas a partir de qualquer representação tempo frequência. Nenhuma desses métodos e detecção serão empregados nos espectrogramas produzidos.

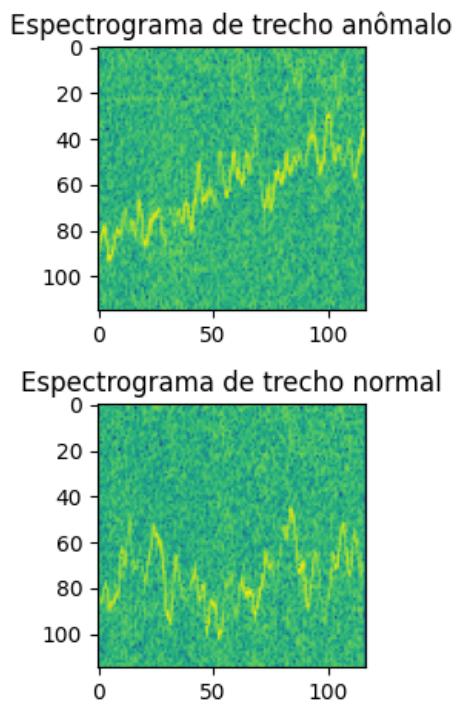


Figura 48 – Visualização comparativa de espectrogramas de sinais em regime de normalidade e anomalia.

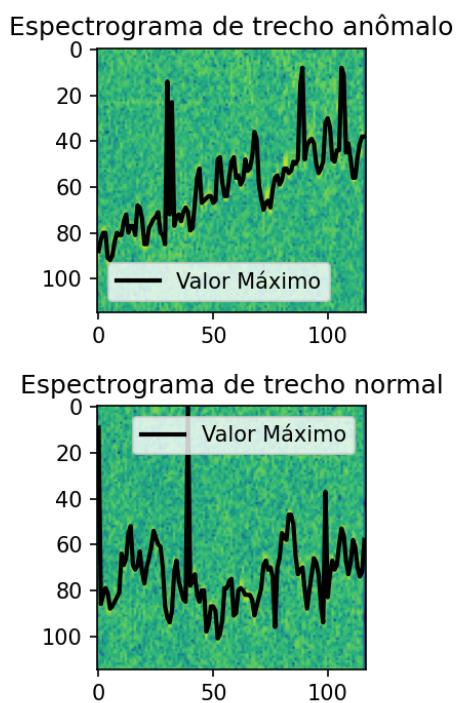


Figura 49 – Visualização comparativa valor máximo dos *frames* de espectrogramas de sinais em regime de normalidade e anomalia.

## **6 CONCLUSÃO**

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas. Técnicas Lineares e não Lineares Aplicadas a Sistemas. Teoria e Aplicação.** [S.l.]: UFMG, 2015.
- ANAYA, M. **Clean Code in Python: Refactor your legacy code base.** [S.l.]: Packt Publishing Ltd, 2018.
- ATHANASOPOULOS, G.; HYNDMAN, R. **Forecasting: Principles and Practice.** [S.l.]: O'Reilly, 2018.
- BENDAT, J.; PIERSOL, G. **Random Data Analysis and Measurement Procedures.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2000.
- BIANCIONINI, S. **Seasonal Adjustment Methods and Real Time Trend-Cycle Estimation.** [S.l.]: Springer, 2016.
- BOX, G.; JENKINS, G. **Time Series Analysis: Forecasting and control.** [S.l.]: Wiley, 2016.
- CHATFIELD, C.; XING, H. **The Analysis of Time Series: An introduction with r.** [S.l.]: CRC Press, 2019.
- GAO, J.; SONG, X.; WEN, Q.; WANG, P.; SUN, L.; XU, H. Robust time series anomaly detection via decomposition and convolutional neural networks. **arXiv preprint arXiv:2002.09545**, 2020.
- HAMILTON, J. **Time Series Analysis.** [S.l.]: Princeton University Press, 1994.
- HARVEY, A. C. Forecasting, structural time series models and the kalman filter. Cambridge university press, 1990.
- HLAWATSCH, F.; BOUDREAUX-BARTELS, G. F. Linear and quadratic time-frequency signal representations. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1992.
- HYLLEBERG, S. **Modelling seasonality.** [S.l.]: Oxford University Press, 1992.
- HYNDMAN, R. **Forecasting Weekly Data.** 2014. Available at: <<https://robjhyndman.com/hyndts/longseasonality/>>.
- HYNDMAN, R. **Forecasting with long seasonal periods.** 2014. Available at: <<https://robjhyndman.com/hyndts/longseasonality/>>.
- JWO, D.-J.; CHANG, W.-Y.; WU, I.-H. Windowing techniques, the welch method for improvement of power spectrum estimation. **CMC-Computers Materials & Continua**, TECH SCIENCE PRESS, 2021.
- LADIRAY, D.; QUENNEVILLE, B. **Seasonal Adjustment with the X-11 method.** [S.l.]: Springer, 2001.
- MARTINEZ-HERRERA, A. L.; LEDESMA-CARRILLO, L. M.; FERRUCHO-ALVAREZ, E. R.; LOPEZ-RAMIREZ, M.; RODRIGUEZ-DONATE, C.; CABAL-YEPEZ, E. Tunable hyperbolic cohen-class kernel for cross-term diminishing in time–frequency distributions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 186, p. 109850, 2023.

MAYBECK, P. S. The kalman filter: An introduction to concepts. **Autonomous robot vehicles**, Springer, p. 194–204, 1990.

MCQUARRIE, A. D.; TSAI, C.-L. **Regression and time series model selection**. [S.l.]: World Scientific, 1998.

MORETTIN, P. A. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. [S.l.]: Editora Blucher, 2017.

O'SHEA, K.; NASH, R. An introduction to convolutional neural networks. **arXiv preprint arXiv:1511.08458**, 2015.

SCHOOL, S. Fourier, gabor, morlet or wigner: Comparison of time-frequency transforms. **arXiv**, 2021.

SPHINX Project. Available at: <<https://www.sphinx-doc.org/en/master/>>.

STOFFER, R. S. D. **Time Series Analysis and Its Applications**. [S.l.]: Springer, 2017.

WOLD, H. **A Study In the Analysis of Stationary Time Series**. [S.l.]: Alqvist & Wiskell, 1954.