



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
CENTER OF WHAT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA
UNDERGRADUATE COURSE IN ELECTRICAL ENGINEERING

GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES

PROCESSAMENTO E REPRESENTAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS
MULTIVARIADAS E NÃO ESTACIONÁRIAS

BELO HORIZONTE

2023

GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES

PROCESSAMENTO E REPRESENTAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS MULTIVARIADAS E
NÃO ESTACIONÁRIAS

Undergraduate Thesis submitted to the Electrical Engineering Course of the Center of What of the Universidade Federal de Minas Gerais, as a partial requirement for obtaining the Bachelors Degree in Electrical Engineering.

Advisor: Prof. Dr. Frederico Gualberto Coelho

Co-advisor: Prof. Dr. ?

BELO HORIZONTE

2023

GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES

PROCESSAMENTO E REPRESENTAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS MULTIVARIADAS E
NÃO ESTACIONÁRIAS

Undergraduate Thesis submitted to the Electrical Engineering Course of the Center of What of the Universidade Federal de Minas Gerais, as a partial requirement for obtaining the Bachelors Degree in Electrical Engineering.

Approved on: 31th August 2023

EXAMINATION BOARD

Prof. Dr. Frederico Gualberto Coelho (Advisor)
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. ? (Co-advisor)
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Antônio de Pádua Braga

ACKNOWLEDGEMENTS

Obrigado !

“ Alice sighed wearily. ‘I think you might do something better with the time,’ she said, ‘than waste it in asking riddles that have no answers.’ ‘If you knew time as well as I do,’ said the Hatter, ‘you wouldn’t talk about wasting it. It’s him.’ ‘I don’t know what you mean,’ said Alice. ‘Of course you don’t!’ the Hatter said, tossing his head contemptuously. ‘I dare say you never even spoke to Time!’ ‘Perhaps not,’ Alice cautiously replied, ‘but I know I have to beat time when I learn music.’ ‘Ah! That accounts for it,’ said the Hatter. ‘He won’t stand beating.’ ”

(Lewis Carrol, *Alice’s Adventures in Wonderland*)

ABSTRACT

Abstract here.

Keywords: Time series analysis, Discrete-time signal processing, Machine learning, Frequency analysis.

RESUMO

Resumo

Palavras-chave: Análise de Séries Temporais, Processamento de Sinais de Tempo Discreto, Aprendizado de Máquina, Análise em Frequência

LIST OF FIGURES

Figure 1 – Visualização no tempo de ruído branco	17
Figure 2 – Série temporal com tendência linear	20
Figure 3 – Série temporal com tendência logarítmica	20
Figure 4 – Série temporal com sazonalidade senoidal de período arbitrário	21
Figure 5 – Série temporal com sazonalidade multiplicativa	21
Figure 6 – Visualização de correlalograma de série com tendência linear. Observe que as autocorrelações decaem lentamente ao decorrer dos atrasos, comportamento típico de tendências determinísticas.	24
Figure 7 – Visualização de correlalograma de série com sazonalidade. Observe que o padrão senoidal da série é reproduzido nas autocorrelações.	24
Figure 8 – Sinal periódico imerso em ruído e sua correspondente autocorrelação.	25
Figure 9 – Conjunto de séries demonstrando diferentes níveis de estacionariedade.	26
Figure 10 – Visualização de caminhada aleatória com $y_0 = 5$	29
Figure 11 – Visualização de aplicação de filtro média móvel com $m=15$	35
Figure 12 – Visualização no tempo de processos média móvel de ordens diferentes.	41
Figure 13 – Visualização do correlalograma de processos média móvel de ordens diferentes.	42
Figure 14 – Visualização de processos autoregressivos de diferentes ordens no domínio do tempo.	44

LIST OF TABLES

LIST OF SYMBOLS

ω Frequência angular

ρ Autocorrelação

CONTENTS

	Contents	10
1	INTRODUÇÃO	13
2	DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	15
2.1	Processo Estocástico	15
2.2	Série Temporal	16
2.3	Operador de Atraso(Lag)	17
2.4	Operador de Diferença	19
2.5	Tendência(Trend)	19
2.6	Sazonalidade	20
2.7	Autocorrelação	22
2.7.1	<i>Autocorrelação Parcial</i>	23
2.7.2	<i>Correlalograma</i>	23
2.8	Estacionariedade	25
2.8.1	<i>Importância de Estacionariedade</i>	27
2.8.2	<i>Categorias Básicas de Não Estacionariedade</i>	28
2.9	Ruído Branco	31
3	TEORIA UNIVARIADA	32
4	ANÁLISE CLÁSSICA DE SÉRIES TEMPORAIS UNIVARIADAS . . .	33
4.1	Decomposição de Séries Temporais	33
4.1.1	<i>Modelagem de Tendência</i>	34
4.1.1.1	<i>Média Móvel</i>	34
4.1.1.2	<i>Regressão Localizada/Filtro de Savitzky-Golay</i>	35
4.1.2	<i>Modelagem de Sazonalidade(Ajuste de Sazonalidade)</i>	36
4.1.3	<i>Decomposição Clássica (Aditiva)</i>	36
4.1.3.1	<i>Passo 1</i>	37
4.1.3.2	<i>Passo 2</i>	37
4.1.3.3	<i>Passo 3</i>	37
4.1.3.4	<i>Passo 4</i>	37
4.1.3.5	<i>Passo 5</i>	38
4.1.4	<i>Decomposição STL</i>	38
4.1.5	<i>Quantificação de tendência e sazonalidade</i>	38

4.1.5.1	<i>Força</i>	38
4.1.6	<i>Definição de Problema</i>	39
4.1.7	<i>Exemplo de Decomposição</i>	39
4.2	Modelos Estacionários	40
4.2.1	<i>Modelo Linear Generalizado</i>	40
4.2.2	<i>Modelo Média Móvel</i>	40
4.2.2.1	<i>Condições para Estacionariedade</i>	41
4.2.2.2	<i>Autocorrelação</i>	41
4.2.3	<i>Modelo Autoregressivo</i>	42
4.2.4	<i>Modelo ARMA</i>	44
4.2.5	<i>ARMA</i>	44
4.2.6	<i>Raízes Unitárias</i>	45
4.3	Modelo ARIMA	45
4.3.1	<i>Estabilidade e Invertibilidade</i>	47
4.4	Modelos de Sazonalidade	47
4.4.1	<i>Diferenciação Sazonal</i>	47
4.4.2	<i>SARIMA</i>	47
4.4.3	<i>Variáveis de Fourier</i>	48
5	TEORIA DE VOLATILIDADE	49
5.1	Definições Adicionais	49
5.2	Modelo de Heterocedacidade Condicional Autoregressiva Generalizada	49
5.3	Modelo de Volatilidade Estocástica	49
5.4	Modelos Adicionais	49
6	TEORIA MULTIVARIADA	50
6.1	Definições Adicionais	50
6.1.1	<i>Correlação Cruzada</i>	50
6.1.2	<i>Cointegração</i>	50
6.2	Modelos em Espaço de Estados	50
6.3	Modelos Multivariados	50
6.4	Modelos de Variáveis Exógenas	50
7	TESTES ESTATÍSTICOS	51
7.1	Considerações sobre testes em séries temporais	51

7.2	Teste de <i>Dickey-Fuller</i>	51
7.2.1	<i>Teste</i> Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (<i>KPSS</i>)	52
7.3	Causalidade de Granger	53
7.4	Box-Pierce	53
7.5	Ljung-Box-Pierce	53
7.6	<i>Convergence Cross Mapping</i>	53
7.7	Johansen	53
8	VALIDAÇÃO DE MODELOS	54
8.1	Análise de Resíduos	54
8.2	Validação Cruzada	54
9	ANÁLISE ESPECTRAL	55
10	MODELOS NÃO LINEARES	56
11	ANÁLISE DE SÉRIES NÃO ESTACIONÁRIAS	57
11.1	Definições Adicionais	57
11.1.1	<i>Autocorrelação Instantânea</i>	57
11.2	Indução de Estacionariedade	57
12	TÓPICOS ADICIONAIS	58
13	PROCESSAMENTO DE SINAIS ESTOCÁSTICOS	59
13.1	Introdução	59
14	APLICAÇÕES	60
15	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	61
15.1	Contribuições do Trabalho	61
15.2	Limitações	61
15.3	Trabalhos Futuros	61
	REFERENCES	62
	APPENDICES	63
	APPENDIX A – Exemplo de apêndice	63
	ANNEXES	63
	ANNEX A – Exemplo de um anexo	64

1 INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

2.1 Processo Estocástico

Dado um conjunto arbitrário \mathcal{T} um processo estocástico é uma família $X(t, \omega)$, $t \in \mathcal{T}$ e $\omega \in \Omega$ de forma que para cada $t \in T$, $\omega \in \Omega$ $X(t, \Omega)$ é uma variável aleatória. As variáveis aleatórias podem ser reais ou complexas. Esse trabalho aborda apenas processos estocásticos reais exceto quando explicitamente mencionado.

Supõe-se que a família de variáveis aleatórias seja definida em um mesmo espaço de probabilidades (Ω, \mathcal{A}, P) com Ω representando um espaço amostral, \mathcal{A} uma σ -álgebra e P uma medida de probabilidade. Para propósitos desse trabalho podemos tomar o conjunto \mathcal{T} como \mathbb{R} , resultando em processos de tempo contínuo, e \mathbb{Z} , resultando em processos de tempo discreto.

Para cada $t \in \mathcal{T}$ temos uma função de densidade de probabilidade associada à variável aleatória $X(t_k, \omega)$ (assumindo que essa função exista). Na prática um processo aleatório no mundo real é observado ao longo de t , tal que ω seja fixado ao universo em que a observação ocorre. Sob essa condição $X(t, \omega_k)$ é considerada uma realização do processo estocástico. Realizações também são chamadas de *sample record* em alguns livros de engenharia e séries temporais na literatura estatística.

Para ilustrar os conceitos acima podemos pensar em um exemplo proposto por (BENDAT; PIERSOL, 2000) em que um gerador de ruído térmico é construído e sua tensão ao longo de um intervalo do tempo é medida. Se um outro gerador fosse construído sob condições e com propriedades idênticas sua tensão medida no mesmo intervalo de tempo não seria idêntica, assim como a tensão medida sob qualquer outro gerador idêntico. De fato cada registro de tensão é um exemplo de infinitos registros que poderiam ter ocorrido. Nessa situação os registros ou séries temporais de tensão são as realizações de um processo estocástico representativo de todas as possíveis realizações.

O adequado estudo de séries temporais é consequência de um primeiro adequado estudo sobre processos estocásticos, geradores dessas séries temporais. Essa não é a intenção desse trabalho. Como em grande parte da teoria de séries temporais estamos preocupados com o que podemos compreender ou inferir sobre o processo estocástico gerador de uma realização a partir apenas de seu único registro. Essa abordagem é essencial e de fato mais aplicável que um estudo que se preocupa excessivamente com os processos geradores devido ao fato de dados do mundo real frequentemente representarem realizações únicas. Não é possível realizar novamente

o índice Ibovespa entre 1970 e 2020 e muito menos ter acesso à realização desses índices em universos paralelos.

Ao longo desse trabalho a distinção e referência ao processo gerador de uma série temporal será feita quando necessário.

2.2 Série Temporal

Uma série temporal é um conjunto de observações realizadas sequencialmente no tempo, indexadas de acordo com o momento em que foram observadas. As observações representam a realização de um processo estocástico. Em alguns contextos, como análise de processos industriais, a natureza do processo subjacente é relevante para análise e modelagem de qualquer série temporal. Em outros, como análise de séries financeiras, o sistema gerador das séries é tão complexo que dificilmente conhecimento sobre sua dinâmica seja útil.

Assume-me, na linguagem de (HAMILTON, 1994), que um conjunto de amostras $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, y_3 \dots y_T)$ pode ser interpretado como um segmento finito de uma sequência duplamente infinita:

$$\mathbf{y}_{t=-\infty}^{\infty} = (\dots, y_{-1}, y_0, \overbrace{y_1, y_2, y_3, \dots, y_T}^{\text{Série Observada}}, y_{T+1}, y_{T+2} \dots)$$

Apesar de parecer pouco tangível, de fato qualquer série observada é satisfatoriamente descrita dessa forma. Em um contexto industrial, por exemplo, o valor de uma variável de processo é zero até a planta ser construída e entrar em operação, assume valores representativos ou não da dinâmica de interesse (assumindo valores irrelevantes quando a planta não está em operação plena), e tendendo ao infinito retorna a zero quando a planta for desativada.

Essa interpretação de uma série temporal é importante ao implicitamente insinuar que o processo existe em um intervalo temporal mais abrangente do que o observado. É portanto necessário se questionar sobre quanto os dados representam o processo analisado e em quais intervalos de tempo.

Séries temporais são inerentemente diferentes de dados tabulares por representarem amostras de um mesmo processo estocástico ao invés de amostras aleatórias de uma população. Não faz sequer sentido discutir uma população no contexto de séries temporais uma vez que estamos restritos à realizações observadas de um processo estocástico. Essa relevante diferença

impede propriedades estatísticas agradáveis consequentes da independência amostral associada à dados tabulares apropriadamente amostrados como a lei do grandes números e o teorema do limite central.

A forma mais natural de analisar uma série temporal é visualizar seus valores no tempo, como ilustra a imagem 1.

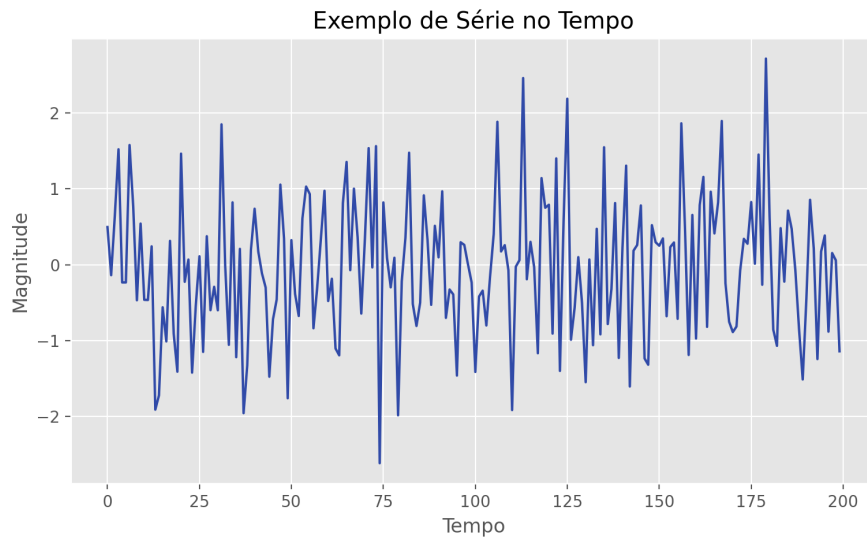


Figure 1 – Visualização no tempo de ruído branco

2.3 Operador de Atraso(*Lag*)

É importante introduzir o operador de atraso ou *lag*.

Dadas as séries $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, y_3 \dots y_T)$ e $\mathbf{x}_t = (x_0, x_1, x_2 \dots x_{T-1})$ tal que

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{t-1}$$

isso é,

$$y_1 = x_0$$

$$y_2 = x_1$$

$$\vdots$$

$$y_T = x_{T-1}$$

Podemos definir \mathbf{x}_t em função de \mathbf{y}_t como:

$$\mathbf{x}_t = L\mathbf{y}_t$$

tal que

$$\mathbf{y}_{t-1} = L\mathbf{y}_t$$

Observamos que o operador de atraso atrasa uma série temporal em uma unidade de tempo. Uma breve divagação matemática (HAMILTON, 1994) permite definir o operador com propriedades muito semelhantes às de multiplicação dos números reais, como associatividade, comutatividade e distribuição. Para atrasar múltiplas unidades de tempo temos que:

$$L(L(\mathbf{y}_t)) = L(\mathbf{y}_{t-1}) = \mathbf{y}_{t-2} = L^2\mathbf{y}_t$$

de forma que

$$L^n\mathbf{y} = \mathbf{y}_{t-n}$$

Um uso importante do operador, decorrente de suas propriedades algébricas, é exemplificado na seguinte expansão

$$(aL^2 + bL^3)\mathbf{y}_t = a\mathbf{y}_{t-2} + b\mathbf{y}_{t-3}$$

Conhecimento do operador de atraso é importante para compreender a literatura de séries temporais e facilita comunicação objetiva de análises cotidianas. O presente trabalho usa do operador para descrever uma série de modelos.

Como nota final é importante mencionar que alguns livros (CHATFIELD; XING, 2019) (STOFFER, 2017) usam a letra B para denotar o operador de atraso e que na maior parte dos recursos *online* o operador é referido por seu nome em inglês, *lag*.

A analogia entre o operador de atraso e a variável complexa $e^{-j\omega} = z^{-1}$ é clara, com a relevante diferença que z^{-1} atrasa um sinal em uma unidade de tempo se a operação for realizada no domínio z enquanto o operador de atraso atua diretamente no domínio do tempo. Essa característica permite que filtros com equações de recorrência complexas sejam representados de forma compacta no domínio do tempo por meio de polinômios de atraso.

Uma propriedade interessante decorrente da equivalência entre z^{-1} e L é que pode se pensar em um plano L cuja análise é igualmente informativa à do plano z , notando que o espaço é de certa forma invertido. Uma análise da posição dos polos de um sistema representado por meio de um polinômio em L conclui que o sistema é instável se tais polos estiverem fora do círculo unitário, contrário do que conhecemos do plano z .

Por fim vale mencionar que alguns autores como (AGUIRRE, 2015) usam a notação q^{-1} para esse operador.

2.4 Operador de Diferença

O operador de diferenças ∇ ou Δ é o equivalente discreto da operação contínua de diferenciação e opera sob uma série temporal \mathbf{y}_t da seguinte forma:

$$\nabla \mathbf{y}_t = (1 - L)\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - L\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$$

O operador possui propriedades de associatividade e distribuição, tal que

$$\nabla^2 \mathbf{y}_t = \nabla(\nabla(\mathbf{y}_t)) = \nabla(\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}) = \nabla \mathbf{y}_t - \nabla \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_t - 2\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{y}_{t-2}$$

2.5 Tendência(*Trend*)

A variação do valor esperado de um processo estocástico é denominado tendência. A partir de uma série temporal definimos tendência como a variação de sua média amostral. A imagem 2 ilustra uma série com tendência linear. Observa-se que ao longo do tempo a média das observações cresce linearmente. Tendências de séries reais frequentemente seguem um perfil

logarítmico (CHATFIELD; XING, 2019), como na figura 3. Nesse caso uma transformação exponencial da série, isso é, a aplicação de uma função exponencial a cada observação, tornaria a tendência linear.

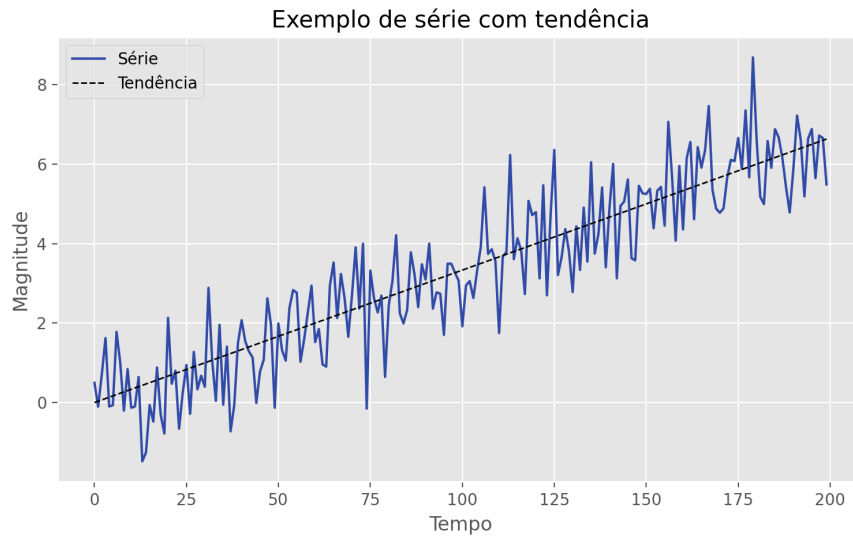


Figure 2 – Série temporal com tendência linear

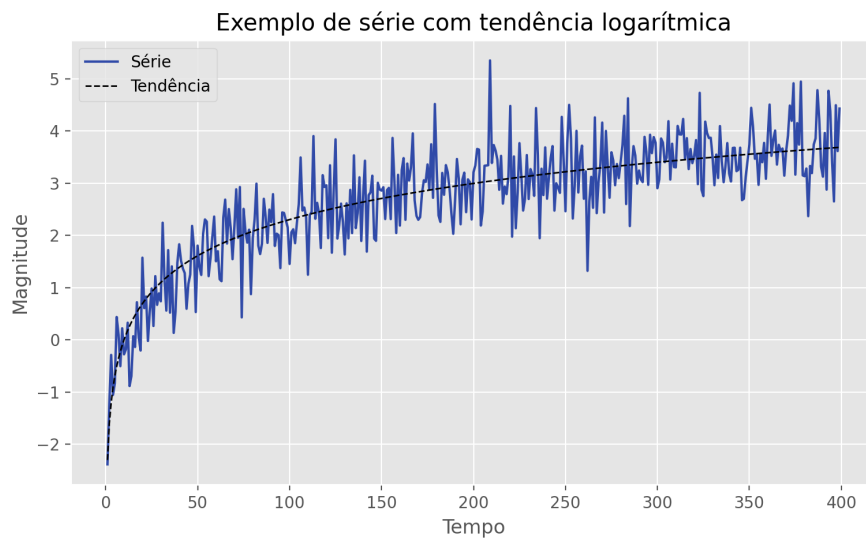


Figure 3 – Série temporal com tendência logarítmica

2.6 Sazonalidade

A variação periódica de média móvel das observações de uma série temporal é denominada sazonalidade. Em séries no contexto de finanças sazonalidade frequentemente segue ciclos de calendário como anual, mensal, semestral, etc. No contexto mais amplo de

séries temporais sazonalidade apresenta período arbitrário, apesar da linguagem em torno dessa propriedade estar muito associada aos períodos anteriormente mencionados.

Um exemplo de série temporal com sazonalidade é ilustrado na figura 4.

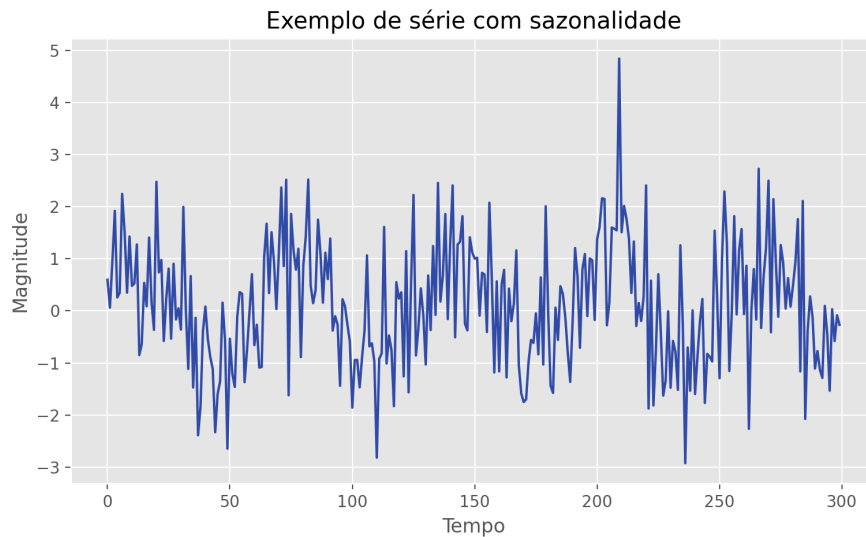


Figure 4 – Série temporal com sazonalidade senoidal de período arbitrário

Na presença de tendência sazonalidade pode ser considerada aditiva, se sua variação for constante em torno da tendência, e multiplicativa, se sua variação depender o valor da tendência. Exemplos de sazonalidade aditiva e multiplicativa são dados pelas figures ?? e 5, respectivamente. Discernir entre os dois tipos de sazonalidade é importante para modelagem.

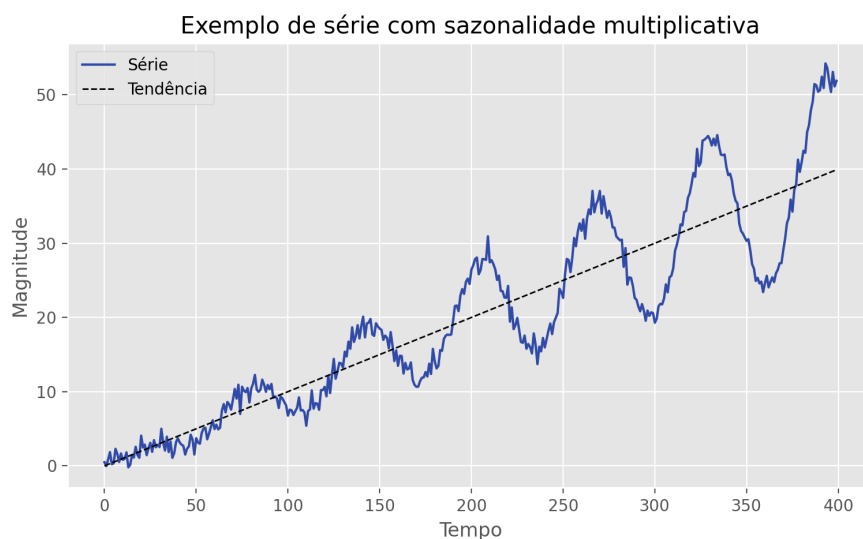


Figure 5 – Série temporal com sazonalidade multiplicativa

2.7 Autocorrelação

TODO: later analogy with convolution would be cool

A função de autocorrelação é definida para processos estocásticos como a correlação de Pearson entre valores do processo em instantes de tempo diferentes. A função de autocovariância entre os instantes de tempo t_1 e t_2 é dada pela seguinte equação

$$K_{xx}(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})] \quad (2.1)$$

Normalizando a autocovariância obtemos a autocorrelação

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{K_{xx}(t_1, t_2)}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}}$$

Para processos estacionários (seção 2.8) a autocovariância, e consequentemente a autocorrelação, é função apenas do atraso $\tau = |t_1 - t_2|$. Temos então que

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{K_{xx}(\tau)}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}}$$

Para uma série temporal, isso é, uma única realização de um processo estocástico, a função de autocorrelação estacionária (tipicamente chamada apenas de função de autocorrelação) pode ser definida diretamente a partir da definição de correlação amostral sob as seguintes premissas

1. O processo estocástico gerador da série temporal é estacionário
2. O número de observações N de \mathbf{y}_t é suficientemente grande ($N \approx 100$)

resultando na equação 2.2, onde o subscrito duplo é omitido. Note que o atraso é discreto, indicado por k .

$$\rho_y(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Alguns comentários sobre a nomenclatura da função são apropriados. A literatura de engenharia tende a usar os termos autocovariância e autocorrelação de forma intercambiável para

designar a definição de autocovariância apresentada. A literatura estatística assume as definições abordadas acima, que serão usada no restante desse trabalho.

Além disso, a função de autocorrelação como apresentada pela equação 2.1 é definida para um processo estocástico não necessariamente estacionário, apesar do termo ser usado para descrever a equação 2.2. A aplicação da equação que assume estacionariedade em uma série não estacionária resulta em correlações informativas praticamente apenas disso. Uma modificação estratégica da função dada por 2.1 resulta na chamada função de autocorrelação instantânea (seção 11.1.1), que é usada para representar séries temporais não estacionárias.

2.7.1 Autocorrelação Parcial

É interessante mencionar a existência de autocorrelação parcial nessa seção juntamente de uma descrição em alto nível do que esse valor representa. Sua definição formal será apresentada na seção 4.2.3.

Autocorrelação parcial foi introduzida por Box e Jenkins em (BOX; JENKINS, 2016) como uma ferramenta auxiliar na identificação de modelos. O valor ϕ_{kk} é definido como a correlação parcial entre y_t e y_{t-k} , isso é, a correlação restante entre y_t e y_{t-k} após levar em consideração a contribuição de $y_t, y_{t-1} \dots y_{t-k+1}$.

2.7.2 Correlalograma

Um correlalograma é um gráfico de barras representativo da autocorrelação ou autocovariância em k amostras de uma série temporal ($k = 0, 1, 2, \dots$), de forma que a primeira barra represente a autocorrelação entre y_t e si mesmo (sempre igual à 1), a segunda entre y_t e y_{t-1} , a terceira entre y_t e y_{t-2} , e assim por diante. O correlalograma da série visualizada pela figura 2 é ilustrado na figura 6.

A figura 6 informa um intervalo de relevância dado por um sombreamento vermelho. Qualquer valor de autocorrelação dentro desse intervalo é estatisticamente insignificante e pode ser considerado igual a zero.

O correlalograma é uma ferramenta indispensável em análise de séries temporais para tarefas como detecção de estacionariedade, identificação de sazonalidade, análise de resíduo, engenharia de características, escolha de modelo e identificação de ruído branco (seção 2.9),

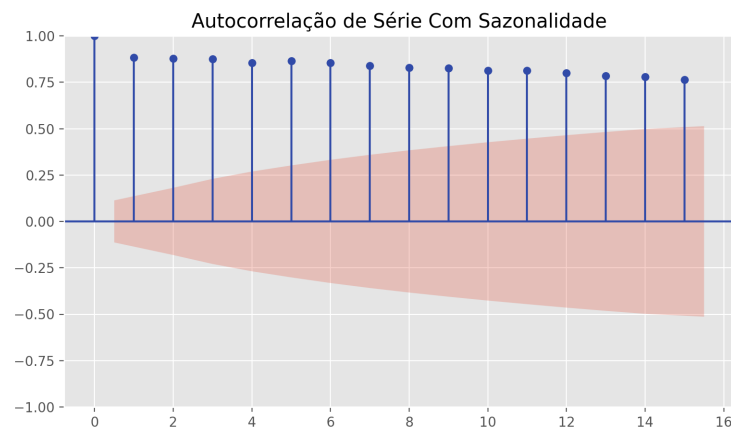


Figure 6 – Visualização de correlatograma de série com tendência linear. Observe que as autocorrelações decaem lentamente ao decorrer dos atrasos, comportamento típico de tendências determinísticas.

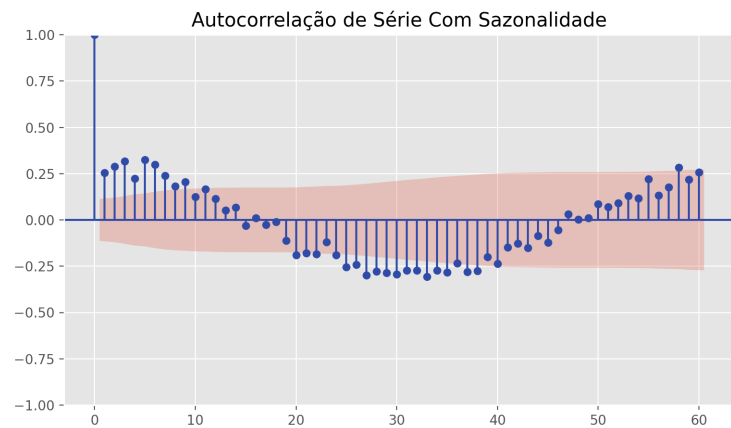


Figure 7 – Visualização de correlatograma de série com sazonalidade. Observe que o padrão senoidal da série é reproduzido nas autocorrelações.

entre outros. No contexto de identificação de sistemas autocovariância e autocorrelação e portanto o correlatograma desempenha um importante papel na identificação de propriedades de sinais e sistemas imersos em ruído devido à robustez ao ruído da operação de correlação cruzada(AGUIRRE, 2015). A figura 8 apresenta um sinal imerso em ruído cuja natureza periódica subjacente se torna mais visível por meio de seu correlatograma.

É importante mencionar que o correlatograma de uma série com tendência determinística, como a da figura 6, apresenta o comportamento observado de autocorrelações altas com pouca atenuação ao longo dos atrasos. De forma análoga o correlatograma de uma série com sazonalidade apresenta periodicidade que reproduz seu padrão temporal, como ilustra a figura 7, correlatograma da série da figura 4. O primeiro correlatograma é informativo até certo ponto: informa simplesmente que a série apresenta tendência. Para analisar tais séries

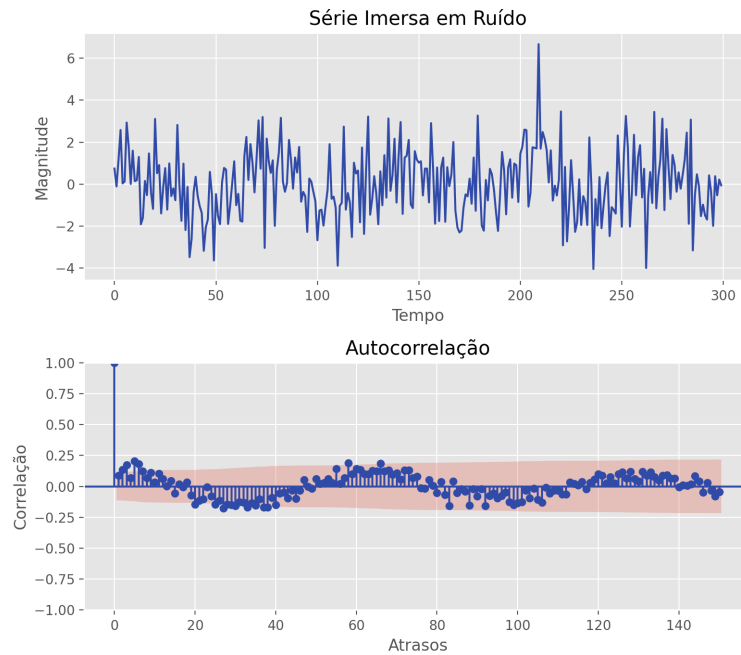


Figure 8 – Sinal periódico imerso em ruído e sua correspondente autocorrelação.

de forma mais produtiva, a fim de elaborar um possível modelo, por exemplo, é importante que a série seja estacionária (seção 2.8). É inclusive afirmado em alguns textos da literatura estatística (CHATFIELD; XING, 2019), que um correlalograma só faz que sentido se a série associada for estacionária, observação mais geral e rigorosa das restrições de uso da equação 2.2.

Na engenharia a análise do correlalograma de sinais não estacionários é utilizada para investigação da adequação de tempo de amostragem, onde uma autocovariância com valores lentamente decrescentes e um mínimo local indica que o sinal pode estar superamostrado, propriedade indesejável que pode resultar em problemas computacionais além de desperdício de memória.

TODO: add sampling analysis of silica series? later maybe

2.8 Estacionariedade

Uma série temporal \mathbf{x}_t gerada por um processo $\mathbf{X}(t)$ é considerada estacionária se atender às seguintes três condições:

1. $E(\mathbf{X}(t)) = \mu$
2. $Var(\mathbf{X}(t)) = \sigma^2$
3. $Cov[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t + \tau)] = \gamma(\tau)$

Que podem ser interpretadas da seguinte forma

1. A média da série \mathbf{x}_t é constante ao longo do tempo
2. A variância da série \mathbf{x}_t é constante ao longo do tempo
3. A autocorrelação de \mathbf{x}_t depende apenas do atraso

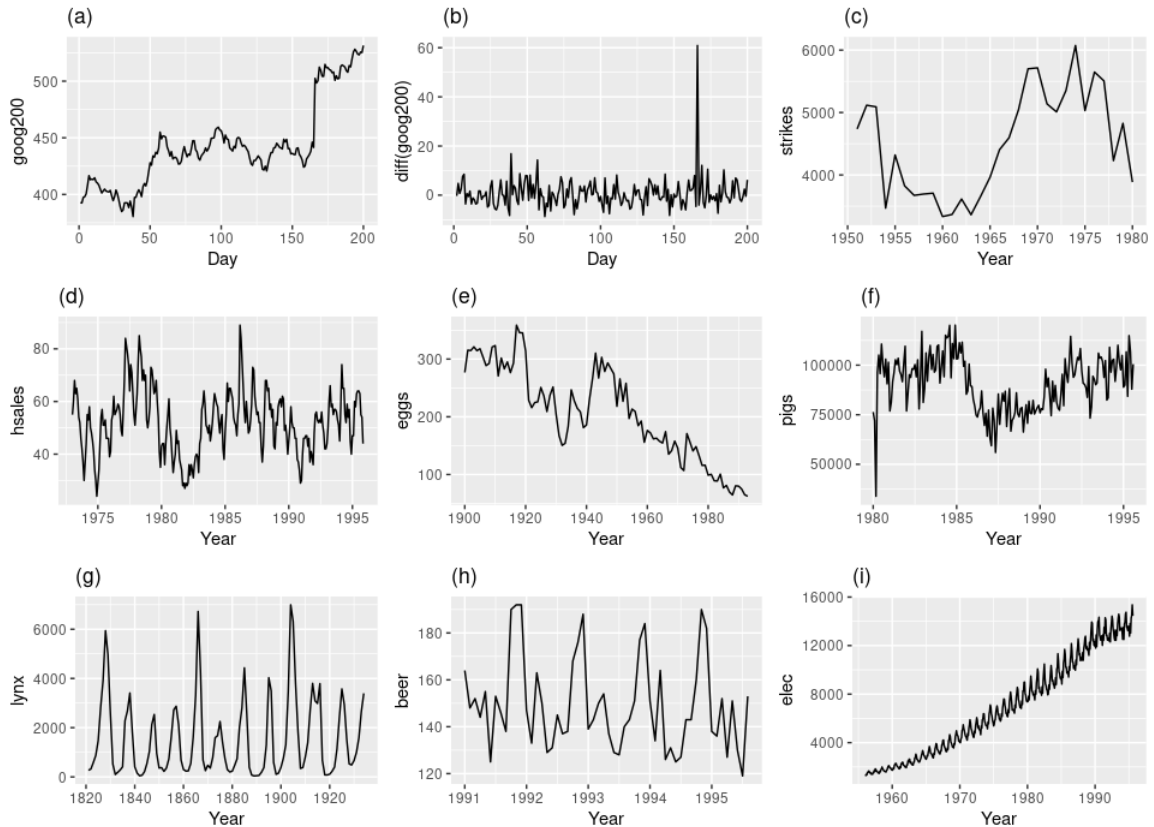


Figure 9 – Conjunto de séries demonstrando diferentes níveis de estacionariedade.

Um bom exemplo de graus de estacionariedade em séries temporais dado por Athanasopoulos e Hyndman (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018) é ilustrado pela figura 9. As séries das figuras 9.a, 9.e e 9.i demonstram clara tendência, sendo portanto não estacionárias. As séries das figuras 9.d, 9.h, 9.i são igualmente não estacionárias por apresentarem clara sazonalidade, enquanto a série da figura 9.g aparenta ser sazonal mas apresenta picos aperiódicos de intensidade muito distinta, sendo considerada estacionária pelos autores. O caso da série da figura 9.g é um complicado por aparentar também violar o requisito de variância constante. Para concluir assim como os autores que a série é estacionária é necessário mais do que uma investigação visual; o texto que discute a série leva em conta seu processo gerador (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018).

As séries das figuras 9.c e 9.f são aparentemente não estacionárias no intervalo observado por demonstrarem variação em sua média móvel mas podem ser um caso de raízes

unitárias.

Por eliminação temos que apenas as séries ilustradas pelas figuras 9.b e 9.g são estacionárias, o caso de 9.b contendo uma clara anomalia.

O exemplo de análise de estacionariedade da figura 9 demonstra a imprecisão da abordagem visual para essa tarefa. Torna-se necessário o estabelecimento de procedimentos mais objetivos para detecção de estacionariedade (seção ??).

2.8.1 Importância de Estacionariedade

Estacionariedade é uma propriedade desejável de se observar em uma série temporal para fins analíticos e de modelagem.

Há algumas formas de compreender como estacionariedade colabora para a modelagem bem sucedida de uma série temporal.

Podemos pensar na propriedade de estacionariedade como um tipo de estrutura de dependência. Se as amostras X_1, X_2, \dots, X_N de um conjunto \mathbf{X} forem independentes entre si temos formas interessantes de modelar a função geradora de \mathbf{X} como o teorema do limite central, lei dos grandes números, etc. Há apenas uma forma de um conjunto amostral ser independente mas muitas formas de ser dependente, tornando difícil o estabelecimento de recursos eficientes para modelagem geral de processos dependentes. Séries temporais sendo naturalmente observações de processos dependentes (seção 2.2) é interessante definir estruturas de dependência que permitam o uso de tais recursos. Estacionariedade é uma estrutura de dependência que permite aplicar propriedades úteis de independência em séries temporais. Abordando a mesma ideia mais intuitivamente podemos pensar no seguinte exemplo: se um processo possui valor esperado e variância constante e autocorrelação invariante ao tempo podemos por meio da lei dos grandes números estimar seu valor esperado e variância com cada vez mais confiança a partir da média e variância amostral, respectivamente. O mesmo argumento intuitivo se estende analogamente para o caso de aprendizado de máquina, no qual por meio de teoria de aprendizado estatístico é possível argumentar que uma série estacionária é “mais fácil” de aprender.

De forma mais quantitativa o teorema de decomposição de Wold (CHATFIELD; XING, 2019) conclui que qualquer série temporal estacionária pode ser representada pela seguinte combinação linear

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Z_{t-j} + \eta_t$$

No qual η representa uma série determinística e Z_t um processo puramente aleatório (seção 2.9). O leitor reconhecerá parte da expressão acima como um processo $MA(\infty)$ (seção 4.2.2). Esse resultado tem como consequência a importante conclusão que qualquer série estacionária é possivelmente aproximável por um modelo MA e portanto, via invertibilidade, modelos AR e ARMA (seção 4.3.1).

Por fim estacionariedade permite o uso de uma série de modelos que serão discutidos na seção sobre modelos estacionários. Esses métodos são bem compreendidos e implementados, facilitando sua interpretação, uso e sustentação.

2.8.2 *Categorias Básicas de Não Estacionariedade*

Como extensão do argumento sobre estruturas de dependência na seção anterior podemos afirmar que, sendo estacionariedade um padrão de dependência, temos infinitas formas de não estacionariedade, retornando ao caso de dependência generalizada. É interessante identificar nesse universo de dependência padrões de séries não estacionárias que são facilmente transformadas em séries estacionárias.

Uma série temporal com presença de tendência determinística, como ilustrada na figura 2, pode ser representada pela seguinte expressão:

$$y_t = e_t + f(t) + \varepsilon_t \quad \text{onde } \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Na qual e_t representa uma série estacionária, $f(t)$ uma função determinística do tempo e ε_t ruído branco (seção 2.9). Nota-se que $f(t)$ é uma função monotônica arbitrária tal que y_t seja uma série não estacionária. No caso da figura 2 temos $f(t)$ linear e na figura 3 logarítmica. Uma série temporal demonstrando esse tipo de não estacionariedade é considerada **tendência-estacionária**, uma vez que simplesmente removendo a tendência $f(t)$ temos estacionariedade. Isso pode ser feito de várias formas, talvez com maior simplicidade diferenciando a série. Métodos mais sofisticados incluem decomposição ETS (seção 4.1) e regressão com finalidade de modelar $f(t)$ de forma que o resíduo represente uma série estacionária $e_t + \varepsilon_t$.

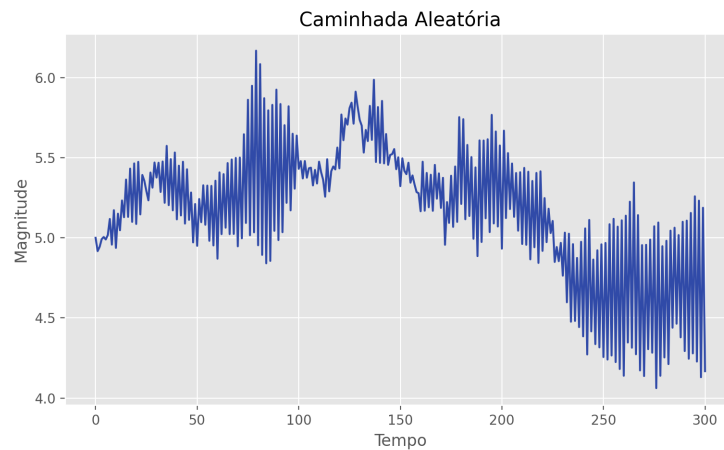


Figure 10 – Visualização de caminhada aleatória com $y_0 = 5$

Uma série com presença de tendência estocástica pode ser classificada de maneira semelhante. O exemplo mais simples de tal série é gerada por um passeio aleatório, definido pelo seguinte processo, visualizado pela figura 10:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{onde} \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Por meio de um desenvolvimento recursivo do processo podemos escrever:

$$y_t = (y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$y_t = ((y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\vdots$$

$$y_t = \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_{t-j} + y_0$$

Resultado a partir do qual a não estacionariedade de y_t se torna evidente, uma vez que

$$\text{var}(y_t) = \sigma^2 t$$

Além da covariância ser dependente do tempo.

Uma forma simples de tornar a série estacionária é diferenciá-la em primeira ordem, isso é, aplicar o operador de diferença primeira:

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$\nabla y_t = \varepsilon_t$$

Sabemos pela seção 2.9 que ruído branco é um processo estacionário.

A caminhada aleatória é denominada uma série **diferença-estacionária** pelo fato da operação de diferença introduzir estacionariedade. Essa é uma forma tão comum de não estacionariedade que a ideia de “diferenciar uma série antes de fazer qualquer coisa” é proeminente entre profissionais de dados, apesar de que geralmente necessita-se apenas de estacionariedade. Essa prática é parcialmente justificada considerando que a maior parte das séries temporais “reais” são não estacionárias e frequentemente diferencialmente estacionárias.

É igualmente possível que uma série diferença-estacionária seja estacionária em sua n -ésima diferença, tal que estacionariedade seja observada por uma operação de diferenças de ordem n . A ideia de tirar sucessivas diferenças até atingir estacionariedade é fundamental no método de Box-Jenkins, por exemplo.

Séries diferença-estacionárias apresentam raízes unitárias e os dois termos são frequentemente usados nos mesmos contextos.

Podemos resumir as definições das categorias de não estacionariedade abordadas nessa seção assim como suas implicações como segue:

1. **Estacionariedade em Tendência:** Uma série é considerada tendência-estacionária se apresentar uma tendência determinística. No caso de anomalias ou eventos de perturbação séries com esse tipo de tendência retornam ao valor da tendência ao longo do tempo, “esquecendo” o evento perturbador. Esse tipo de série se torna estacionária pela remoção da tendência determinística, processo realizado por meio de regressão da tendência, por diferenciação, por decomposição, etc.
2. **Estacionariedade Diferenciável:** Uma série é considerada diferença-estacionária se apresentar uma tendência estocástica. No caso de anomalias ou eventos de perturbação

séries com esse tipo de tendência são irreversivelmente afetadas, “lembrando” do evento perturbador. Esse tipo de série se torna estacionária por diferenciação em ordem n . Possui raízes unitárias e é frequentemente discutida nessa linguagem.

2.9 Ruído Branco

Uma série temporal \mathbf{x}_t gerada por um processo $\mathbf{X}(t)$ é considerada ruído branco ou um processo puramente aleatório se atender às seguintes três condições:

1. $E(\mathbf{X}(t)) = 0$
2. $Var(\mathbf{X}(t)) = \sigma^2$
3. $Cov[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t + \tau)] = 0$

Que podem ser interpretadas da seguinte forma

1. A média da série \mathbf{x}_t é nula ao longo do tempo
2. A variância da série \mathbf{x}_t é constante ao longo do tempo
3. Não há correlação entre as amostras de \mathbf{x}_t

Observa-se que ruído branco é um caso específico de estacionariedade, se diferenciando pela especificação do valor esperado e autocorrelação entre quaisquer amostras em zero. A compreensão da definição e capacidade de identificação de ruído branco é importante para análise de resíduos, detalhado na seção 8.1.

3 TEORIA UNIVARIADA

4 ANÁLISE CLÁSSICA DE SÉRIES TEMPORAIS UNIVARIADAS

Introdução

O seguinte capítulo tem por objetivo introduzir uma parte pequena mas representativa do corpo clássico de análise de séries temporais univariadas usando uma base de vocabulário e terminologia desenvolvida no capítulo 1.

4.1 Decomposição de Séries Temporais

Decomposição em séries temporais tipicamente descreve o processo de representação de uma série por uma combinação linear de três componentes: tendência, sazonalidade e resíduos. A decomposição de uma série y_t pode ser aditiva ou multiplicativa como expressada pelas equações 4.1 e 4.2 respectivamente.

$$y_t = S_t + T_t + R_t \quad (4.1)$$

$$y_t = S_t \cdot T_t \cdot R_t \quad (4.2)$$

A escolha de decomposição aditiva ou multiplicativa deve ser feita de acordo com o tipo de sazonalidade (seção 2.6).

TODO: ver se isso procede ou não!

Como herança de econometria grande parte dos algoritmos clássicos de decomposição (X11 (LADIRAY; QUENNEVILLE, 2001), SEATS (BIANCIONINI, 2016, capítulo 5.2) e derivados) são baseados em período de sazonalidade anuais, semestrais, trimestrais e mensais (ATHANASOPOULOS; HYNDMAN, 2018). A incapacidade desses algoritmos de processar dados com período menor os torna pouco utilizáveis no contexto de sinais elétricos, por exemplo, cujas séries tipicamente são de período inferior a um dia, apresentando padrões sazonais com período semelhante.

Os algoritmos abordados nas seguintes subseções são teoricamente capazes de modelar padrões sazonais de período arbitrário mas na prática suas implementações frequentemente operam com períodos limitantes de um dia ou mais. Cada um dos algoritmos apresentados é portanto implementado em python.

Antes de prosseguir é interessante comentar sobre os principais objetivos de decomposição:

1. **Análise:** O processo de pensar sobre, elaborar, ajustar e observar resultados de decomposição são altamente informativos da natureza da série sob análise. A operação é frequentemente usada para fins de análise exploratória.
2. **Indução de estacionariedade:** Como tendência e sazonalidade são padrões cuja presença qualifica não estacionariedade 2.8 sua remoção pode tornar uma série “mais estacionária” ou pelo menos mais apropriada para modelagem por meio de modelos não estacionários.
3. **Detecção de Anomalias:** Eventos anômalos são tipicamente dissociados de e ocultos por estruturas de tendência e sazonalidade. A remoção dessas estruturas tende a expor anomalias de forma mais detectável.
4. **Modelagem e Previsão:** A representação de uma série por meio de três componentes distintas é interessante para problemas de previsão pela possibilidade de desenvolver modelos e previsões para cada componente de acordo com suas propriedades. Os modelos independentes tendem a ser menos complexos, mais generalizáveis e mais robustos do que um modelo adequado para a série original, se existir.

A imagem ?? ilustra o resultado do processo de decomposição aditiva de uma série temporal sintética da forma que é tipicamente apresentado: quatro linhas contendo a série original, componente de tendência, componente sazonal e componente residual em aparição decrescente. A operação descrita pela equação 4.1 equivale à constatação que a imagem da primeira linha corresponde à soma das imagens das três linhas inferiores.

TODO put add figure here

4.1.1 Modelagem de Tendência

Uma operação essencial em decomposição de séries temporais é a determinação de uma tendência subjacente dos dados. Os principais procedimentos para tal, abordados a seguir, são simples e bem estabelecidos.

4.1.1.1 Média Móvel

Um filtro de média móvel de ordem m é tipicamente expressado como:

$$MA_{t_m} = \frac{1}{m} \sum_{i=-k}^{i=k} y_{t+i} \quad (4.3)$$

A operação é visualizada pela figura 11.

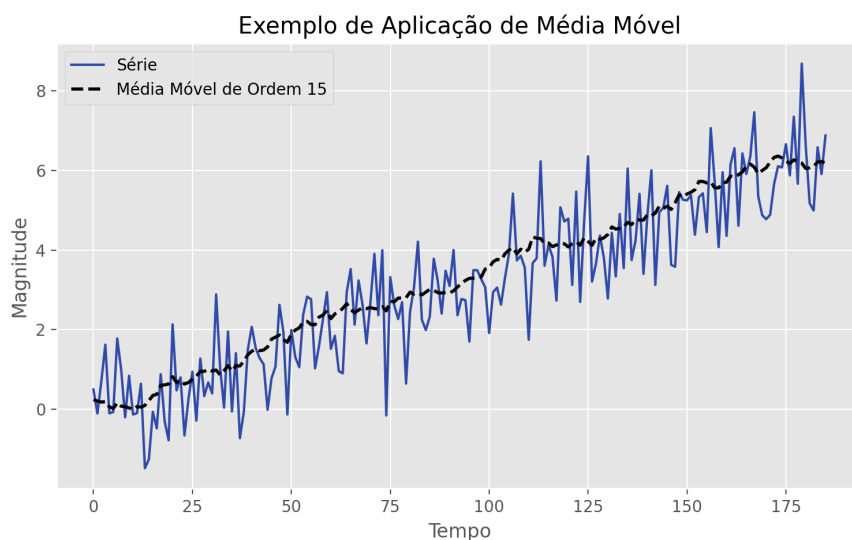


Figure 11 – Visualização de aplicação de filtro média móvel com $m=15$

TODO: talk (and research about !) the use of kalman filter for moving average

4.1.1.2 Regressão Localizada/Filtro de Savitzky-Golay

Uma forma mais robusta e granular de modelagem de tendência é o algoritmo LOESS, baseado em regressão localizada e conhecido em linguagem de processamento de sinais como o filtro de Savitzky-Golay. Apesar do algoritmo ser simples seu desenvolvimento será omitido por ser matematicamente verboso. É importante que o leitor conheça a existência do método LOESS, sabendo que ele oferece uma alternativa mais precisa para modelagem de tendência do que média móvel, apesar de ser potencialmente mais computacionalmente complexo. Uma breve intuição sobre seu funcionamento é apresentada a seguir.

A ideia fundamental do algoritmo é repartir a série temporal em grupos de pontos menores, calculando uma regressão (tipicamente mas não necessariamente linear) nesses grupos menores de forma a construir uma curva linear por partes que aproxima a tendência da curva original. O tamanho dos grupos é arbitrário e tipicamente informado como uma fração do tamanho da série completa e os grupos em si são determinados pelos n pontos mais próximos

a um elemento chamado de “ponto focal” que é incrementado a cada iteração. O valor dos incrementos dos pontos focais também é um parâmetro.

A figura ?? ilustra o resultado do algoritmo LOESS para a mesma série analisada pela figura 11. A figura ilustra curvas de tendência modeladas via LOESS para diferentes tamanhos de grupos. Os tamanhos são informados como porcentagem do comprimento total do sinal. Observa-se que o uso de uma porcentagem menor do sinal aumenta a localidade da regressão tornando o ajuste da tendência mais sinuosa.

TODO: fiz loess figure here !

4.1.2 Modelagem de Sazonalidade(Ajuste de Sazonalidade)

TODO: remover isso aqui? se pah

A operação fundamental de decomposição é a modelagem ou ajuste de sazonalidade. Esse processo se preocupa em identificar estruturas fortemente periódicas em uma série temporal. Consideravelmente mais complicada que identificação de tendência identificação de padrões de sazonalidade tende a ser realizada de três formas:

- Métodos de regressão que modelagem o padrão sazonal como uma função do tempo
- Modelos ARIMA(seção ??)
- Modelos baseados em média móvel ou filtros lineares

As abordagens apresentadas nesse documento abrangem apenas o primeiro conjunto de métodos.

TODO: pesquisar mais ! transpor modelagem de sazonalidade de algoritmo clássico para aqui, se estiver correto. enumerar métodos de modelagem

4.1.3 Decomposição Clássica (Aditiva)

TODO: ver se isso entra mesmo

O algoritmo de decomposição clássica é simples e capaz de identificar períodos arbitrários de sazonalidade. O procedimento é apresentado passo a passo acompanhando a decomposição de uma série temporal de corrente elétrica. O código acompanhando cada passo é registrado no jupyter notebook associado intitulado `decomposicao_classica.ipnb`.

TODO: decidir se incluir decomposição em jupyter, nessa seção mesmo ou em uma seção encerrando decomposição

4.1.3.1 Passo 1

Identificar o período de sazonalidade que se deseja modelar.

O período m de sazonalidade corresponde à duração de um ciclo de um padrão periódico observável nos dados. A determinação da duração desse ciclo não é necessariamente trivial, especialmente tratando de séries de alta frequência, sendo interessante inclusive usar métodos automáticos para determinação da distância entre amostras iniciais dos períodos de sazonalidade.

4.1.3.2 Passo 2

Modelar tendência T_t por meio de média móvel

A tendência T_t é modelada calculando a média móvel de ordem m da série.

4.1.3.3 Passo 3

Remover tendência da série

A componente sem tendência é dada por $y_t - T_t$. A série resultante deve possuir média aproximadamente nula.

4.1.3.4 Passo 4

Estimar componente sazonal

A estimativa da componente sazonal é realizada calculando o “padrão sazonal médio” da série sem tendência. A série de tamanho n sem tendência é dividida em s segmentos de m amostras, no qual $s = \frac{n}{m}$. Usando livremente a vírgula como símbolo para concatenação podemos enumerar os segmentos como

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$$

onde um segmento arbitrário

$$\chi_i = \chi_{i_1}, \chi_{i_1} \dots \chi_{i_m}$$

O padrão sazonal modelado S'_t corresponde ao segmento médio, isso é,

$$S'_t = \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{1_k} \right), \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{2_k} \right), \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{3_k} \right) \cdots \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} \chi_{m_k} \right)$$

A componente sazonal S_t é então dada pela concatenação de m cópias de S'_t

$$S_t = \overbrace{S'_t, S'_t, \dots, S'_t}^{s \text{ vezes}}$$

e posterior remoção de sua tendência.

4.1.3.5 *Passo 5*

Calcular a componente residual

Por fim calcula-se a componente residual R_t como

$$R_t = y_t - T_t - S_t$$

A série está enfim descomposta

$$y_t = R_t + T_t + S_t$$

4.1.4 *Decomposição STL*

TODO: estudar e incluir algoritmo

4.1.5 *Quantificação de tendência e sazonalidade*

4.1.5.1 *Força*

A decomposição de uma série temporal em componentes isolados de tendência, sazonalidade e resíduos permite que a intensidade de tendência e sazonalidade sejam quantificáveis de forma elegante. Essa intensidade de tendência ou sazonalidade é tipicamente chamada de força.

Para séries com forte tendência é esperado que a componente de tendência contenha considerável variância. Uma forma interessante de quantificar a força da tendência de uma série,

proposta por Hyndman et. al. (??), parte da observação da variância adicional introduzida pela adição do termo de tendência ao residual:

$$\frac{Var(R_t)}{Var(T_t + R_t)}$$

Espera-se que essa razão seja pequena para séries com alta tendência, isso é, haja introdução de considerável variância pela adição da componente de tendência no denominador. Podemos então definir a força F_T da tendência de uma série como

$$F_T = \max\left(0, 1 - \frac{Var(R_t)}{Var(T_t + R_t)}\right)$$

TODO: Formalize F_T é um número real limitado entre 0 e 1. TODO: Observe que $F_T \in real$ limitado entre 0 e 1.

De forma identicamente análoga podemos definir a força da sazonalidade de uma série como

$$F_S = \max\left(0, 1 - \frac{Var(R_t)}{Var(S_t + R_t)}\right)$$

Essas medidas são úteis ao oferecer uma interface quantitativa aos atributos tipicamente qualitativos de tendência e sazonalidade. É importante deixar claro que essas medidas necessitam que a série seja decomposta em suas componentes de tendência e sazonalidade, possivelmente dificultando sua aplicação.

TODO: verificar última frase acima

4.1.6 Definição de Problema

TODO: definir problema da gerdaui aqui

Observa-se na figura ?? que há aparente padrão de sazonalidade.

4.1.7 Exemplo de Decomposição

TODO: ver como enquadrar problema da gerdaui. talvez passar para parte de aplicações. rever tudo isso de decomposição, tá ficando meio volumoso demais

4.2 Modelos Estacionários

4.2.1 Modelo Linear Generalizado

4.2.2 Modelo Média Móvel

Um processo $Y(t)$ é considerado de média móvel de ordem q se ele for definido pela equação 4.4, na qual ε_t representa um processo puramente aleatório. O processo é tipicamente chamado de $MA(q)$.

$$y_t = \sum_{i=0}^{i=q} \beta_i \varepsilon_{t-i} \quad (4.4)$$

Um processo de média móvel, como sugerido pelo nome, é uma média ponderada de de observações anteriores de série temporal de ruído branco.

A seguinte expressão exemplifica um processo $MA(2)$.

$$y_t = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}$$

Como no caso do processo autoregressivo podemos escrever o processo acima por meio do operador de atraso, resultando na seguinte forma.

$$y_t = Z_t(\beta_0 + L\beta_1 + L^2\beta_2)$$

Podemos escrever a equação 4.4 usando o operador de atraso por meio da equação 4.5.

$$y_t = Z_t \sum_{i=0}^{i=q} \beta_{t-i} L^i = Z_t \phi(L) \quad (4.5)$$

A figura 12 ilustra o comportamento temporal de modelos MA para diferentes ordens.

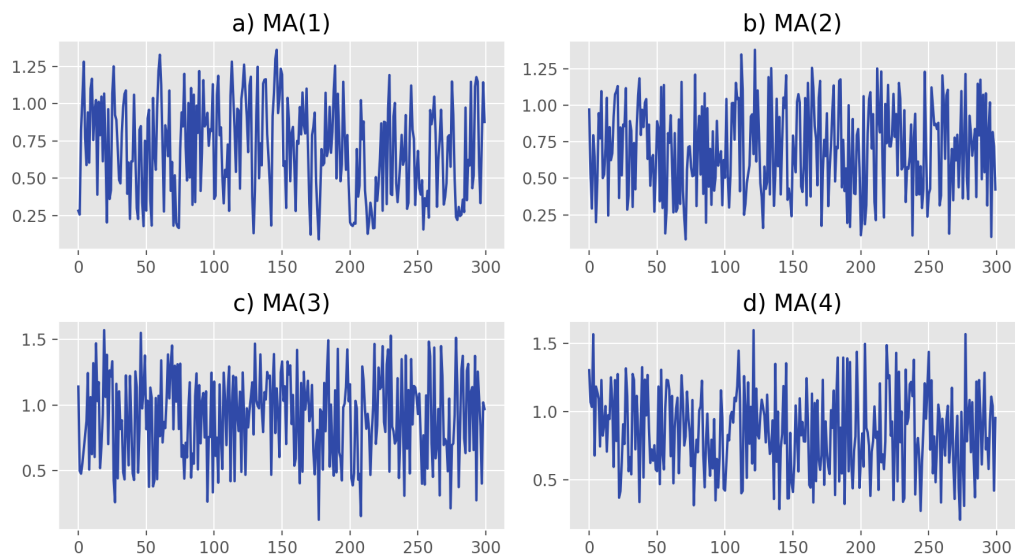


Figure 12 – Visualização no tempo de processos média móvel de ordens diferentes.

Como no caso dos modelos autoregressivos não temos clara identidade visual dos processos média móvel.

4.2.2.1 Condições para Estacionariedade

Não há restrições de estacionariedade para um processo de média móvel de ordem finito. Na prática qualquer processo $MA(p)$, $p < \infty$, é estacionário.

4.2.2.2 Autocorrelação

A função de autocorrelação de um processo média móvel exibe a interessante propriedade de “cortar” após o atraso q , isso é, demonstrar autocorrelação igual a zero após um atraso de número correspondente à ordem do processo. A autocorrelação amostral de uma série temporal gerada por um processo de média móvel tende a apresentar a mesma propriedade, apesar de ser perfeitamente possível e provável da autocorrelação de um processo $MA(q)$ cair para zero *antes* do lag q .

A imagem ?? demonstra a visualização dos correlalogramas correspondentes aos modelos ilustrados no tempo pela figura 12. Observe que as autocorrelações são distintas de zero apenas para atrasos iguais ou inferiores à ordem q do processo.

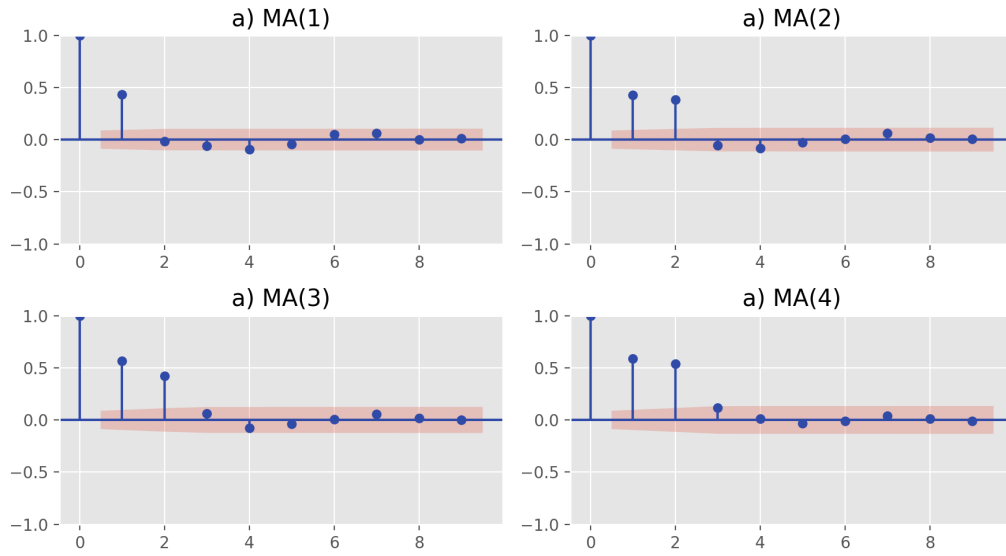


Figure 13 – Visualização do correlatograma de processos média móvel de ordens diferentes.

Essa propriedade da função de autocorrelação possui consequências diretas para modelagem de séries temporais: é possível que uma série temporal estacionária com autocorrelações iguais a zero após atraso k seja parcialmente aproximada por um modelo $MA(k)$. Não há garantia nenhuma que esse seja o caso, no entanto. Retomando uma discussão presente no capítulo 1 relembramos que a autocorrelação amostral de uma série temporal pode ser gerada por infinitas funções, tal que a observação de uma autocorrelação amostral característica de processos $MA(q)$ não garante que o processo gerador da série temporal seja de fato $MA(q)$ - isso é apenas insinuado. Nesses casos modelos $MA(q)$ são excelentes primeiras tentativas.

4.2.3 Modelo Autoregressivo

Um processo $\mathbf{Y}(t)$ é considerado autoregressivo de ordem p se ele for definido pela equação 4.6, onde ε_t representa um processo puramente aleatório. O processo é frequentemente chamado de $AR(p)$.

$$y_t = \sum_{i=1}^{i=p} y_{t-i} \alpha_i + \varepsilon_t \quad (4.6)$$

Como sugerido por seu nome um processo autoregressivo de ordem p é caracterizado por uma dependência entre uma amostra em um instante de tempo t e as amostras de instantes de tempo $t - 1, t - 2, \dots, t - p$. Observa-se que uma amostra em tempo t é exatamente uma média ponderada das p amostras anteriores.

Como exemplo temos que um processo autoregressivo de segunda ordem, isso é, $AR(2)$, é definido pela expressão a seguir.

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Esse processo pode ser escrito por meio de operadores de atraso como apontado pelo seguinte desenvolvimento.

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$y_t - L\alpha_1 y_t - L^2\alpha_2 y_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$(1 - L\alpha_1 - L^2\alpha_2)y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{\varepsilon_t}{(1 - L\alpha_1 - L^2\alpha_2)}$$

O polinômio de operadores de atraso $1 - L\alpha_1 - L^2\alpha_2$ recebe o nome de equação característica. Generalizando para ordem p a expressão de um processo autoregressivo em função do operador de atraso chegamos à equação 4.7.

$$y_t = \frac{Z_t}{1 - \sum_{i=1}^{i=p} L^i \alpha_i} \frac{1}{\theta(L)} \quad (4.7)$$

A formulação desse processo em função de sua equação característica aproxima-se de teoria de controle clássica inclusive no que pode ser compreendido da série temporal a partir da equação característica. Uma análise das raízes desse polinômio informa estabilidade, instabilidade ou estabilidade marginal, com o caso de estabilidade marginal correspondendo ao de raízes unitárias, discutido na seção ???. A relação entre a equação característica, suas raízes e a dinâmica de uma série temporal é um tópico muito explorado por Box e Jenkins em (BOX; JENKINS, 2016), abordado na seção ??.

Uma visualização do comportamento temporal de processos autoregressivos é dada pela figura 14. Observa-se que as séries temporais não exibem comportamento visivelmente distinguível no domínio do tempo.

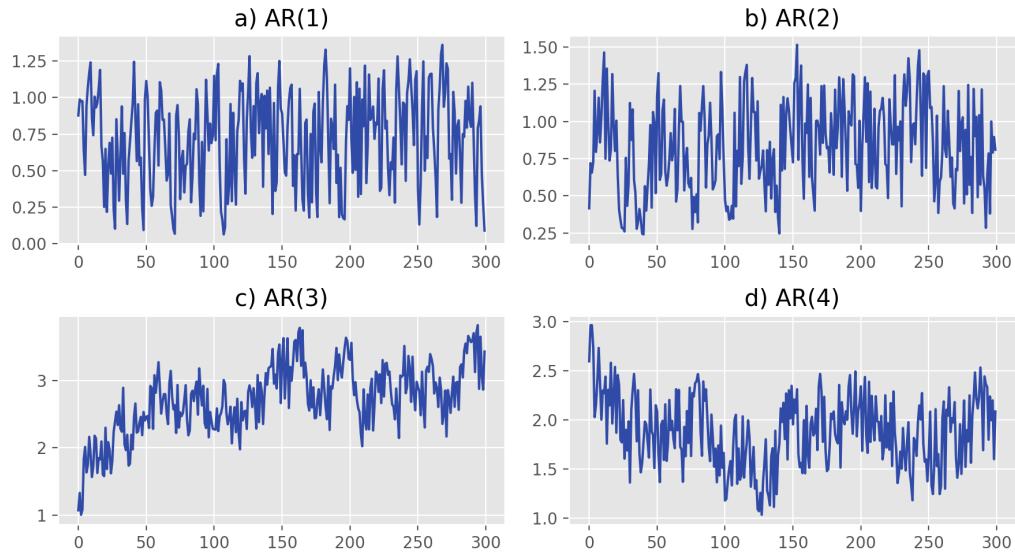


Figure 14 – Visualização de processos autoregressivos de diferentes ordens no domínio do tempo.

4.2.4 Modelo ARMA

4.2.5 ARMA

Processos ARMA, como sugerido pelo nome, são gerados pela sobreposição de processos AR e MA. Um processo $\mathbf{Y}(t)$ é considerado $ARMA(p, q)$ se for dado pela equação 4.8

$$y_t = \sum_{i=0}^{i=q} \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{i=p} y_{t-i} \alpha_i \quad (4.8)$$

Um processo $ARMA(2, 1)$ é portanto da seguinte forma.

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1}$$

Em analogia aos casos anteriores o processo pode ser escrito por meio do operador de atraso.

$$y_t(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) = Z_t(\beta_0 + \beta_1 L)$$

Podemos introduzir $\phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2$ e $\theta(L) = \beta_0 + \beta_1 L$ tal que:

$$y_t = Z_t \frac{\phi(L)}{\theta(L)} \quad (4.9)$$

A equação ?? é prontamente generalizada para corresponder à equação 4.8 estabelecendo:

$$\phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 \dots - \alpha_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \beta_0 - \beta_1 L^1 \dots - \beta_q L^q$$

A forma da equação 4.9 se assemelha a uma função de transferência. A analogia é também presente nas equações ?? e ?? de forma menos clara. O paralelo entre a teoria de modelos AR, MA e ARMA e a teoria de sistemas em torno da ideia de funções de transferência é extensa e presente principalmente no contexto de séries multivariadas. Essa interseção é explorada na seção correspondente.

Uma propriedade interessante de modelos ARMA é que modelos estacionários frequentemente podem ser modelados por modelos ARMA com menos parâmetros que modelos AR ou MA.

Por fim é interessante observar que um modelo $ARMA(p,0)$ corresponde a um modelo $AR(p)$ e um modelo $ARMA(0,q)$ corresponde a um modelo $MA(q)$.

4.2.6 Raízes Unitárias

4.3 Modelo ARIMA

TODO: rever TUDO!

Também chamados de modelos ARMA Integrados modelos ARIMA são essencialmente modelos ARMA com tentativas de remoção de não estacionariedade. Assumindo que a série em questão seja diferença-estacionária (ou tendência-estacionária com tendência linear) o modelo ARIMA tenta induzir estacionariedade introduzindo raízes unitárias em um modelo ARMA.

A distinção entre o modelo ARMA e ARIMA é a substituição de y_t por $\nabla^d y_t$.

Definindo $w_t = \nabla^d y_t$ para $d = 0, 1, 2, \dots$ temos a definição de um processo $ARIMA(p, d, q)$ dada pela equação 4.10. Observe que a equação é idêntica à equação 4.8 com w_t ao invés de y_t e que a saída é w_t , demandando uma integração para previsão de y_t . O nome do modelo referencia essa operação de reconstrução de y_t .

$$w_t = \sum_{i=0}^{i=q} \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{i=p} w_{t-i} \alpha_i \quad (4.10)$$

Podemos constatar que o modelo $ARIMA$ é simplesmente um $ARMA$ após uma diferenciação de ordem arbitrária da série temporal sob análise.

Podemos escrever um modelo $ARIMA(p, d, q)$ por meio do operador de atrasos por meio da equação 4.11, onde:

$$\phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 \dots - \alpha_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \beta_0 - \beta_1 L^1 \dots - \beta_q L^q$$

Nessa forma o paralelo entre modelos $ARMA$ e $ARIMA$ se torna mais claro.

$$y_t = Z_t \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \frac{1}{(1-L)^d} \quad (4.11)$$

O modelo $ARIMA$ segue a metodologia Box-Jenkins de modelagem, assumindo diferença-estacionariedade e tentando induzir estacionariedade por meio de sucessivas operações de diferenças. O modelo é portanto apropriado para modelagem de séries não estacionárias, apresentando a mesma propriedade de modelos $ARMA$ de frequentemente demandar menos parâmetros que modelos AR ou MA .

Por fim é interessante observar que um modelo $ARIMA(p, 0, q)$ corresponde a um modelo $ARMA(p, q)$.

4.3.1 Estabilidade e Invertibilidade

4.4 Modelos de Sazonalidade

4.4.1 Diferenciação Sazonal

4.4.2 SARIMA

O modelo ARIMA pode ser estendido de forma natural para acomodar padrões de sazonalidade. O modelo SARIMA (Seasonal ARIMA) parte da observação que saídas de sinais com alta sazonalidade podem possuir alta correlação com saídas anteriores em uma distância corresponde ao padrão de sazonalidade, como constatado no capítulo 1.

O modelo SARIMA então estabelece, em adição à operação de diferenciação do modelo ARIMA, uma operação de diferenciação sazonal ao definir a componente w_t da seguinte forma:

$$w_t = \nabla_s^D \nabla^d y_t$$

Como na definição de w_t para o modelo ARIMA temos uma diferenciação tradicional de ordem d seguida de uma diferenciação sazonal de período s e ordem D .

Como exemplo um w_t definido em função de $d = 1$, $D = 1$ e $s = 24$ assume a seguinte forma.

$$w_t = \nabla_2^1 \nabla^1 y_t = \nabla_2^1 (y_t - y_{t-1})$$

$$w_t = (y_t - y_{t-24}) - (y_{t-1} - y_{t-25})$$

Em seguida componentes autoregressivos e de média móvel são introduzidos com atrasos em múltiplos de s . O modelo final é descrito como $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$, com P e D referenciando os componentes *AR* e *MA* sazonais. Para ilustrar melhor esse conceito um pouco confuso podemos analisar a expressão de um modelo específico para depois generalizar.

Um modelo $SARIMA(1, 0, 1)(2, 1, 1)_{12}$ é dado pela seguinte expressão.

$$w_t = \varepsilon_t + \underbrace{\alpha_1 w_{t-1}}_{p=1} + \underbrace{\alpha_2 w_{t-12}}_{P=1} + \underbrace{\alpha_3 w_{t-24}}_{P=2} + \underbrace{\beta_1 \varepsilon_{t-1}}_{q=1} + \underbrace{\beta_2 \varepsilon_{t-12}}_{Q=1}$$

A escrita desse modelo por meio do operador de atraso é mais clara.

$$w_t = \varepsilon_t \frac{\beta_1 L^1 + \beta_2 L^{12}}{(1 - \alpha_1 L^1 + \alpha_2 L^{12} + \alpha_3 L^{24})}$$

Podemos então generalizar o modelo na forma do operador de atraso por meio da equação 4.12.

$$w_t = \varepsilon_t \frac{\theta_q(L) \theta_Q(L)}{\phi_p(L) \phi_P(L^s)} \quad (4.12)$$

Com os polinômios de atraso definidos como nos casos anteriores.

O modelo SARIMA é interessante ao herdar as propriedades e habilidades de ARIMA com a capacidade adicional de modelar padrões sazonais com poucos parâmetros. Os parâmetros do modelo tendem a ser difíceis de ajustar especialmente na presença de múltiplos padrões de sazonalidade mas ferramentas de ajuste automático de parâmetros são prontamente disponíveis.

4.4.3 Variáveis de Fourier

5 TEORIA DE VOLATILIDADE

5.1 Definições Adicionais

5.2 Modelo de Heterocedacidade Condicional Autoregressiva Generalizada

5.3 Modelo de Volatilidade Estocástica

5.4 Modelos Adicionais

6 TEORIA MULTIVARIADA

6.1 Definições Adicionais

Adicionar medidas de similaridade? Possivelmente em capítulo de análise moderna

6.1.1 Correlação Cruzada

6.1.2 Cointegração

6.2 Modelos em Espaço de Estados

6.3 Modelos Multivariados

6.4 Modelos de Variáveis Exógenas

7 TESTES ESTATÍSTICOS

7.1 Considerações sobre testes em séries temporais

7.2 Teste de *Dickey-Fuller*

Os testes de *Dickey-Fuller* testam a hipótese nula de presença de raízes unitárias no processo gerador de uma série temporal com a hipótese alternativa de estacionariedade.

O teste mais simples de *Dickey-Fuller* assume que o processo gerador da série temporal em questão é dado pela equação 7.1, na qual ε é ruído branco.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7.1)$$

A hipótese nula do teste é a presença de raízes unitárias em y_t , isso é, $\phi = 1$, e a hipótese alternativa é $\phi < 1$, correspondente à estacionariedade.

$$\begin{cases} H_0 : \phi = 1, \text{ não estacionariedade (raízes unitárias, possível diferença-estacionariedade)} \\ H_1 : \phi < 1, \text{ estacionariedade} \end{cases}$$

Em seguida Ly_t é subtraído de ambos os lados da equação 7.1, resultando no desenvolvimento a seguir:

$$y_t - y_{t-1} = \phi y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon$$

$$\nabla y_t = (\phi - 1)y_{t-1} + \varepsilon$$

$$\nabla y_t = \delta y_t + \varepsilon$$

As hipóteses do teste são agora reformuladas para as seguintes

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0, \text{ não estacionariedade (raízes unitárias, diferença-estacionariedade)} \\ H_1 : \delta < 0, \text{ estacionariedade} \end{cases}$$

TODO: definir estatística de teste

A estatística de teste é computada e comparada com um valor crítico proveniente da distribuição de *Dickey-Fuller* (geralmente sob $p = 0.5$) para rejeição ou não da hipótese nula.

O modelo da série temporal, dado explicitamente pela equação 7.1, pode ser alterado para testar raízes unitárias com constante e com constante e tendência determinística no tempo por meio das equações 7.2 e 7.3, respectivamente. Note que ambas as equações são apresentadas em função de δ . É mais comum testar por apenas raízes unitárias, uma vez que uma análise subjetiva visual, por correlatograma ou decomposição juntamente de remoção de tendência ou sazonalidade é tipicamente realizada antes de um teste estatístico de estacionariedade.

$$\nabla y_t = \delta y_{t-1} + u_t + a_0 \quad (7.2)$$

$$\nabla y_t = \delta y_{t-1} + u_t + a_0 + a_1 t \quad (7.3)$$

O teste aumentado de *Dickey-Fuller* (ADF) modela o processo de forma mais geral, incluindo na equação 7.1 termos representativos de processos estacionários arbitrários. O teste aumentado é projetado para remover autocorrelação do processo de validação de hipótese. De forma identicamente análoga ao teste de DF temos expansões do ADF para incluir constantes e tendências como nas equações 7.2 e 7.3 apesar de que, como no teste de DF, essas variações são pouco usadas. A estatística de teste do ADF é negativa, isso é, quanto menor seu valor maior a rejeição da hipótese nula de não estacionariedade (maior certeza de estacionariedade).

Como em qualquer teste de hipótese um valor p maior que 0.05 indica falha em rejeitar a hipótese nula, nesse caso correspondendo à impossibilidade de constatar estacionariedade. Um valor p menor ou igual a 0.05 indica rejeição da hipótese nula, correspondendo à conclusão que a série sob análise é estacionária.

Na prática o teste mais usado é o ADF que é uma simples extensão mais robusta do teste de *Dickey-Fuller*. Implementações eficiente e populares existem para R e Python.

7.2.1 Teste Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

TODO: check this

O teste KPSS desempenha uma função semelhante ao ADF com a relevante diferença de inerentemente modelar uma tendência linear no tempo por meio da equação 7.4. Seu

desenvolvimento matemático é análogo porém mais trabalhoso que o caso do ADF e será portanto omitido.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta t \quad (7.4)$$

Com ε_t representando ruído branco. O teste em seguida define as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \text{a série apresenta tendência-estacionariedade} \\ H_1 : \text{a série apresenta raízes unitárias} \end{cases}$$

Como em qualquer teste de hipótese um valor p maior que 0.05 indica falha em rejeitar a hipótese nula, nesse caso correspondendo à impossibilidade de constatar que a série não apresenta tendência estacionariedade, boa evidência de que a série é tendência-estacionária. Um valor p menor ou igual a 0.05 indica rejeição da hipótese nula, correspondendo à conclusão que a série sob análise possui raízes unitárias e é portanto não estacionária.

Observe que há uma diferença crítica: a alternativa nula não postula não estacionariedade, como no caso do ADF, mas sim tendência-estacionariedade (seção 2.8.2) decorrente diretamente da inclusão de tendência linear no modelo da equação 7.4. A diferença principal da alteração da hipótese nula é que o KPSS é usado para investigar presença de estacionariedade sob uma tendência determinística (tendência-estacionariedade) e o ADF (tipicamente) de estacionariedade propriamente dita. O KPSS é bem implementado em R e Python.

7.3 Causalidade de Granger

7.4 Box-Pierce

7.5 Ljung-Box-Pierce

7.6 *Convergence Cross Mapping*

7.7 Johansen

8 VALIDAÇÃO DE MODELOS

8.1 Análise de Resíduos

8.2 Validação Cruzada

9 ANÁLISE ESPECTRAL

10 MODELOS NÃO LINEARES

11 ANÁLISE DE SÉRIES NÃO ESTACIONÁRIAS

11.1 Definições Adicionais

11.1.1 Autocorrelação Instantânea

11.2 Indução de Estacionariedade

12 TÓPICOS ADICIONAIS

13 PROCESSAMENTO DE SINAIS ESTOCÁSTICOS

13.1 Introdução

14 APLICAÇÕES

15 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Conclusao

15.1 Contribuições do Trabalho

15.2 Limitações

15.3 Trabalhos Futuros

REFERENCES

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas. Técnicas Lineares e não Lineares Aplicadas a Sistemas. Teoria e Aplicação.** [S.l.]: UFMG, 2015.
- ATHANASOPOULOS, G.; HYNDMAN, R. **Forecasting: Principles and Practice.** [S.l.]: O'Reily, 2018.
- BENDAT, J.; PERSOL, G. **Random Data Analysis and Measurement Procedures.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2000.
- BIANCIONINI, S. **Seasonal Adjustment Methods and Real Time Trend-Cycle Estimation.** [S.l.]: Springer, 2016.
- BOX, G.; JENKINS, G. **Time Series Analysis: Forecasting and control.** [S.l.]: Wiley, 2016.
- CHATFIELD, C.; XING, H. **The Analysis of Time Series: An introduction with r.** [S.l.]: CRC Press, 2019.
- HAMILTON, J. **Time Series Analysis.** [S.l.]: Princeton University Press, 1994.
- LADIRAY, D.; QUENNEVILLE, B. **Seasonal Adjustment with the X-11 method.** [S.l.]: Springer, 2001.
- STOFFER, R. S. D. **Time Series Analysis and Its Applications.** [S.l.]: Springer, 2017.

APPENDIX A – EXEMPLO DE APÊNDICE

Um apêndice é um documento elaborado pelo autor, diferentemente do anexo. Geralmente, se coloca como apêndice, questionários, códigos de programação, tabelas que tomariam muito espaço no meio do trabalho. Artigos, resumos ou qualquer publicação relacionada ao trabalho podem ser utilizados como apêndice.

ANNEX A – EXEMPLO DE UM ANEXO

Um anexo é um documento que não foi elaborado pelo autor, ou seja, o autor apenas anexa. Anexos podem ser tabelas, mapas, diagramas, *datasheets*, manuais e etc.