

a



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**CENTER OF WHAT**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA**  
**UNDERGRADUATE COURSE IN ELECTRICAL ENGINEERING**

**GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES**

**PROCESSAMENTO E REPRESENTAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS**  
**MULTIVARIADAS E NÃO ESTACIONÁRIAS**

**BELO HORIZONTE**

**2023**

GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES

PROCESSAMENTO E REPRESENTAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS MULTIVARIADAS E  
NÃO ESTACIONÁRIAS

Undergraduate Thesis submitted to the Electrical Engineering Course of the Center of What of the Universidade Federal de Minas Gerais, as a partial requirement for obtaining the Bachelors Degree in Electrical Engineering.

Advisor: Prof. Dr. Frederico Gualberto Coelho

Co-advisor: Prof. Dr. ?

BELO HORIZONTE

2023

GABRIEL TEIXEIRA LARA CHAVES

PROCESSAMENTO E REPRESENTAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS MULTIVARIADAS E  
NÃO ESTACIONÁRIAS

Undergraduate Thesis submitted to the Electrical Engineering Course of the Center of What of the Universidade Federal de Minas Gerais, as a partial requirement for obtaining the Bachelors Degree in Electrical Engineering.

Approved on: 31th August 2023

EXAMINATION BOARD

---

Prof. Dr. Frederico Gualberto Coelho (Advisor)  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Prof. Dr. ? (Co-advisor)  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Prof. Dr. Antônio de Pádua Braga

## **ACKNOWLEDGEMENTS**

Obrigado !

“ Alice sighed wearily. ‘I think you might do something better with the time,’ she said, ‘than waste it in asking riddles that have no answers.’ ‘If you knew time as well as I do,’ said the Hatter, ‘you wouldn’t talk about wasting it. It’s him.’ ‘I don’t know what you mean,’ said Alice. ‘Of course you don’t!’ the Hatter said, tossing his head contemptuously. ‘I dare say you never even spoke to Time!’ ‘Perhaps not,’ Alice cautiously replied, ‘but I know I have to beat time when I learn music.’ ‘Ah! That accounts for it,’ said the Hatter. ‘He won’t stand beating.’ ”

(Lewis Carrol, *Alice’s Adventures in Wonderland*)

## ABSTRACT

Abstract here.

**Keywords:** Time series analysis, Discrete-time signal processing, Machine learning, Frequency analysis.

## RESUMO

Resumo

**Palavras-chave:** Análise de Séries Temporais, Processamento de Sinais de Tempo Discreto, Aprendizado de Máquina, Análise em Frequência

## LIST OF FIGURES

Figure 1 – Visualização no tempo de ruído branco . . . . .	16
Figure 2 – Série temporal com tendência linear . . . . .	19
Figure 3 – Série temporal com tendência logarítmica . . . . .	19
Figure 4 – Série temporal com sazonalidade senoidal de período arbitrário . . . . .	20
Figure 5 – Série temporal com sazonalidade aditiva . . . . .	20
Figure 6 – Série temporal com sazonalidade multiplicativa . . . . .	21
Figure 7 – Visualização de correlatograma de série com tendência linear. Observe que as autocorrelações decaem lentamente ao decorrer dos atrasos, comportamento típico de tendências determinísticas. . . . .	22
Figure 8 – Visualização de correlatograma de série com sazonalidade. Observe que o padrão senoidal da série é reproduzido nas autocorrelações. . . . .	23
Figure 9 – Conjunto de séries demonstrando diferentes níveis de estacionariedade. . . . .	24
Figure 10 – Visualização de caminhada aleatória com $y_0 = 5$ . . . . .	27



## **LIST OF TABLES**

## LIST OF SYMBOLS

$\omega$       Frequência angular

$\rho$       Autocorrelação

## CONTENTS

	<b>Contents</b> . . . . .	10
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
<b>I</b>	<b>TEORIA CLÁSSICA DE SÉRIES TEMPORAIS</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES</b> . . . . .	15
<b>2.1</b>	<b>Série Temporal</b> . . . . .	15
<b>2.2</b>	<b>Operador de Atraso(Lag)</b> . . . . .	16
<b>2.3</b>	<b>Operador de Diferença</b> . . . . .	18
<b>2.4</b>	<b>Tendência(Trend)</b> . . . . .	18
<b>2.5</b>	<b>Sazonalidade</b> . . . . .	19
<b>2.6</b>	<b>Correlação Cruzada</b> . . . . .	21
<b>2.7</b>	<b>Autocorrelação</b> . . . . .	21
<b>2.7.1</b>	<i>Autocorrelação Parcial</i> . . . . .	22
<b>2.7.2</b>	<i>Correlalograma</i> . . . . .	22
<b>2.8</b>	<b>Raízes Unitárias</b> . . . . .	24
<b>2.9</b>	<b>Estacionariedade</b> . . . . .	24
<b>2.9.1</b>	<i>Importância de Estacionariedade</i> . . . . .	25
<b>2.9.2</b>	<i>Categorias Básicas de Não Estacionariedade</i> . . . . .	26
<b>2.9.3</b>	<i>Detecção de Estacionariedade</i> . . . . .	29
<b>2.9.3.1</b>	<i>Análise de Correlalograma</i> . . . . .	29
<b>2.9.3.2</b>	<i>Teste Local-Global</i> . . . . .	29
<b>2.9.3.3</b>	<i>Teste de Dickey-Fuller</i> . . . . .	29
<b>2.9.3.4</b>	<i>Teste Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)</i> . . . . .	31
<b>2.10</b>	<b>Ruído Branco</b> . . . . .	32
<b>2.10.1</b>	<i>Detecção de ruído branco</i> . . . . .	32
<b>3</b>	<b>PROCESSAMENTO DE SINAIS ESTOCÁSTICOS</b> . . . . .	33
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	33
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	34
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	35
<b>5.1</b>	<b>Contribuições do Trabalho</b> . . . . .	35

<b>5.2</b>	<b>Limitações</b> . . . . .	35
<b>5.3</b>	<b>Trabalhos Futuros</b> . . . . .	35
<b>APPENDICES</b> . . . . .		36
	<b>APPENDIX A – Exemplo de apêndice</b> . . . . .	36
	<b>ANNEXES</b> . . . . .	36
	<b>ANNEX A – Exemplo de um anexo</b> . . . . .	37

## **1 INTRODUÇÃO**

## **Part I**

### **Teoria Clássica de Séries Temporais**

## INTRODUÇÃO

## 2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

### 2.1 Série Temporal

Uma série temporal é um conjunto de observações realizadas sequencialmente no tempo, indexadas de acordo com o momento em que foram observadas. As observações são tipicamente de um mesmo processo, tal que cada uma represente o resultado de uma amostragem. A natureza do processo subjacente é relevante para análise e modelagem de qualquer série temporal, como será visto nas próximas seções.

Assume-me, na linguagem de (??), que um conjunto de amostras  $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, y_3 \dots y_T)$  pode ser interpretado como um segmento finito de uma sequência duplamente infinita:

$$\mathbf{y}_{t=-\infty}^{\infty} = (\dots, y_{-1}, y_0, \overbrace{y_1, y_2, y_3, \dots, y_T}^{\text{Série Observada}}, y_{T+1}, y_{T+2} \dots)$$

Apesar de parecer pouco tangível, de fato qualquer série observada é satisfatoriamente descrita dessa forma. Em um contexto industrial, por exemplo, o valor de uma variável de processo é zero até a planta ser construída e entrar em operação, assume valores representativos ou não da dinâmica de interesse (assumindo valores irrelevantes quando a planta não está em operação plena), e tendendo ao infinito retorna a zero quando a planta for desativada.

Essa interpretação de uma série temporal é importante ao implicitamente insinuar que o processo existe em um intervalo temporal mais abrangente do que o observado. É portanto necessário se questionar sobre quanto os dados representam o processo analisado e em quais intervalos de tempo.

TODO: Séries temporais são inerentemente diferentes de dados de corte transversal por representarem amostras discretas de um mesmo processo ao invés de amostras aleatórias de uma população.

A forma mais natural de analisar uma série temporal é visualizar seus valores no tempo, como ilustra a imagem [1](#).



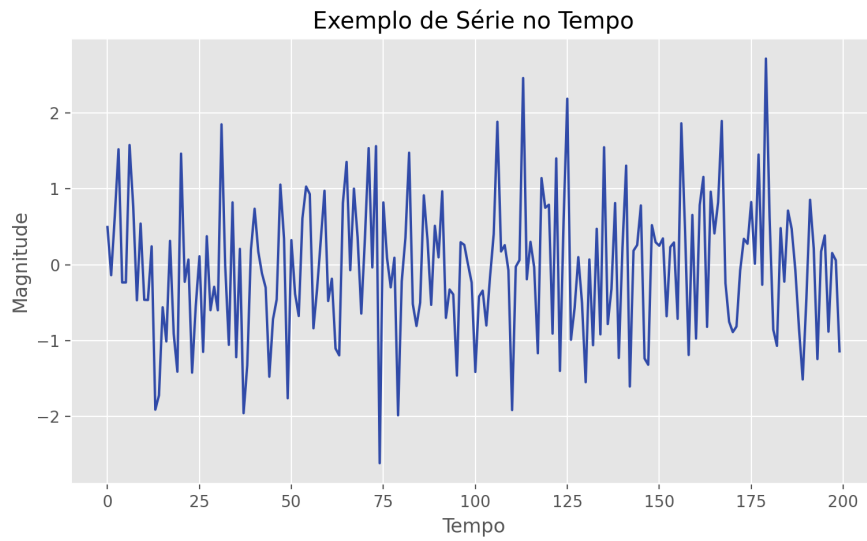


Figure 1 – Visualização no tempo de ruído branco

## 2.2 Operador de Atraso(*Lag*)

É importante introduzir o operador de atraso que será referido nesse texto como operador *lag*.

Dadas as séries  $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, y_3 \dots y_T)$  e  $\mathbf{x}_t = (x_0, x_1, x_2 \dots x_{T-1})$  tal que

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{t-1}$$

isso é,

$$y_1 = x_0$$

$$y_2 = x_1$$

$$\vdots$$

$$y_T = x_{T-1}$$

Podemos definir  $\mathbf{x}_t$  em função de  $\mathbf{y}_t$  como:

$$\mathbf{x}_t = L\mathbf{y}_t$$

tal que

$$\boxed{\mathbf{y}_{t-1} = L\mathbf{y}_t}$$

Observamos que o operador de atraso atrasa uma série temporal em uma unidade de tempo. Uma breve divagação matemática (??) permite definir o operador com propriedades muito semelhantes à multiplicação, como associatividade, comutatividade e distribuição. Para atrasar múltiplas unidades de tempo temos que:

$$L(L(\mathbf{y}_t)) = L(\mathbf{y}_{t-1}) = \mathbf{y}_{t-2} = L^2\mathbf{y}_t$$

de forma que

$$L^n\mathbf{y} = \mathbf{y}_{t-n}$$

Um uso importante do operador, decorrente de suas propriedades algébricas, é exemplificado na seguinte expansão

$$(aL^2 + bL^3)\mathbf{y}_t = a\mathbf{y}_{t-2} + b\mathbf{y}_{t-3}$$

Conhecimento do operador de atraso é importante para compreender a literatura de séries temporais e facilita comunicação objetiva de análises cotidianas. O presente trabalho usa do operador para descrever uma série de modelos.

Como nota final é importante mencionar que alguns livros (??) (??) usam a letra  $B$  para denotar o operador de atraso e que na maior parte dos recursos *online* o operador é referido por seu nome em inglês, *lag*.

A analogia entre o operador de atraso e a variável complexa  $e^{-j\omega} = z^{-1}$  é clara, com a relevante diferença que  $z^{-1}$  atrasa um sinal em uma unidade de tempo se a operação for realizada no domínio  $z$  enquanto o operador de atraso atua diretamente no domínio do

tempo. Essa característica permite que filtros com equações de recorrência complexas sejam representados de forma compacta no domínio do tempo por meio de polinômios de atraso.

Uma propriedade interessante decorrente da equivalência entre  $z^{-1}$  e  $L$  é que pode se pensar em um plano  $L$  cuja análise é igualmente informativa à do plano  $z$ , notando que o espaço é de certa forma invertido. Uma análise da posição dos polos de um sistema representado por meio de um polinômio em  $L$  conclui que o sistema é instável se tais polos estiverem fora do círculo unitário, contrário do que conhecemos do plano  $z$ .

Por fim vale mencionar que alguns autores(??)(??) usam a notação  $q^{-1}$  para esse operador.

### 2.3 Operador de Diferença

O operador de diferenças  $\nabla$  ou  $\Delta$  é o equivalente discreto da operação contínua de diferenciação e opera sob uma série temporal  $\mathbf{y}_t$  da seguinte forma:

$$\nabla \mathbf{y}_t = (1 - L)\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - L\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$$

O operador possui propriedades de associatividade e distribuição, tal que

$$\nabla^2 \mathbf{y}_t = \nabla(\nabla(\mathbf{y}_t)) = \nabla(\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}) = \nabla \mathbf{y}_t - \nabla \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_t - 2\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{y}_{t-2}$$

### 2.4 Tendência(*Trend*)

A variação do valor esperado de um processo estocástico é denominado tendência. A partir de uma série temporal definimos tendência como a variação de sua média amostral. A imagem 2 ilustra uma série com tendência linear. Observa-se que ao longo do tempo a média das observações cresce linearmente. Tendências de séries reais frequentemente seguem um perfil logarítmico (??), como na figura 3. Nesse caso uma transformação exponencial da série, isso é, a aplicação de uma função exponencial a cada observação, tornaria a tendência linear.

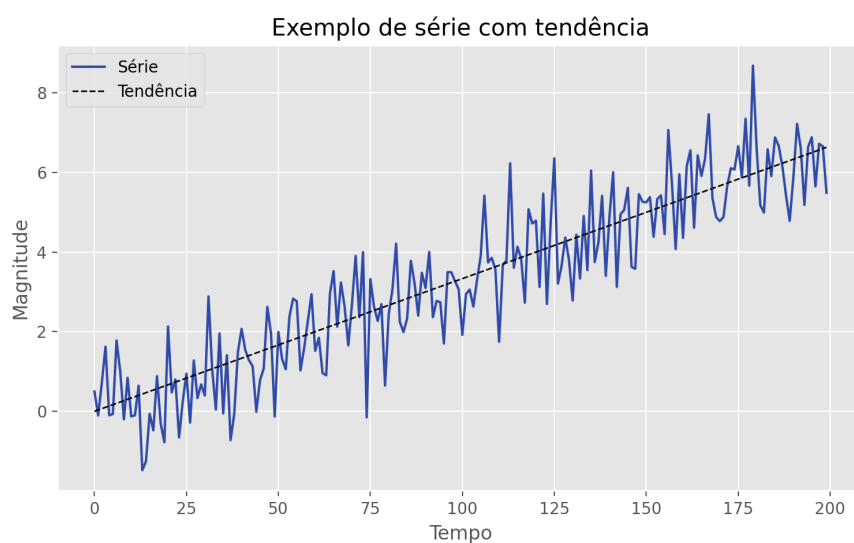


Figure 2 – Série temporal com tendência linear

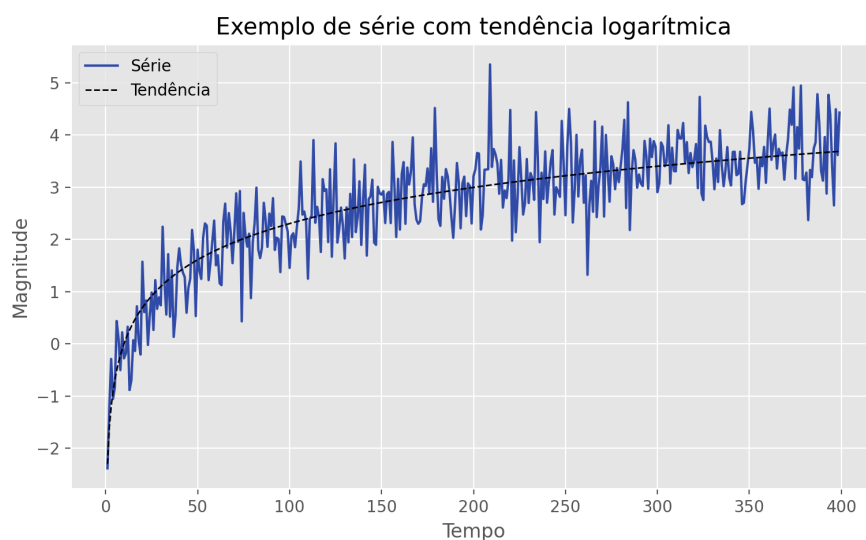


Figure 3 – Série temporal com tendência logarítmica

## 2.5 Sazonalidade

A variação periódica de média móvel das observações de uma série temporal é denominada sazonalidade. Em séries no contexto de finanças sazonalidade frequentemente segue ciclos de calendário como anual, mensal, semestral, etc. No contexto mais amplo de séries temporais sazonalidade apresenta período arbitrário, apesar da linguagem em torno dessa propriedade estar muito associada aos períodos anteriormente mencionados.

Um exemplo de série temporal com sazonalidade é ilustrado na figura 4.

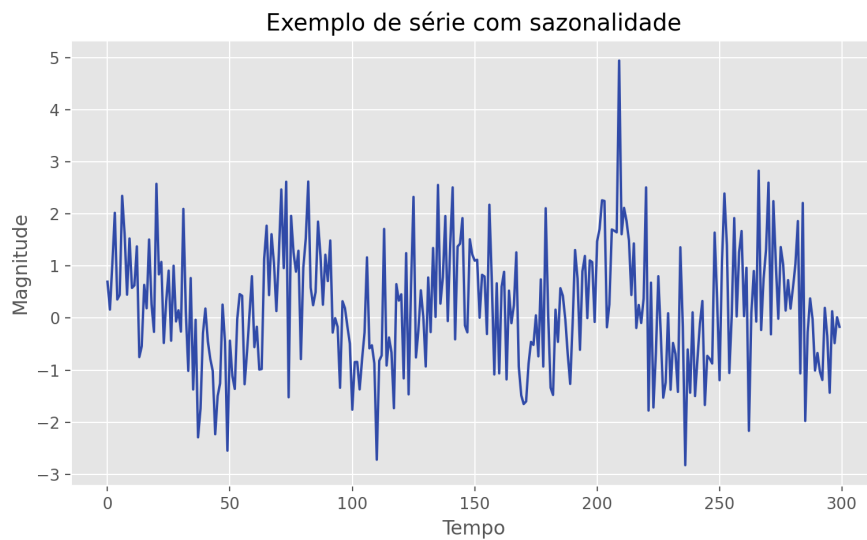


Figure 4 – Série temporal com sazonalidade senoidal de período arbitrário

Na presença de tendência sazonalidade pode ser considerada aditiva, se sua variação for constante em torno da tendência, e multiplicativa, se sua variação depender o valor da tendência. Exemplos de sazonalidade aditiva e multiplicativa são dados pelas figuras 5 e 6, respectivamente. Discernir entre os dois tipos de sazonalidade é importante para modelagem.

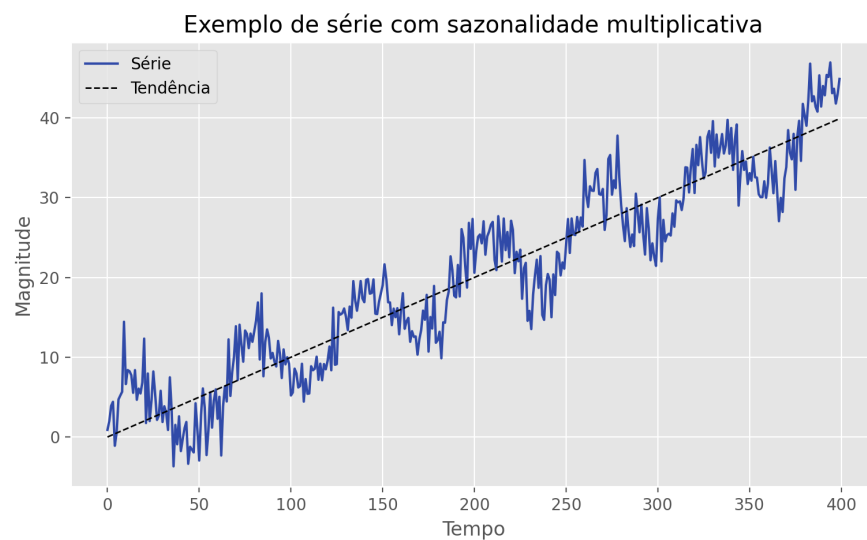


Figure 5 – Série temporal com sazonalidade aditiva

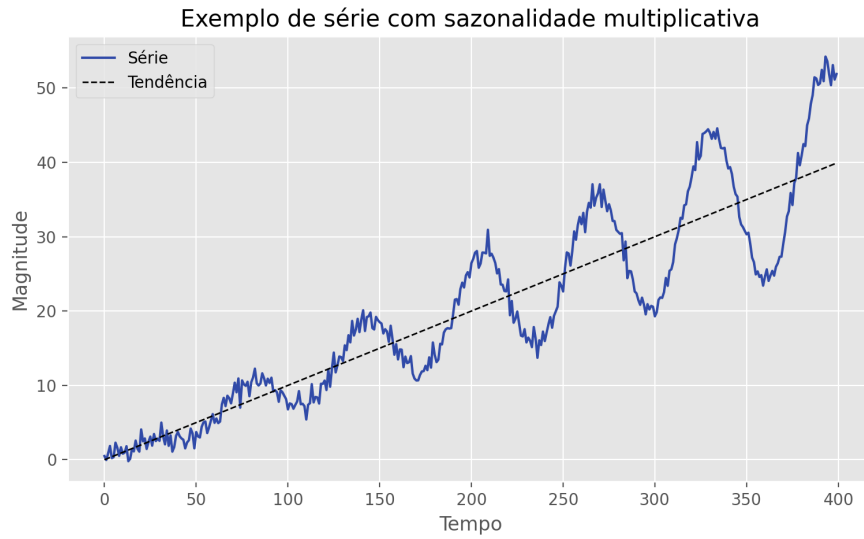


Figure 6 – Série temporal com sazonalidade multiplicativa

## 2.6 Correlação Cruzada

TODO: start here !

## 2.7 Autocorrelação

TODO: rewrite basically from scratch. analogy with convolution would be kinda cool.

Autocorrelação pode ser definida como a correlação amostral entre uma série  $\mathbf{y}_t$  e sua versão atrasada em um número arbitrário de  $k$  atrasos  $L^k \mathbf{y}_t$ . Podemos definir a autocorrelação  $r_k$  de um atraso  $k$  diretamente a partir da definição de correlação amostral por meio da equação 2.1 sob as seguintes premissas:

1. A média  $\bar{y}$  de  $\mathbf{y}_t$  é constante no tempo
2. O número de observações  $N$  de  $\mathbf{y}_t$  é suficientemente grande ( $N \approx 100$ )

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

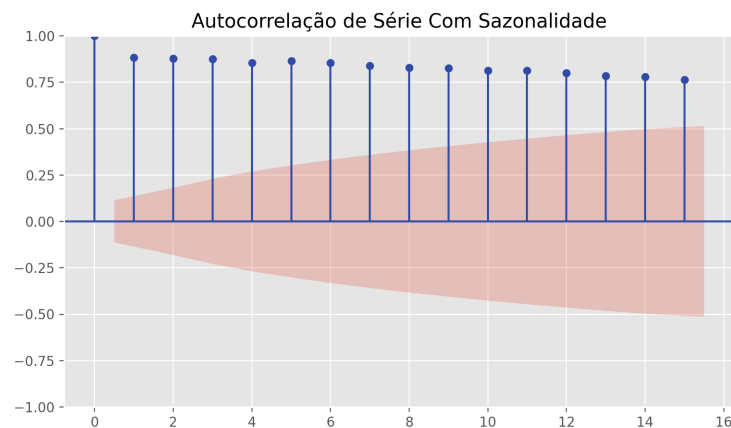


Figure 7 – Visualização de correlatograma de série com tendência linear. Observe que as autocorrelações decaem lentamente ao decorrer dos atrasos, comportamento típico de tendências determinísticas.

### 2.7.1 Autocorrelação Parcial

É interessante mencionar a existência de autocorrelação parcial nessa seção juntamente de uma descrição em alto nível do que esse valor representa. Sua definição formal será apresentada na seção ?? seguindo como em (??) e (??).

Autocorrelação parcial foi introduzida por Box e Jenkins em(??) como uma ferramenta auxiliar na identificação de modelos. O valor  $\phi_{kk}$  é definido como a correlação parcial entre  $y_t$  e  $y_{t-k}$ , isso é, a correlação restante entre  $y_t$  e  $y_{t-k}$  após levar em consideração a contribuição de  $y_t, y_{t-1} \dots y_{t-k+1}$ .

### 2.7.2 Correlatograma

Um correlatograma é um gráfico de barras representativo da autocorrelação ou autocovariância em  $k$  amostras de uma série temporal ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), de forma que a primeira barra represente a autocorrelação entre  $y_t$  e si mesmo (sempre igual à 1), a segunda entre  $y_t$  e  $y_{t-1}$ , a terceira entre  $y_t$  e  $y_{t-2}$ , e assim por diante. O correlatograma da série visualizada pela figura 2 é ilustrado na figura 7.

A figura 7 informa um intervalo de relevância dado por um sombreamento vermelho. Qualquer valor de autocorrelação dentro desse intervalo é estatisticamente insignificante e pode ser considerado igual a zero.

O correlatograma é uma ferramenta indispensável em análise de séries temporais para tarefas como detecção de estacionariedade, identificação de sazonalidade, análise de resíduo,

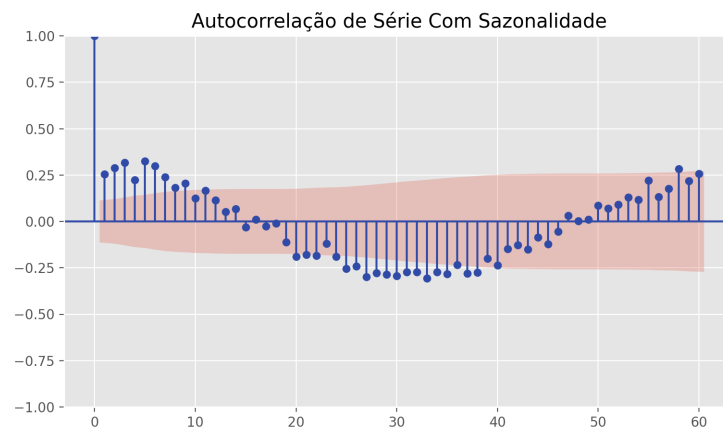


Figure 8 – Visualização de correlatograma de série com sazonalidade. Observe que o padrão senoidal da série é reproduzido nas autocorrelações.

engenharia de características, escolha de modelo e identificação de ruído branco(seção 2.10), entre outros. No contexto de identificação de sistemas autocovariância e autocorrelação e portanto o correlatograma desempenha um importante papel na identificação de propriedades de sinais e sistemas imersos em ruído devido à robustez ao ruído da operação de correlação cruzada(?). TODO: Na figura tal, por exemplo, observamos um sinal senoidal imerso em ruído cuja natureza periódica subjacente torna clara por meio de seu correlatograma.

É importante mencionar que o correlatograma de uma série com tendência determinística, como a da figura 7, apresenta o comportamento observado de autocorrelações altas com pouca atenuação ao longo dos atrasos. De forma análoga o correlatograma de uma série com sazonalidade apresenta periodicidade que reproduz seu padrão temporal, como ilustra a figura 8, correlatograma da série da figura 4. O primeiro correlatograma é informativo até certo ponto: informa simplesmente que a série apresenta tendência. Para analisar tais séries de forma mais produtiva, a fim de elaborar um possível modelo, por exemplo, é importante que a série seja estacionária (seção 2.9). É inclusive afirmado em alguns textos da literatura estatística(?), que um correlatograma só faz que sentido se a série associada for estacionária, observação mais geral e rigorosa das restrições de uso da equação 2.1.

Na engenharia a análise do correlatograma de sinais não estacionários é utilizada para investigação da adequação de tempo de amostragem, onde uma autocovariância com valores lentamente decrescentes e um mínimo local indica que o sinal pode estar superamostrado, propriedade indesejável que pode resultar em problemas computacionais além de desperdício de memória.

TODO: see if autocorr helps find seasonality in additive or multiplicative series



TODO: add sampling analysis of silica series

## 2.8 Raízes Unitárias

??

## 2.9 Estacionariedade

Uma série temporal  $\mathbf{x}_t$  gerada por um processo  $\mathbf{X}(t)$  é considerada estacionária se atender às seguintes três condições:

1.  $E(\mathbf{X}(t)) = \mu$
2.  $Var(\mathbf{X}(t)) = \sigma^2$
3.  $Cov[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t + \tau)] = \gamma(\tau)$

Que podem ser interpretadas da seguinte forma

1. A média da série  $\mathbf{x}_t$  é constante ao longo do tempo
2. A variância da série  $\mathbf{x}_t$  é constante ao longo do tempo
3. A autocorrelação de  $\mathbf{x}_t$  depende apenas do atraso

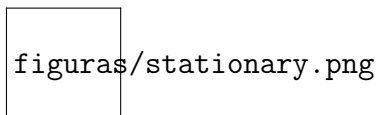


Figure 9 – Conjunto de séries demonstrando diferentes níveis de estacionariedade.

Um bom exemplo de graus de estacionariedade em séries temporais dado por Athanasopoulos e Hyndman (??) é ilustrado pela figura 9. As séries das figuras 9.a, 9.e e 9.i demonstram clara tendência, sendo portanto não estacionárias. As séries das figuras 9.d, 9.h, 9.i são igualmente não estacionárias por apresentarem clara sazonalidade, enquanto a série da figura 9.g aparenta ser sazonal mas apresenta picos aperiódicos de intensidade muito distinta, sendo considerada estacionária pelos autores. O caso da série da figura 9.g é um complicado por aparentar também violar o requisito de variância constante. Para concluir assim como os autores que a série é estacionária é necessário mais do que uma investigação visual; o texto que discute a série leva em conta seu processo gerador (??).

As séries das figuras 9.c e 9.f são aparentemente não estacionárias no intervalo observado por demonstrarem variação em sua média móvel mas podem ser um caso de raízes

unitárias.

Por eliminação temos que apenas as séries ilustradas pelas figuras 9.b e 9.g são estacionárias, o caso de 9.b contendo uma clara anomalia.

O exemplo de análise de estacionariedade da figura 9 demonstra a imprecisão da abordagem visual para essa tarefa. Torna-se necessário o estabelecimento de procedimentos mais objetivos para detecção de estacionariedade (seção 2.9.3).

### 2.9.1 Importância de Estacionariedade

Estacionariedade é uma propriedade desejável de se observar em uma série temporal para fins analíticos e de modelagem.

Há algumas formas de compreender como estacionariedade colabora para a modelagem bem sucedida de uma série temporal.

Podemos pensar na propriedade de estacionariedade como um tipo de estrutura de dependência. Se as amostras  $X_1, X_2, \dots, X_N$  de um conjunto  $\mathbf{X}$  forem independentes entre si temos formas interessantes de modelar a função geradora de  $\mathbf{X}$  como o teorema do limite central, lei dos grandes números, etc. Há apenas uma forma de um conjunto amostral ser independente mas muitas formas de ser dependente, tornando difícil o estabelecimento de recursos eficientes para modelagem geral de processos dependentes. Séries temporais sendo naturalmente observações de processos dependentes (seção 2.1) é interessante definir estruturas de dependência que permitam o uso de tais recursos. Estacionariedade é uma estrutura de dependência que permite aplicar propriedades úteis de independência em séries temporais. Abordando a mesma ideia mais intuitivamente podemos pensar no seguinte exemplo: se um processo possui valor esperado e variância constante e autocorrelação invariante ao tempo podemos por meio da lei dos grandes números estimar seu valor esperado e variância com cada vez mais confiança a partir da média e variância amostral, respectivamente. O mesmo argumento intuitivo se estende analogamente para o caso de aprendizado de máquina, no qual por meio de teoria de aprendizado estatístico é possível argumentar que uma série estacionária é “mais fácil” de aprender.

De forma mais quantitativa o teorema de decomposição de Wold (??) conclui que qualquer série temporal estacionária pode ser representada pela seguinte combinação linear

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Z_{t-j} + \eta_t$$

No qual  $\eta$  representa uma série determinística e  $Z_t$  um processo puramente aleatório (seção 2.10). O leitor reconhecerá parte da expressão acima como um processo  $MA(\infty)$  (seção ??). Esse resultado tem como consequência a importante conclusão que qualquer série estacionária é possivelmente aproximável por um modelo MA e portanto, via invertibilidade, modelos AR e ARMA (seção ??).

Por fim estacionariedade permite o uso de uma série de modelos que serão discutidos na seção sobre modelos estacionários. Esses métodos são bem compreendidos e implementados, facilitando sua interpretação, uso e sustentação.

### 2.9.2 *Categorias Básicas de Não Estacionariedade*

Como extensão do argumento sobre estruturas de dependência na seção anterior podemos afirmar que, sendo estacionariedade um padrão de dependência, temos infinitas formas de não estacionariedade, retornando ao caso de dependência generalizada. É interessante identificar nesse universo de dependência padrões de séries não estacionárias que são facilmente transformadas em séries estacionárias.

Uma série temporal com presença de tendência determinística, como ilustrada na figura 2, pode ser representada pela seguinte expressão:

$$y_t = e_t + f(t) + \varepsilon_t \quad \text{onde} \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Na qual  $e_t$  representa uma série estacionária,  $f(t)$  uma função determinística do tempo e  $\varepsilon_t$  ruído branco (seção 2.10). Nota-se que  $f(t)$  é uma função monotônica arbitrária tal que  $y_t$  seja uma série não estacionária. No caso da figura 2 temos  $f(t)$  linear e na figura 3 logarítmica. Uma série temporal demonstrando esse tipo de não estacionariedade é considerada **tendência-estacionária**, uma vez que simplesmente removendo a tendência  $f(t)$  temos estacionariedade. Isso pode ser feito de várias formas, talvez com maior simplicidade diferenciando a série. Métodos mais sofisticados incluem decomposição ETS (seção ??) e regressão com finalidade de modelar  $f(t)$  de forma que o resíduo represente uma a série estacionária  $e_t + \varepsilon_t$ .

Uma série com presença de tendência estocástica pode ser classificada de maneira semelhante. O exemplo mais simples de tal série é gerada por um passeio aleatório, definido pelo seguinte processo, visualizado pela figura 10:

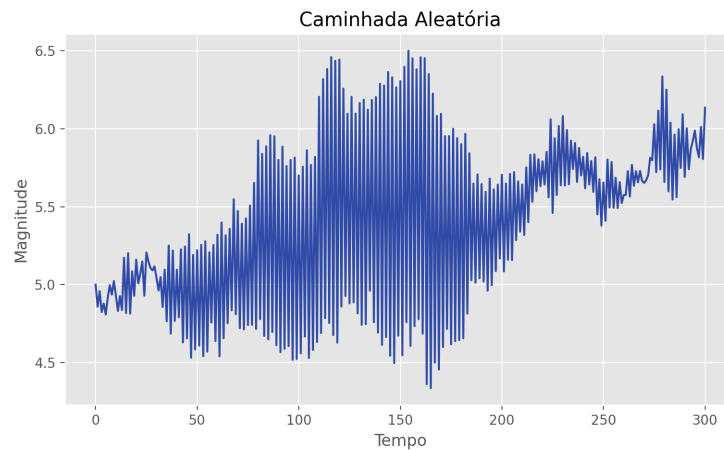


Figure 10 – Visualização de caminhada aleatória com  $y_0 = 5$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{onde} \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Por meio de um desenvolvimento recursivo do processo podemos escrever:

$$y_t = (y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$y_t = ((y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\vdots$$

$$y_t = \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j} + y_0$$

Resultado a partir do qual a não estacionariedade de  $y_t$  se torna evidente, uma vez que

$$\text{var}(y_t) = \sigma^2 t$$

Além da covariância ser dependente do tempo.

Uma forma simples de tornar a série estacionária é diferenciá-la em primeira ordem, isso é, aplicar o operador de diferença primeira:

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$\nabla y_t = \varepsilon_t$$

Sabemos pela seção 2.10 que ruído branco é um processo estacionário.

A caminhada aleatória é denominada uma série **diferença-estacionária** pelo fato da operação de diferença introduzir estacionariedade. Essa é uma forma tão comum de não estacionariedade que a ideia de “diferenciar uma série antes de fazer qualquer coisa” é proeminente entre profissionais de dados, apesar de que geralmente necessita-se apenas de estacionariedade <sup>1</sup>.

É igualmente possível que uma série diferença-estacionária seja estacionária em sua  $n$ -ésima diferença, tal que estacionariedade seja observada por uma operação de diferenças de ordem  $n$ . A ideia de tirar sucessivas diferenças até atingir estacionariedade é fundamental no método de Box-Jenkins, por exemplo.

Séries diferença-estacionárias apresentam raízes unitárias e os dois termos são frequentemente usados nos mesmos contextos.

Podemos resumir as definições das categorias de não estacionariedade abordadas nessa seção assim como suas implicações como segue:

1. **Estacionariedade em Tendência:** Uma série é considerada tendência-estacionária se apresentar uma tendência determinística. No caso de anomalias ou eventos de perturbação séries com esse tipo de tendência retornam ao valor da tendência ao longo do tempo, “esquecendo” o evento perturbador. Esse tipo de série se torna estacionária pela remoção da tendência determinística, processo realizado por meio de regressão da tendência, por diferenciação, por decomposição, etc.
2. **Estacionariedade Diferenciável:** Uma série é considerada diferença-estacionária se apresentar uma tendência estocástica. No caso de anomalias ou eventos de perturbação séries com esse tipo de tendência são irreversivelmente afetadas, “lembrando” do evento perturbador. Esse tipo de série se torna estacionária por diferenciação em ordem  $n$ . Possui raízes unitárias e é frequentemente discutida nessa linguagem.

---

<sup>1</sup>essa prática é parcialmente justificada considerando que a maior parte das séries temporais “reais” são não estacionárias e frequentemente diferencialmente estacionárias

TODO: retomar estacionarização de séries em capítulo ou apêndice dedicado?

### 2.9.3 *Deteção de Estacionariedade*

Espera-se que as discussões das seções anteriores tenham estabelecido motivação suficiente para o início de uma exploração de métodos de detecção de estacionariedade mais objetivos que simples análise visual. As seguintes subseções abordam esses métodos, a maioria dos quais são testes paramétricos.

#### 2.9.3.1 *Análise de Correlalograma*

Apesar de pouco formal e altamente sujeito a erro alguns autores e muitos praticantes (??) (??) apontam para a possibilidade de identificar não estacionariedade a partir de análise visual do correlalograma de uma série temporal. Como mencionado na seção 2.7.2 séries que violam os requisitos de estacionariedade por tendência determinística apresentam correlalogramas distintos - autocorrelações altas e persistentes. No entanto séries cuja não estacionariedade for facilmente detectada via correlalograma também são frequentemente notavelmente não estacionárias via simples análise temporal.

#### 2.9.3.2 *Teste Local-Global*

TODO

#### 2.9.3.3 *Teste de Dickey-Fuller*

Os testes de *Dickey-Fuller* testam a hipótese nula de presença de raízes unitárias no processo gerador de uma série temporal com a hipótese alternativa de estacionariedade.

O teste mais simples de *Dickey-Fuller* assume que o processo gerador da série temporal em questão é dado pela equação 2.2, na qual  $\varepsilon$  é ruído branco.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

A hipótese nula do teste é a presença de raízes unitárias em  $y_t$ , isso é,  $\phi = 1$ , e a hipótese alternativa é  $\phi < 1$ , correspondente à estacionariedade.

$$\begin{cases} H_0 : \phi = 1, \text{n\~ao estacionariedade (ra\~izes unit\~arias, poss\~ivel diferen\~ca-estacionariedade)} \\ H_1 : \phi < 1, \text{estacionariedade} \end{cases}$$

Em seguida  $\Delta y_t$  é subtraído de ambos os lados da equação 2.2, resultando no desenvolvimento a seguir:

$$y_t - y_{t-1} = \phi y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon$$

$$\Delta y_t = (\phi - 1)y_{t-1} + \varepsilon$$

$$\Delta y_t = \delta y_t + \varepsilon$$

As hipóteses do teste são agora reformuladas para as seguintes

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0, \text{n\~ao estacionariedade (ra\~izes unit\~arias, diferen\~ca-estacionariedade)} \\ H_1 : \delta < 0, \text{estacionariedade} \end{cases}$$

TODO: definir estatística de teste

A estatística de teste é computada e comparada com um valor crítico proveniente da distribuição de *Dickey-Fuller* (geralmente sob  $p = 0.5$ ) para rejeição ou não da hipótese nula.

O modelo da série temporal, dado explicitamente pela equação 2.2, pode ser alterado para testar raízes unitárias com constante e com constante e tendência determinística no tempo por meio das equações 2.3 e 2.4, respectivamente. Note que ambas as equações são apresentadas em função de  $\delta$ . É mais comum testar por apenas raízes unitárias, uma vez que uma análise subjetiva visual, por correlatograma ou decomposição juntamente de remoção de tendência ou sazonalidade é tipicamente realizada antes de um teste estatístico de estacionariedade.

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + u_t + a_0 \tag{2.3}$$

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + u_t + a_0 + a_1 t \tag{2.4}$$

O teste aumentado de *Dickey-Fuller*(ADF) modela o processo de forma mais geral, incluindo na equação 2.2 termos representativos de processos estacionários arbitrários. O teste aumentado é projetado para remover autocorrelação do processo de validação de hipótese. De forma identicamente análoga ao teste de DF temos expansões do ADF para incluir constantes e tendências como nas equações 2.3 e 2.4 apesar de que, como no teste de DF, essas variações são pouco usadas. A estatística de teste do ADF é negativa, isso é, quanto menor seu valor maior a rejeição da hipótese nula de não estacionariedade (maior certeza de estacionariedade).

Como em qualquer teste de hipótese um valor  $p$  maior que 0.05 indica falha em rejeitar a hipótese nula, nesse caso correspondendo à impossibilidade de constatar estacionariedade. Um valor  $p$  menor ou igual a 0.05 indica rejeição da hipótese nula, correspondendo à conclusão que a série sob análise é estacionária.

Na prática o teste mais usado é o ADF que é uma simples extensão mais robusta do teste de *Dickey-Fuller*. Implementações eficiente e populares existem para R e Python.

#### 2.9.3.4 Teste Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

TODO: check this

O teste KPSS desempenha uma função semelhante ao ADF com a relevante diferença de inerentemente modelar uma tendência linear no tempo por meio da equação 2.5. Seu desenvolvimento matemático é análogo porém mais trabalhoso que o caso do ADF e será portanto omitido.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta t \quad (2.5)$$

Com  $\varepsilon_t$  representando ruído branco. O teste em seguida define as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \text{a série apresenta tendência-estacionariedade} \\ H_1 : \text{a série apresenta raízes unitárias} \end{cases}$$

Como em qualquer teste de hipótese um valor  $p$  maior que 0.05 indica falha em rejeitar a hipótese nula, nesse caso correspondendo à impossibilidade de constatar que a série não apresenta tendência estacionariedade, boa evidência de que a série é tendência-estacionária.



Um valor  $p$  menor ou igual a 0.05 indica rejeição da hipótese nula, correspondendo à conclusão que a série sob análise possui raízes unitárias e é portanto não estacionária.

Observe que há uma diferença crítica: a alternativa nula não postula não estacionariedade, como no caso do ADF, mas sim tendência-estacionariedade (seção 2.9.2) decorrente diretamente da inclusão de tendência linear no modelo da equação 2.5. A diferença principal da alteração da hipótese nula é que o KPSS é usado para investigar presença de estacionariedade sob uma tendência determinística (tendência-estacionariedade) e o ADF (tipicamente) de estacionariedade propriamente dita. O KPSS é bem implementado em R e Python.

## 2.10 Ruído Branco

Uma série temporal  $\mathbf{x}_t$  gerada por um processo  $\mathbf{X}(t)$  é considerada ruído branco ou um processo puramente aleatório se atender às seguintes três condições:

1.  $E(\mathbf{X}(t)) = 0$
2.  $Var(\mathbf{X}(t)) = \sigma^2$
3.  $Cov[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t + \tau)] = 0$

Que podem ser interpretadas da seguinte forma

1. A média da série  $\mathbf{x}_t$  é nula ao longo do tempo
2. A variância da série  $\mathbf{x}_t$  é constante ao longo do tempo
3. Não há correlação entre as amostras de  $\mathbf{x}_t$

Observa-se que ruído branco é um caso específico de estacionariedade, se diferenciando pela especificação do valor esperado e autocorrelação entre quaisquer amostras em zero. A compreensão da definição e capacidade de identificação de ruído branco é importante para análise de resíduos, detalhado na seção ??.

### 2.10.1 Detecção de ruído branco

TODO

### **3 PROCESSAMENTO DE SINAIS ESTOCÁSTICOS**

#### **3.1 Introdução**

## **4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**

Conclusao

### **4.1 Contribuições do Trabalho**

### **4.2 Limitações**

### **4.3 Trabalhos Futuros**

## **APPENDIX A – EXEMPLO DE APÊNDICE**

Um apêndice é um documento elaborado pelo autor, diferentemente do anexo. Geralmente, se coloca como apêndice, questionários, códigos de programação, tabelas que tomariam muito espaço no meio do trabalho. Artigos, resumos ou qualquer publicação relacionada ao trabalho podem ser utilizados como apêndice.

## ANNEX A – EXEMPLO DE UM ANEXO

Um anexo é um documento que não foi elaborado pelo autor, ou seja, o autor apenas anexa. Anexos podem ser tabelas, mapas, diagramas, *datasheets*, manuais e etc.