

Lista de Exercícios – Processos Estocásticos Módulo 4

Considere um experimento randômico realizado em laboratório, onde se tem duas variáveis randômicas sorteadas de forma conjunta. Ambas variáveis podem assumir os valores $\{0,1,2,3\}$.

índice	X	Y
1	1	3
2	2	2
3	1	2
4	0	3
5	1	1
6	2	2
7	1	2
8	2	0
9	2	2
10	1	1
11	0	0
12	2	2
13	1	2
14	2	1
15	3	0
16	2	2
17	0	2
18	2	2
19	2	1
20	3	1
21	1	1
22	2	2
23	3	2
24	3	3
25	1	1
26	2	3
27	2	2
28	2	1
29	2	1
30	0	1
31	1	2
32	1	0

Questão 1 – Tendo como base os resultados do experimento randômico apresentado.

- Construa a PMF conjunta que represente o experimento realizado.
- Determine a CDF conjunta do experimento.

Questão 2 – Encontre a PMF marginal $P_X(x)$ e $P_Y(y)$ para o experimento randômico mostrado.

Questão 3 – Encontre CDF marginal $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ para o experimento randômico mostrado.

Questão 4 – Verifique se no experimento as variáveis randômicas X e Y são independentes.

Questão 5 – Construa PMF condicional $P_{X|Y}(x_i|y_j)$ de X dado Y .

Questão 6 – Encontre a CDF condicional $F_{X|Y}(x) = P_{X|Y}(X < x_i|y_j)$.

Questão 7 – Construa PMF condicional $P_{Y|X}(y_i|x_j)$ de Y dado X .

Questão 8 – Encontre a CDF condicional $F_{Y|X}(y) = P_{Y|X}(Y < y_i|x_j)$.

Questão 9 – Com base nos resultados anteriores para o experimento randômico, calcule as probabilidades condicionais:

- $P_{X|Y}(x_i = 0|1 \leq y_j \leq 3)$
- $P_{Y|X}(y_i = 0|1 \leq x_j \leq 3)$
- $P_{Y|X}(y_i = 2|x_j \leq 2)$
- $P_{X|Y}(x_j \leq 1|y_j \geq 2)$
- $P_{Y|X}(y_j = 3|x_i \leq 1)$
- $P_{X|Y}(1 \leq x_j \leq 3|1 \leq y_j \leq 3)$

Questão 10 – Considere agora o experimento randômico conjunto cujas variáveis X e Y são equiprováveis e a as saídas de ambas, X e Y , podem assumir os valores $\{0,1,2,3\}$.

- Construa a PMF conjunta que represente o experimento realizado.
- Determine a CDF conjunta.
- Encontre a PMF marginal $P_X(x)$ e $P_Y(y)$
- Encontre a CDF marginal $F_X(x)$ e $F_Y(y)$
- Verifique se X e Y são independentes.

Questão 11 – Considere novamente os resultados do experimento randômico mostrado na tabela, calcule as expectâncias condicionais:

- a) $E[X|Y = y]$
- b) $E[Y|X = x]$

Questão 12 – Expresse $E[X|Y]$ e $E[Y|X]$ como variáveis randômicas cujo valores são representados por $g(y) = E[X|Y = y]$ quando $Y = y$ e $g(x) = E[Y|X = x]$ quando $X = x$, respectivamente.

Questão 13 – Encontre a variância condicional de X dado Y e expresse essa variância condicional $\text{Var}(X|Y=y)$ como uma variável randômica cujo valor é igual a $g(y) = \text{Var}(X|Y = y)$ quando $Y = y$.

Questão 14 – Encontre a variância condicional de Y dado X e expresse essa variância condicional $\text{Var}(Y|X=x)$ como uma variável randômica cujo valor é igual a $g(x) = \text{Var}(Y|X = x)$ quando $X = x$.

Questão 15 – Considerando a condições de contorno apresentadas no experimento randômico descrito na questão 10.

- a) Calcule a expectância condicional $E[X|Y = y]$
- b) Calcule a expectância condicional $E[Y|X = x]$
- c) Expresse as expectâncias condicionais calculadas em a) e b), $E[X|Y]$ e $E[Y|X]$, respectivamente, como variáveis randômicas cujo valores são representados por $g(y) = E[X|Y = y]$ quando $Y = y$ e $g(x) = E[Y|X = x]$ quando $X = x$.
- d) Calcule a variância condicional $\text{Var}(X|Y=y)$.
- e) Calcule a variância condicional $\text{Var}(Y|X=x)$.
- f) Expresse as variâncias condicionais $\text{Var}(X|Y=y)$ e $\text{Var}(Y|X=x)$ como variáveis randômicas.

Questão 16 – Considere variáveis randômicas conjuntas (X, Y) . Encontre a região do plano xy correspondente aos eventos:

- a) $A = \{(X,Y) | x + y \leq 2\}$
- b) $B = \{(X,Y) | x^2 + y^2 < 4\}$
- c) $C = \{(X,Y) | \min(x, y) \leq 2\}$
- d) $D = \{(X,Y) | \max(x, y) \leq 2\}$

Questão 17 – Considere variáveis randômicas conjuntas (X, Y) .

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta y}), & x \geq 0, y \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & \text{outro valor.} \end{cases}$$

- a) Encontre as CDFs marginais de X e Y .
- b) Mostre que X e Y são variáveis randômicas independentes.
- c) Encontre $P(X \leq 1, Y \leq 1)$
- d) Encontre $P(X \leq 1)$
- e) Encontre $P(Y > 1)$