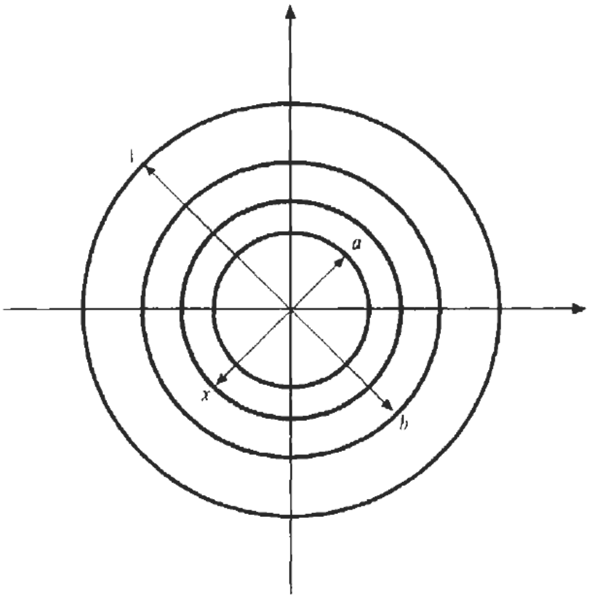
Lista de Exercícios módulo 3 – Processos Estocásticos

Questão 1 – Considere o experimento de jogar uma moeda três vezes consecutivamente. Seja **X** a variável randômica que explicita a quantidade de "caras" obtidas. Assumimos que as saídas (o resultado de cada vez em que a moeda é jogada) são independentes e a probabilidade de uma "cara" é p. (sugestão: modele com um processo de Bernoulli)

a) Qual é a faixa dinâmica de **X**?
b) Encontre as probabilidades para: P (**X** = 0), P (**X** = 1), P (**X** = 2) e P (**X** = 3).

Questão 2 – Considere o experimento de lançar um dardo em um alvo circular com raio unitário (1m). Seja **X** a variável randômica representando a distância do ponto em que o dardo acerta o alvo a partir do ponto central do alvo. Suponha que o ponto onde o dardo sempre acerte o alvo prato seja igualmente provável sobre toda a área do alvo.



a) Qual é a faixa dinâmica da variável randômica **X**?
b) Determine analiticamente a CDF $F_X(x)$ da variável randômica X e esboce o seu respectivo gráfico.
c) Determine analiticamente a PDF $f_X(x)$ da variável randômica **X** e esboce o seu respectivo gráfico.
d) Encontre P (**X** < a)
e) Encontre a probabilidade de P(a < **X** < b), onde a < b < 1.0m.
f) Encontre a probabilidade de P(0.1 < **X** < 0.9).
g) Determine E[**X**].
h) Determine Var[**X**].

Questão 3 – Seja X uma variável aleatória com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\ln(a)x^2, |x| \leq 1 \\ 0, outro\ valor. \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante **a**.
b) Qual é a faixa dinâmica da variável randômica **X**?
c) Determine E[**X**].
d) Determine Var[**X**].
e) Determine P(**X** > 0)

Questão 4 – Seja **X** uma variável aleatória com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^4, 0 \ \le x \ \le 1 \\ 0, outro\ valor. \end{cases}$$

a) Determine P(**X** > ½)
b) Determina a CDF de **X**.
c) Determine E[**X**].
d) Determine Var[**X**].

Questão 5 – Considere a CDF de uma variável randômica contínua representada pela expressão matemática.

$$\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} 0\ se\ x < 0 \\ x + \frac{1}{2}, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1\ se\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Esboce F(x).
b) Encontre a PDF de **X**.
c) Determine P(X > ¼)

Questão 6 – Considere a CDF de uma variável randômica contínua representada pela expressão matemática.

$$\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} 0\ se\ x < 0 \\ 1 - e^{-x}, 0 \le x \ \le 1 \\ 1\ se\ x > 1 \end{cases}$$

a) Determine P(x < π)
b) Determine $P(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3})$
c) Encontre a PDF de **X**.

Questão 7 – Discuta sobre o conjunto de valores possíveis para as constantes ***a*** e ***b*** de modo que

$$F_X(x) = \begin{cases} a - ae^{-\frac{x}{b}}, x > 0 \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

seja uma CDF válida.

Questão 8 – Seja **X** uma variável aleatória contínua onde a sua PDF apresentada logo a seguir, onde α é uma constante.

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\pi x^2, 0 \le x \le 1 \\ 0, outro\ valor. \end{cases}$$

a) O valor de α.
b) Determine a CDF para a variável randômica.
c) Determine P(1.0 <x < 2.0)
d) Determine P(0.6 < x < 0.9)
e) Determine P((x ≤ 0.5) ∪ (x > 0.8))
f) Calcule μ_X

Questão 9 – Seja X uma variável aleatória contínua cuja PDF é a seguinte:

$$f_X(x) = \begin{cases} |x|, -1 \le x \le 1 \\ 0, outro\ valor. \end{cases}$$

a) Calcule $F_X(x)$
b) Calcule μ_X
c) Considere a variável randômica descrita pela função Y = *f*(X) onde Y = $X^3 - X^2 - X + 1$. Calcule E[Y].

Questão 10 – Considere a CDF de uma variável randômica contínua representada pela expressão matemática.

$$\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} 0\ se\ x < 0 \\ 1 - e^{-x}, 0 \le x\ \le 1 \\ 1\ se\ x > 1 \end{cases}$$

a) Determine P(x < π)
b) Determine $P(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3})$
c) Encontre a PDF de **X**.

Questão 11 – Considere a variável randômica contínua $\boldsymbol{X} = Acos(2\pi f_c + \theta)$ +1, onde a amplitude A > 0.5 e a frequência f_c são ambas constantes não aleatórias, e a fase inicial θ é uma variável aleatória contínua cuja PDF é a seguinte:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0, outro\ valor. \end{cases}$$

a) Encontre a expectância da variável $\boldsymbol{X}$ (use LOTUS).
b) Calcule E[$\boldsymbol{X}^2$].
c) Com os resultados de (a) e de (b), encontre a variância da variável aleatória contínua $\boldsymbol{X}$.

Questão 12 – Abaixo é dado os valore de uma variável randômica e a direita é associado uma classificação ao a este valor. Por exemplo, considere que a variável randômica diz respeito aos resultados de um determinado exame médico e à direita uma classificação informando se o paciente está (classificação = 1) ou não (classificação = 0) está com determinada enfermidade.

X	Classes (Ci)
1.5	0
2.8	0
1.2	1
2.2	0
3.8	1
5.4	1
5.1	1
2.8	0
4.4	1
2.3	0
4.5	1
3.8	1

Considere que o conjunto de dados mensurados possam ser descritos por uma PDF Gaussiana. Usando a Lei de Bayes determine a probabilidade dos resultados dos exames a seguir serem classificados como enfermo ou sadio? (x_1 = 5.7; x_2 = 3.0; x_3 = 2.6)

$$\boldsymbol{Diagn\acute{o}stico\ (Classe)} = \max_{N}\{\boldsymbol{P(C_i|x)}\}$$

N corresponde a quantidade de classes. Observe que, pela Lei de Bayes:

$$\boldsymbol{P(C_i|\mathrm{x})} = \frac{\boldsymbol{P(C_i)p(\mathrm{x}|C_i)}}{\boldsymbol{p(\mathrm{x})}} == \frac{\boldsymbol{P(C_i)p(x|C_i)}}{\boldsymbol{\sum_{k=1}^{N} p(x|C_k)P(C_k)}}$$

Questão 13 – Uma fonte de informação gera símbolos aleatoriamente a partir de. um alfabeto de quatro letras (a, b, c, d} com probabilidades P(a) = ½, P(b) = ¼ e P(c) = P(d) = 1/8. Suponha que as gerações de símbolos sejam independentes. Um esquema de codificação escreve esses símbolos em códigos binários da seguinte maneira:

Símbolo Código binário

a	0
b	10
c	110
d	111

Seja X a variável randômica denotando o comprimento do código em bits, ou seja, o número de bits da palavra digital.

a) Qual é a faixa dinâmica da variável randômica X?
b) Encontre a probabilidade P(X = 1),
c) Determine P(X = 2),
d) Determine P(X = 3)
e) Encontre P(X > 3).
f) Esboce a CDF $F_X(x)$ de X e especifique qual tipo de variável randômica é X.
g) A partir da CDF encontrada, determine $P(X \leq 1)$,
h) Análogo para $P(l < X \leq 2)$,
i) Análogo para $P(l \leq X \leq 2)$,

Questão 14 – Suponha que temos uma moeda que não é viciada (P(H) = P(T) = 0.5). Vamos criar um experimento randômico, denotando a variável $\boldsymbol{X}$ como o número de **o número de caras (H) em seis lançamentos de moeda**. (avaliar os valores da faixa dinâmica de X)

a) Esboce a PMF para $P_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ para a variável aleatória discreta $\boldsymbol{X}$.
b) Esboce CDF $F_X(\boldsymbol{x})$ para variável aleatória discreta $\boldsymbol{X}$.
c) Encontre $P(x \geq 6)$
d) Encontre $P(x \leq 2)$
e) Encontre $P(1 \leq x \leq 5)$
f) Calcule $E[X]$
g) Calcule $E[X^2]$ (use LOTUS)
h) Com os resultados de (f) e de (g), calcule σ_X^2.

Observe que este é um processo de Bernoulli.

Questão 15 – Considere o espaço amostral para a variável randômica discreta $\boldsymbol{X}$ é $S_{\boldsymbol{X}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e Y uma variável randômica computada obtida por meio de $\boldsymbol{Y} = cos\left(X\frac{\pi}{6}\right)$.

a) Determine o espaço amostral $S_{\boldsymbol{Y}}$ para a variável randômica discreta $\boldsymbol{Y}$.
b) Determine a PMF a variável randômica discreta $\boldsymbol{Y}$.
c) Determine a CDF a variável randômica discreta $\boldsymbol{Y}$.
d) Calcule $E[\boldsymbol{Y}]$
e) Calcule σ_Y^2.