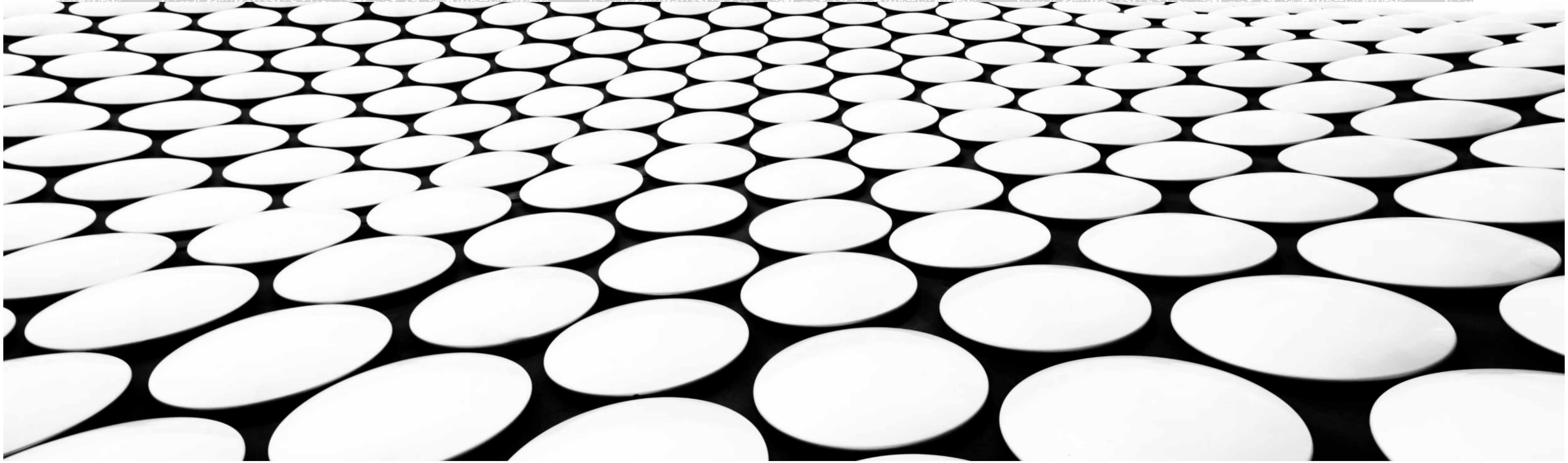
COUNTING METHODS



Finding Probabilities

- For a finite sample space ***S*** with **equally likely outcomes**, the probability of an event ***A*** is given by

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

COUNTING:

- ***Combinatorics*** is the study of systematic counting methods that determines the cardinalities of various sets that arise in probability.

- Compute the sample space (finite = countable).
- Find the size of na event.
- Find a probability.

COUNTING TERMINOLOGY

- **Sampling: draw** a sample at random experiment, an outcome of a random experiment.

- **Sampling with or without replacement.**

- **Ordered or unordered sampling.**

IN RANDOM PROCESSES IN WHICH THE OUTPUTS HAVE THE SAME PROBABILITY, THERE ARE FOUR POSSIBILITIES

- 1 - Ordered Sampling (Permutations) with Replacement
- 2 - Ordered Sampling (Permutations) without Replacement
- 3 - Unordered Sampling(Combinations) with Replacement
- 4 - Unordered Sampling (Combinations) without Replacement.

ORDERED SAMPLING (PERMUTATIONS) WITH REPLACEMENT

- Consider a finite set with N elements: $C = \{1, 2, \dots, N\}$

- Now consider that a **random experiment** is created by sampling ***k*** elements from the set ***C***. However, after each element is drawn, it is **replaced** back to C. Thus, it can be drawn again, and

$$P(x) = \frac{1}{N}, x = 1,2, \dots, N$$

- The **size** of the **sample space** can be computed by: $|S| = N^k$

- It is called (as we already saw in module 1) a **cartesian product** or **multiplication principle.**

ORDERED SAMPLING (PERMUTATIONS) WITH REPLACEMENT

- Now consider that you have several finite sets:

$$C_1 = \{1,2,\dots,N_1\}$$
$$C_2 = \{1,2,\dots,N_2\}$$
$$\vdots$$
$$C_M = \{1,2,\dots,N_M\}$$

- Suppose that you want to build a **random experiment** by **sampling with replacement** k_i (i = 1, 2, ... M) elements from each of the M finite sets. The sample space for this experiment can be calculated by

$$|S| = (N_1)^{k_1}(N_2)^{k_2}\dots(N_M)^{k_M} = \prod_{i=1}^{M}(N_i)^{k_i}$$

EXERCÍCIO 1

- Um “Coffe Shop” tem 4 tipos diferentes de café. Você pode pedir seu café em uma xícara pequena, média ou grande. Você também pode optar por adicionar creme, açúcar ou leite (qualquer combinação é possível. Por exemplo, você pode optar por adicionar os três).

a) De quantas maneiras você pode pedir seu café?

b) Durante quatro vezes consecutivas você visita esse “Coffe Shop” com um amigo e pede para ele escolher aleatoriamente um tipo de café. Qual é a probabilidade dele não escolher, nenhuma das vezes: o café em uma xícara pequena e adicionar simultaneamente creme, açúcar e leite.

SOLUÇÃO

a) De quantas maneiras você pode pedir seu café?

Solução: Tem-se as possibilidades

- 4 tipos de café - $N_1 = 4$
- 3 tipos de xícaras – $N_2 = 3$
- 3 tipos de complementos (qualquer combinação dos complementos) – $N_3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$$N = N_1 \times N_2 \times N_3 = 4 \,.\, 3 \,.\, 8 = 96$$

SOLUÇÃO - CONTINUAÇÃO

b) Durante quatro vezes consecutivas você visita esse "Coffe Shop" com um amigo e pede para ele escolher aleatoriamente um tipo de café.

Qual é a probabilidade dele não escolher, nenhuma vez o café em uma xícara pequena e adicionar simultaneamente creme, açúcar e leite?

Seria melhor perguntar: Qual é a probabilidade dele escolher, **as 4 vezes** "uma xícara pequena e adicionar simultaneamente creme, açúcar e leite"? P(y) = 1 – P(x)

- Quantificando o evento:
  - Tipos de café – $M_1 = 4$ (em quatro possíveis)
  - Xícara pequena – $M_2 = 1$ (em 3 possíveis)
  - Adicionar simultaneamente creme, açúcar e leite $M_3 = 1$ (em 8 possíveis)

$$M = M_1 \times M_2 \times M_3 = 4$$

- Assim a probabilidade de escolher este tipo de café é $P(x) = \frac{M}{N} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$

SOLUÇÃO - CONTINUAÇÃO

- Como as saídas do processo randômico são independentes, a probabilidade de se escolher 4 vezes consecutivas este tipo de cafés pode ser mensurada por:

$$\boldsymbol{P(x) = \left(\frac{M}{N}\right)^4}$$

- Logo a probabilidade de, pelo menos uma vez, esse tipo de café não ser escolhido é

$$\boldsymbol{P(\overline{x}) = 1 - P(x)}$$

ORDERED SAMPLING (PERMUTATIONS) WITHOUT REPLACEMENT:

- Consider a finite set with N elements: $C = \{1, 2, \ldots, N\}$
- Now consider that a **random experiment** is created by sampling ***k*** elements from the set ***C***. However, after each element is drawn, it is **not replaced** back to C. Thus, it can not be drawn again.
- The **size** of the **sample space** can be computed by ***k*-permutations of an *N*-element** set:

$$P_k^N = \mathrm{N} \times (\mathrm{N} - 1) \times \ldots \times (\mathrm{N} - k + 1)$$

ORDERED SAMPLING (PERMUTATIONS) WITHOUT REPLACEMENT

- We saw that the total number of ways to choose ***k*** elements from a set with a total of ***n*** elements is: $P_k^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$
- However, note that

$$P_{\boldsymbol{k=n}}^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-n+1) = n \times (n-1) \ldots \times 2 \times 1 = \mathrm{n}!$$

- Then

$$P_k^n = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times \mathbf{(n-k) \times \cdots \times 2 \times 1}}{\mathbf{(n-k) \times \cdots \times 2 \times 1}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}, \text{for } 0 \leq k \leq n$$

EXERCÍCIO 2

- Uma senha de acesso a um computador consiste de quatro dígitos a seis dígitos, selecionados de 0 a 9, inclusive.
- Caso 1 – Considere que cada dígito pode se repetir à vontade do usuário.
- Caso 2 – Considere que nenhum dígito em uma senha pode ser repetido.

a) Determine quantas senhas diferentes são possíveis para o Caso 1.
b) Determine quantas senhas diferentes são possíveis para o Caso 2.

SOLUÇÃO

- **Avaliando o Caso 1**: O problema se caracteriza como "**amostragem ordenada com reposição – Permutações**". Por esse caminho, sabe-se que a quantidade de senhas pode ser obtida pelo produto cartesiano (ou princípio da multiplicação). Entre 0 e 9 temos N = 10 valores possíveis.
- As senhas podem ter entre 4 e 6 dígitos. Logo, se apresentam 3 senários: a senha tem 4 dígitos, a senha tem 5 dígitos e a senha tem 6 dígitos.

Para 4 dígitos: $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N} \times \mathrm{N} \times N \times N = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

Para 5 dígitos: $\mathrm{N}_2 = \mathrm{N}^5 = 10^5$

Para 6 dígitos: $\mathrm{N}_3 = \mathrm{N}^6 = 10^6$

O total de senhas possíveis pode ser calculado por:

$$\mathbf{N = N_1 + N_2 + N_3 = 1{,}110{,}000}$$

SOLUÇÃO - CONTINUAÇÃO

- **Avaliando o Caso 2**: O problema se caracteriza como "**amostragem ordenada sem reposição – Permutações**". O total de senhas também pode ser obtido utilizando-se formulações matemáticas simples. Para escolher k elementos em um conjunto de N elementos, sem repor os elementos escolhidos, tem-se:

$$P_k^N = N \times (N-1) \times \ldots \times (N-k+1) = \frac{\boldsymbol{N}!}{(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{k})!}$$

Para 4 dígitos: $N_1 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

Para 5 dígitos: $N_2 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$

Para 6 dígitos: $N_3 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$

O total de senhas possíveis pode ser calculado por:

$$\mathbf{N = N_1 + N2 + N3 = 186{,}480}$$

EXERCÍCIO 3

- Considere que um intruso sabe de quantos dígitos se compõe a senha do usuário, tendo em mente o exercício anterior. Via um acesso remoto este intruso tenta quebrar a senha deste computador. Suponha que ele possa tentar acessar o computador 1024 vezes antes que um alarme seja disparado. Qual a probabilidade dele conseguir quebrar a senha, caso ela tenha 4 dígitos para o Caso 1 e para o Caso 2.

- **Solução:**

Neste ponto vamos imergir no universo das coisas randômicas, vou denominar de x_1 e x_2 como os eventos randômicos.

Para o caso 1: $P(x_1) = \frac{1024}{10000} = 0.102$

- Para o caso 2: $P(x_2) = \frac{1024}{5040} = 0.203$

UNORDERED SAMPLING (COMBINATIONS) WITHOUT REPLACEMENT

- Consider a finite set with N elements: $C = \{1, 2, \dots, n\}$
- If we want to draw ***k*** samples from the set such that ordering does not matter and repetition is not allowed it is known as *k*-**combination** or **binomial coefficient.**
- Mathematically, a **k-combination** can be expressed as

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ for } 0 \leq k \leq n.$$

NEWTON'S BINOMIAL

- Newton's binomial theorem is written as

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- The expression $\binom{n}{k}$ is called a **binomial coefficient** and is read "*n* choose *k*."

BERNOULLI TRIALS AND BINOMIAL DISTRIBUTION

- A **Bernoulli Trial** is a random experiment that has two possible outcomes which we can label as "success" and "failure“. It is a binary process.
- We usually denote the probability of success by ***p*** and probability of failure by **(1−*p*)**.
- If we perform ***n* independent Bernoulli trials** and count the total number of successes, we call it a **binomial** experiment.

EXAMPLE: TOSS A COIN MANY TIMES CONSECUTIVELY

- Suppose $P(H)$ = **p** and P(T) = **1−p** (H = head and T = tail).
- If toss the coin 5(five) times consecutively, based on the process statistical independence, the probability of obtaining **1(one) tail and 4 (four) heads** is given by

$$P(THHHH) = p(T)\times p(H)\times p(H)\times p(H)\times p(H) = (1-p)p^4.$$

- Similarly, we can observe

$$P(HTHHH) = p(H)\times p(T)\times p(H)\times p(H)\times p(H) = (1-p)p^4.$$

$$P(HHTHH) = p(H)\times p(H)\times p(T)\times p(H)\times p(H)= (1-p)p^4.$$

$$P(HHHTH) = p(H)\times p(H)\times p(H)\times p(T)\times p(H)= (1-p)p^4.$$

$$P(HHHHT) = p(H)\times p(H)\times p(H)\times p(T)\times p(H)= (1-p)p^4.$$

EXAMPLE: TOSS A COIN MANY TIMES CONSECUTIVELY

- Consider *A* be the event that **we observe exactly 1(one) tail and 4(four) heads**

$$A = \{THHHH, HTHHH, HHTHH, HHHTH, HHHHT\}$$

- Thus

$$P(A) = P(THHHH)+P(HTHHH)+P(HHTHH)+P(HHHTH)+P(HHHHT)$$

$$= (1-p)p^4 + (1-p)p^4 + (1-p)p^4 + (1-p)p^4 + (1-p)p^{4=} = 5(1-p)p^4.$$

BERNOULLI PROCESS

- For ***n* independent** **Bernoulli** trials (ensaios) where each trial has success probability ***p***, the probability of ***k*** successes (binomial distribution) is given by

$$P(\boldsymbol{k}\ times\ \text{is}\ true\ and\ (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\ times\ \text{is}\ false)$$

$$P(k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ \text{for } 0\leq k\leq n.$$

EXERCÍCIO 4

- Em uma partida de futebol Society cada time a ser escalado possui 7 jogadores na linha e 1 goleiro. O goleiro é fixo e não é substituído. Os jogadores possuem o mesmo nível técnico (não existe um time titular)
- Suponha que há 12 jogadores em um time amador e não existe um time titular. O técnico deve escalar um time para iniciar a partida.
- **Quantas formações possíveis existem** para dar início a uma "pelada", assumindo que todos os jogadores jogam em todas as posições?

SOLUÇÃO

- 1– Observe "O técnico deve escalar um time..."→ **randomicamente**.
- 2 – Concluindo a afirmação acima: como não existe um time titular, a ordem de seleção dos jogadores é irrelevante.
- 3 - No time que inicia a partida, nenhum jogador pode ser escalado duas vezes → **Sem reposição**.
- 3 - Observe que, se um técnico começa a escalar os jogadores, não interessa a ordem. Ele precisa completar o seu time para poder entrar em campo → **amostragem não ordenada**.
- 4 – Logo, pode-se concluir que é o problema é: **amostragem não ordenada sem reposição.**

SOLUÇÃO - CONTINUAÇÃO

- **Sabe-se que N = 12 (total de jogadores) e k = 7 (**quantidade de jogadores do time titular**) e, denominando F a quantidade de formações possíveis, temos:**

$$F = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} = \frac{12!}{7!\,(12-7)!} = \frac{479001600}{(5040)(120)} = 792$$

UNORDERED SAMPLING (COMBINATIONS) WITH REPLACEMENT

- The combination with replacement allows equal elements to appear as the output of a random experiment.

- The size of combination is expressed as

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

EXERCÍCIO 5

- Uma sorveteria em Fortaleza possui 22 sabores diferentes de sorvetes.
- Você vai à sorveteria em um verão muito quente e pede o sorvete chamado “Bota Boneco” (marrento) que é composto de 4 bolas de sorvete.
- De quantas maneiras você pode construir o seu sorvete “Bota Boneco”?

SOLUÇÃO

- 1 – Observe que você pode **repetir** a sua bola se sorvete. Pode até pedir 4 bolas do mesmo sabor. Então, cada sabor por ser "**reposto**" na composição do seu "Bota Boneco" → **Com reposição**.

- 2 – Observe que **a ordem** como você vai montando o sorvete **não importa**. A ordem como você adiciona as bolas de sorvete é irrelevante → **amostragem não ordenada**.

- 3 – Logo, pode-se concluir que é o problema é: **amostragem não ordenada com reposição.**

SOLUÇÃO - CONTINUAÇÃO

- A quantidade de combinações possíveis do seu sorvete "Bota Boneco" (B) pode ser calculada por meio de

$$(N = 22, k = 4)$$

$$B = \binom{N+k-1}{k} = \frac{(N+k-1)!}{k!\,(N-1)!} = \frac{(22+4-1)!}{4!\,(22-1)!} = \frac{25!}{4!\,18!}$$

$$= \frac{15{,}511{,}210{,}043{,}330{,}985{,}984{,}000{,}000}{(24)(51{,}090{,}942{,}171{,}709{,}440{,}000)} = 12{,}650$$

SUMARY

- Ordered Sampling – Permutations.
- Unordered Sampling – Combinations.

Permutations with Replacement	n^k
Permutations without Replacement (k-permutations)	$P_k^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Combinations without Replacement (k-combinations)	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Combinations with Replacement	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$


THIS IS THE END OF MODULE 2!
piazza
del Colosseo