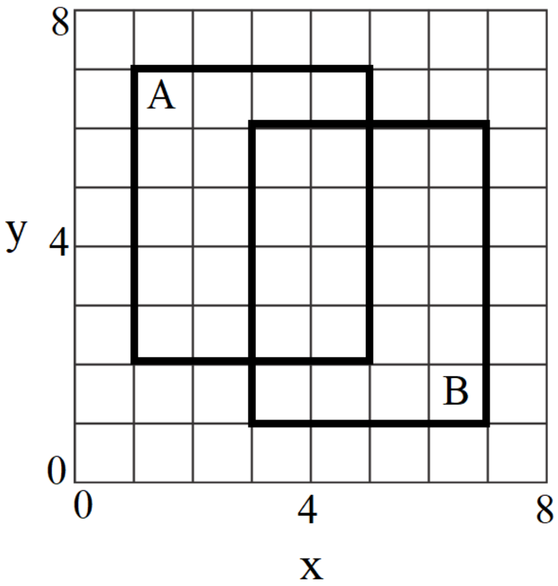
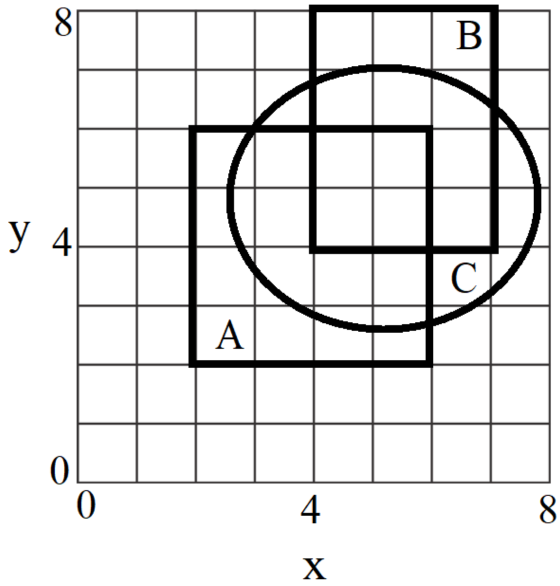
**Primeira Lista de Exercícios – Processos Estocásticos – Módulo 1**

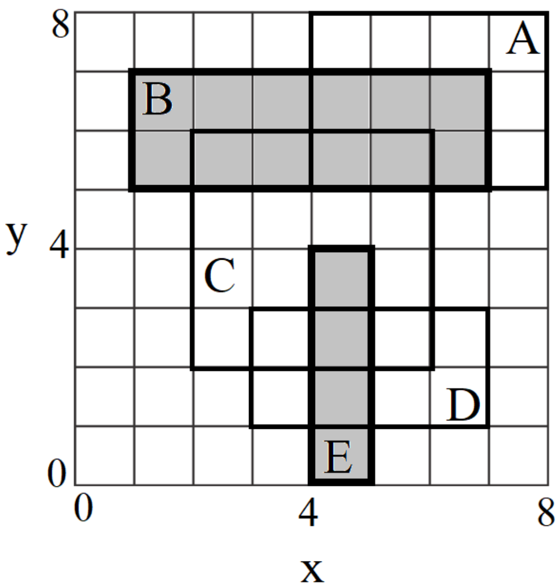
Considere as figuras a seguir como um conjunto universal (espaço amostral) e alguns eventos apresentados também na forma gráfica.:




(a)




(b)




(c)

**Questão 1** – Determine para a figura (a)

a) $C = A \cup B$
b) $D = A \cap B$
c) $E = (A - B)^c$

**Questão 2** – Determine as probabilidades: P($A \cup B$); P($A, B$); P($(A - B)^c$); P(A|B).

**Questão 3** – Determine para a figura (b)

$a)\ F = B - A$

b) $G = (A \cap B \cap C)^C$

c) I = $A \cup D$

**Questão 4** – Determine as probabilidades: P($A - B$); P($(A \cap B)^C$); P(B|A); P(A|B)

**Questão 5** – Determine para a figura (c)

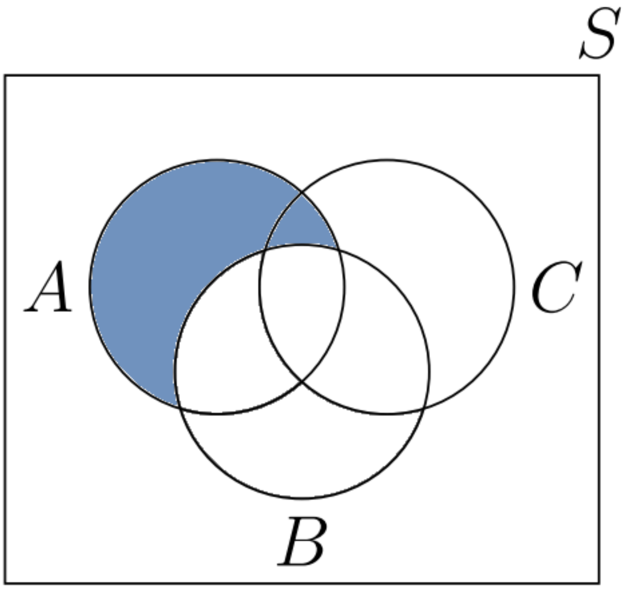
$a)\ J = (A - D)^c$

b) $K = (A \cap B \cap C)^C$

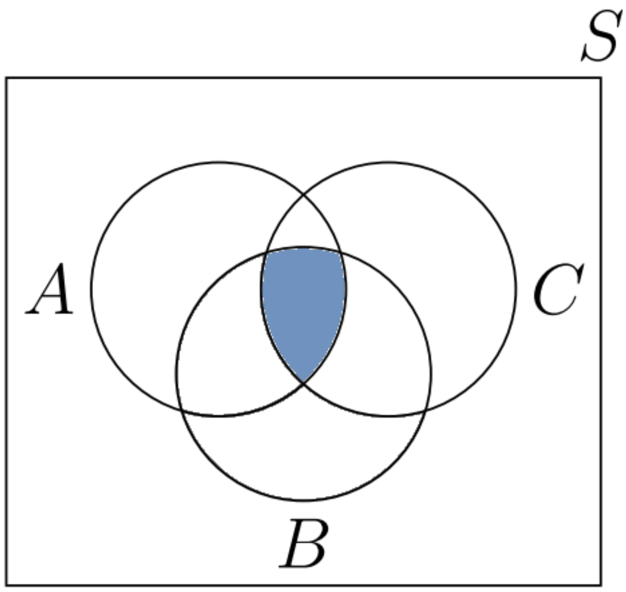
c) L = $A \cup D$

**Questão 6** – Determine as probabilidades: P($J$); P($(A \cap B \cap D)^C$); P($L^c$); P(D|A); P(B|D)

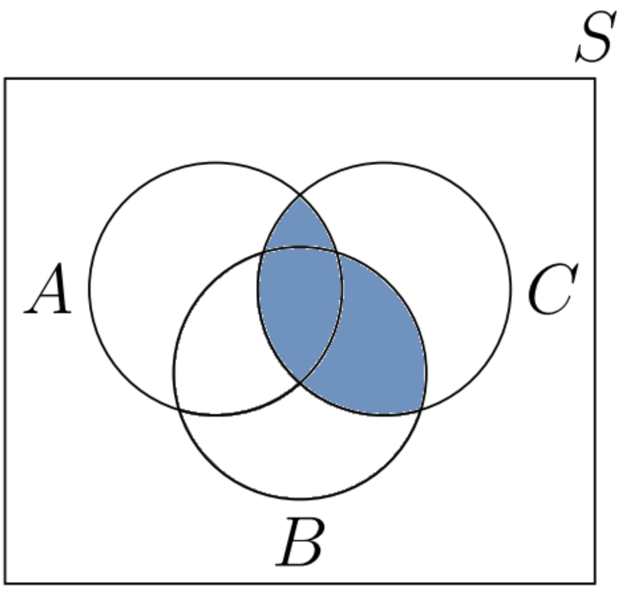
**Questão 7** – Para cada um dos seguintes diagramas de Venn apresentados a seguir, escreva o conjunto indicado pela área a sombreada.



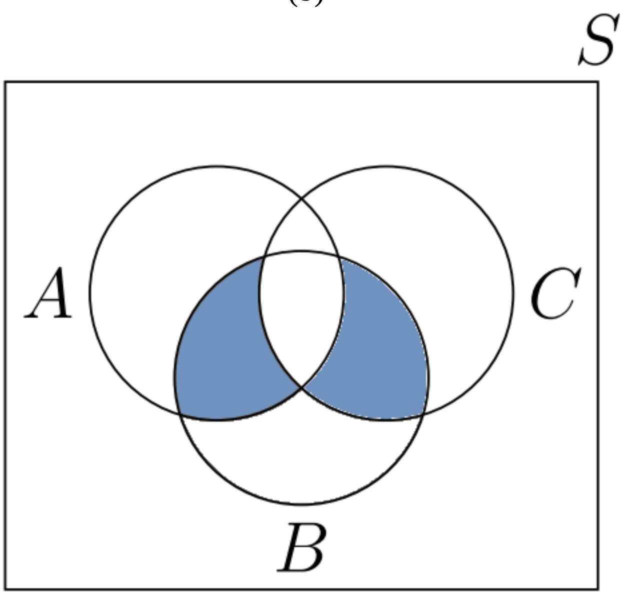

(a)




(b)




(c)




(d)

Considere o **conjunto universal**, constituído pelos números inteiros:

$$S = \{5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

e os subconjuntos:

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $B = \{1,3,5,7,9\}$; $C = \{0,2,4,6,8,\}$; $D = \{-5, -4, -3, -2\}$;

$E = \{x | x \in S: x \geq 7\}$; $F = \{x | x \in S: x < 0\}$; $G = \{x | x \in S: -2 > x \leq 2\}$;

$H = \{x | x \in S: x \in (5,9)\}$; $I = \{x | x \in S: x \in (-4, -1]\}$;

Resolva as **questões 10** a **13**.

**Questão 8** – Operações com conjuntos 1. Determine

a) $A^c$
b) $P = (A - B)^c$
c) $Q = B - A$
d) $T = H - E$
e) $U = G - F$
f) $V = (A - E)$

**Questão 9** – Calcule as probabilidades

a) $\mathrm{P(A), P(I), P(E, H), P(A, B, C)}$
b) $\mathrm{P}(A \cup B \cap H)$
c) P(T), $\mathrm{P}(H \cup I)$

**Questão 10** – Operações com conjuntos 2. Determine

a) $K = B \cup C$
b) $Y = B \cap C$
c) $W = A^c \cap B$
d) $P = (A - B)^c \cap C$
e) $L = (H \cup I) \cap A$
f) $O = (H^C \cap E) \cap A$
g) $J = I^c \cup (D \cap A^c) \cup E$

**Questão 11** – Quais subconjuntos podem representar o espaço amostras ***S*** como partições.

**Questão 12** – Seja o corpo dos inteiros, o espaço amostral: $S = \{x | x \in Z, -100 \leq x < 10\}$ e os subconjuntos $A = \{x | x \in S: x \in (-100, -3)\}$; e $B = \{x | x \in S: x \in [-100,0]; x_{n+1} = x_n + 10; x_0 = -100\}$.

a) C = B – A
b) $C = A \cup B$
c) $C = A \cap B$
d) Determine P(-1), P(A); P(B)
e) Determine P(B|A) e P(A|B)

**Questão 13** – Considere o conjunto universal como o corpo dos reais: $S = \{x | x \in R, x \in [0,15]\ \}$ e os subconjuntos: $A = \{x | x \in S: x \in (1,8)\}$; $B = \{x | x \in S: x \in [5,13)\}$; $C = \{x | x \in S: x \in (1,12)\}$.
Determine

a) $W = (A \cap B)$

b) $W = (A \cup C)$
c) $W = (A^c \cap B) - C$
d) P(A) e P(C)
e) P(A|B) e P(B|A)
f) P(A,B,C)
g) P((A,B)|C) e P(A|(C,B))

**Questão 14** – Considere um dado e uma moeda. O dado é jogado e logo em seguida a moeda (H, T - cara ou coroa). Onde C = {H,T} e D= {1,2,3,4,5,6}

a) Como se obtém o espaço amostral? Qual é ele?
b) Qual é o subconjunto onde aparece uma "cara?
c) Calcule P(C=T, D<3) .
d) Determine P(D = 3).

**Questão 15** – Em um jogo de "cara ou coroa" uma moeda é jogada dez vezes consecutivamente para se obter um resultado de saída. Considere o espaço amostral constituído pelo conjunto de todas as combinações possíveis

a) Como se calcula o espaço amostral? Qual é o tamanho do espaço amostral?
b) Determine o subconjunto **A** onde pelo menos **uma** "cara" é observada. Qual é P(A)?
c) Determine o subconjunto **B** onde é observado consecutivamente **duas** "caras". Determine P(B)?
d) Determine o subconjunto **C** onde pelo menos **uma** "coroa" é observada
e) Determine $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$. Calcule P(D).

**Questão 16** - Sabendo-se que $\{H, T\}^3 = \{H, T\} \times \{H, T\} \times \{H, T\} = \{(H, H, H), (H, H, T), \cdots, (T, T, T)\}$.

Considere a seguinte função *f:* $\{H, T\}^3 \longrightarrow N \cup \{0\}$, definido como *f (x)* = o número de **H**'s em ***x***.

Por exemplo, *f* (HTH) = 2.

a) Determine o domínio e o contradomínio para *f*.

b) Encontre o intervalo de *f*: (contradomínio de *f*)

c) Se sabemos que *f (x)* = 2, o que podemos dizer sobre x?

**Questão 17** – Suponha que $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ e $\mathbf{B_4}$ forme uma partição do conjunto universal **S**. Seja **A** um conjunto arbitrário. Assuma que é sabido: $|A \cap B_1| = 12$, $|A \cap B_2| = 10$, $|A \cap B_3| = 5$, $|A \cap B_4| = 1$. Determine $|A|$.

**Questão 18** – Considere $A_n = \left\{x | x \in R, 0 \leq x < \frac{n-1}{n} \ e \ n = 2,3,4\right\}$ e definindo a como:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$$

Determine **A**.

**Questão 19** - Dado que P (A) = 0.9, P (B) = 0.8 e P (A ∩ B) = 0.75, encontre

a) $P(A \cup B)$;

b) $(A \cap B^c)$;

c) $P(A^c \cap B^c)$. Lembre-se que: $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$.

Sugestão: Desenhe o diagrama de Venn.

**Questão 20** – Sejam **A** e **B** dois eventos tais que P (A) = 0.4, P (B) = 0.7, P (A ∪ B) = 0.9, encontre

a) $P(A \cap B)$;

b) $P(A^c \cap B)$;

c) $P(A-B)$;

d) $P(A^c-B)$;

e) $P(A^c \cup B)$;

f) $P(A \cap (B \cup A^c))$.

Sugestão: Desenhe o diagrama de Venn.

**Questão 21** – O espaço amostral **S** de um experimento aleatório é dado por **S** = {a, b, c, d} com probabilidades P(a) = 0.2, P(b) = 0.3, P(c) = 0,4 e P (d) = 0.1. Seja o evento **A** denotado por {a, b}, e o evento B denotado por {b, c, d}. Determine as seguintes probabilidades:

a) P (A);

b) P (B);

c) $P(A^c)$;

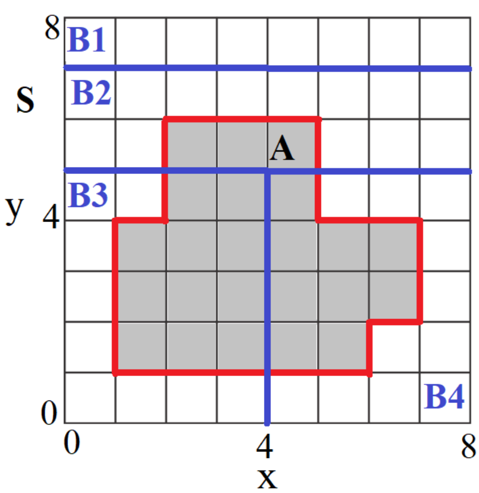
d) $P(A \cup B)$;

e) $P(A \cap B)$.

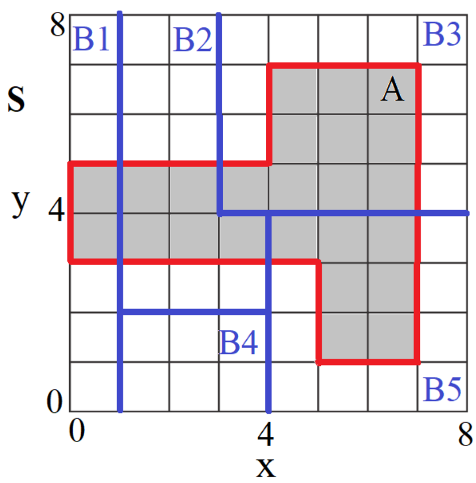
**Questão 22** – Duas fábricas produzem peças semelhantes. A fábrica 1 produz 1.000 peças, das quais 100 estão com defeito. A fábrica 2 produz 2.000 peças, 150 das quais estão com defeito. Uma peça é selecionada aleatoriamente e é considerada defeituosa. Qual é a probabilidade de que esta peça foi fabricada pela planta 1? (Probabilidade condicional).

Sugestão: Considere um evento **B** como "a peça selecionada está com defeito" e considere um evento **A** como "a peça selecionada veio da planta 1". Você precisa determinar P(A|B).

**Questão 23** – Para o espaço amostral apresentado a seguir, calcule P(A) usando o teorema da probabilidade total.




a)




b)

**Questão 24** – Usando a Lei de Bayes. Determine:

a) Para a figura (a) da Questão 24: $P(B_2|A)$; $P(B_1|A)$
b) Para a figura (b) da Questão 24: $P(B_2|A)$; $P(B_5|A)$

**Questão 25** – Uma empresa que fabrica relés elétricos possui três fábricas que produzem 50%, 30% e 20% do total de sua produção. Suponha que as probabilidades de um relé fabricado por essas plantas apresentem algum defeito sejam 0.02, 0.05 e 0.01, respectivamente.

a) Se um relé é selecionado aleatoriamente na saída da empresa, qual é a probabilidade de que esteja com defeito? (probabilidade total).
b) Se um relé selecionado aleatoriamente estiver com defeito, qual é a probabilidade de que ele tenha sido fabricado pela planta 2? (Lei de Bayes).

**Questão 26** – Suponha que um teste de laboratório para detectar uma determinada doença tenha as seguintes estatísticas. Seja: **A** evento em que **a pessoa testada tem a doença** e **B** o evento em que **o resultado do teste é positivo**. Sabe-se que $P(B|A) = 0.99$ (o teste da pessoa deu positivo e realmente ela tem a doença) e $P(B|A^c) = 0.005$ (o teste da pessoa deu positivo e mas ela não tem a doença) e 0.1% da população realmente tem a doença. Qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença, uma vez que o resultado do teste no laboratório é positivo?
Sugestão: Você precisa calcular $P(A|B)$, use a lei de Bayes. Primeiro você precisa de $P(A)$ e $P(A^c)$.