

# As equações de Maxwell e o algoritmo FDTD

Antônio Sebastian Fernandes Rabelo  
10797781  
EESC/ICMC - USP  
Paracatu - MG, Brasil  
antoniosebastian@usp.br

Gabriell Tavares Luna  
10716400  
EESC/ICMC - USP  
Aurora - CE, Brasil  
gabrielltavsb@usp.br

Vitor Oliveira Caires  
10748027  
EESC/ICMC - USP  
Salvador - BA, Brasil  
vitorcaires@usp.br

**Resumo**—Relatório da implementação de um código em Matrix Laboratory (MATLAB) que permite, com o método FDTD, discretizar as equações de Maxwell com suas características especiais e sua solução linear. Palavras-chave: MATLAB, Discretização, FDTD, equações de Maxwell.

## I. INTRODUÇÃO

O objetivo do trabalho 3 da disciplina SEL0612 - Ondas Eletromagnéticas é explorar conceitos computacionais em eletromagnetismo, discretizando as equações de Maxwell e trabalhando com uma e duas dimensões espaciais. Além disso, veremos o impacto da aplicação do método FDTD nessas equações, suas limitações e propriedades.

O projeto se baseia nos capítulos 1, 2 e 3 da referência [7], e pretende resolver os problemas de fim de capítulo 3.1 a 3.9.

## II. EQUAÇÕES DE MAXWELL

Considera-se uma região no espaço que não possui fontes de corrente elétrica ou magnética, mas que pode conter materiais que absorvem energia de campos das mesmas. Tem-se, então, as equações de Maxwell dependentes do tempo, que nas formas diferenciais, podem ser escritas como:

Lei de Faraday:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} - \vec{M} \quad (1)$$

Lei de Ampère:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{J} \quad (2)$$

Lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (3)$$

Lei de Gauss para o campo magnético:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

No sistema MKS, temos:

- $E$ : campo elétrico (volt/metro)
- $D$ : densidade de fluxo elétrico (coulomb/metro<sup>2</sup>)
- $H$ : campo magnético (ampere/metro)
- $B$ : densidade de fluxo magnético (weber/metro<sup>2</sup>)
- $A$ : superfície arbitrária 3D
- $dA$ : vetor diferencial normal que caracteriza a superfície  $A$  (metro<sup>2</sup>)

- $\ell$ : contorno fechado que limita a superfície  $A$
- $d\ell$ : vetor de tamanho diferencial que caracteriza o contorno  $\ell$  (metro)
- $J$ : densidade de corrente elétrica (ampere/metro<sup>2</sup>)
- $M$ : densidade de corrente magnética equivalente (volt/metro<sup>2</sup>)

### Derivar as Leis de Gauss - Problema 3.1

É possível derivar as Leis de Gauss a partir das Lei de Faraday e da Lei de Ampère, assumindo um espaço livre de fontes. Isso significa que não há densidades de correntes elétrica ou magnética na região do espaço (i.e.,  $J_{source} = 0$  e  $M_{source} = 0$ ), bem como cargas livres. Assumindo um meio linear, isotrópico, não-dispersivo e homogêneo, sem campos electromagnéticos no tempo  $t = 0$ , utiliza-se a seguinte propriedade:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (7)$$

Lei de Faraday  $\rightarrow$  Lei de Gauss Magnética  
Da equação (1):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (8)$$

Aplicando o divergente e a propriedade (7):

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \vec{B})}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10)$$

Lei de Ampère  $\rightarrow$  Lei de Gauss Elétrica  
Da equação (2):

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} \quad (11)$$

Aplicando o divergente e a propriedade (7):

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (13)$$

Observe que  $\vec{J}$  e  $\vec{M}$  podem atuar como fontes independentes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , definidas como  $\vec{J}_{source}$  e  $\vec{M}_{source}$ . Também é possível assumir que, para materiais isotrópicos e não-dispersivos, existe uma atenuação nos campos  $E$  e  $H$  via conversão de calor. Logo:

(Equação 3.6)

$$\vec{J} = \vec{J}_{source} + \sigma \vec{E} \quad (14)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{source} + \sigma^* \vec{H} \quad (15)$$

Sendo:

$\sigma$  : condutividade elétrica ( $\frac{S}{m}$ )

$\sigma^*$  : perda magnética equivalente ( $\frac{\Omega}{m}$ )

Assim, podemos deduzir as equações de Maxwell para materiais lineares, isotrópicos, não-dispersivos e sem perdas:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} - \frac{1}{\mu} (\vec{M}_{source} + \sigma^* \vec{H}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{\varepsilon} (\vec{J}_{source} + \sigma \vec{E}) \quad (17)$$

### III. REDUÇÃO PARA DUAS DIMENSÕES E MODO $TM_z$

Considera-se que a estrutura a ser modelada se estende ao infinito na direção  $z$  e que não há mudança no tamanho ou na posição da sua seção transversal, se a onda incidente é uniforme na direção  $z$ , então todas as derivadas parciais dos campos em relação a  $z$  devem ser nulas. Pode-se deduzir das equações 16 e 17 as equações que envolvem apenas  $H_x$ ,  $H_y$  e  $E_z$ , deve-se designar esse conjunto de componentes como *modo transversal magnético em respeito a  $z$  ( $TM_z$ )* em duas dimensões:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[ -\frac{\partial E_z}{\partial y} - (M_{source_x} + \sigma^* H_x) \right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{source_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_{source_z} + \sigma E_z) \right] \quad (20)$$

### IV. REDUÇÃO PARA UMA DIMENSÃO

Considerando que nenhum dos campos anteriormente modelados variam na direção  $y$ , Pode-se assumir que todas as derivadas parciais dos campos em relação a  $y$  devem ser nulas, e que a estrutura consiste em um espaço material infinito na direção  $x$ . Assumindo que não há fonte de corrente magnética na direção  $x$ , então  $H_x = 0$  para qualquer instante. Isso simplifica que as equações do modo  $TM_z$  podem ser reduzidas para apenas duas equações envolvendo  $H_y$  e  $E_z$ . Designa-se, desse modo, como uma onda eletromagnética transversa  $x$ -Direcionada, a  $z$ -Polarizada em uma dimensão:

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{source_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (21)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{source_z} + \sigma E_z) \right] \quad (22)$$

*Dedução da equação de onda escalar - Problema 3.2*

Considerando as equações 21 e 22, deriva-se uma equação unidimensional de onda, homogênea e sem perda, para  $H_y$ : Assumem-se também  $M_{source_y} = J_{source_z} = 0$  e  $\sigma = \sigma^* = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (25)$$

Analogamente para  $E_z$ , podemos deduzir que:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad (26)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (27)$$

A equação acima, além de ser a equação de onda escalar uni-dimensional de  $E_z$ , explica o comportamento das ondas com componentes  $E$  e  $H$  que propagam na velocidade  $c$ .

### V. O ALGORITMO DE YEE

Em 1966, Kane Yee criou um conjunto de equações de diferenças finitas para as equações rotacionais de Maxwell em relação ao tempo de 16 e 17 para materiais sem perdas ( $\sigma^* = 0$  e  $\sigma = 0$ ). O algoritmo de Yee possui grande utilidade, tais como:

- 1) O algoritmo de Yee resolve campos elétricos e magnéticos em relação ao tempo e espaço utilizando as equações rotacionais de Maxwell, ao invés de apenas resolver para o campo elétrico sozinho - ou o campo magnético - com uma equação de onda.

- Isso é análogo à formulação combinada da equação integral de campo do método dos momentos (MM), onde as condições de contorno de  $E$  e  $H$  são aplicadas na superfície de uma estrutural material.

- Utilizando informações de  $E$  e  $H$ , a solução é mais robusta do que usando de apenas um deles. As propriedades elétricas e magnéticas dos materiais podem ser modeladas de uma maneira direta.
- Funcionalidades únicas para cada campo, como singularidades tangenciais  $H$  perto de arestas e cantos, e singularidades azimutais  $H$  (looping) perto de fios finos. Além de singularidades radiais  $E$  próximas a pontos, arestas e fios finos podem ser modeladas individualmente, se ambos os campos elétricos e magnéticos estão disponíveis.

2) Conforme ilustrado na Fig. 1, o algoritmo de Yee centraliza seus componentes  $E$  e  $H$  em espaços tridimensionais para que cada componente  $E$  seja cercado por quatro componentes  $H$  circundantes.

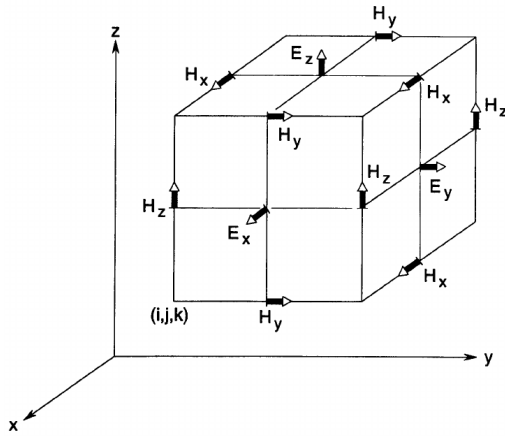


Figura 1. Posicionamento das componentes vetoriais dos campos elétrico e magnético na célula unitária - Cubo de Yee. Figura extraída da referência [1].

Na grade de Yee, há os seguintes atributos:

- As expressões de diferença finita para as derivadas em relação ao espaço usado nos operadores rotacionais possuem diferenças centradas e precisão de segunda ordem.
- A continuidade de  $E$  e  $H$  tangencial é naturalmente mantida através de uma interface de diferentes materiais se a interface é paralela a um dos eixos de coordenada da grade. Para esse caso, não é necessário especificamente aplicar as condições de contorno do campo na interface.
- A localização dos componentes de  $E$  e  $H$  na grade espacial de Yee e as operações de diferenças centradas nesses componentes implicitamente aplicam às duas relações das Leis de Gauss. Portanto, a malha de Yee não possui divergências em relação aos campos  $E$  e  $H$  na ausência de cargas elétricas e magnéticas livres.

3) Conforme ilustrado na Fig. 2, o algoritmo de Yee também centraliza seus componentes  $E$  e  $H$  no tempo. Todas as computações de  $E$  no espaço modelado são completadas e armazenadas em memória para um ponto

temporal utilizando dados de  $H$  já armazenados na memória. Então, todas as computações de  $H$  no espaço são completadas e armazenadas na memória usando os dados  $E$  já computados. O ciclo continua com a recomputação dos componentes de  $E$  baseado no recém-obtido  $H$ . Esse processo continua até que todos os passos de tempo sejam concluídos.

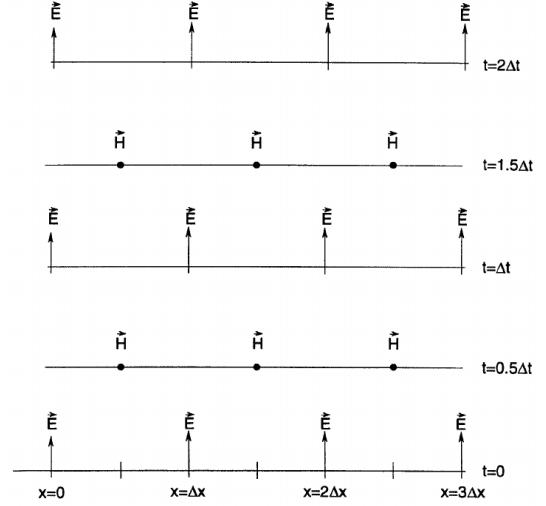


Figura 2. Gráfico de espaço-tempo do algoritmo de Yee para um exemplo de onda de propagação unidimensional mostrando o uso de diferenças centradas para derivadas espaciais e o leapfrog (método do pulo do sapo) para as derivadas temporais. Figura extraída da referência [1].

#### A. Diferenças finitas e notação

Um ponto espacial em uma grade uniforme e retangular é denotada como:

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (28)$$

$\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  são, respectivamente, o incremento espacial da grade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e  $i$ ,  $j$  e  $k$  são inteiros. Assim, qualquer função  $u$  de espaço e tempo calculada em um ponto discreto na malha e em um ponto discreto no tempo como:

$$u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{i,j,k}^n \quad (29)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento temporal, assumido como uniforme sobre o intervalo de observação, e  $n$  é um inteiro.

Yee escolheu essa notação porque desejava intercalar seus componentes de  $E$  e  $H$  na grade espacial em intervalos de  $\Delta x/2$ . Por exemplo, a diferença entre dois componentes  $E$  adjacentes, separados por  $\Delta x$  e localizados  $\pm 1/2\Delta x$  em qualquer lado de um componente  $H$ , deveria ser usada para fornecer uma aproximação numérica para  $\partial E/\partial x$  para permitir o passo do componente  $H$  no tempo.

Assim, a expressão de Yee para a primeira derivada parcial de  $u$  no tempo e em relação a dimensão  $x$ , calculada em um ponto espacial fixo  $(i, j, k)$ , é dada por:

## VI. O PROGRAMA E COMO FOI APLICADO

Os programas, escritos em MatLab, estão disponíveis no link do GitHub<sup>1</sup>, nos arquivos "*FDTD\_1D.m*" e "*FDTD\_2D.m*", bem como o "Readme", que contém os requerimentos, descrição do repositório, e como executar o código. Todo o funcionamento do código foi descrito através dos comentários presentes no mesmo.

### A. Os programas

O programa "*FDTD\_1D.m*" foi desenvolvido com a finalidade de resolver os problemas 3.3 a 3.6 propostos no projeto, do livro referenciado. Esse programa modela uma onda eletromagnética unidimensional x-Direcionada e z-Polarizada, implementando o algoritmo FDTD com as equações 31 e 32, e permite visualizar  $E_z$  e  $H_y$  no espaço, variando no tempo.

O programa "*FDTD\_2D.m*" foi desenvolvido com a finalidade de resolver os problemas 3.7 a 3.9 propostos no projeto do livro referenciado. Esse programa modela o modo transversal magnético em respeito a z ( $TM_z$ ), implementando o algoritmo FDTD com as equações 36, 37 e 38. Além disso, permite visualizar os campos:  $E_z$ ,  $H_x$  ou  $H_y$  no espaço, variando no tempo.

Sobre as condições de borda, para ambos os programas foram implementadas 3 fontes diferentes. Elas são: senoidal, pulso gaussiano e pulso unitário. Além disso, duas diferentes condições de borda foram implementadas nos limites do espaço:

1) *Condutor elétrico perfeito - PEC*: Um condutor elétrico perfeito na borda (final do espaço) implica que o campo elétrico é nulo para qualquer instante de tempo  $E_z = 0$ . O PEC atua como um espelho para o campo elétrico, refletindo a onda incidente com sentido oposto. Para o campo magnético, atua como um ponto livre.

2) *Condutor magnético perfeito - PMC*: Análogamente ao PEC, um condutor magnético perfeito na borda (final do espaço) implica que o campo magnético é nulo para qualquer instante de tempo  $H_y = 0$  (e  $H_x$ , para o caso 2D). O PMC atua como um espelho para o campo magnético, refletindo a onda incidente com sentido oposto. Para o campo elétrico, atua como um ponto livre.

## VII. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Foram realizadas algumas simulações afim de observar o comportamentos de diferentes modelos de ondas e para diferentes condições de contorno, conforme proposto nos exercícios do projeto.

### A. Em uma dimensão

Para essas simulações, foi utilizado o programa "*FDTD\_1.m*"

<sup>1</sup>Link para GitHub: <https://github.com/gtavares/electromagnetic-waves/tree/master/FDTD-EM>

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i,j,k}^{n+1/2} - u_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta x} + O[(\Delta t)^2] \quad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (31)$$

### B. Diferenças finitas em uma dimensão

Assumindo o modo de onda eletromagnética transversal x-Direcionada, z-Polarizada em uma dimensão, e livre de fontes de correntes elétricas e magnéticas e com  $\sigma = \sigma^* = 0$ , é possível aplicar as expressões para derivadas parciais (30 e 31) nas equações (21 e 22), obtendo as equações no espaço de diferenças finitas:

$$H_{y,i}^{n+1/2} = H_{y,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x} (E_{z,i+1/2}^n - E_{z,i-1/2}^n) \quad (32)$$

$$E_{z,i}^{n+1/2} = E_{z,i}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x} (H_{y,i+1/2}^n - H_{y,i-1/2}^n) \quad (33)$$

Que são as equações de atualização dos campos no tempo para o algoritmo FDTD em uma dimensão.

### C. Diferenças finitas em duas dimensões

Assumindo o modo transversal magnético em respeito a z ( $TM_z$ ) em duas dimensões, é possível aplicar as expressões para derivadas parciais (30 e 31) nas equações (18, 19 e 20). Considerando um espaço livre de fontes de corrente, com  $\sigma^* = 0$  e  $\sigma$  variando com a posição no espaço, que possui divisão igual nas duas direções (denotado por  $\Delta$ ), é interessante definir os coeficientes para a implementação do algoritmo:

$$C_a|_{i,j,k} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}\right)} \quad (34)$$

$$C_b|_{i,j,k} = \frac{\left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}\Delta}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}\right)} \quad (35)$$

$$D = \frac{\Delta t}{\mu\Delta} \quad (36)$$

Assim, é possível obter as equação de atualização dos campos:

$$E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} = C_a(m) \cdot E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n-1/2} + C_b(m) \cdot (H_y|_{i,j+1/2}^n - H_y|_{i-1,j+1/2}^n + H_x|_{i-1/2,j}^n - H_x|_{i-1/2,j+1}^n) \quad (37)$$

$$H_x|_{i-1/2,j+1}^{n+1} = D_a(m) \cdot H_x|_{i-1/2,j+1}^n + D_b(m) \cdot (E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2}) \quad (38)$$

$$H_y|_{i,j+1/2}^{n+1} = D_a(m) \cdot H_y|_{i,j+1/2}^n + D_b(m) \cdot (E_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \quad (39)$$

1) *PEC*: Essa simulação corresponde ao exercício 3.3, onde é proposta uma condição de borda de PEC, e o algoritmo utiliza como parâmetro  $\Delta t = \Delta x/c$ . Na figura 3, foi utilizado uma fonte senoidal para evidenciar que, dependendo dos parâmetros de frequência e  $\Delta x$ , é possível criar duas ondas estacionárias como mostra a figura 10.

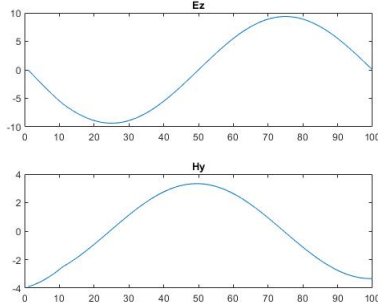


Figura 3. Borda de PEC

2) *PMC*: Essa simulação corresponde ao exercício 3.4, onde é proposto que uma condição de borda de PMC, e o algoritmo utiliza como parâmetro  $\Delta t = \Delta x/c$ . Na figura 4, foi utilizado uma fonte de pulso unitário, e, assim como no exercício anterior, é possível ver que as condições de borda são obedecidas:

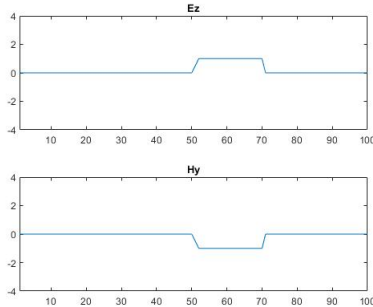


Figura 4. Borda de PMC

3) *Pulso unitário com  $S < 1$* : Essa simulação corresponde ao exercício 3.5, onde é proposto que  $\Delta t = 0.99\Delta x/c$ . Isso corresponde a uma constante de estabilidade de Courant,  $S < 1$ . Na figura 5, é possível observar que a onda obtida não é modelada perfeitamente como no caso do "passo mágico", que corresponde ao  $S = 1$ , mas o modelo continua estável.

4) *Pulso unitário com  $S > 1$* : Essa simulação corresponde ao exercício 3.6, onde é proposto que  $\Delta t = 1.01\Delta x/c$ . Isso corresponde a uma constante de estabilidade de Courant,  $S > 1$ . Na figura 6, é possível observar que o modelo é instável, tendendo ao infinito em poucos passos no tempo.

## VIII. EM DUAS DIMENSÕES

Para essas simulações, foi utilizado o programa "FDTD\_2.m".

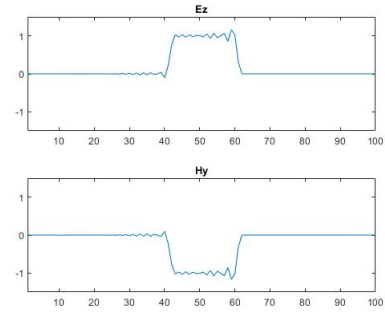


Figura 5. Pulso unitário com  $S < 1$

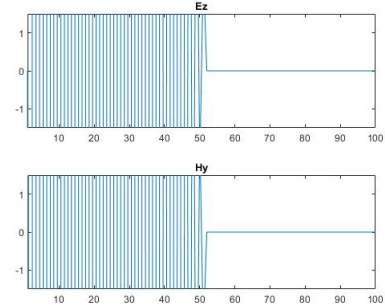


Figura 6. Pulso unitário com  $S > 1$

1) *Onda cilíndrica sem atenuação*: Essa simulação corresponde ao exercício 3.7, onde é proposta uma onda modulada bi-dimensional no modo  $TM_z$ . Assumindo um espaço livre de fontes, com condutividade elétrica nula,  $\sigma = 0$ , e  $\Delta t = \Delta/(c\sqrt{2})$ . A fonte senoidal está posicionada no centro do espaço, e nas bordas estão posicionadas PECs que implicam que  $E_z = 0$ . Na figura 7, é possível observar que a onda cilíndrica do campo elétrico reflete nas bordas.

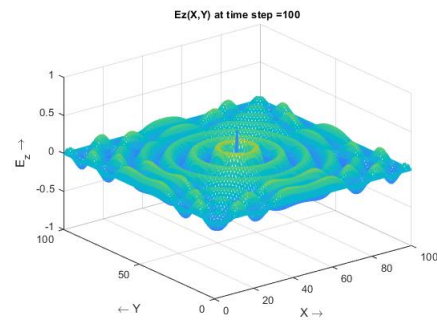


Figura 7. Onda Cilíndrica sem Atenuação

Na figura 8, é possível visualizar o campo  $H_y$  em um determinado instante, correspondente a mesma simulação.

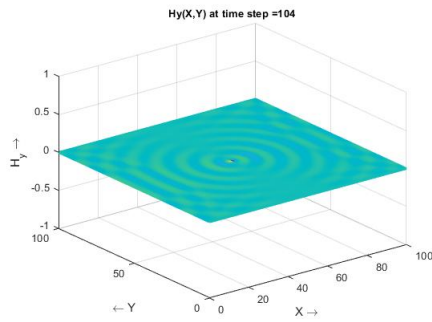


Figura 8. Campo  $H_y$  (simulação idêntica a anterior)

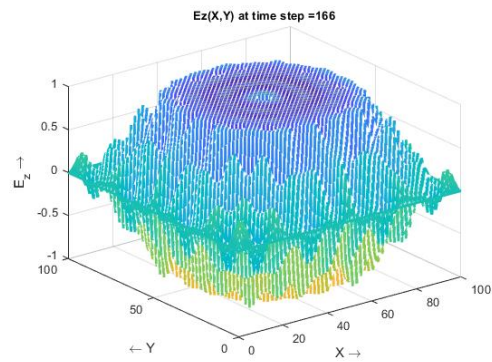


Figura 10. Onda Cilíndrica Instável

2) *Onda cilíndrica com atenuação*: Essa simulação corresponde ao exercício 3.8, onde é proposta uma modificação na simulação do exercício 3.7. Assume-se um espaço livre de fontes, com condutividade elétrica que cresce linearmente com a distância para a fonte, e  $\Delta t = \Delta/(c\sqrt{2})$ . A fonte senoidal está posicionada no centro do espaço, e nas bordas estão posicionadas PECs que implicam que  $E_z = 0$ . Na figura 9, é possível observar que ocorre uma atenuação da onda em relação ao obtido na simulação do exercício 3.7.

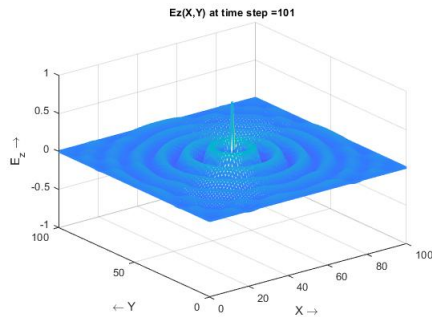


Figura 9. Onda Cilíndrica com Atenuação

3) *Onda cilíndrica instável*: Essa simulação corresponde ao exercício 3.9, onde é proposta uma modificação na simulação do exercício 3.7. Assume-se um espaço livre de fontes, com condutividade elétrica nula, e que  $\Delta t = 1.0005\Delta/(c\sqrt{2})$ , o que gera uma instabilidade na onda. A fonte senoidal está posicionada no centro do espaço, e nas bordas estão posicionadas PECs que implicam que  $E_z = 0$ . Na figura 10, é possível observar que a onda tende a infinito depois de algumas reflexões, efeito semelhante ao observado no exercício análogo para uma onda uni-dimensional.

## IX. CONCLUSÃO

Por fim, todas as simulações atenderam o esperado. Torna-se notório a importância da estabilidade matemática em todas as situações, e como podemos modelar e prever situações reais da natureza utilizando conceitos de eletromagnetismo.

## REFERÊNCIAS

- [1] Kane Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media", in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 14, May 1966.
- [2] J. R. Nagel, "The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm", [http://drjamesnagel.com/notes/Nagel%20-%20FDTD\\_Introduction.pdf](http://drjamesnagel.com/notes/Nagel%20-%20FDTD_Introduction.pdf).
- [3] R. L. Luz, "O método de diferenças finitas no domínio do tempo em eletromagnetismo", Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.
- [4] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, 2nd.ed. 2001.
- [5] M. N. O. Sadiku, *Elementos de Eletromagnetismo*, CRC Press LLC, Florida, 3rd.ed. 2012.
- [6] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, United States of America by Cambridge University Press, New York, 2005.(pg 29-67).
- [7] A. Taflove e S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time- Domain Method*. Norwood: Artech House, 2a. ed., 2000.