

A equação de onda escalar e o algoritmo FDTD

Antônio Sebastian Fernandes Rabelo
10797781
EESC/ICMC - USP
Paracatu - MG, Brasil
antoniosebastian@usp.br

Gabriell Tavares Luna
10716400
EESC/ICMC - USP
Aurora - CE, Brasil
gabrielltavsb@usp.br

Vitor Oliveira Caires
10748027
EESC/ICMC - USP
Salvador - BA, Brasil
vitorcaires@usp.br

Resumo—Relatório da implementação de um código em Python que permite, com o método FDTD aplicado às equações do de onda escalar, estudar suas características especiais e sua solução linear. **Palavras-chave:** FDTD, equações de onda escalar, solução linear, Python.

I. INTRODUÇÃO

O objetivo do segundo projeto da disciplina SEL0612 - Ondas Eletromagnéticas é a interpretação física das soluções gerais das equações que regem o comportamento de ondas no meio. Além disso, veremos o impacto da aplicação do método FDTD nessas equações, suas limitações e propriedades.

O projeto se baseia nos capítulos 1 e 2 da referência [7], e pretende resolver os problemas de fim de capítulo 2.4 a 2.11.

II. EQUAÇÃO ESCALAR DE ONDA

O objeto de estudo nesse trabalho é o conjunto solução das equações de onda escalares unidimensionais:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

A solução da equação (1), por ser linear e de segunda ordem, pode ser escrita como a combinação linear de soluções propagantes e contra propagantes que, de modo geral, são escritas da seguinte forma:

$$u(x, t) = A(x + ct) + B(x - ct) \quad (2)$$

III. RELAÇÃO DE DISPERSÃO

Dispersão é definida como a relação entre o comprimento de onda λ e a frequência f , mas também pode ser representada através da relação entre o número de onda $k = 2\pi/\lambda$ e a frequência angular: $\omega = 2\pi f$.

$$k = \omega/v = 2\pi f/\lambda f = 2\pi/\lambda \quad (3)$$

Considerando uma onda viajante senoidal contínua, escrita na forma fasorial:

$$u(x, t) = e^{j(\omega t \pm kx)} \quad (4)$$

extraímos o valor da constante k , ao aplicar a equação de (4) em (1):

$$\frac{\partial^2 e^{j(\omega t \pm kx)}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 e^{j(\omega t \pm kx)}}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$(j\omega)^2 e^{j(\omega t \pm kx)} = c^2 (-jk)^2 e^{j(\omega t \pm kx)} \quad (6)$$

$$(j\omega)^2 = c^2 (-jk)^2 \quad (7)$$

$$v_p = \omega/k = \pm c \quad (8)$$

Observamos que o sinal em c apenas indica se a solução está propagando ou contra propagando nas direções do eixo principal. A velocidade de propagação v_p prova a relação linear entre a frequência da onda e seu atraso.

IV. DIFERENÇAS FINITAS

O método de diferenças finitas consiste na quantização do espaço e do tempo, dividindo-os em pequenas frações de mesmo tamanho, possibilitando o cálculo das soluções de derivadas de funções complicadas. De forma direta, impomos que $x_i = i\Delta x$, e que $t_n = n\Delta t$. Ou seja, o tempo e o espaço estão subdivididos em uma rede discreta, capaz de ser computada. As equações utilizadas são:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] \quad (10)$$

Substituindo as equações (9) e (10) na equação de onda escalar (1), temos:

$$u_i^{n+1} = (c\Delta t)^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2u_i^n - u_i^{n-1} \quad (11)$$

Podemos ver que, se implementado em um algoritmo iterativo, o lado direito da equação (11) é conhecido anteriormente na iteração e que o lado esquerdo (próxima iteração) está apenas em função de dados salvos na memória do computador. O processo então pode se repetir para u_i^{n+2} , u_i^{n+3} , etc.

V. RELAÇÃO DE DISPERSÃO NUMÉRICA

A partir da equação (4), aplicando o método de diferenças finitas para discretizar as dimensões, temos:

$$u_i^n = e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} = e^{\tilde{k}_{imag} i \Delta x} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k}_{real} i \Delta x)} \quad (12)$$

Aplicando a equação (12) na equação (11), é possível obter a relação de dispersão numérica de diferença finita da equação de onda escalar unidimensional.

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t} \right)^2 [\cos(\omega \Delta t) - 1] \right\} \quad (13)$$

VI. RESOLUÇÃO DA REDE

A resolução de Δx e Δt devem ser estudadas com cuidado. De acordo com o Número de Courant (14), podemos encontrar os menores valores de Δx e Δt para que não haja problemas com estabilidade.

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (14)$$

Resolução de amostragem da grade em células espaciais por comprimento de onda de espaço livre:

$$N_\lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta x} \quad (15)$$

Substituindo as expressões de Δt e Δx em função de S e N_λ na equação 13, temos:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1}(\zeta) \quad (16)$$

Onde:

$$\zeta = 1 + \left(\frac{1}{S}\right)^2 \left[\cos\left(\frac{2\pi S}{N_\lambda}\right) - 1 \right] \quad (17)$$

Isso significa que \tilde{k} pode ser complexo, dependendo dos valores de S e N_λ . Na equação (16) é possível perceber que a transição do valor de \tilde{k} de real para complexo ocorre quando $\zeta = -1$, nessa transição temos:

$$N_{\lambda, transition} = \frac{2\pi S}{\cos^{-1}(1 - 2S^2)} \quad (18)$$

VII. VELOCIDADE DE FASE NUMÉRICA E CONSTANTE DE ATENUAÇÃO

A velocidade de fase numérica:

$$\tilde{v}_p = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (19)$$

e a constante de atenuação é definida por: $\tilde{k}_{imag}\Delta x$.

A. Regime de Número de Onda Numérica Real

Para $N_\lambda > N_{\lambda, transition}$, temos que \tilde{k} é real, portanto, é possível deduzir das equações (16), (17) e (19) que:

$$\tilde{v}_p = \frac{2\pi c}{N_\lambda \cos^{-1} \left\{ 1 + 4 \left[\cos\left(\frac{\pi}{N_\lambda}\right) - 1 \right] \right\}} \quad (20)$$

$$\zeta = 0 \quad (21)$$

B. Regime de Número de Onda Numérica Complexa

Para $N_\lambda < N_{\lambda, transition}$, temos que \tilde{k} é complexo, portanto, é possível deduzir das equações (16), (17) e (19) que:

$$\tilde{v}_p = \frac{2c}{N_\lambda} \quad (22)$$

$$\tilde{k}_{imag}\Delta x = \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (23)$$

VIII. EXEMPLOS DE CÁLCULOS DA PROPAGAÇÃO DE PULSO

Como na figura 4 é mostrada a propagação de um pulso retangular (40-cell-wide) com fator de estabilidade de Courant $S = 0,99$. A descontinuidade do pulso gera um atraso no tempo ($\tilde{v}_p < c$) da amostra espectral de alta frequência.

Para o instante de tempo correspondente foi mostrada a propagação do pulso com fator $S = 1$ na figura 5, caso em que a forma e a largura do pulso retangular são totalmente preservadas. As descontinuidades abruptas do pulso de propagação são modeladas perfeitamente, sendo $\tilde{v}_p \equiv c$.

O procedimento é repetido para um pulso Gaussiano (40 grid cell) com largura entre os pontos de $1/e$. O resultado é apresentado nas figuras 6 e 7.

IX. EXEMPLO DE CÁLCULOS ENVOLVENDO INSTABILIDADE NUMÉRICA

A forma de onda do pulso de excitação tem uma largura temporal de $40\Delta t$ entre os pontos $1/e$ atingindo o valor máximo de 1,0 no instante $n = 60$.

Sobre a figura 11. Consideramos um exemplo com início de uma instabilidade numérica, porque a condição de estabilidade de Courant é violada em apenas um único ponto da grade. A Figura 11 representa graficamente dois instantes da propagação em espaço livre de um pulso Gaussiano estreito dentro de uma grade com o fator Courant $S = 1.0$ em todos os pontos, exceto em $i = 90$, em que $S = 1.075$. A forma de onda do pulso tem uma largura temporal de $10\Delta t$ entre os pontos $1/e$ atingindo o valor máximo de 1,0 no instante $n = 60$.

X. VELOCIDADE DA ONDA

Definimos como v_{max} a velocidade máxima fasorial da onda em função do tamanho da grade do FDTD:

$$v_{max} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (24)$$

Essa velocidade é justificada pelo fato de que o método utilizado apenas atualiza os valores dos pontos da grade adjacentes ao calculado, e pontos não adjacentes na grade não são influenciados por tal.

XI. O PROGRAMA E COMO FOI APLICADO

Os programas, escritos em Python, estão disponíveis no link do GitHub¹, nos arquivos "part_1.py" e "wave-FDTD.py", bem como o "Readme", que contém os requerimentos, descrição do repositório, e como executar o código. Todo o funcionamento dos códigos foi descrito através dos comentários presentes no mesmo.

O programa "part_1.py" implementa a solução para os problemas 2.4 a 2.6, através da resolução as equações (16), (17), (18), (19) e (20), para os diferentes problemas.

O programa "wave-FDTD.py" implementa o algoritmo FDTD, como proposto na equação (11), para resolver os problemas 2.7 a 2.11.

¹Link para GitHub: <https://github.com/gtavares/electromagnetic-waves/tree/master/FDTD-wave>

XII. SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

A seguir temos as resoluções dos exercícios propostos com suas devidas figuras geradas pelo programa desenvolvido.

Questão 2.4) O gráfico da figura 1 indica a atenuação causada ao sinal dados os variantes valores de densidade de redes. Tomando o valor do número de Courant como $S = 1/\sqrt{2}$ podemos montar a Figura (1) abaixo:

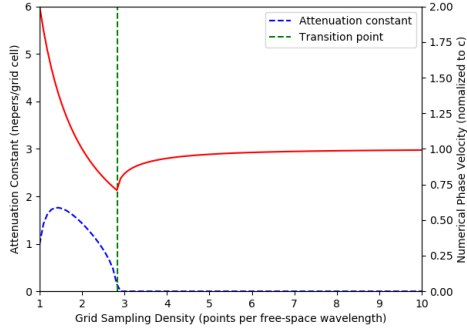


Figura 1. [2.1b] Constante de atenuação e Velocidade numérica de fase (normalizada por c) em função da densidade de pontos da rede.

Como resultado, o programa obteve: $N_{\lambda, transition} = 2.828$.

Ao lado esquerdo do ponto de transição ($N_{\lambda} < N_{\lambda, transition}$), podemos ver um aumento exponencial reverso da velocidade de propagação da onda. A mesma, teoricamente, estaria atravessando o meio a velocidades acima da velocidade da luz (c), porém com uma atenuação também cada vez maior. Do lado direito da linha de transição ($N_{\lambda} > N_{\lambda, transition}$), podemos ver a anulação da constante de atenuação, e a velocidade de propagação se aproxima logicamente a c .

Questão 2.5) A Figura (2) esboça a variação do erro percentual da velocidade de fase com a densidade de pontos da rede para $S = 0.5$. É possível observar que o erro decai com o aumento da densidade.

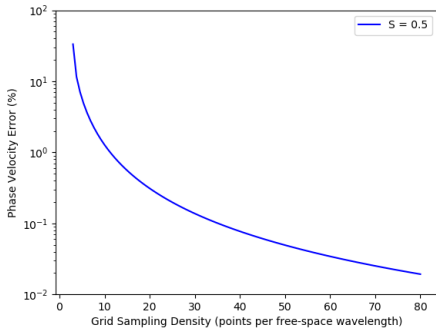


Figura 2. [2.2a] Erro da velocidade de fase ($S = 0.5$)

Questão 2.6) Com a mudança do valor S para $1/\sqrt{2}$, podemos remodelar o gráfico para algo parecido, porém um pouco mais preciso para valores maiores de densidade de rede:

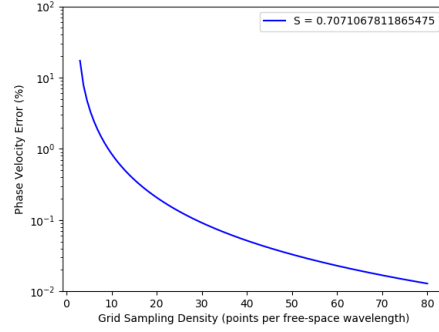


Figura 3. [2.2b] Erro percentual ($S = 1/\sqrt{2}$)

Questões 2.7 e 2.8) Ambas as questões 2.7 e 2.8 serão explicadas a seguir, visto que a proposta delas é similar (diferindo apenas no formato da onda propagada).

Na figura 2.3(a) e 2.3(b), podemos observar o efeito de mudanças nos intervalos de tempo da rede sobre a onda (variações no valor de S). É observado que, quanto mais próximo de 1 ajustarmos o Número de Courant, mais próximo de uma propagação perfeita o método possui.

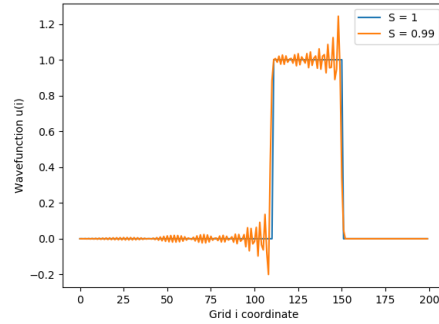


Figura 4. [2.3a] Pulso retangular, $S = 0.99$

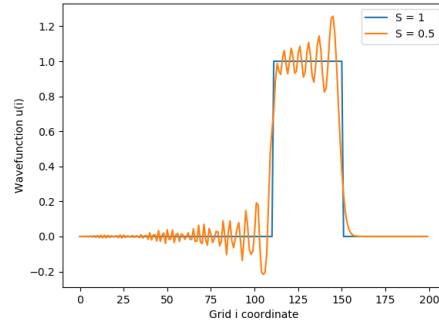


Figura 5. [2.3b] Pulso retangular, $S = 0.5$

As ondulações percebidas na fonte de onda quadrada podem ser interpretadas como atrasos nas velocidades da função

impulso. Podemos ver esse efeito mais amplificado quanto mais diminuto é o S .

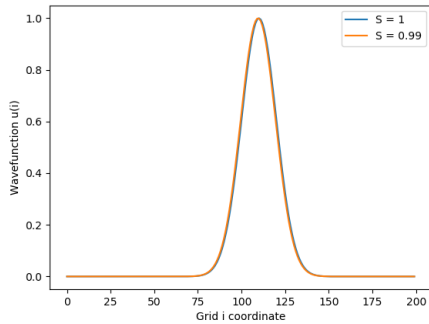


Figura 6. [2.4a] Pulso Gaussiano, $S = 0.99$

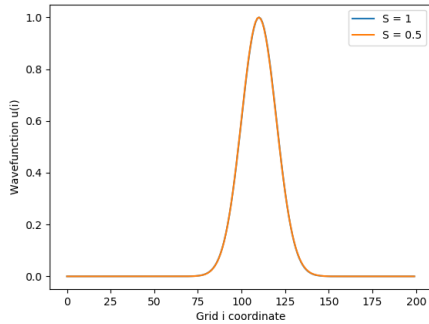


Figura 7. [2.4b] Pulso Gaussiano, $S = 0.5$

No caso do impulso de sino, por ser completamente contínuo, o comportamento super-luminar ($v_p > c$) encontrado nas imagens anteriores não se vê tão marcante. Nem mesmo para valores de $S = 0.5$ pode-se notar grandes diferenças do valor ideal.

Questão 2.9) Pulsos de ondas podem alterar seus formatos dependendo do meio em que propagam. No gráfico da figura 8, diferentes meios foram associados a diferentes valores de S . Nesse caso, assumindo um meio sem perdas, a onda já atingiu o limite entre as superfícies, e sofreu uma reflexão e uma absorção simultaneamente. Nota-se que o formato da onda é diferente dependendo das propriedades do material que ela atravessa.

Do lado esquerdo (entre o ponto 1 e o ponto 139), assumiu-se o valor de $S = 1$, enquanto de 140 a 200, $S = 0.25$.

Questões 2.10 e 2.11) As figuras 9 e 10 são provenientes de uma onda que possui $S = 1.0005$ e sofre um pulso gaussiano, permitindo observar a evolução da instabilidade depois de algumas passos no tempo.

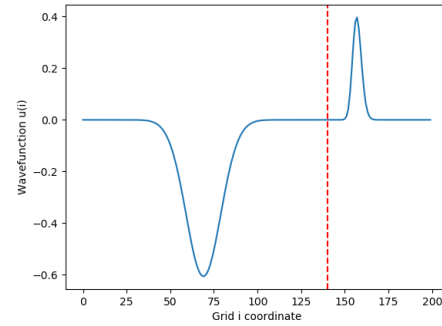


Figura 8. [2.5] Reflexão e Propagação de sinal em meios diferentes

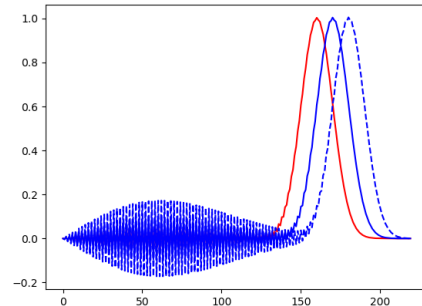


Figura 9. [2.6a] Pulso gaussiano com $S = 1.0005$ em diferentes instantes de tempo.

A figura 10 é uma expansão da figura 9, dos pontos entre 1 e 20. Nela podemos ver as iterações n causando um crescimento das ondas. Isso indica um comportamento instável, visto que a onda de sino é limitada.

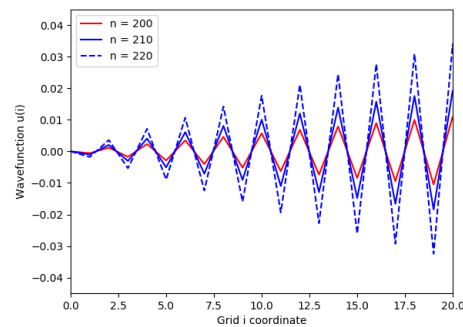


Figura 10. [2.6b] Expansão da figura 9, sob a origem.

Já as figuras 11 e 12 são provenientes de uma onda que possui $S = 1$, com exceção da posição $i = 90$, que possui $S = 1.075$. É possível observar que a fonte da instabilidade está localizada justamente na posição que desobedece a condição de estabilidade, inclusive fazendo parte da onda refletir.

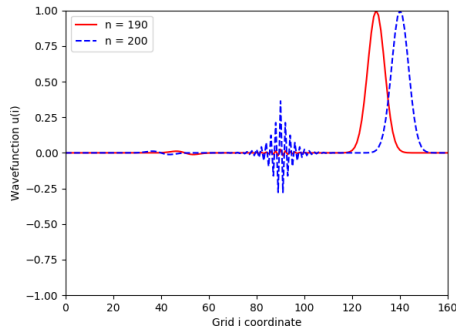


Figura 11. [2.7a] Pulso gaussiano com $S = 1$, com exceção do ponto $i = 90$, que possui $S = 1.075$, em diferentes instantes de tempo.

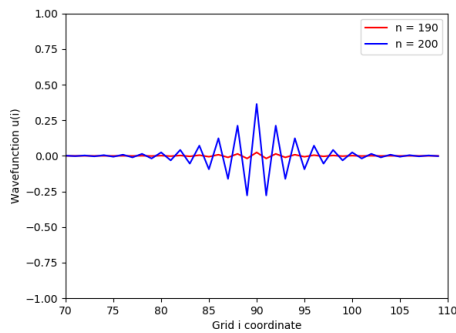


Figura 12. [2.7b] Expansão da figura 11 na região do ponto de instabilidade.

XIII. CONCLUSÃO

Conclui-se que, a partir de conhecimentos computacionais e físicos, podemos modelar efeitos eletromagnéticos e prever propagações de ondas em meios variados. Tangencia-se também, princípios de estabilidade no método *FDTD* e a importância da carga matemática e computacional para análise de soluções da equação da onda.

REFERÊNCIAS

- [1] Kane Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media", in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 14, May 1966.
- [2] J. R. Nagel, "The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm", http://drjamesnagel.com/notes/Nagel%20-%20FDTD_Introduction.pdf.
- [3] R. L. Luz, "O método de diferenças finitas no domínio do tempo em eletromagnetismo", Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.
- [4] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, 2nd.ed. 2001.
- [5] M. N. O. Sadiku, *Elementos de Eletromagnetismo*, CRC Press LLC, Florida, 3rd.ed. 2012.
- [6] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, United States of America by Cambridge University Press, New York, 2005.(pg 29-67).
- [7] A. Taflov e S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time- Domain Method*. Norwood: Artech House, 2a. ed., 2000.