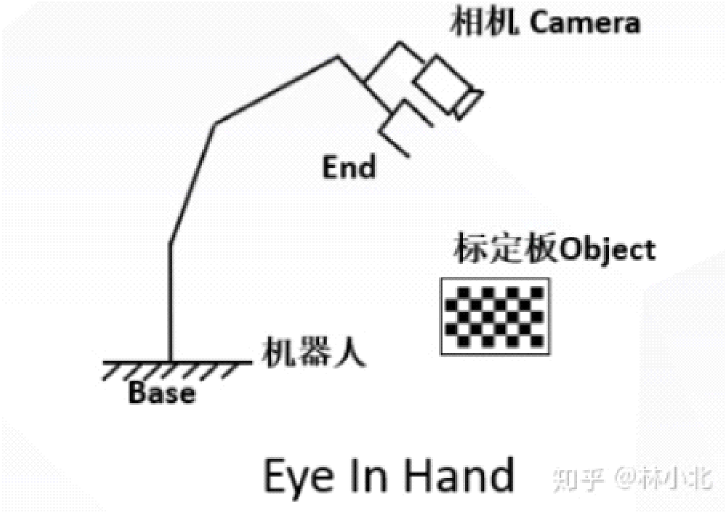
Hand Eye Calibration

2022年6月15日 10:20

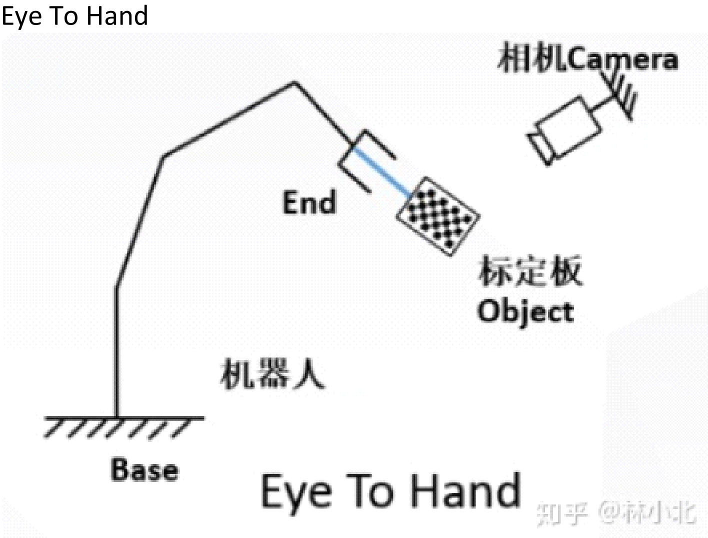
★ Eye In Hand



- 摄像头安装在机械臂上
- 要求解End到Camera之间的坐标关系，可记为$X = T_{E\to C}$
  - 在这种情况下，有两个变量是不变的
  1) 摄像头与机械臂末端之间的坐标转换关系不变，即$T_{E\to C}$不变
  2) 标定板与机械臂底座之间的坐标转换关系不变，即$T_{B\to O}$不变
- 按照$T_{B\to O}$按照前后两次运动展开，有

$$T_{B\to E_1}T_{E_1\to C_1}T_{C_1\to O} = T_{B\to E_2}T_{E_2\to C_2}T_{C_2\to O}$$
$$(T_{B\to E_2})^{-1}T_{B\to E_1}T_{E_1\to C_1} = T_{E_2\to C_2}T_{C_2\to O}(T_{C_1\to O})^{-1}$$
$$T_{E_2\to E_1}T_{E_1\to C_1} = T_{E_2\to C_2}T_{C_2\to C_1}$$
$$T_{E_2\to E_1}T_{E\to C} = T_{E\to C}T_{C_2\to C_1}$$
$$AX = XB$$
$$A: T_{E_2\to E_1}$$
$$B: T_{C_2\to C_1}$$

★ Eye To Hand



- 摄像头安装在一个固定的地方，而标定板固定在机械臂末端
- 要求解Base到Camera之间的坐标转换关系，可计为$X = T_{B\to C}$
  - 在这种情况下，有两个变量是不变的

1) 摄像头与机械臂底座之间的坐标转换关系不变，即$T_{B\to C}$不变
2) 标定板与机械臂末端之间的坐标转换关系不变，即$T_{E\to O}$不变

- 按照$T_{E\to O}$按照前后两次运动展开，有

$$T_{E_1\to B}T_{B\to C}T_{C\to O_1} = T_{E_2\to B}T_{B\to C}T_{C\to O_2}$$
$$(T_{E_2\to B})^{-1}T_{E_1\to B}T_{B\to C} = T_{B\to C}T_{C\to O_2}(T_{C\to O_1})^{-1}$$
$$A: (T_{E_2\to B})^{-1}T_{E_1\to B}$$
$$B: T_{C\to O_2}(T_{C\to O_1})^{-1}$$

★ Tsai-Lenz方法（两段法，先求解R，在计算T）：

- 精度影响因素
  - 两次运动的旋转轴的夹角越大越好
  - 相机中心离标定板距离越小越好
  - 每次运动机械臂末端移动距离越小越好
- 求解步骤
  - 把旋转矩阵A和B转换为旋转向量
    - $r_A = Roderigues(R_A)$
    - $r_B = Roderigues(R_B)$
  - 旋转向量归一化
    - $\theta_A = \|r_A\|_2, N_A = \dfrac{r_A}{\theta_A}$
    - $\theta_B = \|r_B\|_2, N_B = \dfrac{r_B}{\theta_B}$
  - 修正罗德里格斯向量
    - $P_A = 2 * \sin\left(\dfrac{\theta_A}{2}\right) * N_A$
    - $P_B = 2 * \sin\left(\dfrac{\theta_B}{2}\right) * N_B$
  - 计算初始旋转向量
    - $skew(P_A + P_B) * P_x' = P_B - P_A$
  - 计算旋转向量
    - $P_x = \dfrac{2P_x'}{\sqrt{1 + |P_x'|^2}}$
  - 计算旋转矩阵
    - $R_x = \left(\mathbf{1} - \dfrac{|P_x|^2}{2}\right)\boldsymbol{I} + \dfrac{1}{2}(P_x P_x^T + \sqrt{4 - |P_x|^2} * skew(P_x))$
  - 计算平移矩阵
    - $(R_A - \boldsymbol{I})T_X = R_X T_B - T_A$

★ Hand-Eye Calibration Using Dual Quaternions（目前测试精度最高）

- 求解步骤
  - 求旋转矩阵A和B的对偶四元数
    - 首先将矩阵A或B左上角$R_{3\times3}$旋转矩阵转换成四元数$q_0 = rot2quat(R_{3\times3})$
    - 然后构建四元数b $= (0, t_{1\times3})$
    - 对偶部分为$q_e = quatmultiply(q_0, b)/2$
      - ◇ 四元数表示= $\mathrm{q} = (\mathrm{s}, \vec{\boldsymbol{q}})$
      - ◇ $\mathrm{q} = \mathrm{quatmultiply}(q_1, q_2)$

- $q = q_1 q_2 = \left(s_1 s_2 - \vec{\boldsymbol{q}}_1^T \vec{\boldsymbol{q}}_2, s_1 \vec{\boldsymbol{q}}_2 + s_2 \vec{\boldsymbol{q}}_1 + \vec{\boldsymbol{q}}_1 \times \vec{\boldsymbol{q}}_2\right)$
- $\vec{\boldsymbol{q}}_1 \times \vec{\boldsymbol{q}}_2$为$\vec{\boldsymbol{q}}_1$的反对称矩阵与$\vec{\boldsymbol{q}}_2$相乘，即为叉乘
- 向量$[x, y, z]$的反对称矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$

- 则对偶四元数即为(q_0, q_e)

○ 构建矩阵T

- 矩阵A的对偶四元数可表示为$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}') = \left(s_a, \vec{\boldsymbol{a}}, s_a', \vec{\boldsymbol{a}}'\right)$
- 矩阵B的对偶四元数可表示为$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}') = \left(s_b, \vec{\boldsymbol{b}}, s_b', \vec{\boldsymbol{b}}'\right)$
- $T = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} & \left[\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\right]_\times & \boldsymbol{0}_{3\times1} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \vec{\boldsymbol{a}}' - \vec{\boldsymbol{b}}' & \left[\vec{\boldsymbol{a}}' + \vec{\boldsymbol{b}}'\right]_\times & \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} & \left[\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\right]_\times \\ & \vdots & & \end{bmatrix}$
- 求解$T\begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q}' \end{pmatrix} = 0$
- 根据单位对偶四元数性质$\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{q} = 1, and\ \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{q}' = 0$，这里是向量点乘

○ 对矩阵T进行奇异值分解

- 判断是否仅有两个奇异值接近于零（由于噪声须设定阈值）
- 如果是则取右酉矩阵的最后两列奇异向量记为$\vec{\boldsymbol{v}}_7$和$\vec{\boldsymbol{v}}_8$
- $\vec{\boldsymbol{v}}_7 = \left(\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_1\right), \vec{\boldsymbol{v}}_8 = \left(\vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_2\right)$
- 则$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q}' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{u}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{v}}_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{u}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{v}}_2 \end{pmatrix}$
- 根据单位对偶四元数性质可得
  $$\lambda_1^2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_1 + 2\lambda_1 \lambda_2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \lambda_2^2 \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{u}}_2 = 1, \quad (34)$$
  $$\lambda_1^2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_1 + \lambda_1 \lambda_2 \left(\vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_1\right) + \lambda_2^2 \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_2 = 0, \quad (35)$$
- 设定$s = {}^{\lambda_1}/_{\lambda_2}, \lambda_1 = s\lambda_2$,代入(35)中可得
  $$\lambda_2^2 s^2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_1 + \lambda_2^2 s\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_1\right) + \lambda_2^2 \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_2 = 0$$
  $$s^2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_1 + s\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_1\right) + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_2 = 0, \quad (36)$$
- 式(36)是关于s的一元二次方程，则解为
  $$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 其中\ a = \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_1, b = \left(\vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_1\right), c = \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{v}}_2$$
- 将$\lambda_1 = s\lambda_2$代入(34)中可得
  $$\lambda_2^2 \left(s^2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_1 + 2s \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{u}}_2\right) = 1, \quad (37)$$
- 将s代入$s^2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_1 + 2s \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{u}}_2$式中，选择结果最大时对应的$\lambda_1$和$\lambda_2$，其中
  $$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{s^2 \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_1 + 2s \vec{\boldsymbol{u}}_1^T \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \vec{\boldsymbol{u}}_2^T \vec{\boldsymbol{u}}_2}}$$
  $$\lambda_1 = s\lambda_2$$
- 则最终解$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q}' \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{\boldsymbol{v}}_7 + \lambda_2 \vec{\boldsymbol{v}}_8$