Cálculo Numérico 2012
Trabajo Práctico 2

Métodos directos para sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1: Dado el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & \alpha z & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & \alpha z & = & 3 \\ \alpha x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(a) Obtenga los valores de α para los cuales el sistema no tiene solución.

(b) Encuentre los valores de α para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones.

(c) Considerando que existe una solución única para un valor dado de α, encuentre la solución.

Ejercicio 2: Demuestre que si una matriz A es estrictamente diagonal dominante, es decir que sus elementos a_{ij} verifican

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

entonces resulta ser no singular. *Ayuda:* pruebe por contradicción que $Ax = 0$ implica $x = 0$.

Ejercicio 3: Determine si la siguiente matriz es simétrica, estrictamente diagonal dominante y definida positiva. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4: Si A es de orden n, simétrica y definida positiva, demuestre que

(a) A es no singular. *Ayuda:* pruebe por contradicción que $Ax = 0$ implica $x = 0$.

(b) $(a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}$ para cada $i \neq j$. *Ayuda:* considere en particular el vector $x = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, \alpha, 0, \cdots, 0)^T$ donde $x_i = 1$ y $x_j = \alpha$.

Ejercicio 5

(a) Para la siguiente matriz, encuentre la factorización $(P^T L)U$, realizando la eliminación de Gauss con intercambio de filas según lo indica la estrategia de *pivoteo parcial*. P denota la matriz de permutación. Luego verifique que se cumple que $PA = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) En qué casos una matriz tiene factorización LU?

Ejercicio 6:

(a) Escriba funciones de Scilab u Octave que implementen los algoritmos para resolver un sistema triangular *superior* por sustitución hacia atrás y un sistema triangular *inferior* por sustitución hacia adelante.

(b) Póngalas a prueba sobre los siguientes sistemas:

- Sustitución hacia atrás

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Sustitución hacia adelante: utilice la traspuesta de la matriz del sistema anterior y el mismo vector de términos independientes.

(c) Realice el conteo analítico de operaciones involucradas en la resolución de dichos sistemas.

(d) Modifique la función de sustitución hacia atrás de forma que permita resolver un sistema $\tilde{U}x = \tilde{b}$, donde $\tilde{U}$ y $\tilde{b}$ son obtenidos, correspondientemente, por permutaciones de las filas de la matriz triangular superior U y de los elementos del vector de términos independientes b. Las permutaciones son almacenadas en un vector `indx`.

Eliminación de Gauss y factorización de Doolittle: La eliminación de Gauss en los ordenamientos kij, kji y jki, donde los índices k, i, j designan las posiciones de pivote, fila y columna respectivamente, se refieren simplemente al orden de los tres lazos anidados en la fase de eliminación. El orden kij es aquél que da lugar a la eliminación de Gauss usual y los tres reproducen la factorización de Doolittle $A = L_1U$ (L_1 una matriz triangular inferior con unos en su diagonal y U triangular superior). En cualquiera de los algoritmos para estos ordenamientos se opta por escribir los elementos de las matrices L_1 y U sobre los de la matriz del sistema original (i.e. se pierde la matriz A pero es lo usual para ahorrar memoria RAM).

Ejercicio 7:

(a) Escriba funciones de Scilab u Octave que permitan resolver el sistema lineal $Ax = b$ mediante la eliminación de Gauss siguiendo el orden kij. La primera de ellas *no* utizará pivoteo mientras que la segunda aplicará pivoteo *parcial* y devolverá, además de la solución, la matriz de permutación P y las matrices de la factorización (L_1 y U).
(Nota: *deberá utilizar la función de sustitución hacia atrás implementada en el ejercicio 7(d)*).

(b) Pruebe *ambas* funciones sobre los sistemas lineales formados por las siguientes matrices, asumiendo que el vector de términos independientes es el mismo para todos ellos ($b = [1 \quad 2 \quad 3]^T$). Calcule el residuo y saque conclusiones en cada caso.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5.00e-02 & 5.57e+02 & -4.00e-02 \\ 1.98e+00 & 1.94e+02 & -3.00e-03 \\ 2.74e+02 & 3.11e+00 & 7.50e-02 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Factorización de Crout y Cholesky a partir de la factorización de Doolittle: Una vez obtenida la factorización de Doolittle para una matriz A, se pueden obtener fácilmente las demás factorizaciones. Supóngase entonces que $A = L_1U$. Si se define una matriz D diagonal cuyas entradas sean los elementos de la diagonal de U, y se denomina como $\widehat{U}$ a la matriz L_1^t se tiene entonces que $A = L_1D\widehat{U}$. A continuación, se define como $\widehat{L}$ al producto de las matrices L_1 y D para obtener entonces la *factorización de Crout* $A = \widehat{L}\widehat{U}$. Si se descompone la matriz D como el producto $D^{1/2}D^{1/2}$ en la factorización $A = LD\widehat{U}$ y se asocia un factor a L y el otro a $\widehat{U}$, se obtiene la *factorización de Cholesky* $A = \widetilde{L}\widetilde{L}^t = (LD^{1/2})(D^{1/2}\widehat{U})$, donde $\widetilde{L}$ se denomina factor de Cholesky.

Ejercicio 8

(a) Encuentre las factorizaciones de Doolittle, Crout y Cholesky en lápiz y papel de la siguiente matriz y verifique en todos los casos que efectivamente se recupera la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

(b) Escriba una función de Scilab / Octave que implemente el algoritmo correspondiente a la factorización de Crout sin pivoteo y compruebe las cuentas realizadas en el item (a). La función recibe la matriz A y devuelve las matrices L y U_1.

(c) Escriba una función de Scilab / Octave que implemente el algoritmo correspondiente a la factorización de Cholesky sin pivoteo y compruebe las cuentas realizadas en el item (a). La función recibe la matriz A y devuelve la matriz L.

(d) Comente las condiciones que debe presentar la matriz A para tener factorización de Cholesky.

Ejercicio 9 (Entregar) Realizar el ejercicio 15, Capítulo 6, Sección 1, página 358 del libro de Burden y Faires, 7ma edición.