Cálculo Numérico 2012
Trabajo Práctico 3

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1: Calcule los autovalores, los autovectores y el radio espectral de la siguiente matriz. Determine si la misma es convergente.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2: Sea A una matriz cuadrada de orden n, λ un autovalor de A y $x \neq 0$ un autovector asociado.

(a) Demuestre que λ es también autovalor de A^T.

(b) Demuestre que si existe A^{-1}, entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1} con autovector x.

Ejercicio 3: Implemente las siguientes funciones en Scilab / Octave:

(a) `function [x,it,r_h] = jacobi(A,b,x0,maxit,tol)` que devuelva la solución x del sistema $Ax = b$, la cantidad de iteraciones necesarias para resolverlo mediante el método iterativo de Jacobi y el residuo correspondiente con los mismos argumentos de entrada que para el inciso anterior.

(b) `function [x,it,r_h] = gaussseidel(A,b,x0,maxit,tol)` que devuelva la solución x del sistema $Ax = b$, la cantidad de iteraciones necesarias para resolverlo mediante el método iterativo de Gauss Seidel y el residuo correspondiente con los mismos argumentos de entrada que para el inciso anterior.

(c) Realice analíticamente el conteo de operaciones para los métodos de Jacobi y Gauss Seidel.

Ejercicio 4:

(a) Implemente una función en Scilab `function [x,it,r_h] = sor(A,b,x0,maxit,tol,w)` que devuelva la solución x del sistema $Ax = b$ y la cantidad de iteraciones necesarias para resolverlo mediante el método SOR. Los argumentos de entrada son los mismos que para las funciones anteriores, adicionando la constante `w` (parámetro de relajación del método).

(b) Resuelva el siguiente sistema lineal con el método de SOR, estimando numéricamente el parámetro ω óptimo. Luego resuélvalo con el método de Gauss Seidel, compare con los resultados de SOR y obtenga conclusiones. Cuál es la relación entre los dos métodos?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & & & = & 24 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 30 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -24 \end{array}$$

Ejercicio 5: Algunas técnicas iterativas involucran un proceso que convierte el sistema $Ax = b$ en uno equivalente de la forma $x = Tx + c$ para alguna matriz T y vector c. La iteración general resulta entonces

$$x^{(k+1)} = Tx^k + c, \quad k \geq 0$$

partiendo de un vector $x^{(0)}$ conocido.

(a) Demuestre que si $\|T\| < 1$ para cualquier norma matricial inducida, se verifican las siguientes desigualdades:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|T\|^k \|x - x^{(0)}\| \quad \text{y} \quad \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Ayuda: Para la segunda ecuación, recuerde que se puede escribir $x - x^{(0)} = \sum_{k \geq 0} x^{(k+1)} - x^{(k)}$.

(b) Escriba las iteraciones de Jacobi y Gauss Seidel bajo la forma de la ecuación $x = Tx + c$.

Ejercicio 6:

(a) Muestre que si la matriz cuadrada no singular A de orden n es simétrica, entonces el gradiente de la función cuadrática $q(x) = (1/2)x^T Ax - x^T b$ evaluado en x está dado por $\nabla q = Ax - b$. Recuerde que el gradiente de una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el vector cuyas componentes son $\partial g / \partial x_i$, para $i = 1, \cdots, n$.

(b) Muestre que el valor mínimo de $q(x)$ está dado por $q_{min} = -(1/2)b^T A^{-1} b$.

(c) Implemente en Scilab la función `function [x,it,r_h] = cg(A,b,x0)` que implementa el método de gradientes conjugados, donde `x0` es la aproximación inicial propuesta.

Ejercicio 7: (Entregar) Resuelva el siguiente sistema con todos los métodos propuestos en los ejercicios anteriores, cuando la matriz del sistema es de orden 4, 8 y 16 manteniendo su estructura. En cada caso, estime el costo de cada método en función del tiempo (comandos `tic` y `toc` de Scilab / Octave), número de iteraciones, tasa de convergencia (realizar gráficas *norma del residuo vs. número de iteraciones*), etc. Analizar los resultados obtenidos e indicar cuál método piensa ud. que es el más conveniente? Cómo justifica que los métodos logren o no convergencia?

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$