Ejercicio 8

Método Predictor-Corrector:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \qquad (1)$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \qquad (2)$$

a) Orden:

Para que un método multipaso sea de *Orden* $O(h^m)$, es necesario y suficiente que cumpla con la condición de Consistencia y que además verifique lo siguiente:

$$\sum_{j=0}^{p}(-j)^k a_j + k\sum_{j=-1}^{p}(-j)^{k-1}b_j = 1 \qquad \text{para } k = 2,3,\cdots,m$$

Consistencia:

Una condición necesaria y suficiente para que un método multipaso sea *Consistente* es que se cumpla

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1 \quad \text{y} \quad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$$

Siendo $p + 1$ la cantidad de pasos del método.

Para la ecuación (1), $p = 2$ porque el método involucra calcular 3 valores iniciales, por lo tanto es un método de 3 pasos.

Valores para las componentes a_j y b_j:

a_j	b_j
$a_0 = 1$	$b_{-1} = 0$
$a_1 = 0$	$b_0 = \frac{23}{12}$
$a_2 = 0$	$b_1 = -\frac{16}{12}$
	$b_2 = \frac{5}{12}$

Calculando la *Consistencia* obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j = 1 + 0 + 0 = \boxed{1}$$

$$-\sum_{j=0}^{2} j a_j + \sum_{j=-1}^{2} b_j = -(0*1 + 1*0 + 2*0) + \left(0 + \frac{23}{12} - \frac{16}{12} + \frac{5}{12}\right) = 0 + \frac{12}{12} = \boxed{1}$$

La ecuación (1) es *Consistente*.

Calculando el *Orden*, para los distintos k, obtenemos:

$k = 2$

$$\sum_{j=0}^{2} (-j)^2 a_j + 2 \sum_{j=-1}^{2} (-j)^{2-1} b_j = (0 + 0 + 0) + 2*\left(1*0 + 0*\frac{23}{12} + 1*\frac{16}{12} - 2*\frac{5}{12}\right) =$$
$$= 0 + 2*\left(\frac{16}{12} - \frac{10}{12}\right) = \boxed{1}$$

$k = 3$

$$\sum_{j=0}^{2} (-j)^3 a_j + 3 \sum_{j=-1}^{2} (-j)^{3-1} b_j = (0 + 0 + 0) + 3*\left(1*0 + 0*\frac{23}{12} - 1*\frac{16}{12} + 4*\frac{5}{12}\right) =$$
$$= 0 + 3*\left(-\frac{16}{12} + \frac{20}{12}\right) = \boxed{1}$$

$k = 4$

$$\sum_{j=0}^{2} (-j)^4 a_j + 4 \sum_{j=-1}^{2} (-j)^{4-1} b_j = (0 + 0 + 0) + 4*\left(1*0 + 0*\frac{23}{12} + 1*\frac{16}{12} - 8*\frac{5}{12}\right) =$$
$$= 0 + 4*\left(\frac{16}{12} - \frac{40}{12}\right) = -8 \neq 1$$

La ecuación (1) es de *Orden* $O(h^3)$.

Para la ecuación (2), $p = 2$ porque el método involucra calcular 3 valores iniciales, por lo tanto es un método de 3 pasos.

Valores para las componentes a_j y b_j:

a_j	b_j
$a_0 = 1$	$b_{-1} = \frac{9}{24}$
$a_1 = 0$	$b_0 = \frac{19}{24}$
$a_2 = 0$	$b_1 = -\frac{5}{24}$
	$b_2 = \frac{1}{24}$

Calculando la *Consistencia* obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j = 1 + 0 + 0 = \boxed{1}$$

$$-\sum_{j=0}^{2} j a_j + \sum_{j=-1}^{2} b_j = -(0*1 + 1*0 + 2*0) + \left(\frac{9}{24} + \frac{19}{24} - \frac{5}{24} + \frac{1}{24}\right) = 0 + \frac{24}{24} = \boxed{1}$$

La ecuación (2) es *Consistente*.

Calculando el *Orden*, para los distintos k, obtenemos:

$k = 2$

$$\sum_{j=0}^{2}(-j)^2 a_j + 2\sum_{j=-1}^{2}(-j)^{2-1} b_j = (0 + 0 + 0) + 2*\left(1*\frac{9}{24} + 0*\frac{19}{24} + 1*\frac{5}{24} - 2*\frac{1}{24}\right) =$$

$$= 0 + 2*\left(\frac{9}{24} + \frac{5}{24} - \frac{2}{24}\right) = \boxed{1}$$

$k = 3$

$$\sum_{j=0}^{2}(-j)^3 a_j + 3\sum_{j=-1}^{2}(-j)^{3-1} b_j = (0 + 0 + 0) + 3*\left(1*\frac{9}{24} + 0*\frac{19}{24} - 1*\frac{5}{24} + 4*\frac{1}{24}\right) =$$

$$= 0 + 3*\left(\frac{9}{24} - \frac{5}{24} + \frac{4}{24}\right) = \boxed{1}$$

$k = 4$

$$\sum_{j=0}^{2}(-j)^4 a_j + 4\sum_{j=-1}^{2}(-j)^{4-1} b_j = (0+0+0) + 4*\left(1*\frac{9}{24} + 0*\frac{19}{24} + 1*\frac{5}{24} - 8*\frac{1}{24}\right) =$$

$$= 0 + 4*\left(\frac{9}{24} + \frac{5}{24} - \frac{8}{24}\right) = \boxed{1}$$

$k = 5$

$$\sum_{j=0}^{2}(-j)^5 a_j + 5\sum_{j=-1}^{2}(-j)^{5-1} b_j = (0+0+0) + 5*\left(1*\frac{9}{24} + 0*\frac{19}{24} - 1*\frac{5}{24} + 16*\frac{1}{24}\right) =$$

$$= 0 + 5*\left(\frac{9}{24} - \frac{5}{24} + \frac{16}{24}\right) = \frac{100}{24} \neq 1$$

La ecuación (2) es de *Orden* $O(h^4)$.

El método Predictor-Corrector definido por las ecuaciones (1) y (2), es un método *Consistente*, con un *Orden* $O(h^3)$ para la parte predictora y un *Orden* $O(h^4)$ para la parte correctora.

Como orden general del método, se puede pensar en un *Orden* $O(h^4)$, debido a que es el corrector quien especifica la precisión del método en general, ya que el predictor solo hace una mejor aproximación al valor w_{n+1} necesario en la formula correctora.

b) PVI:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t^2} - 2y^2, & 0 \leq t \leq 10 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Con solución exacta $y(t) = t/(1+t^2)$; y con pasos $h_1 = 0.125$ y $h_2 = 0.0625$.

Para poder calcular el orden empírico m hay que utilizar la siguiente relación:

$$e_2 = e_1\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m$$
$$\frac{e_2}{e_1} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m$$
$$\ln\left(\frac{e_2}{e_1}\right) = \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m$$
$$\ln\left(\frac{e_2}{e_1}\right) = m * \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)$$
$$\frac{\ln\left(\frac{e_2}{e_1}\right)}{\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)} = m$$

Con e_1 y e_2 los errores del método del inciso a), calculados con pasos h_1 y h_2, respectivamente. Como los errores corresponden a distintos h, es preciso tomar los puntos que tengan en común a la hora de hacer el cociente entre ellos.

El método requiere calcular los cuatro primeros pasos mediante la solución exacta; esto sería $w_i = y(t_i)$, para $i = 0,1,2,3$. Dividiendo el intervalo del PVI por h_1 y h_2, obtenemos los siguientes datos:

$$\frac{10-0}{h_1} = \frac{10-0}{0.125} = 80$$
$$\frac{10-0}{h_2} = \frac{10-0}{0.0625} = 160$$

Y los puntos en común entre ambos intervalos son los puntos definidos a partir de h_1 debido a que 80 es múltiplo de 160 ($80 * 2 = 160$).

Para poder calcular m, tomamos los puntos que tienen en común el vector e_2 con respecto a e_1. Luego, se calcula la norma de ambos:

$$|e_1| = 0.0002636$$
$$|e_{2^*}| = 0.0000226$$

Hacemos los cocientes $|e_{2^*}|/|e_1|$ y h_2/h_1:

$$\frac{|e_{2^*}|}{|e_1|} = \frac{0.0000226}{0.0002636} = 0.0857360$$
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{0.0625}{0.125} = 0.5$$

Aplicamos logaritmos a cada factor, y hacemos el cociente:

$$\frac{\ln\left(\frac{|e_{2^*}|}{|e_1|}\right)}{\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)} = \frac{\ln(0.0857360)}{\ln(0.5)} = \frac{-2.4580454}{-0.6931472} = \boxed{3.5462098}$$

Como se puede apreciar, obtenemos un valor de m para el método en general (predictor y corrector). Se puede optar por hacer aplicarle la función piso o techo al valor para obtener un número entero, y así poder relacionarlo con el orden teórico calculado en el inciso anterior.

Analizando el error del método, podemos concluir que al dividir el paso h por dos, el mismo disminuye cuadráticamente, mejorando la aproximación a la solución real.

Ejercicio 9

a) Método de Runge-Kutta de 4[to] Orden:

```
function [t,w,e] = RungeKutta4(f,a,b,h,alfa,yex)
    N=(b-a)/h;
    t=(a:h:b);
    w(1,:)=alfa;
    for (i=1:N)
        K1=h*f(t(i),w(i,:));
        K2=h*f(t(i)+0.5*h,w(i,:)+0.5*K1);
        K3=h*f(t(i)+0.5*h,w(i,:)+0.5*K2);
        K4=h*f(t(i)+h,w(i,:)+K3);
        g(i,:)=K1+2*K2+2*K3+K4;
        w(i+1,:)=w(i,:)+(1/6).*g(i,:);
    end
    e=abs(yex(t)-w);
endfunction
```

Con pasos $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.1$ y $h_3 = 0.05$.

$$\text{PVI} \begin{cases} u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos(t) + 4\sin(t) & 0 \le t \le 2, \quad u_1(0) = 0; \\ u_2' = 3u_1 + u_2 - 3\sin(t) & 0 \le t \le 2, \quad u_2(0) = -1. \end{cases}$$

Para poder calcular los errores máximos de cada ecuación, para cada paso h, utilizamos las soluciones analíticas del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin(t)$$
$$u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Los errores máximos son, para cada paso h y para cada ecuación u_i:

	$h_1 = 0.2$	$h_2 = 0.1$	$h_3 = 0.05$
$e(u_1)$	0.0002730	0.0000150	0.0000009
$e(u_2)$	0.0002616	0.0000143	0.0000008

Inmediatamente se puede apreciar que el método de Runge-Kutta de 4[to] Orden aproxima la solución del sistema, para los h_i dados, con una cota de error $\epsilon \le 10^{-4}$. A pesar de que el método requiere evaluar la función cuatro veces por cada iteración (cantidad definida según el ancho del intervalo y del paso h), produce excelentes resultados a un costo computacional razonable. Se deduce a partir de los resultados del método, que al dividir a la mitad el tamaño del paso el error absoluto disminuye en un factor aproximado de $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ (lo mismo se aplicaría para un factor de $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$). Un problema que puede surgir es cuando se tome un paso muy pequeño, lo cual produciría errores de redondeo en las cuatro evaluaciones de la función y, por lo tanto, acumulando los errores por cada iteración del método, dando lugar a resultados incorrectos.

b) PVI:

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln(t), \qquad 1 \leq t \leq 2, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 0$$

Y cuya solución exacta es: $y(t) = (7/4)t + (1/2)t^3 \ln(t) - (3)t^3$.

Con pasos $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.1$ y $h_3 = 0.05$.

Se pide calcular la solución del PVI mediante un método Predictor-Corrector conformado por Runge-Kutta de 4[to] Orden (Predictor) y Adams-Moulton de tres pasos (Corrector). Como el PVI es una ecuación de segundo orden, no se puede aplicar directamente un método para resolver el PVI. Para poder aplicarlo, hay que reducir el orden de la ecuación diferencial con un **cambio de variables**.

Se define lo siguiente:

$$u_1 = y$$
$$u_2 = y' = u_1'$$
$$u_2' = y''$$

De esta manera, se puede plantear un sistema de ecuaciones diferenciales, pero con las funciones incógnitas $u_i(t)$. Reemplazando en la ecuación diferencial y'', y' y y por u_2', u_2 y u_1, respectivamente, obtenemos la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$t^2 u_2' - 2tu_2 + 2u_1 = t^3 \ln(t)$$
$$u_2' = t\ln(t) + \frac{2}{t}u_2 - \frac{2}{t^2}u_1$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden queda:

$$u_1' = u_2 \qquad (1)$$
$$u_2' = t\ln(t) + \frac{2}{t}u_2 - \frac{2}{t^2}u_1 \qquad (2)$$

Con condiciones iniciales:

$$y(1) = u_1(1) = 1$$
$$y'(1) = u_2(1) = 0$$

Ahora se puede aplicar el método de Runge-Kutta para obtener los primeros tres pasos necesarios para Adams-Moulton.

Los errores máximos son, para cada paso h y para cada ecuación u_i:

	$h_1 = 0.2$	$h_2 = 0.1$	$h_3 = 0.05$
$e(u_1)$	0.0000889	0.0000036	0.0000002
$e(u_2)$	0.0000437	0.0000055	0.0000006

Recordemos que $u_1' = u_2$; esto quiere decir que u_1 aproxima a la solución y, mientras que u_2 aproxima a la derivada de la solución y'. Luego, con estas aproximaciones, se puede despejar el término de orden superior, para luego calcular su aproximación con las aproximaciones u_1 y u_2.

Se deduce a partir de los resultados del método, que al dividir a la mitad el tamaño del paso el error absoluto disminuye en un factor aproximado de $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ (lo mismo se aplicaría para un factor de $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$). La combinación de Runge-Kutta de 4^{to} Orden como formula predictora con Adams-Moulton de tres pasos como formula correctora produce resultados con una cota de error $\epsilon \leq 10^{-5}$.