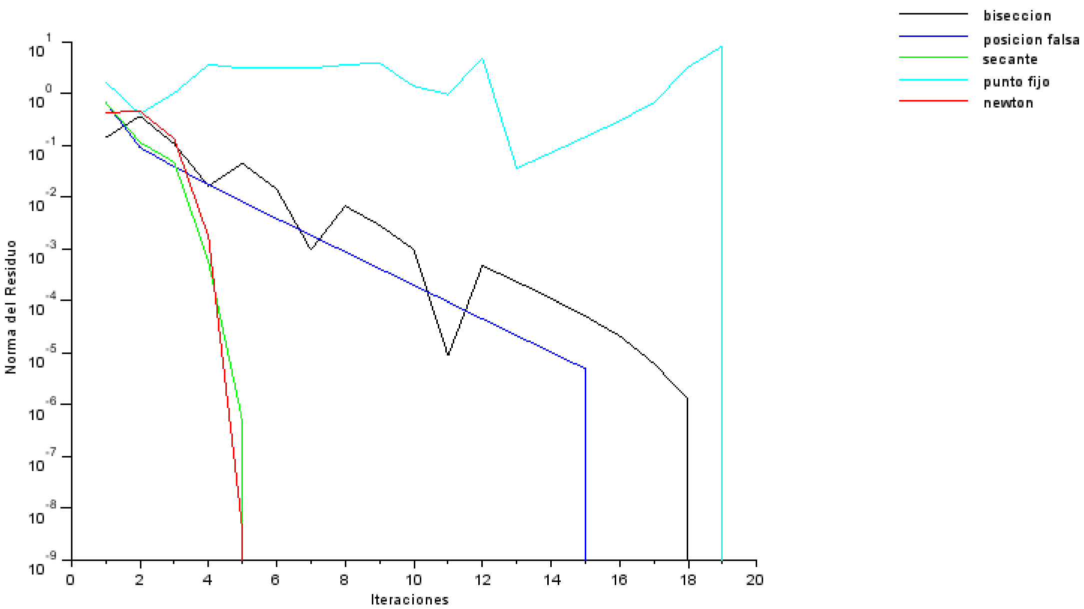
Ejercicio 5

Tolerancia = 10^{-5}; Máximo número de iteraciones = 20.

La función $f(x) = \tan(x)$ tiene múltiples raíces en el dominio $(-\infty;\infty)$, con lo cual los métodos van a poder aproximar alguna de ellas según cómo elijamos el intervalo. En otro caso, puede que el intervalo no contenga una raíz, haciendo que los métodos fallen.

Si consideramos el intervalo $[2;4]$, con un punto inicial en $x = 2.1$, obtenemos los siguientes resultados para los distintos métodos:



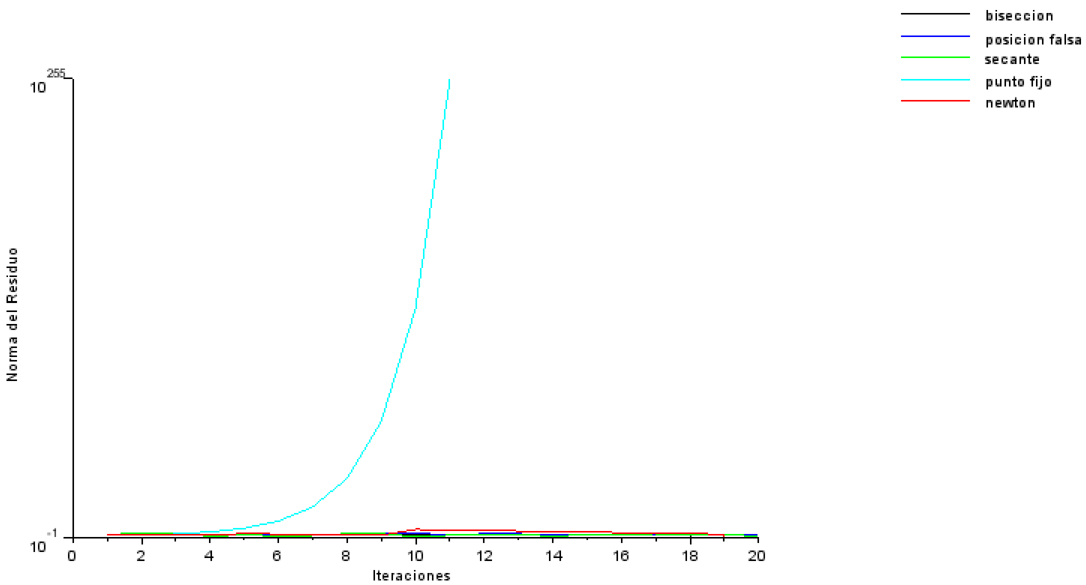
Y la aproximación de las raíces para cada uno de ellos es:

Método	Aproximación	Iteraciones
Bisección	3.1415939	18
Posición Falsa	3.1415972	15
Secante	3.1415927	5
Punto Fijo	25.565367	No convergió
Newton	3.1415927	5

Lo primero que se puede apreciar es que hay oscilaciones para los métodos de Bisección y Punto Fijo debido a la naturaleza discontinua de la función $f(x) = \tan(x)$. Bisección converge con orden lineal siempre que exista una raíz en el intervalo; pero Punto Fijo no tiene una raíz en el intervalo $[2;4]$, sino que tiene una en el intervalo $[3;5]$. Los otros métodos ofrecen buenas aproximaciones para la tolerancia especificada; Newton y Secante tienen orden cuadrático mientras que Posición Falsa tiene orden lineal.

La función $f(x) = 1 + x^2$ no tiene raíces en el dominio $(-\infty; \infty)$, con lo cual ninguno de los métodos va a poder converger a alguna raíz (pues no existe), sin importar cómo elijamos el intervalo.

Si consideramos el intervalo $[-0.5; 1.5]$, con un punto inicial en $x = -0.3$, obtenemos los siguientes resultados para los distintos métodos:



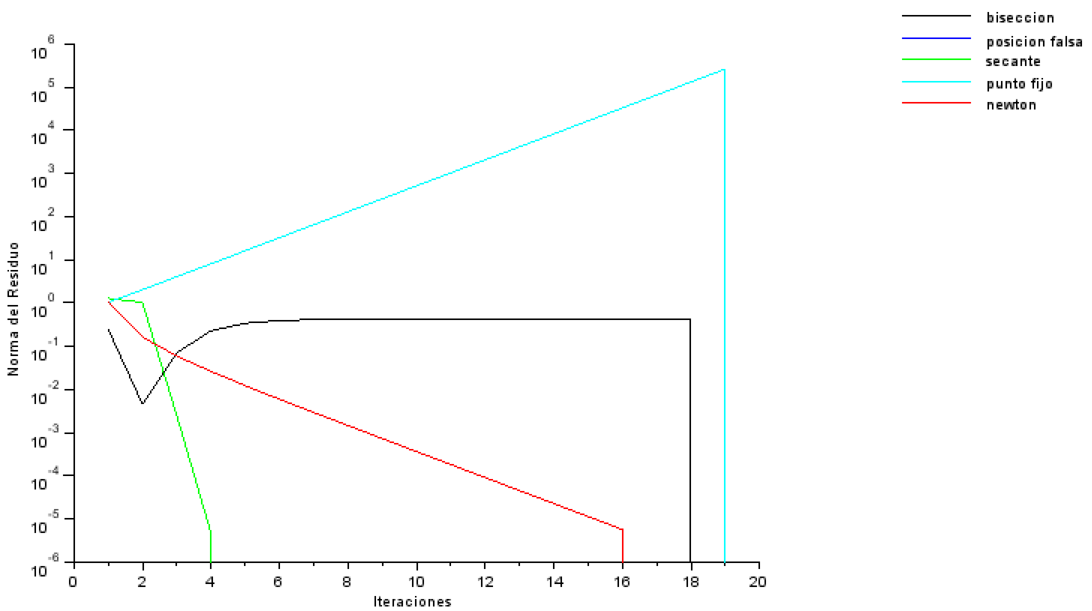
Y la aproximación de las raíces para cada uno de ellos es:

Método	Aproximación	Iteraciones
Bisección	1.4999924	No convergió
Posición Falsa	1.4999924	No convergió
Secante	1.4999924	No convergió
Punto Fijo	Infinito	No convergió
Newton	Infinito	No convergió

Lo primero que se puede apreciar es que ninguno de los métodos puede aproximar una raíz de la función $f(x) = 1 + x^2$. Bisección, Posición Falsa y Secante convergen a $x \approx 1.5$ con un orden superlineal, pero esto es un error puesto que la función nunca intersecta el eje x en el intervalo $[-\infty; \infty]$. Punto Fijo tampoco tiene una intersección con la lineal, haciendo que el método diverja con un orden exponencial. Newton diverge en un par de iteraciones debido a que no existe continuidad en derivadas de orden mayor a 2 (división por cero).

La función $f(x) = x * (1 + \sin\frac{1}{x})$ no es continua en el dominio $(-\infty; \infty)$, con lo cual hay que tomar precauciones a la hora de elegir el intervalo a analizar.

Si consideramos el intervalo $[-2; -0.25]$, con un punto inicial en $x = -1.99$, obtenemos los siguientes resultados para los distintos métodos:



Y la aproximación de las raíces para cada uno de ellos es:

Método	**Aproximación**	**Iteraciones**
Bisección	-0.2500067	No convergió
Posición Falsa	-0.0052582	4
Secante	-0.0052582	4
Punto Fijo	-532821.66	No convergió
Newton	-0.6366255	16

Lo primero que se puede apreciar es que solo Posición Falsa, Secante y Newton pueden aproximar una raíz de la función $f(x) = x * (1 + \sin\frac{1}{x})$ a partir del punto inicial $x = -1.99$. Bisección no llega a converger en el límite de iteraciones impuesto debido a que no hay un cambio de signo en la función en el intervalo, con lo cual requiere más iteraciones para poder acotar el mismo y hallar la raíz aproximada. Punto Fijo tampoco converge en el intervalo ya que no tiene una intersección con la lineal, haciendo que el método diverja con un orden lineal. Newton tiene una convergencia de orden lineal y llega a la solución aproximada en 16 iteraciones. Posición Falsa y Secante son idénticas tanto en sus iteraciones como en sus residuos, y convergen con orden cuadrático.

Ejercicio 6

Datos del problema:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \\ g &= 32.17\frac{ft}{s^2} \text{ (fuerza de gravedad)} \\ k &= 0.1\, lb \cdot \frac{s}{ft} \text{ (resistencia viscosa del aire)} \\ h_0 &= 300\, ft \text{ (altura inicial)} \\ m &= 0.25\, lb \text{ (masa del cuerpo)} \end{aligned}$$

Y una aproximación de 10^{-2}. El método principal elegido para resolver este problema es el método de Newton, pero antes se utilizará el método de la Bisección para poder obtener un punto el cual se utilizará como aproximación inicial para Newton.

Para poder aplicar Newton requerimos, además de un punto inicial próximo a la raíz de la función $h(t)$ (próximo a la raíz verdadera de la función, para asegurar la convergencia), de la derivada $\frac{dh(t)}{dt}$ de la función $h(t)$.

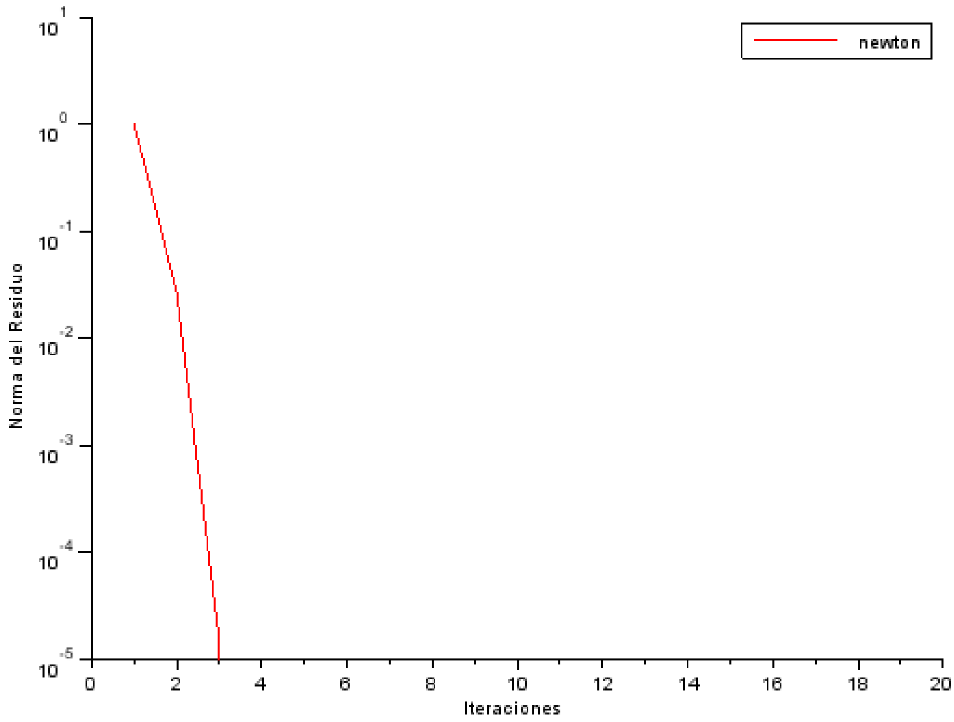
La derivada de la función $h(t)$ es:

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= -\frac{mg}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\left(e^{-\frac{kt}{m}}\right)\left(-\frac{k}{m}\right) \\ &= -\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{kt}{m}}\right) \\ &= \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right) \end{aligned}$$

Como punto inicial, se calcula una aproximación a la raíz de la función $h(t)$ mediante tres iteraciones del método de la Bisección, en el intervalo $[0; 20]$. El resultado es:

Método	**Aproximación**	**Iteraciones**
Bisección	5	3

El punto inicial para el método de Newton es entonces $x = 5$. Luego, aplicando dicho método con una tolerancia 10^{-2} y 20 iteraciones, obtenemos los siguientes resultados:



Y la raíz aproximada es:

Método	Aproximación	Iteraciones
Newton	6.0037263	3

Se puede apreciar en la gráfica la rápida convergencia de Newton cuando la función está bien definida:

- Función continua.
- Derivada primera continua.
- Punto inicial cercano a la raíz de la función.

Un rápido análisis de la función $h(t)$ y su derivada $\frac{dh(t)}{dt}$, nos muestra que las mismas están definidas para todo el intervalo $(-\infty; \infty)$ y no presentan discontinuidades en el mismo. El punto inicial próximo a la raíz fue calculado previamente mediante el método de la Bisección, garantizando una convergencia acelerada. El método de Newton tiene un orden de convergencia cuadrático, como se puede apreciar en la gráfica.