Ejercicio 7

a) Código para el trazador cúbico sujeto:

```
function [a,b,c,d] = cubic_spline_clamped(x,f,df)
    n=length(x);
    h=x(2:n)-x(1:n-1); //vector de saltos
    //calculamos a
    a=f; //aj=f(xj)

    //armamos b del sistema
    b(1)=(3/h(1))*(a(2)-a(1))-3*df(1);
    for (i=2:n-1)
        b(i)=(3/h(i))*(a(i+1)-a(i))-(3/h(i-1))*(a(i)-a(i-1));
    end
    b(n)=3*df(2)-(3/h(n-1))*(a(n)-a(n-1));

    //armamos A
    A(1,1:2)=[2*h(1) h(1)];
    for (i=2:n-1)
        A(i,i-1:i+1)=[h(i-1) 2*(h(i-1)+h(i)) h(i)];
    end
    A(n,n-1:n)=[h(n-1) 2*h(n-1)];

    //calculamos c
    c=A\b;
    c=c';

    //calculamos b y d
    d=(c(2:n)-c(1:n-1))./(3*h(1:n-1));
    b=((a(2:n)-a(1:n-1))./h(1:n-1))-((2*c(1:n-1)+c(2:n)).*(h(1:n-
1)/3));
endfunction
```

b) Sea el trazador cúbico sujeto $S(x)$ definido en el intervalo [1,3] tal que

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3, \text{si } 1 \leq x < 2 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

siendo que $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(3) = 22/3$ y asumiendo que $f'(1) = f'(3) = 3$.

Aplicando la función del inciso anterior, se obtuvieron los siguientes coeficientes para ambos trazadores:

	a_i	b_i	c_i	d_i
$S_0(x)$	0	3	2	-1
$S_1(x)$	4	4	-1	1/3

El trazador cúbico sujeto queda expresado entonces como

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 0 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (-1)(x-1)^3, \text{si } 1 \leq x < 2 \\ S_1(x) = 4 + 4(x-2) + (-1)(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3, \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 9

Ejercicio 7, Capítulo 8, Sección 1, del libro de Burden y Faires.

a) Aproximación por Mínimos Cuadrados para k, donde:

$$F(l) = k(l - E) \text{ (Ley de Hooke)}$$
$$E = 5.3'' \text{ (longitud del resorte sin estirar)}$$

Haciendo el desarrollo para Mínimos Cuadrados:

$$E(k) = \sum_{i=1}^{m}[F(l_i) - k(l_i - E)]^2$$
$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = 2\sum_{i=1}^{m}[F(l_i) - k(l_i - E)] * (-1)(l_i - E)$$

Igualando a cero la derivada (buscamos el mínimo de la función $E(k)$), obtenemos

$$2\sum_{i=1}^{m}[F(l_i) - k(l_i - E)] * (-1)(l_i - E) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} F(l_i) * (-1)(l_i - E) - \sum_{i=1}^{m} k(l_i - E) * (-1)(l_i - E) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{m} k(l_i - E) * (l_i - E) = \sum_{i=1}^{m} F(l_i) * (l_i - E)$$
$$k\sum_{i=1}^{m}(l_i - E)^2 = \sum_{i=1}^{m} F(l_i) * (l_i - E)$$
$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} F(l_i) * (l_i - E)}{\sum_{i=1}^{m}(l_i - E)^2}$$

Con las siguientes mediciones experimentales (dato), se estima el valor de k

$F(l)$	l
2	7.0
4	9.4
6	12.3

y obtenemos los siguientes resultados parciales:

i	$(l_i - E)$	$(l_i - E)^2$	$F(l_i) * (l_i - E)$
1	1.7	2.89	3.4
2	4.1	16.81	16.4
3	7	49	42
Σ	-	68.7	61.8

Calculando el valor de k:

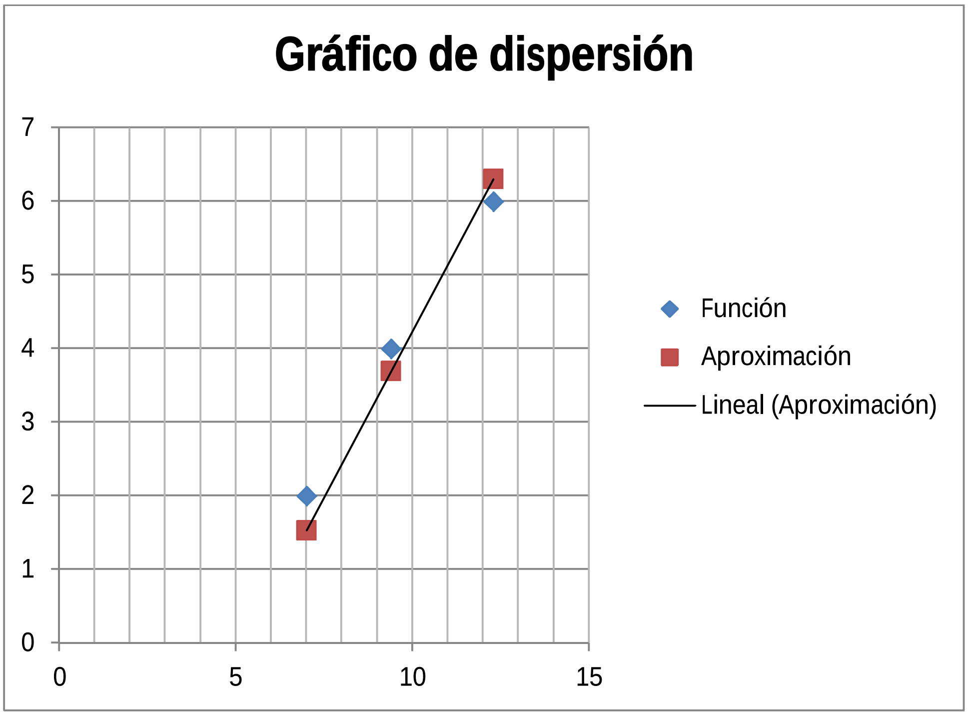
$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} F(l_i) * (l_i - E)}{\sum_{i=1}^{m} (l_i - E)^2} = \frac{61.8}{68.7} = 0.89956$$

La recta de aproximación es:

$$F(l) = 0.89956 * (l - 5.3)$$

$F(l)$	l	$k(l-E)$
2	7.0	1.52925764
4	9.4	3.68820961
6	12.3	6.29694323

Gráfico:



b) Para las nuevas mediciones experimentales (dato), se estima el valor de k

$F(l)$	l
3	8.3
5	11.3
8	14.4
10	15.9

y obtenemos los siguientes resultados parciales:

i	$(l_i - E)$	$(l_i - E)^2$	$F(l_i) * (l_i - E)$
1	3	9	9
2	6	36	30
3	9.1	82.81	72.8
4	10.6	112.36	106
Σ	-	240.17	217.8

Calculando el valor de k:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} F(l_i) * (l_i - E)}{\sum_{i=1}^{m} (l_i - E)^2} = \frac{217.8}{240.17} = 0.90686$$

La recta de aproximación es:

$$F(l) = 0.90686 * (l - 5.3)$$

$F(l)$	l	$k(l - E)$
3	8.3	2.72058
5	11.3	5.44116
8	14.4	8.252426
10	15.9	9.612716

Gráfico:

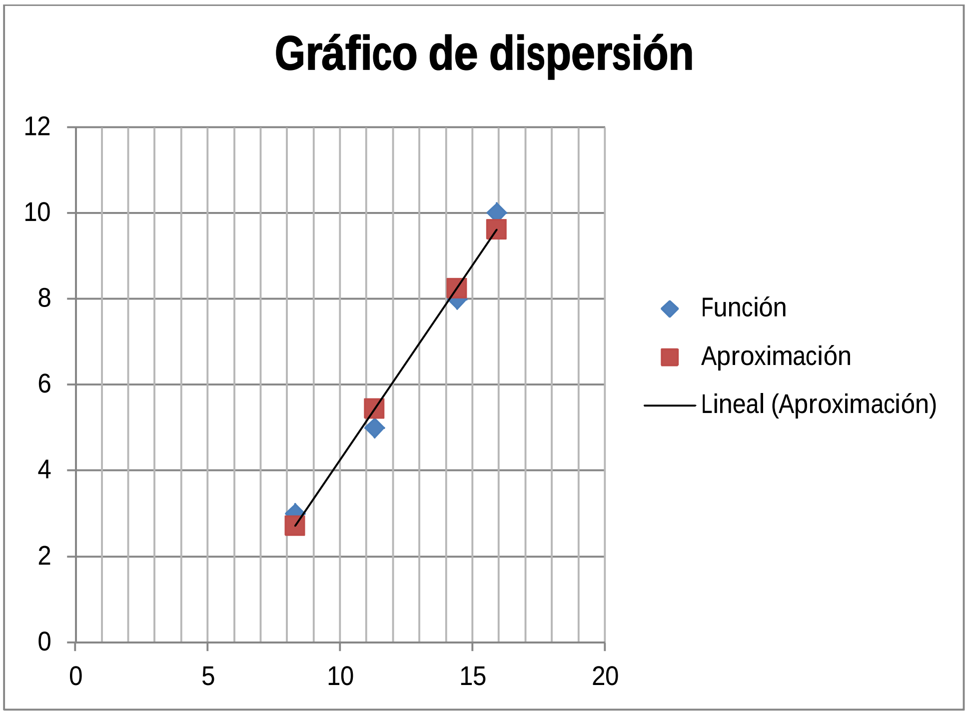


Gráfico de dispersión
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
Función
Aproximación
Lineal (Aproximación)

Calculando el error total para las mediciones de los incisos a) y b):

a)

$F(l)$	l	$k(l-E)$	$F(l)-k(l-E)$	$[F(l)-k(l-E)]^2$
2	7.0	1.52925764	0.47074236	0.221598369
4	9.4	3.68820961	0.31179039	0.097213247
6	12.3	6.29694323	-0.29694323	0.088175282
Σ	-	-	-	0.4069869

b)

$F(l)$	l	$k(l-E)$	$F(l)-k(l-E)$	$[F(l)-k(l-E)]^2$
3	8.3	2.72058	0.27942	0.078075536
5	11.3	5.44116	-0.44116	0.194622146
8	14.4	8.252426	-0.252426	0.063718885
10	15.9	9.612716	0.387284	0.149988897
Σ	-	-	-	0.48640546

El error total del inciso a) es menor al error total del inciso b). Estos resultados *a priori* no son concluyentes para determinar cuál aproximación de k es mejor. A partir de las gráficas, se puede apreciar que la aproximación para el inciso b) es más adecuada que la del inciso a), ya que la recta de aproximación del primero está más ajustada a los valores de muestra que la del segundo.

Otro inconveniente que se presenta es la cantidad de muestras de cada inciso. El a) tiene 3 muestras contra 4 del b), impidiendo hacer una comparación justa entre ambas aproximaciones de k.

Para poder remediar ésta situación y poder tener un criterio más formal de comparación, se opta por aplicar el error cuadrático medio. La media aritmética de los cuadrados de los valores no es un buen criterio porque, a pesar de que el cuadrado de los valores elimina los problemas aportados por los signos de los mismos, nos deja con otras unidades de medida de los valores, y no se puede obtener una conclusión directa. Es por ello que se debe utilizar el error cuadrático medio, que es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores.

Aproximación de k	$\sum_i^n [F(l_i)-k(l_i-E)]^2$	$\frac{\sum[F(l)-k(l-E)]^2}{n}$	$\sqrt{\frac{\sum[F(l)-k(l-E)]^2}{n}}$
a)	0.4069869	0.1356623	0.368323634
b)	0.48640546	0.121601365	0.348713872

Ahora podemos concluir, formalmente, que la aproximación de k del inciso b) tiene un error cuadrático medio menor que la aproximación del inciso a), como ya había sido anticipado por las gráficas.