Ejercicio 9

Ejercicio 20, Capítulo 4, Sección 1, del libro de Burden y Faires.

Voltaje impreso $\varepsilon(t)$.

Inductancia $L = 0.98$.

Resistencia $R = 0.142$.

Primera ley de Kirchhoff: $\varepsilon(t) = L\frac{di}{dt} + Ri$

Valores:

t	i
1.00	3.10
1.01	3.12
1.02	3.14
1.03	3.18
1.04	3.24

Una aproximación a la derivada $\frac{di}{dt}$, usando tres puntos y descentrada, es la siguiente:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] \tag{1}$$

Mientras que una aproximación mejor, pero centrada:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] \tag{2}$$

También podemos aproximar la derivada con tres puntos, descentrada y hacia atrás, cambiando h por $-h$ en (1) como:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] \tag{3}$$

Las derivadas (1) y (3) se utilizarán en los extremos debido a que, a pesar de tener un error mayor que la derivada (2), no se tiene información sobre un punto anterior; igual caso ocurre para el último punto ya que este no tiene un punto siguiente.

Aplicando las derivadas (1) en el extremo inicial, (2) en los puntos internos y (3) en el extremo final, obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(1.00) &\approx \frac{1}{2(0.01)}[-3f(1.00) + 4f(1.01) - f(1.02)] = 50[-3 * 3.10 + 4 * 3.12 - 3.14] \\ &= 50[-9.30 + 12.48 - 3.14] = 2 \end{aligned}$$

$$f'(1.01) \approx \frac{1}{2(0.01)}[f(1.02) - f(1.00)] = 50[3.14 - 3.10] = 2$$
$$f'(1.02) \approx \frac{1}{2(0.01)}[f(1.03) - f(1.01)] = 50[3.18 - 3.12] = 3$$

$$f'(1.03) \approx \frac{1}{2(0.01)}[f(1.04) - f(1.02)] = 50[3.24 - 3.14] = 5$$

$$\begin{aligned} f'(1.04) \approx \frac{1}{2(0.01)}[f(1.02) - 4f(1.03) + 3f(1.04)] &= 50[3.14 - 4 * 3.18 + 3 * 3.24] \\ &= 50[3.14 - 12.72 + 9.72] = 7 \end{aligned}$$

Ahora que obtuvimos la aproximación a las derivadas en los puntos, podemos proceder con el cálculo de $\varepsilon(t)$ para cada uno de los puntos de la tabla.

$$\varepsilon(1.00) = 0.98 * 2 + 0.142 * 3.10 = 2.400$$

$$\varepsilon(1.01) = 0.98 * 2 + 0.142 * 3.12 = 2.403$$

$$\varepsilon(1.02) = 0.98 * 3 + 0.142 * 3.14 = 3.386$$

$$\varepsilon(1.03) = 0.98 * 5 + 0.142 * 3.18 = 5.352$$

$$\varepsilon(1.04) = 0.98 * 7 + 0.142 * 3.24 = 7.320$$

Ejercicio 10

Ejercicio 20, Capítulo 4, Sección 4, del libro de Burden y Faires.

Temperatura exterior promediada del área:

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_o} T(r)\ r\ \theta_p\ dr}{\int_{r_e}^{r_o}\ r\ \theta_p\ dr}$$

Radio $r_e\ = 0.308$ donde comienza el contacto entre cojín y disco.

Radio $r_o\ = 0.478$ exterior de contacto.

Angulo $\theta_p\ = 0.7051$ subtendido por los cojines del freno del sector.

$T(r)$ es la temperatura en cada punto del cojín.

Valores:

r	$T(r)$
0.308	640
0.325	794
0.342	885
0.359	943
0.376	1034
0.393	1064
0.410	1114
0.427	1152
0.444	1204
0.461	1222
0.478	1239

Todos los valores de r están equiespaciados, por lo tanto n = 10 y $h = \frac{(x_n - x_0)}{n}$, esto es $h = \frac{0.478-0.308}{10} = 0.017$.

Para poder aproximar las integrales y calcular el valor de T, utilizamos integración numérica compuesta con la regla de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right] - \frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}\left(\xi_j\right)$$

Si la función a estimar es

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_o} T(r)\ r\ \theta_p\ dr}{\int_{r_e}^{r_o}\ r\ \theta_p\ dr} = \frac{\theta_p}{\theta_p}\frac{\int_{r_e}^{r_o} T(r)\ r\ dr}{\int_{r_e}^{r_o} r\ dr} = \frac{\int_{r_e}^{r_o} T(r)\ r\ dr}{\int_{r_e}^{r_o} r\ dr} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

Aplicando la regla compuesta de Simpson a las integrales (1) y (2):

1) Sea $f(r_i) = T(r_i) * r_i$, la regla compuesta de Simpson es

$$\int_{r_e}^{r_o} T(r)\, r\, dr \approx \frac{h}{3}\left[f(r_0) + 2\sum_{j=1}^{(10/2)-1} f(r_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{10/2} f(r_{2j-1}) + f(r_{10})\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(r_0) + 2\sum_{j=1}^{4} f(r_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{5} f(r_{2j-1}) + f(r_{10})\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[\begin{array}{c} f(r_0) + 2\big(f(r_2) + f(r_4) + f(r_6) + f(r_8)\big) + \\ +4\big(f(r_1) + f(r_3) + f(r_5) + f(r_7) + f(r_9)\big) + f(r_{10}) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{0.017}{3}\left[\begin{array}{c} 197.12 + 2(302.67 + 388.784 + 456.74 + 534.576) + \\ +4(258.05 + 338.537 + 418.152 + 491.904 + 563.342) + 592.242 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{0.017}{3}[197.12 + 3365.54 + 8279.94 + 592.242] \approx 70.464$$

2) Sea $f(r_i) = r_i$, la regla compuesta de Simpson es

$$\int_{r_e}^{r_o} r\, dr \approx \frac{h}{3}\left[f(r_0) + 2\sum_{j=1}^{(10/2)-1} f(r_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{10/2} f(r_{2j-1}) + f(r_{10})\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(r_0) + 2\sum_{j=1}^{4} f(r_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{5} f(r_{2j-1}) + f(r_{10})\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[\begin{array}{c} f(r_0) + 2\big(f(r_2) + f(r_4) + f(r_6) + f(r_8)\big) + \\ +4\big(f(r_1) + f(r_3) + f(r_5) + f(r_7) + f(r_9)\big) + f(r_{10}) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{0.017}{3}\left[\begin{array}{c} 0.308 + 2(0.342 + 0.376 + 0.410 + 0.444) + \\ +4(0.325 + 0.359 + 0.393 + 0.427 + 0.461) + 0.478 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{0.017}{3}[0.308 + 3.144 + 7.86 + 0.478] \approx 0.0668$$

Usando las aproximaciones de las integrales (1) y (2), obtenemos la aproximación para T

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_o} T(r)\, r\, \theta_p\, dr}{\int_{r_e}^{r_o} r\, \theta_p\, dr} \approx \frac{70.464}{0.0668} \approx 1054.8503$$

Ejercicio 11

Ejercicio 1, Inciso a, Capítulo 4, Sección 7, del libro de Burden y Faires.

$n = 2$.

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$$

Transformando la integral para el intervalo $[-1, 1]$, procedemos como sigue:

$$\int_c^d f(t)dt \to \int_a^b f(x)dx$$

Entonces hacemos una transformación lineal tal que relacione t con x:

$$x = \alpha * t + \beta$$

Si a está relacionado con c y b está relacionado con d, entonces tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a = \alpha * c + \beta \\ b = \alpha * d + \beta \end{cases}$$

Como necesitamos que $a = -1$ y $b = 1$, reemplazamos en el sistema y despejamos α y β:

$$\begin{cases} -1 = \alpha * c + \beta \\ 1 = \alpha * d + \beta \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{-(1 + \beta)}{c}; \ \beta = 1 - \alpha * d$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-(1 + 1 - \alpha * d)}{c} \\ \alpha * c - \alpha * d &= -1 - 1 \\ \alpha(c - d) &= -2 \\ \alpha &= \frac{2}{(d - c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \left(\frac{2}{(d - c)}\right) * d \\ \beta &= 1 - \frac{2d}{(d - c)} \end{aligned}$$

Entonces

$$x = \frac{2}{(d - c)} * t + 1 - \frac{2d}{(d - c)}$$

Despejando t de x y diferenciando, nos queda:

$$t = \frac{x - 1 + \frac{2d}{(d - c)}}{\frac{2}{(d - c)}} = \frac{(d - c) * \left(x - 1 + \frac{2d}{(d - c)}\right)}{2}$$

$$dt = \frac{(d - c)}{2} dx$$

Ahora, si $c = 1$ y $d = 1.5$, reemplazamos en t y dt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{(1.5-1)*\left(x-1+\frac{2*1.5}{(1.5-1)}\right)}{2} \\ &= \frac{0.5*\left(x-1+\frac{3}{0.5}\right)}{2} \\ &= \frac{(x-1+6)}{4} \\ &= \frac{x+5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dt &= \frac{(1.5-1)}{2}dx \\ &= \frac{0.5}{2}dx \\ &= \frac{1}{4}dx \end{aligned}$$

Y la integral puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right)\frac{1}{4}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right)dx \end{aligned}$$

Ahora podemos proceder con la aproximación de la integral mediante cuadratura gaussiana:

$$f(x) = \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right)dx = \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right) \\ &= 1.9441773 * 0.3324194 \\ &= 0.6462823 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right) \\ &= 1.2224894 * 0.1004446 \\ &= 0.1227925 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \frac{1}{4}[0.6462823+0.1227925] = \boxed{0.1922687}$$

El valor exacto de la integral es:

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx &= \left.\frac{x^3(3\ln x-1)}{9}\right|_1^{1.5} \\ &= \frac{(1.5)^3(3\ln(1.5)-1)}{9} - \frac{(1)^3(3\ln(1)-1)}{9} \\ &= \frac{0.7303342-(-1)}{9} = \boxed{0.1922594} \end{aligned}$$

Ejercicio 1, Inciso c, Capítulo 4, Sección 7, del libro de Burden y Faires.

$n = 2.$

$$\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}dx$$

Transformando la integral para el intervalo $[-1,1]$, el procedimiento es igual al desarrollado anteriormente:

Si $c = 0$ y $d = 0.35$, reemplazamos en t y dt:

$$t = \frac{(0.35-0)*\left(x-1+\frac{2*0.35}{(0.35-0)}\right)}{2} = \frac{0.35*(x-1+2)}{2} = \frac{7}{40}(x+1)$$

$$dt = \frac{(0.35-0)}{2}dx = \frac{0.35}{2}dx = \frac{7}{40}dx$$

Y la integral puede reescribirse como:

$$\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}\frac{7}{40}dx = \frac{14}{40}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}dx$$

Ahora podemos proceder con la aproximación de la integral mediante cuadratura gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}$$

$$\frac{14}{40}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}dx = \frac{14}{40}\left[f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{7}{40}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)^2-4} = \frac{1}{0.0761960-4} = -0.2548547$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{7}{40}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)^2-4} = \frac{1}{0.0054706-4} = -0.2503424$$

$$\frac{14}{40}\left[f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]=\frac{14}{40}[-0.2548547-0.2503424]=\boxed{-0.1768190}$$

El valor exacto de la integral es:

$$\begin{aligned}\int_0^{0.35}\frac{2}{x^2-4}dx &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x-2|}{|x+2|}\right)\Bigg|_0^{0.35}\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{|0.35-2|}{|0.35+2|}\right)-\ln\left(\frac{|0-2|}{|0+2|}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}[-0.3536400-0]=\boxed{-0.17682}\end{aligned}$$

Ejercicio 2, Capítulo 4, Sección 7, del libro de Burden y Faires.

1.a)

$n = 3.$

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$$

Transformando la integral para el intervalo $[-1, 1]$, obtenemos:

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right) \frac{1}{4} dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right) dx$$

Ahora podemos proceder con la aproximación de la integral mediante cuadratura gaussiana:

$$f(x) = \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{x+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{x+5}{4}\right) dx = \frac{1}{4}\left[\frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+5}{4}\right)$$
$$= 2.0841229 * 0.3671741$$
$$= 0.7652360$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+5}{4}\right)$$
$$= 1.1158771 * 0.0548204$$
$$= 0.0611728$$

$$f(0) = \left(\frac{0+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{0+5}{4}\right)$$
$$= 1.5625 * 0.2231436$$
$$= 0.3486619$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] = \frac{1}{4}[0.4251311 + 0.3099217 + 0.0339849]$$
$$= \boxed{0.1922594}$$

El valor exacto de la integral es:

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx = \left.\frac{x^3(3\ln x - 1)}{9}\right|_1^{1.5} = \boxed{0.1922594}$$

1.c)

$n = 3.$

$$\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx$$

Transformando la integral para el intervalo $[-1,1]$, obtenemos:

$$\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}\frac{7}{40}\,dx$$

$$= \frac{14}{40}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}\,dx$$

Ahora podemos proceder con la aproximación de la integral mediante cuadratura gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}$$

$$\frac{14}{40}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\frac{7}{40}(x+1)\right)^2-4}\,dx = \frac{14}{40}\left[\frac{5}{9}f\left(\sqrt{3/5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{3/5}\right)\right]$$

$$f\left(\sqrt{3/5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{7}{40}\left(\sqrt{3/5}+1\right)\right)^2-4} = \frac{1}{0.0964440-4} = -0.2561767$$

$$f\left(-\sqrt{3/5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{7}{40}\left(-\sqrt{3/5}+1\right)\right)^2-4} = \frac{1}{0.0015560-4} = -0.2500973$$

$$f(0) = \frac{1}{\left(\frac{7}{40}(0+1)\right)^2-4} = \frac{1}{0.030625-4}$$

$$= -0.2519288$$

$$\frac{14}{40}\left[\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] = \frac{14}{40}[-0.1423204-0.2239367-0.1389429]$$

$$= \boxed{-0.1768200}$$

El valor exacto de la integral es:

$$\int_{0}^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x-2|}{|x+2|}\right)\Bigg|_{0}^{0.35} = \boxed{-0.17682}$$