Cálculo Numérico 2012
Trabajo Práctico 4

Raíces de ecuaciones

Ejercicio 1:

(a) Realice tres iteraciones con el método de la bisección para obtener una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$ en el intervalo $[0, 1]$. Luego estime una cota para la precisión del resultado obtenido.

(b) Implemente una función de Scilab `function [x,h] = biseccion(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero x de la ecuación no lineal homogénea $f(x) = 0$ y la historia del residuo h usando el método de la bisección, para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax` y dos valores iniciales `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`. Responda si la bisección es un método globalmente convergente o no.

(c) Obtenga una cota para el número de iteraciones que se requieren para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^{-3} a la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que se encuentra en el intervalo [1,4]. Obtenga una aproximación de la raíz con esta exactitud mediante el método de la bisección.

(d) Utilice la definición 2.6 del libro de Burden para demostrar que el método de la bisección tiene convergencia lineal y constante de error asintótica $\lambda = 1/2$.

Ejercicio 2:

(a) Implemente una función de Scilab `function [x,h] = puntofijo(g,x0,kmax,tol)` que devuelva un cero x de $f(x) = x - g(x) = 0$ y la historia del residuo h, usando la iteración de punto fijo

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad k \geq 0$$

hasta que $\|f(x^{(k)})\| < \varepsilon$, para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y una abscisa inicial `x0`. Notar que previamente debe transformarse la ecuación $f(x) = 0$ a la forma $f(x) = -x + g(x) = 0$ para así llegar a $x = g(x)$, lo cual puede hacerse de diversas maneras. Luego, su función $g(x)$ hallada será el argumento de la función pedida. Responda si este método es globalmente convergente o no.

(b) La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz única en $[1, 2]$. Dadas las siguientes funciones g_1 y g_2, proporcione los resultados del método de iteración de punto fijo programado en el item (a) para ambas funciones, considerando $p_0 = 1.5$. Analice los resultados según el teorema correspondiente.

$$(i)\ \ x = g_1(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}, \qquad (ii)\ \ x = g_2(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$$

(c) Indique si las cotas de error dadas por el Corolario 2.4 del libro de Burden son válidas para las funciones g_1 y g_2 propuestas en el item (b). Si lo fueran, aplíquelas para verificar los resultados obtenidos numéricamente.

Ejercicio 3:

(a) Sea $f(x) = x^2 - 6$. Con $p_0 = 3$ y $p_1 = 2$ encuentre p_3. Aplique primero el método de la secante, luego el de la posición falsa y saque conclusiones sobre los resultados obtenidos con ambos procedimientos.

(b) Implemente una función en Scilab `function [x,h] = secante(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero de $f(x) = 0$ y la historia del residuo h usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y dos abscisas iniciales `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`.

(c) Implemente una función en Scilab `function [x,h] = posicionfalsa(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero de $f(x) = 0$ y la historia del residuo h usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y dos abscisas iniciales `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`.

Ejercicio 4:

(a) Implemente una función de Scilab `function [x,h] = newton(f,x0,kmax,tol)` que devuelva un cero x de $f(x) = 0$ y la historia del residuo h usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y una abscisa inicial `x0`.

(b) Use el método de Newton para aproximar, con una exactitud de 10^{-4}, el valor de x que en la gráfica de $y = x^2$ produce el punto más cercano a $(1, 0)$. *Ayuda:* Reduzca al mínimo $[d(x)]^2$ donde d es la función distancia de la gráfica al punto.

(c) Demuestre que la función $f(x) = e^x - x - 1$ tiene un cero de multiplicidad dos en $p = 0$. Aplique el método de Newton a dicha función con $p_0 = 1$ y saque conclusiones sobre la convergencia.

Ejercicio 5: (Entregar) Ponga a prueba las funciones programadas anteriormente para hallar un cero de las siguientes ecuaciones no lineales y saque conclusiones en cada caso. Grafique la historia de los residuos h de cada método en el plano semilogarítmico $(x, log(y))$

(a) $f(x) = \tan(x)$

(b) $f(x) = 1 + x^2$

(c) $f(x) = x(1 + \sin(1/x))$

Ejercicio 6: (Entregar) Un objeto que cae verticalmente en el aire está sujeto a las resistencia viscosa así como también a la fuerza de gravedad. Asuma que un objeto de masa m se deja caer desde una altura h_0 y que la altura del objeto después de t segundos es

$$h(t) = h_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m})$$

donde $g = 32.17ft/s^2$ y $k = 0.1lb{\cdot}s/ft$ es la resistencia viscosa del aire. Suponiendo que $h_0 = 300ft$ y $m = 0.25lb$, encuentre el tiempo que demora el objeto en tocar tierra con una precisión de $0.01s$. Indique el método elegido para resolver el problema, presentando una gráfica de convergencia. En función de ella, analize el comportamiento del método elegido.