Cálculo Numérico 2012
Trabajo Práctico 5

Interpolación y aproximación de funciones

Ejercicio 1:

(a) Enuncie y demuestre el Teorema que presenta el método de Horner. *Ayuda:* Ver Teorema 2.18, del libro de Burden.

(b) Encuentre una aproximación a uno de los ceros de $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ usando el método de Newton y la división sintética (método de Horner) para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ en cada iteración x_n. Use $x_0 = -2$ y calcule hasta x_3.

(c) Implemente la función `function [y,z] = horner(coef)` para el método de Horner donde $y = P(x_0)$, $z = P'(x_0)$ y `coef` son los coeficientes del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)Q(x) + b_0$. Pruebe la misma para el ejercicio anterior. Recuerde que al evaluar un polinomio mediante multiplicación anidada o el método de Horner, disminuye la cantidad de operaciones de $O(n^2)$ a $O(n)$.

Ejercicio 2:

(a) Enuncie y demuestre el teorema de existencia y unicidad del polinomio interpolante. *Ayuda:* Ver Teorema 1, sección 6.1 del libro Kinkaid.

(b) Derive la forma de Newton del polinomio de interpolación.

(c) Derive la forma de Lagrange del polinomio de interpolación.

(d) Derive el método de coefientes indeterminados para el polinomio de interpolación.

(e) Analice ventajas y desventajas para los métodos de los ejercicios 2b, 2c y 2d.

Ejercicio 3:

(a) Para los datos de la siguiente tabla, encuentre el polinomio de interpolación en su forma de Lagrange $P_L(x)$, en su forma de Newton $P_N(x)$, y mediante el método de los coeficientes indeterminados $P_{CI}(x)$. Luego, reduzca los tres polinomios encontrados a la forma $P(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$ con el fin de demostrar que son idénticos ya que las abcisas son distintas entre sí.

x	3	5	7	9
y	1.2	1.7	2.0	2.1

(b) Si se aproxima la función $f(x) = \sin(x)$ mediante un polinomio interpolante de grado nueve que interpola a f en diez puntos del intervalo $[0, 1]$, utilice el resultado sobre el error en interpolación polinomial para predecir una cota del error en dicho intervalo.

Ejercicio 4:

(a) Encuentre el polinomio de interpolación de Newton para los siguientes datos utilizando diferencias divididas

x	0	1	3/2	2
$f(x)$	3	3	13/4	5/3

(b) Implemente la función `function [d] = dif_div(f)` para el método de diferencias divididas donde `d` es un vector con los coeficientes del polinomio interpolante en la forma de Newton

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

y `f` contiene la información $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ de la función. Pruebe el algoritmo con el problema anterior.

Ejercicio 5:

(a) Utilice el método de diferencias divididas de Newton para resolver el siguiente problema de interpolación de Hermite. Buscamos el polinomio que ajusta los siguientes valores: $p(1) = 2$, $p'(1) = 3$, $p(2) = 6$, $p'(2) = 7$, $p''(2) = 8$.

(b) Para los datos, $f_0 = f(0) = 0$, $f_1 = f(1) = 1$, y $f_2 = f'(1/2) = 2$, muestre que el polinomio de interpolación no existe.

Ejercicio 6:

(a) Defina interpolante de trazador cúbico y explique las diferencias entre trazador natural y trazador sujeto.

(b) Derive y demuestre que si se define f en $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ entonces f tendrá un interpolante único de trazador natural en los nodos $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

(c) Implemente `[a,b,c,d]=cubic_spline_natural(x,f)` como una función de Scilab para el trazador cúbico natural, donde `a,b,c,d` son vectores que en la j-ésima componente tienen los coeficientes correspondientes al polinomio del tramo-j

$$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - xj)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

`x` es el vector con las coordenadas de los nodos y `f` es el vector con los valores de la función f en los correspondientes nodos.

(d) Un trazador cúbico natural $S(x)$ en $[0, 2]$ está definido por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Obtenga b, c y d.

(e) Investigue los comandos `splin` e `interp` de Scilab o los comandos `spline` e `interp1` de Octave.

Ejercicio 7:(Entregar)

(a) Modifique la función desarrollada en el ejercicio 6.c) de manera que permita computar los coeficientes del trazador cúbico sujeto. Se debe preveer el ingreso de los valores de la derivada de la función en los extremos del intervalo de interpolación.

(b) Encuentre el trazador cúbico sujeto $S(x)$ definido en el intervalo $[1, 3]$ tal que

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

siendo que $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(3) = 22/3$ y asumiendo que $f'(1) = f'(3) = 3$. Utilice la función `[a,b,c,d]=cubic_spline_clamped(x,f,df)` desarrollada en el inciso anterior.

Ejercicio 8: (Sección 8.1 del libro de Burden.) Derive el método de mínimos cuadrados para ajustar la recta que mejor aproxima a una colección de datos, (x_i, y_i), con $i = 1, 2, \cdots, m$. Luego, use los datos de la tabla para obtener la aproximación y complétela.

i	1	2	3	4	5
x_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183
x_i^2					
$x_i y_i$					
$P(x_i) = a_1 x_i + a_0$					

Ejercicio 9:(Entregar) Resolver el ejercicio 7 de la Sección 8.1 del libro de Burden.