

## Ejercicio 9

*Ejercicio 15, Capítulo 6, Sección 1, del libro de Burden y Faires.*

$n$  = Especies de animales.

$m$  = Fuentes de alimentos.

$x_j$  = Población de la especie  $j$ .

$b_i$  = Suministro de alimento  $i$  disponible.

$a_{ij}$  = Cantidad de comida  $i$  consumida en promedio por la especie  $j$ .

a) Para poder determinar si alcanza el alimento para satisfacer a todas las poblaciones, se plantea el sistema como tres inecuaciones, con el vector  $\bar{b}$  como límite superior.

$$\bar{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = (x_j) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = (b_i) = \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{array}{l} 1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix} \\ 2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix} \\ 3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1) \quad 1 * 1000 + 2 * 500 + 0 * 350 + 3 * 400 \leq 3500 \\ \quad \quad 1000 + 1000 + 0 + 1200 = \boxed{3200 \leq 3500} \\ \\ 2) \quad 1 * 1000 + 0 * 500 + 2 * 350 + 2 * 400 \leq 2700 \\ \quad \quad 1000 + 0 + 700 + 800 = \boxed{2500 \leq 2700} \\ \\ 3) \quad 0 * 1000 + 0 * 500 + 1 * 350 + 2 * 400 \leq 900 \\ \quad \quad 0 + 0 + 350 + 400 = \boxed{750 \leq 900} \end{array}$$

En conclusión, sí hay suficientes alimentos para satisfacer el consumo promedio diario de todas las especies.

b) Para poder determinar cuál es el número máximo de animales de cada especie que podría agregarse individualmente al sistema, sin afectar el suministro, se plantean sistemas de inecuaciones para cada especie.

$$x_1) \quad \begin{cases} 1 * x_1 + 2 * 500 + 0 * 350 + 3 * 400 \leq 3500 \\ 1 * x_1 + 0 * 500 + 2 * 350 + 2 * 400 \leq 2700 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1300 \\ x_1 \leq 1200 \rightarrow \text{Tomo la menor cota.} \end{cases}$$

$$x_1 - 1000 = 1200 - 1000 = \boxed{200}$$

$$x_2) \quad \begin{aligned} 1 * 1000 + 2 * x_2 + 0 * 350 + 3 * 400 &= 3500 \\ 2 * x_2 &= 3500 - 2200 \\ &1300 \\ x_2 &= \frac{1300}{2} \\ x_2 &= \boxed{650} \end{aligned}$$

$$x_3) \quad \begin{cases} 1 * 1000 + 0 * 500 + 2 * x_3 + 2 * 400 \leq 2700 \\ 0 * 1000 + 0 * 500 + 1 * x_3 + 1 * 400 \leq 900 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 \leq 450 \rightarrow \text{Tomo la menor cota.} \\ x_3 \leq 500 \end{cases}$$

$$x_3 - 350 = 450 - 350 = \boxed{100}$$

$$x_4) \quad \begin{cases} 1 * 1000 + 2 * 500 + 0 * 350 + 3 * x_4 \leq 3500 \\ 1 * 1000 + 0 * 500 + 2 * 350 + 2 * x_4 \leq 2700 \\ 0 * 1000 + 0 * 500 + 1 * 350 + 1 * x_4 \leq 900 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 500 \\ x_4 \leq 500 \rightarrow \text{Tomo la menor cota.} \\ x_4 \leq 550 \end{cases}$$

$$x_4 - 400 = 500 - 400 = \boxed{100}$$

c) Si se extingue la especie 1 ( $x_1$ ), entonces el aumento individual de cada especie restante es:

$$x_2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 * x_2 + 3 * 400 &= 3500 \\ x_2 &= 1150 \rightarrow 1150 - 500 = \boxed{650} \end{aligned}$$

$$x_3) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 500 \\ x_3 \\ 400 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 * x_3 + 2 * 400 \leq 2700 \\ 1 * x_3 + 1 * 400 \leq 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 \leq 950 \\ x_3 \leq 500 \rightarrow \text{Tomo la menor cota.} \end{cases}$$

$$x_3 - 350 = 500 - 350 = \boxed{150}$$

$x_4$ )

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 500 \\ 350 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 * 500 + 0 * 350 + 3 * x_4 \leq 3500 \\ 2 * 350 + 2 * x_4 \leq 2700 \\ 1 * 350 + 1 * x_4 \leq 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq \frac{2500}{3} \\ x_4 \leq 1000 \\ x_4 \leq 550 \rightarrow \text{Tomo la menor cota.} \end{cases}$$

$$x_4 - 400 = 550 - 400 = \boxed{150}$$

d) Si se extinguen las especies 1 ( $x_1$ ) y 2 ( $x_2$ ), entonces el aumento individual de cada especie restante es:

 $x_3$ )

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_3 \\ 400 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 * x_3 + 3 * 400 \leq 3500 \\ 2 * x_3 + 2 * 400 \leq 2700 \\ 1 * x_3 + 1 * 400 \leq 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1200 \leq 3500 \\ x_3 \leq 950 \\ x_3 \leq 500 \rightarrow \text{Tomo la menor cota.} \end{cases}$$

$$x_3 - 350 = 500 - 350 = \boxed{150}$$

 $x_4$ )

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 350 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 * x_4 \leq 3500 \\ 2 * 350 + 2 * x_4 \leq 2700 \\ 1 * 350 + 1 * x_4 \leq 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq \frac{3500}{3} \\ x_4 \leq 1000 \\ x_4 \leq 550 \rightarrow \text{Tomo la menor cota.} \end{cases}$$

$$x_4 - 400 = 550 - 400 = \boxed{150}$$