UNL - FICH - Departamento de Informática - Ingeniería Informática

Inteligencia Computacional

Guía de trabajos prácticos 3

Sistemas borrosos

1. Control en un sistema térmico

1.1. El sistema físico y su modelo mátemático

En un laboratorio industrial se requiere mantener la temperatura ambiente en valores constantes de forma de poder asegurar la calidad en una etapa crítica en la producción. La habitación es de $3 \times 2 \times 2$ m, con paredes de ladrillo de 15 cm y una única entrada con un sistema de cierre automático que asegura un tiempo máximo de apertura de 10 s. Para lograr controlar la temperatura en la habitación se dispone de un sistema de convección con una resistencia calefactora (no incandescente) y un refrigerador. Se puede estudiar la variación de la temperatura en el interior de la habitación a partir de las siguientes fuentes:

1. calor aportado desde el exterior a través de las paredes,
2. corriente que circula por la resistencia calefactora,
3. tensión aplicada al sistema de refrigeración,
4. calor que ingresa al abrir la puerta.

La habitación actúa, en virtud del aire que la llena, como un medio capaz de almacenar el calor que se le aporta, es decir, como si fuese un capacitor. En virtud de las variaciones térmicas, dicho capacitor almacenará el calor aportado por los distintos flujos de calor. La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del sistema es entonces:

$$C\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{4} q_j(t)$$

donde $\theta_i(t)$ es la temperatura en el interior de la habitación, C es su capacitancia térmica y los $q_j(t)$ son los flujos de calor aportados por fuentes antes mencionadas. Para definir el modelo es necesario analizar los diferentes flujos de calor:

$q_1(t)$: calor aportado desde el exterior por conducción térmica a través de las paredes. Este flujo de calor está dado por:

$$q_1(t) = K_1(\theta_e(t) - \theta_i(t))$$

donde $\theta_e(t)$ y $\theta_i(t)$ son respectivamente las temperaturas en el exterior y el interior de la habitación. La constante K_1 depende de la conductividad térmica del material de las paredes (λ), del área a través de las que se realiza el intercambió térmico (A) y del espesor de dichas paredes (E), de la siguiente forma:

$$K_1 = \lambda \frac{A}{E}$$

El área es la de las cuatro paredes más la del techo (por el piso no hay intercambio de calor): $A = 26$ m^2. El espesor de la pared es $E = 0{,}15$ m. La conductividad del ladrillo es de $\lambda = 0{,}84$ W/m°C. Para expresar todos los aportes de calor en kW hacemos:

$$K_1 = 0{,}1456\ \frac{\text{kW}}{^\circ\text{C}}$$

$q_2(t)$: calor aportado por la resistencia calefactora. Una resistencia R por la que circula una corriente $i(t)$, disipa calor al medio con una potencia $Ri^2(t)$. Es decir:

$$q_2(t) = K_2 i^2(t)\ \text{kW}$$

Si asumimos una $R = 1000\ \Omega$ e $i(t)$ medida en A, la constante K_2 es:

$$K_2 = 1\ \text{k}\Omega.$$

$q_3(t)$: calor aportado por el refrigerador. En este caso, el flujo de calor es proporcional a la tensión aplicada al refrigerador, $v(t)$. La constante de proporcionalidad define la cantidad de calor que "elimina" el refrigerador por cada voltio con que se lo alimenta. Es decir:

$$q_3(t) = K_3 v(t)$$

En este caso la constante de proporcionalidad vale:

$$K_3 = -0{,}02\ \frac{\text{kW}}{\text{V}}.$$

$q_4(t)$: calor generado por el intercambiado con el medio cuando la puerta está abierta. Es posible modelar esto considerando que el intercambio de calor se realiza como en el caso de la conducción por las paredes pero con la constante de proporcionalidad K_4 mucho mayor que K_1. Dado que hay mucha menor resistencia al paso del calor, consideraremos $K_4 = 50\ K_1$. Para poder incorporar este flujo de calor a la ecuación, también es necesario modelar la apertura de la puerta. Para ésto, podemos incorporar un factor aleatorio $a(t)$:

$$q_4 = a(t)K_4(\theta_e(t) - \theta_i(t))$$

cuando $a(t) = 1$ la puerta estará abierta mientras que cuando $a(t) = 0$ la puerta estará cerrada. La frecuencia con que se abre la puerta puede obtenerse por simple observación y registro de las entradas y salidas en el mismo laboratorio. Para este caso se ha determinado que la puerta se abre una vez por hora y permanece abierta durante 10 s.

En función de éstos cuatro aportes de calor, ahora es posible escribir la ecuación de equilibrio térmico de la habitación de la siguiente forma:

$$C\frac{d\theta_i(t)}{dt} = (K_1 + a(t)K_4)(\theta_e(t) - \theta_i(t)) + K_2 i^2(t) + K_3 v(t)$$

1.2. El modelo digital

Para poder implementar un controlador digital o simular este sistema en una computadora es necesario discretizarlo. Una aproximación discreta para este sistema es:

$$\begin{aligned}\Theta_i[n] \quad = \quad & \frac{C}{C + TK_1 + Ta[n]K_4}\Theta_i[n-1] + \frac{T\,(K_1 + a[n]K_4)}{C + TK_1 + Ta[n]K_4}\Theta_e[n] + \\ & \frac{TK_2}{C + TK_1 + Ta[n]K_4}i^2[n] + \frac{TK_3}{C + TK_1 + Ta[n]K_4}v[n]\end{aligned}$$

donde T es el intervalo de tiempo con que se actualizan las variables del sistema. Esta ecuación nos permitirá calcular la temperatura en cada instante de tiempo n una vez especificados los valores de C, T y la probabilidad de que $a[n] = 1$.

C : la capacitancia térmica de la habitación depende de su calor específico y su masa de aire $C = Mc_p = V\delta c_p$. El volumen es $V = 12$ m^3, la densidad del aire es $\delta = 1{,}25$ kg/m^3 y el calor específico es $c_p = 1{,}007$ kJ/kg°C. Por lo tanto:

$$C = 15{,}105\ \frac{\text{kJ}}{^\circ\text{C}}$$

T : el intervalo de muestreo debe ser suficientemente pequeño para poder observar cualquier cambio brusco en las variables del sistema. Para este sistema térmico es suficiente considerar:

$$T = 10 \text{ s}$$

$a[n]$: la puerta se abre una vez por hora, es decir, una vez cada 3600 segundos. Como $T = 10$s, la puerta se abrirá una vez cada 360 iteraciones en el sistema. Por lo tanto, $a[n]$ resulta una variable aleatoria para la cual:

$$\Pr\{a[n] = 1\} = \frac{1}{360}$$

Finalmente, dependiendo del valor que tome $a[n]$ obtenemos:

$$\Theta_i[n] = \begin{cases} 0{,}912\ \Theta_i[n-1] + 0{,}088\ \Theta_e[n] + 0{,}604\ i^2[n] - 0{,}121\ \times 10^{-1} v[n] \\ \quad \text{si } a[n] = 0 \\ 0{,}169\ \Theta_i[n-1] + 0{,}831\ \Theta_e[n] + 0{,}112\ i^2[n] - 0{,}002\ v[n] \\ \quad \text{si } a[n] = 1 \end{cases}$$

1.3. El sistema sin control

Supongamos inicialmente que el sistema antes descripto no dispone de un controlador que active adecuadamente los sistemas de calefacción y refrigeración. En este caso, la ecuación que modela la temperatura en el interior del recinto es:

$$\Theta_i[n] = \begin{cases} 0{,}912\ \Theta_i[n-1] + 0{,}088\ \Theta_e[n] & \text{si } a[n] = 0 \\ 0{,}169\ \Theta_i[n-1] + 0{,}831\ \Theta_e[n] & \text{si } a[n] = 1 \end{cases}$$

Es posible simular este sistema ante una supuesta variación de su única entrada: la temperatura en el exterior Θ_e. En cada simulación se obtendrán diferentes curvas dependiendo de los instantes de tiempo en que se abra la puerta (recuerde que $a[n]$ es una variable aleatoria). En la Figura 1 se muestran gráficas obtenidas al simular el comportamiento de la temperatura del interior de la habitación, teniendo como flujos de calor solamente la conducción desde el exterior y la conducción cuando se abre la puerta.

1.4. Control del sistema

Se requiere controlar el sistema de forma que la temperatura interna $\Theta_i[n]$ se mantenga lo más cerca posible de una temperatura de referencia $\Theta_r[n]$. Para esto es necesario determinar el valor de las variables $i[n]$ y $v[n]$

en los sistemas de calefacción y refrigeración de forma de satisfacer la restricción planteada. La temperatura de referencia se indica en la Figura 1 con una línea de puntos y toma los valores de 20°C y 22°C alternados cada 10 minutos.

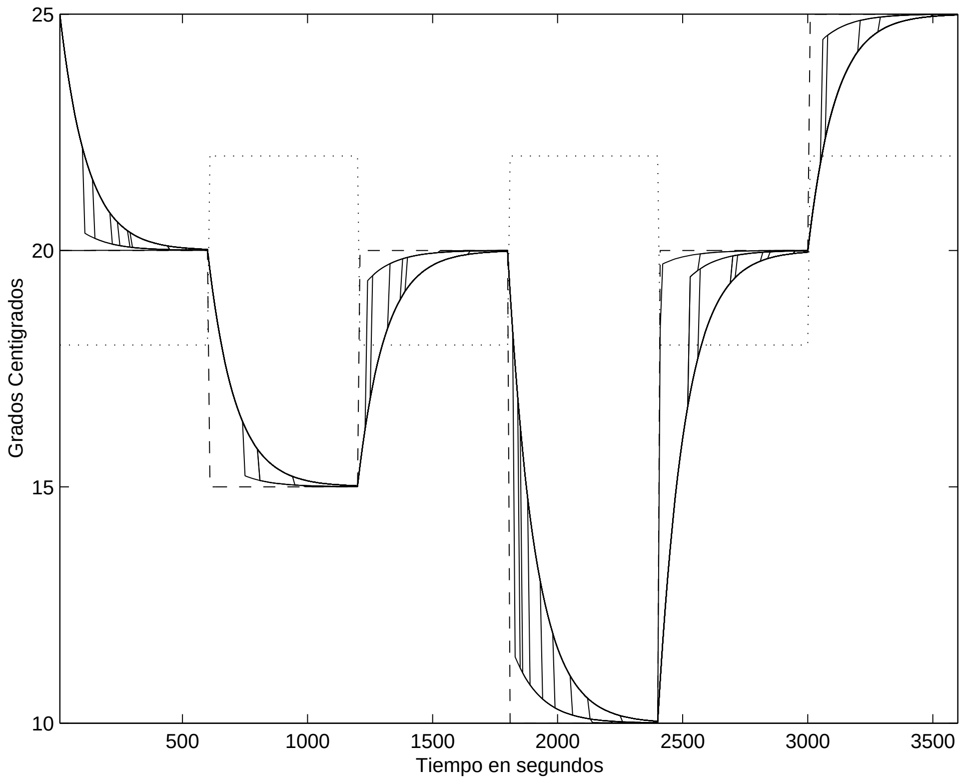

Figura 1: Respuesta del sistema a controlar. Las líneas continuas corresponden a la variable a controlar Θ_i, en diferentes simulaciones que muestran el efecto de la variable aleatoria $a[n]$. La variable de entrada Θ_e se indica en líneas de trazo y en líneas de punto se indica la variable de referencia o temperatura deseada Θ_r.