

Método dinámico para la determinación del módulo de Young

GERMÁN GUILLERMO THELER
Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo

12 de noviembre de 2004

Resumen

En el presente informe describimos un método dinámico para medir el módulo de YOUNG de una muestra de material en forma de alambre utilizando un generador de audio y un speaker. Hemos ensayado aleaciones de cobre y aluminio, y encontramos $E_{Cu} = (6,62 \pm 0,15) \times 10^{10}$ Pa y $E_{Al} = (4,02 \pm 0,09) \times 10^{10}$ Pa.

1. Introducción

La ecuación de movimiento para una viga de sección S constante sometida a vibraciones transversales, suponiendo deformaciones pequeñas y longitudes de onda mucho mayores que las dimensiones de S es [1]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{E \cdot I_y}{\mu} \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = 0$$

donde $x(t, z)$ es la deflexión transversal de la barra en el plano xz de la oscilación (figura 1), E es el módulo de YOUNG del material, I_y es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y y μ la densidad lineal de masa. La solución a esta ecuación diferencial es la función (figura 2)

$$x(t, z) = X(z) \cdot e^{i\omega t}$$

con

$$X(z) = A \cos \kappa z + B \sin \kappa z + C \cosh \kappa z + D \sinh \kappa z \quad (1)$$

siendo

$$\kappa^4 = \frac{\omega^2 \mu}{E \cdot I_y} \quad (2)$$

Las constantes A , B , C y D las determinamos a partir de las condiciones de contorno. Para una barra empotrada en $z = 0$ y libre en $z = \ell$, exigimos por un lado que el desplazamiento sea nulo y que la tangente sea horizontal en el punto de empotramiento

$$X|_{z=0} = \left. \frac{dX}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (3)$$

Por otro lado, se deben anular tanto el esfuerzo de corte como el momento flector, proporcionales a la derivada segunda y tercera respectivamente de la línea elástica [3], en el extremo libre

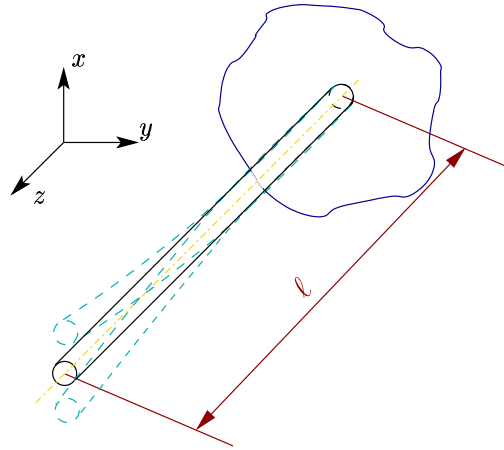


Figura 1: Viga empotrada en un extremo y libre en el otro vibrando con frecuencia f_n

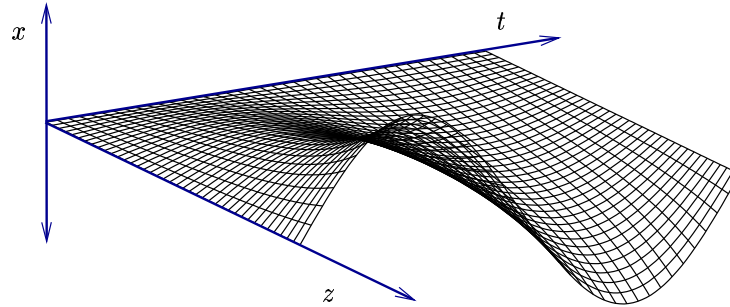


Figura 2: Evolución temporal de la línea elástica del alambre a lo largo de un período de oscilación.

$$\left. \frac{d^2 X}{dz^2} \right|_{z=\ell} = \left. \frac{d^3 X}{dz^3} \right|_{z=\ell} = 0 \quad (4)$$

Como nos interesan solamente los valores de κ —en realidad aquellos ω — para los cuales existe una solución de (1) con no todos los coeficientes nulos, y no una solución en particular, queremos buscar la condición necesaria para que el sistema que resulte de utilizar las cuatro condiciones (3) y (4) tenga solución no trivial. Se puede demostrar que el determinante de los coeficientes se anula si y sólo si [1]

$$\cosh(\kappa\ell) \cdot \cos(\kappa\ell) + 1 = 0 \quad (5)$$

Resolviendo numéricamente para $\kappa\ell$ y teniendo en cuenta (2), encontramos que la relación entre las frecuencias naturales de oscilación del n -ésimo armónico (con $n = 0$ correspondiendo a la frecuencia fundamental) y las propiedades físicas y geométricas de la viga es

$$f_n = \frac{1}{2\pi} (\kappa\ell)_n^2 \sqrt{\frac{E \cdot I_y}{\mu l^4}} \quad (6)$$

donde denotamos con $(\kappa\ell)_n$ a la n -ésima solución de (5).



2. Método experimental

De (6), seguimos que

$$E = \frac{4\pi^2 f_n^2 \cdot \mu \cdot \ell^4}{(\kappa\ell)_n^4 \cdot I_y} \quad (7)$$

Luego, debemos encontrar las frecuencias naturales de oscilación de una viga de longitud ℓ . Para ello, emplearemos el método experimental propuesto por TYAGI y LORD en [5] y TURVEY en [4], que consta básicamente en poner a oscilar una muestra del material a ensayar mediante un speaker de audio alimentado tal como lo indica la figura 3.

Las muestras son alambres de sección transversal circular aproximadamente constante. Luego el momento de inercia de la sección con respecto a cualquier eje que pase por el baricentro es

$$I = \frac{\pi d^4}{32}$$

donde d es el diámetro de la sección. En particular, nos interesa el momento de inercia con respecto al eje y de la figura 1, con lo que la ecuación (7) se transforma en

$$E = \frac{128\pi \cdot f_n^2 \cdot \mu \cdot \ell^4}{(\kappa\ell)_n^4 \cdot d^4} \quad (8)$$

Propagando incertezas en (8), escribimos

$$\varepsilon_E^2 = 4 \cdot \varepsilon_{f_n}^2 + \varepsilon_\mu^2 + 16 \cdot \varepsilon_\ell^2 + 16 \cdot \varepsilon_d^2 \quad (9)$$

donde ε_x es la incerteza relativa asociada a la variable x . Tenemos que tener en cuenta que en la ecuación (8), conocemos el factor $(\kappa\ell)_n$ sólo en forma aproximada. De todas maneras, con los métodos computacionales actuales podemos calcularlo con una precisión arbitraria. Dicha precisión deberá ser tal que el error cometido en la determinación numérica de $(\kappa\ell)_n$ sea despreciable frente al menor de los términos de (9). Es por ello que prestaremos especial atención a los errores *relativos* de cada uno de los factores de (8).

3. Resultados

3.1. Cobre

Comenzamos ensayando un alambre de alguna aleación de cobre de longitud total $\ell_T = 303 \pm 0,5$ mm y masa $m = 8,02 \pm 0,01$ g. Luego, la densidad lineal de masa es

$$\mu = \frac{8,02 \times 10^{-3}}{0,303} = [0,0265 \pm 0,0001 (0,4\%)] \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Notamos que las dos magnitudes que más influyen en la determinación de E son el diámetro d de la sección y la longitud ℓ del voladizo. Hemos tomado el diámetro d cinco veces en un extremo del alambre, resultando

$$d = [1,948 \pm 0,009 (0,5\%)] \text{ mm} \quad (10)$$

Observamos que otras tantas mediciones a lo largo de la longitud ℓ_T del alambre resultaron ser interiores al intervalo definido por (10). Luego afirmamos que la sección transversal es constante.

La otra dimensión a determinar cuidadosamente es la longitud del voladizo. Tomando cinco mediciones obtenemos

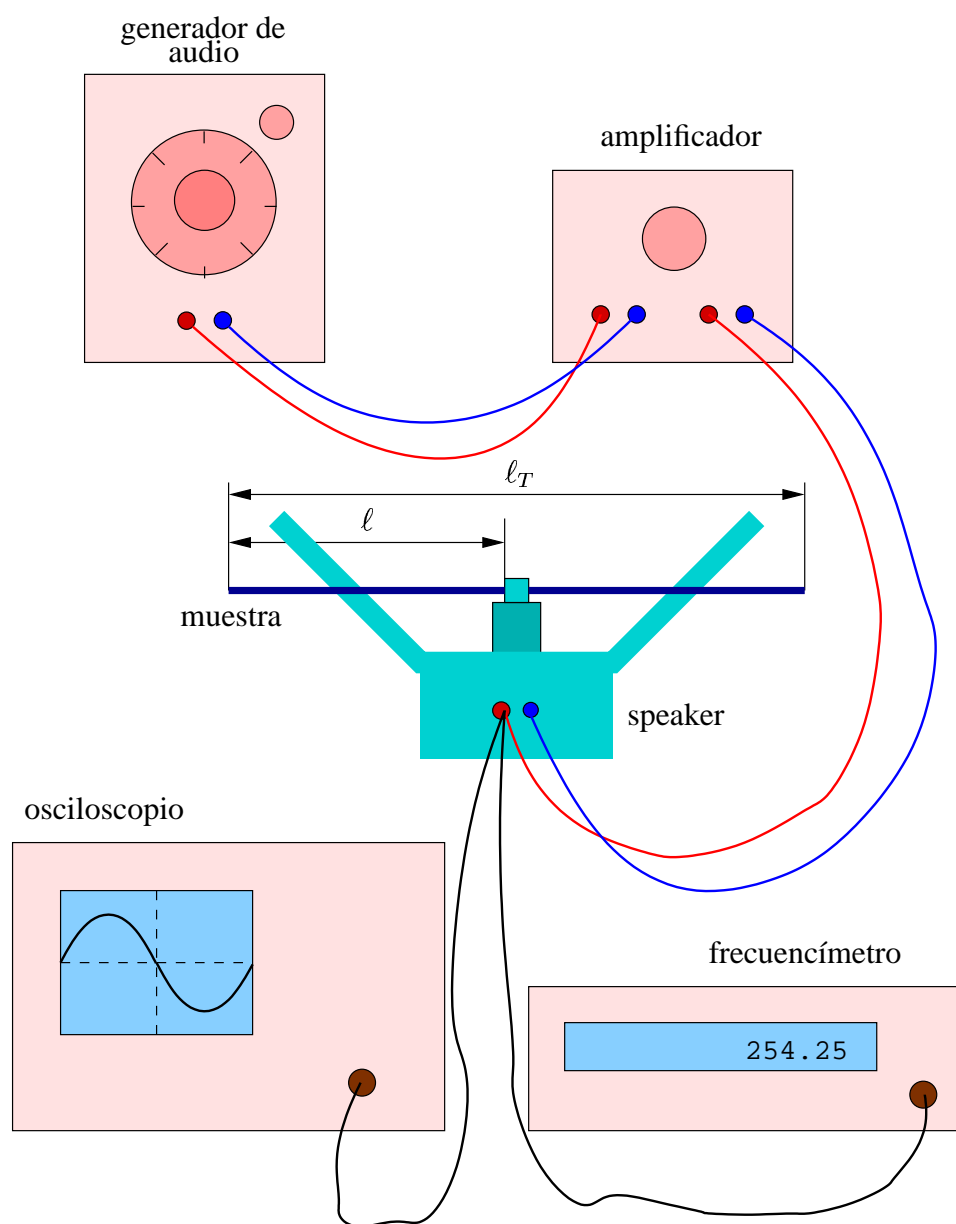


Figura 3: Disposición experimental. El osciloscopio en realidad es opcional, y sirve sólo para asegurarnos que la señal sinusoidal con la que alimentamos el speaker no sea deformada por alguna eventual saturación del amplificador.



$$\ell = [150,88 \pm 0,07 (0,05 \%)] \text{ mm}$$

Nos resta encontrar algunas de las frecuencias naturales de resonancia. Para ello, comenzamos alimentando el speaker con una frecuencia muy pequeña (cercana a cero), y la aumentamos gradualmente. Para alguna frecuencia f_0 de excitación, el alambre vibrará en su modo fundamental. En la determinación de esta frecuencia reside la dificultad del experimento, pues resulta que existen algunas frecuencias en las cuales el alambre vibra en una forma tal que *parece* un modo normal, pero no lo es.

Para saber si efectivamente el alambre está oscilando en su frecuencia fundamental, calculamos la relación teórica entre f_0 y f_1 según la ecuación (6). Si incrementamos la frecuencia de la cual sospechamos se trata del modo fundamental en una proporción f_0/f_1 y encontramos otro modo normal de vibración, en efecto la frecuencia f_0 corresponderá al modo fundamental. Aproximadamente,

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{(\kappa\ell)_0^2}{(\kappa\ell)_1^2} = \left(\frac{1,8751 \dots}{4,6940 \dots} \right)^2 = 6,2901 \dots$$

En particular, encontramos que alrededor de 15 Hz el alambre vibra en lo que parecería ser su modo fundamental. Si esta frecuencia es realmente la f_0 que buscamos, deberíamos haber encontrado el primer armónico cerca de 94 Hz, hecho que no se ha verificado, por lo que descartamos esta primera hipótesis.

El próximo punto de trabajo que podría ser el modo fundamental de vibración lo encontramos alrededor de los 46 Hz. La frecuencia del primer armónico debería estar cerca de los 290 Hz. El amplificador utilizado carece de la potencia necesaria como para alimentar el speaker de una manera satisfactoria a esa frecuencia, ya que para generar vibraciones observables fue necesario aumentar la ganancia del amplificador hasta sobrepasar el punto de saturación del mismo, al precio de deformar apreciablemente la forma sinusoidal original de la onda de excitación. De todas maneras, con la ayuda de una luz estroboscópica verificamos que efectivamente, cerca de los 280 Hz se hallaba el primer modo normal. Luego, hemos encontrado aproximadamente la frecuencia fundamental de oscilación. Ahora, conociendo a *grosso modo* el intervalo donde se encuentra f_0 , procedemos a determinar cuidadosamente la frecuencia para la cual la amplitud de la oscilación es máxima. Con 7 mediciones determinamos

$$f_0 = [46,2 \pm 0,1 (0,21 \%)] \text{ Hz}$$

Para calcular el módulo de YOUNG del material, sólo nos resta resolver numéricamente (5) con una precisión relativa tal que sea despreciable frente al 0,05 % que es el mínimo error relativo de los factores de (8). Diez dígitos significativos son suficientes para asegurarnos esta condición:

$$(\kappa\ell)_0 = 1,875104069 \pm 1 \times 10^{-9} (6 \times 10^{-8} \%)$$

Finalmente, utilizando la ecuación (8), obtenemos

$$E_{Cu} = (6,62 \pm 0,15) \times 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

3.2. Aluminio

Realizando los mismos pasos que en la sección 3.1, pero utilizando un alambre de aluminio en este caso, obtuvimos

$$\ell_T = 300 \pm 0,5 \text{ mm}$$



Material	Tabulado [Pa]	Obtenido [Pa]
Cobre	11×10^{10}	7×10^{10}
Aluminio	7×10^{10}	4×10^{10}

Cuadro 1: Comparación de los resultados obtenidos con los datos tabulados en [2]

$$m = 2,67 \pm 0,01 \text{ g}$$

$$\mu = \frac{2,67 \times 10^{-3}}{0,3} = [8,9 \times 10^{-3} \pm 7 \times 10^{-5} (0,8\%)] \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Midiendo cinco veces en un extremo del alambre, y repitiendo las mediciones a lo largo de la longitud ℓ_T concluimos que el diámetro d de la sección es constante y vale

$$d = [2,00 \pm 0,01 (0,5\%)] \text{ mm}$$

La longitud del voladizo utilizada en este ensayo fue

$$\ell = [150,42 \pm 0,06 (0,04\%)] \text{ mm}$$

Encontramos la siguiente frecuencia f_0 fundamental de vibración:

$$f_0 = [65,91 \pm 0,05 (0,08\%)] \text{ Hz}$$

donde comprobamos con ayuda de luz estroboscópica, que el primer armónico está alrededor de los $384 \text{ Hz} \approx 65,91 \times 6,2901 \dots$. Luego

$$E_{Al} = (4,02 \pm 0,09) \times 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos son ligeramente menores que aquellos tabulados para ambos materiales (tabla 1). Lo más probable es que, como ya dijimos, las muestras ensayadas no sean de metal puro sino de alguna aleación desconocida, de allí las diferencias.

Aunque la indeterminación que arroja el experimento es apreciable, esto no reviste mayores inconvenientes ya que en particular, en los casos de diseño donde interviene el módulo de YOUNG de un material, se suele definir un módulo efectivo E' tal que

$$E' = \frac{E}{\eta}$$

donde η es un coeficiente de seguridad mayor que la unidad (usualmente $\eta \geq 2$), por lo que las posibles indeterminaciones en el valor exacto de E pasan a segundo plano.

Referencias

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Theory of elasticity*. Pergamon Press, 2nd edition, 1959.
- [2] Sears, Zemansky, Young, and Freedman. *Física Universitaria*, volume II. Addison Wesley Longmann, 9th edition, 1999.
- [3] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of elasticity*. McGraw Hill, 2nd edition, 1970.

REFERENCIAS



- [4] Keith Turvey. An undergraduate experiment on the vibration of a cantilever and its application to the determination of young's modulus. *Am. J. Phys.*, 58(5):483–487, 1990.
- [5] Somdev Tyagi and Arthur Lord. Simple and inexpensive apparatus for young's modulus measurement. *Am. J. Phys.*, 48(3):205–206, 1980.