01. Se b é ímpar, então ele é da forma $b = 2k + 1$, $k \in N$, ou seja, $a = 1 + (2k + 1)^2 = 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 2 + 4k + 4k^2 = 2(1 + 2k + 2k^2)$, de forma que a é par, pois $1 + 2k + 2k^2 \in N$.

02. Fazendo a Divisão Euclidiana de N por 1 994, temos
$N = 1\,994 \cdot q + 148$, $q \in Z$.
Assim, $N + 2\,000 = 1\,994q + 2\,148 \Leftrightarrow N + 2\,000 = 1\,994q + 1994 + 154$
$\Leftrightarrow N + 2\,000 = 1\,994\,(q + 1) + 154$.
Logo, a divisão de $N + 2\,000$ por 1 994 tem quociente $q + 1$ e resto 154.

03. **Uma maneira:**
Dentre quatro números inteiros consecutivos, apenas um é da forma $4k$, isto é, apenas um é divisível por 4. Logo, como dois dentre esses números são ímpares, se um produto de dois deles é divisível por 4, o produto dos outros dois não é e, portanto, não existem quatro números inteiros consecutivos tais que o produto de dois deles seja igual ao produto dos outros dois.

Outra maneira:
Sejam x, $x + 1$, $x + 2$ e $x + 3$ os números inteiros positivos.
Como $x(x + 1) < (x + 2)(x + 3)$ e $x\,(x + 2) < (x + 1)(x + 3)$, devemos ter $x(x + 3) = (x + 1)(x + 2) \Leftrightarrow x^2 + 3x = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow 0x = 2$, o que é impossível.
Logo não existem quatro inteiros positivos consecutivos tais que o produto de dois deles é igual ao produto dos outros dois.

04. Como $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)\,n(n + 1)$ é o produto de três inteiros consecutivos, obrigatoriamente um deles será múltiplo de 3, ou seja, $n^3 - n$ será múltiplo de 3 para todo n inteiro.

05. Sejam a, b e c os números inteiros em questão, com $a \geq b$.

Assim $\left|\begin{array}{l} abc = 27 \\ a + b = 6 \end{array}\right.$.

Como o produto de a, b e c é 27, a, b e c são todos divisores de 27.
Assim, a, b, e $c \in \{-27, -9, -3, 1, 3, 9, 27\}$. Os únicos pares de divisores que somam 6 são 9; –3 e 3; 3.
Logo $a = 9$ e $b = -3$, ou $a = b = 3$.
a) Se a, b, e c são positivos, $a = b = 3$ e $c = \dfrac{27}{3 \cdot 3} = 3$, de modo que a soma dos três números é $3 + 3 + 3 = 9$.
b) Se há dois negativos entre a, b e c, $a = 9$, $b = -3$, e $c = \dfrac{27}{9 \cdot (-3)} = -1$, de modo que a soma dos três números é $9 + (-3) + (-1) = 5$.

06. Sejam p e k inteiros, tais que:

$$\begin{vmatrix} n+100 = p^2 \\ n+168 = k^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow k^2 - p^2 = 68 \Leftrightarrow (k-p)\cdot(k+p) = 68$$

Como $(k - p)$ e $(k + p)$ são ambos pares ou ímpares e tem-se que $68 = 1 \cdot 68 = 2 \cdot 34 = 4 \cdot 17$, então:

$$\begin{vmatrix} k-p=2 \\ k+p=34 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} k=18 \\ p=16 \end{vmatrix}$$

Portando, $n = 16^2 - 100 \Leftrightarrow n = 156$.

07. Foi dado que $n\,(a;\,b) = (a - b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$. Logo:

a) $n\,(3;\,9) = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$

b) $n\,(a;\,3a) = a^2 + (3a)^2 = a^2 + 9a^2 = 10a^2$. Logo $n\,(a;\,3a)$ é sempre múltiplo de 10 e, portanto, seu algarismo final é sempre zero.

08. a) Como $(abba)_{10}$ pertence ao século 20, seus dois primeiros dígitos são 19, logo o número é 1 991. Analogamente o outro número é 2 002.

b) Temos que $(abba)_{10} + (cddc)_{10} = 1\,991 + 2\,002 = 3\,993$. Portanto, esse número representa um ano que pertence ao século XL.

09. Seja $(abcd)_{10}$ o número, temos:

I. $a^2 + d^2 = 58$

II. $b^2 + c^2 = 52$

III. $(abcd)_{10} - 3\,816 = (dcba)_{10}$

De I podemos concluir por tentativa e erro que $a = 7$ e $d = 3$ ou $a = 3$ e $d = 7$. De II, analogamente, $b = 6$ e $c = 4$ ou $b = 4$ e $c = 6$. Logo, as possibilidades para o número de acordo com as condições I e II são 3 467, 3 647, 7 463, 7 643. A única delas que satisfaz também a condição III é 7 463.

10. a) Como os divisores de 3 600 são da forma $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$ e temos 5, 3 e 3 possibilidades para α, β, γ, respectivamente, então o número de divisores é $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$, pelo Princípio Fundamental da Contagem.

Como $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ é um divisor de 3 600, então o número de divisores positivos de 3 600 que também são divisores de 720 é $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

b) Para que um dos divisores de 3 600 seja par, devemos ter $\alpha \neq 0$, isto é, temos $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ possibilidades. Para que um dos divisores de 3 600 seja quadrado perfeito, $\alpha \in \{0, 2, 4\}$, $\beta \in \{0, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 2\}$, ou seja, $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ possibilidades.

11. a) A quantidade de divisores de m que são múltiplos de 100 é igual a quantidade de divisores de $\dfrac{m}{100} = \dfrac{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = 2^4 \cdot 3^3$, que é dada por $2(4 + 1)(3 + 1) = 40$.

b) Para p ser um divisor comum de m e n, p deve ser um divisor do mdc $(m,\,n) = 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^2$.

Assim, r, s e $t \in N$ e $r \leq 5$, $s = 0$ e $t \leq 2$, ou seja, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $s = 0$ e $t \in \{0, 1, 2\}$.

12. a) Fatorando 168 em fatores primos obtemos $2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Portanto $d(168) = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$.
b) Para que um número tenha 15 divisores positivos, a fatoração desse número em fatores primos deve ter um primo com expoente 2 e outro com expoente 4, de forma que, sendo n esse número, tenhamos $d(n) = (2 + 1)(4 + 1) = 15$, pois o 15 também tem fatoração única em fatores primos que é $3 \cdot 5$. Para que esse número seja o menor possível, devemos tomar os menores primos possíveis como fatores, que são 2 e 3. Há duas possibilidades dentro dessas restrições: $2^4 \cdot 3^2$ e $2^2 \cdot 3^4$. A menor delas é $2^4 \cdot 3^2 = 144$.

13. a) $\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = ab = 5 \cdot 105 \Leftrightarrow 35b = 5 \cdot 105 \Leftrightarrow b = 15$.
b) Como $\text{mdc}(a, b) = 5$, o único fator comum aos inteiros positivos a e b é 5. Sendo $\text{mmc}(a, b) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, temos duas possibilidades:
- os fatores 3 e 7 pertencem a um único número, isto é, $(a = 3 \cdot 5 \cdot 7$ e $b = 5)$ ou $(a = 5$ e $b = 3 \cdot 5 \cdot 7)$;
- os fatores 3 e 7 pertencem a números distintos, isto é, $(a = 3 \cdot 5$ e $b = 5 \cdot 7)$ ou $(a = 5 \cdot 7$ e $b = 3 \cdot 5)$.

Logo $(a, b) \in \{(5; 105), (105; 5), (15; 35), (35; 15)\}$.

14. Sejam c o número de candidatos aprovados para a segunda fase do vestibular da Unicamp em 1991 e n o número de salas completas com 35 candidatos em cada. Como ficaram 18 candidatos em uma sala incompleta, temos que $c = 35n + 18$.
Em 1992 o número de candidatos para a segunda fase, nessa cidade, foi de $c + 42 = 35n + 18 + 42 = 35 \cdot (n + 1) + 25$.
Portanto, nesse ano, o número de candidatos que ficaram em uma sala incompleta foi de 25.

15. Como o tecido deve ser vendido em retalhos iguais e deve ser usado todo o tecido, o comprimento de cada retalho deve ser um divisor comum de $48 = 2^4 \cdot 3^1$, $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ e $80 = 2^4 \cdot 5^1$.
Logo, o maior comprimento do retalho é dado por
$\text{mdc}(48, 60, 80) = 2^2 = 4$ m.
Assim, o número de retalhos obtidos será de

$$\frac{48}{4} + \frac{60}{4} + \frac{80}{4} = 12 + 15 + 20 = 47.$$

16. Seja x o valor da mesada de Ricardo. Logo, pelo enunciado, temos:

$$x - \frac{x}{8} - \frac{x}{7} - \frac{3x}{5} = 37 \Leftrightarrow \frac{280x - 35x - 40x - 168x}{280} = 37$$

$$\Leftrightarrow 37x = 10\,360 \Leftrightarrow x = 280$$

Como queremos o quanto foi gasto em livros, fazemos:

$$\frac{1}{8} \cdot x = \frac{1}{8} \cdot 280 = 35$$

Portanto, foram gastos R$ 35,00 em livros.

17. a) Sejam:
x – massa do corpo vazio em gramas;
y – massa da água necessária para encher o copo em gramas.

Pelo enunciado podemos representar a situação por um sistema de equações de tal forma que:

$$\begin{cases} x + y = 305 \\ x + \dfrac{2y}{3} = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 305 \\ \dfrac{y}{3} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 305 - y \\ y = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 305 - 105 = 200 \\ y = 105 \end{cases}$$

Portanto, a massa do copo vazio é 200 gramas.

b) Pelo item anterior, deduzimos que a massa da água necessária para encher o copo é 105 gramas. Como queremos a massa do copo com $\frac{2}{5}$ de água, fazemos:

$$200 + \left(\frac{2}{5} \cdot 105\right) = 200 + 42 = 242 \text{ gramas.}$$

18. a) $0,\overline{12} = x \Leftrightarrow 12,\overline{12} = 100x \Leftrightarrow 100x - x = 12,\overline{12} - 0,\overline{12} \Leftrightarrow 99x = 12$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

b) $0,2\overline{3} = x \Leftrightarrow \frac{x}{10} = 0,02\overline{3} \Leftrightarrow x - \frac{x}{10} = 0,2\overline{3} - 0,02\overline{3} \Leftrightarrow \frac{9x}{10} = 0,21$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2,1}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

c) $5,\overline{9} = x \Leftrightarrow 59,\overline{9} = 10x \Leftrightarrow 10x - x = 59,\overline{9} - 5,\overline{9} \Leftrightarrow 9x = 54$

$$\Leftrightarrow x = \frac{54}{9} = 6$$

d) $0,12\overline{43} = x \Leftrightarrow 12,\overline{43} = 100x \Leftrightarrow 100x - x = 12,31 \Leftrightarrow 99x = 12,31$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12,31}{99} = \frac{1231}{9900}$$

19. a) Verdadeiro.
Sejam:
$a \in Q$ e $b \in R \backslash Q$
Suponhamos por absurdo que a soma de a e b seja um número racional. Assim, temos:
$a + b = c \in Q \Rightarrow b = c - a \in Q$. O que é um absurdo, pois por hipótese $b \in R \backslash Q$. Logo, a soma de um número racional com um irracional só pode ser um número irracional.
b) Falso.
Basta tomarmos como racional o número 0 e como irracional $\sqrt{2}$. Assim temos:

$$0 \cdot \sqrt{2} = 0 \in Q$$

c) Falso.
Basta tomarmos como irracionais os números $(1 + \sqrt{3})$ e $(1 - \sqrt{3})$. Logo, a soma desses dois números irracionais será:

$$(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2 \in Q$$

d) Verdadeiro.
Exemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in Q$.
e) Falso.
Exemplo: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \in Q$.

20. $$\frac{(-3)^0 \cdot \left[-(-3)^4\right] \cdot 7}{\left(\frac{-1}{3}\right)^{-3} \cdot (-(-7)^2)} = \frac{1 \cdot \left[-(-3)^4\right] \cdot 7}{(-3)^3 \cdot (-(-7)^2)}$$

$$= \frac{(-3)^4 \cdot 7}{(-3)^3 \cdot (-7)^2} = -\frac{(-3)^4 \cdot 7}{(-3)^3 \cdot 7^2} = \frac{(-3)}{7} = -\frac{3}{7}$$

b) $\sqrt{0,04} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[4]{16^{-1} \cdot 25^2} = \sqrt{\dfrac{4}{100}} \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{1}{2^4} \cdot 5^4}$

$$= \frac{2}{10} \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

21. a) Seja $a = \sqrt{2}$, o qual sabemos que é irracional. Temos que $a^4 = (\sqrt{2})^4 = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$ é racional e $a^6 = (\sqrt{2})^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$ também é racional.
b) Se $a = 0$, $a \in Q$. Se $a \neq 0$, sendo $a^7 \in Q$ e $a^{12} \in Q$, então:
$\dfrac{(a^7)^2}{a^{12}} = \dfrac{a^{14}}{a^{12}} = a^2 \in Q$. Assim, $\dfrac{a^7}{(a^2)^3} = \dfrac{a^7}{a^6} = a \in Q$.

Outra maneira:

Como a^7 e a^{12} são racionais, temos que $(a^7)^7 = a^{49}$ e $(a^{12})^4 = a^{48}$ também o são.

Logo $\dfrac{a^{49}}{a^{48}} = a$ é racional.

Nota: lembrar que operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre dois racionais não nulos resultam em números também racionais.

22. a) A metade de 2^{22} é $\dfrac{2^{22}}{2} = 2^{22-1} = 2^{21}$.

b) $8^{2/3} + 9^{0,5} = (2^3)^{2/3} + (3^2)^{1/2} = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$

23. $4\,(0,5)^4 + \sqrt{0,25} + 8^{-2/3} = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \sqrt{\dfrac{1}{4}} + (2^3)^{-2/3} = \dfrac{4}{16} + \dfrac{1}{2} + 2^{-2}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

24. $b - a = \sqrt{27} - \sqrt[4]{64} = \sqrt{3^3} - \sqrt[4]{2^6} = 3\sqrt{3} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
$= 3 \cdot (1,73) - 2 \cdot (1,41) = 5,19 - 2,82 = 2,37$

25. $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4\cdot 3]{4^3} = \sqrt[12]{64}$ e $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot 4]{3^4} = \sqrt[12]{81}$.

Logo, como $\sqrt[12]{81} > \sqrt[12]{64}$, segue que $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.

26. Seja:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{A} + B \Leftrightarrow \left(\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{A}+B\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 17+12\sqrt{2} = A + 2\sqrt{A}\,B + B^2 = A + B^2 + \sqrt{4AB^2} = 17 + \sqrt{288}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} A+B^2 = 17 \\ 4AB^2 = 288 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} B^2 = 17-A \\ AB^2 = 72 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} B^2 = 17-A \\ A(17-A) = 72 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} B^2 = 17-A \\ 17A - A^2 = 72 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} B^2 = 17-A \\ A^2 - 17A + 72 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} B^2 = 17-A \\ A = 8 \vee A = 9 \end{array}\right.$$

Para:

$A = 8 \Rightarrow B^2 = 17 - 8 = 9 \Leftrightarrow B = \pm 3$

$A = 9 \Rightarrow B^2 = 17 - 9 = 8 \Leftrightarrow B = \pm 2\sqrt{2}$

Como queremos que A e B sejam inteiros positivos, então adotamos $A = 8$ e $B = 3$. Logo, $\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{8} + 3$.

27. a) $$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

b) $$\frac{1}{\sqrt[6]{3^2}} = \frac{1\cdot\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{3^4}} = \frac{\sqrt[6]{81}}{3} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

c) $$\frac{6}{\sqrt{5}-2} = \frac{6}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{6\sqrt{5}+12}{5-4} = 6\sqrt{5}+12$$

d) $$\frac{15}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{15}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}\cdot\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = 15\cdot\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{(25\cdot 3)-(9\cdot 5)}$$

$$= 15\cdot\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{75-45} = 15\cdot\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{30} = \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$$

e) $$\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}} = \frac{3}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(2\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(2\sqrt{2})}$$

$$= 3\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2} = 3\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{15}+5-8}$$

$$= 3\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{15}} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{3}+2\cdot\frac{\sqrt{30}}{15}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+2\sqrt{30}}{15}\right) = \frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+2\sqrt{30}}{10}$$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}\cdot\dfrac{(\sqrt[3]{4})^2+\sqrt[3]{4}+1}{(\sqrt[3]{4})^2+\sqrt[3]{4}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{4-1}$

$=\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$

28. Temos:

$a-b=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{7}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{5-2-(7-3)}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{-1}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}<0$

Logo $b>a$.

29. Sabemos que $x^2\geq 0$, para todo $x\in R$.

Sejam a e b dois números reais positivos.

Assim, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

30. Temos:

$\dfrac{a+bp^2}{a+b}>p\overset{a+b>0}{\Longleftrightarrow}(a+b)\cdot\dfrac{(a+bp^2)}{(a+b)}>p(a+b)$

$\Leftrightarrow a+bp^2>p(a+b)\Leftrightarrow a+bp^2>ap+bp\Leftrightarrow bp^2-bp>ap-a$

$\Leftrightarrow bp(p-1)>a(p-1)\overset{p-1>0}{\Longleftrightarrow}bp>a\overset{b>0}{\Longleftrightarrow}p>\dfrac{a}{b}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}<p$

31. Como $x\neq y$, então $(x-y)^2>0$. Logo:

$(x-y)^2>0\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2>0\Leftrightarrow x^2-xy+y^2>xy$

$\overset{x+y>0}{\Longleftrightarrow}(x+y)(x^2-xy+y^2)>(x+y)(xy)\Leftrightarrow x^3+y^3>x^2y+xy^2$

32. a) $x=\left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$

b) Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional e que $\left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$ é racional (pelo item *a*). Ora, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, então existem dois irracionais α e β tais que α^β é racional ($\alpha=\beta=\sqrt{2}$).

Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, então existem dois irracionais α e β tais que α^β é racional ($\alpha=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $\beta=\sqrt{2}$).

33. a) $10x+12y=(5x\cdot 2)+(6y\cdot 2)=2\cdot(5x+6y)$

b) $24xy^2-18x^3y^4+15x^2y^3=(3xy^2\cdot 8)-(3xy^2\cdot 6x^2y^2)+(3xy^2\cdot 5xy)$

$=3xy^2(8-6x^2y^2+5xy)$

c) $(x-2)(y+3)+(x-2)(z-1)=(x-2)[(y+3)+(z-1)]=(x-2)(y+z+2)$

d) $x^{n+1}-x^{n+3}=x^{n+1}-x^{n+1}\cdot x^2=x^{n+1}(1-x^2)=x^{n+1}(1-x)(1+x)$

e) $x(a-b)+y(a-b)-2a+2b=x(a-b)+y(a-b)-2(a-b)$

$=(a-b)(x+y-2)$

f) $4a+8b+ax+2bx=4(a+2b)+x(a+2b)=(a+2b)(4+x)$

g) $mp-mq-np+nq=m(p-q)-n(p-q)=(p-q)(m-n)$

h) $4x^2-10xy-8xy+20y^2=2x(2x-5y)-4y(2x-5y)$

$=2[x(2x-5y)-2y(2x-5y)]=2(2x-5y)(x-2y)$

34. a) $x^2-ax-xy+ay-xz+az=x(x-a)-y(x-a)-z(x-a)=(x-a)(x-y-z)$

b) $3a^3+9a^2b+9ab^2+3b^3=3(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=3\cdot(a+b)^3$

c) $a^2+2ab+b^2-x^2=(a+b)^2-x^2=(a+b+x)(a+b-x)$

d) $m^2-y^2-x^2-2xy=m^2-(x^2+2xy+y^2)=m^2-(x+y)^2$

$=[m+(x+y)]\cdot[m-(x+y)]=(m+x+y)(m-x-y)$

e) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^2-2ab-b^2=(a+b)^3-(a^2+2ab+b^2)$

$=(a+b)^3-(a+b)^2=(a+b)^2[(a+b)-1]=(a+b)^2\,(a+b-1)$

f) $b^2-a^2+2ab-b^2=-a^2+2ab=a(2b-a)$

g) $81-y^4=(3^2)^2-(y^2)^2=(3^2+y^2)(3^2-y^2)=(9+y^2)(3+y)(3-y)$

h) $ax^n+bx^n+ay^n+by^n=x^n(a+b)+y^n(a+b)=(a+b)(x^n+y^n)$

i) $a^2bc-4bc+a^2b-4b=bc(a^2-4)+b(a^2-4)=(a^2-4)\cdot b\cdot(c+1)$

$=b(a+2)(a-2)(c+1)$

j) $a^2-c^2+4c^2+4ac=(a+c)(a-c)+4c(c+a)=(a+c)(a-c+4c)$

$=(a+c)(a+3c)$

k) $8x^3-y^3=(2x)^3-y^3=(2x-y)[(2x)^2+(2x)\cdot y+y^2]$

$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

35. a) $\dfrac{xy-3x+2y-6}{xy+x+2y+2}=\dfrac{x(y-3)+2(y-3)}{x(y+1)+2(y+1)}=\dfrac{(x+2)(y-3)}{(x+2)(y+1)}=\dfrac{y-3}{y+1}$

b) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}=\dfrac{a+b}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{1}{a-b}$

c) $\dfrac{a^2b+3a^2-b-3}{b^2-9}=\dfrac{a^2(b+3)-(b+3)}{(b+3)(b-3)}=\dfrac{(b+3)(a^2-1)}{(b+3)(b-3)}$

$=\dfrac{(a+1)(a-1)}{(b-3)}$

d) $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4ab}=\dfrac{[(a+b)+(a-b)]\cdot[(a+b)-(a-b)]}{4ab}=\dfrac{(2a)\cdot(2b)}{4ab}=1$

e) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2}=\dfrac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)}=a^2+b^2$

f) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-2x+1}=\dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

g) $\dfrac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3} = \dfrac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a^2(a + b) + b^2(a + b)} = \dfrac{(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)}{(a^2 + b^2)(a + b)}$

$= a - b$

36. $2^{32} - 1 = (2^{16})^2 - 1 = (2^{16} + 1)(2^{16} - 1) = (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^8 - 1)$

$= (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1) = (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1)$

$= (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) = (2^{16} + 1)(2^8 + 1) 17 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$

Logo $(2^{32} - 1)$ é divisível por 17, 5 e 3.

37. a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(4 - a)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4a + a^2 = 16 - 8a + a^2$

c) $(x^2 - 3)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 - 6x^2 + 9$

d) $(2m^3 + n^2)^2 = (2m^3)^2 + 2 \cdot 2m^3 \cdot n^2 + (n^2)^2 = 4m^6 + 4m^3n^2 + n^4$

e) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

f) $(a - b^2 + c)^2 = [(a - b^2) + c]^2 = (a - b^2)^2 + 2 \cdot (a - b^2) \cdot c + c^2$

$= a^2 - 2ab^2 + b^4 + 2ac - 2b^2c + c^2 = a^2 + b^4 + c^2 - 2ab^2 + 2ac - 2b^2c$

38. a) $a^2 - 6a + 9 = a^2 - 2 \cdot 3a + 3^2 = (a - 3)^2$

b) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x + 5)^2$

c) $3m^2 - 12m + 12 = 3(m^2 - 4m + 4) = 3(m - 2)^2$

d) $x^8 + 8x^4 + 16 = (x^4)^2 + 2 \cdot 4 \cdot x^4 + 4^2 = (x^4 + 4)^2$

e) $x^4 + x^2 + \dfrac{1}{4} = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right)^2$

f) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2 = (a - b - c)(a - b + c)$

g) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2 = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) = x^2 - (y - z)^2$

$= [x - (y - z)][x + (y - z)] = (x - y + z)(x + y - z)$

h) $x^3 - 18x^2 + 81x = x(x^2 - 18x + 81) = x(x - 9)^2$

39. $\sqrt{a^2 + 4ab + 6ac + 4b^2 + 12bc + 9c^2}$

$= \sqrt{a^2 + (2b)^2 + (3c)^2 + 2 \cdot a \cdot (2b) + 2 \cdot a \cdot (3c) + 2 \cdot (2b) \cdot (3c)}$

$= \sqrt{(a + 2b + 3c)^2} = |a + 2b + 3c|$

40. $yx^2 + xy^2 + x + y = 63 \Leftrightarrow x \cdot (xy) + y \cdot (xy) + x + y = 63$

$\Leftrightarrow 6x + 6y + x + y = 63 \Leftrightarrow 6(x + y) + (x + y) = 63 \Leftrightarrow 7(x + y) = 63$

$\Leftrightarrow x + y = 9 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 81$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 81 - 2 \cdot xy = 81 - 2 \cdot 6 = 81 - 12 = 69$

41. a) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$

b) $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2$

$= [(a^2 + 2) - 2a][(a^2 + 2) + 2a] = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)$

42. a) $(a+2)^3 = a^3 + 3 \cdot (2a^2) + 3 \cdot (2^2a) + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$
b) $(x-4)^3 = x^3 - 3 \cdot (4x^2) + 3 \cdot (4^2x) - 4^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
c) $(m^2+1)^3 = m^6 + 3 \cdot (1m^4) + 3 \cdot (1^2m^2) + 1^3 = m^6 + 3m^4 + 3m^2 + 1$
d) $(x^2+y)^3 = x^6 + 3 \cdot (x^4y) + 3 \cdot (x^2y^2) + y^3 = x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3$

43. a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3 \cdot (x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (x)1 + 1^3 = (x+1)^3$
b) $x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3 = (x^2)^3 + 3 \cdot (x^2)^2y + 3(x^2)^2(y)^2 + y^3 = (x^2+y)^3$
c) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = x^3 - 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 4^2x - 4^3 = (x-4)^3$

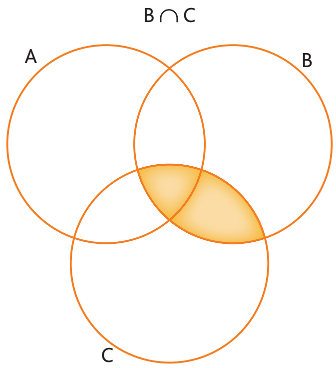
44. • $x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 16 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$

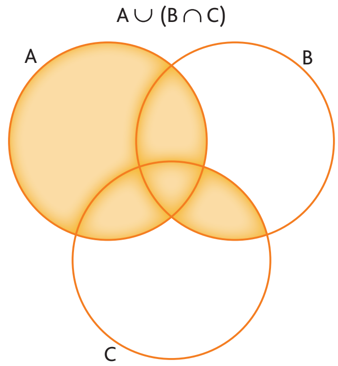
• $x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 64 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2\frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 64$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 64 \Leftrightarrow x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = 64$

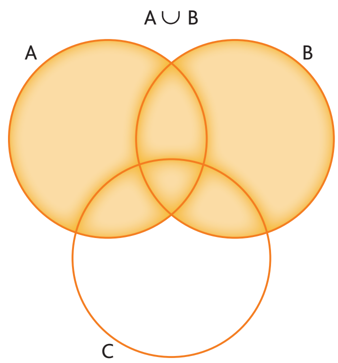
$\Rightarrow x^3 + 3 \cdot 4 + \frac{1}{x^3} = 64 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 52$

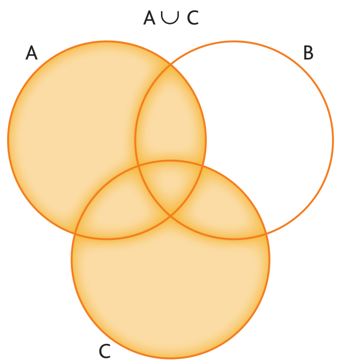
45. a)



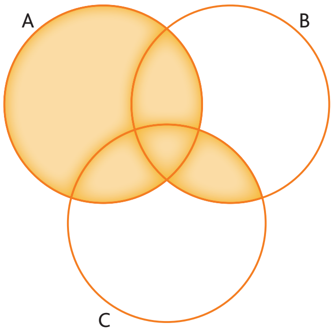


b)



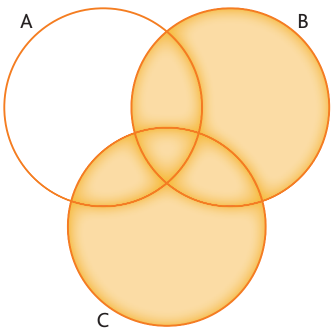


$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

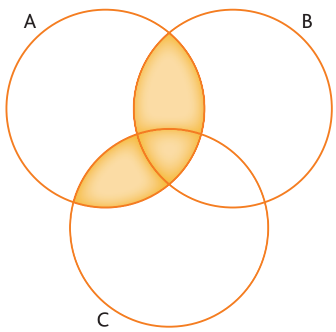


c)

$B \cup C$

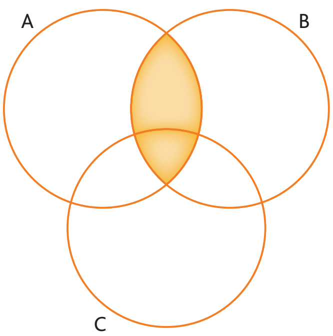


$A \cap (B \cup C)$

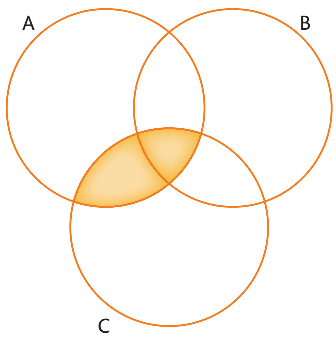


d)

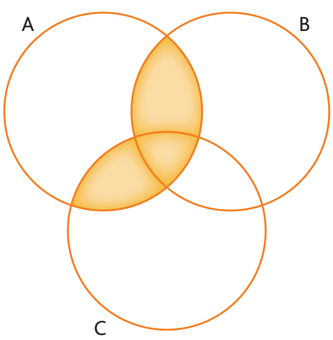
$A \cap B$



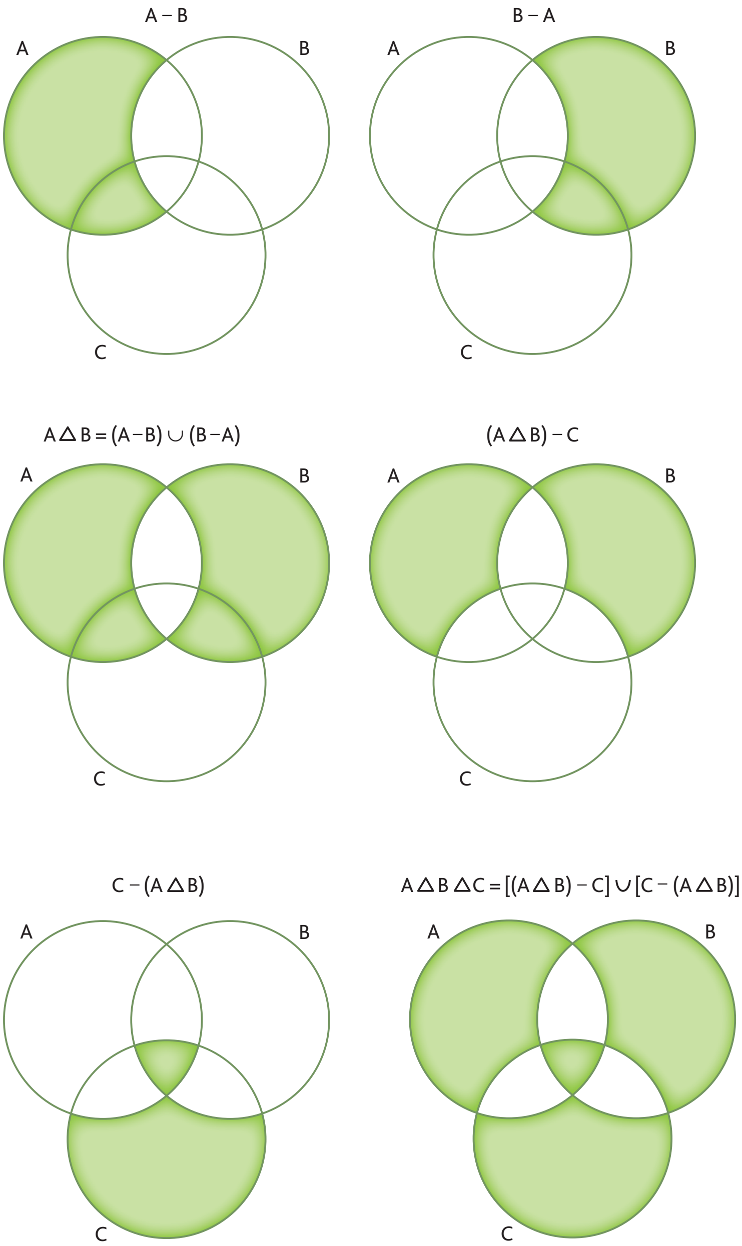
$A \cap C$



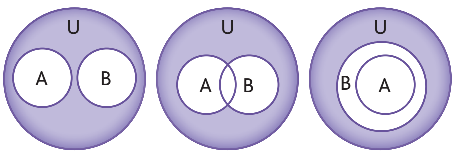
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



46.



47. a)



b) Temos:

$A \cup C = \{x \in R \mid 2 < x < 5 \text{ ou } 6 \leq x \leq 10\}$

$C^{(A \cup C)} = \{x \in R \mid x \leq 2 \text{ ou } 5 \leq x < 6 \text{ ou } x > 10\}$

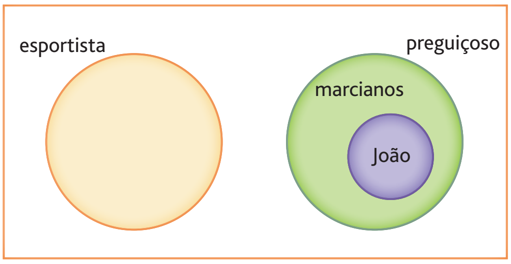
$C^{B} = \{x \in R \mid x > 3\}$

$(A \cup C) * B = C^{(A \cup C)} \cap C^{B} = \{x \in R \mid 5 \leq x < 6 \text{ ou } x > 10\}$

$= [5; 6[\ \cup \ ]10; +\infty[$

48. Seja n o número de elementos de A. Então o conjunto $P(A)$ tem 2^n elementos e $P(P(A))$ tem 2^{2^n} elementos. Logo, $2^{2^n} = 256 = 2^8$ $\Leftrightarrow 2^n = 8 = 2^3 \Leftrightarrow n = 3$.

49. Considere a representação no Diagrama de Venn a seguir:



a) Falsa. Pode existir pelo menos 1 preguiçoso que não é marciano.
b) Falsa. Como todos os marcianos são preguiçosos e nenhum esportista é preguiçoso, a afirmação é falsa.
c) Falsa, mesmo argumento de *b*.
d) Verdadeira. Vide diagrama anterior.

50. Como na tentativa 1 houve dois resultados positivos, podemos ter esses dois resultados falsos, um falso e o outro verdadeiro ou os dois verdadeiros. Porém, note que não é possível ter os dois resultados falsos, pois ambos deveriam ser negativos na tentativa 2 e tal tentativa apresentou somente um negativo. Sendo assim, obrigatoriamente um dos pacientes é portador da bactéria, eliminando a possibilidade de nenhum dos cinco ser portador.

51. a) $\underset{F}{5 < 3} \Rightarrow \underset{F}{-3 < -5}$: verdadeira.

b) $\sim(\underbrace{\underset{V}{2+2=4} \vee \underset{F}{3+6=6}}_{V})$: falsa.

c) $\underset{F}{2+2 \neq 4} \wedge \underset{V}{3+3=6}$: falsa.

d) $\underset{V}{3 < 5} \Rightarrow \underset{F}{-3 < -5}$: falsa.

e) $\underset{V}{3 < 5} \Rightarrow \underset{V}{5 > 3}$: verdadeira.

f) $\underset{V}{3+2=5} \veebar \underset{V}{2+3=5}$: falsa.

g) $\underset{V}{2 \in N} \Rightarrow (\underbrace{\underset{V}{2 \in Z} \Rightarrow \underset{V}{2 \in Q}}_{V})$: verdadeira.

h) $\underset{V}{2 \in N} \vee \underbrace{\sim(\underset{V}{2 \in N})}_{F}$: verdadeira.

52. a)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim(p \Rightarrow \sim q)$
V	V	F	F	V
F	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	F	V	V	F

b) α é $(p \Rightarrow q)$ e β é $(\sim p \vee q)$

p	q	α	$\sim p$	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V

c) α é $(p \vee q)$ e β é $(p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	α	β	$\alpha \wedge \beta$	$S \Leftrightarrow T$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V
				S			T	

53. a) Se a sentença: "O nariz de Pinóquio não vai crescer" é verdadeira, então Pinóquio diz a verdade e seu nariz, de fato, não crescerá. Se a sentença for falsa, será verdade que "O nariz de Pinóquio vai crescer", e, de fato, o seu nariz crescerá. Logo as duas coisas podem acontecer, dependendo da veracidade da sentença "O nariz de Pinóquio não vai crescer".
b) Se Pinóquio disse "Meu nariz vai crescer" e essa frase for verdadeira, o seu nariz não poderá crescer, pois ele diz a verdade, logo isso é um absurdo. No caso contrário, ou seja, se a frase for falsa, então é verdade que "Meu nariz não vai crescer", o que não condiz com o enunciado, já que quando Pinóquio diz uma frase falsa seu nariz deve crescer. Logo Pinóquio não pode dizer a frase do enunciado.

54. a) $x \in R \wedge x \in Q \Leftrightarrow \sim(x \in Q')$
b) $x \in R \Rightarrow \sim(x \in Q \wedge x \in Q')$
c) $x \in R \Rightarrow x \in Q \veebar x \in Q'$
d) $x \in R \Rightarrow x \in Q \vee x \in Q'$

55. a) Verdadeira. $\forall x;\ x \in Q \Rightarrow x \in R$
b) Falsa. $\exists x;\ x \in R \wedge (x \in Q \wedge x \in Q')$
c) Verdadeira. $\forall x;\ x \in R \Rightarrow (x \in Q \vee x \in Q')$

56. a) $2x - 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3 \quad V = \{3\}$

b) $-3x + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad V = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) $\frac{2x}{5} + 7 = 8 \Leftrightarrow \frac{2x}{5} = 1 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \quad V = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $5(x-3) + 7 = -2(4 - x) - 3x = -8 + 2x - 3x = -8 - x \Leftrightarrow 5x - 8 + x = -8$
$\Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad V = \{0\}$

e) $\frac{x+1}{3} = \frac{2-5x}{4} \Leftrightarrow 4x + 4 = 6 - 15x \Leftrightarrow 19x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{19} \quad V = \left\{\frac{2}{19}\right\}$

f) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{12}$

$\Leftrightarrow 12 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) - 12\left(\frac{x-2}{3}\right) - 12 \cdot \left(\frac{x-3}{4}\right) = 12 \cdot \left(\frac{x-4}{12}\right)$

$\Leftrightarrow 6(x-1) - 4(x-2) - 3(x-3) = x - 4$

$\Leftrightarrow 6x - 6 - 4x + 8 - 3x + 9 - x = -4 \Leftrightarrow -2x = -15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2} \quad V = \left\{\frac{15}{2}\right\}$

g) $\frac{4(x-3)}{3} + 2(5 - x) = \frac{3(2-3x)}{4} + x$

$\Leftrightarrow 12\left[\frac{4(x-3)}{3}\right] + 12[2(5-x)] = 12\left[\frac{3(2-3x)}{4}\right] + 12x$

$\Leftrightarrow 16(x-3) + 24(5-x) = 9(2-3x) + 12x$

$\Leftrightarrow 16x - 48 + 120 - 24x = 18 - 27x + 12x$

$\Leftrightarrow 16x - 24x + 27x - 12x = 18 + 48 - 120 \Leftrightarrow 7x = -54$

$\Leftrightarrow x = -\frac{54}{7} \quad V = \left\{-\frac{54}{7}\right\}$

h) $(2x+1)(4x+5) = (2x+1)(3x+2) \Leftrightarrow (2x+1)(4x+5) - (2x+1)(3x+2)$
$= 0 \Leftrightarrow (2x+1)(4x+5-3x-2) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x+3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ \text{ou} \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x=-3 \end{array}\right.$$

$$V = \left\{-\frac{1}{2};\ -3\right\}$$

57. a) $5x + 1 = -5x + 1 \Leftrightarrow 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad V = \{0\}$
b) $7x + 5 = 7x + 5 \Leftrightarrow 0x = 0 \quad V = R$
c) $2x - 4 = 2x - 1 \Leftrightarrow 0x = 3 \quad V = \emptyset$

58. $(m-3)x = n + 5 \Leftrightarrow x = \frac{n+5}{m-3}$. Assim, teremos 3 possibilidades:

I. Se $m \neq 3 \Rightarrow V = \left\{\frac{n+5}{m-3}\right\}$

II. Se $m = 3$ e $n = -5 \Rightarrow V = R$
III. Se $m = 3$ e $n \neq -5 \Rightarrow V = \emptyset$

59. $\dfrac{mx}{4} - \dfrac{x-2}{m} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{mx}{4} - \dfrac{x-2}{m} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{m^2x - 4(x-2) - 4m}{4m} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(m^2-4)x + 8 - 4m}{4m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)(m-2)x - 4(m-2) = 0 \\ \text{e} \\ 4m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)(m-2)x = 4(m-2) \\ \text{e} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

a) A equação admite solução única $x = \dfrac{4(m-2)}{(m+2)(m-2)} = \dfrac{4}{m+2}$ desde

que $\begin{cases} (m+2)(m-2) \neq 0 \\ \text{e} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2$ e $m \neq 0$ e $m \neq 2$.

b) A equação não admite solução se:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} (m+2)(m-2) = 0 \\ \text{e} \\ 4(m-2) \neq 0 \end{pmatrix} \\ \text{ou} \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} (m=-2 \text{ ou } m=2) \\ \text{e} \\ m \neq 2 \end{pmatrix} \\ \text{ou} \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2 \text{ ou } m = 0$$

c) A equação admite infinitas soluções se:

$$\begin{cases} (m+2)(m-2) = 0 \\ \text{e} \\ 4(m-2) = 0 \\ \text{e} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m=-2 \text{ ou } m=2) \\ \text{e} \\ m = 2 \\ \text{e} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

60. O discriminante da equação $3x^2 - 6x + (k-1) = 0$ é
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3(k-1) \Leftrightarrow \Delta = -12k + 48$, assim:
a) a equação não admite raízes reais $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -12k + 48 < 0 \Leftrightarrow k > 4$.
b) a equação admite duas raízes reais distintas $\Leftrightarrow \Delta > 0$
$\Leftrightarrow -12k + 48 > 0 \Leftrightarrow k < 4$.
c) a equação admite duas raízes reais iguais $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow -12k + 48 = 0$
$\Leftrightarrow k = 4$.

61. Sejam a e $2a$ as raízes da equação. Então

$$\begin{vmatrix} m = a + 2a \\ 8 = a \cdot 2a \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3a = m \\ a^2 = 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = 2 \vee a = -2 \\ m = 6 \vee m = -6 \end{vmatrix}$$. Portanto, $m = 6$ ou $m = -6$.

62. a) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}=7$

b) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{45}{4}$

c) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\dfrac{\frac{45}{4}}{(x_1\cdot x_2)^2}=\dfrac{\frac{45}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=45$

d) $x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-x_1^2x_2^2=\left(\dfrac{45}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{2\,021}{16}$

63. $\Delta=4-4(m-2)=4-4m+8$. Para que a equação tenha raízes reais e positivas, $\Delta\geq 0$ e $(m-2)>0$. Assim, $-4m\geq -12 \Leftrightarrow m\leq 3$ e $m>2$. Portanto, $2<m\leq 3$.

64. a) $(x-1)(x-5)$ b) $(x+2)(x+4)$
c) $2(x+2)(x+3)$ d) $x(x+2)(x-3)$

65. Temos $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(3a)^2-2\cdot a^2=7a^2$.

Assim, $7a^2=1{,}75 \Leftrightarrow a^2=0{,}25=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ ou $a=-\dfrac{1}{2}$

66. $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2}{x-2}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(x-2)+2\cdot 2+1\cdot(x-2)}{2(x-2)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{2(x-2)}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ \text{e} \\ 2(x-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=-2 \text{ ou } x=1) \\ \text{e} \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=1$

$V=\{-2,\ 1\}$

67. a) Se $x+\dfrac{1}{x}=b$, então $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=b^2 \Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=b^2$

$\Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=b^2 \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=b^2-2$.

b) $x^2-5x+8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+8=0$

Fazendo $x+\dfrac{1}{x}=y$, do item *a* temos que $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. Logo:

$(y^2-2)-5\cdot y+8=0 \Leftrightarrow y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=2$ ou $y=3$

Assim:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ \text{ou} \\ x+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}-2=0 \\ \text{ou} \\ x+\dfrac{1}{x}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x}=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{x^2-3x+1}{x}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ \left(x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$V=\left\{1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

68.

Seja $AB = x$. Então $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow BC = \dfrac{2}{3}x$ e $CD = AD - AB - BC$ $= 24 - x - \dfrac{2}{3}x = 24 - \dfrac{5}{3}x.$

Como $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{1}{5}$, então $\dfrac{24-\dfrac{5}{3}x}{x+\dfrac{2}{3}x} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}x = 120 - \dfrac{25}{3}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{30}{3}x = 120 \Leftrightarrow x = 12.$

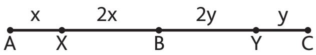
Logo $AB = 12$, $BC = \dfrac{2}{3} \cdot 12 = 8$ e $CD = 24 - \dfrac{5}{3} \cdot 12 = 4.$

69.

a) $AM = MB = 4$, $AC = AB + BC = 12$. Logo $AN = 6$, $BP = PC = 2$. Assim, $MN = AN - AM = 2$. Seja T o ponto médio de $\overline{MN}$, então $MT = TN = 1$ e, portanto, $AT = AM + MT = 5$. Mas $AP = AB + BP = 8 + 2 = 10$, logo T é ponto médio de $\overline{AP}$.

b) $TA = 5$

70.



Seja $AX = x$ e $YC = y$. Então $BX = 2x$ e $BC = 3y \Rightarrow BY = 3y - y = 2y$.
Temos:

$AC = 10 \Leftrightarrow x + 2x + 2y + y = 10 \Leftrightarrow 3x + 3y = 10 \Leftrightarrow x + y = \dfrac{10}{3}$

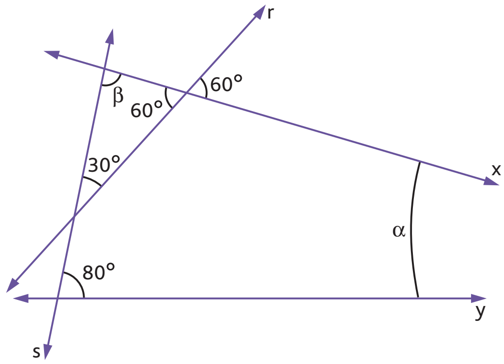
Então $XY = 2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{3}$ cm.

71. Temos:

- $(3x + 120^o) + x = 180^o \Leftrightarrow 4x = 60^o \Leftrightarrow x = 15^o$
- $19y - 23^o = x \Leftrightarrow 19y - 23^o = 15^o \Leftrightarrow 19y = 38^o \Leftrightarrow y = 2^o$ (alternos externos)

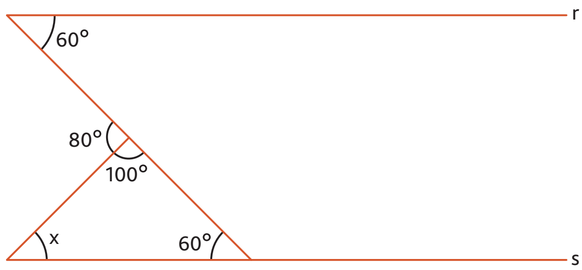
Logo $x + y = 15^o + 2^o = 17^o$.

72.



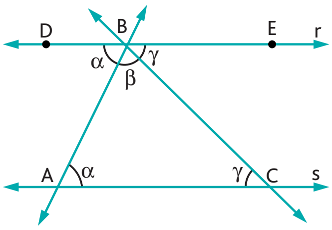
Na figura, $\beta + 60^{o} + 30^{o} = 180^{o} \Leftrightarrow \beta = 90^{o}$. Então, o ângulo α entre as retas x e y é tal que $\alpha + \beta + 80^{o} = 180^{o} \Leftrightarrow \alpha + 90^{o} = 100^{o} \Leftrightarrow \alpha = 10^{o}$.

73.



Na figura, $x + 60^{o} + 100^{o} = 180^{o} \Leftrightarrow x = 20^{o}$.

74. a)



Devemos provar que se α, β e γ são as medidas dos três ângulos internos de um triângulo, então $\alpha + \beta + \gamma = 180^{o}$.
Tracemos pelo vértice B de um triângulo ABC uma reta r paralela à reta $s = \overleftrightarrow{AC}$. Assim, $\alpha = m\,(B\hat{A}C) = m\,(A\hat{B}D)$ (alternos internos) e $\gamma = m\,(B\hat{C}A) = m\,(C\hat{B}E)$ (alternos internos).
Portanto $\alpha + \beta + \gamma = m\,(A\hat{B}D) + m\,(A\hat{B}C) + m\,(C\hat{B}E) = 180^{o}$.

b) Cada um dos outros ângulos mede $\dfrac{180^{o} - 100^{o}}{2} = 40^{o}$ (são iguais pois o triângulo é isósceles).

75. Seja $m\,(D\hat{B}C) = x$. Então $m\,(B\hat{D}A) = 4x$. Ainda, $m\,(A\hat{B}D) = 60^{o} + x = m\,(B\hat{A}D)$.
Temos $m\,(B\hat{A}D) + m\,(A\hat{B}D) + m\,(B\hat{D}A) = 180^{o}$
$\Leftrightarrow 60^{o} + x + 60^{o} + x + 4x = 180^{o} \Leftrightarrow 6x = 60^{o}$
$\Leftrightarrow x = 10^{o}$ e $m\,(B\hat{D}A) = 4x = 40^{o}$.

76. Temos:

- $\alpha + a + b = 180^o$

$\Leftrightarrow \alpha = 180^o - a - b$

- $\beta + e + f = 180^o$

$\Leftrightarrow \beta = 180^o - e - f$

- $\gamma + c + d = 180^o$

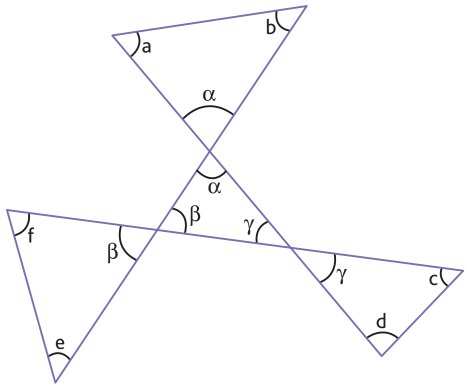
$\Leftrightarrow \gamma = 180^o - c - d$

Logo $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$

$\Leftrightarrow 180^o - a - b + 180^o - e - f$

$+ 180^o - c - d = 180^o$

$\Leftrightarrow a + b + c + d + e + f = 360^o$.



77. Como $CD = AD$, $m(C\hat{A}D) = m(A\hat{C}D) = 30^o$. Logo $m(A\hat{D}B) = m(C\hat{A}D) + m(D\hat{C}A) = 30^o + 30^o = 60^o$.

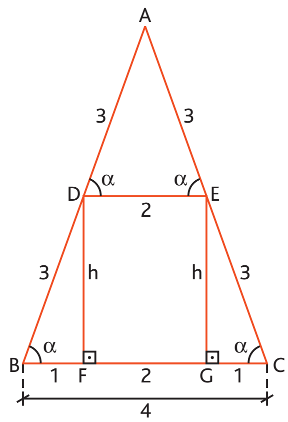
Como $AD = BD$, $m(A\hat{B}D) = m(A\hat{D}B) = \dfrac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$. Logo o ΔABD é equilátero. Se M é ponto médio de $\overline{BD}$, $\overline{AM}$ é mediana e também bissetriz do ΔABD. Logo $\alpha = \dfrac{m(B\hat{A}D)}{2} = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$.

78. No ΔABC, $m(B\hat{A}C) = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o > m(A\hat{C}B) > m(A\hat{B}C)$. Logo $BC > AC$ e $BC > AB$.
No ΔCBD, $m(B\hat{C}D) = 180^o - 80^o - 80^o = 20^o$. Logo $BC = DC > BD$.
No ΔCDE, $m(C\hat{D}E) = 180^o - 70^o - 60^o = 50^o$. Como $70^o > 60^o$ e $70^o > 50^o$, então $DE > DC$ e $DE > CE$. Logo o maior segmento é $\overline{DE}$.

79. Como $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$, $m(A\hat{D}E) = m(A\hat{B}C) = m(A\hat{C}B) = m(A\hat{E}D) = \alpha$. Assim, pelo caso AA, temos $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ e sendo k a razão de tal semelhança, temos $k = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Logo $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{6} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow AE = 3 = EC$.

Sendo F e G as projeções ortogonais de D e E sobre $\overline{BC}$, respectivamente, temos, pelo caso LAA_0, $\Delta DFB \cong \Delta EGC$, onde $BF = GC = \dfrac{4-2}{2} = 1$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao ΔEGC, vem $3^2 = h^2 + 1 \Leftrightarrow h^2 = 8$, de onde $3h^2 = 3 \cdot 8 = 24$.

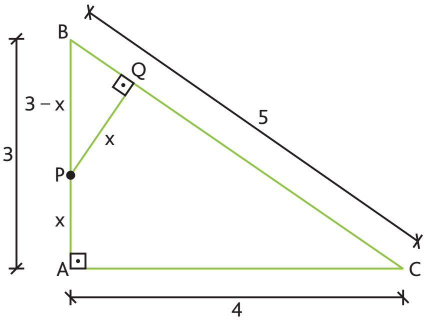
80. Sendo $E \in \overline{AC}$, tal que $AE = AB$, temos, pelo caso LAL, $\Delta ABD \cong \Delta AED$. Como $EC = AC - AE = AB + BD - AB = BD = DE$, o triângulo CDE é isósceles e, sendo $\alpha = m(E\hat{C}D) = m(E\hat{D}C)$, temos $m(A\hat{B}D) = m(A\hat{E}D) = m(E\hat{C}D) + m(E\hat{D}C) = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Logo:

$m(A\hat{C}B) + m(A\hat{B}C) + m(B\hat{A}C) = 180^o$

$\Leftrightarrow m(E\hat{C}D) + m(A\hat{B}D) + m(B\hat{A}C) = 180^o \Leftrightarrow 3\alpha = 120^o$

$\Leftrightarrow \alpha = 40^o$. Portanto, $m(A\hat{B}C) = 2\alpha = 80^o$ e $m(A\hat{C}B) = \alpha = 40^o$.

81. A seguir, temos uma figura ilustrativa da situação descrita, em que $AP = PQ = x$.



Pelo Teorema de Pitágoras,

$BC^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow BC = 5$.

Como $m(Q\hat{B}P) = m(A\hat{B}C)$ e $m(B\hat{Q}P) = m(B\hat{A}C) = 90^o$, temos, pelo caso AA, $\Delta BQP \sim \Delta BAC$

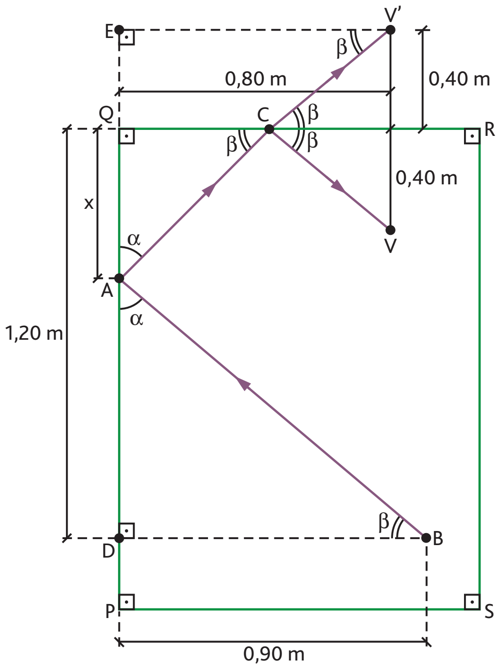
$$\Rightarrow \frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{BC} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{3-x}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 12 - 4x \Leftrightarrow 9x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

82. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao ΔPQR, temos $15^2 = 12^2 + QR^2$ $\Leftrightarrow QR = 9$.

Como $\begin{cases} m(Q\hat{R}P) = m(M\hat{R}N) \\ m(P\hat{Q}R) = m(N\hat{M}R) \end{cases} \overset{AA}{\Leftrightarrow} \Delta QRP \sim \Delta MRN$. Sendo N o ponto médio de $\overline{QR}$, vem que $\dfrac{\frac{9}{2}}{15} = \dfrac{NM}{12} \Leftrightarrow NM = 3{,}6$ cm.

83. Consideremos a figura a seguir:



Como os ângulos de incidência e reflexão em A são iguais e em C também são iguais, pelo caso AA, $\Delta AEV' \sim \Delta ABD$. Logo:

$$\frac{1{,}2 - x}{x + 0{,}4} = \frac{0{,}9}{0{,}8} \Leftrightarrow 9{,}6 - 8x = 9x + 3{,}6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{17} \text{ m}$$

84. $m(A\hat{D}E) = m(D\hat{A}E) = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ (ΔADE é isósceles)

$m(A\hat{B}E) = m(D\hat{A}E) = 36^\circ$ ($\Delta ADE \cong \Delta BEA$)

$m(B\hat{E}C) = 180^\circ - 2 \cdot m(E\hat{B}C) = 180^\circ - 2 \cdot [m(A\hat{B}C) - m(A\hat{B}E)]$

$= 180^\circ - 2 \cdot (108^\circ - 36^\circ) = 36^\circ$

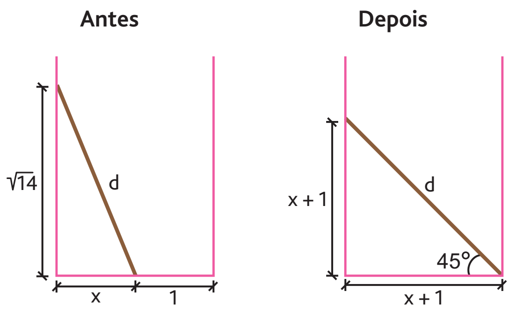
$m(A\hat{G}E) = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ e $m(E\hat{F}G) = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$

Logo os triângulos AEG, AEF e EFG são isósceles com $\Delta AGE \sim \Delta EFG$

$\Rightarrow \dfrac{EF}{AG} = \dfrac{FG}{EG} \Leftrightarrow \dfrac{AF}{1} = \dfrac{1 - AF}{EF} \Leftrightarrow \dfrac{AF}{1} = \dfrac{1 - AF}{AF} \Leftrightarrow AF^2 + AF - 1 = 0$

$\Leftrightarrow AF = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

85. Seja x a distância do pé da escada à parede; como a escada deslizou 1 m e parou no pé do muro, concluímos que a distância do muro à parede é igual a $x + 1$.



Seja d o comprimento da escada. Na situação inicial, a escada, a parede e o muro formam um triângulo retângulo no qual, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 = (\sqrt{14})^2 + x^2 = 14 + x^2$ (I)

Após o deslizamento, no triângulo retângulo formado temos:

$d^2 = (x + 1)^2 + (x + 1)^2 = 2(x + 1)^2$ (II)

a) Das igualdades I e II temos:

$14 + x^2 = 2(x + 1)^2 \Leftrightarrow 14 + x^2 = 2(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow 14 + x^2 = 2x^2 + 4x + 2$

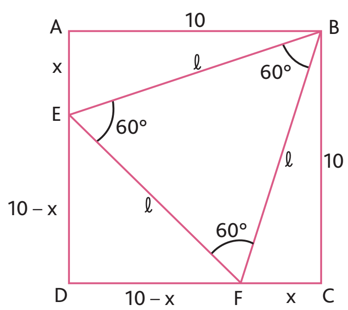
$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 2$.

Como $x > 0$, concluímos que $x = 2$, ou seja, a distância entre a parede da casa e o muro é igual a $2 + 1 = 3$ metros.

b) O comprimento da escada é igual a

$d = \sqrt{2(x+1)^2} = \sqrt{2(2+1)^2} = 3\sqrt{2}$ metros.

86.



Seja ℓ o lado do triângulo equilátero e $x = AE = FC$. Então, aplicando Teorema de Pitágoras nos triângulos ABE e DEF, temos:

$$\left|\begin{array}{ll} \ell^2 = 10^2 + x^2 & \text{(I)} \\ \ell^2 = 2 \cdot (10 - x)^2 & \text{(II)} \end{array}\right.$$

Substituindo I em II:

$100 + x^2 = 200 - 40x + 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 100 = 0$

$\overset{0 < x < 10\text{ cm}}{\Longleftrightarrow} x = (20 - 10\sqrt{3})$ cm

Em II, $\ell = (10 - x)\sqrt{2} \Leftrightarrow \ell = (10\sqrt{3} - 10)\sqrt{2}$ cm $\Leftrightarrow \ell = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm.