Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

$2^{η}$ Εργασία

Τουτζιάρης Γεώργιος ΑΕΜ 10568.

Θέμα 1ο

Ξεκινάμε από τις εξίσωση που περιγράφει το σύστημα

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

Προσθαφαιρώντας τον όρο am έχουμε:

$$\dot{x} + a_m x = a_m x - ax + bu$$

Μετά από μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$x = \frac{1}{s + a_m}[(a_m - a)x + bu]$$

Τώρα μπορούμε να παραμετροποιήσουμε γραμμικά το σύστημα ώστε:

$$x = \theta^* \varphi$$

Όπου:

$$\theta^* = [a_m - a\ b]^T = [\theta_1^*\ \theta_2^*]^T$$

$$\varphi = \left[\frac{1}{s + a_m}x\ \frac{1}{s + a_m}u\right]^T = [\ \varphi_1\ \varphi_2]^T$$

Σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης έχουμε:

$$\begin{cases} \dot{\varphi_1} = -a_m \varphi_1 + x \\ \dot{\varphi_2} = -a_m \varphi_2 + u \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \varphi_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}u = (-a_m - \hat{\theta}_1)\hat{x} + \hat{\theta}_2 u \end{cases}$$

Μεταβαίνοντας στον χώρο των καταστάσεων παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \varphi_1 \\ x_5 = \varphi_2 \\ x_6 = \hat{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_1 = \gamma e x_4 \\ \dot{x_3} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \varphi_2 = \gamma e x_5 \\ \dot{x_4} = \dot{\varphi_1} = -a_m \varphi_1 + x = -a_m x_4 + x_1 \\ \dot{x_5} = \dot{\varphi_2} = -a_m \varphi_2 + u = -a_m x_5 + u \\ \dot{x_6} = \dot{\hat{x}} = (\hat{\theta}_1 - a_m)\hat{x} + \hat{\theta}_2 u = (x_2 - a_m)x_6 + x_3 u \end{cases}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση το σφάλμα

$$e = x - \hat{\theta}\varphi = x_1 - (\hat{\theta}_1 \varphi_1 + \hat{\theta}_2 \varphi_2) = x_1 - (x_2 x_4 + x_3 x_5)$$

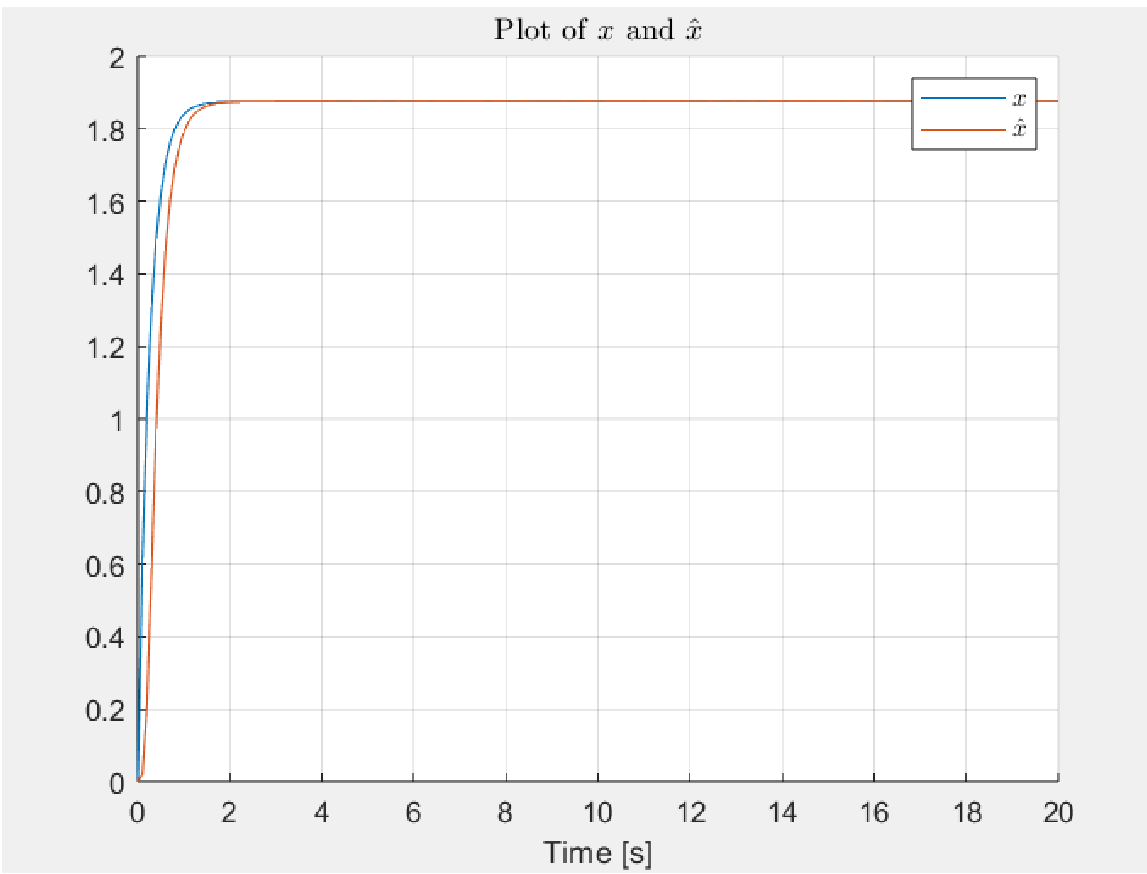
Καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = -ax_1 + bu \\
\dot{x_2} = \gamma x_4(x_1 - (x_2x_4 + x_3x_5)) \\
\dot{x_3} = \gamma x_5(x_1 - (x_2x_4 + x_3x_5)) \\
\dot{x_4} = -a_m x_4 + x_1 \\
\dot{x_5} = -a_m x_5 + u \\
\dot{x_6} = (x_2 - a_m)x_6 + x_3 u
\end{cases}
$$

Τώρα αρκεί να λύσουμε αυτό το σύστημα διαφορικών εξισώσεων χρήση της ode45 του Matlab.

Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται η έξοδος του συστήματος, το σφάλμα, καθώς και η εκτιμήσεις των παραμέτρων σε σύγκριση με τις πραγματικές τιμές.

Για σταθερή είσοδο u = 5 και χρησιμοποιώντας am=4.2 και g=20 ,τιμές που προέκυψαν μετά από πειραματισμό ως προς τον χρόνο και την ακρίβεια της σύγκλισης, παίρνουμε:



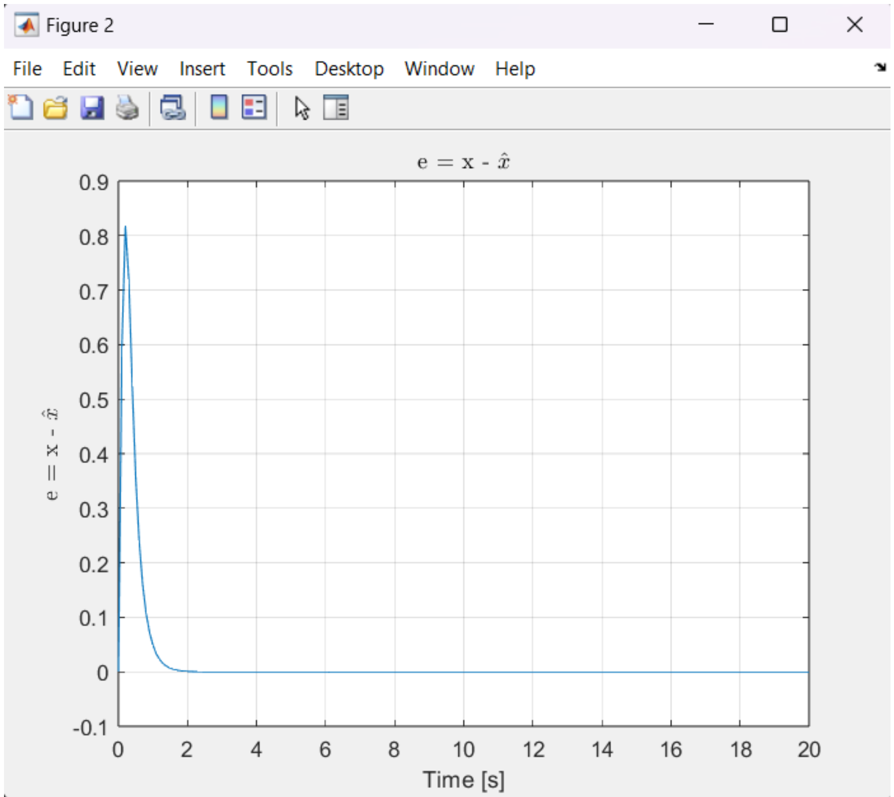
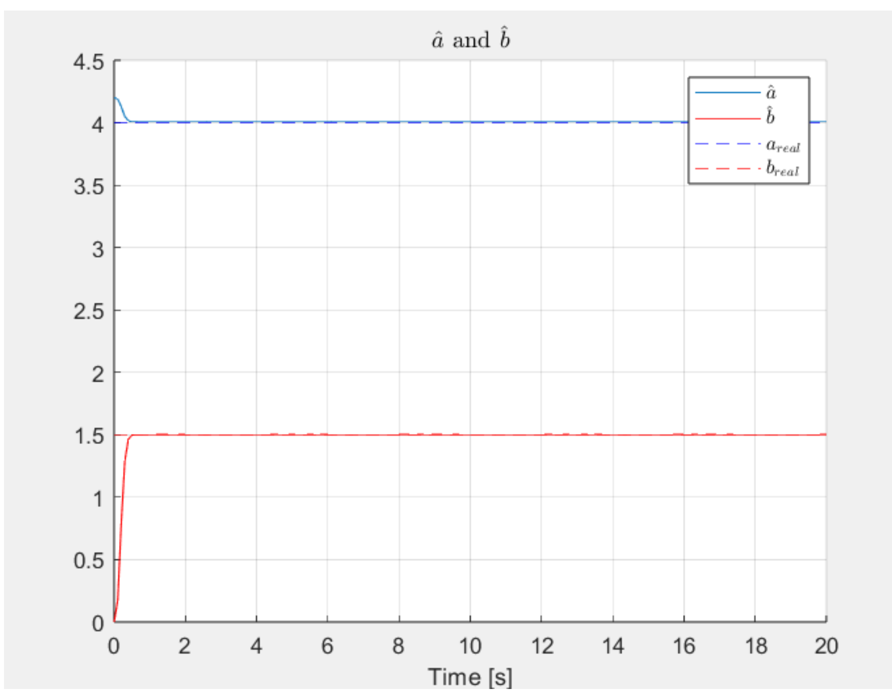
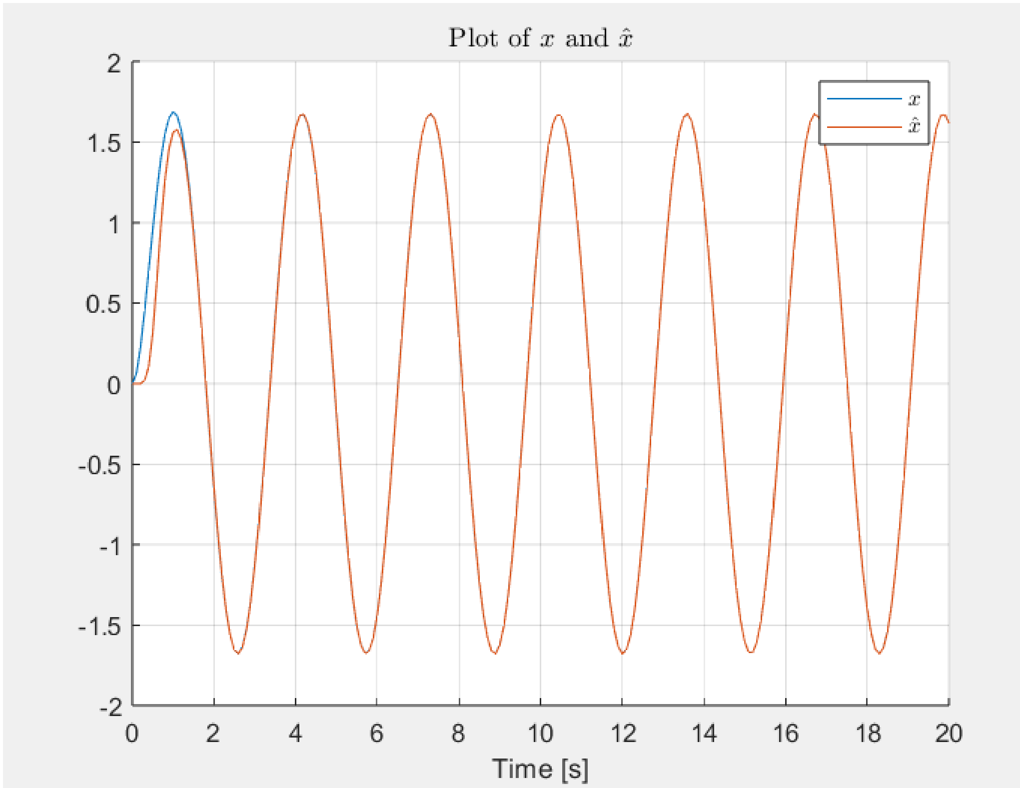


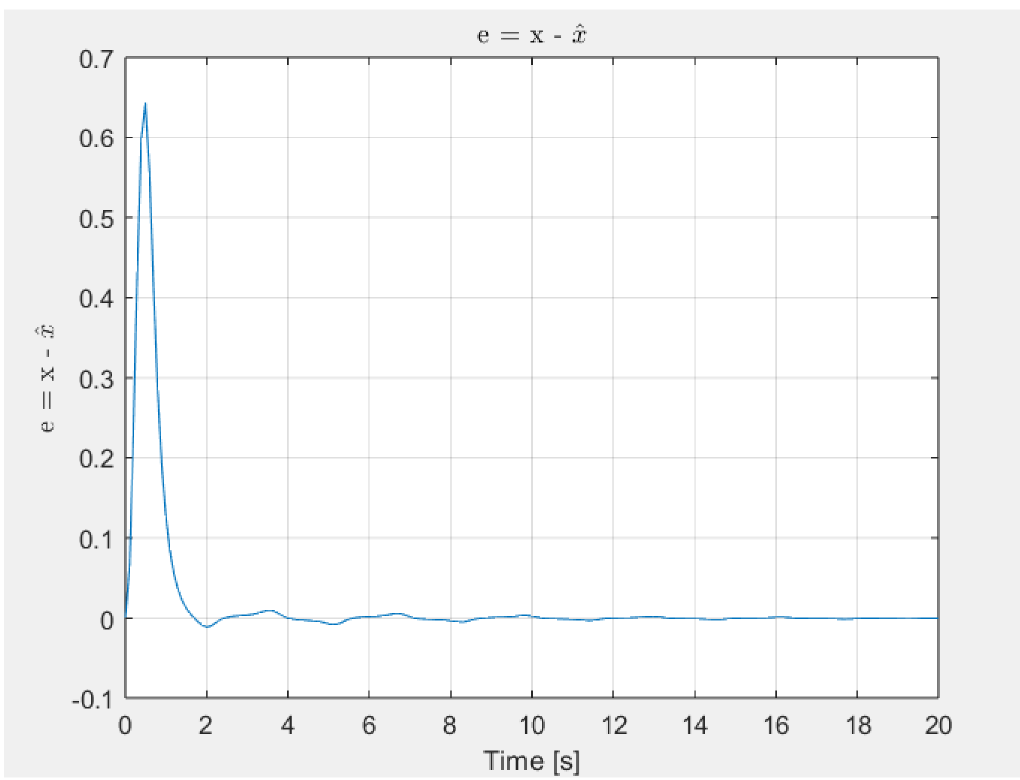
Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
$e = x - \hat{x}$
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]

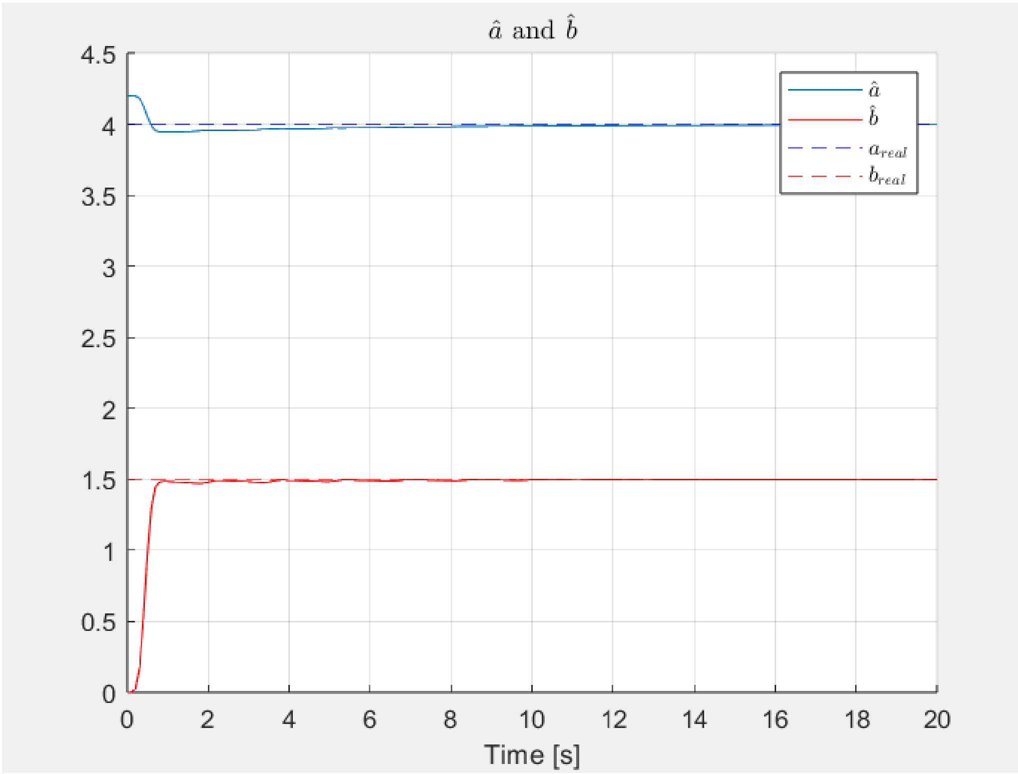


$\hat{a}$ and $\hat{b}$
$\hat{a}$
$\hat{b}$
a_{real}
b_{real}
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]

Για είσοδο $u(t) = 5\sin(2t)$ παίρνουμε:







Παρατηρούμε ότι και στις 2 περιπτώσεις ο αλγόριθμος συγκλίνει στις πραγματικές τιμές , αλλά στην περίπτωση της ημιτονοειδούς εισόδου το σφάλμα ταλαντώνεται γύρω από το 0, ενώ για σταθερή είσοδο συγκλίνει συμπωτικά στο 0.

Θέμα 2ο

Ξεκινάμε και πάλι γράφοντας τις εξισώσεις του πραγματικού συστήματος:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0$$

και του συστήματος παρατήρησης:

$$\dot{\hat{x}} = -\widehat{\theta_1}\hat{x} + \widehat{\theta_2}u$$

Το σφάλμα είναι:

$$e = x - \hat{x} \text{ , απουσία θορύβου}$$

$$e = x + \eta - \hat{x}\text{, παρουσία θορύβου}$$

Από την μέθοδο εκτίμησης Lyapunov για την παράλληλη δομή γνωρίζουμε ότι:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1 e\hat{x}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu$$

Αν ορίσουμε τις καταστάσεις όπως φαίνεται παρακάτω , τότε έχουμε το σύστημα εξισώσεων στον χώρο των καταστάσεων:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \hat{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax + bu = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e\hat{x} = -\gamma_1 e x_4 \\ \dot{x_3} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \\ \dot{x_4} = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\hat{x} + \hat{\theta}_2 u = -x_2x_4 + x_3u \end{cases}$$

Μετά από αντίσταση του σφάλματος (με και χωρίς θόρυβο) προκύπτουν τα 2 παρακάτω συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

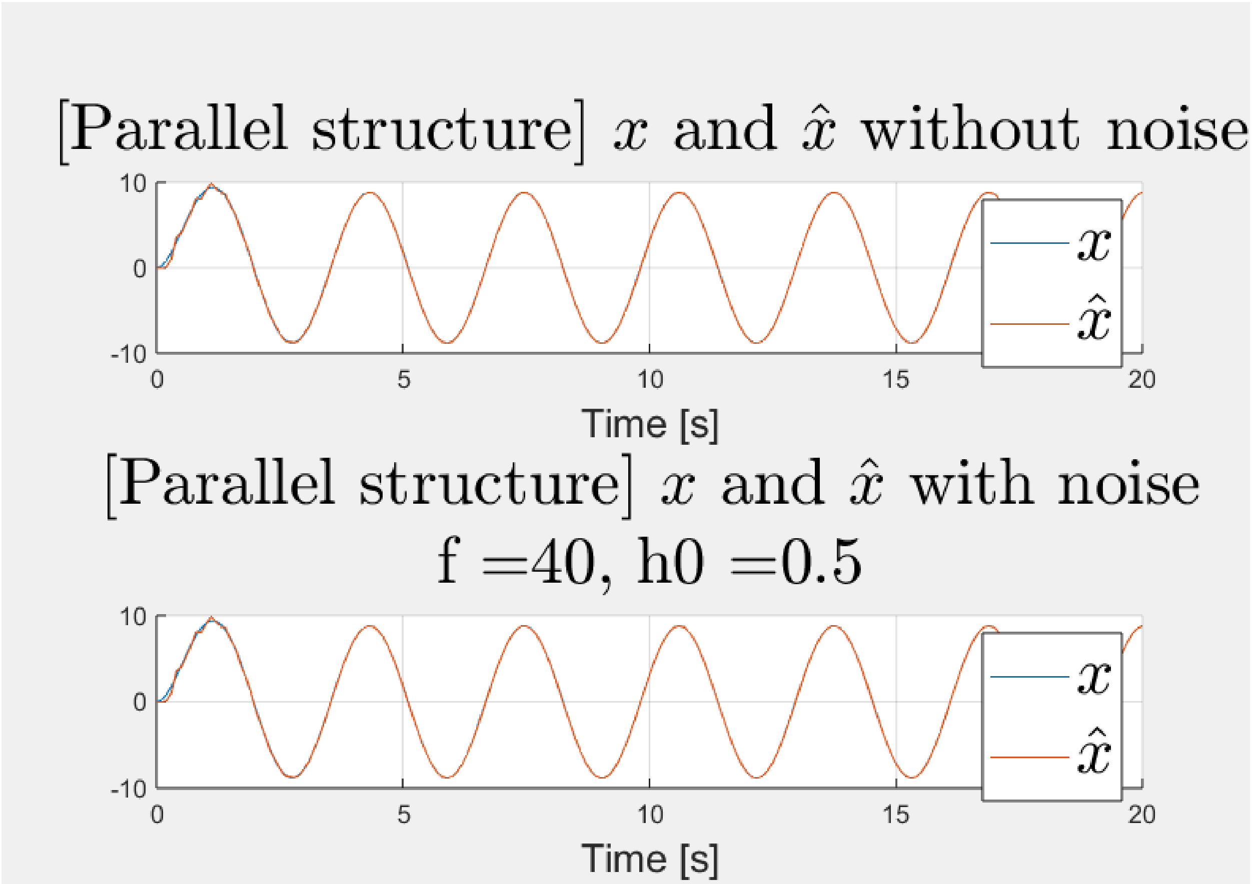
Εξισώσεις χωρίς θόρυβο:

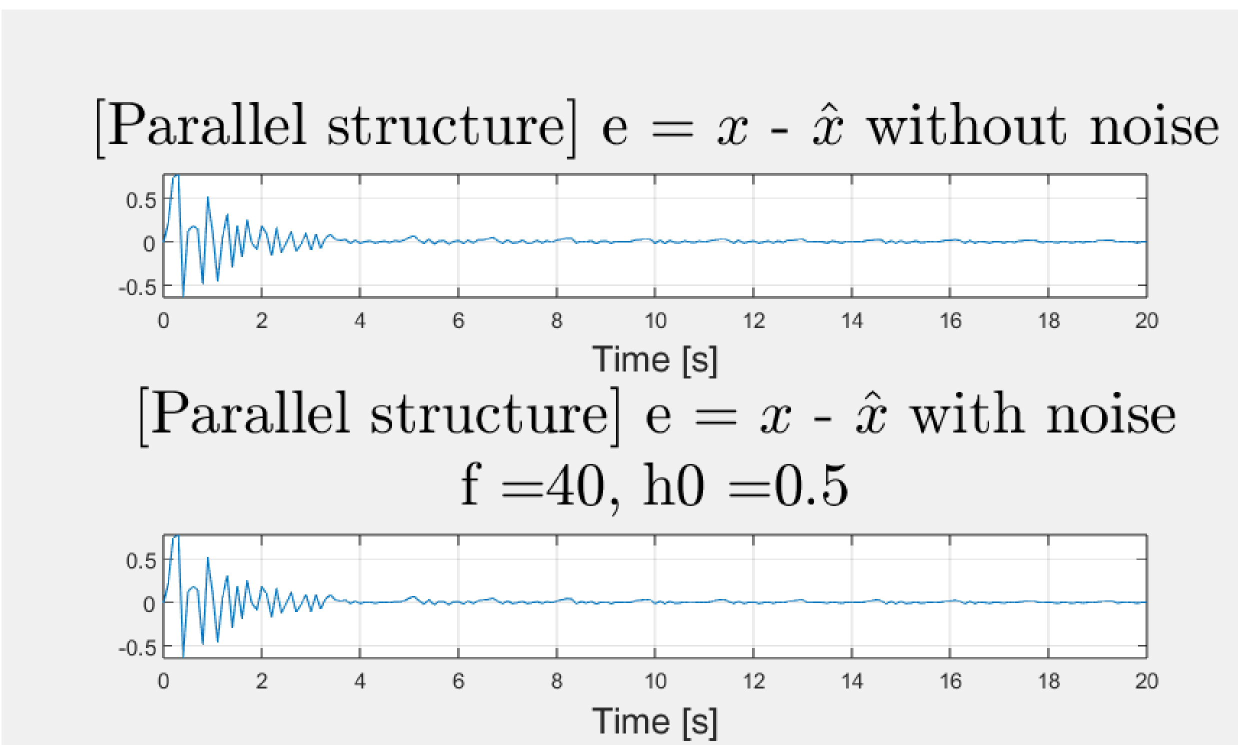
$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_4(x_1 - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2x_4 + x_3u \end{cases}$$

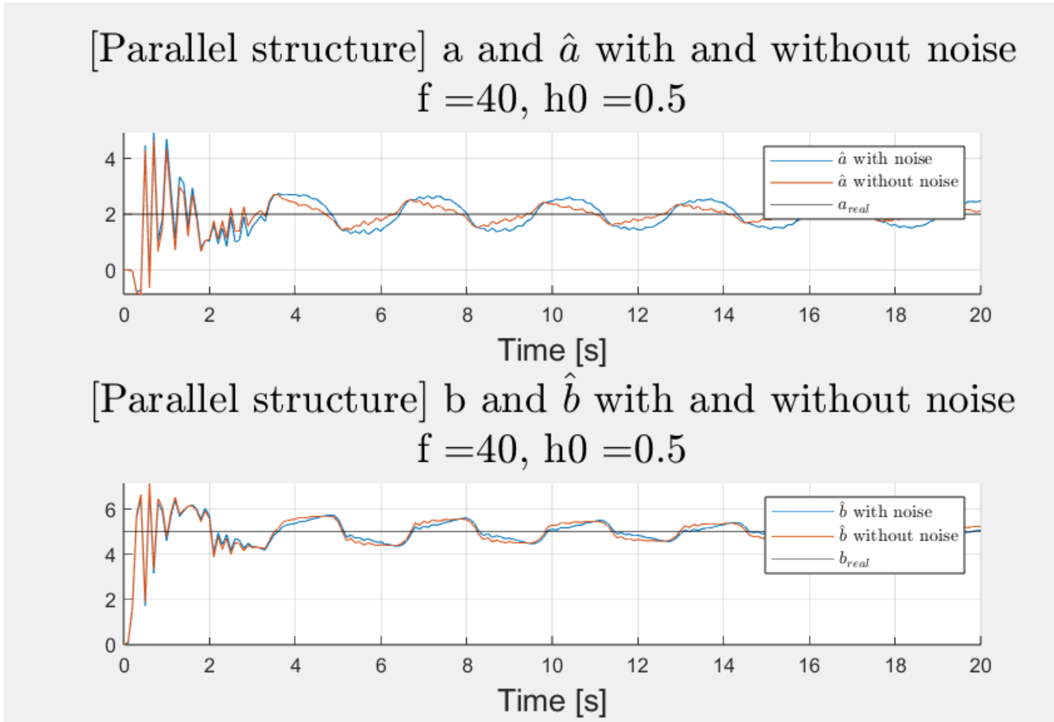
Εξισώσεις με θόρυβο:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_4(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2x_4 + x_3u \end{cases}$$

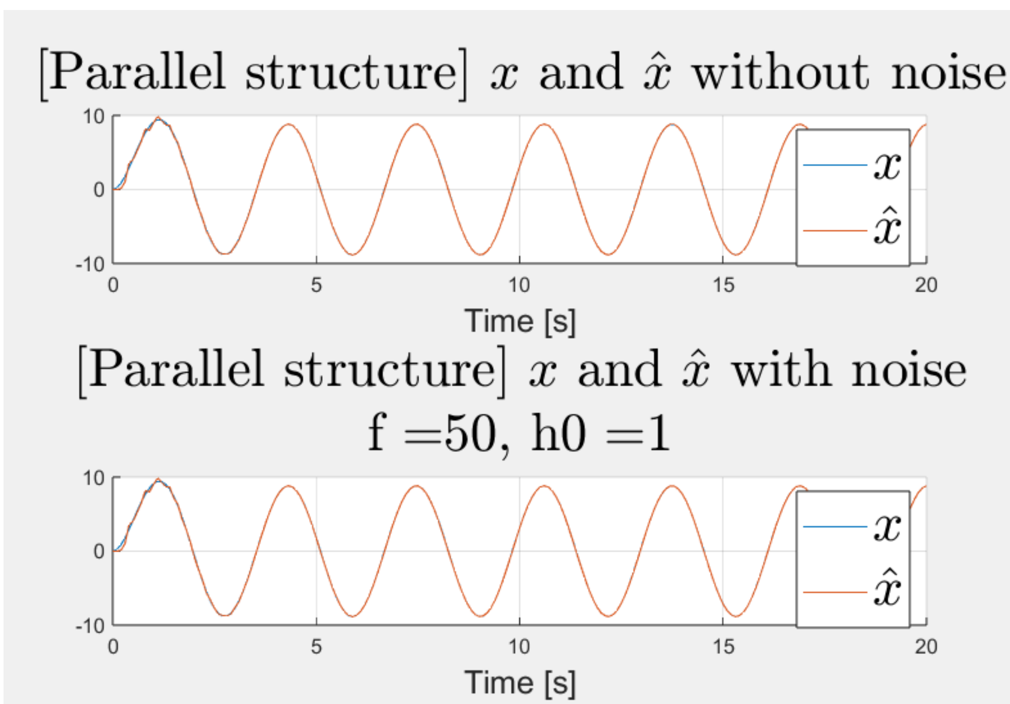
Περνώντας κάθε ένα από τα 2 συστήματα στην ode45 για διάφορες τιμές συχνοτήτων και πλάτους θορύβου, και έχοντας κάνει την επιλογή $\gamma_1 = 20$ και $\gamma_2 = 20$ προκύπτουν τα εξής γραφήματα:


[Parallel structure] x and $\hat{x}$ without noise
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =0.5
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$

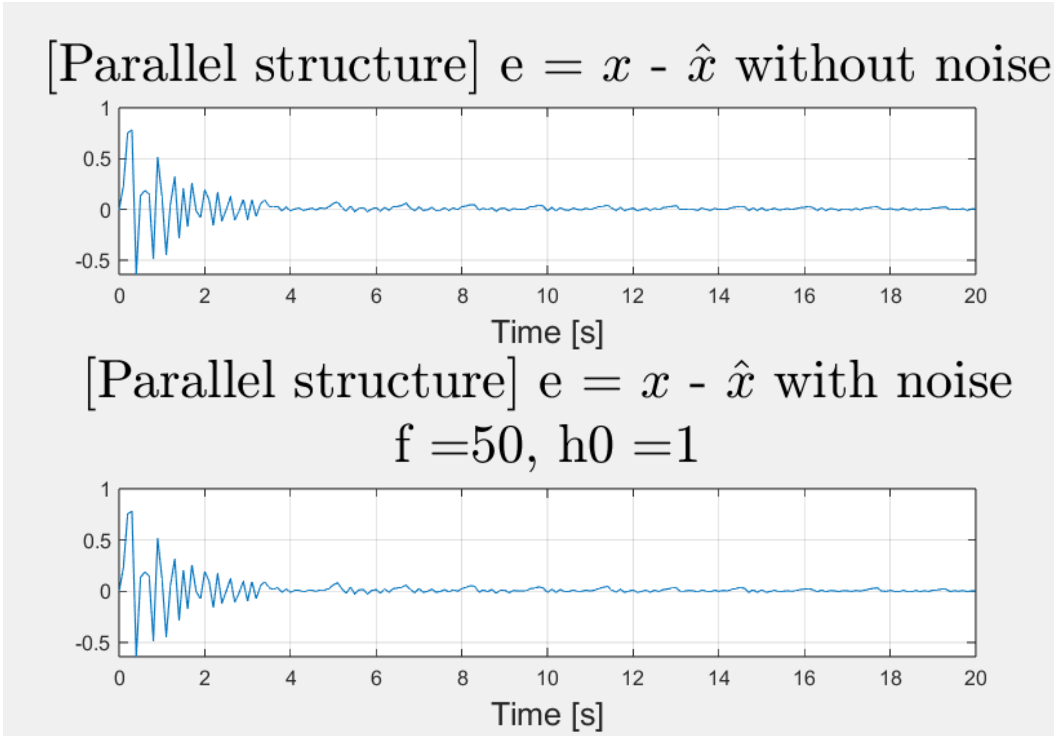

[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =0.5
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time [s]

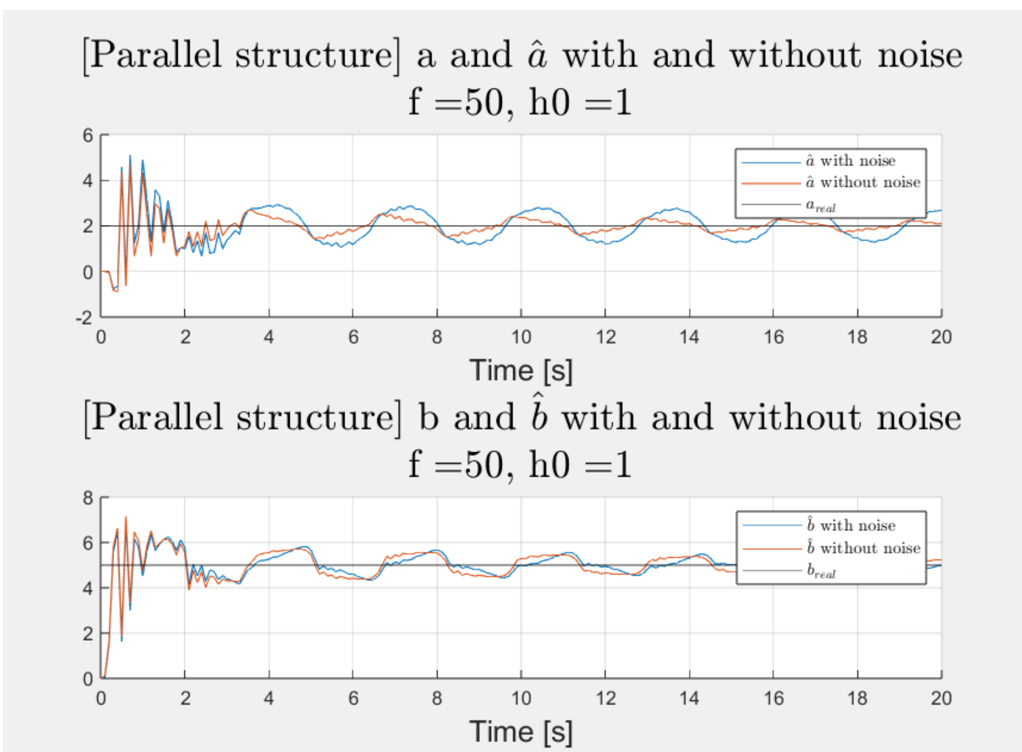


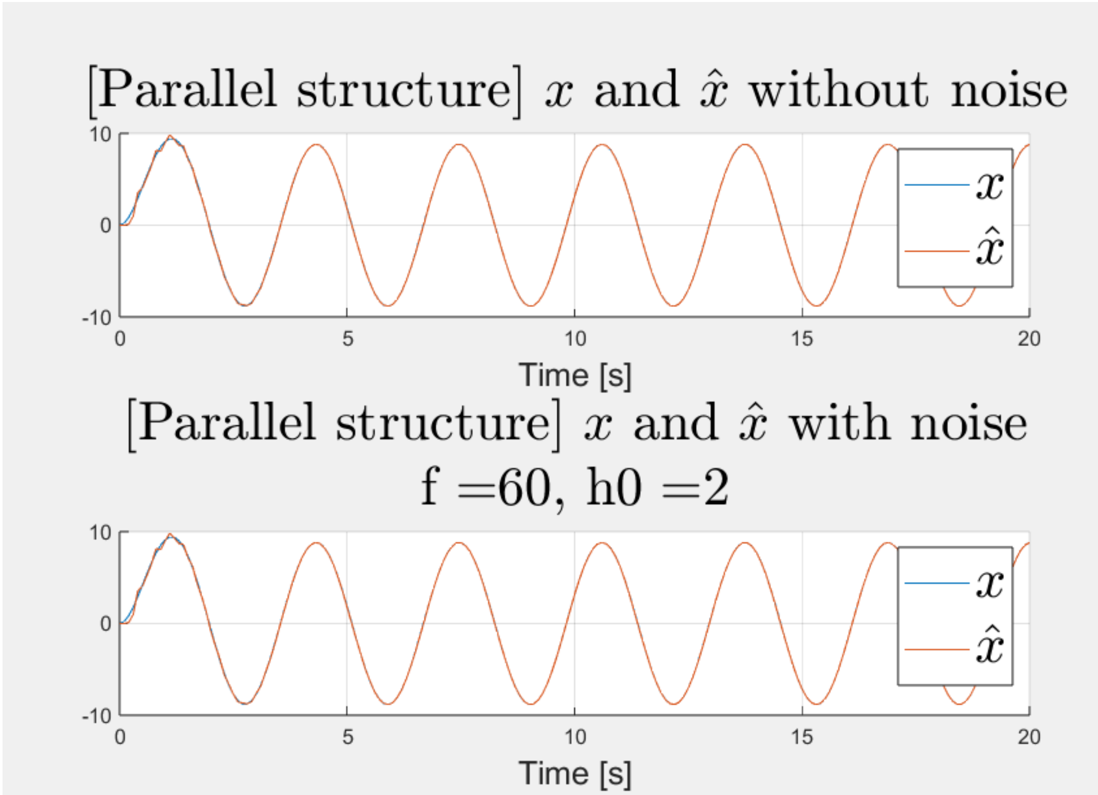
[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5
4
2
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5
6
4
2
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}

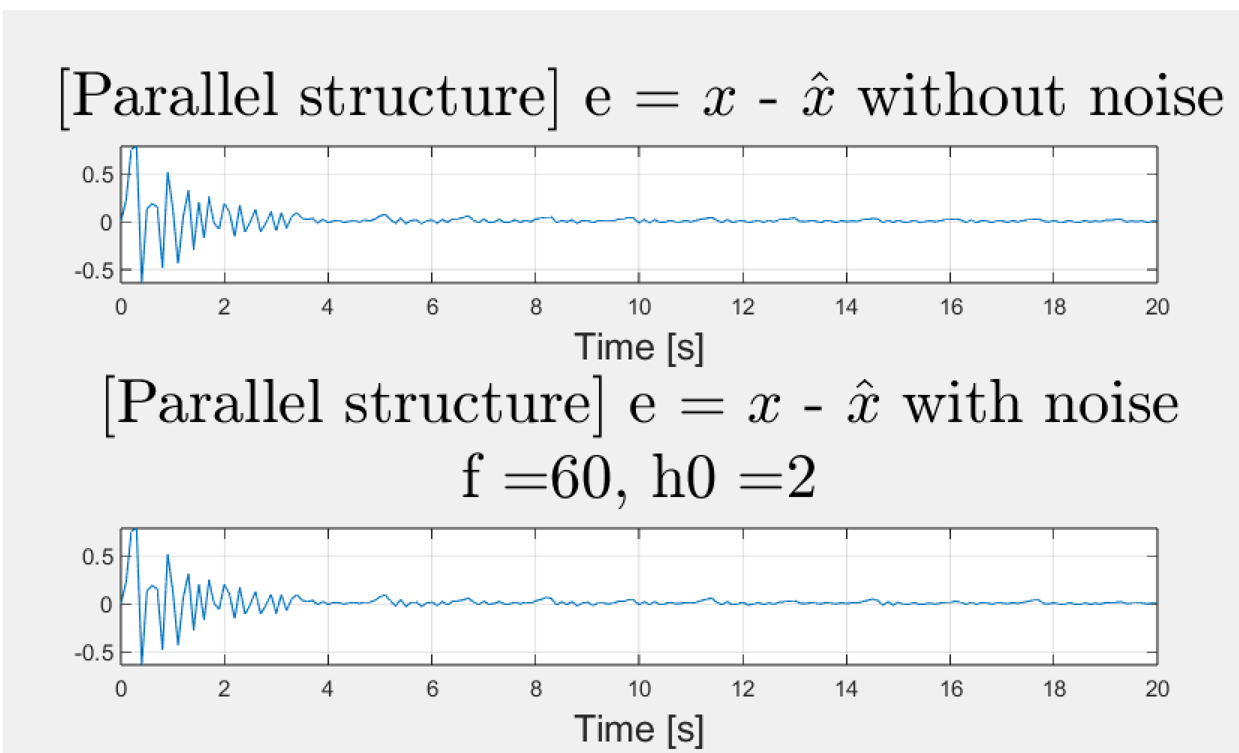


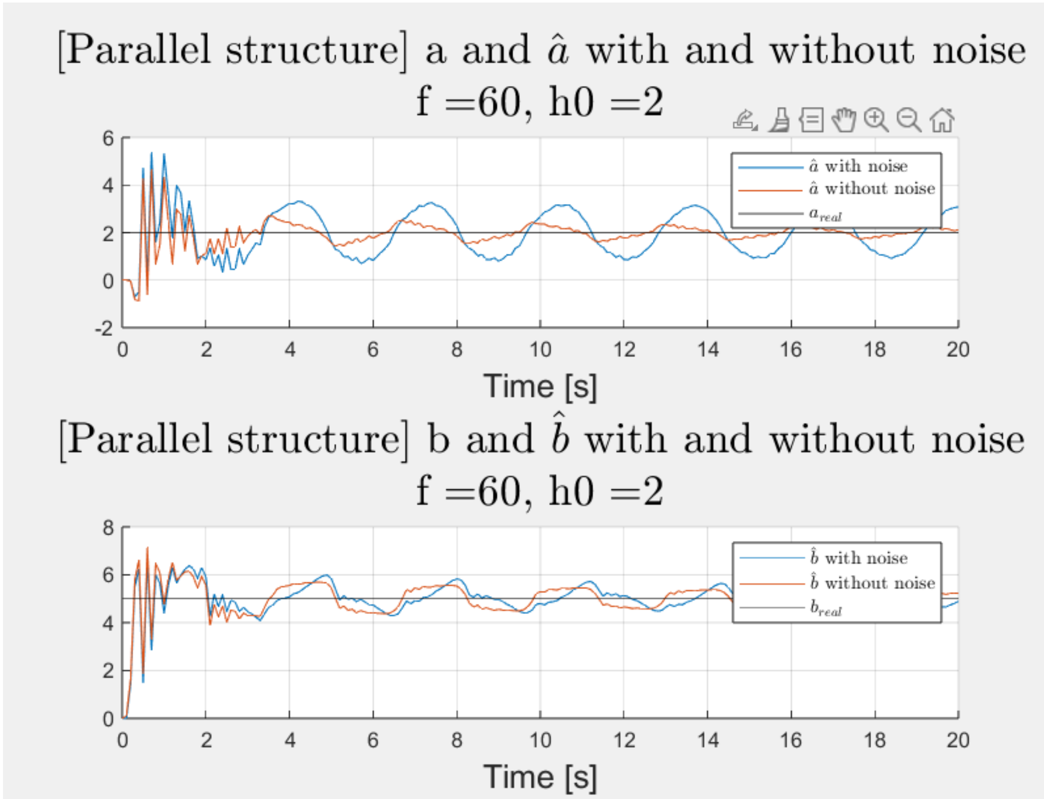
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ without noise
10
0
-10
0 5 10 15 20
Time [s]
x
$\hat{x}$
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =50, h0 =1
10
0
-10
0 5 10 15 20
Time [s]
x
$\hat{x}$

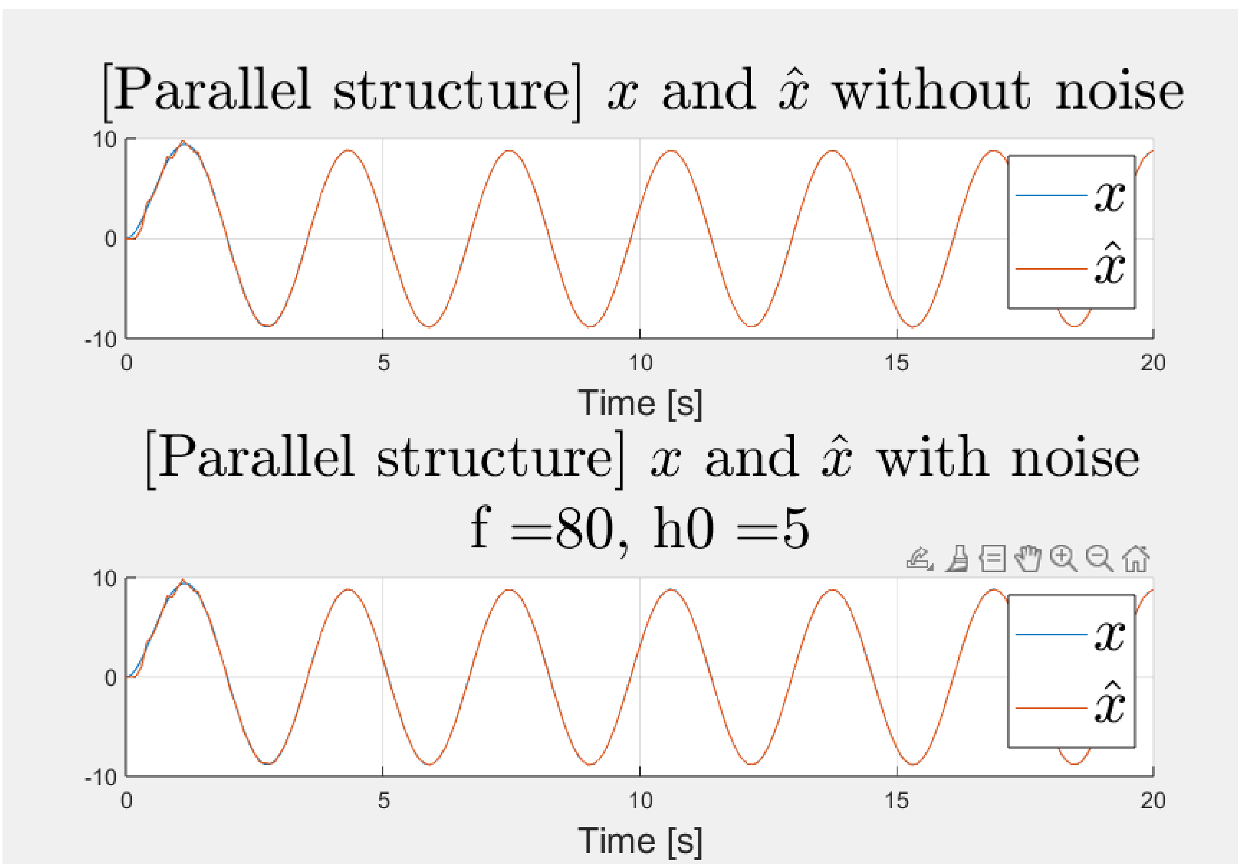

[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
1
0.5
0
-0.5
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =50, h0 =1
1
0.5
0
-0.5
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]

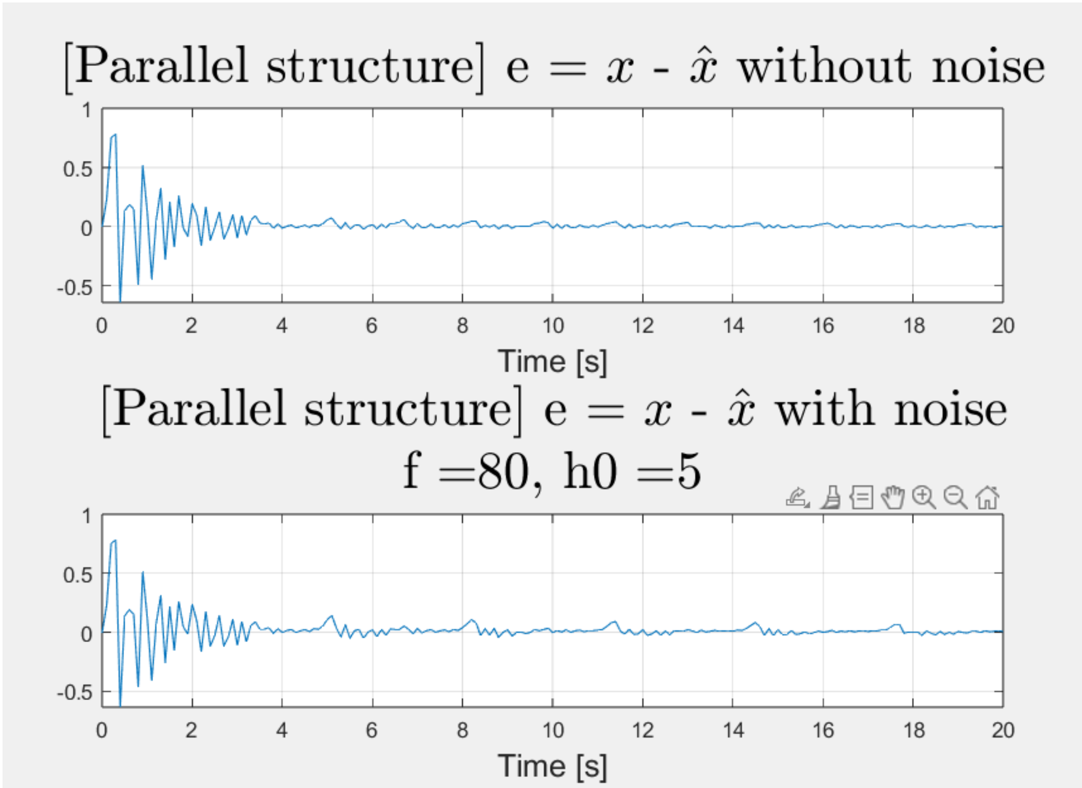

[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =50, h0 =1
6
4
2
0
-2
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =50, h0 =1
8
6
4
2
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
Time [s]
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}

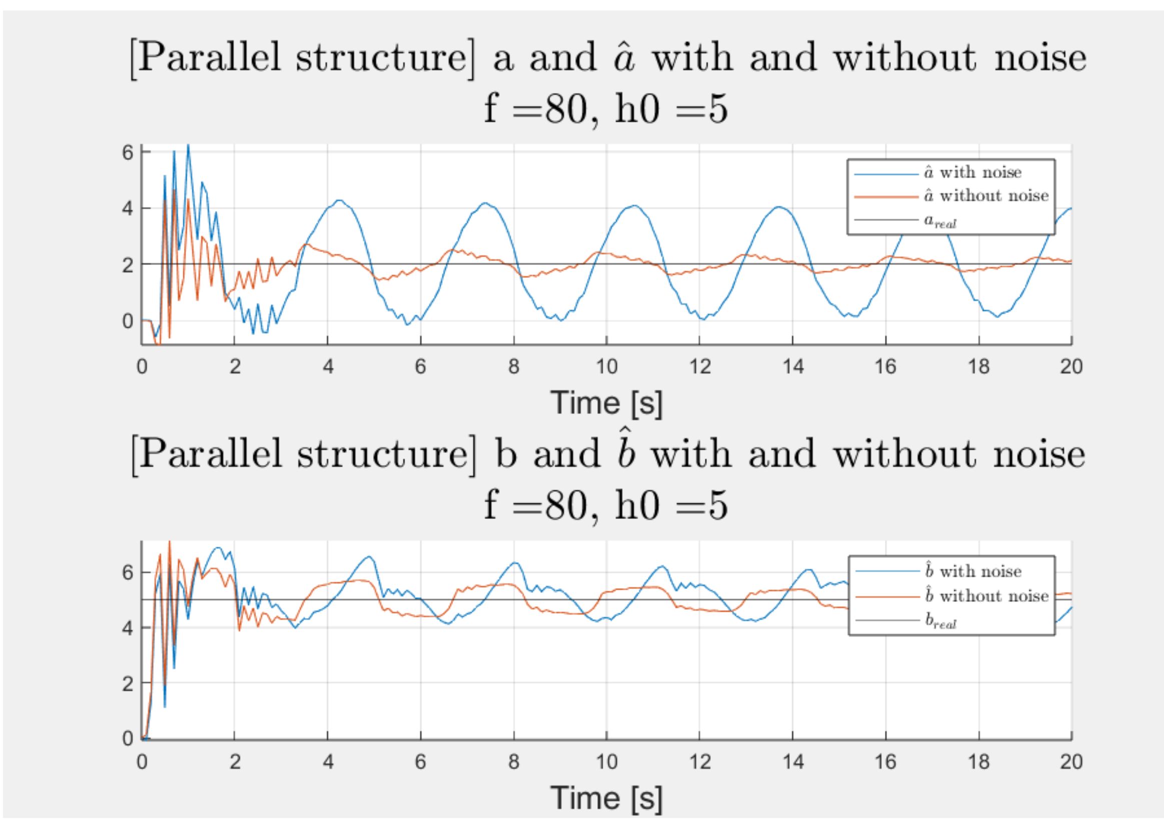

[Parallel structure] x and $\hat{x}$ without noise
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =2
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$

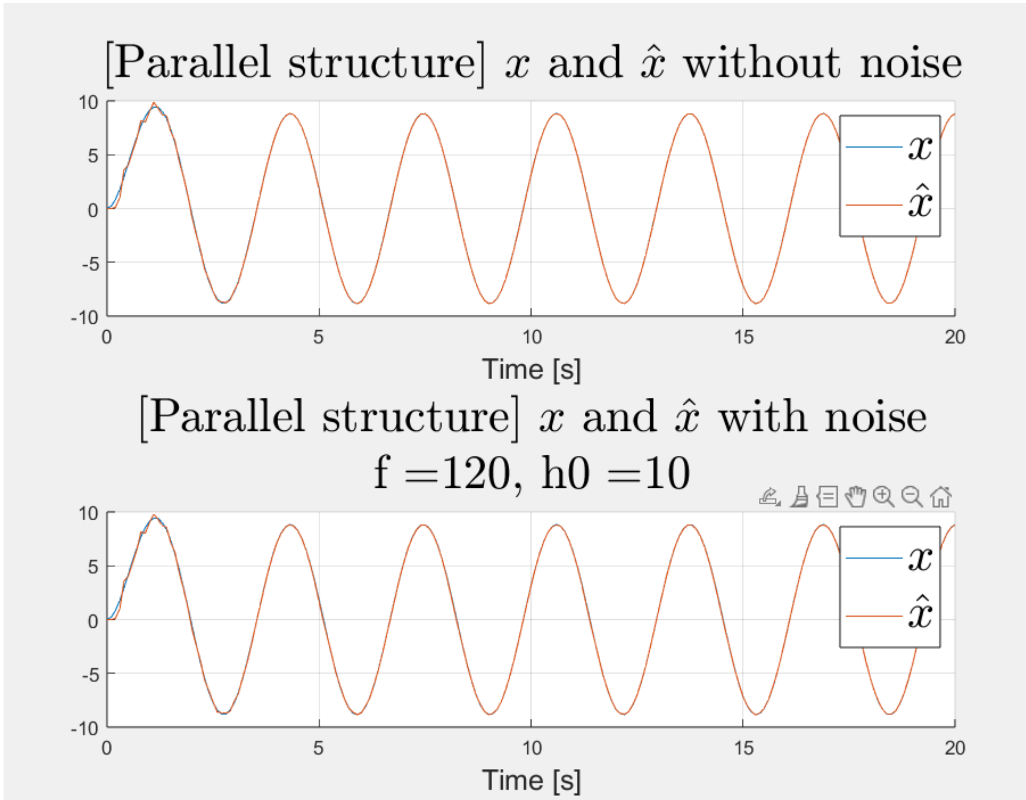

[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =2
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time [s]

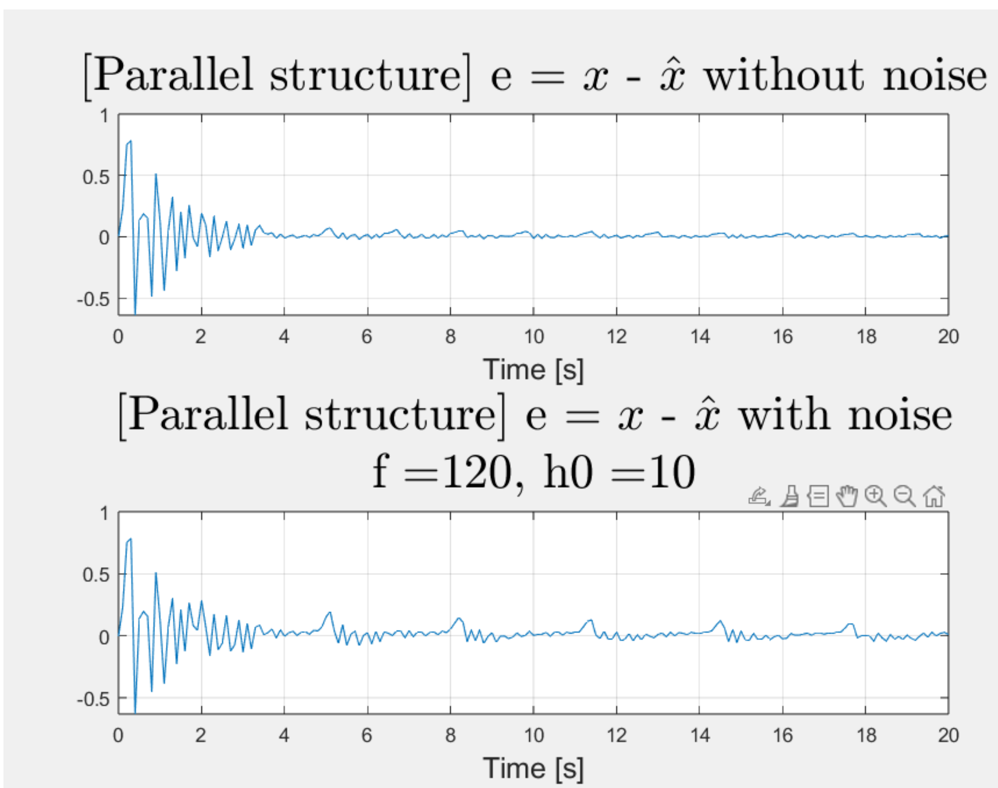

[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =60, h0 =2
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]
[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =60, h0 =2
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]

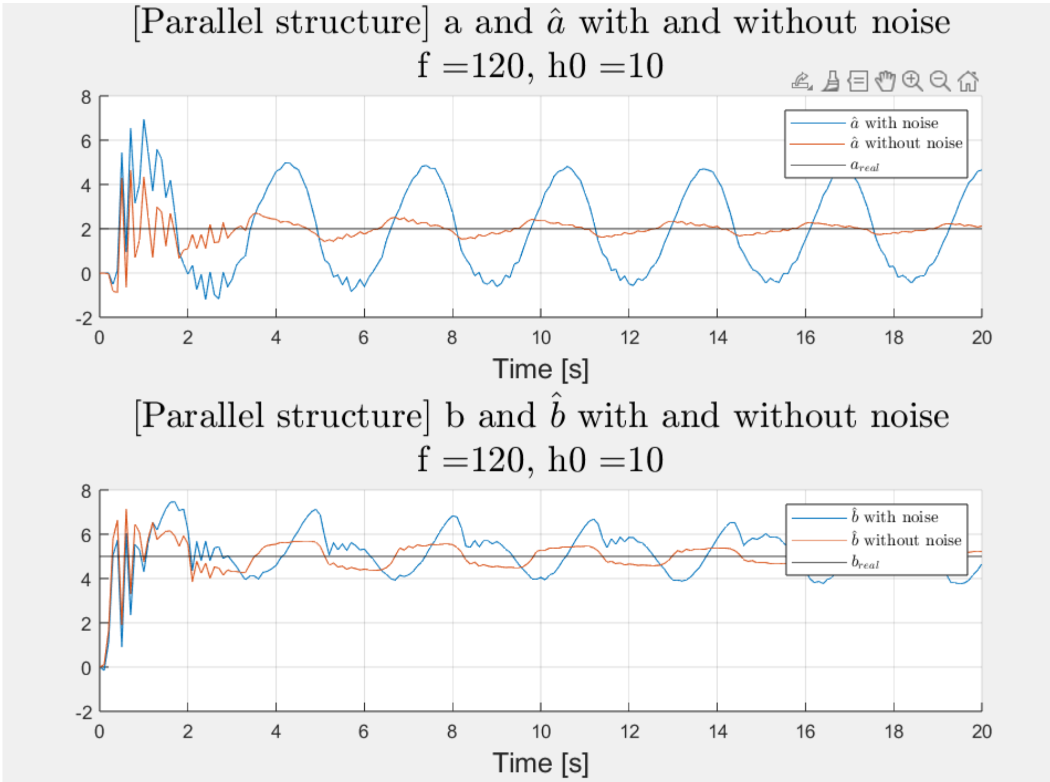

[Parallel structure] x and $\hat{x}$ without noise
x
$\hat{x}$
Time [s]
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =80, h0 =5
x
$\hat{x}$
Time [s]


[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =80, h0 =5
Time [s]


[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =80, h0 =5
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]
[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =80, h0 =5
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]


[Parallel structure] x and $\hat{x}$ without noise
10
5
0
-5
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =120, h0 =10
10
5
0
-5
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$


[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time [s]
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =120, h0 =10
1
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Time [s]



Από τα παραπάνω γραφήματα συμπεραίνουμε πως το σφάλμα επηρεάζεται περισσότερο από το πλάτος του θορύβου παρά από την συχνότητα του.

Αναλύοντας τώρα την μεικτή δομή του συστήματος έχουμε:

$$\dot{x} = -ax + bu = -\theta_1 x + \theta_2 u$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x})$$

Για τους εκτιμητές θα γίνει η επιλογή (σύμφωνα με τις σημειώσεις)

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e x$$
$$\dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 e u$$

Ορίζοντας τώρα τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \hat{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax + bu = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 ex = -\gamma_1 ex_1 \\ \dot{x_3} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu \\ \dot{x_4} = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1\hat{x} + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \bar{x}) = -x_2x_4 + x_3u + \theta_m e \end{cases}$$

Το σφάλμα πρόβλεψης με και χωρίς θόρυβο αντίστοιχα γίνεται:

$$e = x - \hat{x} = x_1 - x_4, \text{ χωρίς θόρυβο}$$

$$e = x + \eta - \hat{x} = x_1 + \eta - x_4, \text{ με θόρυβο}$$

Με αντικατάσταση του θορύβου στο σύστημα εξισώσεων κατάστασης έχουμε:

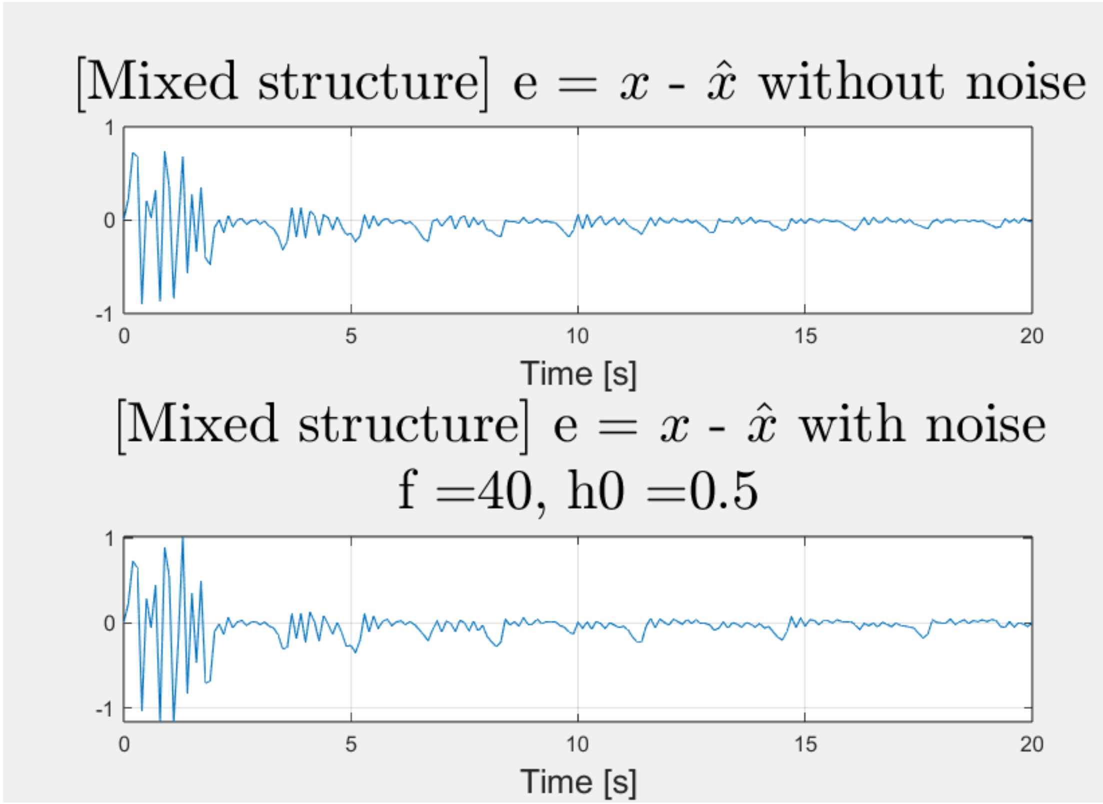
Χωρίς θόρυβο:

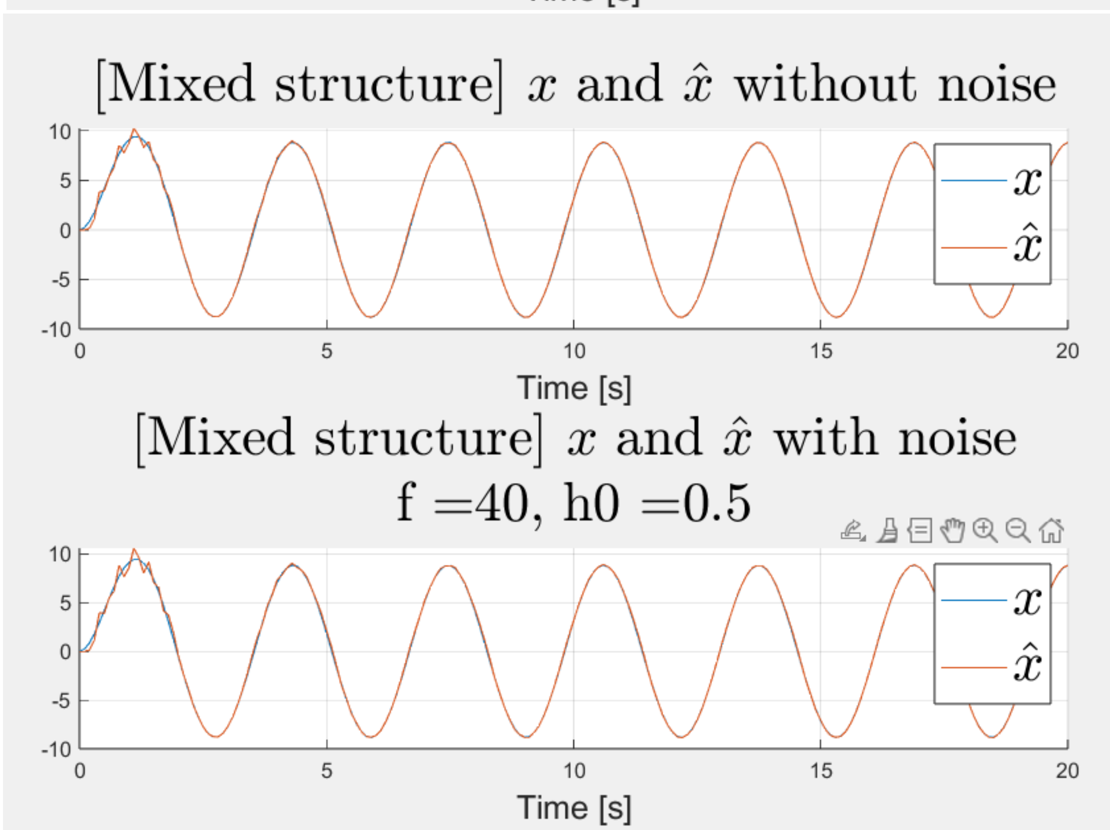
$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_1(x_1 - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2x_4 + x_3u + \theta_m(x_1 - x_4) \end{cases}$$

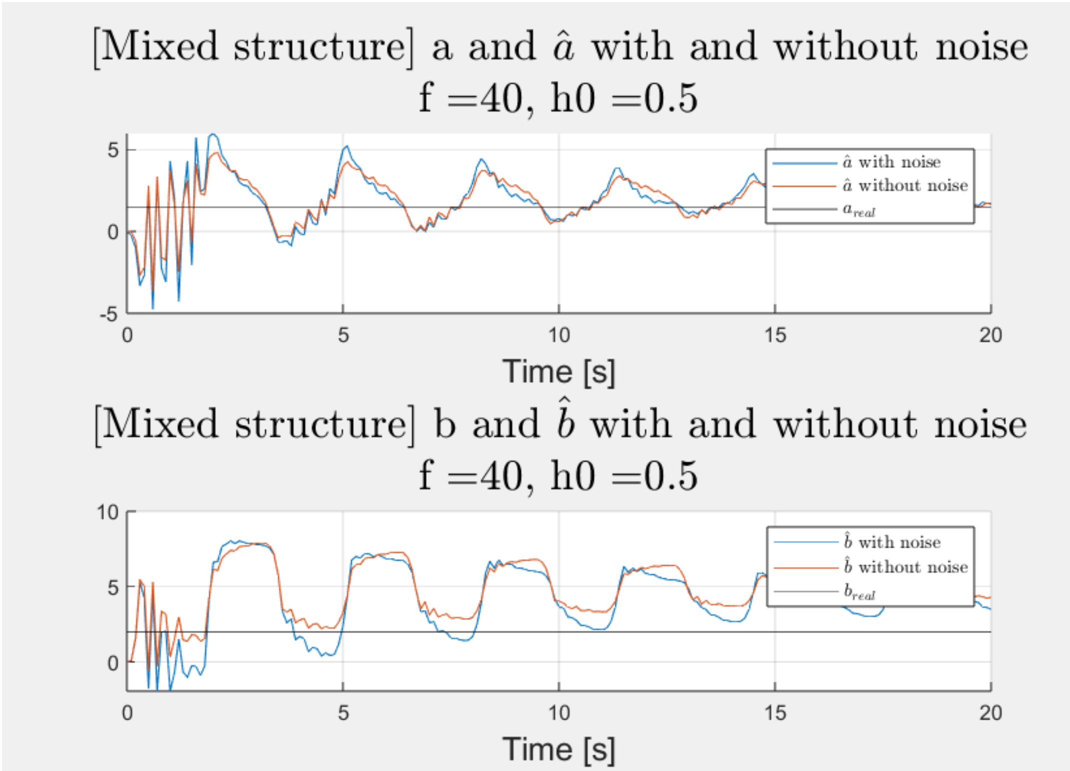
Με θόρυβο:

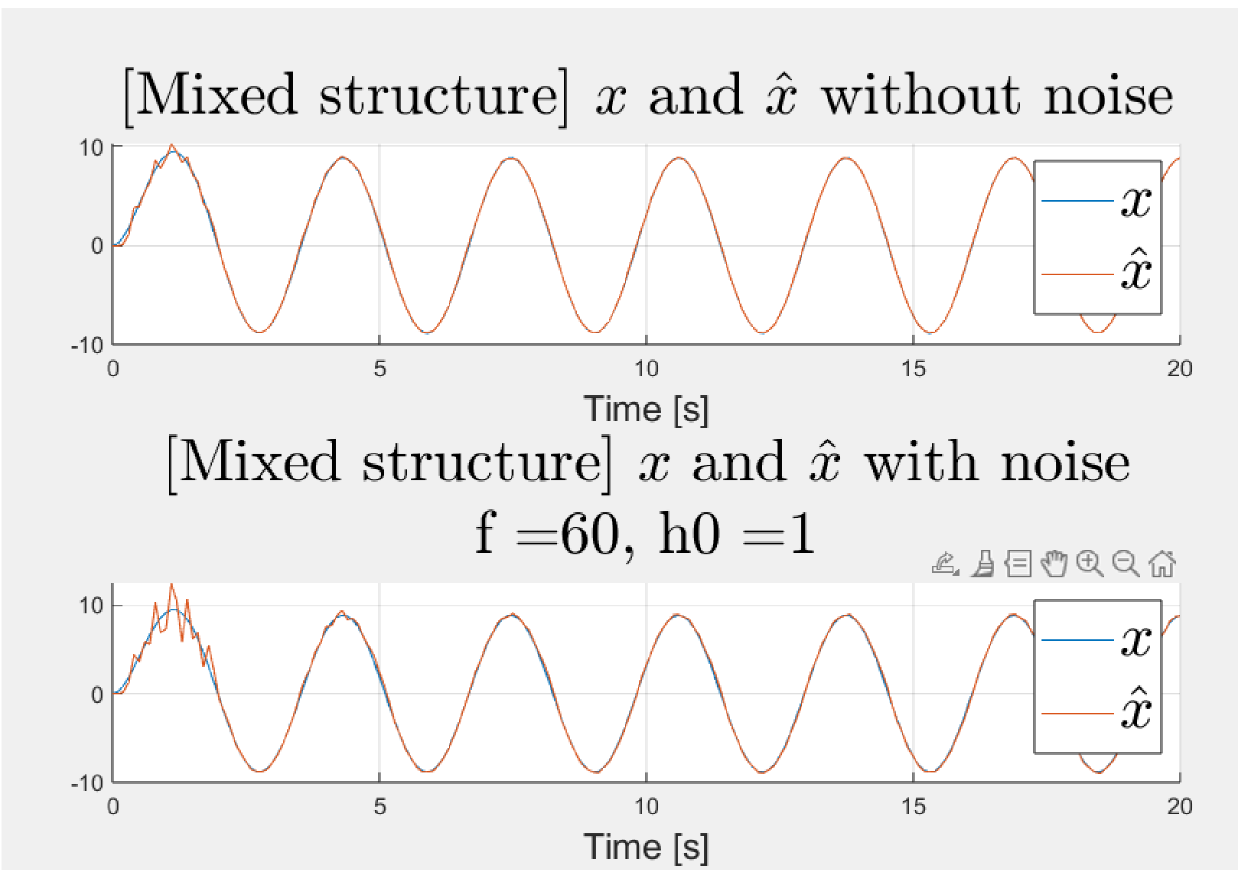
$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1(x_1 + \eta)(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_2x_4 + x_3u + \theta_m(x_1 + \eta - x_4) \end{cases}$$

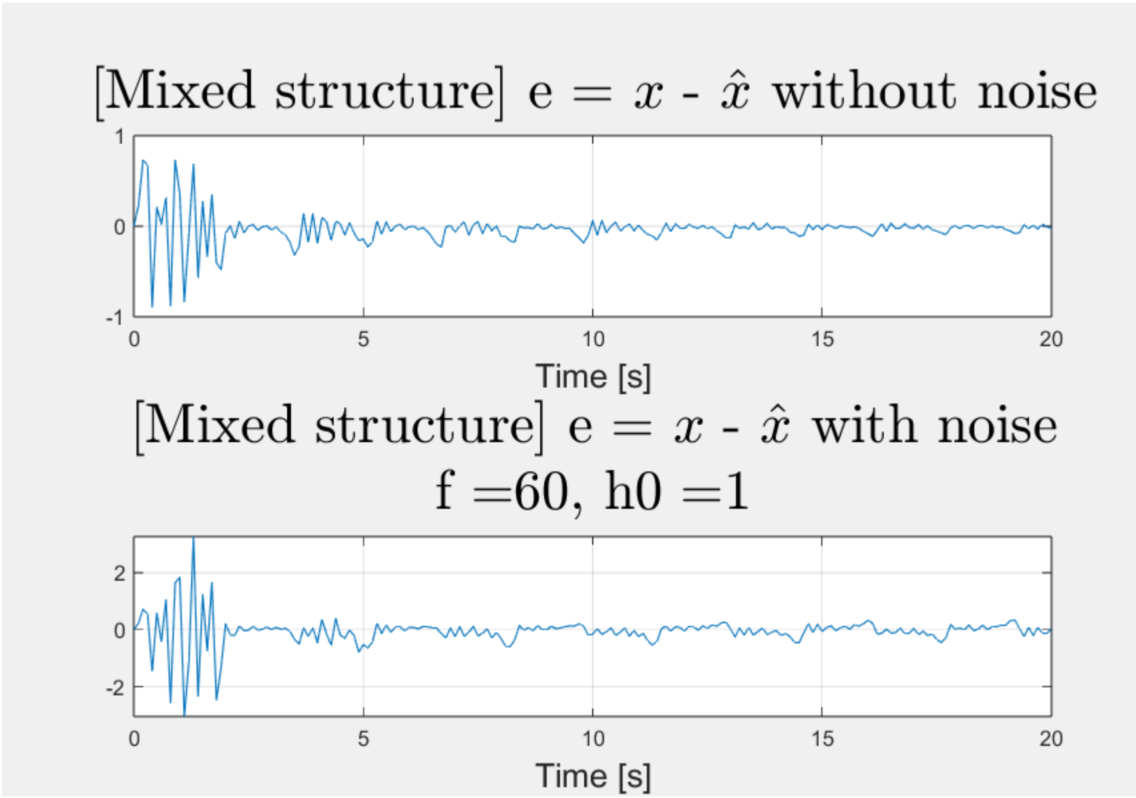
Μετά την επίλυση των εξισώσεων καθενός από τα δύο συστήματα για διαφορετικές τιμές πλάτους θορύβου και συχνότητας προέκυψαν τα εξής διαγράμματα:

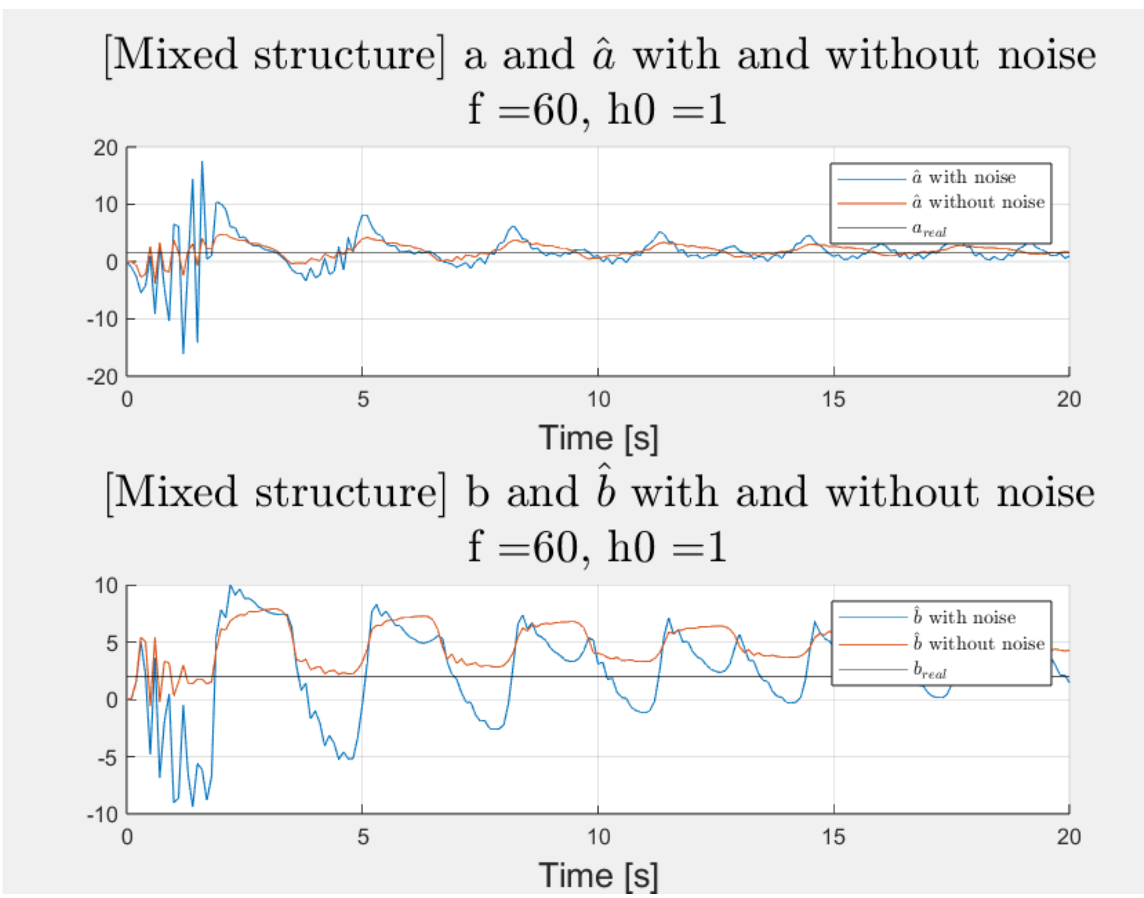

[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
1
0
-1
0
5
10
15
20
Time [s]
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =0.5
1
0
-1
0
5
10
15
20
Time [s]

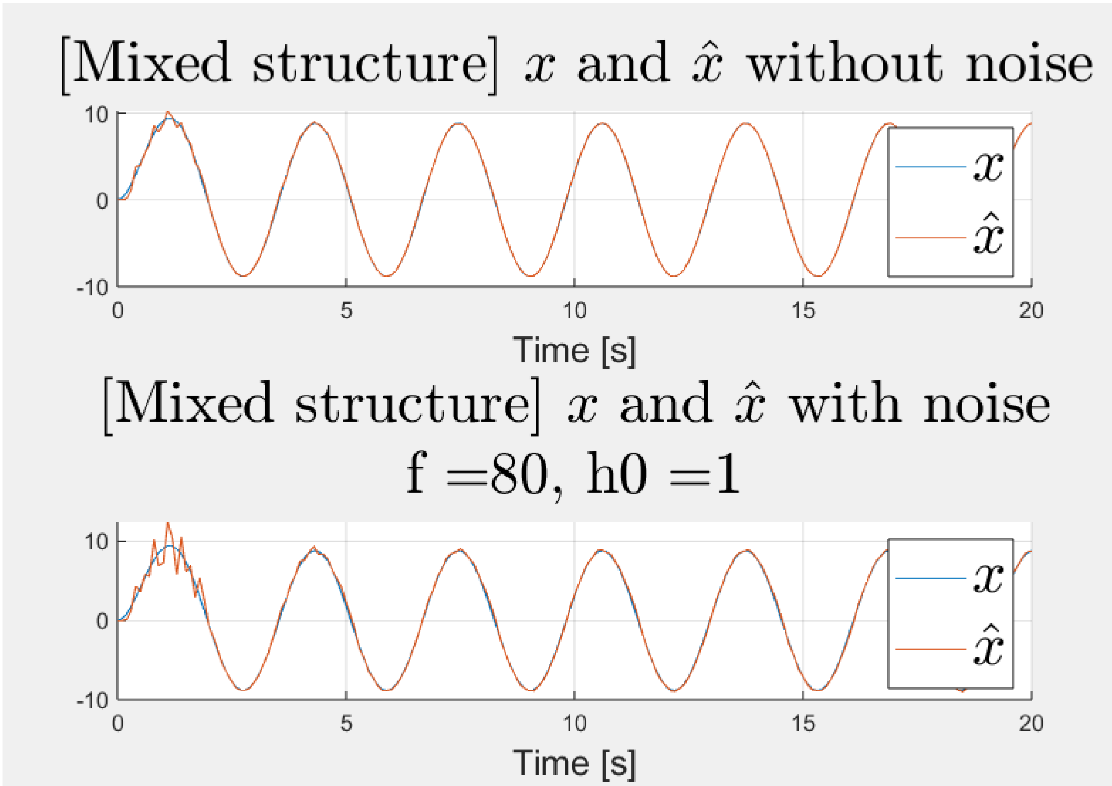

[Mixed structure] x and $\hat{x}$ without noise
10
5
0
-5
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$
[Mixed structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =0.5
10
5
0
-5
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$

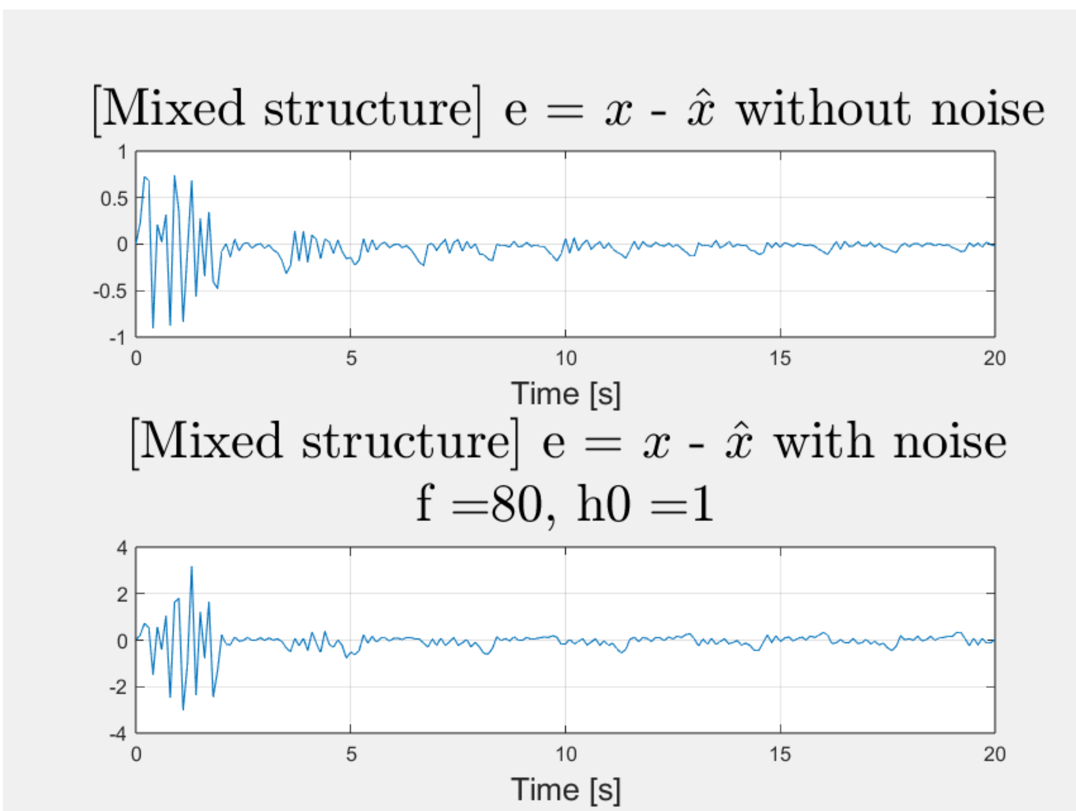

[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
5
0
-5
0
5
10
15
20
Time [s]
[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
10
5
0
0
5
10
15
20
Time [s]

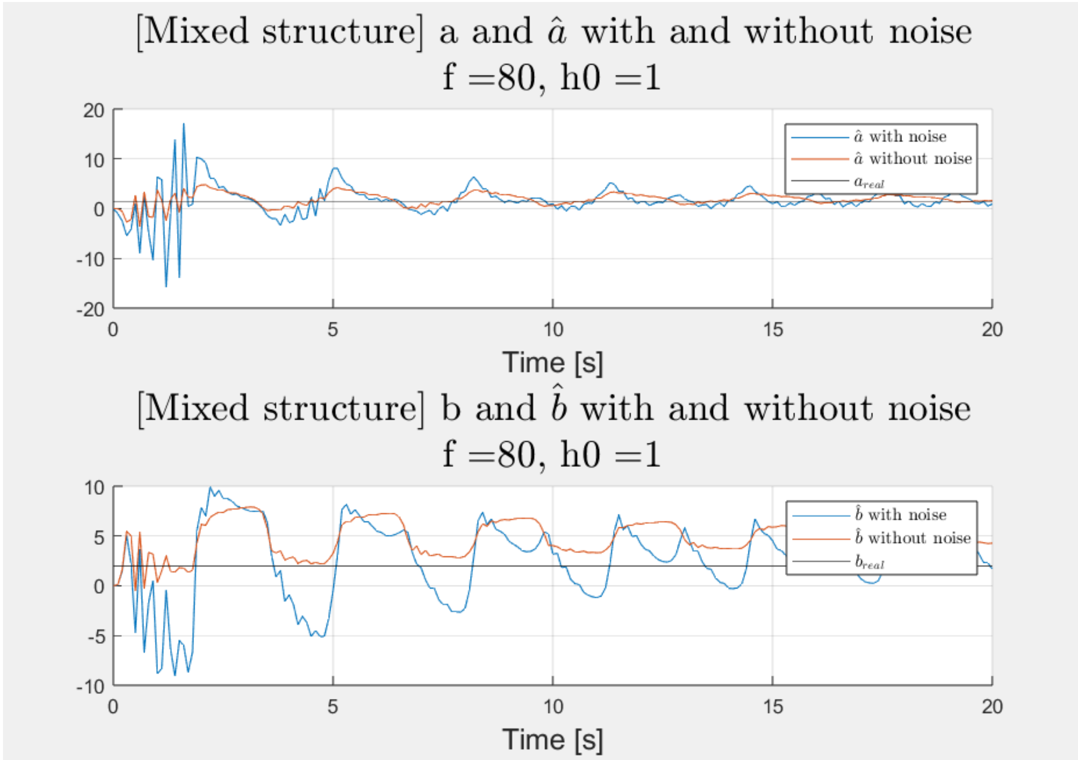

[Mixed structure] x and $\hat{x}$ without noise
x
$\hat{x}$
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
[Mixed structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =1
x
$\hat{x}$
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]

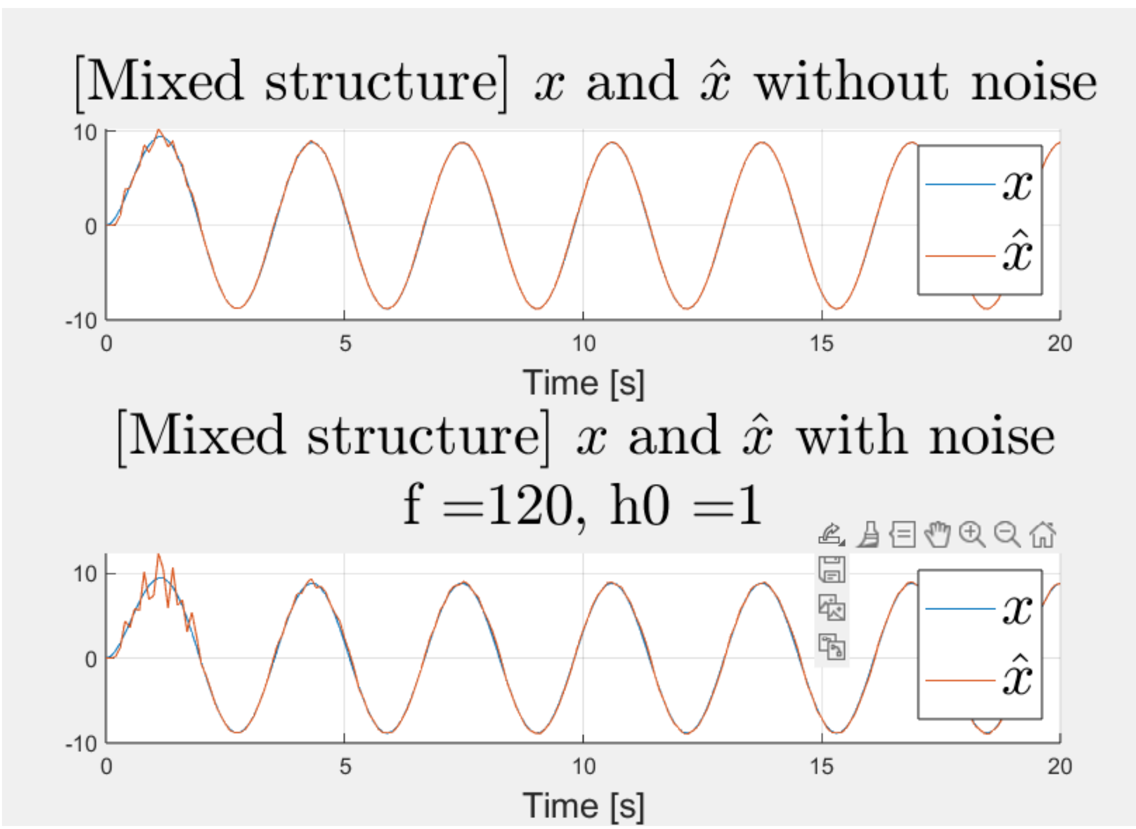

[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Time [s]
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =1
Time [s]

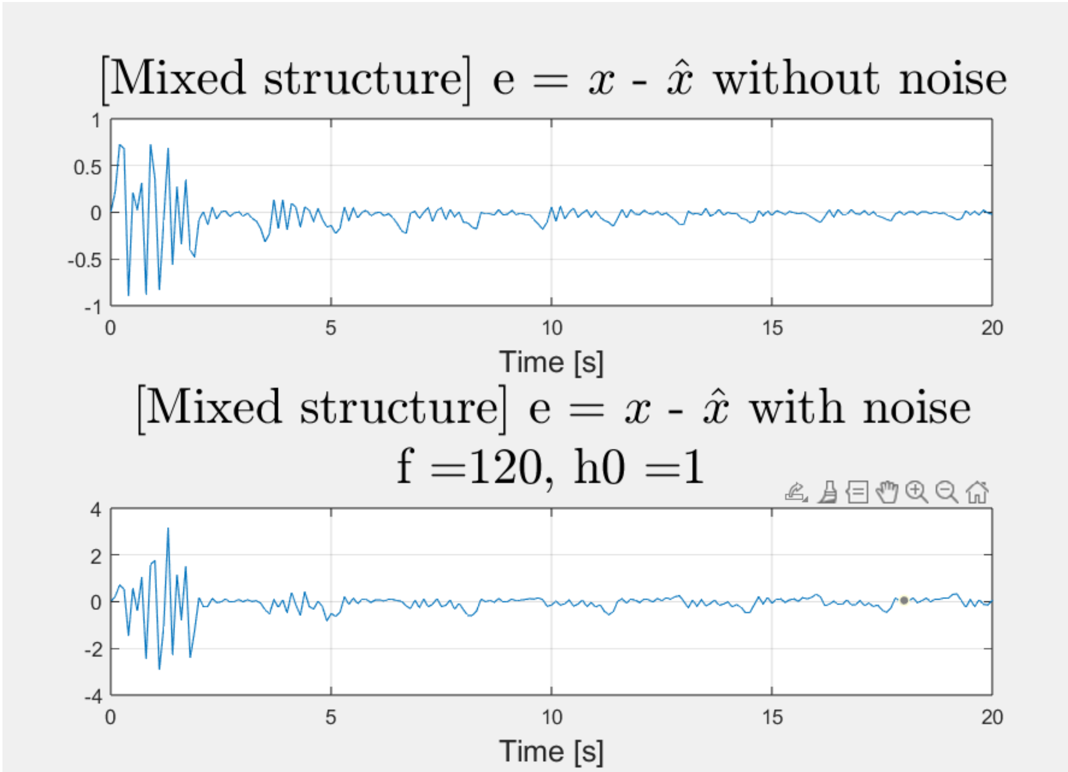

[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =60, h0 =1
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]
[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =60, h0 =1
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]


[Mixed structure] x and $\hat{x}$ without noise
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$
[Mixed structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =80, h0 =1
10
0
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$

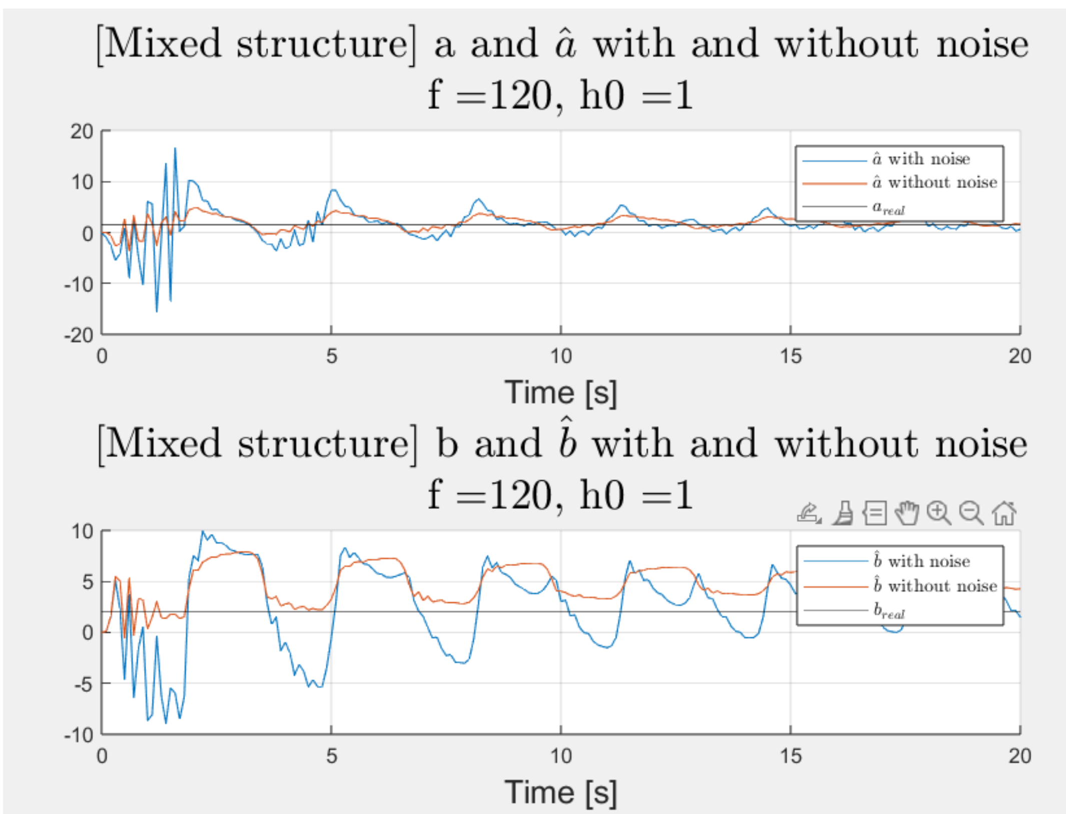

[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
Time [s]
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =80, h0 =1
4
2
0
-2
-4
0
5
10
15
20
Time [s]


[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =80, h0 =1
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]
[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =80, h0 =1
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]

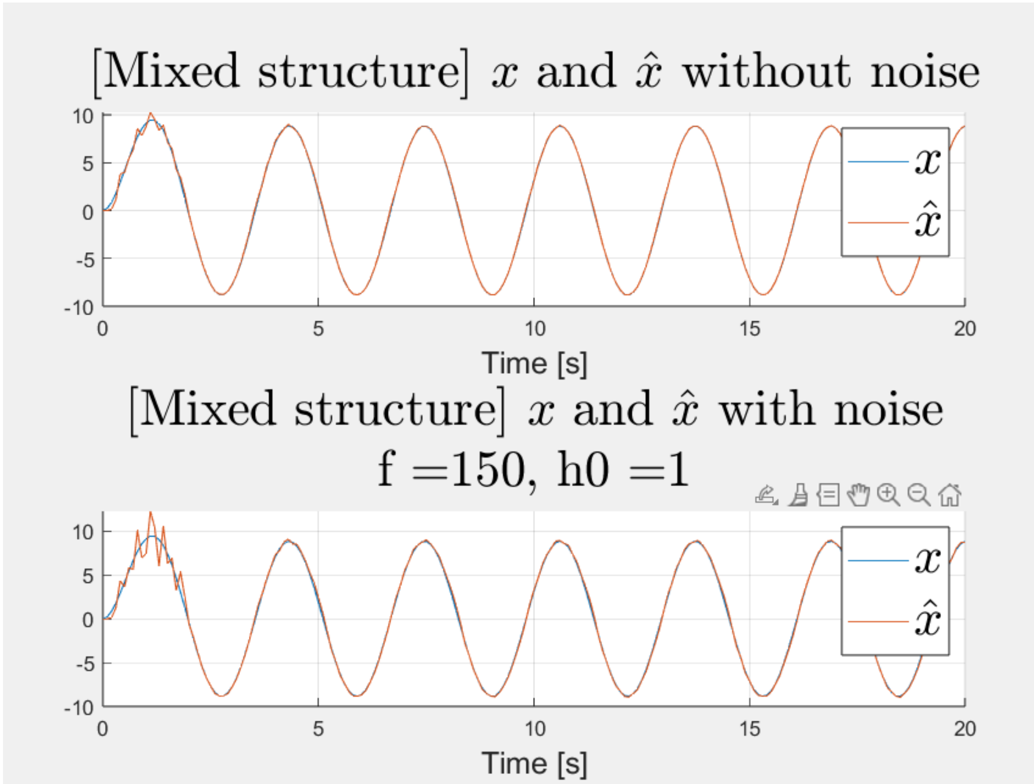

[Mixed structure] x and $\hat{x}$ without noise
x
$\hat{x}$
Time [s]
[Mixed structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =120, h0 =1
x
$\hat{x}$
Time [s]

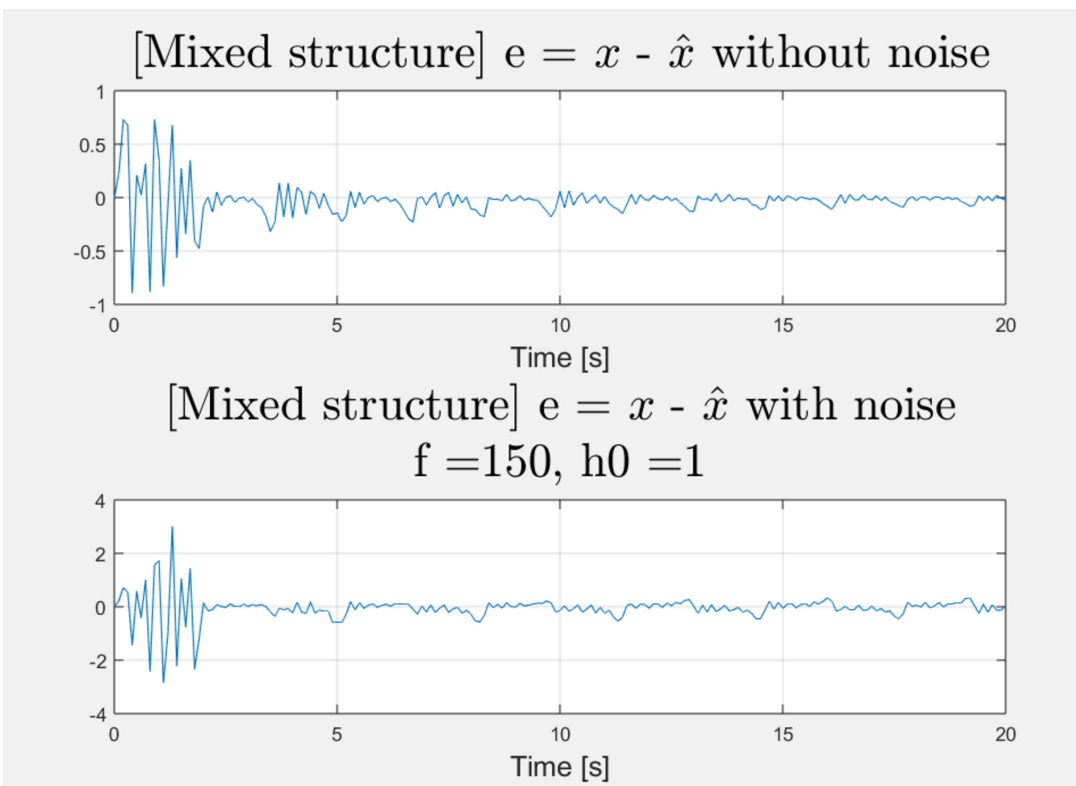


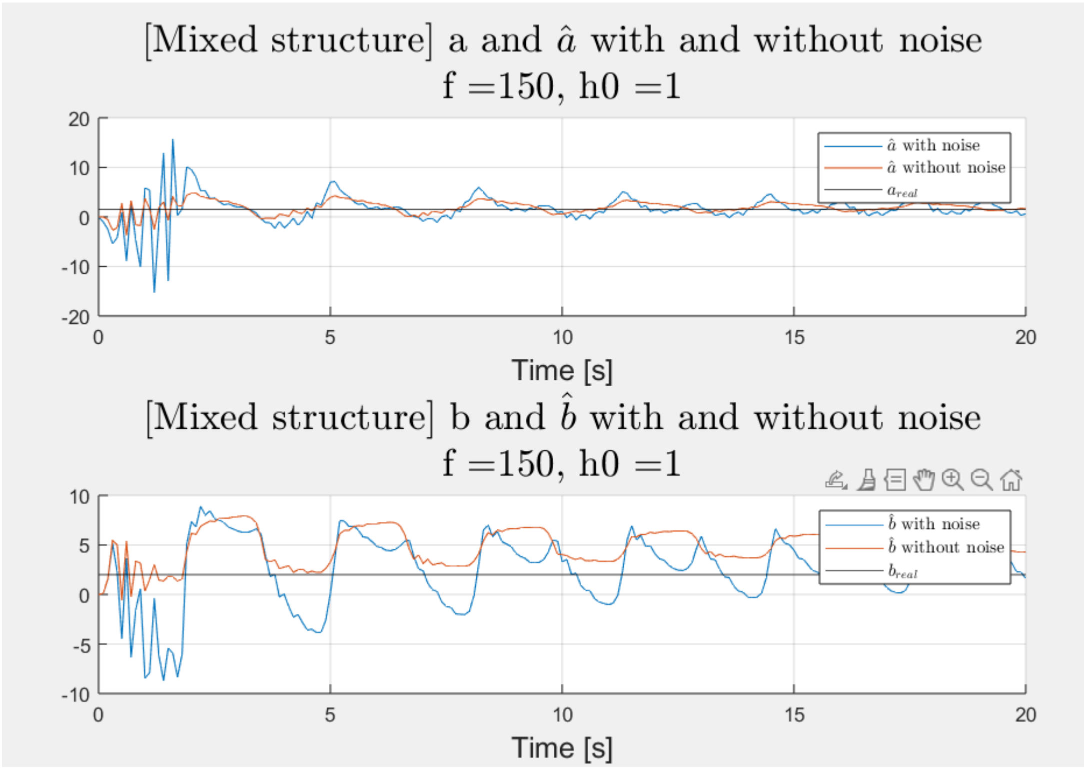
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Time [s]
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =120, h0 =1
Time [s]



[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =120, h0 =1
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]
[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =120, h0 =1
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]


[Mixed structure] x and $\hat{x}$ without noise
10
5
0
-5
-10
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$
[Mixed structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =150, h0 =1
Time [s]


[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
1
0.5
0
-0.5
-1
Time [s]
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =150, h0 =1
4
2
0
-2
-4
Time [s]



Παρατηρούμε ότι η ταλάντωση των εκτιμήσεων γύρω από τις πραγματικές τιμές είναι πιο έντονη καθώς αυξάνεται το πλάτος του θορύβου, και μάλιστα πιο έντονη από την παράλληλη δομή, καθώς στην μεικτή δομή ο θόρυβος εμφανίζεται στο τετράγωνο, ενώ στην παράλληλη στην πρώτη δύναμη. Επίσης , για τιμές πλάτους μεγαλύτερες του 1, οι εκτιμήσεις δεν συγκλίνουν πλέον. Η εξάρτηση των αποτελεσμάτων από την συχνότητα φαίνεται να είναι μηδαμινή.

Θέμα 3^o

Θα ακολουθήσουμε την ίδια μεθοδολογία με το θέμα 2 , απλά πλέον τα προς εκτίμηση μεγέθη είναι πίνακες

Για την παράλληλη δομή έχουμε:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

το οποίο σε μορφή εξισώσεων είναι:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \end{cases}$$

Θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης για την παράλληλη δομή:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x_1}} \\ \dot{\hat{x_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a_{1,1}} & \hat{a_{1,2}} \\ \hat{a_{2,1}} & \hat{a_{2,2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b_1} \\ \hat{b_2} \end{bmatrix} u \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \end{cases}$$

Για τον εκτιμητή του A θεωρούμε:

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 e \hat{x}^\top \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a_{1,1}}} & \dot{\hat{a_{1,2}}} \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} & \dot{\hat{a_{2,2}}} \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x_1} \\ x_2 - \hat{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x_1} & \hat{x_2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a_{1,1}}} & \dot{\hat{a_{1,2}}} \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} & \dot{\hat{a_{2,2}}} \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} \hat{x_1}(x_1 - \hat{x_1}) & \hat{x_2}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \hat{x_1}(x_2 - \hat{x_2}) & \hat{x_2}(x_2 - \hat{x_2}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{\hat{a_{1,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{a_{1,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{a_{2,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{\hat{a_{2,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_2 - \hat{x_2}) \end{cases}$$

Για τον εκτιμητή του B θεωρούμε:

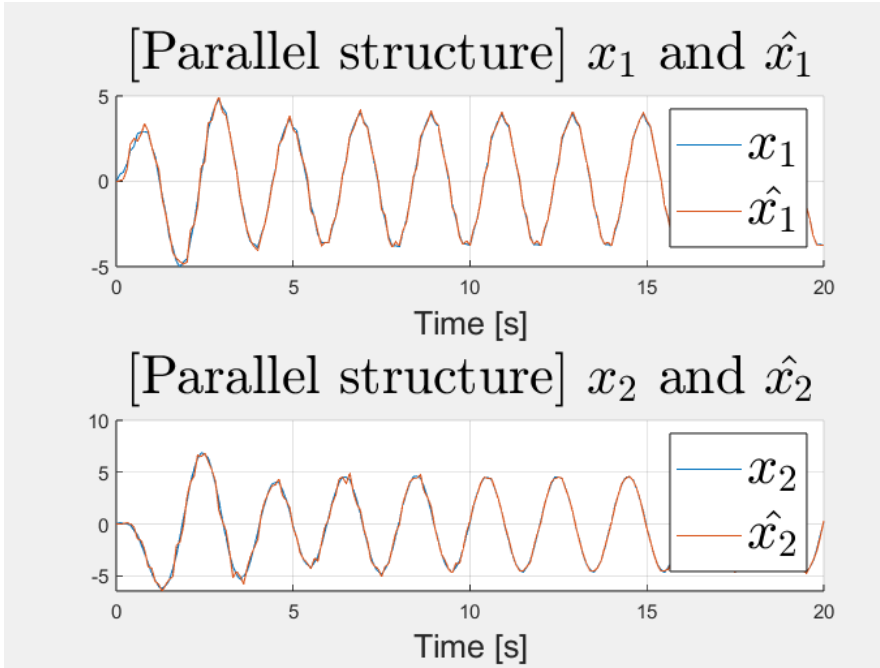
$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 u e \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{b_1}} \\ \dot{\hat{b_2}} \end{bmatrix} = \gamma_2 u \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x_1} \\ x_2 - \hat{x_2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{\hat{b_1}} = \gamma_2 u(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{\hat{b_2}} = \gamma_2 u(x_2 - \hat{x_2}) \end{cases}$$

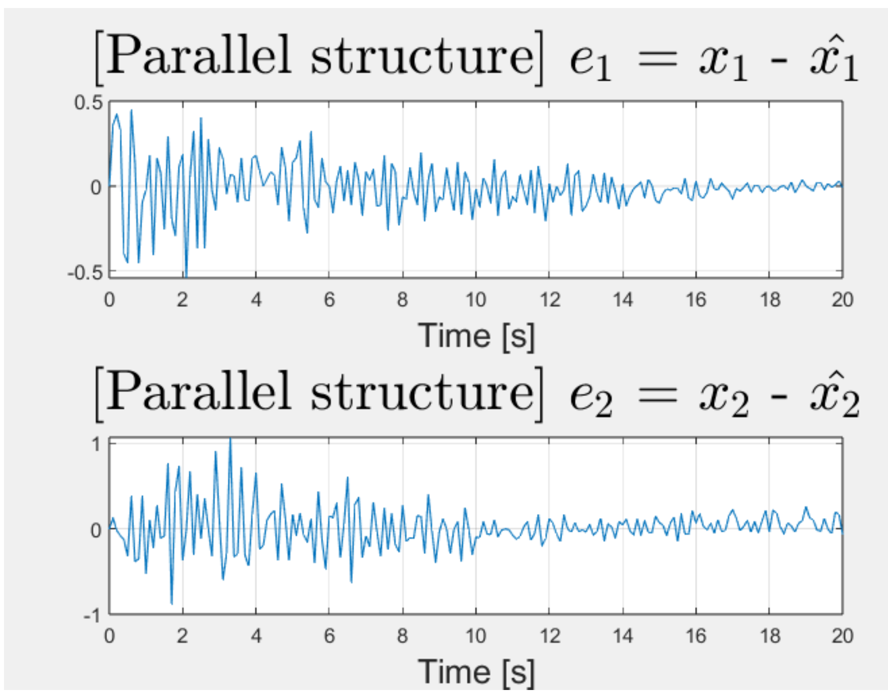
Αν ορίσουμε τις παρακάτω καταστάσεις, τότε προκύπτουν οι εξής εξισώσεις κατάστασης:

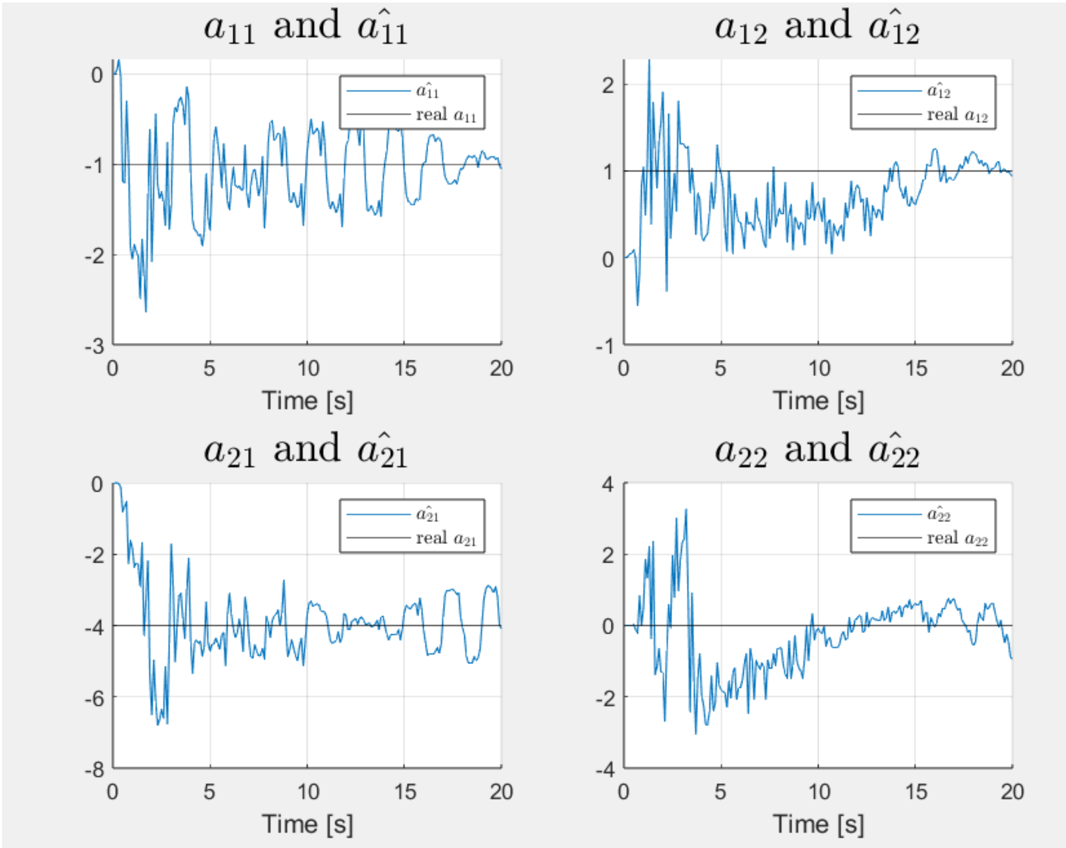
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \hat{a_{1,1}} \\ y_4 = \hat{a_{1,2}} \\ y_5 = \hat{a_{2,1}} \\ y_6 = \hat{a_{2,2}} \\ y_7 = \hat{b_1} \\ y_8 = \hat{b_2} \\ y_9 = \hat{x_1} \\ y_{10} = \hat{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y_1} = \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{y_2} = \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \\ \dot{y_3} = \dot{\hat{a_{1,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{y_4} = \dot{\hat{a_{1,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{y_5} = \dot{\hat{a_{2,1}}} = \gamma_1 \hat{x_1}(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{y_6} = \dot{\hat{a_{2,2}}} = \gamma_1 \hat{x_2}(x_2 - \hat{x_2} \\ \dot{y_7} = \dot{\hat{b_1}} = \gamma_2 u(x_1 - \hat{x_1}) \\ \dot{y_8} = \dot{\hat{b_2}} = \gamma_2 u(x_2 - \hat{x_2}) \\ \dot{y_9} = \dot{\hat{x_1}} = \hat{a_{1,1}}\hat{x_1} + \hat{a_{1,2}}\hat{x_2} + +\hat{b_1}u \\ \dot{y_{10}} = \dot{\hat{x_2}} = \hat{a_{2,1}}\hat{x_1} + \hat{a_{2,2}}\hat{x_2} + +\hat{b_2}u \end{cases} \Leftrightarrow$$

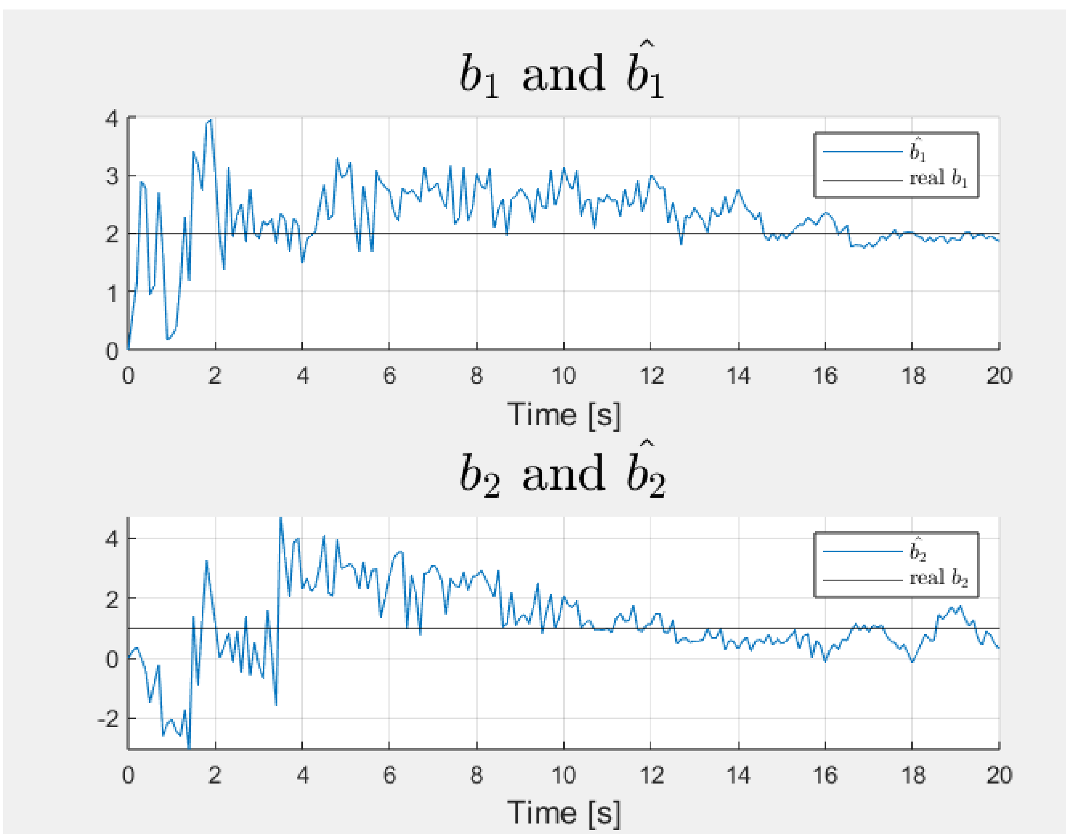
$$\begin{cases} \dot{y_1} = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + b_1 u \\ \dot{y_2} = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + b_2 u \\ \dot{y_3} = \gamma_1 y_9(y_1 - y_9) \\ \dot{y_4} = \gamma_1 y_{10}(y_1 - y_9) \\ \dot{y_5} = \gamma_1 y_9(y_2 - y_{10}) \\ \dot{y_6} = \gamma_1 y_{10}(y_2 - y_{10}) \\ \dot{y_7} = \gamma_2 u(y_1 - y_9) \\ \dot{y_8} = \gamma_2 u(y_2 - y_{10}) \\ \dot{y_9} = y_3 y_9 + y_4 y_{10} + y_7 u \\ \dot{y_{10}} = y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_8 u \end{cases}$$

Περνώντας αυτές τις εξισώσεις στην ode45 για $\gamma_1 = 10$ και $\gamma_2 = 15$ προκύπτουν τα παρακάτω γραφήματα:


[Parallel structure] x_1 and $\hat{x}_1$
x_1
$\hat{x}_1$
Time [s]
[Parallel structure] x_2 and $\hat{x}_2$
x_2
$\hat{x}_2$
Time [s]


[Parallel structure] $e_1 = x_1$ - $\hat{x}_1$
Time [s]
[Parallel structure] $e_2 = x_2$ - $\hat{x}_2$
Time [s]


a_{11} and $\hat{a_{11}}$
$\hat{a_{11}}$
real a_{11}
Time [s]
a_{12} and $\hat{a_{12}}$
$\hat{a_{12}}$
real a_{12}
Time [s]
a_{21} and $\hat{a_{21}}$
$\hat{a_{21}}$
real a_{21}
Time [s]
a_{22} and $\hat{a_{22}}$
$\hat{a_{22}}$
real a_{22}
Time [s]


b_1 and $\hat{b_1}$
$\hat{b_1}$
real b_1
Time [s]
b_2 and $\hat{b_2}$
$\hat{b_2}$
real b_2
Time [s]

Για την μεικτή δομή ξεκινάμε από την περιγραφή του πραγματικού συστήματος:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a_{1,1}} & \hat{a_{1,2}} \\ \hat{a_{2,1}} & \hat{a_{2,2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b_1} \\ \hat{b_2} \end{bmatrix} u \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \end{cases}$$

Αντίστοιχα, το σύστημα αναγνώρισης στην μεικτή δομή είναι:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \widehat{a_{11}}x_1 + \widehat{a_{12}}x_2 + \widehat{b_1}u - \theta_{11}(x_1 - \widehat{x_1}) - \theta_{12}(x_2 - \widehat{x_2})$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \widehat{a_{21}}x_1 + \widehat{a_{22}}x_2 + \widehat{b_2}u - \ -\theta_{21}(x_1 - \widehat{x_1}) - \theta_{22}(x_2 - \widehat{x_2})$$

Για τις εκτιμήσεις έχουμε:

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 \hat{x} e^T$$

ή σε μορφή εξισώσεων:

$$\dot{\widehat{a_{11}}} = \gamma_1 x_1 (x_1 - \widehat{x_1})$$

$$\dot{\widehat{a_{12}}} = \gamma_1 x_1 (x_2 - \widehat{x_2})$$

$$\dot{\widehat{a_{21}}} = \gamma_1 x_2 (x_1 - \widehat{x_1})$$

$$\dot{\widehat{a_{22}}} = \gamma_1 x_2 (x_2 - \widehat{x_2})$$

Ομοίως

$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 e u$$

ή σε μορφή εξισώσεων:

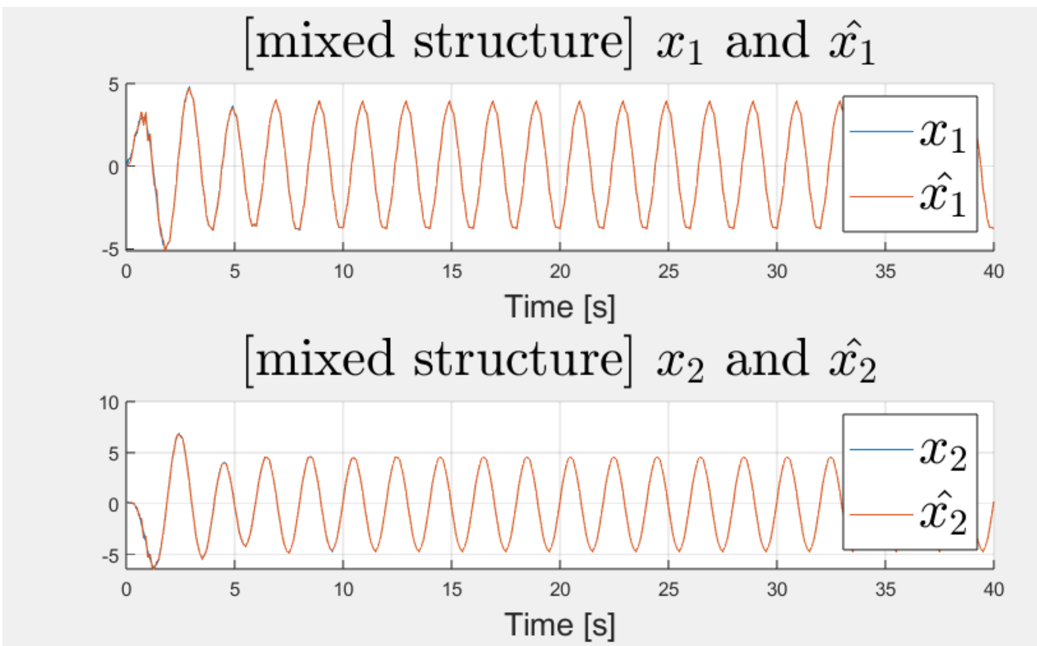
$$\dot{\widehat{b_1}} = \gamma_2 (x_1 - \widehat{x_1}) u$$

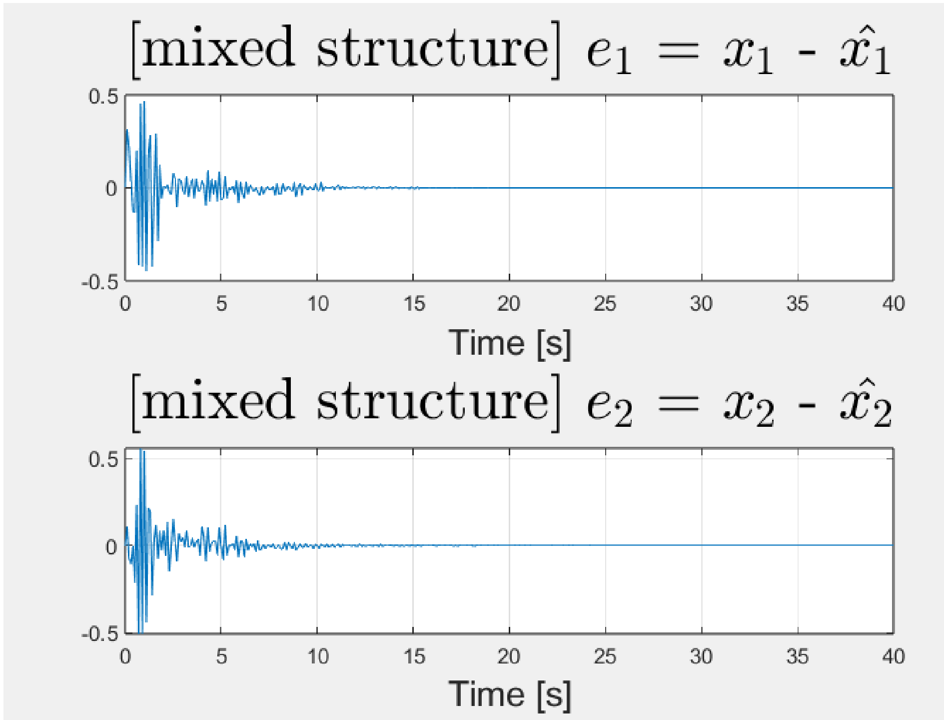
$$\dot{\widehat{b_2}} = \gamma_2 (x_2 - \widehat{x_2}) u$$

Τέλος, αν ορίσουμε τι παρακάτω καταστάσεις, καταλήγουμε στο εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

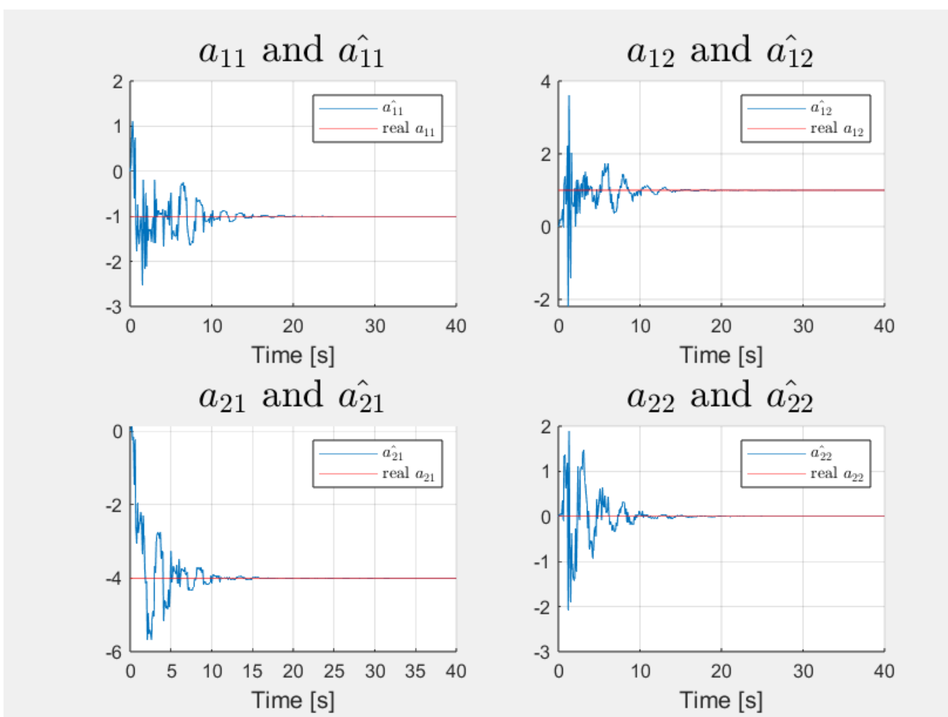
$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 \\
y_2 = x_2 \\
y_3 = \widehat{a_{11}} \\
y_4 = \widehat{a_{12}} \\
y_5 = \widehat{a_{21}} \\
y_6 = \widehat{a_{22}} \\
y_7 = \widehat{b_1} \\
y_8 = \widehat{b_2} \\
y_9 = \widehat{x_1} \\
y_{10} = \widehat{x_2}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\dot{y_1} = \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \\
\dot{y_2} = \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u \\
\dot{y_3} = \dot{\widehat{a_{11}}} = \gamma_1 x_1 (x_1 - \widehat{x_1}) \\
\dot{y_4} = \dot{\widehat{a_{12}}} = \gamma_1 x_1 (x_2 - \widehat{x_2}) \\
\dot{y_5} = \dot{\widehat{a_{21}}} = \gamma_1 x_2 (x_1 - \widehat{x_1}) \\
\dot{y_6} = \dot{\widehat{a_{11}}} = \gamma_1 x_2 (x_2 - \widehat{x_2}) \\
\dot{y_7} = \dot{\widehat{b_1}} = \gamma_2 (x_1 - \widehat{x_1}) u \\
\dot{y_8} = \dot{\widehat{b_2}} = \gamma_2 (x_2 - \widehat{x_2}) u \\
\dot{y_9} = \dot{\widehat{x_1}} = \widehat{a_{11}} x_1 + \widehat{a_{12}} x_2 + \widehat{b_1} u - \theta_{11}(x_1 - \widehat{x_1}) - \theta_{12}(x_2 - \widehat{x_2}) \\
\dot{y_{10}} = \dot{\widehat{x_2}} = \widehat{a_{21}} x_1 + \widehat{a_{22}} x_2 + \widehat{b_2} u - \ -\theta_{21}(x_1 - \widehat{x_1}) - \theta_{22}(x_2 - \widehat{x_2})
\end{cases}
$$

Μετά από εφαρμογή των εξισώσεων αυτών στην ode45 για θ= $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ και γ_1=40, γ_2=20 προέκυψαν τα εξής γραφήματα:

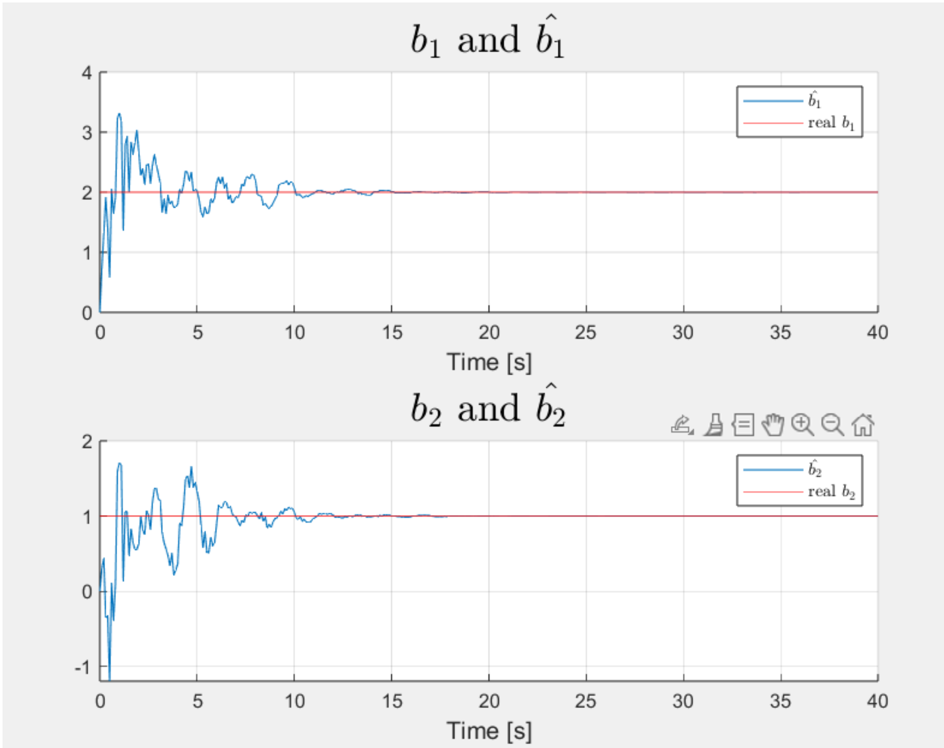




[mixed structure] $e_1 = x_1 - \hat{x_1}$
Time [s]
[mixed structure] $e_2 = x_2 - \hat{x_2}$
Time [s]



a_{11} and $\hat{a_{11}}$
$\hat{a_{11}}$
real a_{11}
Time [s]
a_{12} and $\hat{a_{12}}$
$\hat{a_{12}}$
real a_{12}
Time [s]
a_{21} and $\hat{a_{21}}$
$\hat{a_{21}}$
real a_{21}
Time [s]
a_{22} and $\hat{a_{22}}$
$\hat{a_{22}}$
real a_{22}
Time [s]



Συγκρίνοντας τα διαγράμματα που προέκυψαν στην παράλληλη και την μεικτή δομή , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στην 2η η σύγκλιση των εκτιμήσεων στις πραγματικές τιμές είναι και πιο γρήγορη, και ασύμπτωτική, σε αντίθεση με την παράλληλη δομή, όπου παρουσιάζονται ταλαντώσεις των εκτιμήσεων γύρω από τις πραγματικές τιμές.

Θέμα 4ο

Για το συγκεκριμένο σύστημα θα χρησιμοποιήσουμε την υλοποίηση της μεικτής δομής

Ξεκινάμε από το μοντέλο του πραγματικού συστήματος:

$$\dot{x} = -\theta_1^* f(x) + \theta_2^* u, \;\; x(0) = 0,$$

Το σύστημα αναγνώρισης θα είναι:

$$\dot{\hat{x}} = -\widehat{\theta_1} f(x) + \widehat{\theta_2} u + a_m (x - \hat{x})$$

Για το σφάλμα έχουμε:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = f(x)(\theta_1 - \widehat{\theta_1}) + (\theta_2 - \widehat{\theta_2})u + a_m(x - \hat{x})$$

Για τις εκτιμήσεις έχουμε:

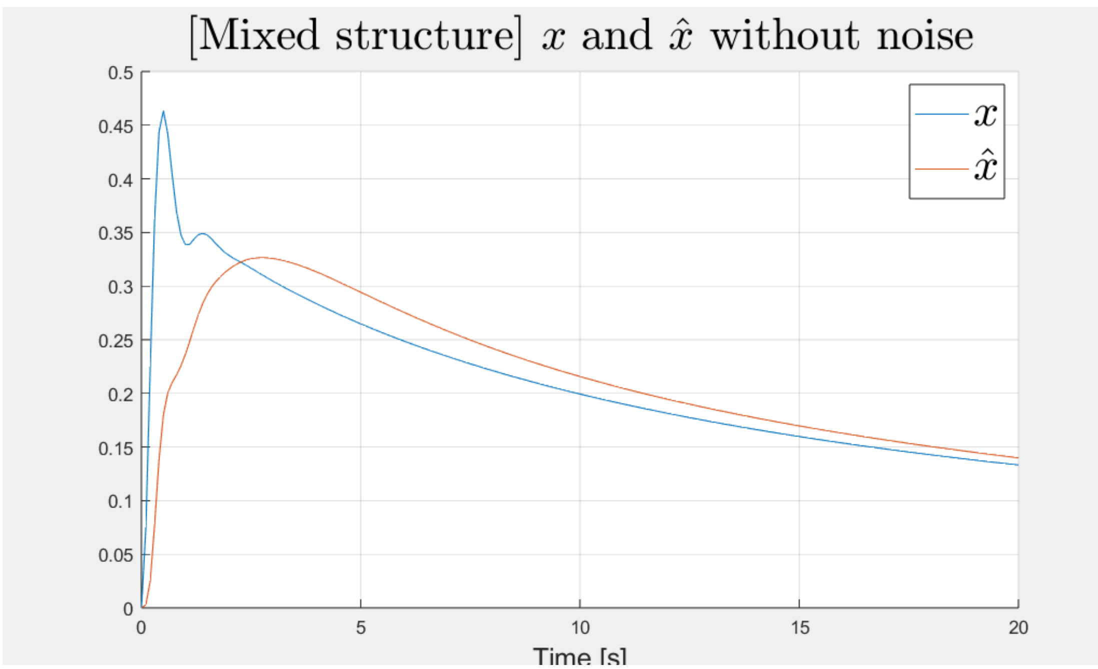
$$\dot{\widehat{\theta_1}} = -\gamma_1(x - \hat{x})f(x)$$

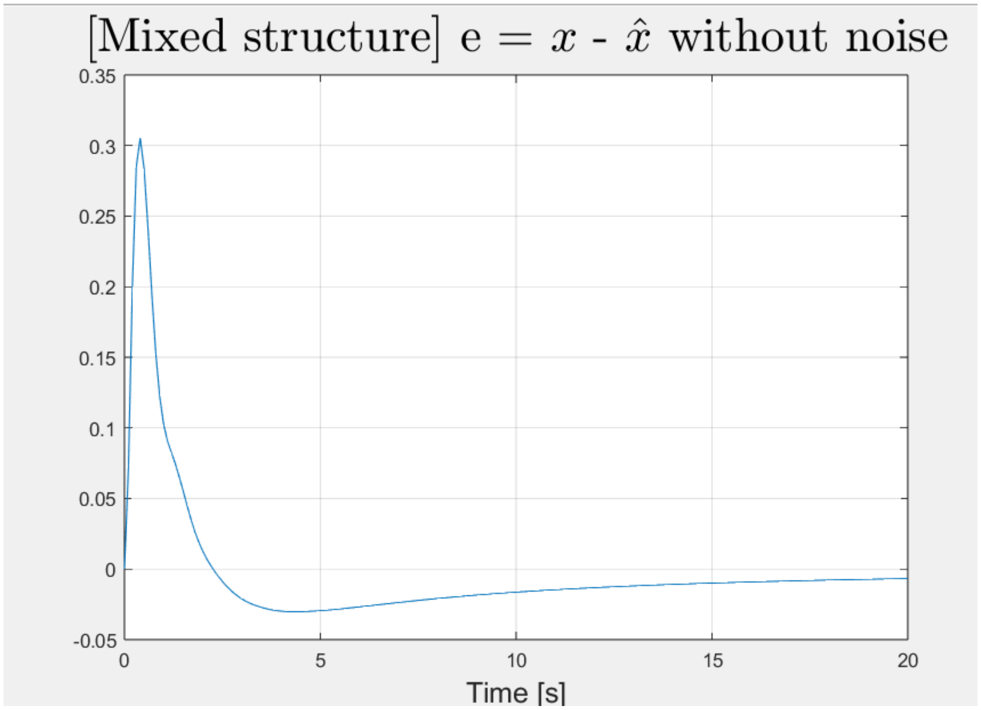
$$\dot{\widehat{\theta_2}} = \gamma_2(x - \hat{x})u$$

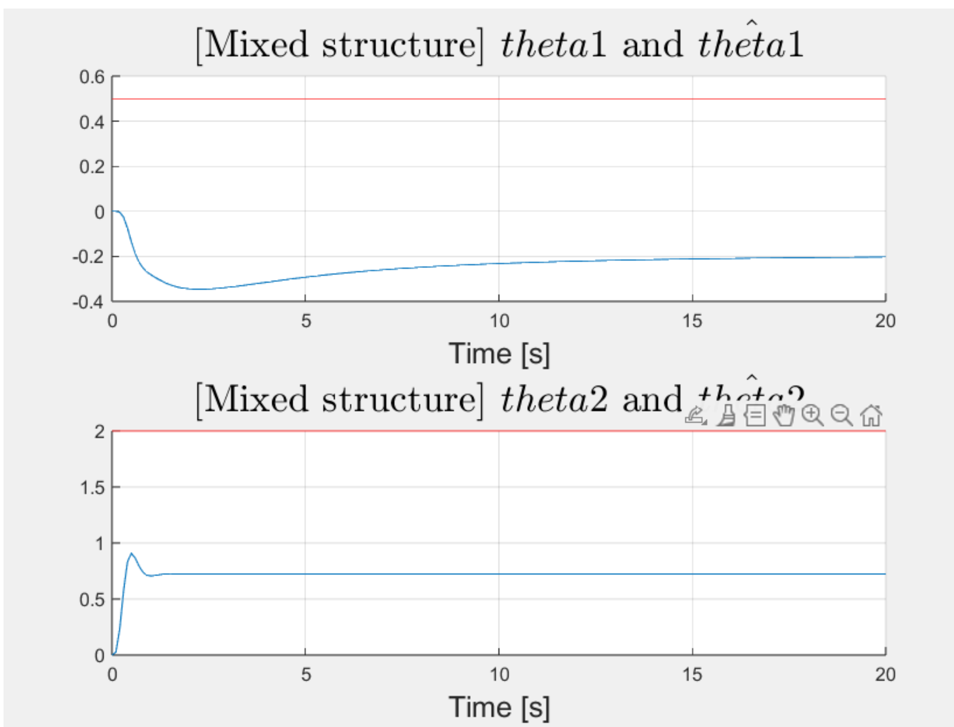
Ορίζοντας τις παρακάτω καταστάσεις, προκύπτει το εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = \widehat{\theta_1} \\ y_3 = \widehat{\theta_2} \\ y_4 = \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y_1} = \dot{x} = -\theta_1 f(x) + \theta_2 u + a_m(x - \hat{x}) \\ \dot{y_2} = \dot{\widehat{\theta_1}} = \gamma_1(x - \hat{x})f(x) \\ \dot{y_3} = \dot{\widehat{\theta_2}} = \gamma_2(x - \hat{x})u \\ \dot{y_4} = \dot{\hat{x}} = -\widehat{\theta_1}f(x) + \widehat{\theta_2}u + a_m(x - \hat{x}) \end{cases}$$

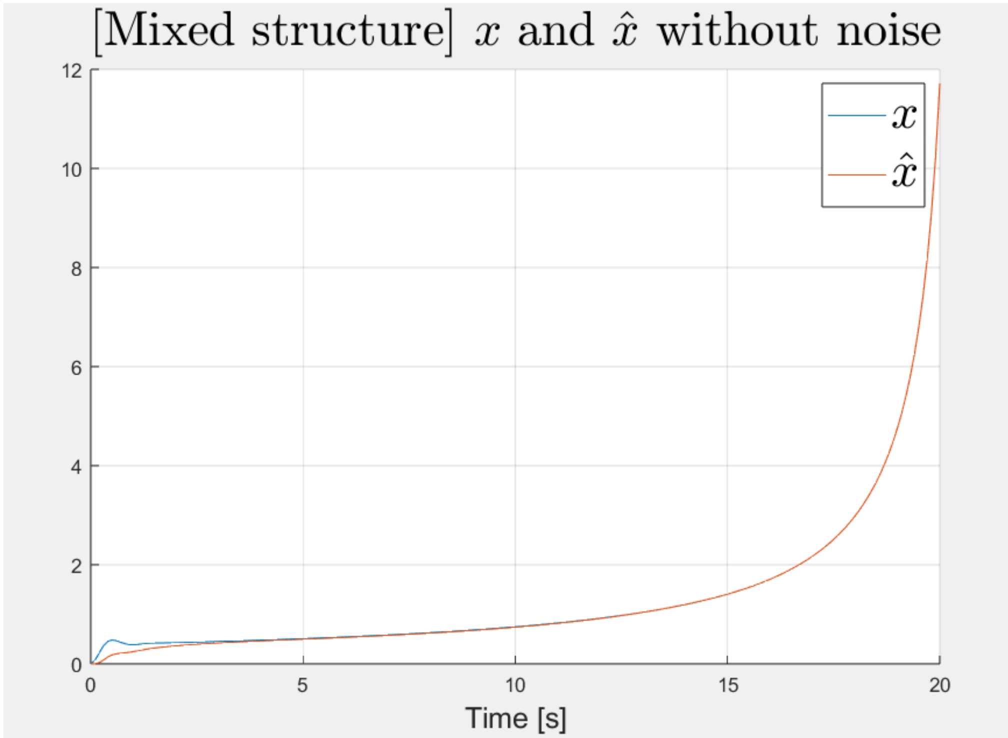
Για $f(x) = 1/2\ x\sin(x)$, $a_m=1$, $\gamma_1 = 20, \gamma_2 = 20$,προέκυψαν τα εξής γραφήματα:

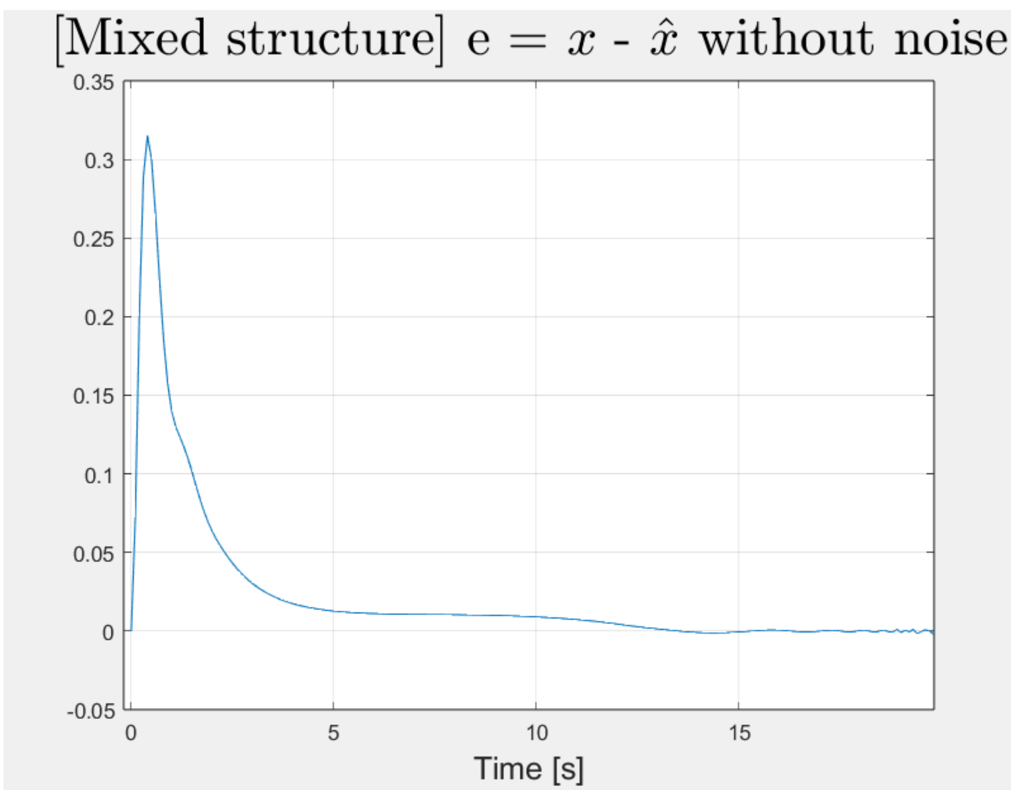


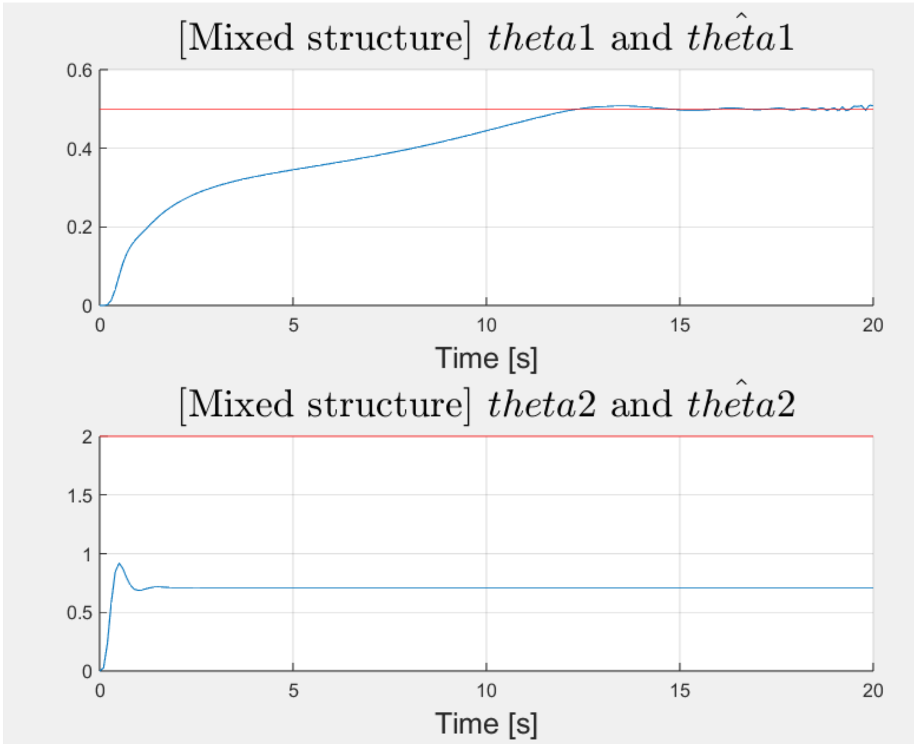




Αντίστοιχα για f(x) = -1/4x^2 , a_m=1, $\gamma_1 = 20, \gamma_2 = 20$ προέκυψαν τα εξής γραφήματα:


[Mixed structure] x and $\hat{x}$ without noise
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
Time [s]
x
$\hat{x}$


[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
0
5
10
15
Time [s]



Παρατηρούμε πως υπάρχει σύγκλιση στις πραγματικές τιμές μόνο στην 2η περίπτωση και μάλιστα μόνο στην παράμετρο θ1.