Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

1η Εργασία

Τουτζιάρης Γεώργιος ΑΕΜ 10568.

Θέμα 1ο

Ερώτημα Α

Δοσμένου του σχήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα του παραπάνω σχήματος, θα χρησιμοποιήσουμε φυσικούς νόμους για την περιγραφή του συστήματος, με παραμέτρους προς εκτίμηση την μάζα m, την σταθερά του ελατηρίου k και την σταθερά του αποσβεστήρα b.

Αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό μήκος $l_0=0$, και κάνοντας χρήση του 2ου νόμου του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{m}\,\ddot{y} \Leftrightarrow \mathrm{u} - \mathrm{k}y - \mathrm{b}\dot{y} = \mathrm{m}\,\ddot{y} \Leftrightarrow \mathrm{m}\ddot{y} + \mathrm{b}\dot{y} + \mathrm{k}y = \mathrm{u} \Leftrightarrow$$
$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}\mathrm{u}$$

Απομονώνοντας την 2η χρονική παράγωγο του y προκύπτει:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}\mathrm{u}$$

Εφαρμόζοντας γραμμική παραμετροποίηση με θ^*το διάνυσμα των παραμέτρων και Δ το διάνυσμα εισόδων και εξόδων έχουμε:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \theta_1^* & \theta_2^* \end{bmatrix}^\top , \Delta = \begin{bmatrix} -\dot{y} & -y & u \end{bmatrix}^\top$$

Πλέον έχουμε φέρει το σύστημα στην μορφή

$$\ddot{y} = \theta^{*T}\,\Delta$$

Θα χρησιμοποιήσουμε, τώρα, ένα ευσταθές φίλτρο της μορφής $\frac{1}{\Lambda(s)}$, με

$$\Lambda(\mathrm{s}) = s^2 + \lambda_1\mathrm{s} + \lambda_2 = s^2 + 4\mathrm{s} + 2$$

Το νέο σύστημα είναι το

$$y = \theta_\lambda{}^T\zeta$$

Όπου

$$\theta_\lambda{}^T = \left[\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}\right]^\top = \left[\frac{b}{m} - 4 \quad \frac{k}{m} - 2 \quad \frac{1}{m}\right]^\top$$

Και

$$\zeta = \left[-\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \quad \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u\right]^\top = \left[-\frac{[s\ 1]^T}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u\right]^\top = \left[-\frac{s}{\Lambda(s)}y \quad -\frac{1}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u\right]^\top$$

Ερώτημα Β

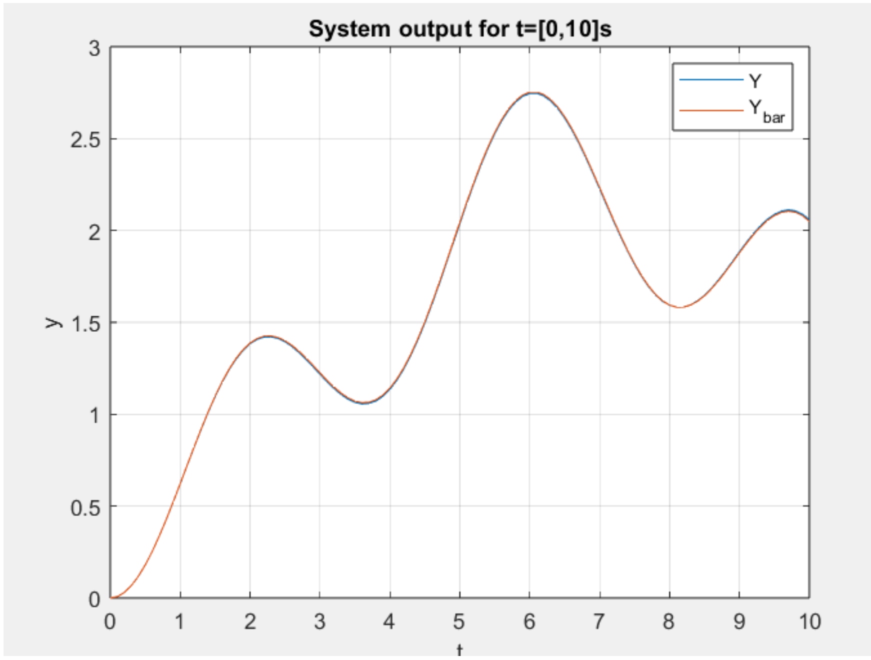
Έχοντας παραμετροποιήσει γραμμικά το σύστημα, πλέον μπορούμε να εφαρμόσουμε την *Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων* για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων.

Αν **Y** είναι ένα γνωστό διάνυσμα μετρήσεων και **Φ** είναι ένας πίνακας με δεδομένα εισόδου και εξόδου, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\vartheta_0}$, το οποίο ελαχιστοποιεί το σφάλμα πρόβλεψης, μέσω του τύπου:

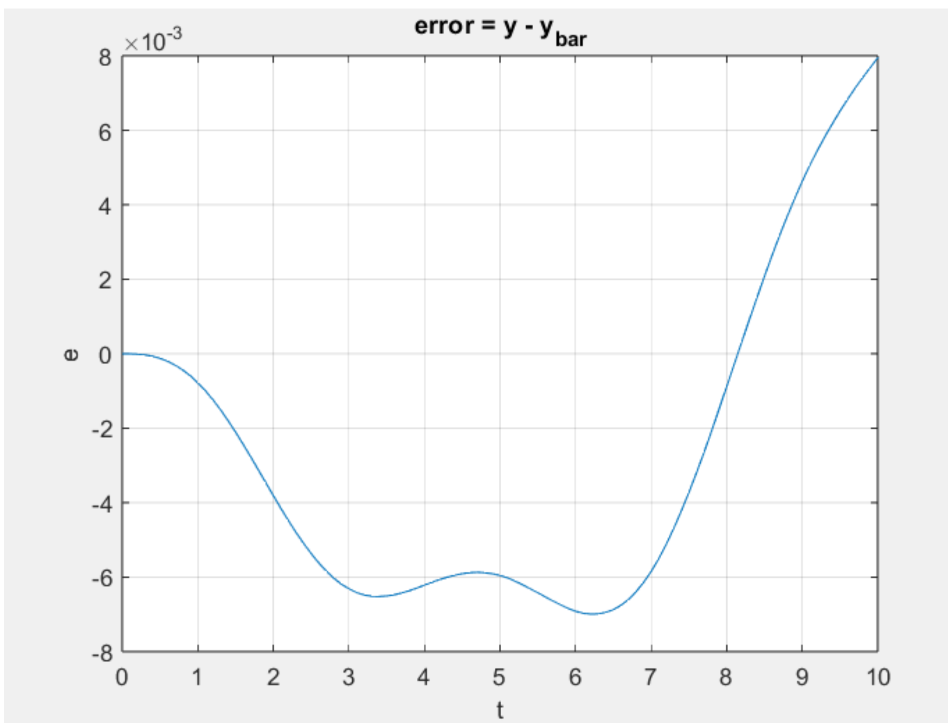
$$\theta_0^T \Phi^T \Phi = \Upsilon^T \Phi$$

Ερώτημα Γ

Οι τιμές του ***Y*** που θα χρησημοποιηθούν για την εκτίμηση των παραμέτρων θα παραχθούν από την συνάρτηση ***ode45*** του ***Matlab.*** Εφαρμόζοντας την *Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων* στο γραμμικά παραμετροποιημένο σύστημα για τιμές εξόδου το διάνυσμα ***Y***, προκύπτουν τα εξής γραφήματα:



Γράφημα 1: Τιμές της εξόδου της προσομοίωσης (μπλέ γραμμή) και του συστήματος μετά την εκτίμηση των παραμέτρων (κόκκινη γραμμή) για τις διάφορες χρονικές στιγμές.



Γράφημα 2: Τιμή του σφάλματος για τις διάφορες χρονικές στιγμές.

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμώμενες τιμές του *Y* συμπίπτουν με τις τιμές που έδωσε η προσομοίωση, καθώς οι 2 γραφικές παραστάσεις είναι ταυτόσημες.

Επίσης, το σφάλμα τιμών προσομοίωσης μείον πραγματικών τιμών παραμένει σε ένας εύρος της τάξης του 10^{-3} , το οποίο είναι αρκετά ικανοποιητικό για τις περισσότερες εφαρμογές.

Ο αλγόριθμος επιστρέφει το διάνυσμα

-3.9268	-1.7645	0.1177

Όμως

$$\theta_\lambda{}^T = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - 4 & \frac{k}{m} - 2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^\top$$

Άρα με αντικατάσταση και επίλυση του συστήματος προκύπτει:

$$\begin{cases} \frac{b}{m} - 4 = -3.9268 \\ \frac{k}{m} - 2 = -1.7645 \\ \quad \frac{1}{m} = 0.1177 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 8.4961 \\ k = 2.0008 \\ b = 0.6219 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων με την *Μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων* είναι πολύ κοντά στις τιμές των ορισμάτων της ode45.

Θέμα 2^o

Αρχικά θα γίνει κυκλωματική ανάλυση του συστήματος.

Γνωρίζουμε ότι οι σχέσεις τάσης-ρεύματος για το πηνίο και τον πυκνωτή είναι:

$$V = L * \frac{di}{dt}$$

$$I = C * \frac{dv}{dt}$$

Θεωρώντας I_1 το ρεύμα που διαρρέει τον πάνω βρόχο και αντίστοιχα I_2 το ρεύμα που διαρρέει τον κάτω βρόχο έχουμε:

$$I_1 = \frac{V_R}{R}, I_2 = \mathrm{C}\ \dot{V}_C$$

Εφαρμόζοντας νόμο τάσεων του *Kirchhoff* στον πάνω βρόχο έχουμε:

$$u_1(t) = V_R + L\dot{I}_1 - L\dot{I}_2 = V_R + L\frac{\dot{V}_R}{R} - LC\ddot{V}_C \Leftrightarrow$$
$$u_1(t) = V_R + L(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C) \quad (1)$$

Ομοίως, για τον κάτω βρόχο παίρνουμε:

$$u_2(t) = V_C + L\dot{I}_2 - L\dot{I}_1 = V_C + LC\ddot{V}_C - L\frac{\dot{V}_R}{R} \Leftrightarrow$$
$$u_2(t) = V_C - L(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C) \quad (2)$$

Και τέλος για τον υπερβρόχο:

$$B_3 : u_1(t) + u_2(t) = V_R + V_C \quad (3)$$

Λύνοντας την εξίσωση (3) ως προς V_R και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_1(t) + \frac{1}{RC}\dot{u}_2(t) + \frac{1}{LC}u_2(t) \quad (4)$$

Ομοίως , λύνοντας την (3) ως προς V_C και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R = \ddot{u}_1(t) + \frac{1}{LC}u_1(t) + \ddot{u}_2(t) \quad (5)$$

Εφαρμόζοντας Laplace Transform στην (4) έχουμε:

$$s^2V_C(s) + \frac{s}{RC}V_C(s) + \frac{1}{LC}V_C(s) = \frac{s}{RC}u_1(s) + \frac{s}{RC}u_2(s) + \frac{1}{LC}u_2(s) \Leftrightarrow$$
$$V_C(s)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) = \frac{s}{RC}u_1(s) + u_2(s)(\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) \Leftrightarrow$$
$$V_C(s) = u_1(s)\frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s)\frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (6)$$

Ομοίως, μετά από Laplace Transform στην (5) έχουμε:

$$V_R(s)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) = u_1(s)(s^2 + \frac{1}{LC}) + s^2u_2(s) \Leftrightarrow$$
$$V_R(s) = u_1(s)\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s)\frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

Αν γράψουμε, τώρα, τις σχέσεις σε μορφή πινάκων ,προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Παραμετροποιώντας γραμμικά την σχέση (4) προκύπτει:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^\top$$
$$\Delta = \begin{bmatrix} -\dot{V}_C & -V_C & \dot{u}_1(t) & u_1(t) & \dot{u}_2(t) & u_2 \end{bmatrix}^\top$$

$$ζ= \left[-\frac{s}{\Lambda(s)}y \quad -\frac{1}{\Lambda(s)}y \quad \frac{s}{\Lambda(s)}u_1 \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u_1 \quad \frac{s}{\Lambda(s)}u_2 \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u_2\right]^\top$$

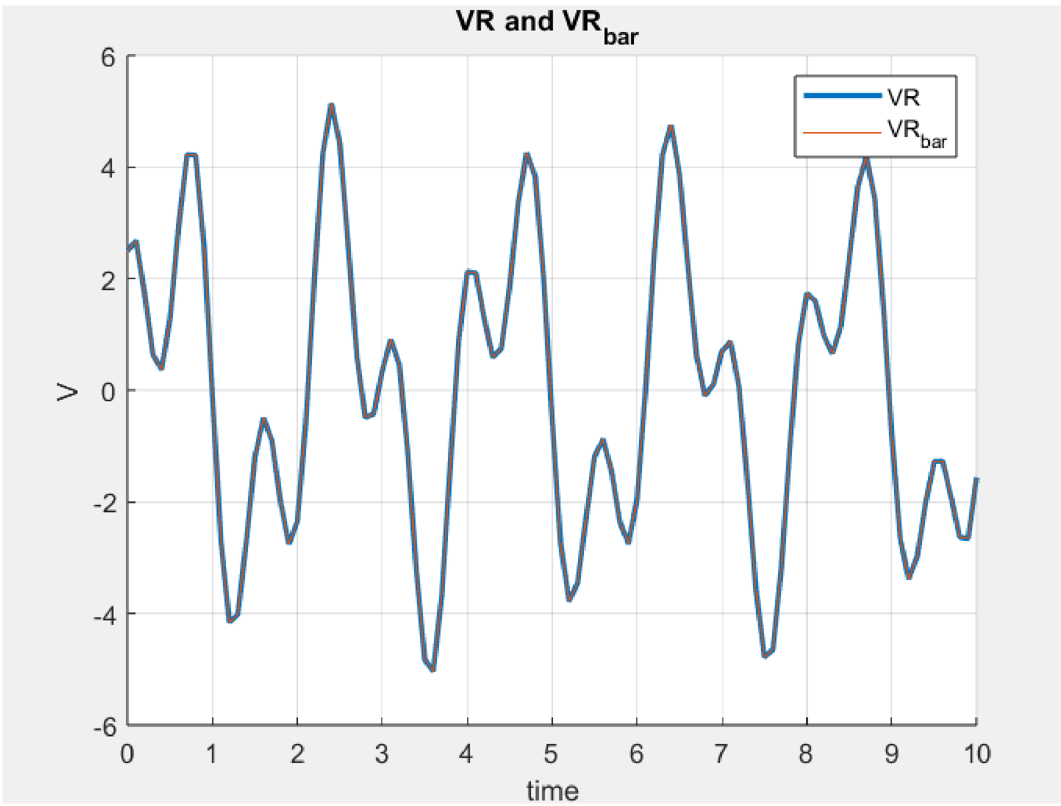
Ακολουθώντας την ίδια φιλοσοφία για την σχέση (5) παίρνουμε τα εξής διανύσματα μετά την γραμμικοποίηση (το φίλτρο Λ(s) παραμένει το ίδιο με πριν):

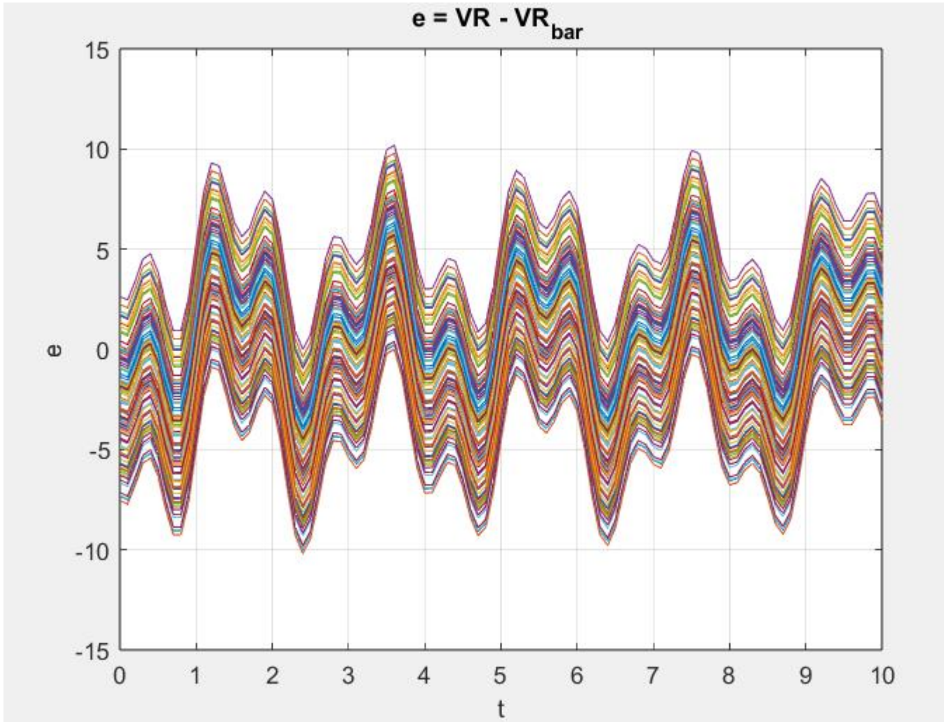
$$\theta^* = [\frac{1}{RC}\ \frac{1}{LC}\ \ 1\ \ 0\ \frac{1}{LC}\ 1\ 0\ 0]$$

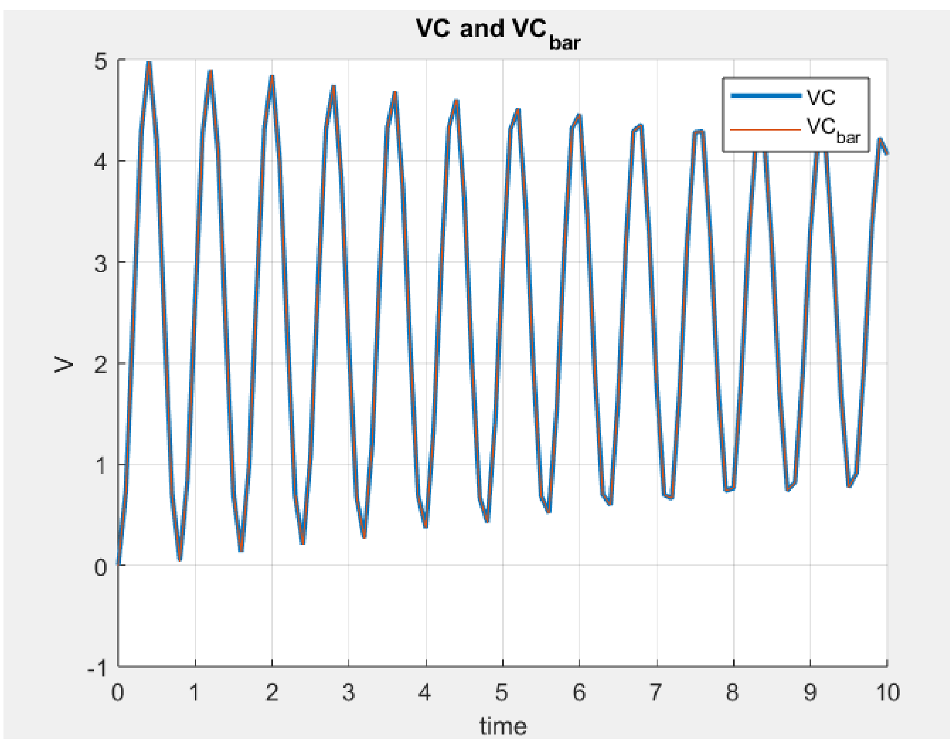
$$\Delta = [-\dot{V}_R - V_R\ \ \ddot{u}_1\ \dot{u}_1\ u_1\ \ddot{u}_2\ \dot{u}_2\ u_2]$$

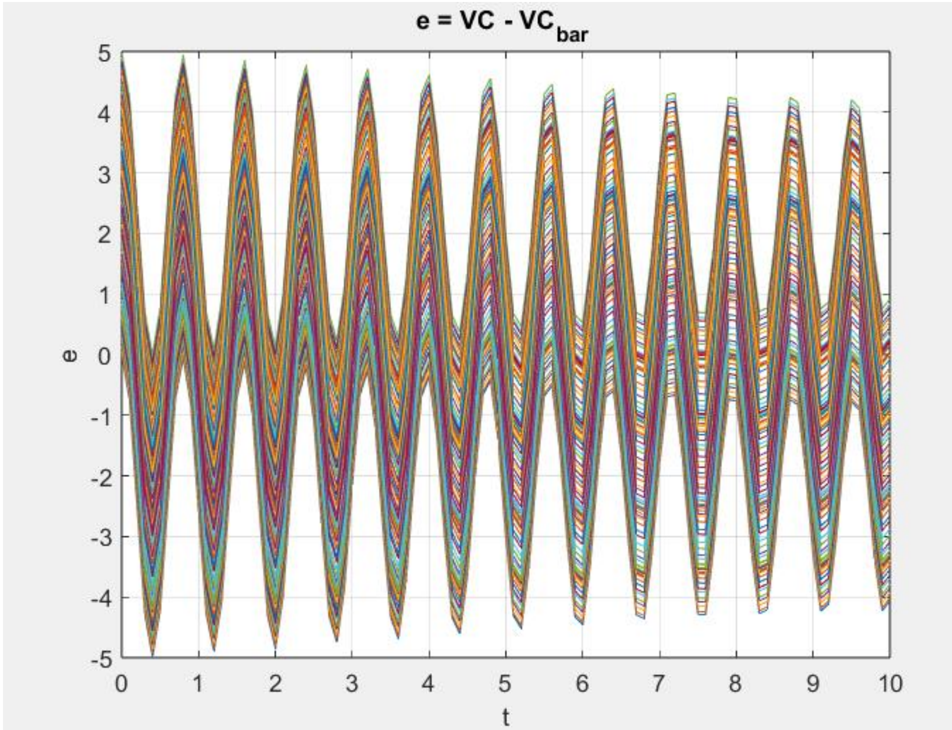
$$\zeta = [\,-\frac{S}{\Lambda(s)} * y\ \ -\frac{1}{\Lambda(s)} * y\ \frac{s^2}{\Lambda(s)} * u_1\ \frac{s}{\Lambda(s)} * u_1\ \frac{1}{\Lambda(s)} * u_1\ \ \frac{s^2}{\Lambda(s)} * u_2\ \frac{s}{\Lambda(s)} * u_2\ \frac{1}{\Lambda(s)} * u_2]$$

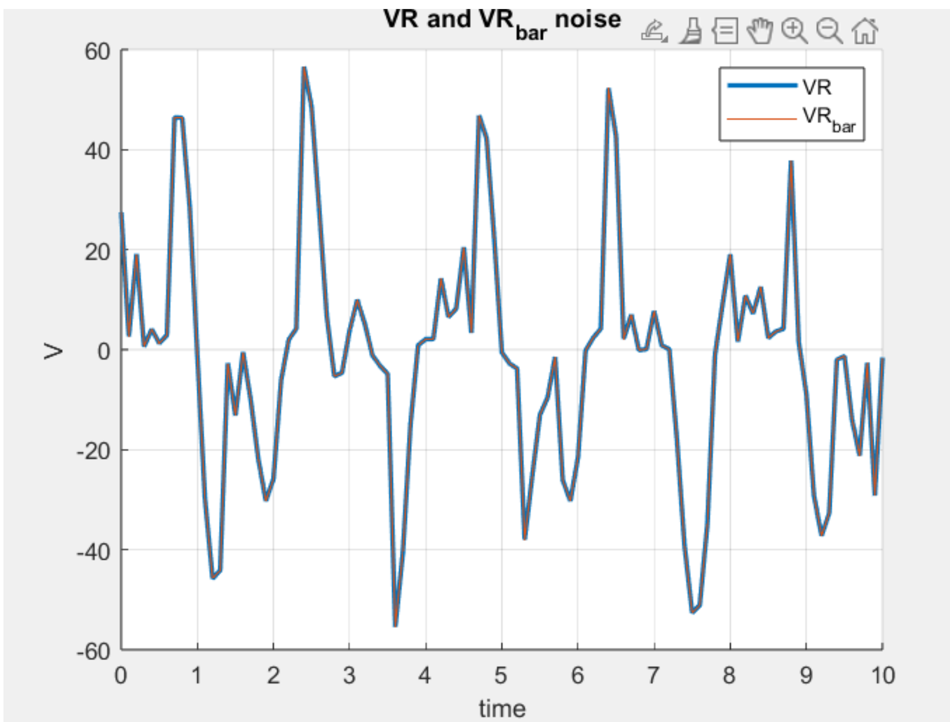
Από την ανάλυση στο *Matlab* προέκυψαν τα εξής γραφήματα:

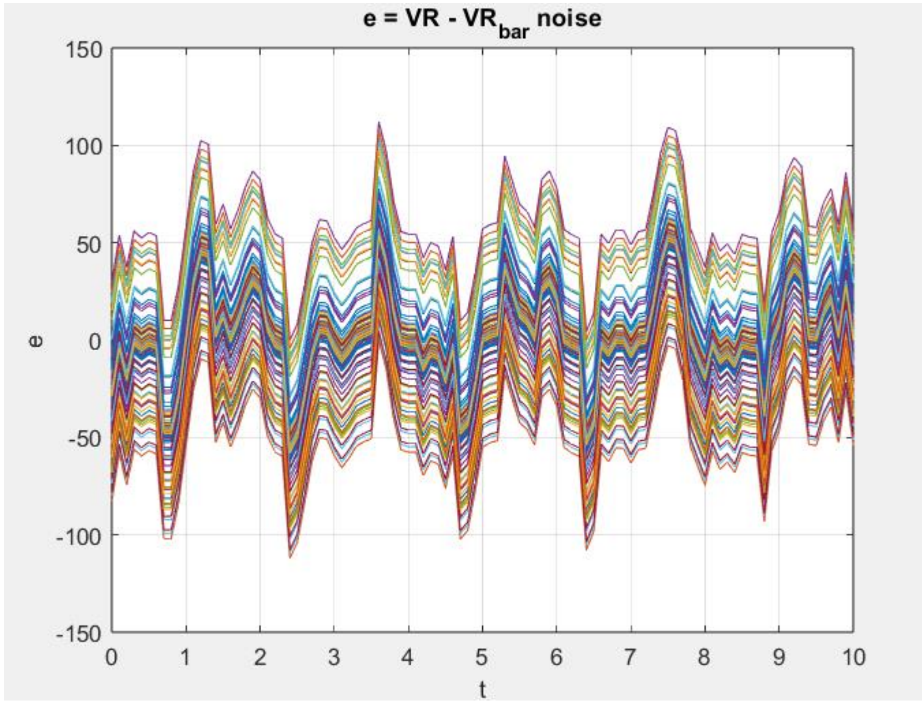



e = VR - VR$_{bar}$
15
10
5
0
-5
-10
-15
e
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t

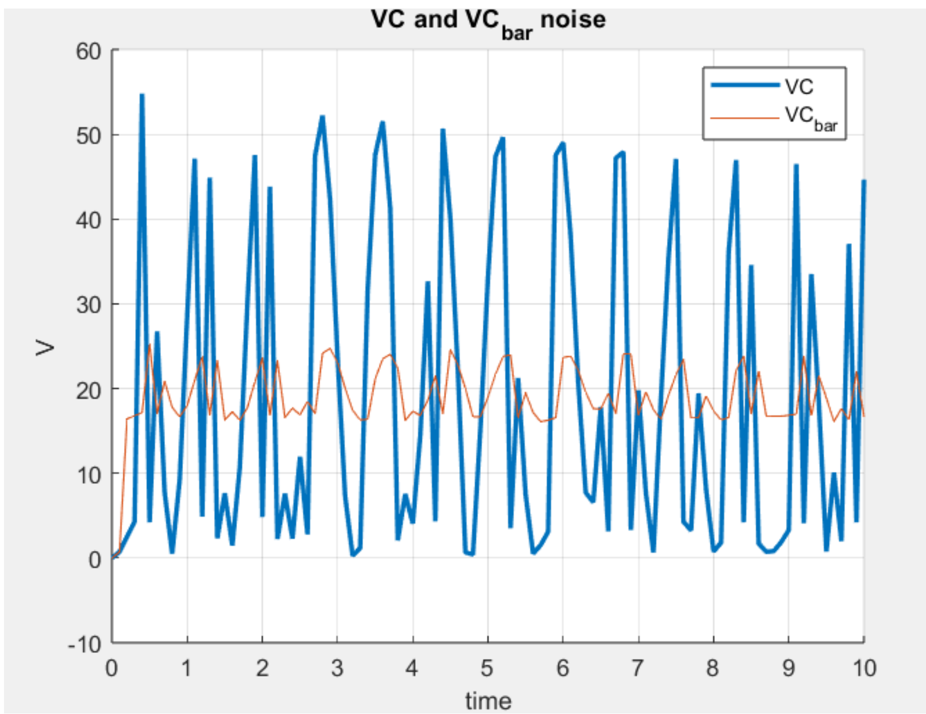

VC and VC$_{bar}$
VC
VC$_{bar}$
5
4
3
2
1
0
-1
V
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
time


e = VC - VC_{bar}
e
t
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

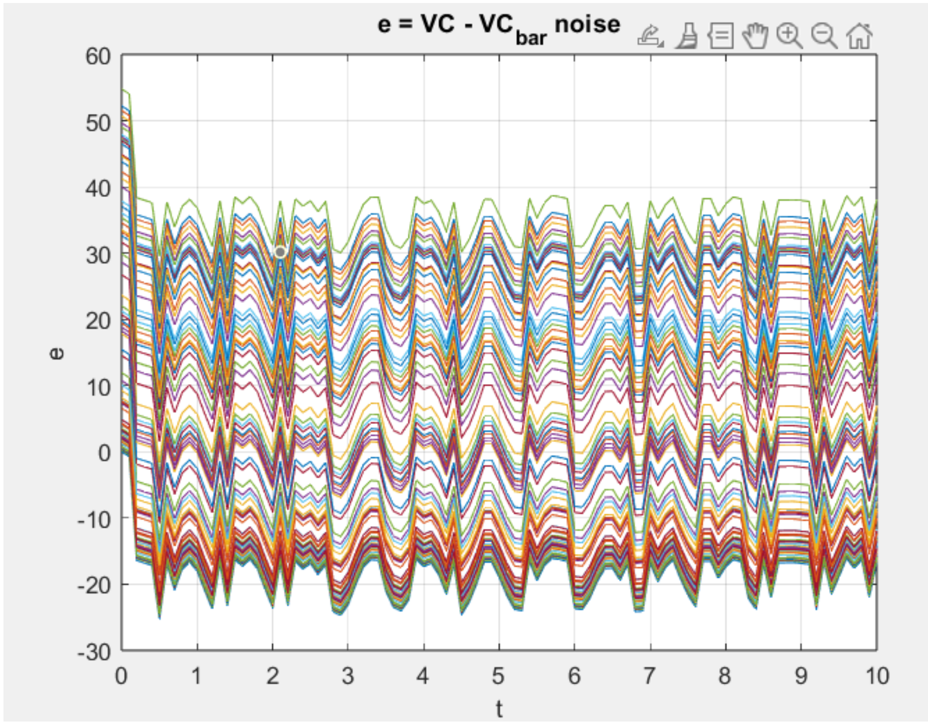

VR and VR_{bar} noise
VR
VR_{bar}
V
time
60
40
20
0
-20
-40
-60
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



e = VR - VR_bar noise
e
t



VC and VC_bar noise
VC
VC_bar
V
time



Παρατηρούμε ότι χωρίς την προσθήκη θορύβου, οι γραφικές παραστάσεις των εκτιμώμενων VC_{bar} και VR_{bar} φαίνεται να συμπίπτουν με τις γραφικές παραστάσεις των VC και VR της προσομοίωσης μέσω της συνάρτησης v.p. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση των παραμέτρων είναι ορθή.

Όμως, με την προσθήκη θορύβου παρατηρούμε ότι η VC_{bar} διαφέρει σημαντικά από την VC, ενώ η VR_{bar} φαίνεται να μην έχει επηρεαστεί ιδιαίτερα.