Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων ΑΠΘ 2η Εργασία

Σταύρος Βασίλειος Μπουλιόπουλος 9671 smpoulio@ece.auth.gr

April 21, 2023

1 Εισαγωγή

Στο πλαίσιο της δεύτερης εργασίας του μαθήματος μας ζητήθηκε να λύσουμε τρία θέματα δυναμικών συστημάτων κατά τα οποία χρησιμοποιήσαμε την θεωρία του τέταρτου κεφαλαίου σχετικά με τους on-line αλγορίθμους εκτίμησης αγνώστων παραμέτρων ενός δυναμικού συστήματος. Συγκεκριμένα, υλοποιήσαμε και εφαρμόσαμε ως αλγορίθμους την μεθόδο **κλίσης** και την μεθόδο **Lyapunov** προκειμένου να εξάγουμε συμπεράσματα κατά την προσομοίωση τους στην MATLAB.

2 Θέμα 1

2.1 Ανάλυση δυναμικού συστήματος

Στο πρώτο θέμα της εργασίας δίνεται η εξής εξίσωση δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = 0 \tag{1}$$

,όπου x είναι η κατάσταση του συστήματος, u είναι η είσοδος και a, b σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι τις οποίες θέλουμε να εκτιμήσουμε σε πραγματικό χρόνο με την μέθοδο κλίσης. Γι'αυτόν τον λόγο θέλουμε το σύστημα να το φέρουμε στην γραμμική παραμετροποιημένη μορφή του με την εξής διαδικασία:

- Προσθαφαιρούμε τον όρο $a_m x$ στην εξίσωση (1) $\Leftrightarrow \dot{x} + a_m x = a_m x - ax + bu$
- Μετατασχηματίζουμε με Laplace την παραπάνω σχέση λαμβάνοντας υπόψιν τις μηδενικές αρχικές συνθήκες έτσι ώστε:

$$x = \frac{1}{s + a_m}[(a_m - a)x + bu] \tag{2}$$

- Καταλήγουμε στην παραμετροποιημένη μορφή:

$$x = \theta^{*T}\phi \tag{3}$$

,όπου $\theta^* = \begin{bmatrix} a_m - a & b \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T$ και $\phi = \begin{bmatrix} \frac{x}{s+a_m} & \frac{u}{s+a_m} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}^T$.

Έτσι λοιπόν, για την μέθοδο κλίσης χρησιμοποιούμε το εξής σύστημα ανάγνωρισης ως μοντέλο:

$$\hat{x} = \hat{\theta}^T\phi \tag{4}$$

Υπολογίζουμε το σφάλμα μεταξύ του πραγματικού συστήματος και του μοντέλου:

$$e = x - \hat{x} = \theta^{*T}\phi - \hat{\theta}^T\phi = (\theta^{*T} - \hat{\theta}^T)\phi = -\tilde{\theta}\phi \tag{5}$$

,όπου $\tilde{\theta} = \theta^{*T} - \hat{\theta}^T$. Ορίζουμε στην συνέχεια αντικειμενική συνάρτηση για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος $K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x-\hat{\theta}^T\phi)^2}{2}$, τέτοια ώστε να είναι κυρτή $\forall\hat{\theta}$ και το ελάχιστό της να είναι μοναδικό.

Άρα, η ζητούμενη ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \nabla K(\hat{\theta}) \Leftrightarrow \\ &\dot{\hat{\theta}} = \gamma e \phi \\ &\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}}_1 & \dot{\hat{\theta}}_2 \end{bmatrix}^T = \gamma e \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{6}$$

,αφού $\nabla K(\hat{\theta}) = -\phi(x - \hat{\theta}^T \phi) = -e\phi$. Οπότε από την σχέση (6) μπορούμε να καταλήξουμε από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στο εξής διαφορικό σύστημα στο πεδίο του χρόνου, το οποίο επιθυμούμε να λύσουμε:

$$\begin{aligned} &\dot{\phi_1} = -a_m \phi_1 + x, \phi_1(0) = 0 \\ &\dot{\phi_2} = -a_m \phi_2 + u, \phi_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει το εξής διαφορικό σύστημα εξισώσεων κατάστασης(ODE):

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \phi_1 \\ x_5 = \phi_2 \\ x_6 = \hat{x} \end{cases} \xRightarrow{\text{d/dt}} \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -a x_1 + b u \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{\theta}}_1 = \phi_1 = \gamma e x_4 \\ \dot{x_3} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \phi_2 = \gamma e x_5 \\ \dot{x_4} = \dot{\phi_1} = -a_m \phi_1 + x = -a_m x_4 + x_1 \\ \dot{x_5} = \dot{\phi_2} = -a_m \phi_2 + u = -a_m x_5 + u \\ \dot{x_6} = \dot{\hat{x}} = (\hat{\theta}_1 - a_m)\hat{x} + \hat{\theta}_2 u = (x_2 - a_m) x_6 + x_3 u \end{cases} \tag{ODE 1}$$

,όπου $e = x - \hat{x} = x_1 - x_6$.

2.2 Προσομοίωση σε MATLAB

2.2.1 Ερώτημα α)

Προσομοιώνουμε τον παραπάνω αλγόριθμο θέτοντας ως σταθερές $a = 3$, $b = 0.5$ και **είσοδο** συστήματος $\mathbf{u} = 10$ και με την επιλογή παραμέτρων $\gamma = 5$ και $a_m = 5$. Σε αυτήν την περίπτωση της εφαρμογής σταθερής εισόδου παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της εξόδου $\hat{y} = \hat{x}$ του μοντέλου τείνει να συγκλίνει την πραγματική έξοδο του συστήματος, αλλά οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων $\hat{a}$ και $\hat{b}$ δεν φτάνουν τις πραγματικές τιμές παραμέτρων του συστήματος όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.

Αυτό συμβαίνει, διότι πρέπει να έχουμε διαφορετική είσοδο για να πετύχουμε ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνθηκών σύγκλισης μεταξύ των παραμέτρων και σύγκλισης σφάλματος στο μηδέν. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος από σχέση (1) είναι $H(s) = \frac{Y}{U} = \frac{b}{s+a}$ και συμπεραίνουμε ότι $det(H) \neq 0$. Άρα, χρειαζόμαστε είσοδο που δεν είναι απλά σταθερή τιμή, όπως της $u = 10$, αλλά να έχει μια διακριτή και μη μηδενική συχνότητα.

2.2.2 Ερώτημα β)

Προσομοιώνουμε τον παραπάνω αλγόριθμο θέτοντας ως σταθερές $a = 3$, $b = 0.5$ και **είσοδο** συστήματος $\mathbf{u} = 10sin(3t)$ και με την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων $\gamma = 15$ και $a_m = 6$ βάσει πειραμάτων. Σε αυτήν την περίπτωση της εφαρμογής ημιτονοειδούς εισόδου παρατηρούμε ότι με το πέρασμα του χρόνου η εκτίμηση της εξόδου $\hat{y} = \hat{x}$ του μοντέλου τείνει να συγκλίνει την πραγματική έξοδο του συστήματος και οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων $\hat{a}$ και $\hat{b}$ συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές παραμέτρων του συστήματος όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.

3 Θέμα 2

Σε αυτό το θέμα ζητήθηκε παρόμοια ανάλυση και προσομοίωση του συστήματος της σχέσης (1), αλλά χρησιμοποιούμε πλέον την μέθοδο Lyapunov για την on-line εκτίμηση των παραμέτρων με τις εξής δύο γενικές τοπολογίες αναγνώρισης:

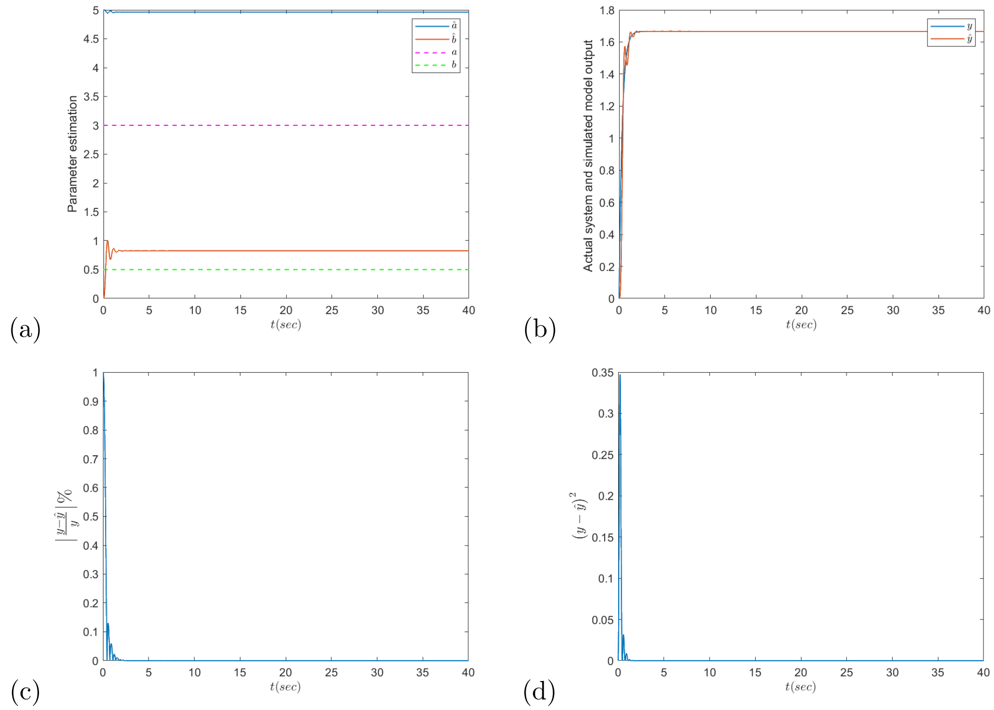

Figure 1: (a) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων (b) Έξοδος συστήματος (c) Ποσοστιαίο σφάλμα(d) Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

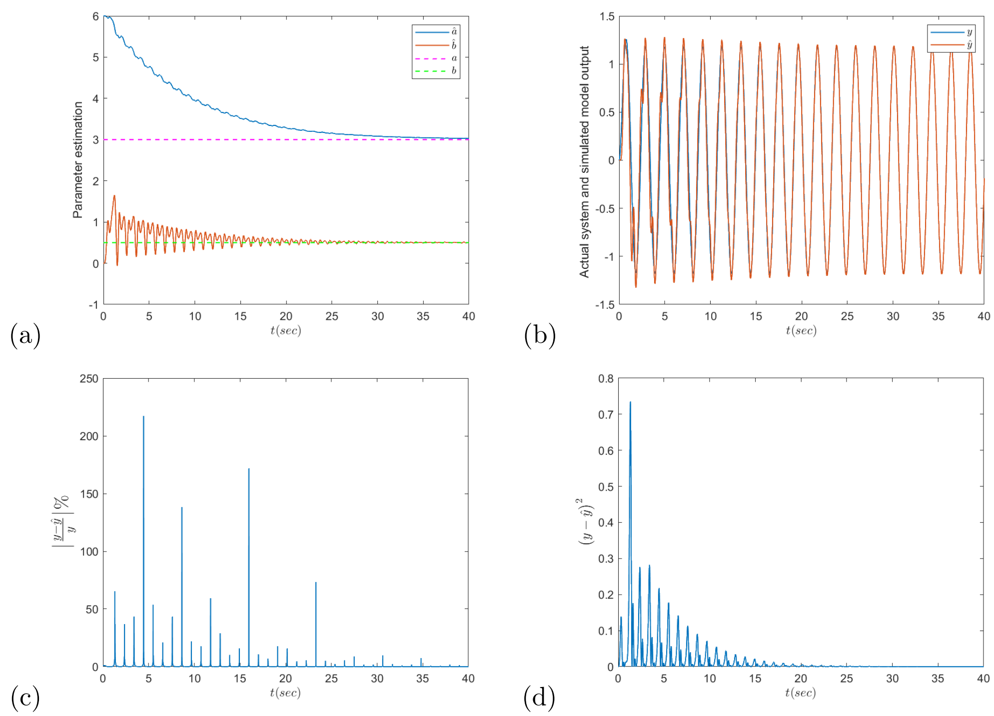

Figure 2: (a) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων (b) Έξοδος συστήματος (c) Ποσοστιαίο σφάλμα(d) Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

i Παράλληλη δομή χρησιμοποιεί μόνο σήματα από το σύστημα αναγνώρισης

ii Μεικτή δομή χρησιμοποιεί σήματα τόσο από το σύστημα αναγνώρισης, όσο και από το πραγματικό σύστημα

3.1 Ανάλυση δυναμικού συστήματος

3.1.1 i) Παράλληλη δομή

Θεωρούμε την εξής εξίσωση του δυναμικού συστήματος:

$$
\begin{aligned}
&y = x \\
&\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u, x(0) = 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

,όπου $\hat{\theta}_1 = \hat{a}, \hat{\theta}_2 = \hat{b}$ στην περίπτωση μας. Για το σφάλμα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
&e = x - \hat{x} \xRightarrow{\text{d/dt}} \\
&\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Leftrightarrow \\
&\dot{e} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u \pm \theta_1^* x \xRightarrow[\tilde{\theta_1} = \hat{\theta_1} - \theta_1^*]{\tilde{\theta_2} = \hat{\theta_2} - \theta_2^*} \\
&\dot{e} = -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Στην συνέχεια επιλέγουμε συνάρτηση Lyapunov:

$$
\begin{aligned}
&V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta_1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta_2}^2 \xRightarrow{\text{d/dt}} \\
&\dot{V}(\hat{\theta}) = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 \Leftrightarrow \\
&\dot{V}(\hat{\theta}) = -\theta_1^* e^2 + \tilde{\theta}_1 \hat{x} e - \tilde{\theta}_2 u e + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Οπότε για να εξουδετερώσουμε τους συντελεστές αορίστου προσήμου επιλέγουμε:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \hat{x} e \\
&\dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_2 u e
\end{aligned}
\tag{11}
$$

τέτοιες ώστε $V(\hat{\theta}) \geq 0$ και $\dot{V}(\hat{\theta}) = -\theta_1^* e^2 \leq 0$ προκειμένου να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης το πραγματικό σύστημα σύμφωνα με θεωρήματα Barbalat και Lyapunov. Κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει το εξής διαφορικό σύστημα εξισώσεων κατάστασης(ODE) λαμβάνοντας υπόψιν ότι το σήμα x συμπεριλαμβάνει θόρυβο $\eta(t)$:

$$
\begin{cases}
x_1 = x \\
x_2 = \hat{x} \\
x_3 = \hat{\theta}_1 \\
x_4 = \hat{\theta}_2
\end{cases}
\xRightarrow{\text{d/dt}}
\begin{cases}
\dot{x_1} = \dot{x} = -a x_1 + b u \\
\dot{x_2} = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u = -x_3 x_2 + x_4 u \\
\dot{x_3} = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x} = \gamma_1 e x_2 \\
\dot{x_4} = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u
\end{cases}
\tag{ODE 2}
$$

,όπου $e = x + \eta - \hat{x} = x_1 - x_2 + \eta$.

3.1.2 ii) Μεικτή δομή

Θεωρούμε την εξής εξίσωση του δυναμικού συστήματος:

$$
\begin{aligned}
&y = x \\
&\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 x + \hat{\theta}_2 u + \theta_m e, x(0) = 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

,όπου $\hat{\theta_1} = \hat{a}, \hat{\theta_2} = \hat{b}$ και $\theta_m = ct. > 0$ στην περίπτωση μας. Για το σφάλμα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
&e = x - \hat{x} \xrightarrow{\text{d/dt}} \\
&\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Leftrightarrow \\
&\dot{e} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta_1}\hat{x} - \hat{\theta_2} u - \theta_m e \xrightarrow[\tilde{\theta_1} = \hat{\theta_1} - \theta_1^*]{\tilde{\theta_2} = \hat{\theta_2} - \theta_2^*} \\
&\dot{e} = -\theta_m e + \tilde{\theta_1} x - \tilde{\theta_2} u
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Στην συνέχεια επιλέγουμε συνάρτηση Lyapunov:

$$
\begin{aligned}
&V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta_1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta_2}^2 \xrightarrow{\text{d/dt}} \\
&\dot{V}(\hat{\theta}) = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta_1}\dot{\hat{\theta_1}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta_2}\dot{\hat{\theta_2}} \Leftrightarrow \\
&\dot{V}(\hat{\theta}) = -\theta_m e^2 + \tilde{\theta_1} xe - \tilde{\theta_2} ue + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta_1}\dot{\hat{\theta_1}} + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta_2}\dot{\hat{\theta_2}}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Οπότε για να εξουδετερώσουμε τους συντελεστές αορίστου προσήμου επιλέγουμε:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\hat{\theta_1}} = -\gamma_1 xe \\
&\dot{\hat{\theta_2}} = \gamma_2 ue
\end{aligned}
\tag{15}
$$

,τέτοιες ώστε $V(\hat{\theta}) \geq 0$ και $\dot{V}(\hat{\theta}) = -\theta_m e^2 \leq 0$ προκειμένου να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης το πραγματικό σύστημα σύμφωνα με θεωρήματα Barbalat και Lyapunov. Κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει το εξής διαφορικό σύστημα εξισώσεων κατάστασης(ODE) λαμβάνοντας υπόψιν ότι το σήμα x συμπεριλαμβάνει θόρυβο $\eta(t)$:

$$
\begin{cases}
x_1 = x \\
x_2 = \hat{x} \\
x_3 = \hat{\theta_1} \\
x_4 = \hat{\theta_2}
\end{cases}
\xrightarrow{\text{d/dt}}
\begin{cases}
\dot{x_1} = \dot{x} = -ax_1 + bu \\
\dot{x_2} = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta_1}\hat{x} + \hat{\theta_2} u + \theta_m e = -x_3 x_2 + x_4 u + \theta_m e \\
\dot{x_3} = \dot{\hat{\theta_1}} = -\gamma_1 e x_{in} = \gamma_1 e(x + \eta) \\
\dot{x_4} = \dot{\hat{\theta_2}} = \gamma_2 eu
\end{cases}
\tag{ODE 3}
$$

,όπου $e = x + \eta - \hat{x} = x_1 - x_2 + \eta$.

3.2 Προσομοίωση σε MATLAB

3.2.1 i) Παράλληλη δομή

Προσομοιώνουμε τον αλγόριθμο Lyapunov με παράλληλη δομή εκτιμητή θέτοντας ως σταθερές $a = 3$, $b = 0.5$, **είσοδο** συστήματος $\mathbf{u} = 10sin(3t)$, θόρυβο $\eta(t) = \eta_0 sin(2\pi ft)$ και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 1$ βάσει πειραμάτων. Στην περίπτωση μέτριου $\eta_0 = 0.5,\ f = 40$ παρατηρούμε ότι με το πέρασμα του χρόνου η εκτίμηση της εξόδου $\hat{y} = \hat{x}$ του μοντέλου τείνει να συγκλίνει την πραγματική έξοδο του συστήματος και οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων $\hat{a}$ και $\hat{b}$ συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές παραμέτρων του συστήματος όπως φαίνεται και στο σχήμα 3. Αλλά για υψηλή συχνότητα θορύβου $f = 300$ και ίδιο πλάτος θορύβου φαίνεται να υπάρχει ταλάντωση στις εκτιμήσεις μας όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

3.2.2 ii) Μεικτή δομή

Προσομοιώνουμε τον αλγόριθμο Lyapunov με παράλληλη δομή εκτιμητή θέτοντας ως σταθερές $a = 3$, $b = 0.5$, **είσοδο** συστήματος $\mathbf{u} = 10sin(3t)$, θόρυβο $\eta(t) = \eta_0 sin(2\pi ft)$ και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_2 = 1$ βάσει πειραμάτων. Στην περίπτωση μέτριου $\eta_0 = 0.5,\ f = 40$ παρατηρούμε στο σχήμα 5 ότι με το πέρασμα του χρόνου οι εκτιμήσεις μας σε όλες τις μετρικές μας δεν σταθεροποιούνται και δεν συγκλίνουν στις πραγματικές, ενώ στην περίπτωση μικρού $\eta_0 = 0.15$ και ίδιας συχνότητας

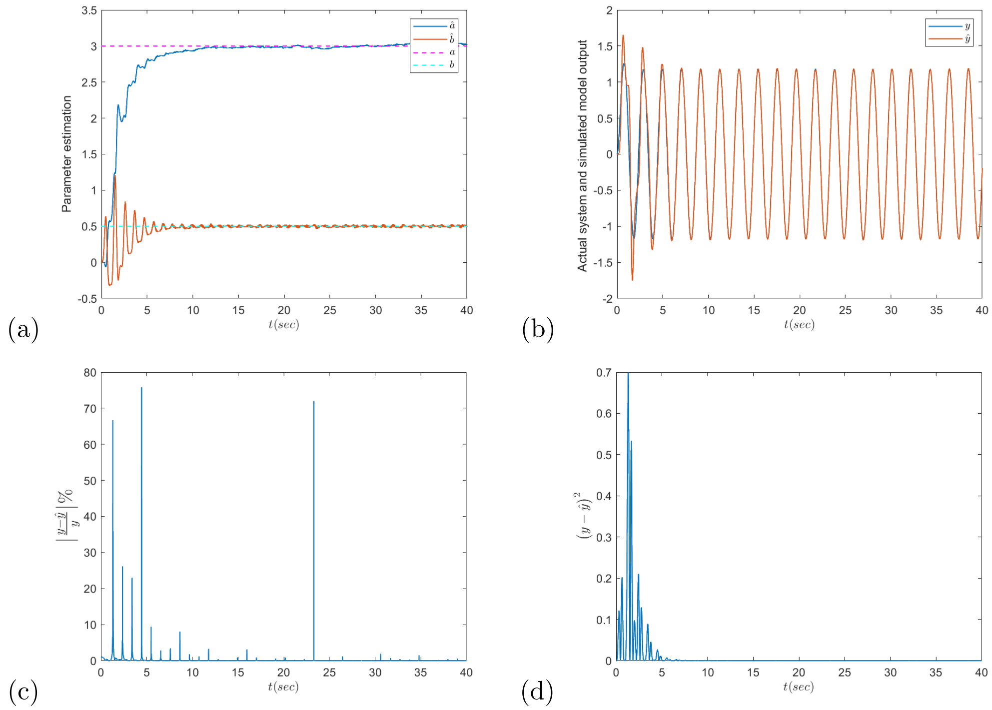

Figure 3: (Π) $\eta_0 = 0.5,\ f = 40$ (a) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων (b) Έξοδος συστήματος (c) Ποσοστιαίο σφάλμα(d) Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

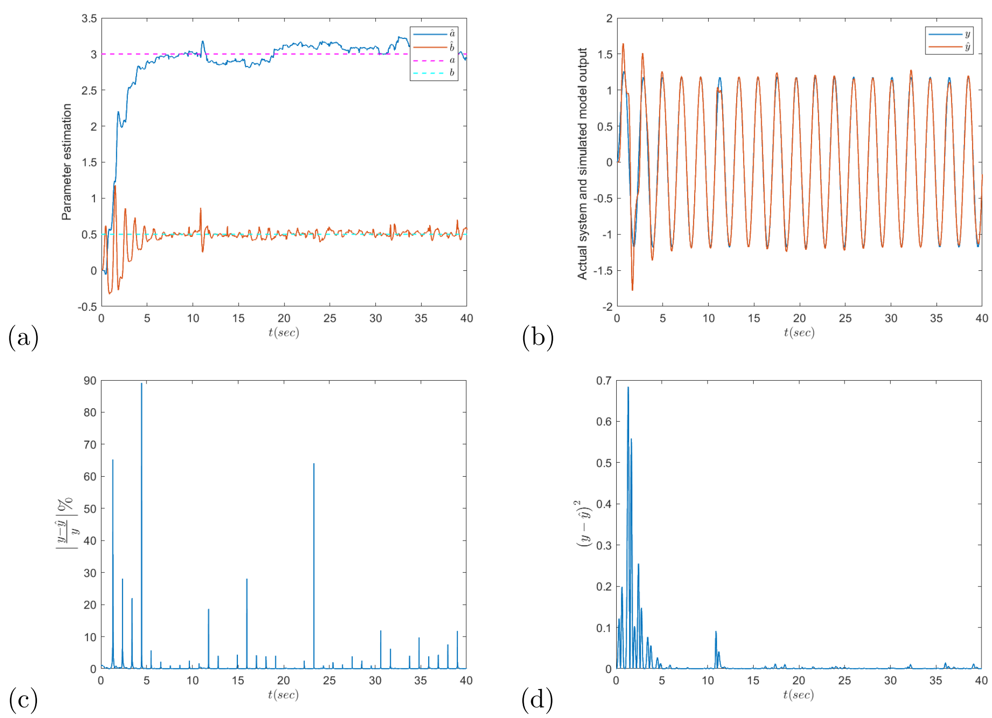

Figure 4: (Π) $\eta_0 = 0.5,\ f = 300$(a) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων (b) Έξοδος συστήματος (c) Ποσοστιαίο σφάλμα(d) Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

επιτυγχάνουμε ικανοποιητική σύγκλιση των εκτιμήσεων μας στις πραγματικές τιμές όπως φαίνεται στο στο σχήμα 6.

Γενικά ύστερα από πειράματα για την κάθε δομή συμπεραίνουμε ότι παρουσία θορύβου αν είναι υψηλός

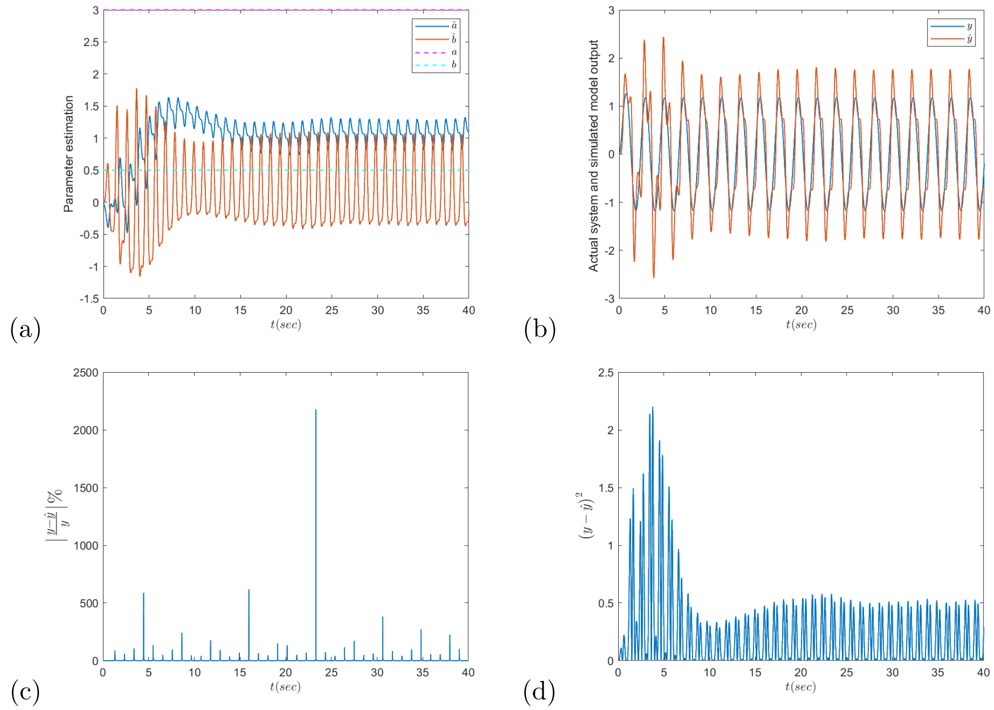

Figure 5: (M) $\eta_0 = 0.5,\ f = 40$(a) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων (b) Έξοδος συστήματος (c) Ποσοστιαίο σφάλμα(d) Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

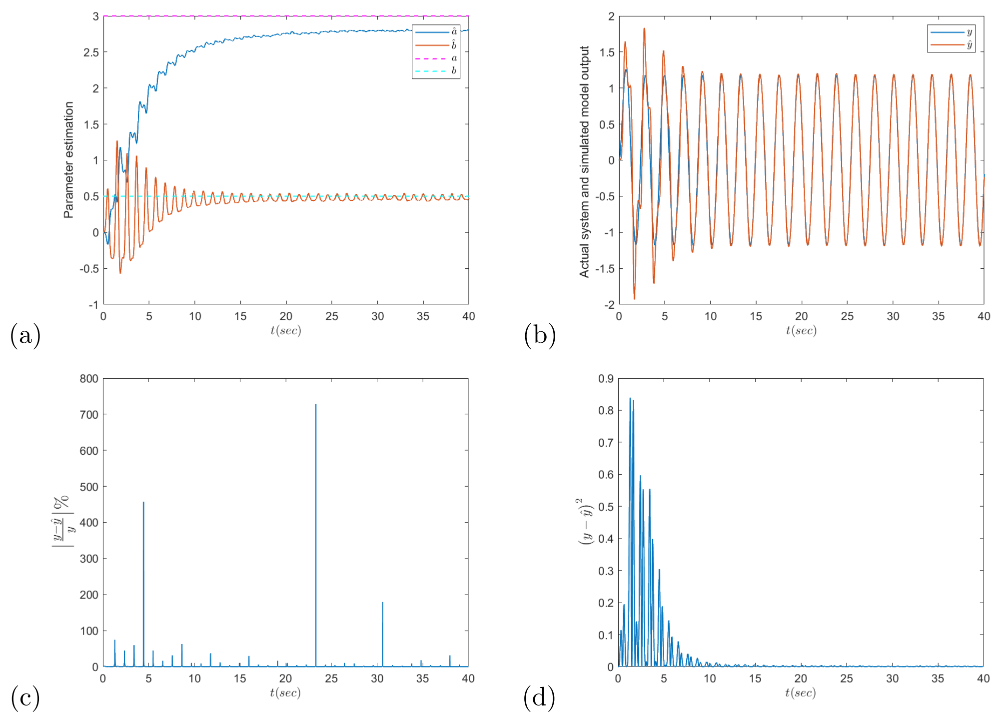

Figure 6: (M) $\eta_0 = 0.15,\ f = 40$(a) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων (b) Έξοδος συστήματος (c) Ποσοστιαίο σφάλμα(d) Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

στο πλάτος ή πολύ χαμηλός στην συχνότητα έχουμε μη ικανοποιητική εκτίμηση του συστήματος και στις δύο περιπτώσεις δομών, αλλά η παράλληλη δομή εμφανώς υπερτερεί παρουσία θορύβου. Αυτό οφείλεται στην εξίσωση κατάστασης για την σύγκλιση των παραμέτρων όταν χρησιμοποιούμε παράλληλη και μεικτή

δομή. Συγκεκριμένα:
$\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 \hat{x} e = -\gamma_1 x\hat{x} + \gamma_1 \hat{x}^2$ (Παράλληλη Δομή) και $\dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 x e = -\gamma_1 x^2 + \gamma_1 \hat{x} x$ (Μεικτή Δομή), όπου ο θόρυβος $\eta(t)$ εμπλέκεται στο σήμα x και καθίσταται εμφανές ότι στην μεικτή δομή ο θόρυβος είναι δεύτερης τάξης, ενώ στην παράλληλη δομή είναι πρώτης τάξης. Για αυτόν τον λόγο, ο θόρυβος κατά την μεικτή δομή έχει πολύ μεγαλύτερη επιρροή στις εκτιμήσεις και την σύγκλιση αυτών στο πραγματικό σύστημα.

4 Θέμα 3

4.1 Ανάλυση δυναμικού συστήματος

Στο τρίτο θέμα της εργασίας δίνεται το σύστημα δεύτερης τάξης:

$$\dot{x} = Ax + Bu, x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{16}$$

,όπου A $= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ και B $= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.
Σχεδιάζουμε on-line εκτιμητή μεικτής δομής κατά μέθοδο Lyapunov για αυτό το σύστημα:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u - \Theta_m e \tag{17}$$

,όπου $\Theta_m = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} \\ \theta_{2,1} & \theta_{2,2} \end{bmatrix}$ ένας αυθαίρετος σταθερός πίνακας. Για το σφάλμα ισχύει:

$$\begin{aligned} & e = x - \hat{x} \xRightarrow{\text{d/dt}} \\ & \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Leftrightarrow \\ & \dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u + \Theta_m e \xRightarrow[\tilde{A}=\hat{A}-A]{\tilde{B}=\hat{B}-B} \\ & \dot{e} = \Theta_m e - \tilde{A}x - \tilde{B}u \end{aligned} \tag{18}$$

Στην συνέχεια επιλέγουμε συνάρτηση Lyapunov $V(e, \tilde{A}, \tilde{B})$, όπου $P = P^T > 0$ είναι λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$\Theta_m^T P + P\Theta_m = -I \tag{19}$$

$$\begin{aligned} & V(e, \tilde{A}, \tilde{B}) = e^T P e + tr(\frac{\tilde{A}^T P \tilde{A}}{\gamma_1}) + tr(\frac{\tilde{B}^T P \tilde{B}}{\gamma_2}) \xRightarrow{\text{d/dt}} \\ & \dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + tr(\frac{\dot{\tilde{A}}^T P \tilde{A}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1}) + tr(\frac{\dot{\tilde{B}}^T P \tilde{B}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}) \Leftrightarrow \\ & \dot{V} = \dot{e}^T (P\Theta_m + \Theta_m^T P)e - 2e^T P \tilde{A} x - 2e^T P \tilde{B} u + tr(2\frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1}) + tr(2\frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}) \Leftrightarrow \\ & (e^T P \tilde{A} x = x^T \tilde{A}^T = tr(\tilde{A}^T P e x^T)\,,\, e^T P \tilde{B} u = tr(\tilde{B}^T P e u^T)) \Leftrightarrow \\ & \dot{V} = -\dot{e}^T e + 2tr(\frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1} - \tilde{A}^T P e x^T + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2} - \tilde{B}^T P e u^T) \end{aligned} \tag{20}$$

Οπότε για να εξουδετερώσουμε τους συντελεστές αορίστου προσήμου επιλέγουμε:

$$\begin{aligned} & \dot{\tilde{A}} = \gamma_1 e x^T \\ & \dot{\tilde{B}} = \gamma_2 e u^T \end{aligned} \tag{21}$$

,τέτοιες ώστε $V(e, \tilde{A}, \tilde{B})) \geq 0$ και $\dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B})) = -e^T e \leq 0$ προκειμένου να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης το πραγματικό σύστημα σύμφωνα με θεωρήματα Barbalat και Lyapunov. Κατά αυτόν τον τρόπο προκύπτει το εξής διαφορικό σύστημα εξισώσεων κατάστασης(ODE) και θεωρώντας $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ και σφάλμα $e = x - \hat{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x_1} & x_2 - \hat{x_2} \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \hat{a_{1,1}} \\ y_4 = \hat{a_{1,2}} \\ y_5 = \hat{a_{2,1}} \\ y_6 = \hat{a_{2,2}} \\ y_7 = \hat{b_1} \\ y_8 = \hat{b_2} \\ y_9 = \hat{x_1} \\ y_{10} = \hat{x_2} \end{cases} \xRightarrow{\text{d/dt}} \begin{cases} \dot{y_1} = \dot{x_1} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + b_1 u \\ \dot{y_2} = \dot{x_2} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + b_2 u \\ \dot{y_3} = \dot{\hat{a_{1,1}}} = \gamma_1 e_1 x_1 = \gamma_1 e_1 y_1 \\ \dot{y_4} = \dot{\hat{a_{1,2}}} = \gamma_1 e_1 x_2 = \gamma_1 e_1 y_2 \\ \dot{y_5} = \dot{\hat{a_{2,1}}} = \gamma_1 e_2 x_1 = \gamma_1 e_2 y_1 \\ \dot{y_6} = \dot{\hat{a_{2,2}}} = \gamma_1 e_2 x_2 = \gamma_1 e_2 y_2 \\ \dot{y_7} = \dot{\hat{b_1}} = \gamma_2 e_1 u \\ \dot{y_8} = \dot{\hat{b_2}} = \gamma_2 e_2 u \\ \dot{y_9} = \dot{\hat{x_1}} = \hat{a_{1,1}}x_1 + \hat{a_{1,2}}x_2 + \hat{b_1}u - (\theta_{1,1}e_1 + \theta_{1,2}e_2) = y_3 x_1 + y_4 x_2 + y_7 u - (\theta_{1,1}e_1 + \theta_{1,2}e_2) \\ \dot{y_{10}} = \dot{\hat{x_2}} = \hat{a_{2,1}}x_1 + \hat{a_{2,2}}x_2 + \hat{b_2}u - (\theta_{2,1}e_1 + \theta_{2,2}e_2) = y_5 x_1 + y_6 x_2 + y_8 u - (\theta_{2,1}e_1 + \theta_{2,2}e_2) \end{cases} \tag{ODE 4}$$

;όπου $e = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x_1} & x_2 - \hat{x_2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y_1 - y_9 & y_2 - y_{10} \end{bmatrix}^T$

4.2 Προσομοίωση σε MATLAB

Προσομοιώνουμε τον παραπάνω αλγόριθμο θέτοντας ως σταθερές πίνακα A $= \begin{bmatrix} -0.25 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$, διάνυσμα B $= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$, **είσοδο** συστήματος $\mathbf{u} = 3.5sin(7.2t) + 2sin(11.7t)$, $\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 25$ και $\Theta_m = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ βάσει πειραμάτων.

Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της εξόδου $\hat{y} = \hat{x}$ του μοντέλου τείνει να συγκλίνει την πραγματική έξοδο του συστήματος και οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων $\hat{A}$ και $\hat{B}$ φτάνουν τις πραγματικές τιμές παραμέτρους του συστήματος όπως φαίνεται στο σχήμα 7 και στο πίνακα 1.

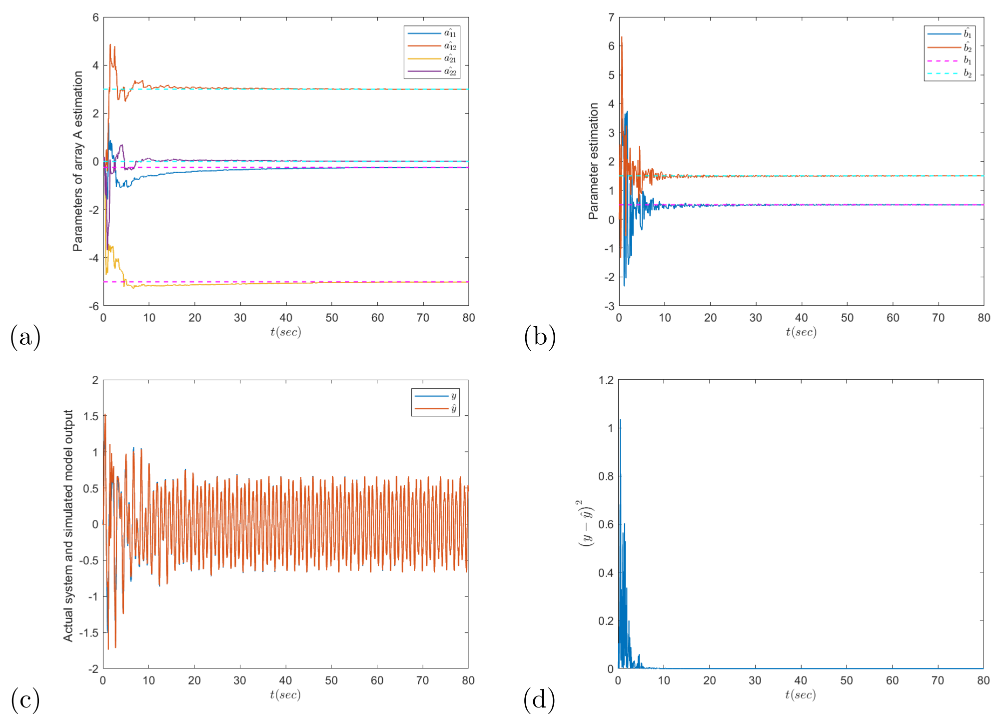

Figure 7: (a) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων πίνακα A (b) Εκτίμηση και σύγκλιση παραμέτρων διανύσματος B (c) Έξοδος συστήματος y_1 (d) Μέσο τετραγωνικό σφάλμα εξόδου y_1

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
$a\hat{_{1,1}}$	-0.2497
$a\hat{_{1,2}}$	3.0001
$a\hat{_{2,1}}$	-5.0081
$a\hat{_{2,2}}$	0.0023
$\hat{b_1}$	0.4998
$\hat{b_2}$	1.5003

Table 1: Εκτιμώμενες παράμετροι μοντέλου ύστερα από την μέθοδο Lyapunov για το σύστημα δεύτερης τάξης