Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

1η Εργασία

Τουτζιάρης Γεώργιος ΑΕΜ 10568.

Θέμα 1ο

Ερώτημα Α

Δοσμένου του σχήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα του παραπάνω σχήματος, θα χρησιμοποιήσουμε φυσικούς νόμους για την περιγραφή του συστήματος, με παραμέτρους προς εκτίμηση την μάζα m, την σταθερά του ελατηρίου k και την σταθερά του αποσβεστήρα b.

Αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό μήκος $l_0=0$, και κάνοντας χρήση του 2ου νόμου του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{m}\,\ddot{y} \Leftrightarrow \mathrm{u} - \mathrm{k}y - \mathrm{b}\dot{y} = \mathrm{m}\,\ddot{y} \Leftrightarrow \mathrm{m}\ddot{y} + \mathrm{b}\dot{y} + \mathrm{k}y = \mathrm{u} \Leftrightarrow$$
$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}\mathrm{u}$$

Απομονώνοντας την 2η χρονική παράγωγο του y προκύπτει:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}\mathrm{u}$$

Εφαρμόζοντας γραμμική παραμετροποίηση με θ^*το διάνυσμα των παραμέτρων και Δ το διάνυσμα εισόδων και εξόδων έχουμε:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \theta_1^* & \theta_2^* \end{bmatrix}^\top, \Delta = \begin{bmatrix} -\dot{y} & -y & u \end{bmatrix}^\top$$

Πλέον έχουμε φέρει το σύστημα στην μορφή

$$\ddot{y} = \theta^{*T}\,\Delta$$

Θα χρησιμοποιήσουμε, τώρα, ένα ευσταθές φίλτρο της μορφής $\frac{1}{\Lambda(s)}$, με

$$\Lambda(\mathrm{s}) = s^2 + \lambda_1 \mathrm{s} + \lambda_2 = s^2 + 4\mathrm{s} + 2$$

Το νέο σύστημα είναι το

$$y = \theta_\lambda{}^T \zeta$$

Όπου

$$\theta_\lambda{}^T = \left[\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}\right]^\top = \left[\frac{b}{m} - 4 \quad \frac{k}{m} - 2 \quad \frac{1}{m}\right]^\top$$

Και

$$\zeta = \left[-\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \quad \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u\right]^\top = \left[-\frac{[s\ 1]^T}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u\right]^\top =$$
$$\left[-\frac{s}{\Lambda(s)}y \quad -\frac{1}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u\right]^\top$$

Ερώτημα Β

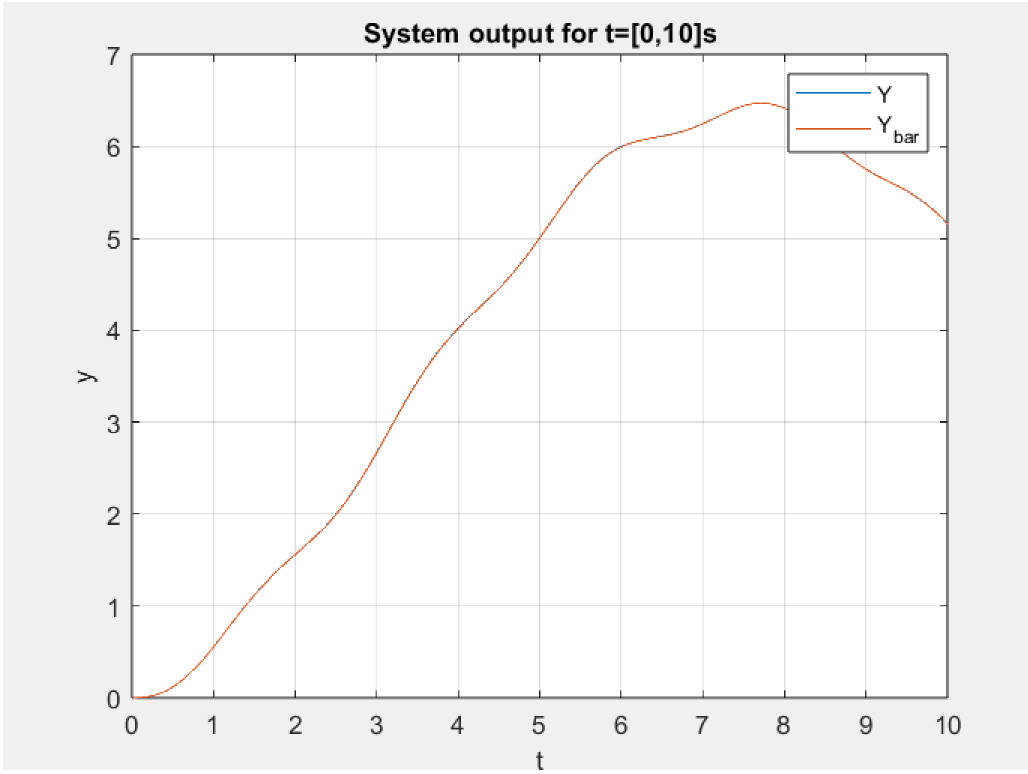
Έχοντας παραμετροποιήσει γραμμικά το σύστημα, πλέον μπορούμε να εφαρμόσουμε την *Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων* για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων.

Αν **Y** είναι ένα γνωστό διάνυσμα μετρήσεων και **Φ** είναι ένας πίνακας με δεδομένα εισόδου και εξόδου, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\vartheta_0}$, το οποίο ελαχιστοποιεί το σφάλμα πρόβλεψης, μέσω του τύπου:

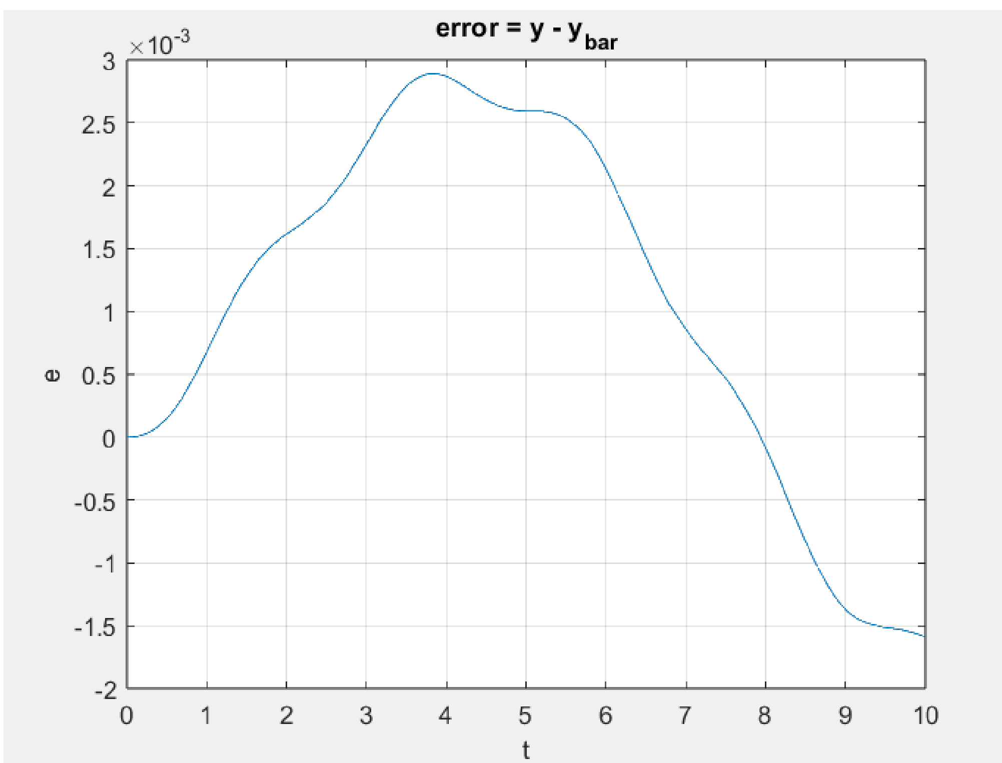
$$\theta_0^T \Phi^T \Phi = \Upsilon^T \Phi$$

Ερώτημα Γ

Οι τιμές του ***Y*** που θα χρησημοποιηθούν για την εκτίμηση των παραμέτρων θα παραχθούν από την συνάρτηση ***ode45*** του ***Matlab.*** Εφαρμόζοντας την *Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων* στο γραμμικά παραμετροποιημένο σύστημα για τιμές εξόδου το διάνυσμα ***Y***, προκύπτουν τα εξής γραφήματα:



Γράφημα 1: Τιμές της εξόδου της προσομοίωσης (μπλέ γραμμή) και του συστήματος μετά την εκτίμηση των παραμέτρων (κόκκινη γραμμή) για τις διάφορες χρονικές στιγμές.



Γράφημα 2: Τιμή του σφάλματος για τις διάφορες χρονικές στιγμές.

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμώμενες τιμές του *Y* συμπίπτουν με τις τιμές που έδωσε η προσομοίωση, καθώς οι 2 γραφικές παραστάσεις είναι ταυτόσημες.

Επίσης, το σφάλμα τιμών προσομοίωσης μείον πραγματικών τιμών φαίνεται να τείνει να μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

Ο αλγόριθμος επιστρέφει το διάνυσμα

-3.9703	-1.8501	0.0999

Όμως

$$\theta_\lambda{}^T = \left[\frac{b}{m} - 4 \quad \frac{k}{m} - 2 \quad \frac{1}{m}\right]^\top$$

Άρα με αντικατάσταση και επίλυση του συστήματος προκύπτει:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{m} - 4 = -3.9702 \\ \dfrac{k}{m} - 2 = -1.8501 \\ \dfrac{1}{m} = 0.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0.298 \\ k = 1.499 \\ m = 10 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις του συστήματος είναι πολύ κοντά στις τιμές που δόθηκαν σαν παράμετροι στην ***ode45.***