“同心协力”策略研究

——基于非线性规划与刚体转动模型的策略研究

摘要

本文主要研究“同心鼓”团队协作策略，运用了刚体力学、质点力学、运动学等知识，构建刚体转动模型，同时运用非线性规划与模拟退火算法进行求解。

针对问题一，理想条件下可以精确控制用力方向、时机和力度，只需要用力大小超过颠球规定高度所需要的力度就能使颠球次数达到无限，由于本题未约束绳的长度，仅将每个队员拉力达到最小作为最优策略，则绳无限长且有无数个队员便能导致单位队员拉力趋近与 0，显然不合理。考虑到模型的实用性，本文将单位队员拉力与游戏半径的乘积最小作为目标值，即在满足题目要求的同时，保证每位队员出力、与游戏占用面积都足够小。构建约束条件过程中，本题基于**功能关系、动量定理、运动学**等知识，分别对球运动系统与鼓运动系统进行分析，由球的规定上升高度下限可得，鼓运动系统至少需要给予球运动系统所需要的能量，然后再通过引入单位拉力大小、拉力方向、施力时间等变量，运用三角函数建立变量间对应关系，建立非线性规划模型，并通过 LINGO 进行求解。

针对问题二，在发力时刻和力度不统一的九种现实情况下，通过刚体力学与刚体运动学的知识，建立基于**刚体转动**的模型，将鼓简化为**圆筒刚体模型**。根据发力时刻的不同，将运动过程分为两个时间段，对每个情况在两个时间段内的运动进行分析，分别得出在两个时间段下鼓沿其对应转动轴转动的角度，最后将两个转动角度根据空间几何的知识，得出最后鼓的倾斜角度。调整结果：第一种情况：0.41°，第七种情况：1.25°。其他结果详见正文。

针对问题三，首先，通过对问题二结果的分析，得出力度增加 10N 与提前发力之间可视作等效行为的结论，并得到了每个人的出错概率。其次，引入出错贡献率这一概念，以更加精确的衡量每个站位可能出错的概率，同时运用 MATLAB 通过**模拟退火算法**，将鼓各个对位出错概率相近作为目标，得到最佳的队员站位方案，此时鼓面偏转角从概率学上达到最小。基于问题三的研究发现：在问题一中给出的策略实际情况下，需要修改每位队员的站位，调整结果见正文。

针对问题四，要使得球的出射方向竖直向上，则需要调整法线的方向，即对鼓面的倾斜角做出调整。通过**非线性规划**，得出鼓从开始上升到与球发生碰撞的时间，以及鼓从上升到接触球的距离。接着通过反向推导，从倾斜角大小和所需的时间推出需要的合外力矩和合外力。结合问题二的分析，指定该合外力矩为倾斜角方向水平投影指向的两位队员的对称面的两位队员产生，其他队员保持原来使鼓平衡的作用力以及统一发力时刻即可。再根据投影的夹角，最终给出两种调整策略，并根据实际分析了该策略的施行效果，结果详见正文。

关键词：**非线性规划 刚体力学 刚体转动模型 出错贡献率 模拟退火算法**

一、 问题重述

合作共赢早已成为新时代的潮流，合作关系到每个人的生存之道,同时对整个团队的建设起着至关重要的作用。而“同心鼓”作为一个团队破冰的活动，因为既好玩又有着深刻的启迪意义，受到广大团队的领导人和成员们的喜爱。在颠起鼓的过程中，人们不怕挫折、不断进取，取长补短、团结协作完成共同目标，即使得连续颠球的次数尽可能多。“同心鼓”为一面牛皮双面鼓，鼓身中间固定多根绳子，绳子在鼓身上的固定点沿圆周呈均匀分布，每根绳子长度相同。团队成员每人牵拉一根绳子，使鼓面保持水平。项目开始时，球从鼓面中心上方竖直落下，队员同心协力将球颠起，使其有节奏地在鼓面上跳动。颠球过程中，队员只能抓握绳子的末端，不能接触鼓或绳子的其他位置。

项目所用道具信息如下：球质量为 270 g，鼓面直径为 40 cm，鼓身高度为 22 cm，鼓的质量为 3.6 kg。队员人数不少于 8 人，队员之间的最小距离不得小于 60 cm。项目开始时，球从鼓面中心上方 40 cm 处竖直落下，球被颠起的高度应离开鼓面 40 cm 以上，如果低于 40cm，则项目停止。

题目要求建立数学模型解决以下问题：

1. 在理想状态下，每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度，试讨论这种情形下团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度。

2. 在现实情形中，队员发力时机和力度不可能做到精确控制，存在一定误差，于是鼓面可能出现倾斜。试建立模型描述队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系。设队员人数为 8，绳长为 1.7m，鼓面初始时刻是水平静止的，初始位置较绳子水平时下降 11 cm，题中给出了队员们的不同发力时机和力度，求 0.1 s 时鼓面的倾斜角度。

3. 在现实情形中，根据问题 2 的模型，你们在问题 1 中给出的策略是否需要调整？如果需要，如何调整？

4. 当鼓面发生倾斜时，球跳动方向不再竖直，于是需要队员调整拉绳策略。假设人数为 10，绳长为 2m，球的反弹高度为 60cm，相对于竖直方向产生 1 度的倾斜角度，且倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与这两位队员的夹角之比为 1:2。为了将球调整为竖直状态弹跳，请给出在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度，并分析在现实情形中这种调整策略的实施效果。

二、 问题分析

2.1 问题一分析

问题一中，由于可以精确控制用力方向、时机和力度，理想条件下，只需要用力大小超过颠球规定高度即可使颠球次数达到无限，由于本题并未对绳长度进行约束，仅将单位队员拉力最小作为最优策略，则需要绳长无限且有无数个队员便会导致单位队员拉力趋近与 0，这显然不够合理，考虑到模型的实用性，本题将单位队员拉力与游戏半径得乘积最小作为目标值，即在满足题意的同时，又保证每位队员出力、与游戏占用面积都足够小。

在构建约束条件过程中，本题基于能量守恒、动量守恒、运动学等知识，分别对球运动系统与鼓运动系统进行分析，由颠球高度下限可得出，鼓运动系统至少需要给予球运动系统得能量，然后再通过假设单位拉力大小、拉力方向、施力时间等变量，通过三角函数建立变量间对应关系，建立非线性规划模型，并通过LINGO进行求解。

2.2 问题二分析

问题二中，给出了九种现实的情形，要得出在不同发力时机和力度下，经过0.1S后鼓面的倾斜角。首先将鼓设为刚体，接着引入刚体力学与刚体运动学的知识。经查阅资料和结合题目，进一步将鼓设为圆筒刚体模型，同时算出鼓的转动惯量。

先分析静止状态下每个队员的力度，然后将整个运动过程分为两个时间段，对每个情况分别在两个时间段内的运动进行分析。先得出每个时间段内鼓的合外力矩，进而得出鼓转动的角加速度，得出鼓转动的角度。最后结合两个时间段的转动情况，得出每个情况下鼓的倾斜角度。

2.3 问题三分析

通过对问题二的分析，可以得到在对称站位的情况下，力度 10N 与提前发力可以看作等效行为，为使得鼓面倾斜角尽可能的小，即在鼓面对角上可能出错的概率尽可能相近，故本题将每个人的出错频率视作其出错概率，通过引入出错贡献率这一概念，即每个点出错的概率都与该点以及左右相邻两点出错的概率相关。最后通过 MATLAB 软件，借助模拟退火算法，得出相对两点贡献率之差的绝对值的和最小情况下的队员站位方案。

2.4 问题四分析

问题四中，要使得球的出射方向竖直向上，需要调整法线的方向，即对鼓的倾斜角做出调整，通过球初始偏转的角度，得出鼓应该偏转的角度。同时通过非线性规划，得出鼓从静止到与球发生碰撞所用的时间以及鼓上升的高度，接着通过反向推导，最终推导出所需要的合外力矩，合外力。

结合问题二分析，指定该合外力矩为倾斜角方向水平投影指向的两位队员的对称面的两位队员产生。其他队员保持原来使鼓平衡的作用力以及统一发力时刻即可。利用投影的夹角，最终给出两种调整策略，并实际分析该策略的施行效果，得出最终结果。

三、 符号说明

符号	说明
$v_{初}$	球鼓脱离瞬间时球的速度
h	球被颠起的高度
h_0	鼓下落最低点距水平位置的距离
n	队员人数
v	鼓与球撞击时的速度
$V_{收}$	球的收尾速度
θ（β）	施力方向与水平面夹角
g	重力加速度，在问题一中取 9.8m/s²，其他问题中取 10N/m
t	鼓从最低点加速至撞击球的时间
t_{-11}	队员提前发力的时机
t_{00}	队员理论发力的时机
t_{11}	经过 0.1s 的时机
T_i	由发力时刻不同产生的时间段
F	队员对绳的拉力
M	合外力矩
α	角加速度
δ_i	i 队员的出错贡献率
δ_e	与 i 相对的队员的出错贡献率

四、 模型假设

1. 假设鼓面与球接触时无阻尼作用。
2. 由于绳与水平面的夹角较小，假设绳对鼓的力是方向不变的恒力。
3. 假设鼓面厚度忽略不计，故可将鼓假设成圆筒刚体模型。
4. 假设绳子与鼓接触点在鼓身的中间。
5. 假设鼓在下降过程中至多可下降的高度为一米。
6. 假设人对绳的拉力等于绳对鼓的作用力。
7. 假设球鼓间的碰撞是完全弹性碰撞。

五、 模型建立与求解

5.1.问题一模型建立与求解

对于第一题，由于是理想条件下，发力时间一致、方向一致、力的大小一致显然是最合理的，但由于本题未对绳子长度进行约束，故对于本题，仅仅将单位队员拉力最少作为最优策略显然不够合理，考虑到模型得实用性，本题将单位队员拉力以及游戏半径得乘积最小作为目标函数，即在满足题目要求的同时，保证

每位队员得出力最小，且游戏占用面积最小

5.1.1 球速度以及加速时间

首先由题可知，本文要求球被颠起的高度至少为 40cm，因此根据能量守恒公式可列方程：

$$\frac{1}{2}m_{球}{v_{初}}^{2}=m_{球}gh+f_{阻} \tag{1.1}$$

其中 $m_{球}$ 为球的质量，$v_{初}$ 为球鼓脱离瞬间时球的速度，g 为重力加速度，h 为球被颠起的高度（即 40cm），f 为球在空中运动过程中受到的空气阻力。

由文献[1]可得，当雷诺数 $10^3<\mathrm{Re}<2*10^5$ 时，球下落得阻力 $f_{阻}$ 与 V^2 成正比，遵守

$$f_{阻}=\frac{1}{2}\rho_{0}C_{d}Sv^{2} \tag{1.2}$$

式中 ρ_0 为空气密度；S 是物体与流体垂直方向得最大横截面积；C_{d} 为空气阻力系数 ，当雷诺数 $10^3<\mathrm{Re}<2*10^5$ 时。C_{d} 约等于 0.4。

故可得能量守恒公式为，

$$\frac{1}{2}m{v_{初}}^{2}=（mg+\frac{1}{v_{初}}\int_{0}^{v_{初}}\frac{1}{2}\rho_{0}C_{d}Sv^{2}dv)h \tag{1.3}$$

其中，

$$\mathrm{m}=0.27\mathrm{kg}\ ,\mathrm{g}=9.8\ \mathrm{m/s}^{2},\rho_{0}=1.293kg/m^{3},C_{d}=0.4,h=0.4m。$$

经过计算得到，

$$\frac{1}{v_{初}}\int_{0}^{v_{初}}\frac{1}{2}\rho_{0}C_{d}Sv^{2}dv=\frac{1}{6}\rho_{0}C_{d}S{v_{初}}^{2}\approx 0.002\mathrm{v}^{2} \tag{1.4}$$

可以发现空气阻力对球运动过程中影响极小，为了简化后续运算，这一部分产生得影响忽略不计。

将 $\mathrm{H}\geq 0.4$ 代入式子可得，

$$\mathrm{v}_{初}\geq\sqrt{2gh}=2.8m/s \tag{1.5}$$

5.1.2 球一次上下循环最少所需时间

由于只考虑球上抛过程中，重力得影响，此时一次循环所需最少时间，

$$t=2t'=\frac{2v}{g}=0.572s \tag{1.6}$$

其中 t 为一次循环得总时间，t' 为向上至最高点得时间，根据上抛运动得对称性可知，t 为 t' 的两倍。

5.1.3 下抛过程中的收尾速度

由于下抛过程中，空气阻力与速度成正比，球并不能一直做加速运动，当球密度近似约等于水时，可得收尾速度，

$$V_{收}=90\sqrt{d} \qquad (1.7)$$

带入可得$V_{收}$ =25.5m/s,远大于球颠起 0.4m 高时得 $V_{初}$=2.8m/s,故不考虑。

5.1.4 同心鼓所需最小碰撞速度

本题不考虑鼓球碰撞时得阻尼问题，而将碰撞过程看作为完全弹性碰撞，通过完全弹性碰撞动量公式可得，

$$v'_{鼓}=\frac{(m_{鼓}-m_{球})v_{鼓}+2m_{球}v_{球}}{m_{球}+m_{鼓}} \qquad (1.8)$$

$$v'_{球}=\frac{(m_{球}-m_{鼓})v_{球}+2m_{鼓}v_{鼓}}{m_{球}+m_{鼓}}$$

5.1.5 同心鼓得相关约束

设同心鼓能下降得最低点距水平点距离为$l_{落}$，可得示意图如下，

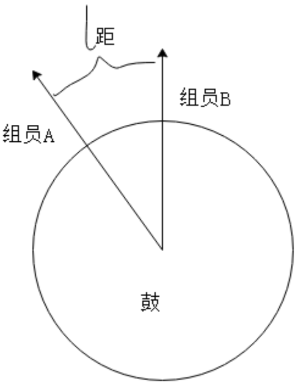

图 5-1 鼓下降至最低点时组员距离示意图

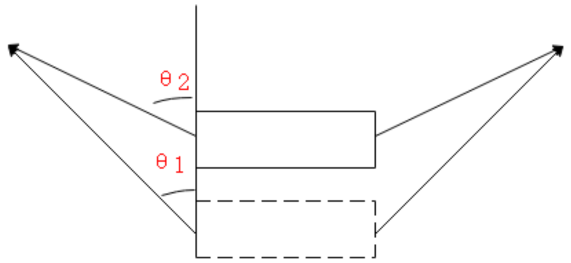

图 5-2 鼓上升时夹角变化示意图

由图 5-1 可得，组员距同心鼓得相对距离为

$$l_{距}=l_{落}\tan\theta, \qquad (1.9)$$

设队员个数为 n，则相邻队员相对鼓得夹角

$$\theta=\frac{360^{0}}{n} \tag{1.10}$$

由正弦定理可得，此时两位队员间间隔

$$l=2l_{距}\sin(\frac{\pi}{n}) \tag{1.11}$$

由队员间距离不得小于 60cm 可得，

$$l_{落}\tan\theta\sin(\frac{\pi}{n})\geq 0.3 \tag{1.12}$$

同时，由于假定绳不具备弹性，故忽略鼓得减速过程，假定鼓在自由下落得至绳子绷紧得一瞬间停下，可得，

$$l_{落}=v'_{鼓}t+\frac{1}{2}gt^{2} \tag{1.13}$$

5.1.6 同心鼓加速过程

由图 5-2 可以发现，在同心鼓向上运动过程中，由于θ角度不断增加，队员对鼓向上运动的加速度也会不断减小，

$$a'=\frac{1}{\theta}\int_{0}^{\theta}\frac{xF}{m_{鼓}}\cos t dt \tag{1.14}$$

其中， F 为单位队员施加在绳子上的恒力，θ为绳子与鼓在垂直方向得夹角，a'为所有队员拉力在垂直方向上的平均合加速度。

但由于鼓本身运动上下位移较小，为简化运算，本文将绳对鼓的作用力看作是方向不变的恒力。

5.1.7 求解所需力最小策略

球首次下落:

由题可知，初始状态时，球位于鼓面中心上方 0.4m，且鼓面处于自由静止状态，根据上述分析可知，此时球与鼓面碰撞时速度为 2.8m/s，到达鼓面所需时间为 0.286s。

由于需要球返回高度大于 0.4m，故球返回速度必须大于 2.8m/s，根据 5.1.4 可得到

$$v_{鼓}=\frac{v'_{球}(m_{球}+m_{鼓})-v_{球}(m_{球}-m_{鼓})}{2m_{鼓}} \tag{1.15}$$

故为了使得球返回速度大于 2.8m/s,鼓速度也必须大于 0.21m/s，同时也需满足队员间最小距离不得小于 0.6m 得限制，且由于题目并没有对鼓可下降高度得限制条件，根据人体平均身高的常识，本题将这个限制定为了 1m，即$l_{落}\leq 1$；

以单位队员得拉力以及游戏占用面积得乘积最为目标函数，可得非线性规划如下，

$$\min FR=\frac{(v+gt)m_{鼓}}{tn\cos\theta}\times\frac{\tan\theta vt}{2} \tag{1.16}$$

$$s.t.\begin{cases} t\le 0.286; \\ v\ge 0.21; \\ n\ge 8;\quad n为整数； \\ 0\le\theta\le 90; \\ vt\le 2; \\ vt\tan\theta\sin(\frac{\pi}{n})\ge 0.6; \end{cases} \tag{1.17}$$

由 lingo 可得到结果为，当队员有 8 人时，每个人在相对垂直平面 51.35 度的方向施力，每人施加 18.1 N,施力时间为 0.286 秒，此时鼓撞击球时的速度可达到 4.38m/s，游戏半径 R 为 0.78m。

5.1.8 球后续运动

根据 5.1.7 中结果，可以得到，鼓在撞击球后得速度应为 3.37m/s，撞击后仍然速度向上，此时鼓做先减速后加速的自由落体运动，由上述分析可以得到此时鼓落至最低点时间为 0.844s，大于球上升下落的总时间，故舍弃。

由于球此后做循环往复运动，以单位队员的拉力以及游戏占用面积的乘积最小作为目标，由上述分析可得非线性规划模型，即

$$\min FR=\frac{(v+gt)m_{鼓}}{tn\cos\theta}\times\frac{\tan\theta vt}{2} \tag{1.18}$$

$$s.t.\begin{cases} vt\le 2; \\ v<3.725; \\ \frac{(3.33v-1.568)g}{7.74}+\sqrt{\frac{vt}{g}}+t<=0.572; \\ vt\tan\theta\sin(\frac{\pi}{n})\ge 0.6; \\ v\ge 0.21; \\ x\ge 8; x为整数； \\ 0\le\theta\le 90; \end{cases} \tag{1.19}$$

由MATLAB可得非线性规划结果为：若以单位队员的拉力以及游戏占用面积的乘积最小作为评判最优标准，则最优人数为8人，此时游戏半径为0.78m，此时球在空中运动周期为0.572s，上升速度为2.8m/s，下降速度为2.8m/s，鼓与球相撞时速度为0.927m/s，撞后保持原来速度并以0.393m/s做向上减速运动，鼓的下落至低点距初始点为0.148m，此时颠起高度0.4m，鼓的下落时间为0.254s，上升时

间为0.318s，单位队员拉力为30.92N，拉力方向离垂直方向79.34度，施力时间0.318s。

即每位队员，第一次在球开始掉落前0.032s时，以30.92N开始拉绳，拉力方向离垂直方向79.34度，施力时间0.318s，此后每当球达到制高点开始降落得0.254s秒后，以30.92N拉扯绳子，拉力方向离垂直方向79.34度，施力时间0.318s，即可保证球一直不落。

5.2 问题二模型的建立与求解

问题二是在非理想的情况下，提出九种现实情形中的情况，即队员之间的发力时机和力度没有达到统一，计算出鼓面的倾斜程度。其中涉及到力学与运动学的内容，故建立基于刚体转动的运动分析模型。

5.2.1 相关物理量

刚体转动的角加速度：

$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \tag{2.1}$$

瞬时角加速度为：

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt} \tag{2.2}$$

由矢量的矢积定义，力矩矢量可用 r 和 F 的矢积表示：

$$M=r*F \tag{2.3}$$

其中，F 为在作用点上施加的力，r 为力对转轴的力臂，本文中为圆心到作用点的距离，即圆的半径。

5.2.2 转动定律

刚体绕定轴转动时，刚体的角加速度与其所受的合外力矩成正比，与转动惯量成反比，即：

$$M=J*\alpha \tag{2.4}$$

5.2.3 圆筒刚体模型

第二题由于不考虑球和鼓面之间的阻尼作用，即假设在外力的作用下，鼓面的形状与大小未发生改变，即鼓内任意两点的距离保持恒定。把鼓理想化为刚体，进一步的通过调查，市面上的同心面一般有两种规格，分别是大号（直径 40cm，厚度 10cm），小号（直径 33cm，厚度 8cm），鼓面的材料为牛皮，厚度为 0.5cm。由于题目规定鼓的直径为 40cm，与大号鼓规格一致。故本文采用大号鼓，且题二不考虑球与鼓面的阻尼作用，只单纯考虑鼓面与球的接触，故不对鼓面性质进行深究。将鼓面厚度忽略不计，所以将鼓简化为圆筒型刚体模型。

如图所示：

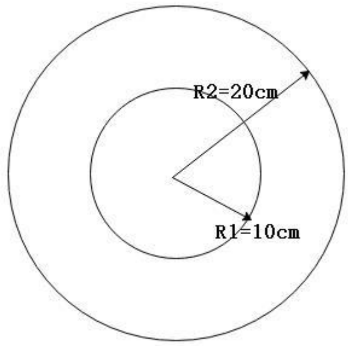

图 2-1 圆筒的刚体模型

5.2.4 初始位置受力分析

题目二要求队员人数为 8，本文将 8 人的站队分布定位均匀分布，以便进行受力分析。

并给 8 个人编号，如图所示：

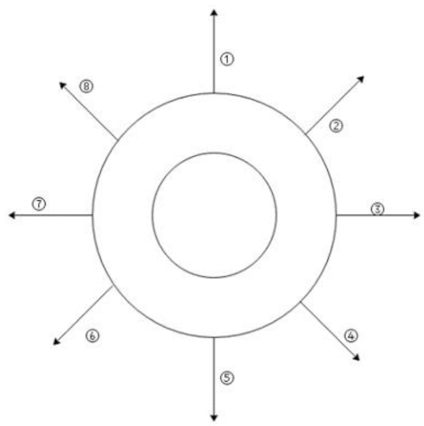

图 2-2 鼓的初始受力分析

关于均匀站位的可行性已经在第一题证明得出。受力分析如下：

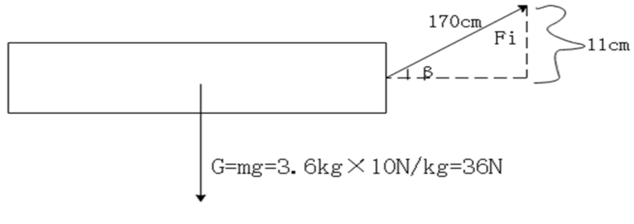

图 2-3 均匀站位时单人受力分析

i 代表每一个人的编号，F_i 为每一个人对绳子的作用力，题中未给出绳子材料的各项参数，本文将该作用力视为人对鼓的作用力。依题意，鼓在静止情况下的受力情况为：

$$\begin{cases}竖直方向:\sum_{i=1}^{8}F_i * sin\ \ \beta = G \\ 水平方向:\sum_{i=1}^{8}F_i * cos\ \ \beta = 0 \\ sin\ \ \beta = \frac{0.11}{1.7}\end{cases} \quad (2.5)$$

代入数据，解得：F_i =69.55N。

即鼓在静止状态下，每个人的用力大小为 69.55N。

5.2.5 刚体的转动

刚体的运动可分为平动和转动，转动分定轴与非定轴转动。本文将鼓视为刚体，故将鼓的运动视为刚体的运动。上文已经将鼓简化为圆筒刚体模型，计算出圆筒的转动惯量：

$$J = \frac{m}{2} *（R_2^2 + R_1^2）, \quad (2.6)$$

得出结果：

$$J = 0.09kg * m^2 \quad (2.7)$$

前面已经将鼓设为刚体，鼓的倾斜是由于鼓发生转动，由此可以引入力矩的概念，用以描述力对鼓转动的作用。由于有 8 个力作用于鼓上面，于是通过计算这 8 个力的合力矩来描述鼓的转动情况，从而得出鼓的倾斜角度。

依题二可知，不同的发力时机和力度将对鼓的转动产生影响，根据表一中的九组情况，本文将时间划分为两个时间段，T_1是由t_{-11}到t_{00}，T_2是由t_{00}到t_{11}，如果有出现提前发力的情况，则需要经历T_1，T_2为所有情况都必须经历。

先分析无T_1的情况：为情况一、二。

情况一：情况一中无出现提前发力的情况，故T_1记为 0，分析T_2，从 0 秒开始，所有队员同时发力，有 80N 和 90N 两种力度。上面已经得出鼓静止时，每个队员只需要 69.55N 的力度。因为人员的站位为均匀站位，每个人与正对面的人关于鼓的直径对称，可由图 2-2 看出。人员可分为对称的四组：①和⑤，②和⑥，③和⑦，④和⑧。后三组组间成员的力度相等，总体受力分析如下图：

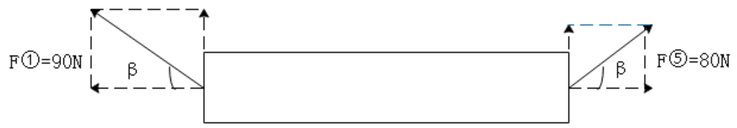

图 2-4 力不平衡时受力分析图

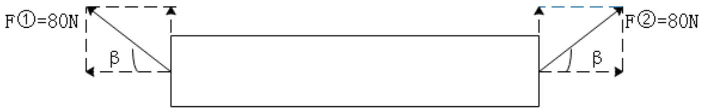

图 2-5 力平衡时受力分析图

水平方向：

后三组水平分力相互抵消，得

$$F_{②}cos\beta+F_{⑥}cos\beta+F_{③}cos\beta+F_{⑦}cos\beta+F_{④}cos\beta+F_{⑧}cos\beta=0 \quad (2.8)$$

有①和⑤这一组存在不平衡的情况，故水平分力为：

$$F_x = F_{①}cos\beta\text{-}F_{⑤}cos\beta \quad (2.9)$$

得出结果：$F_x\approx$17.0N,水平方向的力只让鼓在水平面进行移动，没有产生转动的力矩，故对鼓的倾斜角没影响，不考虑F_x。

竖直方向：

由于初始状态鼓为静止状态，由上文可知，只要每个人的力度达到 69.55N 就能保持平衡，而表一中的力度大小为 80 或者 90，先计算出竖直方向上的合力，由于站位为均匀站位，将重力均分到每一个作用点上，对于初始力度为 80N 的作用点，竖直方向上合力为：

$$F_{80y} = F_{80i} * sin\beta - \frac{G}{8} = 0.68\text{牛顿} \quad (2.10)$$

对于初始力度为 90N 的作用点，竖直方向上合力为：

$$F_{90y} = F_{90i} * sin\beta - \frac{G}{8} = 1.32\text{牛顿} \quad (2.11)$$

假如 8 个力竖直向上的分力都相同，合外力矩为 0，鼓做的是一个平动的运动，而当出现发力不均衡时，力度大的将分出一部分力，这份力的力矩与对称的力的力矩相抵消，剩下的力产生的力矩就是合外力矩。这些力将对鼓的转动产生影响，如图所示：

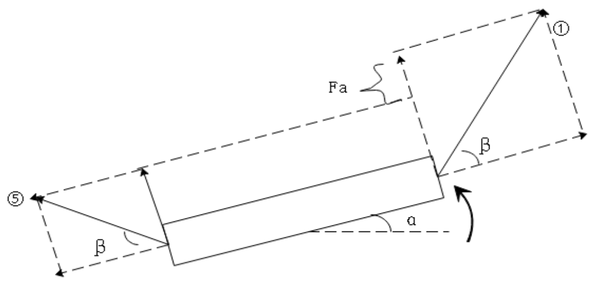

图 2-6 鼓发生转动时受力分析

假设在 0.1 秒内绳子与鼓之间的夹角不变，作用力的大小不变。对九个情况进行分析：

情况一：发力时机：统一，力度：①的力度为 90N, 第一阶段：0(即无)

第二阶段：

（2.12）

$$F_1=(F_{①}-F_{⑤})*\frac{h_0}{l_0}$$
$$M_1=r*F_1$$
$$M_1=J*\alpha_1$$
$$\theta=\frac{1}{2}*\alpha_1*t^2$$

得出结果：$\theta*\frac{180}{\pi}=0.41^{\circ}$

情况二：发力时机：统一，力度：①和②的力度为 90N, 第一阶段：0(即无)

第二阶段：与情况一类似，得出结果：0.82°

情况三：与上面情况类似，得出结果：0.82°

情况**四**：发力时机：不统一，①提前发力，力度：统一, 第一阶段：有

第一阶段：

（2.13）

$$F_4=(F_{①}-\frac{G}{8})*\frac{h_0}{l_0}$$
$$M_4=r*F_1$$
$$M_4=J*\alpha_4$$
$$\theta=\frac{1}{2}*\alpha_4*t^2$$

得出第一阶段转动的角度： $\theta*\frac{180}{\pi}=0.43^{\circ}$

第二阶段：所有人力度相等，不产生转动。得出结果：0.43° 。

情况**五六七**与上述情况类似，得出答案，分别为： 0.85° ，0.86° ，1.25°

情况**八**：发力时机：不统一，⑤和⑧提前发力；力度：①和④的力度为 90N,

第一阶段：有；

第一阶段：鼓绕轴一转动 0.85° 。如图示意：

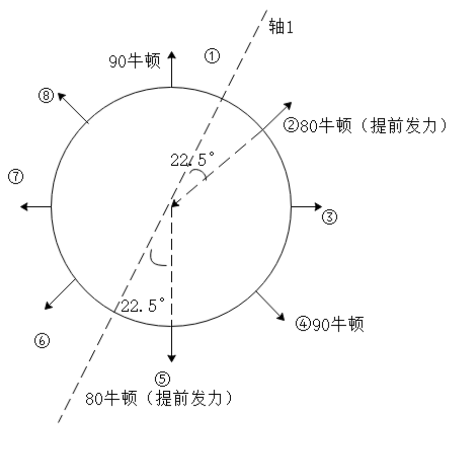

图 2-7 第一阶段示意图

第二阶段：鼓绕轴二转动 0.82°

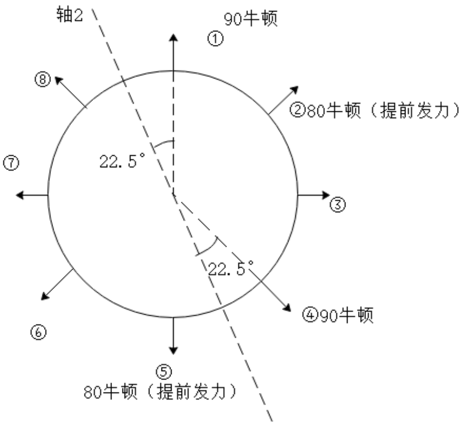

图 2-8 第二阶段示意图

由几何知识结合空间，得出最终倾斜角为 1.42°

情况**九**：发力时机：不统一，⑤和⑧提前发力；力度：①和④的力度为 90

第一阶段：有；如图示意：

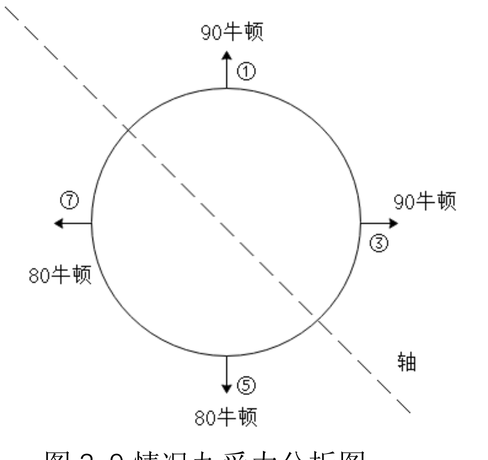

图 2-9 情况九受力分析图

第一阶段：与上述类似，倾斜角为 0.85°

第二阶段：与上述类似，倾斜角为 0.82°

情况九第一阶段沿轴逆时针转动 0.85°，第二阶段沿轴顺时针转动 0.82°，故最后的倾斜角度为 0.03°。

5.2.6 总结

总结如下表所示：

表 1 九种情况倾斜角表

序号	发力时机	力度	第一阶段	第二阶段	倾斜角
1	统一	①为 90N	0	0.41°	0.41°
2	统一	①②为 90N	0	0.82°	0.82°
3	统一	①④为 90N	0	0.82°	0.82°
4	①提前发力	统一	0.43°	0	0.43°
5	①②提前发力	统一	0.85°	0	0.85°
6	①④提前发力	统一	0.86°	0	0.86°
7	①提前发力	①为 90N	0.84°	0.41°	1.25°
8	②⑤提前发力	①④为 90N	0.85°	0.82°	1.42°
9	⑤⑧提前发力	①④为 90N	0.85°	0.82°	0.03°

5.3 问题三的求解

根据问题二第九组中得出的结果可以发现，在对称站位的情况下，一方的用力增大 10N 和一方提前 0.1S 发力，最后鼓面的倾斜角并不明显，意味着这两者产生的效果是等效的，故本题将其看作为等效行为。

本题将问题二表格中每位队员的出错频率看作是出错概率，计算第二题九种情况中每个队员的出错概率，结果如下表：

表 2 九种情况下每个队员出错率

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
概率	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{18}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{18}$

为了使得鼓面倾斜角尽可能的小，即对角出错概率应尽可能的接近，本文对队员的站位进行重新规划，以达到此目的。为了更清晰的表达某一站位上出错的概率，本文引入出错贡献率δ的概念，即每个队员出错时对于鼓上某一站位的影响率。规定队员对于自身站位的δ_i为 1，相邻队友对他的$\delta_{i'}$为$cos\,45^{\circ}$，即$\frac{\sqrt{2}}{2}$。相间的队友对他的δ为$cos\,90^{\circ}$，即没有贡献，每个站位上的出错概率$\delta = \delta_i + \delta_{i'} + \delta_{i''}$。如图所示：

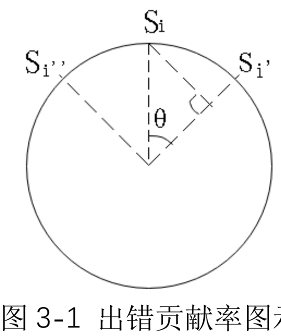

图 3-1 出错贡献率图示

欲使得鼓面偏转角从概率学上达到最小，即每一组对称站位的δ之差的绝对值的和达到最小，即：

$$\min\sum_{i,e=1}^{8}\left|(\delta_i+\delta_{i'}+\delta_{i''})-(\delta_e+\delta_{e'}+\delta_{e''})\right| \tag{3.1}$$

通过模拟退火算法得出结果（代码详见附录 2：monituihuo.m）：

```
最优解:

S =

     1     6     7     2     4     5     8     3
```

图 3-2MATLAB 运行结果图

如图所示调整站位：

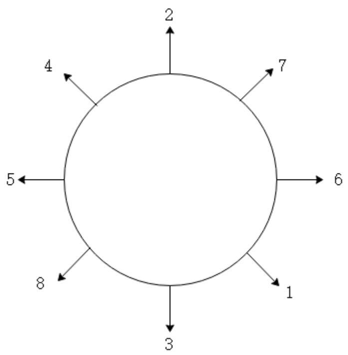

图 3-3 调整好的站位示意图

该情况下总体出错概率密度最为对称，即鼓面偏转角从概率学上达到最小，故得出此调整方案。

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 策略的制定

问题四中设定的人员为 10，假设人员站位为均匀站位，如下图所示：

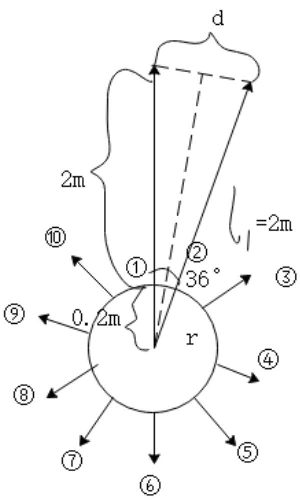

图 4-1 人员站位示意图

$$d = 2*(l_1 + r)*sin(\frac{36^{\circ}}{2}), \tag{4.1}$$

得出结果：队员之间距离 $d = 1.36m = 136cm \geq 60cm$，满足题意。

根据题四，鼓保持静止，静止情况的分析与第二题的分析类同，每个人需要提供的力如图所示：

对于第四题，由题意可画示意图如下，

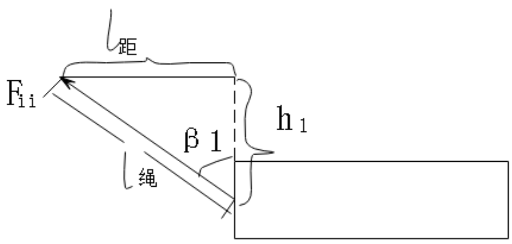

图 4-2 每个人受力分析

其中

$$l_{绳}=2m, h_1=\cos\beta_1 * l_{绳}, l_{距}=\sin\beta_1 * l_{绳} \tag{4.2}$$

又因为此时队员人数为 10 人，由第一题证明可得，

$$2\sin\beta_1 * \sin(\frac{\pi}{10}) \geq 0.3 \tag{4.3}$$

同时因为球反弹高度为 0.6m，可得

$$v_{初} \geq \sqrt{2gh} = 3.43m/s \tag{4.4}$$

$$t = 2t' = \frac{2v}{g} = 0.7s \tag{4.5}$$

$$v_{鼓} = \frac{v'_{球}(m_{球}+m_{鼓})-v_{球}(m_{球}-m_{鼓})}{2m_{鼓}} = 0.257m/s \tag{4.6}$$

以单位队员的拉力最小作为目标，由上述分析可得非线性规划模型，即

$$\min F=\frac{(v_{鼓}+gt)m_{鼓}}{tx\cos\beta_1} \tag{4.7}$$

$$s.t.\begin{cases} v<4.542; \\ \dfrac{(3.33v-1.8522)g}{7.74}+2\sqrt{\dfrac{\cos\beta_1}{g}}+t<=0.7; \\ 2\sin\beta_1\sin(\dfrac{\pi}{10})\geq 0.3; \\ v\geq 0.257; \\ x=10; \\ 0\leq\theta\leq 90; \end{cases} \tag{4.8}$$

该过程通过 lingo 软件完成（详见附录），得出结果：

Variable	Value	Reduced Cost
T	0.1551733	0.000000
V	0.2570000	0.000000
N	10.00000	0.000000
Q	0.5068323	0.000000
F	4.717260	0.000000
D	29.03935	0.000000
G	-0.2751912	0.000000

图 4-3lingo 结果

$$t_{60}=T=0.16s, \tag{4.9}$$

$$h_{60}=D=29.04cm=0.29m$$

$$F_{ii}*\sin\beta_1=\frac{G}{10} \tag{4.10}$$

$$\sin\beta_1=\frac{h_1}{l_{绳}}$$

得出静止状态下每个人的作用力 F_{ii} 为:24.8N

依题意，球的入射角度与竖直方向产生1°的倾斜角，倾斜的投影与两位队员的夹角为 1：2，故在球下落的时候，要调整鼓的倾斜角度，使其法线发生偏移，从而使得球沿原来的法线方向射出。如图所示：

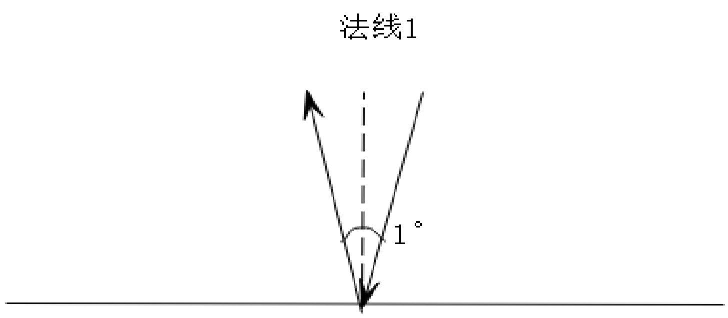

图 4-3 鼓水平时球的入射角与出射角

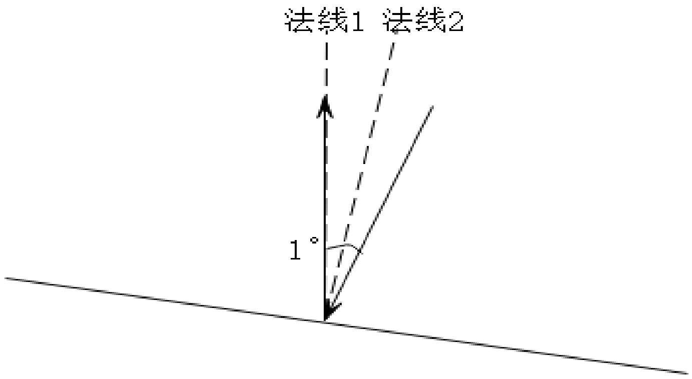

图 4-4 鼓倾斜时球的入射角与出射角

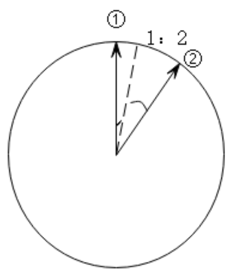

图 4-5 倾斜方向水平投影与两队员形成的夹角

故要使鼓面发生倾斜，使得法线 2 与竖直方向产生 0.5° 的倾斜，使得入射的球能沿法线一出射。设定倾斜的投影在①和②队员之间，则根据问题二，需要制定和①和②队员关于直径对称的⑥和⑦队员的发力时机和力度，且要保证球的反弹高度大于 60cm.

将 0.5° 转化为弧度制，即 $0.5^{\circ}=0.5*0.0175$ 弧度，即 $\theta_1=0.00875$ 弧度

由 $\theta_1=\frac{1}{2}*\alpha_{60}*t_{60}^2$，得出鼓的角加速度 α_1；由转动定律 $M_{60}=J*\alpha_{60}$，得出 M_{60}；由 $M_{60}=r*F_{60}$，得出所需要的合外力 $F_{60}=0.15\text{N}$

又如下图所示：

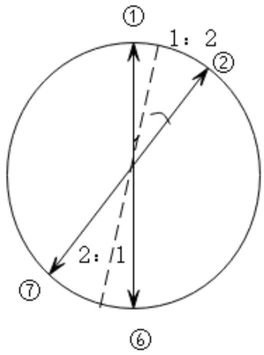

图 4-6 ⑥、⑦与投影延长线形成的夹角比示意图

需要⑥和⑦两个队员的合力距以及合力 0.15N。

故提供两种调整方式：

方式一，只改变力不改变发力时刻：⑦的力度为 24.9N，⑥的力度为 24.85N，其余人保持 24.8N 的力度。

方式二，只改变发力时刻不改变力度：⑦和⑥发力时刻提前 0.08S，其他人不提前。

5.4.2 策略实施效果的分析

在现实中，尽量要求所有队员的发力时机和力度保持一致，这是理想状态。如果出现有一些队员有出现提前发力或者力度较大的情况时，尽量安排这些队员的站位关于鼓的直径对称。即：力度较大的人呈对称站位；提前发力的人呈对称站位；力度较大的人与提前发力的人呈对称站位。对于因为发力时机和力度不同导致鼓发生的水平位移可能会使球无法触碰到鼓面的情况，可得出这种差异带来的水平上的位移量，由于本题无限制球一定要落到鼓面的中间，所以，如果位移量较小，可忽略这种情况；若位移量较大，需计算该位移方向上队员应该移动的步数。

总体来说，该策略属于动态的规划，能根据每个队员的特点进行分析，从站位到需要调整步数都做了规划，实施效果比较可观。

六、 模型的优缺点与改进

6.1 模型的优点

（1）本文充分考虑空气阻力这一因素，使得分析更加全面，结果更加准确。

（2）本文模型的建立以及一系列的求解都严格遵循力学、运动学的理论知识，建立在严密理论知识上的模型和推导，具有较好的适用性。

（3）在问题三中引入出错贡献率这一概念，概念新颖，具有不错的延伸性。

6.2 模型的缺点

本文中没有考虑鼓面与球之间的阻尼，即忽略鼓面与球接触后产生的形变对

两者运动产生的影响，具有一定的误差。

6.3 模型的改进

由于时间关系，未来可做的深入研究如下：

（1）在研究鼓与球的碰撞过程中，将排球的形变看成弹性形变，后续可以将排球的形变和摩擦热量的损失考虑进模型中运算。

（2）在建立力学模型的时候，对鼓面的材料和绳子材质进一步分析，将弹性系数、延展性等多种因素加入考虑。

（3）将鼓面分为充气膜结构和张拉膜结构，考虑鼓面与球之间的阻尼，得出后续球和鼓面的运动情况。结合文中的求解过程，可使模型的力学分析、运动分析更加严密，得出的结果更加精确。能对具体的情况进行具体分析，具有更好的推广性。

七、 参考文献

[1] 高德文,赵昶.雨滴下落的形状和收尾速度[J/OL].物理与工程:1-6.http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.4483.O3.20190723.1428.004.html。

[2]张宇,赵远,孟庆鑫,张伶莉,《大学物理》,北京:高等教育出版社,2015,P56-69。

[3]周衍柏,《理论力学教程》,北京:高等教育出版社,2018,P108-151。

[4]马文蔚,《物理学》,北京:高等教育出版社,2006，P99-129。

[5]司守奎,《数学建模算法与应用》,北京:国防工业出版社,2011.P21-31。

[6]李德明，陈昌民,《经典力学》,北京:高等教育出版社,2006,P104-110。

[7]哈尔滨工业大学理论力学教研室,《理论力学（Ⅰ）》,北京:高等教育出版社,2009,P259-275。

[8] 吕超，蹦床运动的运动学模拟与分析，https://www.docin.com/p-1459792059.html，2019.9.14

八、 附录

附录 1：问题一 lingo 代码

```
model:
[maile]min=((35.28*t+3.6*v)/(t*n*@cos(q)))*(@tan(q)*v*t/2);
@gin(n);n>=8;
v*t<=2;
(0.5*(v/t)*(t^2)*@tan(q))*@sin(3.14159265359/n)>=0.3;
v>=0.21;
(3.33*v-0.56*2.8)/3.87<=2.8;
q<1.57079632679;
R=(@tan(q)*v*t/2);
F=((35.28*t+3.6*v)/(t*n*@cos(q)));
```

```
D=q*180/3.14159265359;
(((3.33*v-0.56*2.8)/3.87)/4.9)+@sqrt(v*t/9.8)+t<=0.572;
G=(3.33*v-0.56*2.8)/3.87;
end
```

附录 2：问题三代码 monituihuo.m

```
clear all
clc

X = [5/9 3/18 0 2/9 1/9 0 0 1/18];

N = size(X,2);


T0 = 1e10;
Tend = 1e-30;
L = 2;
q = 0.9;
Time    =    ceil(double(solve([num2str(T0)    '*(0.9)^x    =
',num2str(Tend)])));

count = 0;
Obj = zeros(Time,1);
track = zeros(Time,N);


disp('初始种群中的一个随机值:')
S1 = randperm(N)

while T0 > Tend
    count = count + 1;      %更新迭代次数
    temp = zeros(L,N+1);
    % 1. 产生新解
    S2 = NewAnswer(S1);
    % 2. Metropolis 法则判断是否接受新解
    [S1,R] = Metropolis(S1,S2,X,T0);  %Metropolis 抽样算法
    %%
    % 3. 记录每次迭代过程的最优路线
    if count == 1  || R <Obj(count-1)
Obj(count) = R;
    else
Obj(count) = Obj(count-1);
    end
    track(count,:) = S1;
    T0 = q * T0;      %降温
end
```

```
disp('最优解:')
S = track(end,:)
```

附录 3：问题三代码 Metropolis.m

```
function [S,R] = Metropolis(S1,S2,X,T)

R1 = PathLength(S1,X);

R2 = PathLength(S2,X);

dC = R2 - R1;    %计算能力之差
if dC< 0       %如果能力降低接受新路线
    S = S2;
    R = R2;
elseifexp(-dC/T) >= rand   %以 exp(-dC/T)概率接受新路线
    S = S2;
    R = R2;
else        %不接受新路线
    S = S1;
    R = R1;
end
```

附录 3：问题三代码 NewAnswer.m

```
function S2 = NewAnswer(S1)
%% 输入
% S1:当前解
%% 输出
% S2：新解

N = length(S1);
S2 = S1;
a = round(rand(1,2)*(N-1)+1); %产生两个随机位置用来交换
W = S2(a(1));
S2(a(1)) = S2(a(2));
S2(a(2)) = W;        %得到一个新排位
```

附录 3：问题三代码 PathLength.m

```
function Length = PathLength(Route,X)
tan45=sqrt(2)/2;
n = zeros(1,size(Route,2));
for i = 1:size(Route,2)
    if i==1

n(1)=X(Route(1))+tan45*X(Route(8))+tan45*X(Route(2));
elseif i==8

n(8)=tan45*X(Route(1))+X(Route(8))+tan45*X(Route(7));
    else
```

```
n(i)=X(Route(i))+tan45*X(Route(i+1))+tan45*X(Route(i-1));
    end
end
Length                                                          =
abs(n(1)-n(5))+abs(n(2)-n(6))+abs(n(3)-n(7))+abs(n(4)-n(8
));
Length
```

附录 3：问题四 lingo 代码

```
model:
[maile]min=((35.28*t+3.6*v)/(t*n*@cos(q)));
@gin(n);n=10;
2*@sin(q)*@sin(3.14159265359/n)>=0.3;
v>=0.257;
(3.33*v-0.56*3.43)/3.87<=3.43;
q<1.57079632679;
F=((35.28*t+3.6*v)/(t*n*@cos(q)));
D=q*180/3.14159265359;
(((3.33*v-1.8522)/3.87)/4.9)+2*@sqrt(@cos(q)/9.8)+t<=0.7;
@free(G);G=(3.33*v-0.56*3.43)/3.87;
end
```