

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Τσίρης
Αριθμός Μητρώου: 1115201700173

3) Επίλυση του $Ax=b$ και υπολογισμός του A^{-1} (μέθοδος Jordan)

Εφαρμογή	Σφάλμα $\ \delta x\ _{\infty}/\ x\ _{\infty}$	Υπόλοιπο $\ \delta r\ _{\infty}/\ x\ _{\infty}$	Αριθμός Συνθήκης $\kappa(A)$
1	1.77635683940025e-15	7.105427357601002e-15	13.31788341571989
2	5.843218175982656e-08	9.999334693588935e-12	15257575538.06004

Σχόλια:

- Τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον παραπάνω πίνακα είναι ενδεικτικά της ευαισθησίας του x στις μεταβολές του πίνακα A και του διανύσματος b .
- Το σφάλμα $\|\delta x\|_{\infty}/\|x\|_{\infty} = \|x - \tilde{x}\|_{\infty}/\|x\|_{\infty}$ είναι η απόσταση του \tilde{x} από το x , κανονικοποιημένη ως προς $\|x\|$. Δηλαδή είναι ενδεικτική της διαταραχής στο διάνυσμα x .
- Το υπόλοιπο $\|\delta r\|_{\infty}/\|x\|_{\infty} = \|b - A\tilde{x}\|_{\infty}/\|x\|_{\infty}$ είναι η απόσταση της τιμής του $\tilde{b} = A\tilde{x}$ που προέκυψε κατά την επίλυση (με την μέθοδο Jordan με μερική οδήγηση) από το διάνυσμα b , κανονικοποιημένη ως προς $\|x\|$. Δηλαδή είναι ενδεικτική της διαταραχής στο διάνυσμα b .
- Παρατηρούμε ότι στην εφαρμογή 1 μικρή διαταραχή στο διάνυσμα b ($\|\delta r\|_{\infty}/\|x\|_{\infty} = 7.105427357601002e-15$) έχει ως αποτέλεσμα μικρή διαταραχή στο x ($\|\delta x\|_{\infty}/\|x\|_{\infty} = 1.77635683940025e-15$). Αντιθέτως, στην εφαρμογή 2 παρατηρούμε ότι μικρή διαταραχή στο διάνυσμα b ($\|\delta r\|_{\infty}/\|x\|_{\infty} = 9.999334693588935e-12$) έχει ως αποτέλεσμα τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη διαταραχή στο x ($\|\delta x\|_{\infty}/\|x\|_{\infty} = 5.843218175982656e-08$). Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι ο πίνακας A στην 2 είναι πλησιέστερος σε ιδιάζουσα μορφή από τον αντίστοιχο πίνακα A της εφαρμογής 1.
- Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι αν ο A είναι ιδιάζων, τότε για ορισμένα b δεν θα υπάρχει λύση και για άλλα b η λύση δεν θα είναι μοναδική. Έτσι, εάν ο A είναι σχεδόν ιδιάζων μπορούμε να περιμένουμε ότι μικρές μεταβολές σε A και b προκαλούν μεγάλες μεταβολές στο x . Στο άλλο άκρο, αν ο A είναι ταυτοτικός τότε οι b και x θα είναι το ίδιο διάνυσμα. Έτσι, εάν ο A είναι σχεδόν ταυτοτικός, μικρές μεταβολές σε A και b θα επιφέρουν αντίστοιχα μικρές μεταβολές στο x .
- Παρατηρούμε ότι ο αριθμός συνθήκης στην εφαρμογή 1 είναι σχετικά μικρός ($\kappa(A) = 13.31788341571989$), ενώ στην εφαρμογή 2 είναι σχετικά μεγάλος ($\kappa(A) = 15257575538.06004$). Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι αποτελεί μέτρο της εγγύτητας ενός πίνακα σε ιδιάζουσα μορφή. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από την θεωρία.
- Να σημειωθεί ότι παρόλο που η αριθμητική τιμή του $\kappa(A)$ εξαρτάται από την νόρμα (όπως εξηγείται παρακάτω), το είδος της νόρμας δεν έχει ιδιαίτερη σημασία γιατί ενδιαφερόμαστε για εκτίμηση της τάξης μεγέθους.
- Όπως φαίνεται και στην εκτέλεση του κώδικα, ο αριθμός συνθήκης $\kappa(A)$ μπορεί να υπολογιστεί και ως το γινόμενο της νόρμας του A με την νόρμα του A^{-1} .